

PHarr XCPC ex Templates

PHarr

SMU

November 4, 2024

Contents

编程技巧和基础算法	2
Linux 下运行脚本	2
数据结构	2
图论	2
差分约束系统	2
数学知识	3
计算几何	3
博弈论	4
字符串	5
后缀自动机	5
动态规划	5

编程技巧和基础算法

Linux 下运行脚本

将以下脚本保存为 `run.sh`，如果要编译则 `./run.sh A.cpp`。

如果遇到了权限不足的情况可以 `chmod +x ./run.sh` 或者使用 `sudo`

还有一种使用方法是 `bash ./run.sh A`

```
1 #!/bin/bash
2 g++ $1.cpp -o $1 -g -O2 -std=c++20 -Wl,--stack=268435456 \
3 -Wall -fsanitize=undefined -fsanitize=address \
4 && echo compile_successfully >&2 && ./ $1
```

以下是一个可以在 MAC OS 上使用的版本

```
1 #!/bin/zsh
2 g++-11 $1.cpp -o $1 -g -O2 -std=c++20 \
3 -Wall -fsanitize=undefined -fsanitize=address \
4 && echo compile_successfully >&2 && ./ $1
```

数据结构

图论

差分约束系统

定义

差分约束系统是一种特殊的 n 元一次不等式组，它包含 n 个变量 x_1, x_2, \dots, x_n 以及 m 个约束条件，每个约束条件是由两个其中的变量做差构成的，形如 $x_i - x_j \leq c_k$ ，其中 $1 \leq i, j \leq n, i \neq j, 1 \leq k \leq m$ 并且 c_k 是常数（可以是非负数，也可以是负数）。我们要解决的问题是：求一组解 $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$ ，使得所有的约束条件得到满足，否则判断出无解。

差分约束系统中的每个约束条件 $x_i - x_j \leq c_k$ 都可以变形成 $x_i \leq x_j + c_k$ ，这与单源最短路中的三角形不等式 $dist[y] \leq dist[x] + z$ 非常相似。因此，我们可以把每个变量 x_i 看做图中的一个结点，对于每个约束条件 $x_i - x_j \leq c_k$ ，从结点 j 向结点 i 连一条长度为 c_k 的有向边。

注意到，如果 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 是该差分约束系统的一组解，那么对于任意的常数 d ， $\{a_1 + d, a_2 + d, \dots, a_n + d\}$ 显然也是该差分约束系统的一组解，因为这样做差后 d 刚好被消掉。

过程

设 $dist[0] = 0$ 并向每一个点连一条权重为 0 边，跑单源最短路，若图中存在负环，则给定的差分约束系统无解，否则， $x_i = dist[i]$ 为该差分约束系统的一组解。

性质

一般使用 Bellman-Ford 或队列优化的 Bellman-Ford（俗称 SPFA，在某些随机图跑得很快）判断图中是否存在负环，最坏时间复杂度为 $O(nm)$ 。

如果题目给定了一个源点，则不需要建立超级源点。

```
1 // luogu P1993
2 // 有三种约束条件
3 // x[a] >= x[b] + c -> x[b] - x[a] <= -c -> add(a, b, -c)
4 // x[a] <= x[b] + c -> x[a] - x[b] <= c -> add(b, a, c)
5 // x[a] == x[b] -> x[a] - x[b] <= 0 and x[b] - x[a] <= 0 -> add(a, b, 0), add(b, a, 0)
6 #include <bits/stdc++.h>
7
8 using namespace std;
9
10 const int inf = INT_MAX / 2;
11
12 using vi = vector<int>;
13 using pii = pair<int, int>;
14
15 int main() {
```

```

16 ios::sync_with_stdio(false), cin.tie(nullptr);
17 int n, m;
18 cin >> n >> m;
19
20 vector<vector<pii>> e(n + 1);
21 for (int op, a, b, c; m; m--) {
22     cin >> op;
23     if (op == 1) {
24         cin >> a >> b >> c;
25         e[a].emplace_back(b, -c);
26     } else if (op == 2) {
27         cin >> a >> b >> c;
28         e[b].emplace_back(a, c);
29     } else {
30         cin >> a >> b;
31         e[a].emplace_back(b, 0);
32         e[b].emplace_back(a, 0);
33     }
34 }
35
36 for (int i = 1; i <= n; i++)
37     e[0].emplace_back(i, 0);
38
39 vector<int> dis(n + 1, inf), vis(n + 1), tot(n + 1);
40 dis[0] = 0, vis[0] = 1, tot[0]++;
41 bool ok = true;
42 queue<int> q;
43 q.push(0);
44 while (not q.empty() and ok) {
45     int x = q.front();
46     q.pop();
47     vis[x] = 0;
48     for (auto [y, w]: e[x]) {
49         if (dis[y] <= dis[x] + w) continue;
50         dis[y] = dis[x] + w;
51         if (vis[y] != 0) continue;
52         vis[y] = 1;
53         q.push(y);
54         tot[y]++;
55         if (tot[y] > n) {
56             ok = false;
57             break;
58         }
59     }
60 }
61 }
62
63 if (ok) cout << "Yes\n";
64 else cout << "No\n";
65 return 0;
66 }

