Allgemeine Praktikumsanleitung

I. Physikalisches Institut
Stand: 4. Juni 2014

Sicherheitshinweise

Bitte halten Sie die Fluchtwege in den Praktikumsräumen frei. Lagern Sie also Ihre Taschen/Rucksäcke wann immer möglich in den dafür bereitgestellten Regalen oder unter den Tischen und hängen Sie Ihre Jacken an den Wandhaken auf.

Führen Sie Experimente immer mit gesundem Menschenverstand durch. Nehmen Sie Rücksicht auf andere Praktikanten, insbesondere wenn diese einen anderen Versuch durchführen und nicht um die Gefahren Ihres Experiments wissen können. Das gilt besonders, wenn Sie mit kochendem Wasser, elektrischen Geräten oder Druckgasen arbeiten. Auf spezielle Gefahren eines Experiments wird in der entsprechenden Versuchsanleitung hingewiesen.

Wenn Sie den Eindruck haben, dass ein Versuchsaufbau defekt ist, informieren Sie bitte Ihren Betreuer. Versuchen Sie keinesfalls den Aufbau mit improvisierten Werkzeugen selbst zu reparieren.

In jedem Praktikumsraum befindet sich ein Telefon. Für Notrufe wählen Sie bitte 01-112. Bei allen (auch kleineren) Unfällen informieren Sie bitte Ihren Betreuer und die Praktikumsleitung. Verbandzeug und Feuerlöscher befinden sich an gekennzeichneten Orten im Flur.

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeines zur Messpraxis und Fehlerquellen

Jede physikalische Messung ermittelt auf unterschiedlichsten Wegen Werte für zu bestimmende Größen. Diese Werte oder Maßzahlen sind mit einer Maßeinheit versehen. Diese Einheit ermöglicht erst den Vergleich verschiedener Messresultate. Messgeräte verschiedenster Art zeigen für eine Messung üblicherweise einen bestimmten Zahlenwert in einer bestimmten Einheit an. Diese Maßzahlen sind aber immer mit *Messfehlern* behaftet. Daher gibt man Messresultate immer zusammen mit einer Unsicherheit an, die besagt wie groß die Messfehler beim gewählten Experiment typischerweise sind. Fehlerquellen sind z.B.:

1.1 Eichfehler

Eichfehler treten bei Messinstrumenten auf, wenn z.B. bei einem Experiment andere äußere Bedingungen (Zimmertemperatur, Luftfeuchtigkeit etc.) herrschen, als bei der Eichung.

1.2 Empfindlichkeit und Trägheit von Messinstrumenten

Jedes Messinstrument nutzt die sichtbare Zustandsänderung eines Indikators, z.B. die Lageänderung eines mechanischen Zeigers, die Längenänderung einer Flüssigkeitssäule, der Farbwechsel einer Lösung usw. . Änderungen einer Messgröße, die so klein sind, dass sie zu keiner erkennbaren Zustandsänderung des Indikators führen, können nicht nachgewiesen werden. Jedes Instrument hat deshalb eine untere Nachweisgrenze.
Jede Zustandsänderung benötigt Energie (Spannarbeit einer Feder, Erwärmung einer Flüssigkeit). Der Energietransport erfolgt nicht beliebig schnell (mechanische Trägheit eines Zeigers, Wärmekapazität einer Flüssigkeitssäule usw.) . Es lassen sich daher nicht beliebig schnelle Änderungen einer Messgröße nachweisen, d.h. Messinstrumente sind träge. Mit einem Fieberthermometer, das die Körpertemperatur erst nach 1 Minute richtig anzeigt, kann man keine Temperaturschwankungen nachweisen, die innerhalb von Sekunden auftreten.
Der Energietransport erfolgt nicht verlustfrei (Reibung im Lager des Zeigers, Wärmeverluste). Die Verluste sind von den äußeren Bedingungen (Temperatur, Luftfeuchtigkeit, Luftzug usw.) abhängig und unterliegen Schwankungen.

1.3 Fehler beim Ablesen von Skalen

Bei jedem Messinstrument wird die Zustandsänderung des Indikators auf einer Skala abgelesen. Zwischen der Skala und einem Zeiger oder einer Flüssigkeitssäule besteht immer ein Abstand. Welchen Skalenwert man abliest, hängt davon ab, wo sich das menschliche Auge des Beobachters befindet (siehe Abb. 1) . Die Änderung der Ablesung bei einer seitlichen Bewegung des Auges nennt man Parallaxe. Das Ablesen der Skala muss möglichst parallaxenfrei erfolgen. Durch das Anbringen eines Spiegels auf der Skala und durch geringe Abstände zwischen Zeiger und Skala wird dies erleichtert. Parallaxenfehler lassen sich jedoch nicht vollständig vermeiden und unterliegen Schwankungen, da das menschliche Auge nicht in der Lage ist, immer unter exakt den gleichen Bedingungen zu beobachten.

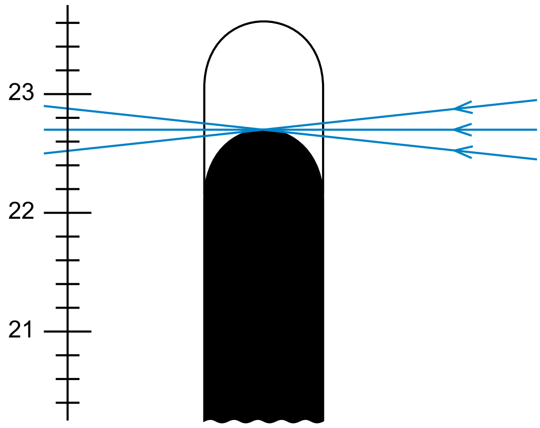

Abbildung 1: Parallaxenfehler beim Ablesen

1.4 Subjektive Fehler

Ablesefehler ergeben sich auch, wenn ein bestimmtes Ergebnis erwartet wird. Bei der Durchführung einer Messreihe geht man oft davon aus, dass der zweite Messwert etwa in der Nähe des ersten Wertes liegt. Man gibt folglich dem ersten Messwert eine höhere Aussagekraft als allen nachfolgenden.

Weitere subjektive Fehler ergeben sich, wenn Justierungen und Kalibrierungen nicht sorgfältig durchgeführt werden. Die Genauigkeit eines Resultats hängt daher entscheidend von der kritischen Sorgfalt des Experimentators ab.

1.5 Systematische und zufällige Fehler

Man unterscheidet zwei Typen von Messfehlern: systematische und zufällige Fehler.

1.5.1 Systematische Fehler

Systematische Fehler treten dann auf, wenn Maßstäbe falsch geeicht sind oder störende Einflüsse (Verluste durch Reibung, durch schlechte Isolation des Systems usw.) unberücksichtigt bleiben. Die systematischen Fehler können nur durch eingehende kritische Prüfung des gesamten Messvorgangs erkannt und berücksichtigt werden.

1.5.2 Zufällige (statistische) Fehler

Verantwortlich für das Auftreten von zufälligen Fehlern ist die begrenzte Empfindlichkeit und Genauigkeit der Sinnesorgane des Beobachters und seiner Instrumente. Sie sind daher unvermeidlich und führen zu statistischen Schwankungen der Messergebnisse.

