

Universität zu Köln

Institut für Astrophysik

Versuchsprotokoll

B1.3: Bestimmung der Elementarladung nach Millikan

Autoren: Jesco Talies¹
Timon Danowski²
Durchgefuehrt am: 19.04.2021
Betreuer: Marius Hermanns

¹ jtalies@smail.uni-koeln.de, Matrikel-Nr.: 7348338

² tdanowsk@smail.uni-koeln.de, Matrikel-Nr.: 7348629

Inhaltsverzeichnis

1	Versuchsvorbereitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Die Elementarladung	1
1.3	Kräfte im Versuch	1
1.3.1	Coulomb Kraft	1
1.3.2	Gravitationskraft	1
1.3.3	Auftriebskraft	1
1.3.4	Reibungskraft	2
1.3.5	Cunningham-Korrektur	2
1.4	Herleitung der Formeln	2
2	Durchführung	3
2.1	Aufbau	3
2.2	Versuchsdurchführung	3
3	Auswertung	4
4	Diskussion	7

1 Versuchsvorbereitung

1.1 Motivation

Der Millikan-Versuch wurde erstmals 1910 von Robert Millikan und Harvey Fletcher durchgeführt. Die Motivation des Versuchs war es, die Elementarladung gut zu bestimmen. Aus dem Experiment kam außerdem hervor, dass es eine kleinste (elementare) Ladung gibt und dass Ladungen quantisiert sind. Man kann also jede vorhandene Ladung als Vielfaches der Elementarladung schreiben.

1.2 Die Elementarladung

Die Elementarladung ist die kleinst mögliche frei existierende Ladung. Ihr Wert beträgt:

$$e = 1,602176634 \cdot 10^{-19} C \quad (1)$$

Sie wird häufig verwendet um die Ladung eines einzelnen Elektrons bzw. Protons zu beschreiben.

Die Ladung ist eine skalare, additive Größe (d.h. die Gesamtladung lässt sich als ein Vielfaches der Elementarladung beschreiben). Die Erkenntnis über die Quantelung der Ladung geht auf die Beobachtungen von Robert Millikan zurück.

1.3 Kräfte im Versuch

In diesem Versuch befinden sich Öltröpfchen in einem Plattenkondensator unter dem Einfluss verschiedener Kräfte.

1.3.1 Coulomb Kraft

Die Coulomb Kraft beschreibt die Kraft auf ein geladenes Objekt in einem elektrischen Feld. In einem Plattenkondensator:

$$\vec{F}_C = Q \cdot \frac{U}{d} \vec{e}_z \quad (2)$$

wobei Q die Ladung des Objektes ist, U die Spannung zwischen den Kondensatorplatten und d der Abstand der Kondensatorplatten ist.

1.3.2 Gravitationskraft

Die Gravitationskraft beschreibt die Beschleunigung einer Masse in einem Gravitationsfeld eines massereichen Objektes. In diesem Fall im Gravitationsfeld der Erde, gilt:

$$\vec{F}_G = m \vec{g} \quad (3)$$

wobei m die Masse des Objektes (hier das Öltröpfchen) und g die lokale Erdbeschleunigung mit $g = 9,80665 \frac{m}{s^2}$ ist ($\vec{g} = g \cdot -\vec{e}_z$).

1.3.3 Auftriebskraft

Als Auftriebskraft wird eine der Gewichtskraft eines Körpers entgegenwirkende Kraft bezeichnet. Diese resultiert aus dem Druckunterschied zwischen Ober- und Unterseite des Körpers, welcher aus dem Schweredruck des Mediums resultiert. Ein Tröpfchen mit dem Radius r erfährt in der Luft unter der Erdbeschleunigung eine Auftriebskraft:

