Praktikum B - Versuch B3.1 Statistik der Kernzerfälle

Jesco Talies, Timon Danowski, Erik Gasmus

14. Dezember 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**
1.1 Versuchsaufbau . . . 3
1.2 Ziel . . . 3

2 Versuchsvorbereitung **3**
2.1 Zufallsvariable . . . 3
2.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung . . . 3
2.3 Binomialverteilung . . . 3
2.4 Poisson Verteilung . . . 4
2.5 Gaußverteilung . . . 4
2.6 Varianz . . . 4
2.7 Zerfallswahrscheinlichkeit . . . 5
2.8 Intervallverteilung . . . 5
2.9 Zählrohr . . . 6
2.10 Totzeit . . . 6
2.11 Zwei-Präperat-Methode . . . 6
2.12 Der χ^2-Anpassungstest . . . 7

3 Versuchsdurchführung **8**

4 Auswertung **8**
4.1 Poissonverteilung . . . 8
4.2 Gaussverteilung . . . 9
4.3 Intervallverteilung . . . 9
4.4 χ^2-Test . . . 10
4.5 Totzeit . . . 11

5 Diskussion **11**

1 Einleitung

1.1 Versuchsaufbau

In diesem Versuch wollen wir anhand von Kernzerfällen den Einfluss von Messaperaturen auf die Messung Demonstrieren, dabei betrachten wir eine Ansammlung instabieler Kerne sowie einen Detektor zum Nachweis der Zerfälle. Trotz der Unabhängigkeit dieser Zerfälle lässt sich ab einer ausreichend großen Zahl an Zerfällen ein Statistischer Zusammenhang erkennen.

1.2 Ziel

Ziel dieses Versuchs wird sein die oben erwähnten Verteilungen näher kennen zu lernen und dabei auch auf den Einfluss der Messapperatur auf die Verteilung zu berücksichtigen. Dafür soll in der Auswertung auf

- die Anzahl der Zerfälle pro Zeitintervall
- die Zeitdifferenz zwischen Zerfällen

geachtet werden und durch einen χ^2-Test untersucht werden.

2 Versuchsvorbereitung

2.1 Zufallsvariable

Im Zentrum dieses Versuchs steht das Betrachten von sogenannten Zufallsvariablen. Da verschiedene Zufallsexperimente sehr verschiedene Ereignisse besitzten ist es wichtig dennoch eine gemeinsame Darstellung zu finden um mit den Ergebnissen von Zufallsexperimenten rechnen zu können. Für eine solche Darstellung müssen die Ergebnisse in reelle Zahlen transformiert werden, dafür gibt man in allen Fällen eine eindeutige Abbildung

$$X : \omega \to x(\omega); x(\omega) \in \mathbb{R}$$

die jedem Ereignis ω eines Zufallsexperiments eine Eindeutige Zahl zuordnet. Diese Funktion X bezeichnet man als Zufallsvariable.

2.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung bzw. Warhscheinlichkeitsfunktion einer Zufallsvariablen X ist diejenige Funktion F(x) die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine entprechende Zufallsvariable einen Wert kleiner gleich x annimmt. Dabei gilt für diskrete Zufallsvariablen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$F(x) = \sum_{x_i < x} f(x_i)$$

und im übergang zu kontinuierlichen Zufallsvariablen wird die Wahrscheinlichkeitsdichte beschrieben über

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

2.3 Binomialverteilung

Die sogennante Binomialverteilung ist die wohl wichtigste diskrete Verteilung. Sie ist jedoch nur anwendbar auf Zufallsexperimente deren Ereignisse genau zwei mögliche, sich gegenseitig auschließende Ergebnisse liefern können. Die die Wahrscheinlichkeit des Eintretens der Ereignisse gilt

$$P(A) = p; P(B) = 1 - p$$

Führt man das Experiment N-mal durch, wobei die Ergebnisse aller N durchläufe unabhängig voneinander sind, kann man über die Anzahl n, welche beschreibt wie oft Ergebniss A eingetreten ist, die Wahrscheinlichkeit folgendermaßen herleiten: Nimmt man an das Ereigniss A zunächst n man auftritt und dann (N-n)-mal nicht, dann ist die Wahrscheinlichkeit für genau diese Reihenfolge:

$$\underbrace{p \cdot p ... \cdot p}_{n} \cdot \underbrace{(1-p) \cdot (1-p) ... \cdot (1-p)}_{N-n} = p^n \cdot (1-p)^{N-n}$$