2 Angabe von Werten

Alle während der Auswertung berechneten End- und Zwischenergebnisse sind in der Form

$$\boxed{\text{Pysikalische Größe} = (x \pm \Delta x) \cdot \text{Zehnerpotenz Einheit} \quad \left(\pm \frac{100 \cdot \Delta x}{x}\ \%\right)}$$

anzugeben. Dabei werden der Wert x und seine Unsicherheit Δx auf die Stelle gerundet, an der die Unsicherheit einsetzt. Das heißt, Δx sollte nur eine Ziffer $\neq 0$ enthalten.
Ausnahme:
Die erste Ziffer $\neq 0$ von Δx ist eine 1. In diesem Fall wird eine zweite Stelle (sowohl bei Δx, als auch bei x) angegeben, weil die Unsicherheit gerade erst die Größenordnung gewechselt hat.

Die Stellen, die nicht durch den Messfehler beeinflusst sind, nennt man *signifikant.* Alle übrigen sind unsicher, also nicht-signifikant. Um Rundungsfehler zu vermeiden, werden für Zwischenrechnungen drei nichtsignifikante Stellen mitgenommen. Diese kann man auch in der Auswertung angeben.

Beispiel:

Wir gehen davon aus, dass wir eine Geschwindigkeit v aus Messwerten s und t berechnet haben. `Excel` liefert uns dafür beispielsweise:

$$\begin{aligned} v &= \frac{s}{t} &&= 20498,547349609\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ \Delta v &= v \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2} &&= 598,495663597\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Dann müsste man angeben:

$$v = (2,05 \pm 0,06) \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad (\pm\ 2.9\ \%)$$

Anders wäre die Situation, wenn die Unsicherheit z.B.

$$\Delta v = 128,455668557\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

gewesen wäre. Dann hätte man angeben müssen:

$$v = (2,050 \pm 0,013) \cdot 10^4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad (\pm\ 0.6\ \%)$$

Anmerkung:
Das hier gesagte bezieht sich auf Ergebnisse und Zwischenergebnisse. Messwerte sollte man immer mit allen ablesbaren Stellen angeben.

3 Fehlerabschätzung direkt gemessener Größen, Mittelwert und Standardabweichung

Messunsicherheiten sind ein Maß für die Messgenauigkeit und geben nicht an, um welchen Betrag das Messergebnis falsch ist. Zu ihrer Bestimmung dient die *Fehlerrechnung*, die bei jedem physikalischen Experiment notwendig ist. Machen Sie sich klar, dass die Angabe der Messgenauigkeit notwendig ist, um Messergebnisse vergleichen zu können.
Wenn man z.B herausfinden will, ob die Erdbeschleunigung g weltweit konstant ist, benötigt man nicht nur die Resultate für g von verschiedenen Punkten der Erdoberfläche, sondern auch eine Angabe, wie vertrauenswürdig diese Resultate sind. Dabei kann nicht nur die Angabe einer zu kleinen Unsicherheit, sondern auch die Angabe einer zu großen Unsicherheit eine richtige Folgerung aus zwei Messungen von g verhindern.

3.1 Normalverteilung

Wir betrachten eine physikalische Größe, deren Wert wir experimentell ermitteln wollen. Diese Größe hat einen *wahren Wert* $\hat{x}$. Jede Messung i der Größe wird nun einen Messwert x_i liefern, der vom wahren Wert mehr oder weniger abweicht. Wenn man sehr viele Messungen durchführt, wird man beobachten, dass die Häufigkeitsverteilung $N(x)$ der verschiedenen Messwerte x einer Gauß'schen Normalverteilung folgt:

$$N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\hat{x})^2}{2\sigma^2}}$$

Hier bezeichnet σ die *Standardabweichung* der Kurve. Sie ist definiert als der Abstand zum wahren Wert $\hat{x}$, bei dem die Funktion $N(x)$ den Wert $\frac{1}{e}f(\hat{x})$ annimmt. Der Vorfaktor $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ dient zur Normierung der Funktion. Er sorgt dafür, dass das Integral über die Funktion den Wert 1 annimmt. Anschaulich bedeutet das, dass die Wahrscheinlichkeit, einen Wert zwischen $-\infty$ und ∞ zu messen, 100 % ist.
In der Realität kann man Messwerte üblicherweise nicht kontinuierlich aufnehmen, sondern sie liegen in diskreten Intervallen einer Breite dx. Abbildung 2 zeigt beide Fälle, den Idealfall der kontinuierlichen Kurve und das Balkendiagramm für die diskrete Verteilung von Messwerten.

3.2 Mittelwert

Bei jeder Messung gibt es eine zwar geringe, aber nicht vernachlässigbare Wahrscheinlichkeit, einen Messwert zu erhalten, der sehr weit vom wahren Wert der zu bestimmenden Größe entfernt liegt (siehe Abbildung 2). Wenn man solche „Ausreißer“ ausschließen und etwas über die Genauigkeit seiner Messresultate erfahren will, wiederholt man daher die Messung und untersucht die Abweichungen der Messresultate voneinander.

3.2.1 Messungen gleicher Genauigkeit

Wir betrachten zunächst den Fall, dass alle Messresultate x_i voneinander *unabhängig* sind und gleiche Genauigkeit aufweisen. Wird z.B. der Abstand x zweier Punkte mit einem fehlerfreien Längenstandard n-mal bestimmt, dann erhält man als Resultat n Werte:

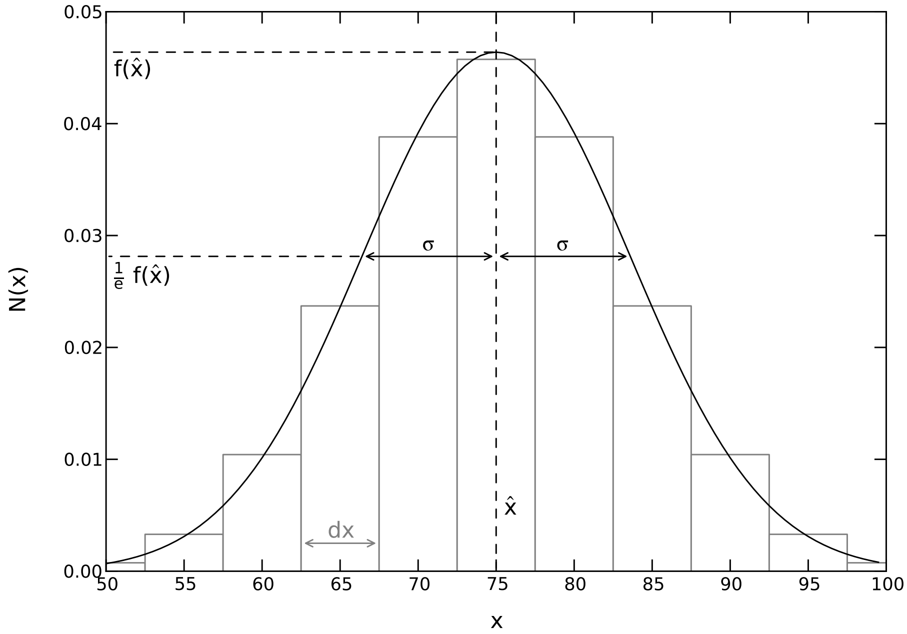

Abbildung 2: Die Häufigkeitverteilung $N(x)$ der Messwerte x im Intervall $[x, x + \mathrm{d}x]$ (graue Balken) bzw. als kontinuierliche Funktion (schwarze Kurve) gehorcht einer Gauß'schen Normalverteilung.