$$\vec{F}_A = -\rho_{Luft} \frac{4}{3} \pi r^3 \vec{g} \quad (4)$$

mit ρ_{Luft} als Dichte der Luft

1.3.4 Reibungskraft

Reibungskräfte sind geschwindigkeitsabhängige Widerstandskräfte, die der Bewegung eines Körpers entgegenwirken. Man unterscheidet zwischen äußerer und innerer Reibung. Für diesen Versuch interessiert uns die innere Reibung, welche sich aus der Viskosität des Mediums ableitet. Die Stokes-Reibungskraft auf eine Kugel mit dem Radius r und Geschwindigkeit v , welche sich durch ein Medium der Viskosität η bewegt ergibt sich zu

$$\vec{F}_R = -6\pi r \eta \vec{v} \quad (5)$$

1.3.5 Cunningham-Korrektur

Wenn der Radius eines Teilchens im Bereich der mittleren freien Weglänge des umgebenden Mediums liegt, trifft das Stoke'sche Reibungsgesetz nicht mehr zu. Dies liegt daran, dass die Stoke'sche Reibung die äußere Reibung zwischen Öl und Luft vernachlässigt. Unter Verwendung der Cunningham-Korrektur ändert sich die Stoke'sche Reibung zu:

$$\vec{F}_R = -6\pi r \eta \vec{v} \cdot \left(1 + A_c \frac{\langle l \rangle}{r}\right)^{-1} \quad (6)$$

wobei $\langle l \rangle$ die mittlere freie Weglänge und A_c eine Konstante ist, für die wir den Wert $A_c = 1,26$ verwenden werden.

1.4 Herleitung der Formeln

Aus den wirkenden Kräften können wir uns jetzt Formeln für den Radius und die Ladung eines Öltröpfchens herleiten. Im Kräftegleichgewicht ist die Summe aller wirkenden Kräfte gleich 0. Das Medium in dem sich die Tröpfchen bewegen ist Luft, daher $\rho_m = \rho_{Luft}$ und $\rho_K = \rho_l$

Ein Tröpfchen steigt für

$$\vec{F}_C + \vec{F}_A > \vec{F}_G \quad (7)$$

wegen der entgegenwirkenden Reibungskraft gleichmäßig mit:

$$\vec{v}_{steig} = \frac{1}{6\pi\eta r} \left(Q \frac{U}{d} - \frac{4}{3}\pi r^3 - (?)g(\rho_l - \rho_{Luft}) \right) \cdot \vec{e}_z \quad (8)$$

Bei Umpolung der Kondensatorplatten ($\vec{F}_C + \vec{F}_A < \vec{F}_G$), ergibt sich für die Sinkgeschwindigkeit:

$$\vec{v}_{sink} = \frac{1}{6\pi\eta r} \left(Q \frac{U}{d} + \frac{4}{3}\pi r^3 - (?)g(\rho_l - \rho_{Luft}) \right) \cdot \vec{e}_z \quad (9)$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen und umstellen nach r , erhält man:

$$r = \sqrt{\frac{9\eta(v_{sink} - v_{steig})}{4g(\rho_l - \rho_{Luft})}} \quad (10)$$

Durch Addition der beiden Gleichungen, Einsetzen von 0 oben und anschließend umstellen nach Q , erhält man:

$$Q = \frac{3\pi d \eta r}{U} (v_{sink} + v_{steig}) \rightarrow \frac{9}{2}\pi d \sqrt{\frac{\eta^3(v_{sink} - v_{steig})}{g(\rho_l - \rho_{Luft})}} \frac{v_{sink} + v_{steig}}{U} \quad (11)$$

Mit der Cunningham Korrektur kommt man mit den selben Schritten auf den Radius:

$$r_C = \frac{A_c \langle l \rangle}{2} + \sqrt{\frac{A_c \langle l \rangle^2}{2} + \frac{9\eta(v_{sink} - v_{steig})}{4g(\rho_l - \rho_{Luft})}} = \frac{A_c \langle l \rangle}{2} + \sqrt{\frac{A_c \langle l \rangle}{2} + r^2} \quad (12)$$

und die Ladung:

$$Q_C = \frac{3\pi\eta r_C d}{U} \left(1 + A_c \frac{\langle l \rangle}{r_C}\right)^{-1} (v_{sink} + v_{steig}) \Leftrightarrow Q \cdot \frac{r_C}{r} \left(1 + A_c \frac{\langle l \rangle}{r_C}\right)^{-1} \quad (13)$$