Da für unser Experiment jedoch die Reihenfolge der Ereignisse egal ist, kann über die Kombinatorik die Anzahl möglicher Anordnungen einer solchen Verteilung bestimmt werden. Daraus Folgt:

$$P(N, n, p) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

Die Binomialverteilung besitzt den Erwartungswert $m = Np$ und die Varianz $\sigma^2 = Np(1-p)$.

2.4 Poisson Verteilung

Auch die Poissonverteilung ist eine diskrete Verteilung, man erhält sie, wenn man die Binomialverteilung im Grenzwert $N \to \infty undp \to 0$ unter der Nebenbedingung, dass das Produkt $Np = \lambda$ kontant ist, betrachtet. Dort erhält man die Wahrscheinlichkeitsfunktion über:

$$\lim_{N\to\infty} P(n) = \lim_{N\to\infty} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = \frac{\lambda^n \cdot e^{-\lambda}}{n!} = P(n, \lambda)$$

Die Poissonverteilung hat den Mittelwert $m = \lambda$ und die Varianz $\sigma^2 = \lambda$.

2.5 Gaußverteilung

Die Gaußverteilung hingegen ist eine kontinuierliche Verteilung, ihre Wahrscheinlichkeitsdichte ist gegeben durch

$$P(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma})}$$

Dabei ist μ der Mittelwert und σ^2 die Varianz.
Für die Gaußverteilung bestehen zwei interessante Zusammenhänge. Zunächst erhält man die Gaussverteilung durch Grenzwertbetrachtung der Poissonverteilung für $\lambda \to \infty$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{2\lambda}} = P(x, \lambda)$$

Zusätzlich folgt zudem nach dem Satz von Moivre-Laplace, dass falls die Poissonverteilung gegen die Gaußverteilung konvergiert, so konvergiert auch die Binomialverteilung gegen die Gaußverteilung für $N \to \infty$ und $0 < p < 1$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Np(1-p)}} e^{-\frac{(x-Np)^2}{2Np(1-p)}} = P(x)$$

Für diese Näherung existiert eine Faustregel, nach der die Näherung brauchbar ist falls gilt $Np(1-p) \geq 9$. Je Asymetrischer die Binomialverteilung ist, desto größer muss N sein, bevor die Gaußverteilung eine gute Näherung liefert.

2.6 Varianz

Für jede der oben angegebenen Verteilungen lässt sich eine Varianz σ^2 angeben, diese Varianz ist ein Maß für die Streuung einer Zufallsvariablen X um ihren Erwartungs- bzw. Mittelwert μ. Diese lässt sich auf zwei Wege bestimmen, entweder, falls der tatsächliche Mittelwert bekannt ist über

$$Var(X) = \int_\omega (X-\mu)^2 dP$$

als Integral über den Wahrscheinlichkeitsraum Ω, oder, falls nur der experimentell bestimmte Mittelwert bekannt ist

$$Var(X) = \sum_{i\geq 1} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$$

wobei p_i der Wahrscheinlichkeit entspricht mit der X den Wert x_i annimmt.

2.7 Zerfallswahrscheinlichkeit

Den zusammenhang zwischen einem Zufallsexperiment und unserem Versuch bildet die Zerfallswahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit ω, dass ein Atomkern unseres instabilen Kerns mit einer Halbwertszeit $T_{1/2}$ (Hier ^{137}Cs mit $T_{1/2} = 30 Jahre$) innerhalb einer bestimmten Zeitspanne $\Delta t \ll T_{1/2}$ zerfällt, beträgt

$$w = \alpha \Delta t$$

α ist dabei für das Isotop Charakteristische Konstante und wird die Zerfallswahrscheinlichkeit genannt. Diese Gleichung ist jedoch nur gültig für infinitisimale Δt, da sonst Wahrscheinlichkeiten ¿ 1 erreicht werden könnten. Für beliebige endliche t gilt für die Zerfallswahrscheinlichkeit

$$\omega(t) = 1 - e^{-\alpha t}$$

Mit bekannter Halbwertszeit berechnet sich α folgendermaßen

$$\omega(T_{1/2}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\alpha T_{1/2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{ln(1/2)}{T_{1/2}}$$