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_i \ldots x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$$

Diese streuen alle um den *wahren Wert* $\hat{x}$. Führt man sehr viele Messungen durch, dann lässt sich die Häufigkeit $N(x)$, mit der Messwerte in Intervallen der Breite $\mathrm{d}x$ liegen, nach dem Vorbild von Abbildung 2 in einem Histogramm darstellen.

In der Praxis kann man ein Experiment jedoch nicht beliebig häufig durchführen. Man wiederholt einen Versuch in der Regel 5 bis 10 mal (n = 5 - 10), so dass der wahre Wert $\hat{x}$ nicht aus der Normalverteilung bestimmt werden kann. Man benutzt aber alle n Messwerte, um einen Wert für $\hat{x}$ abzuschätzen, und bezeichnet als *wahrscheinlichsten Wert* $\overline{x}$ das arithmetische Mittel aller Messwerte (im Folgenden *Mittelwert* genannt):

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Anschließend ermittelt man einen Schätzwert für die Standardabweichung σ der Gaußfunktion, den *mittleren quadratischen Fehler der Einzelmessung* Δx_e. Er ist durch die Summe der Abweichungsquadrate $\sum(\overline{x} - x_i)^2$ gegeben und beträgt

$$\Delta x_e = \pm\sqrt{\frac{(\overline{x} - x_1)^2 + (\overline{x} - x_2)^2 + \ldots + (\overline{x} - x_n)^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2}$$

Wir interessieren uns aber in der Regel nicht für die Messgenauigkeit des Einzelergebnisses, sondern dafür, wie genau der Mittelwert aller Ergebnisse bestimmt werden kann. Dazu betrachten wir mehrere Messreihen j vom Umfang n, die alle jeweils einen Mittelwert $\overline{x}_j$ liefern. Die Verteilung dieser Mittelwerte folgt wieder einer Normalverteilung mit einer *Standardabweichung* $\overline{\sigma}$ und einem mittleren quadratischen Fehler $\Delta\overline{x}$. Dieser Wert liefert also eine gute Einschätzung für den *mittleren quadratischen Fehler des Mittelwertes*. Es lässt sich zeigen, dass er gegeben ist durch:

$$\boxed{\Delta\overline{x} = \frac{\Delta x_e}{\sqrt{n}} = \pm\sqrt{\frac{(\overline{x}-x_1)^2+(\overline{x}-x_2)^2+\ldots+(\overline{x}-x_n)^2}{n(n-1)}} = \pm\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-x_i)^2}}$$

Beispiel:

Die Schwingungsdauer T eines Pendels wurde 5 mal gemessen und ergab

n	1	2	3	4	5	$\sum$
T_i (s)	5,4	4,8	5,1	4,5	5,2	25,0

Als Mittelwert erhalten wir also: $\overline{T} = \frac{1}{5}\sum T_i = 5s$

Damit berechnen wir die Abweichungsquadrate:

n		1	2	3	4	5	$\sum$
$T_i - \overline{T}$	(s)	$+0,4$	$-0,2$	$+0,1$	$-0,5$	$+0,2$	0,0
$(T_i - \overline{T})^2$	(s^2)	$0,16$	$0,04$	$0,01$	$0,25$	$0,04$	0,50

Wir erhalten als mittleren Fehler der Einzelmessung:
$$\Delta T_e = \pm\sqrt{\frac{1}{4}\sum(T_i-\overline{T})^2} = \pm\ 0,35 \text{ s}$$

Damit ist der mittlere Fehler des Mittelwertes: $\Delta\overline{T} = \pm\frac{\Delta T_e}{\sqrt{5}} = \pm\ 0,16$ s

Das Messergebnis lautet also: $T = (5,0 \pm 0,2)$ s ($\pm$ 4 %)

Der mittlere quadratische Fehler des Mittelwertes liefert uns ein Maß für die statistischen Schwankungen der Messwerte und hängt nicht von den Messunsicherheiten ab, weshalb man ihn auch *externen* Fehler nennt. Er ist immer dann eine sinnvolle Fehlerangabe, wenn die Unsicherheiten der einzelnen Messungen statistisch verteilt sind. Dies ist im obigen Beispiel der Fall. Anders ist die Situation, wenn die Messmethode an sich Unsicherheiten enthält, die im Vergleich zur statischen Streuung der Messwerte groß sind und systematisch in eine bestimmte Richtung abweichen können. Wenn wir z.B. eine Länge im Mikrometerbereich mit einem Zollstock messen wollen, werden wir bei allen Messungen das gleiche Ergebnis erhalten. Die Standardabweichung wird also verschwinden. Das bedeutet aber nicht, dass unsere Messung fehlerfrei war. In einem solchen Fall ist die Unsicherheit des

Messergebnisses durch die experimentelle Unsicherheit der Messwerte gegeben (*interner* Fehler).

3.2.2 Messungen verschiedener Genauigkeit

Gegeben sind n Messergebnisse einer Größe x mit verschiedenen Unsicherheiten:

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \pm & \Delta x_1 \\ x_2 & \pm & \Delta x_2 \\ & \vdots & \\ x_n & \pm & \Delta x_n \end{array}$$

Gesucht sind der wahrscheinlichste Wert $\overline{x}$ und der mittlere quadratische Fehler $\Delta\overline{x}$.
Zur Mittelwertbildung trägt jedes Messergebnis bei. Dabei müssen Werte mit kleinen Unsicherheiten stärker berücksichtigt werden, als Werte mit großen Unsicherheiten. Deshalb ordnet man jedem Messergebnis ein *relatives Gewicht*

$$w_i = \frac{1}{(\Delta x_i)^2}$$

zu. Der *gewichtete Mittelwert* berechnet sich dann aus den Einzelmessungen als:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}}$$

Die Unsicherheit dieses Resultats kann man auf zwei Arten abschätzen. Man kann die statistische Streuung der Einzelmesswerte berücksichtigen (externer Fehler) oder die Auswirkung der Messunsicherheiten auf die Einzelmessungen x_1 (interner Fehler).
Der *externe Fehler* ist gegeben durch:

$$\boxed{\Delta\overline{x}_{\text{extern}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} w_i\,(x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} w_i}}}$$

Den *internen Fehler* erhält man aus dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz (siehe Abschnitt 4):

$$\boxed{\Delta\overline{x}_{\text{intern}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i}}}$$

Üblicherweise berechnet man beide Fehler und gibt als Unsicherheit $\Delta\overline{x}$ den größeren der beiden Werte an.

Beispiel:

Beispiel: Es soll der gewichtete Mittelwert aus drei Messungen eines Ohmschen Widerstandes berechnet werden:

$$R_1 = (42{,}0 \pm 0{,}5)\ \Omega\ (\pm\ 1{,}2\ \%)$$
$$R_2 = (40{,}8 \pm 0{,}3)\ \Omega\ (\pm\ 0{,}8\ \%)$$
$$R_3 = (41{,}1 \pm 0{,}6)\ \Omega\ (\pm\ 1{,}5\ \%)$$

Die Gewichte der Messungen betragen

$$w_1 = \frac{1}{(0,5\ \Omega)^2} = 4\ \frac{1}{\Omega^2}, \quad w_2 = \frac{1}{(0,3\ \Omega)^2} = 11\ \frac{1}{\Omega^2}, \quad w_3 = \frac{1}{(0,6\ \Omega)^2} = 3\ \frac{1}{\Omega^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum w_i = 18\ \frac{1}{\Omega^2}\ .$$