2 Durchführung

2.1 Aufbau

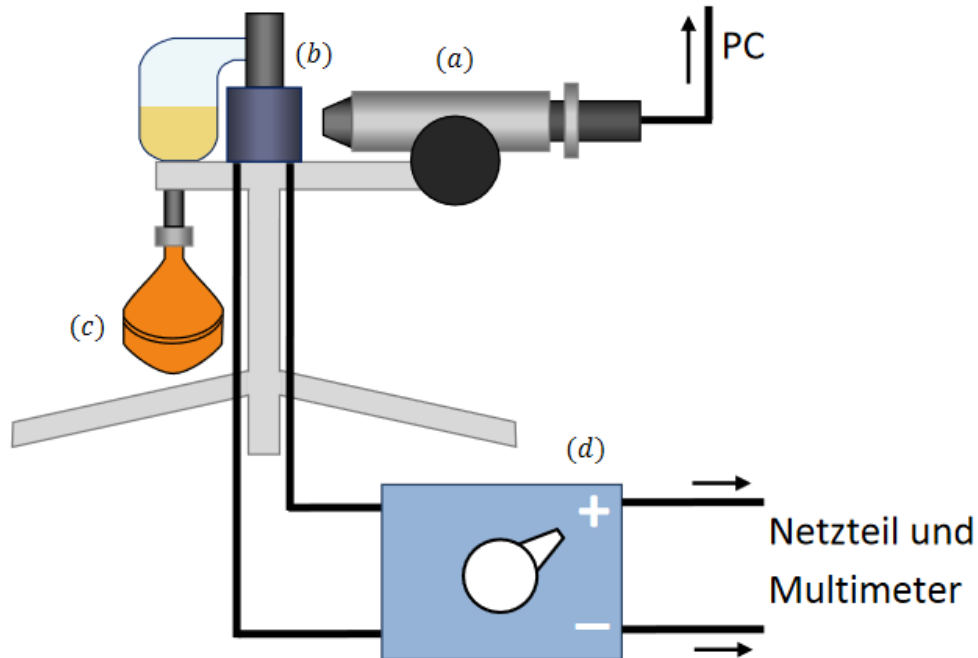


Abbildung 1: Versuchsaufbau

- (a) Mikroskop mit vorgeschalteter Kamera
- (b) Kammer mit Plattenkondensator
- (c) Ölstäuber mit Blasebalg
- (d) Kommutatorschaltung

2.2 Versuchsdurchführung

Zu Beginn des Versuchs müssen sowohl Mikroskop als auch Kamera kalibriert werden. Dafür wird zunächst die Spannungsversorgung der Mikroskopkamera angeschaltet und dessen Adresse und Konfiguration über die 'Commen Vision Blox Management Console' gesucht und gespeichert um im folgenden das Bild der Kamera im Programm 'MovieInteractive 2' zu betrachten und die Belichtungszeit und Verstärkung der Kamera zu kalibrieren. Hierbei sollte darauf geachtet werden, dass die Belichtungszeit nicht zu lang ist, da dies zu "Verschmierung" der Tropfen im Bild führt. Auch sollte die Verstärkung nicht zu groß gewählt werden um das Rauschen des Hintergrunds gering zu halten. Hat man eine akzeptable Konfiguration gewählt sollte die Brennebene des Mikroskops in die Mitte des Plattenkondensators verschoben werden um die Tröpfchen zu filmen. Um die Steig- und Sinkzeit eines Tröpfchens zu messen wird zunächst der Blasebalg betätigt um einige Öltröpfchen zu zerstäuben. Anschließend wird durch wiederholtes Umpolen des Kondensators ein geladenes Tröpfchen identifiziert und die Aufnahme kann über den Computer gestartet werden. Bei der Aufnahme sollten mindestens fünf vollständige Steig- und Sinkvorgänge aufgezeichnet werden um die Fehler in der Auswertung gering zu halten. Hierzu wartet man bis das Tröpfchen eine der äusseren Begrenzungen der Millimeterskala überschreitet und polt dann

das Feld des Kondensators um und lässt es über die gegenüberliegende Begrenzung wandern. Dieser Prozess wird für insgesamt 20 Tröpfchen wiederholt. Es ist dabei darauf zu achten, stets die Brennebene des Mikroskops nach zu justieren, da die Tröpfchen durch Verwirbelung und Stöße mit Luftpartikeln leicht aus der Brennebene wandern und dann nicht länger auf der Aufnahme zu sehen sind.