In unserem Fall mit dem Isotop $^{1}37Cs$ ist $\alpha = 7,3 \cdot 10^{-6} s^{-1}$. Hier ist bereits der erste zusammenhang zu unseren Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu erkennen, es handelt sich um ein Zufallsexperiment bei dem die zwei sich ausschließenden Ereignisse sind das Zerfallen bzw. das Nichtzerfallen eines Kerns. Diese Zerfälle sind von einander Unabhängigkeit wodurch unser Experiment als Binominalverteilt angenommen werden kann. Für viele Kerne ist es nun Sinnvoll einen Ausdruck zu finden für die Wahrscheinlichkeit $\omega(N, n, t)$, dass von N Kernen während der Zeit t n Zerfallen. Die Anzahl der Möglichen Zerfälle ist über den Binomialkoeffizienten gegeben.

$$\omega(N, n, t) = \binom{N}{n} \cdot (1 - e^{-\alpha t})^n e^{-\alpha(N-n)t}$$

Mit der abkürzung $p = 1 - e^{-\alpha t}$ Erhalten wir

$$P(N, n, p) = \binom{N}{n} \cdot p^n (1 - p)^{N-n}$$

eine Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Binomialverteilung. Da es sich bei unserem Experiment, um eine sehr große Anzahl von Kernen handelt (Größenordnung von 10^{20}) handelt und Wahrscheinlichkeiten eines Zerfalls von $\alpha \ll 1$ (hier $7,3 \cdot 10^{-6} s^{-1}$) können wir für große Proben unsere Binomialverteilung als Poissonverteilung nähern mit

$$P(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

wobei n der registrierten Zählrate entspricht und λ dem Erwartungswert der Zerfälle im Zeitraum t. Für große λ d.h. $|n - \lambda| \ll \lambda$ (große Messezeiten) geht die Poissonverteilung sogar in eine spezielle Gaußsche Normalverteilung über

$$\Phi(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(n-\lambda)^2}{2\sigma^2}}$$

2.8 Intervallverteilung

Eine weitere Verteilung ist die Intervallverteilung, bei ihr wird im gegensatz zu den bisherigen Verteilungen, die die Wahrscheinlichkeit für das Zerfallen von Kernen in einer festen Zeitspanne t beschrieben haben, die Zeitdifferenz zwischen zwei Zerfällen betrachtet. Betrachtet wird also mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zeitdifferenz zwischen zwei Zerfällen den Wert Δt annimmt. Die Wahrscheinlichkeit die durch diese betrachtung beschrieben wird setzt sich aus Zwei Einzelwahrscheinlichkeiten zusammen.

- W_1: In der Zeit Δt darf kein Zerfall Stattfinden, die Wahrscheinlichkeit entspricht nach der Poissonverteilung mit $n = 0 : W_1 = e^{-\lambda}$.
- W_2: Nach der Zeit Δt muss innerhalb von dt ein Zerfall Stattfinden. Die Wahrscheinlichkeit ist $W_2 = a \cdot dt$.

Daraus folgt:

$$W = W_1 \cdot W_2 = e^{-\lambda} a dt$$

Um auf die Dichtefunktion zu kommen muss nun lediglich abgeleitet werden:

$$P = e^{-at} a$$

Die Dichtefunktion dafür, dass zwischen den beiden betrachteten Ereignissen noch n weitere liegen folgt analog und ergibt sich zu:

$$P_n = a \frac{(at)^n}{n!} e^{-at}$$

Diese Verteilung nennt man Intervallverteilung.