Für den Mittelwert erhalten wir also

$$\overline{R} = \frac{4\ \frac{1}{\Omega^2} \cdot 42,0\ \Omega + 11\ \frac{1}{\Omega^2} \cdot 40,8\ \Omega + 3\ \frac{1}{\Omega^2} \cdot 41,1\ \Omega}{18\ \frac{1}{\Omega^2}} = 41,1\ \Omega\ .$$

Damit ergeben sich die internen und externen Fehler des Mittelwertes zu

$$\begin{aligned}
\Delta\overline{R}_{\text{intern}} &= \frac{1}{\sqrt{18\ \frac{1}{\Omega^2}}} = 0,2\ \Omega \\
\Delta\overline{R}_{\text{extern}} &= \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\left(4\ \frac{1}{\Omega^2}\,(42,0\ \Omega - 41,1\ \Omega)^2 + 11\ \frac{1}{\Omega^2}\,(40,8\ \Omega - 41,1\ \Omega)^2 + 3\ \frac{1}{\Omega^2}\,(41,1\ \Omega - 41,1\ \Omega)^2\right)}{18\ \frac{1}{\Omega^2}}} \\
&= 0,3\ \Omega \\
\Rightarrow \quad \frac{\Delta\overline{R}}{\overline{R}} &= \frac{0,3\ \Omega}{41,1\ \Omega} = 0,008
\end{aligned}$$

Das Resultat lautet also:

$$\overline{R} = (41,1 \pm 0,3)\ \Omega\ (\pm\ 0,8\ \%)$$

3.3 Standardabweichung und Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Messresultats

Die Standardabweichung ist ein Schätzwert für die Breite σ der Normalverteilung

$$N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-\hat{x})^2}{2\sigma^2}}$$

um den wahren Wert $\hat{x}$. Abbildung 3 zeigt Normalverteilungen für $\hat{x} = 4, \sigma = 2$ und $\hat{x} = 16$, $\sigma = 4$. Der Faktor $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ normiert die Verteilungsfunktion derart, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(x)\ \mathrm{d}x = 1$$

Die Fläche unter den beiden Normalverteilungen von Abbildung 3 sind gleich und haben den Wert 1. Das Flächenelement $N(x) \cdot \mathrm{d}x$ kann daher als Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Messwertes im Intervall zwischen x und $x + \mathrm{d}x$ interpretiert werden. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Wertes im Intervall $[\hat{x} - \sigma, \hat{x} + \sigma]$ beträgt

$$\int_{-\sigma}^{+\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-\hat{x})^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = 0,68$$

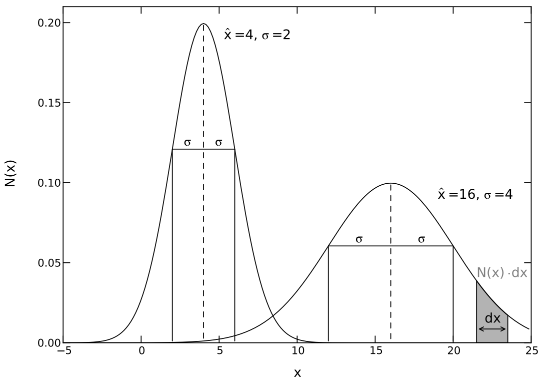

Abbildung 3: Vergleich zweier Normalverteilungen $N(x)$ mit unterschiedlichen Mittelwerten $\hat{x}$ und Standardabweichungen σ. Die Wahrscheinlichkeit, einen Wert im Intervall $[x, x + \mathrm{d}x]$ zu finden, ist gegeben durch das Flächenelement $N(x) \cdot \mathrm{d}x$.

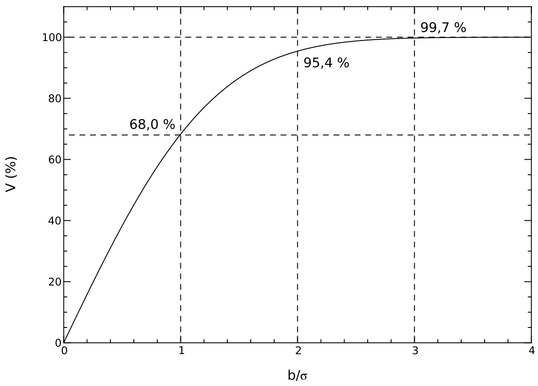

Abbildung 4: Vertrauensniveau V als Funktion der Breite b des Unsicherheitsintervalls in Einheiten der Standardabweichung σ.

Die Berechnung des mittleren quadratischen Fehlers bedeutet demnach nichts anderes als die Abschätzung eines Intervalls, in dem ein Messwert x mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,68 = 68\ \%$ gefunden wird. Auch der wahre Wert $\hat{x}$ der Messgröße liegt folglich mit einer Wahrscheinlichkeit von 68 % innerhalb der Fehlergrenzen.

3.4 Vertrauen in Messresultate, Diskrepanz, Verwerfen von Messergebnissen

Die Unsicherheit $\Delta\overline{x}$ eines Messergebnisses $\overline{x}$ wird durch die Angabe der Standardabweichung σ derart charakterisiert, dass eine Wiederholung der Messung mit einer Wahrscheinlichkeit von 68 % einen Messwert innerhalb des Intervalls $[\overline{x} - \Delta\overline{x}, \overline{x} + \Delta\overline{x}]$ liefert. Das *Vertrauensniveau* des Messergebnisses beträgt 68%. Ein höheres Vertrauensniveau – beispielsweise für Sicherheitskontrollen und Garantieaussagen – erfordert die Vergrösserung des Unsicherheitsintervalls. Gibt man anstelle von $\pm\ \sigma$ als Fehlergrenzen $\pm\ 2\sigma$ an, so liegt das Vertrauensniveau bei 95,4 % (siehe Abbildung 4 ($\frac{b}{\sigma} = 2$)).
Die Frage nach dem Vertrauen in Messergebnisse stellt sich z.B. dann, wenn Messergebnisse verschiedener Messungen verglichen werden müssen. Ergeben sich z.B. für die Länge x eines Stabes die Werte

$$\begin{aligned} x_1 &= (14,0 \pm 0,2)\ \text{cm}\ (\pm\ 2\ \%) \\ x_2 &= (13,9 \pm 0,1)\ \text{cm}\ (\pm\ 1\ \%) \end{aligned}$$

dann stimmen beide Ergebnisse innerhalb der Fehlergrenzen überein. Sie sind *konsistent*, da die *Diskrepanz* $(x_1 - x_2)$ kleiner als die Standardabweichung ist.

Dagegen stimmen die Ergebnisse

$$\begin{aligned} x_1 &= (14,0 \pm 0,2) \text{ cm } (\pm\ 2\ \%) \\ x_2 &= (10,9 \pm 0,1) \text{ cm } (\pm\ 1\ \%) \end{aligned}$$

innerhalb der Fehlergrenzen nicht überein. Ihre Diskrepanz ist größer als die Breite der Unsicherheitsintervalle. Beide Werte sind inkonsistent.
Derartige Diskrepanzen werden durch systematische Fehler verursacht. Ihre Aufklärung erfordert eine sorgfältige Analyse aller Bestandteile eines Experiments (Apparatur, Auswertung, Theorie).
Bei der Durchführung einer Messreihe ist man geneigt, Messdaten außerhalb der üblichen Schwankungsbreite zu verwerfen. Wie problematisch dies sein kann, wird anhand der in Abbildung 3 dargestellten Verteilungen für:

$$\begin{aligned} x_1 &= (16 \pm 4) \text{ cm } (\pm\ 29\ \%) \\ x_2 &= (4 \pm 2) \text{ cm } (\pm\ 100\ \%) \end{aligned}$$

deutlich. Beide Werte stimmen innerhalb der Standardabweichung nicht überein. Wegen der großen Unsicherheiten überlappen sich aber beide Verteilungen geringfügig. Es kann daher nicht mit absoluter Sicherheit ausgeschlossen werden, dass der wahre Wert innerhalb beider Verteilungen liegt und beide Ergebnisse denselben wahren Wert repräsentieren. Man sollte daher Messwerte nicht leichtfertig verwerfen, sondern dies nur dann tun, wenn offensichtlich systematische Messfehler gemacht wurden oder wenn die Abweichungen so groß sind, dass das Eintreffen des Ergebnisses unwahrscheinlich ist (außerhalb der 3-4-fachen Standardabweichung).