3 Auswertung

Die Fallzeiten der oben beschriebenen Messung können anschließend durch Frameweise betrachtung der Aufnahmen extrahiert werden. Aus unseren gemessenen Steig- und Sinkzeiten ergaben sich folgende Mittelwerte und deren Fehler

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n t_i \quad (14)$$

$$\Delta \bar{t} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n t_i - \bar{t}} \quad (15)$$

mit n = Anzahl der Messwerte (hier 5) und t_i = Messwert. Wobei

$$t = \frac{\text{Frame}(\text{Ende}) - \text{Frame}(\text{Start})}{\text{Framerate}} \quad (16)$$

mit $\text{Framerate} = 32,792 \text{ Bilder/s}$, somit ist t in Sekunden.

Die Geschwindigkeiten ergeben sich über

$$v = \frac{s}{t} \quad (17)$$

mit $s = (0.96 \pm 0.01) \mu m$ und ein Fehler von

$$\Delta v = v \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2} \quad (18)$$

Daraus lässt sich der Radius folgendermaßen berechnen

$$r = \sqrt{\frac{9\eta \cdot (v_{\text{sink}} - v_{\text{steig}})}{4g \cdot (\rho_l - \rho_{\text{Luft}})}} \quad (19)$$

mit $\eta = 1.81e-5 Pa \cdot s$, $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$, $\rho_l = 1030 \frac{kg}{m^3}$, $\rho_{\text{Luft}} = 1.29 \frac{kg}{m^3}$ und den Fehler

$$\Delta r = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta \eta}{\eta}\right)^2 + \frac{\Delta v_{\text{sink}}^2 + \Delta v_{\text{steig}}^2}{(v_{\text{sink}} - v_{\text{steig}})^2}} \quad (20)$$

und ebenfalls die Ladung Q

$$Q = \frac{3\pi \cdot d\eta}{U} \cdot r \cdot (v_{\text{sink}} + v_{\text{steig}}) \quad (21)$$

und der Fehler

$$\Delta Q = Q \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta \eta}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \frac{\Delta v_{\text{sink}}^2 + \Delta v_{\text{steig}}^2}{(v_{\text{sink}} + v_{\text{steig}})^2}} \quad (22)$$

damit ergab sich die folgende Tabelle

$v_{sink} [\mu m/s]$	$\Delta v_{sink} [\mu m/s]$	$v_{steig} [\mu m/s]$	$\Delta v_{steig} [\mu m/s]$	$r [\mu m]$	$\Delta r [\mu m]$	$Q [10^{-9} C]$	$\Delta Q [10^{-9} C]$
213	5.5	122	1.8	0.61	0.019	2.1	0.08
296	4.8	239	4.0	0.48	0.026	2.6	0.15
196	2.1	70	0.9	0.71	0.008	1.9	0.04
194	2.5	70	1.0	0.71	0.009	1.9	0.04
207	2.3	100	1.1	0.66	0.009	2.1	0.05
221	2.6	130	1.4	0.61	0.010	2.2	0.05
298	3.4	98	1.6	0.90	0.010	3.6	0.08
213	2.7	120	1.4	0.61	0.010	2.1	0.05
304	5.5	253	3.6	0.46	0.029	2.6	0.17
198	2.1	74	0.9	0.71	0.008	2.0	0.04
197	2.1	81	0.9	0.68	0.008	1.9	0.04
377	5.4	123	1.7	1.01	0.013	5.2	0.12
212	2.6	124	2.1	0.60	0.012	2.0	0.06
200	3.2	56	1.0	0.76	0.010	2.0	0.05
203	2.2	89	1.0	0.68	0.008	2.0	0.04
200	2.6	81	1.0	0.69	0.009	2.0	0.05
303	3.4	144	1.7	0.80	0.010	3.7	0.08
301	3.8	74	1.3	0.96	0.010	3.7	0.08
204	3.9	120	3.0	0.58	0.017	1.9	0.07
299	4.2	262	3.0	0.39	0.026	2.2	0.16