2.9 Zählrohr

Zum Nachweis bzw zur Messung der in den vorherigen abschnitten angesprochenen Zerfälle wird ein Geiger-Müller Zählrohr eingesetzt. Es besteht aus einem gasgefüllten Zylinderkondensator mit einem dünnen Anodendraht. Tritt nun ionisierende Strahlung in das Rohr ein, die bei einem Radioaktiven Zerfall entsteht (Hier β^- $Z(A, Z) \rightarrow Z(A, Z+1) + e^- + \nu^-)$) löst diese Elektronen aus den Hüllen des Gaßes, die nun freien Elektronen bewegen sich durch das Elektrische Feld zur Anode und lösen auf ihrem Weg weitere Elektronen aus. Zusätzlich regen sich die Ionisierten Gaßteilchen unter Emission von Photonen ab die wiederum wieder Elektronen auslösen, sodass eine großräume Entladung im Zählrohr stattfindet, unabhängig von der ursprünglichen Ionisation. Die durch die Oben beschriebenen Effekte entstehende Elektronenlawine liefert dabei unser Messbares Signal.
Die Entladung über diese Kettenreaktion endet erst wenn die Radial nach außen wandernde Wolke ionisierter Gaßteilchen die Feldstärke genügend Verringert hat. Diese relativ lange Zeit bezeichnet man als Totzeit, da währendessen keine zusätzlichen Zerfälle detektiert werden können. Um Mehrfachentladungen durch weitere Ionisierungseffekte von Gaßatomen an der Kathodenoberfläche zu vermeiden wird das Zählrohr mit einem hochomigen Widerstand im bereich $10^8\Omega$ zwischen Hochspannungsversorgung und Anode ausgestattet. Der Widerstand führt dazu, dass die Hochspannung nach einer gewissen Zeit zu gering ist, um weitere Entladungen auszulösen.

2.10 Totzeit

Die in vorherigen Absatz bereits erwähnte Totzeit bezeichnet die Zeit nach einem Nachweis in dem kein weiteres Teilchen nachgewiesen werden kann. Diese Totzeit wirkt sich dadurch auf die Zählrate unserer Messung aus, die gemessene Zählrate a' ist kleiner als die Tatsächliche Zählrate a. Mit der Totzeit τ ergibt sich:

$$a'(1 + a\tau) = a \Leftrightarrow a = \frac{1}{1 - a'\tau}$$

Um den wahren Mittelwert vom Gemessenen zu Erhalten gilt:

$$m = aT = a\frac{m'}{a'} = \frac{m'}{1 - a'\tau}$$

2.11 Zwei-Präperat-Methode

Um die Totzeit zu messen lässt sich die Zwei-Präperat-Methode verwenden, dabei wird bei einer Festen Zählrohrspannung die Zählrate von Zwei Präperaten erst jeweils Seperat und dann gleichzeitig gemessen. Zudem wird die Untergrundzählrate bestimmt. Die gemessenen Zählraten z_1', z_2', z_{12}' und die Untergrundzählrate bestimmen unsere Wahren Zählraten z_1, z_2, z_{12}, die durch die Präperate zustandekommenden Zählraten seien p_1, p_2, p_{12}

$$z_1 = p_1 + u; z_2 = p_2 + u; z_{12} = p_{12} + u$$

Mit der Totzeit τ gilt:

$$z_i = \frac{z_i'}{1 - z_i'\tau}$$

Die idee dabei ist es die Additivität der Präperatzzählraten auszunutzen

$$p_{12} = p_1 + p_2$$

Das daraus resultierende Gleichungsystem lässt sich durch einsetzten der vorherigen Gleichung in die jeweiligen Gleichungen für z_i lösen:

$$z_{12} - u = z_1 - u + z_2 - u \Leftrightarrow z_{12} + u = z_1 + z_2$$

$$\frac{z_{12}'}{1 - z_{12}'\tau} + \frac{u'}{1 - u'\tau} = \frac{z'}{1 - z_1'\tau} + \frac{z_2'}{1 - z_2'\tau}$$

Löst man diese Gleichung nach τ auf ergibt sich:

$$(\underbrace{u'z_{12}'z_2' - z_1'z_1 2'z_2' + u'z_1 2'z_1' - u'z_1'z_2'}_{=} A)\tau^2 + (\underbrace{-2z_{12}'u' + 2z_1'z_2'}_{=} B)\tau + \underbrace{z_{12}' - z_1' + u' - z_2'}_{=} C = 0$$

$$\tau = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

2.12 Der χ^2-Anpassungstest

Folgende Fragen sind notwendig für das Verständnis des Versuchs und dienen als Vorbereitung für diesen.