4 Fehlerfortpflanzung

Häufig kann eine gesuchte Größe f nicht direkt gemessen werden. Sie lässt sich aber aus direkt messbaren Größen $x, y, z...$ berechnen, d.h.

$$f = f(x, y, z, ...)$$

Wir nehmen an, dass in unabhängigen Messungen folgende Mittelwerte und mittlere Fehler bestimmt wurden:

$$\begin{gathered} x = \overline{x} \pm \Delta\overline{x} \\ y = \overline{y} \pm \Delta\overline{y} \\ z = \overline{z} \pm \Delta\overline{z} \\ \vdots \end{gathered}$$

Wie erhält man nun den mittleren Fehler $\Delta f\,(\overline{x})$ zu $f\,(\overline{x})$?
Wir betrachten dazu in Abbildung 5 eine willkürliche Funktion $f(x)$. Wenn wir wissen wollen, wie sich die Unsicherheit des Mittelwertes $\overline{x}$ auf die Bestimmung von $f\,(\overline{x})$ auswirkt, könnten wir die Werte $f\,(\overline{x} - \Delta\overline{x})$ und $f\,(\overline{x} + \Delta\overline{x})$ bestimmen. Dieses Verfahren liefert uns in der Regel Unsicherheitsgrenzen für $f\,(\overline{x})$, die nicht mehr symmetrisch sind. Besonders

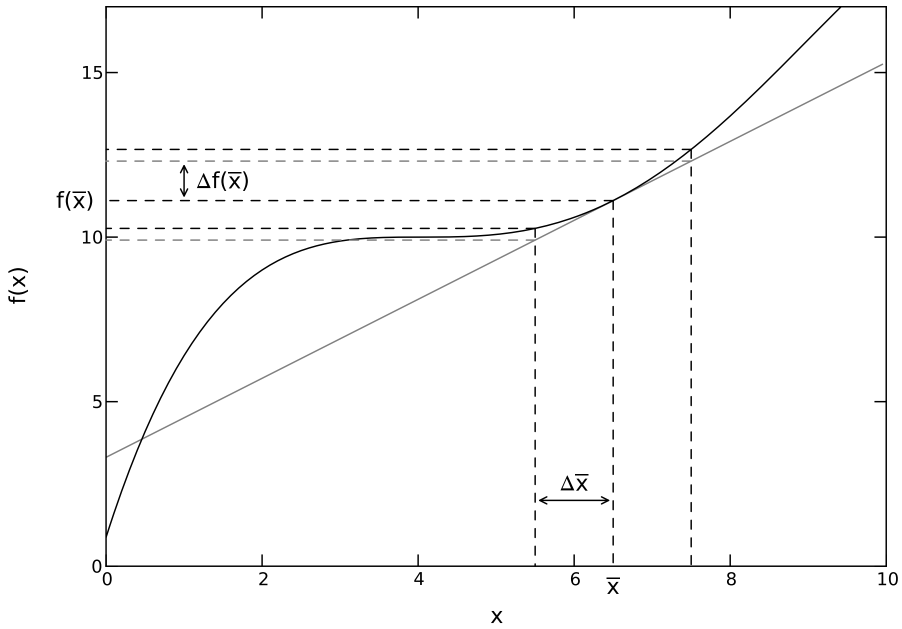

Abbildung 5: Bestimmung von Unsicherheitsgrenzen nach dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz. Im Bereich um $\overline{x}$ wird die Funktion $f(x)$ durch ihre Tangente angenähert. Bei relativ kleinen Unsicherheiten für $\overline{x}$ weichen die so ermittelten Unsicherheitsgrenzen für f nur gering von den Resultaten aus $f(\overline{x} \pm \Delta\overline{x})$ ab.

für Funktionen von mehreren Variablen wird die Bestimmung und Angabe von Unsicherheitsgrenzen so sehr schnell unübersichtlich und aufwendig. Wenn die Unsicherheit $\Delta\overline{x}$ relativ klein ist, kann man f im Bereich um $\overline{x}$ durch die Tangente der Funktion annähern. Sie ist gegeben durch die Funktion

$$T(x) = f(\overline{x}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\overline{x}} \cdot (x - \overline{x}) \ ,$$

wobei $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\overline{x}}$ die *partielle Ableitung* der Funktion f nach der Variablen x ausgewertet an der Stelle $x = \overline{x}$ bezeichnet. Damit erhalten wir für die Unsicherheitsgrenzen:

$$\begin{aligned} T(\overline{x} \pm \Delta\overline{x}) - T(\overline{x}) &= f(\overline{x}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\overline{x}} \cdot (\overline{x} \pm \Delta\overline{x} - \overline{x}) - f(\overline{x}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\overline{x}} \cdot (\overline{x} - \overline{x}) \\ \Rightarrow \qquad \Delta T(\overline{x}) &= \left| \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\overline{x}} \cdot (\pm\Delta\overline{x}) \right| \end{aligned}$$

Diese Regel können wir auf Funktionen von mehreren Variablen verallgemeinern, indem wir das *geometrische Mittel* der einzelnen Fehlerbeiträge verwenden. Wir erhalten so das *Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz:*

$$\boxed{\Delta f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots) = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\overline{x}} \cdot \Delta\overline{x}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=\overline{y}} \cdot \Delta\overline{y}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z=\overline{z}} \cdot \Delta\overline{z}\right)^2 + \ \ldots}}$$

Beispiele:

1. f ergibt sich aus x durch Addition einer Zahl A:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + A \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} &= 1 \\ \Rightarrow \quad f(\overline{x}) &= \overline{x} + A \ \pm \ \Delta\overline{x} \end{aligned}$$

Die Werte von f sind um $+A$ gegenüber den x-Werten verschoben. Sie besitzen daher die gleiche Streuung wie die x-Werte und einen um A verschobenen Mittelwert.

2. f ist das Produkt aus x und einer Zahl B:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot B \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} &= B \\ \Rightarrow \quad f(\overline{x}) &= \overline{x} \cdot B \ \pm \ \Delta\overline{x} \cdot B \end{aligned}$$

In diesem Fall zeigen die Werte $\frac{f}{B}$ den gleichen Mittelwert und die gleiche Streuung wie die x-Werte.