```

数学知识

计算几何

已知正方形对角线两点坐标，求另外两点坐标

按照顺时针方向，正方形上四点 A, B, C, D ，两对角线交点 O 。现在已知 $A(ax, ay), C(cx, cy)$ 求另外两点坐标。

令 $\vec{v} = \frac{C-A}{2} = (\frac{cx-ax}{2}, \frac{cy-ay}{2})$ ，则有 $O = A + \vec{v} = C - \vec{v} = (ax + vx, ay + vy) = (cx - vx, cy - vy)$

根据正方形的对称性可知

$$B = (ox - vy, oy + vx) = (ax + vx - vy, cy + vx - vy) D = (ox + vy, oy - vx) = (cx - vx + vy, ay - vx + vy)$$

令 $vp = vx - vy = \frac{cx-ax-cy+ay}{2}$ 分别代入上式子可得

$$B = (ax + vp, cy + vp) C = (cx - vp, ay - vp)$$

计算三角形面积

对于一个三角形记 $\vec{A} = \vec{ca}, \vec{B} = \vec{cb}$, 三角形的面积就是 $\frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$

多边形的面积

假设 n 个点的多边形, n 个点按照逆时针顺序标记为 $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$, 任取一个辅助点记为 O , 记向量 $\vec{v}_i = p_i - O$ 。那么这个多边形的面积可以表示为

$$S = \frac{1}{2} \sum \vec{v}_i \times \vec{v}_{(i+1) \bmod n}$$

博弈论

Lasker's Nim Game

n 堆石子, 每次玩家可以从一堆石子中取走若干个石子, 或者把一堆石子分成两个非空的堆

考虑暴力的求解每一堆石子的 SG 函数

$$SG(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \text{mex}\{SG(0)\} = 1 & x = 1 \\ \text{mex}\{SG(x-1), SG(x-2), \dots, \text{mex}\{SG(y) \oplus SG(z) | (y > 0 \wedge z > 0 \wedge y+z=0)\}\} & x \geq 2 \end{cases}$$

然后我们打表找规律可以得到

$$SG(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x & x = 4k+1 \vee x = 4k+2 \\ x \oplus 1 & x = 4k+3 \vee x = 4k+4 \end{cases}$$

移动棋子

有一个 $1 \times n$ 的棋盘, 其中每个格子可以有多个棋子, 每次可以选择一个棋子, 将其移动到更左边的任意一个格子, 两个人轮流移动, 不能移动则输。

考虑每一个棋子的 SG 函数。一个棋子如果在从左向右第 $i (i \geq 0)$ 个格子, 则 $SG(i) = i$ 。

[HNOI2007] 分裂游戏

有 n 堆石子, 每堆有 a_i 个石子, 保证 $0 \leq n \leq 21, 0 \leq a_i \leq 10^4$ 。两个玩家轮流操作, 每次可以从第 i 堆拿出一个石子, 并在 $j, k (i < j \leq k \leq n)$ 堆中各放入一个石子。不能操作的人输。

求出每一个石子的 SG 函数, 一个在位置 i 的石子 $SG(i) = \text{mex}\{SG(l) \oplus SG(r) | i < j \leq k \leq n\}$ 。可以 $O(N^3)$ 预处理每一个石子的 SG 函数。