1. Wie misst man die Totzeit mit der Zwei-Präparate-Methode?

   - Bei *der Zwei-Präparate-Methode* wird zunächst die Zählrate des ersten Präparats bei fester Zählrohrspannung gemessen, dann die des zweiten Präperates und zuletzt die der beiden zusammen. Zudem wird die untergrundzählrate bestimmt, d.h. das hintergrundrauschen, welches durch die umgebung entsteht. - TODO - Formeln?

2. Wie wirkt sich die Totzeit auf eine gemessene Verteilung aus?

   - Die Totzeit führt zu einer schmaleren gemessenen Verteilung bzw. zu einer Verkleinerung von χ^2. Die gemessene Zählrate a' ist durch die aufgrund der Totzeit fehlenden Messwerte kleiner als die Tatsächliche Zählrate a. Für jedes Teilchen muss man daher $a \cdot \tau$ addieren

     $$a = a'(1 + a\tau)$$

     für den gemessenen m' und tatsächlichen Mittelwert m gilt dann

     $$m = aT = a\frac{m'}{a'} = \frac{m'}{1 - a'\tau}$$

     Da die Messwerte aus einer Poissonverteilung stammen gilt ausserdem $\sigma^2 = m$ Insgesamt folgt also

     $$\sigma'^2 = m' \cdot (1 - \tau a') bzw \sigma^2 = \sigma'^2 \cdot (\frac{a}{a'})^2$$

     Da gilt $\frac{a}{a'} > 1$ ist also wie bereits erwähnt die gemessene Verteilung schmaler als die wahre.

3. Was ist eine χ^2-Verteilung und wie funktioniert ein χ^2-Test?

   - *Die χ^2-Verteilung* ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung über die menge der positiven reellen Zahlen über einen einzigen Parameter, die Anzahl der Freiheitsgrade n. Sie kann aus der Normalverteilung abgeleitet werden indem man n Zufallsvariablen Z_i betrachtet die unabhängig und standardnormalverteilt sind. Das Quadrat einer Standardnormalverteilten Zufallsvariable $Z - N(0,1)$ folgt einer χ^2-Verteilung mit Freiheitsgrad

     $$Z^2 \ \chi^2(1)$$

     Für jede Standardnormalverteilte zufallsgröße gilt, das sie den Erwartungswert 0 hat und das Quadrat der selbigen den Erwartungswert 1. Bei f dieser Größen addieren sich die Erwartungswerte zu f. Betrachtet man nun die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der χ^2-Verteilung kann man sich nun einen Ablehnungsbereich festlegen. Für eine Irtumswahrscheinlichkeit von 5% bestimmte man folgendes Integral bzw. χ^2_{min} und χ^2_{max}

     $$\int_{x=0}^{\chi^2_{min}} f(x,f)dx = 0.025$$

     $$\int_{x=0}^{\chi^2_{max}} f(x,f)dx = 0.975$$

   - *Mit dem χ^2-Test* soll geprüft werden ob zwei Verteilungen übereinstimmen bzw. ob die Verteilung einer Zufallsvariable einer hypotetischen Verteilung entspricht.

4. Warum können wir mit dem χ^2-Test Hypothesen ablehnen oder nicht ablehnen, aber niemals annehmen?

   - Da es sich bei der χ^2-Verteilung um das Quadrat der ursprünglichen Verteilung handelt kann man zwar aussagen über die Abweichung treffen, jedoch keine aussagen über die annahme der ursprünglichen Hypothese treffen, da diese auf der Unquadrierten Verteilung beruht. Daher kann man lediglich Ablehnen bei zu großer bzw zu kleiner abweichung, jedoch nie annehmen.