3. f ist die Summe zweier unabhängiger Größen x und y:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x + y \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} &= 1 \\ \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} &= 1 \\ \Rightarrow \quad f(\overline{x},\overline{y}) &= \overline{x} + \overline{y} \ \pm \ \sqrt{(\Delta\overline{x})^2 + (\Delta\overline{y})^2} \end{aligned}$$

4. f ist das Produkt zweier unabhängiger Größen x und y:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x \cdot y \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} &= y \\ \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} &= x \\ \Rightarrow \quad f(\overline{x},\overline{y}) &= \overline{x} \cdot \overline{y} \ \pm \ \sqrt{(\overline{y} \cdot \Delta\overline{x})^2 + (\overline{x} \cdot \Delta\overline{y})^2} \end{aligned}$$

5 Graphische Darstellungen und ihre Auswertung

5.1 Graphische Darstellungen

Ein physikalisches Experiment besteht häufig darin, dass man eine bestimmte experimentelle Bedingung variiert und untersucht, welchen Effekt dies auf eine andere physikalische Größe hat. Man gibt also eine Variable vor (unabhängige Variable) und misst die Wirkung auf eine zweite Variable (abhängige Variable). Der Zusammenhang zwischen beiden Größen lässt sich besonders einfach aus einer graphischen Darstellung erkennen.
Dazu trägt man die unabhängige Variable als Abszisse (x-Achse) und die abhängige Variable als Ordinate (y-Achse) auf. Die Skaleneinteilung wählt man so, dass die Messresultate die ganze Breite und Höhe des Bildes einnehmen. Die Skalen werden mit den Messgrößen und den verwendeten Maßeinheiten beschriftet. Die Bildunterschrift (Legende) sollte in knapper Form den Zusammenhang zwischen beiden Variablen erklären. Jeder einzelne Messpunkt wird mit Fehlerbalken versehen. Hierzu trägt man die experimentellen Unsicherheiten der abhängigen Variablen nach oben und unten auf (siehe Abb. 7). Falls auch die unabhängige Variable nur ungenau vorgegeben werden kann, muss auch das durch Fehlerbalken kenntlich gemacht werden.

5.2 Graphische Protokollierung von Messungen

Machen Sie es sich zur Gewohnheit, jede Messreihe nicht nur tabellarisch, sondern zur Kontrolle immer auch graphisch zu protokollieren. Eklatante Messfehler und das plötzliche Auftreten systematischer Fehler lassen sich auf diese Weise leichter erkennen. Das graphische Protokoll muss die Versuchsnummer, Datum und Namen des Protokollanten tragen.

5.3 Graphische Darstellung von Messresultaten

In welcher Form Endergebnisse eines Experimentes graphisch dargestellt werden sollten, wird durch die Gegenüberstellung der beiden Abbildungen 6 und 7 deutlich:

Abbildung 6: FALSCH! Zu bemängeln ist:

1. die Bildunterschrift ist dürftig,
2. die Größen und Maßeinheiten an den Koordinatenachsen fehlen,
3. es werden keine Angaben zu den Messunsicherheiten gemacht,
4. die Verbindungskurve entspricht nicht dem physikalischen Zusammenhang der Messwerte,
5. die Skalierung der x-Achse ist ungünstig gewählt,
6. die Abbildung nutzt nicht die gesamte Papierfläche aus.

Abbildung 7: RICHTIG! Hier treten die oben genannten Fehler nicht auf.

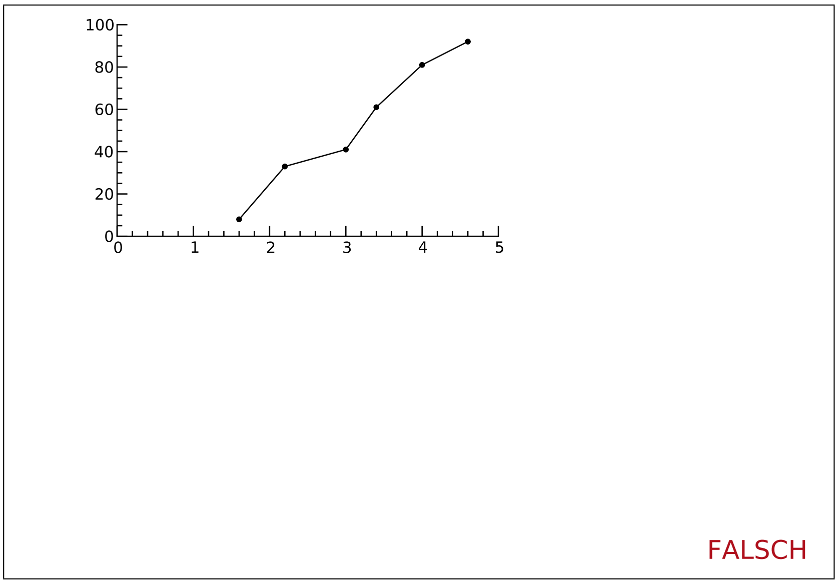

Abbildung 6: Fallzeit

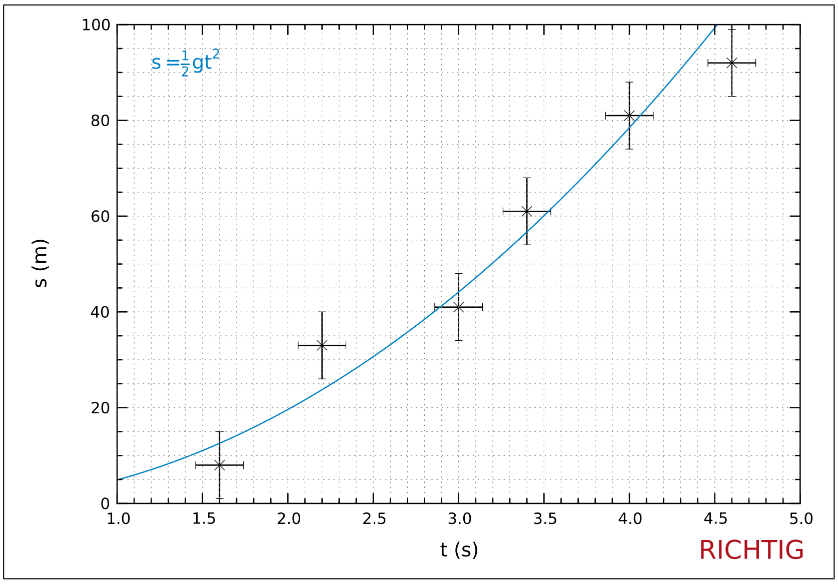

Abbildung 7: s-t-Diagramm des freien Falls $s = \frac{1}{2}gt^2$. Aufgetragen ist die Fallhöhe s als Funktion der Fallzeit t.

Das Anbringen der Skalen an allen Seiten gestattet es, der Darstellung möglichst genaue Daten zu entnehmen z.B. Werte zwischen den Messpunkten (Interpolationswerte) oder Steigungen der Kurve. Dazu liest man Abszissen- und Ordinatenwerte mit Hilfe eines Lineals ab, dessen Parallelführung zu den Koordinatenachsen durch die beidseitigen Skalen erleichtert wird. Auch die Gitternetzlinien vereinfachen das Ablesen von Werten bzw. das Einzeichnen von Steigungsdreiecken. Bei ausgedruckten Diagrammen, aus denen später Werte entnommen werden müssen, sind sie daher unverzichtbar. Bei gezeichneten Diagrammen verwendet man daher *Millimeterpapier*. Um Zeichenfehler sauber korrigieren zu können, sind Diagramme grundsätzlich mit (spitzem!) Bleistift zu zeichnen. Für alle geraden Linien ist ein Lineal zu verwenden. Insbesondere für Geradenanpassungen sind transparente Lineale sehr hilfreich.