Trägt man nun die unkorrigierten Radien gegen deren zugehörige Ladung auf ergibt sich folgende Grafik

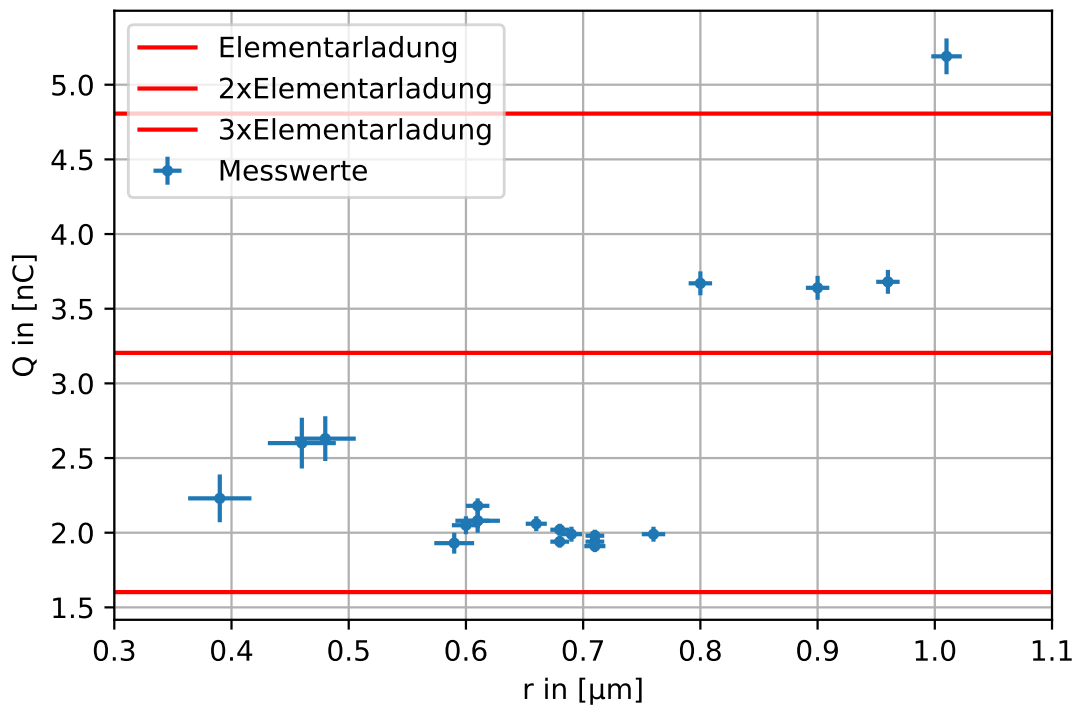


Abbildung 2: Ladung als Funktion des Radius

Es ist deutlich zu erkennen, dass eine Quantifizierung Wahrscheinlich ist, jedoch stimmt diese nicht mit den zu erwartenden Werten über ein, weswegen man die Cunningham Korrektur zu