5. Das χ^2 ist ein Mass für die Abweichung der Daten von der Hypothese. Warum ist es trotzdem wichtig, auch bei einem kleinen χ^2 die Hypothese abzulehnen? Bedeutet ein kleines χ^2 nicht, dass die Daten sehr gut zur Hypothese passen?

   - Ist die Differenz $\chi^2_{max} - \chi^2_{min}$ zu klein besteht das Risiko eines Messfehlers, da man bei gemessenen Zufallsgrößen stehts von einem Mindestmaß an Streuung ausgeht bzw. ausgehen muss. Findet sich eine zu kleine Streuung sollte die Messung ebenfalls in Frage gestellt werden und ggf. sogar der Messvorgang überprüft oder verändert werden.

3 Versuchsdurchführung

Um die Verteilungen zu ermitteln werden zunächst die Zeitpunkte relativ zum Messtart, an denen ein Zerfall detektiert wurde von einem Computer in ein Textfile geschrieben, welche in der Auswertung weiter aufbereitet werden. Für die Auswertung liegen Daten aus den Folgenden Messungen vor:

- 45 Minuten (2700s) mit Quelle Nr. 7 bei 500V
- 45 Minuten mit Quelle Nr. 7 bei 600V
- 45 Minuten mit Quelle Nr. 6 und Nr. 7 bei 500V

Zur bestimmung der Totzeit über die Zwei-präperate-Methode liegen die Zählraten für die Messungen

- 5 Minuten mit Quelle Nr. 6 bei 500, 600 und 700V
- 5 Minuten mit Quelle Nr. 7 bei 500, 600 und 700V
- 5 Minuten mit Quelle Nr. 6 und Nr. 7 bei 500, 600 und 700V
- 5 Minuzten nur Untergrund bei 500, 600 und 700V

4 Auswertung

4.1 Poissonverteilung

Im ersten Teil der Auswertung befassen wir uns mit der Extraktion von Poissonverteilungen aus den Aufgenommenen Daten. Um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung aus den Messwerten zu extrahieren mussten zunächst die daten ausgewertet werden in hinsicht auf die Anzahl der Zerfälle pro Zeitintervall. Dabei ist es wichtig die richtige Länge des Zeitintervalls zu wählen, da bei zu kleinen Zeitintervallen keine Statistische verwertbare menge an ereignissen vor liegt , jedoch gilt der Übergang von der Binomial- zur Poissonverteilung nur im Grenzfall

$$P \to 0, N \to \infty$$

Für unsere plots haben wir eine Zeitauflösung von 200 Millisekunden gewählt.
Aus den resultierenden Histogrammen lies sich nun über Fitten der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poissonverteilung

$$P(n, \lambda) = N \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}$$

N bestimmt sich dabei als Summe aller Balkenhöhen, hier $N = 13499$.
der Fitparameter λ und somit direkt auch er Erwartungswert und die Varianzen bestimmt werden. Aus den Folgenden Plots erhielten wir folgende Werte:

Quelle	Erwartungswert λ	Varianz σ^2
Quelle 7 500V	$10.99 \pm 0,299$	$10.99 \pm 0,299$
Quelle 7 600V	$12.39 \pm 0,189$	$12.39 \pm 0,189$
Quelle 6 und 7 500V	$14.83 \pm 0,545$	$14.83 \pm 0,545$

Pics/Poisson Quelle 7 500V.png

(a) Quelle 7 500V

Pics/Poisson Quelle 7 600V.png

(b) Quelle 7 600V

Pics/Poisson Quelle 6 und 7 500V.png

(c) Quelle 6 und 7 500V

Abbildung 1: Gefittete Poissonverteilungen

4.2 Gaussverteilung

Wie wir bereits in der Theoretischen vorbereitung angesprochen haben kann man ein solches Zerfallsexperiment nicht nur als Poissonverteilt nähern, man kann es sogar als Gaußverteilt betrachten. Die Gaußverteilung für unsere gemessenen Daten müssen wir in unseren Fall jedoch nicht fitten sonder können direkt alle Parameter berechnen. Für die Verteilung gilt:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \cdot F \cdot \sqrt{n} e^{-\frac{(x-m)^2}{2m/n}}$$

mit

$$m = z' \cdot \frac{\Delta t}{n}$$

wobei m unseren Mittelwert, z' unsere gemessene Zählrate, F den Normierungsfaktor und n die Anzahl der Histogrammbalken angibt die zu einem zusammengefasst werden. Daraus folgt