5.4 Graphische Auswertung von Messdaten

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Die aufgetragenen Daten hängen linear zusammen. In diesem Fall bestimmt man die Ausgleichsgerade nach einem der Verfahren, die in Abschnitt 5.4.3 bzw. 5.4.4 beschrieben sind. Aus der ermittelten Geradengleichung können nun die gesuchten Werte und ihre Unsicherheiten ermittelt werden.

2. Die aufgetragenen Daten hängen nicht linear zusammen. In diesem Fall zeichnet man eine Ausgleichskurve, die dem erwarteten Zusammenhang entspricht, an die gemessenen Datenpunkte. An dieser Ausgleichskurve lassen sich die gesuchten Werte ablesen. Wie man ihre Unsicherheiten bestimmt, diskutieren wir in Abschnitt 5.4.1. Alternativ kann man häufig die Werte linearisieren (siehe Abschnitt 5.4.2) und eine Geradenanpassung durchführen.

5.4.1 Ablesen von Werten aus Diagrammen

Das ist erstmal so einfach wie es klingt. Aber es fragt sich natürlich, wie man die Unsicherheiten für die so erhaltenen Werte bestimmt. Dazu muss man zwei Fälle unterscheiden. (Wir gehen davon aus, dass x bekannt und y gesucht ist; das ist selbstverständlich auch andersherum möglich.)

1. Man weiß genau, an welcher Stelle man den Wert ablesen möchte, das heißt x (z.B.) ist fehlerlos vorgegeben. In diesem Fall ist die für y angegebene Unsicherheit eine Abschätzung, wie genau es gelungen ist, den Wert dort abzulesen. Abweichungen passieren hier auf beiden Achsen, da sie eine diskrete Skalierung haben, und man üblicherweise irgendwo dazwischen ablesen muss. Als Unsicherheit gibt man hier mindestens die Hälfte eines y-Skalenteils an. Eine weitere Quelle für Ablesefehler ist die Strichdicke des Graphen. Auch das muss bei der Unsicherheitsabschätzung berücksichtigt werden.

2. Man hat den x-Wert schon fehlerbehaftet vorgegeben. In diesem Fall kommt zu den oben genannten Fehlerquellen noch eine weitere hinzu. Man muss sich also anschauen, um wieviel sich der y-Wert verändert, wenn man x bis an die Unsicherheitsgrenzen variiert. Diese y-Variation ist die hauptsächliche Unsicherheit für y, zu dem man die anderen Fehlerquellen hinzuzählen muss.

Die Genauigkeit, mit der Punkte in eine Graphik eingetragen und ihr entnommen werden können, ist individuell verschieden. Sie liegt auf Millimeterpapier bei etwa 0,2 mm unabhängig von der gewählten Skala. Diese Unsicherheit muss dann in die gewählte Skalierung umgerechnet werden.

5.4.2 Linearisierung

Es kommt häufig vor, dass man kompliziertere Zusammenhänge $y = f(x)$ der bestimmten Größen vermutet, als lineare. Mit der oben beschriebenen Methode kann man natürlich einzelne Werte zwischen den Messwerten aus dem zugehörigen Diagramm ermitteln. Oft ist man aber daran interessiert, den Zusammenhang $y = f(x)$ quantitativ beschreiben zu können. Das bedeutet man möchte die Parameter der Funktion f und ihre Unsicherheiten bestimmen. Um dies graphisch zu tun, *linearisiert* man die aufgenommenen Wertepaare. Das heißt, man trägt die Werte y nicht gegen x, sondern gegen eine Funktion von x auf, oder alternativ ein Funktion von y gegen x. Häufig bieten sich hier Bestandteile der Funktion f oder ihrer Umkehrfunktion f^{-1} an (siehe Beispiel 1). In einigen Fällen trägt man statt der Funktion oder Umkehrfunktion den Logarithmus von einer oder von beiden Messgrößen auf, um die Werte zu Linearisieren (siehe Beispiele 2 und 3).

Beispiele:

1. Es wird der Zusammenhang

$$y = a \cdot x^2 + b$$

vermutet. Trägt man y als Funktion von x^2 auf, so ist auch das eine Geradengleichung. Ein solcher Fall liegt bei dem in Abbildung 7 dargestellten Zusammenhang zwischen Fallzeit und Fallhöhe vor. Wenn wir s gegen t^2 auftragen, erhalten wir einen linearen Zusammenhang und können eine graphische Geradenanpassung durchführen (siehe Abbildung 8 in Abschnitt 5.4.3).

2. Es wird der Zusammenhang

$$y = a \cdot e^{b \cdot x}$$

vermutet. Durch Logarithmieren erhält man

$$\ln y \;=\; \ln(a \cdot e^{bx}) \;=\; \ln a + b \cdot x$$

Dies hat die Form einer Geradengleichung. Dies nennt man *logarithmische Auftragung.*

3. Es wird der Zusammenhang

$$y = a \cdot x^b$$

vermutet. Durch Logarithmieren erhält man:

$$\lg y = b \cdot \lg x + \lg a$$

Hier muss man also $\lg y$ gegen $\lg x$ auftragen, um eine Gerade zu erhalten. Daher nennt man dies *doppelt-logarithmische Auftragung.*

5.4.3 Graphische Geradenanpassung

Wir betrachten zwei physikalische Größen x und y, die linear zusammenhängen, also $y = ax + b$. Nachdem wir mehrere Wertepaare (x, y) aufgenommen haben, möchten wir die Parameter a und b sowie ihre Unsicherheiten bestimmen. Zu diesem Zweck muss eine Geradenanpassung durchgeführt werden. Hierfür gibt es zwei verschiedene Methoden, die graphische und die „rechnerische“. Beide Methoden stellen wir im Folgenden vor.
Wir beginnen mit der graphischen Geradenanpassung. Diese Methode wählt man, wenn man daran interessiert ist, dass die Unsicherheiten Δa und Δb die *Messungenauigkeiten* widerspiegeln.