Hilfe nimmt. Mit der Cunningham Korrektur ergeben sich die Radien und Ladungen über

$$r_c = \sqrt{\left(\frac{A_c \langle l \rangle}{2}\right)^2 + r^2} - \frac{A_c \langle l \rangle}{2} \quad (23)$$

$$Q_c = Q \left(1 + \frac{A_c \langle l \rangle}{r_c}\right)^{-1} \frac{r_c}{r} \quad (24)$$

mit r als unkorrigierter Radius, $A_c = 1.26$ als einheitenloser Faktor und $\langle l \rangle = 6.4 \cdot 10^{-8} m$ als mittlere freie Weglänge eines Teilchens in Luft und den Fehlern

$$\Delta r_c = \frac{r \Delta r}{\sqrt{\left(\frac{A_c \langle l \rangle}{2}\right)^2 + r^2}} \quad (25)$$

$$\Delta Q_c = Q_c \sqrt{\left(\frac{\Delta Q}{Q}\right)^2 + \left(\frac{A_c \langle l \rangle \Delta r}{r(r + \langle l \rangle A_c)}\right)^2} \quad (26)$$

Dies lässt sich erneut in folgender Tabelle darstellen und Plotten

$r[\mu m]$	$\Delta r[\mu m]$	$Q[10^{-9}C]$	$\Delta Q[10^{-9}C]$	$r_c[\mu m]$	$\Delta r_c[\mu m]$	$Q_c[10^{-9}C]$	$\Delta Q_c[10^{-9}C]$
0.61	0.019	2.1	0.08	0.57	0.019	1.7	0.08
0.48	0.026	2.6	0.15	0.44	0.026	2.1	0.16
0.71	0.008	1.9	0.04	0.67	0.008	1.7	0.04
0.71	0.009	1.9	0.04	0.67	0.009	1.6	0.04
0.66	0.008	2.1	0.05	0.62	0.009	1.7	0.05
0.61	0.010	2.2	0.05	0.57	0.010	1.8	0.05
0.90	0.010	3.6	0.08	0.86	0.010	3.2	0.08
0.61	0.010	2.1	0.05	0.57	0.010	1.7	0.05
0.46	0.030	2.6	0.17	0.42	0.029	2.0	0.18
0.71	0.010	2.0	0.04	0.67	0.008	1.7	0.04
0.80	0.010	2.0	0.04	0.64	0.008	1.6	0.04
1.01	0.013	5.2	0.12	0.97	0.013	4.6	0.12
0.60	0.012	2.0	0.06	0.56	0.012	1.7	0.06
0.76	0.010	2.0	0.05	0.72	0.010	1.7	0.05
0.68	0.010	2.0	0.04	0.64	0.008	1.7	0.05
0.69	0.010	2.0	0.05	0.65	0.009	1.7	0.05
0.80	0.010	3.7	0.08	0.76	0.010	3.2	0.08
0.96	0.010	3.7	0.08	0.92	0.010	3.3	0.08
0.58	0.017	1.9	0.07	0.54	0.017	1.6	0.07
0.39	0.027	2.2	0.16	0.35	0.027	1.7	0.16