Quelle(n)	n	z'	Δt	m	F
Quelle 7 500V	8	5,499	5	3,437	539
Quelle 7 600V	8	5,930	5	3,706	539
Quelle 6 und 7 500V	8	8,842	5	5,526	539

Pics/Gauss Quelle 7 500V.png

(a) Quelle 7 500V

Pics/Gauss Quelle 7 600V.png

(b) Quelle 7 600V

Pics/Gauss Quelle 6 und 7 500V.png

(c) Quelle 6 und 7 500V

Abbildung 2: Geplottete Gaußverteilungen über Gemessener Verteilung

Wie aus den Graphen klar hervorgeht, liegt unsere Theoretische Verteilung in den Messungen der einzelnen Quellen. Diese Diskrepanz lässt sich über die Untergrundstrahlung erklären, durch welche mehr Ereignisse registriert werden, als von unserer Quelle abgestrahlt werden. Wir hätten eigentlich eine theoretische Verteilung oberhalb der Gemessenen erwartet, da durch die Totzeit eigentlich Ereignisse verschwinden sollten, sollte die Aktivität unserer Quelle jedoch nicht hoch genug gewesen sein um eine Signifikante Menge der Signale durch Totzeit zu verlieren könnten einige Signale aus der Untergrundstrahlung aufgezeichnet worden sein. Bei der messung beider Quellen ist das oben bereits erwähnte Phänomen zu erkennen, bei dem einige der Theoretisch zu erwartenden Ereignisse durch die Totzeit verschluckt werden und somit die Gemessene Verteilung unterhalb der Theoretischen liegt.

4.3 Intervallverteilung

In diesem Teil des Versuchs sollte eine Intervallverteilung aus den Messdaten der Messung zu Quelle 7 extrahiert. Dazu untersuchten wir die zeitlichen Abstände zwischen 1,2 bzw. 3 Zerfällen in Zeitintervalle der Länge $\Delta t =$ 0,001s und plotteten die jeweiligen Intervallverteilungen der Messdaten für n=0,1,2. Desweiteren bestimmten wir die Totzeit, indem wir für den Fall n=0 einen Fit mit folgender Funktion vornahmen:

$$Z(t) = A \cdot \frac{a'}{1 - a'\tau} \cdot e^{-\frac{a'}{1-a'\tau} \cdot t}$$

Dabei ist A die Anzahl der gemessenen Ereignisse, a' die Zählrate und τ die Totzeit.

Intervall all.png

Intervall Quelle 7 600V.png

Durch den Fit erhielten wir eine Totzeit von

$$\tau = 6,723 \pm 0,4008$$

4.4 χ^2-Test

In diesem Versuchsteil ging es um die Untersuchung dreier Hypothesen mithilfe eines χ^2-Tests.

1. Die Präperatstärke ist konstant im betrachteten Zeitraum und gleicht dem Mittelwert der 51 Messwerte.

2. Die Präperatstärke ist konstant im betrachteten Zeitraum und gleicht dem Mittelwert der 51 Messwerte minus 10

3. Die Präperatstärke nimmt im betrachteten Zeitraum linear mit der Zeit ab. Die anfangszählrate ist der Mittelwert und der Abfall von einer Messung zur anderen sei 1.

Um diese Hypothesen zu Untersuchen plotteten wir die Extrahierten Messdaten als Hytogramm und stellten die Hypothesen Graphisch dar.

CHI Quelle 6 und 7 500V.png

4.5 Totzeit

Zur bestimmung der Totzeit wurden jeweils bei 500, 600 und 700V die Zählraten von Quelle 6,7 und beiden gleichzeitig sowie die des Untergrunds aufgenommen.

Quelle	500V	600V	700V
6	16735	17840	18343
7	14848	16010	16477
6+7	23873	26897	28711
Untergrund	2335	2432	2442

Totzeit	500V	600V	700V
τ_+[ms]	0.		

5 Diskussion