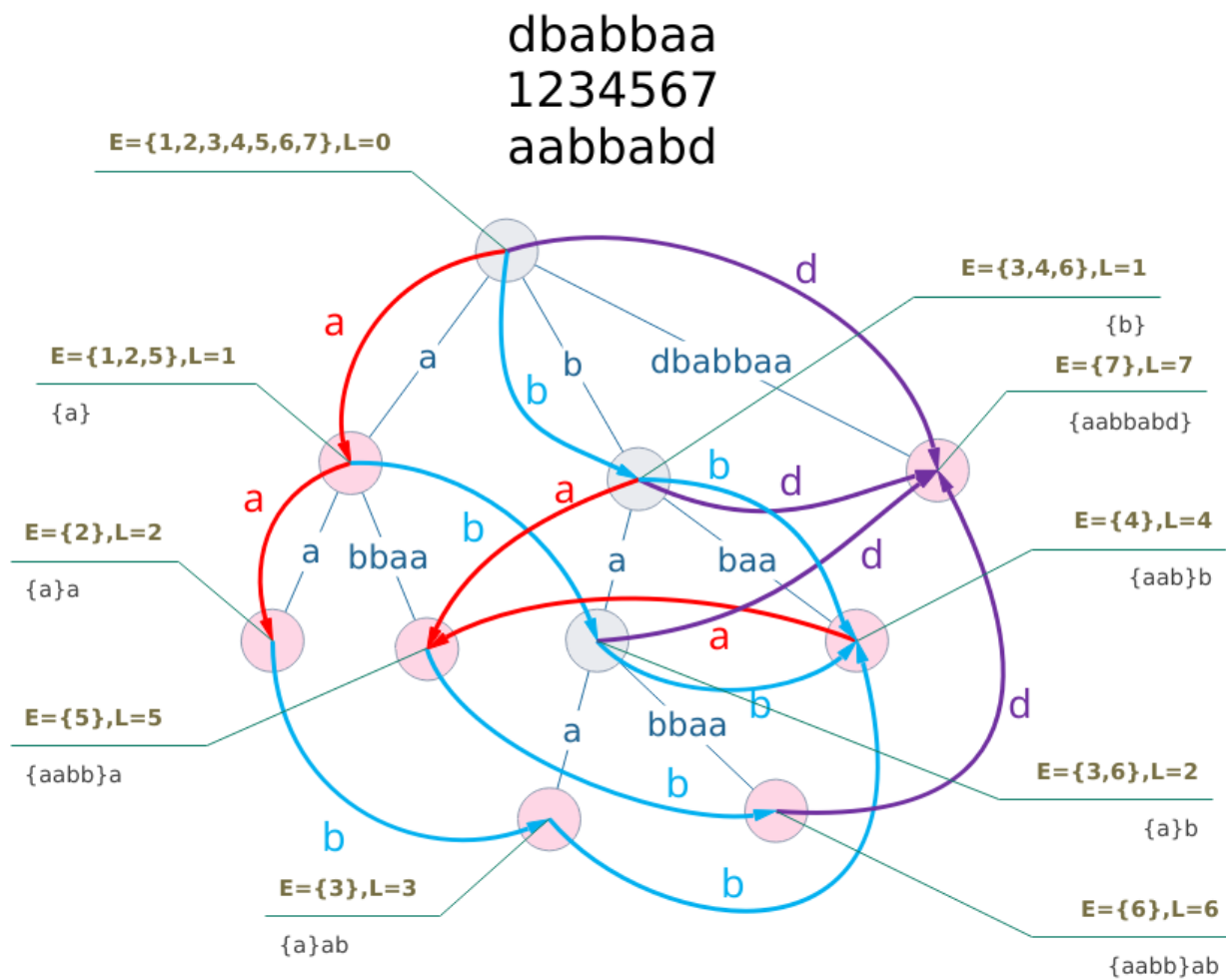
Green Hackenbush Game on Tree(树上删边游戏)

给一个有根树 (森林), 每次可以删掉一个子树。

叶子点的 SG 值为 0, 非叶子点的 $SG(u) = \oplus [SG(v) + 1]$, v 是 u 的子节点。

字符串

后缀自动机



动态规划