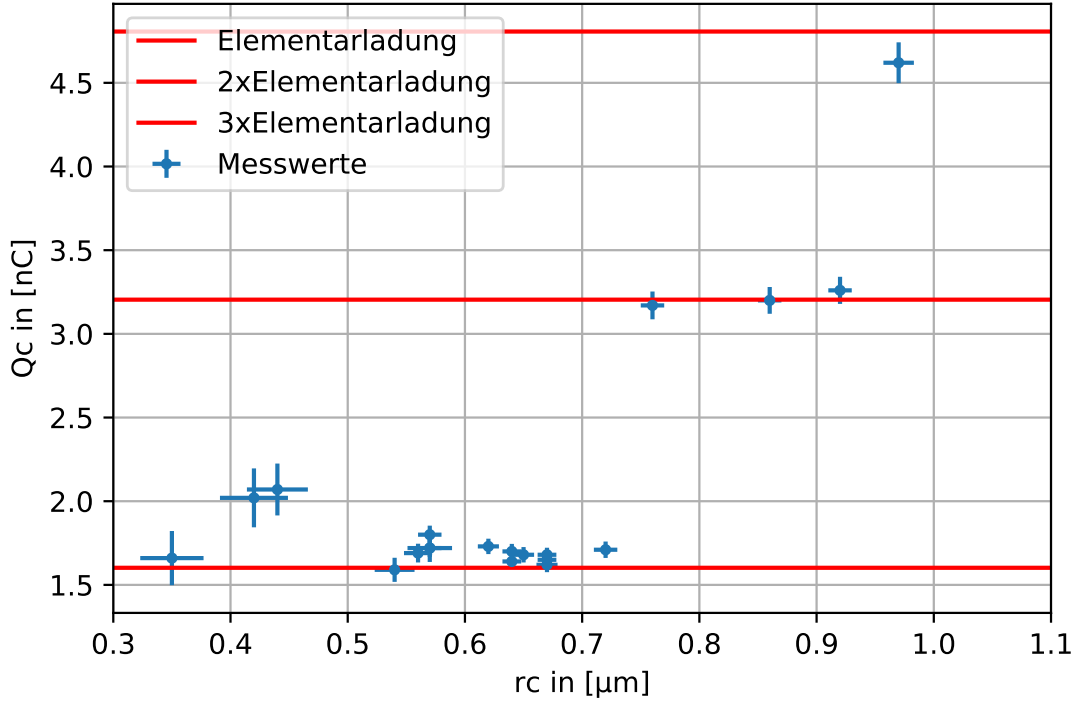


Abbildung 3: Q_c als Funktion von r_c

In dieser Grafik ist eine deutlich bessere Übereinstimmung der Messwerte mit der Quantisierten Elementarladung zu erkennen. Einige der Messwerte fallen leider nicht innerhalb des Fehlerbereichs mit einem Vielfachen der Elementarladung zusammen, diese Abweichung lässt sich für uns durch Ungenauigkeiten in der Messung zurückführen, wie zum Beispiel die Umkehr der Kondensatorspannung und der daraus resultierenden kurzen Beschleunigungsstrecke, sowie die Bewegung der Teilchen in 3D, die Brownsche Molekularbewegung und die Umweltbedingte Bewegung der Luft im Kondensator.

Zuletzt lässt sich nicht desto trotz die Elementarladung aus den Messwerten bestimmen. Dafür gilt

$$e = \frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i} \sum_{i=1}^n Q_i \cdot w_i \quad (27)$$

mit

$$w_i = \frac{1}{\Delta Q_i^2} \quad (28)$$

und dem Fehler

$$\Delta e = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{w_i}} \quad (29)$$

Woraus sich für unsere Messung eine Elementarladung von $(1,83 \pm 0.39) \cdot 10^{-19}C$ ergibt. Diese liegt innerhalb des Fehlerbereichs auf dem Literaturwert von $e = 1.602176634 \cdot 10^{-19}C$.

4 Diskussion

Abschließend noch eine Zusammenfassung. Die unkorrigierten Messwerte stimmen, wie zu erwarten, nicht mit den Literaturwerten über ein. Die korrigierten jedoch passen schon besser.

Auffällig ist, dass die korrigierten Ladungen und Radien geringer sind, als die ursprünglichen. Dies war zu erwarten, da die Korrektur die Geschwindigkeiten nach unten korrigiert.

Der große Fehler bei unserem Ergebnis lässt sich dadurch erklären, dass bei der Berechnung der Elementarladung alle Messwerte eingeflossen sind. Bei Betrachtung der Grafiken wird jedoch deutlich, dass ein paar der Messwerte wahrscheinlich Mehrfachgeladen sind. Der Großteil ist aber Einfach geladen. Einige andere Fehlerquellen wären, wie oben schon kurz angeschnitten, dass die Teilchen auch einen Drift aus der Bildebene raus hatten. Was dazu führt, dass die Tröpfchen während des Messvorgangs größer/kleiner und bei einer zu späten Anpassung des Mikroskops unscharf wurden.

Insgesamt hätte eine Statistik mit mehr Messwerten zu einem besseren Ergebnis geführt, da die Mehrfachladungen seltener sind, als die einfach geladenen Tröpfchen. Jedoch ist auch unser Ergebnis mit 20 Tröpfchen auf ein Ergebnis gekommen, welches mit Fehlerbereichs auf dem Literaturwert liegt.