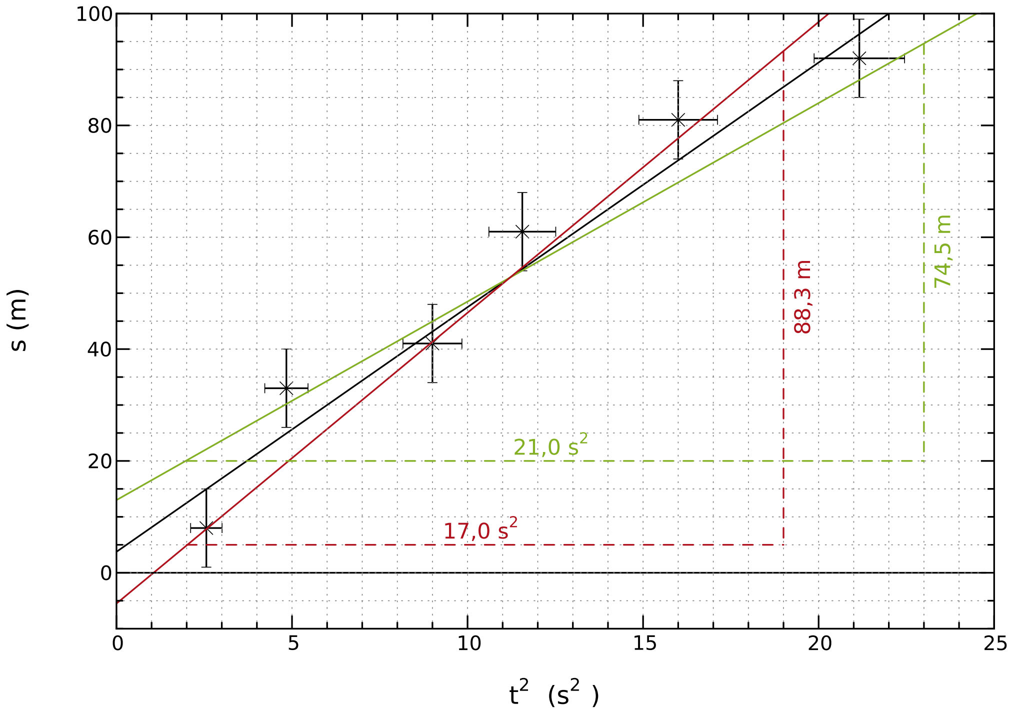

Abbildung 8: Graphische Geradenanpassung am Beispiel des freien Falls. Die Daten wurden linearisiert, indem s gegen t^2 aufgetragen wurde. An die resultierenden Datenpunkte werden zwei Extremalgeraden gelegt, die je $\frac{2}{3}$ der Fehlerbalken schneiden. Mithilfe der eingezeichneten Steigungsdreiecke werden die Steigungen der Extremalgeraden ermittelt. Die Achsenabschnitte liest man direkt ab. Anschließend wird die Ausgleichsgerade berechnet und eingezeichnet.

Zunächst trägt man alle Messergebnisse mit ihren Fehlerbalken auf. In Abbildung 8 wurde dabei von den Daten des freien Falls ausgegangen, die in Abbildung 7 dargestellt sind. Diese Daten wurden, wie in Abschnitt 5.4.2 beschrieben, linearisiert. Nun beginnt die eigentliche Geradenanpassung:

1. Schritt: Man zeichnet zwei Extremalgeraden an die Datenpunkte, eine mit größtmöglicher Steigung und eine mit kleinstmöglicher Steigung. Jede Gerade muss dabei

möglichst genau $\frac{2}{3}$ aller Fehlerbalken treffen. Von den anderen Datenpunkten sollten sie nicht weiter als die doppelte Fehlerbalkenlänge entfernt sein. Dies erklärt sich aus der in Abschnitt 3.1 beschriebenen Normalverteilung. Wie Abbildung 4 zeigt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert innerhalb von σ um den gemessenen Wert liegt, 68 % $\approx \frac{2}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass er weiter als 2σ vom gemessenen Wert liegt, ist kleiner als 5 %. Wenn also die Werte so stark streuen, dass die hier beschriebenen Regeln für Extremalgeraden nicht eingehalten werden können, bedeutet das in der Regel, dass die Messfehler zu klein eingeschätzt wurden. In dem Fall sollte man die Fehlerabschätzung überdenken und falls möglich korrigieren. Falls eine erneute Fehlerabschätzung nicht sinnvoll oder durchführbar erscheint, sollte man anstelle der graphischen die rechnerische Geradenanpassung durchführen.

2. Schritt: Zu den Extremalgeraden ermittelt man die Steigungen a_{min} und a_{max} sowie die y-Achsenabschnitte b_{min} und b_{max}. Dazu gibt es zwei mögliche Vorgehensweisen:

   (a) Man zeichnet wie in Abbildung 8 an jede Extremalgerade ein *großes* Steigungsdreieck, um die Steigungen zu ermitteln und liest die y-Achsenabschnitte als Werte der Geraden bei $x = 0$ ab.

   (b) Man liest auf jeder Geraden zwei weit voneinander entfernte Punkte ab (im Diagramm eintragen). Aus den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) berechnet man für jede Gerade Steigung und Achsenabschnitt als

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \wedge \quad b = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2 - x_1}$$

   Diese Methode eignet sich besonders dann, wenn der im Diagramm gewählte x Bereich den Wert $x = 0$ nicht einschließt.

3. Schritt: Aus den Parametern der Extremalgeraden bestimmt man die Parameter der Ausgleichsgeraden als Mittelwert und Standardabweichung des Mittelwertes. Für die Mittelung über zwei Werte vereinfachen sich die entsprechenden Ausdrücke zu:

$$\boxed{\begin{array}{ll} a = \dfrac{a_{max} + a_{min}}{2} & \qquad \Delta a = \dfrac{a_{max} - a_{min}}{2} \\[2ex] b = \dfrac{b_{max} + b_{min}}{2} & \qquad \Delta b = \dfrac{b_{max} - b_{min}}{2} \end{array}}$$

4. Schritt: Nun zeichnet man die ermittelte Ausgleichgerade in das Diagramm ein, um auf Konsistenz zu überprüfen. (Passt die Gerade zu den Messwerten, oder sind bei der Bestimmung der Parameter Fehler unterlaufen?)

5. Schritt: Die Resultate der Geradenanpassung gibt man in Form einer Geradengleichung an:

$$\begin{aligned} y \;=\; & (a \pm \Delta a) \times \text{Zehnerpotenz Einheit } (\pm \ldots \%) \cdot x \\ & +(b \pm \Delta b) \times \text{Zehnerpotenz Einheit } (\pm \ldots \%) \end{aligned}$$

Beispiel:

Für die in Abbildung 8 gezeigte Geradenanpassung lesen wir folgende Werte ab:

$$a_{min} = \frac{75,0\ \mathrm{m}}{21,0\ \mathrm{s}^2} = 3,548\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad b_{min} = -5,5\ \mathrm{m}$$

$$a_{max} = \frac{88,3\ \mathrm{m}}{17,0\ \mathrm{s}^2} = 5,194\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad b_{max} = 13,0\ \mathrm{m}$$

Damit ergeben sich die Parameter für die Ausgleichsgerade zu:

$$a = \frac{5,194\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 3,548\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} = 4,371\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad \Delta a = \frac{5,194\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 3,548\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2} = 0,823\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$b = \frac{13,0\ \mathrm{m} + (-5,5\ \mathrm{m})}{2} = 3,75\ \mathrm{m} \qquad \Delta b = \frac{13,0\ \mathrm{m} - (-5,5\ \mathrm{m})}{2} = 9,25\ \mathrm{m}$$

Wir erhalten also den Zusammenhang

$$s = (4,4 \pm 0,8)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ (\pm\ 19\ \%) \cdot t^2 + (4 \pm 9)\ \mathrm{m}\ (\pm\ 225\ \%)$$

Da $s = \frac{1}{2}gt^2$ gilt, ergibt sich $g = (8,8 \pm 1,6)\ \frac{m}{s^2}$ ($\pm$ 19%) in Übereinstimmung mit dem erwarteten Wert von 9,81 $\frac{m}{s^2}$. Wie zu erwarten war, ist der y-Achsenabschnitt innerhalb der Unsicherheitsgrenzen null.

5.4.4 Geradenanpassung nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate *(Least Squares Fit)*

Wir gehen wieder davon aus, dass zwischen zwei physikalischen Größen x und y ein linearer Zusammenhang besteht, der allgemein durch

$$y = f(x) = ax + b$$

gegeben ist. Ferner wird vorausgesetzt, dass die unabhängige Variable x_i fehlerlos vorgegeben werden kann und alle Messwerte y_i mit etwa dem gleichen mittleren quadratischen Fehler behaftet sind.

Die sogenannte *rechnerische Geradenanpassung* wählt man, wenn man daran interessiert ist, dass die Unsicherheiten $\Delta a, \Delta b$ der Geradenanpassung die *statistischen Schwankungen der Messwerte* wiederspiegeln. Sie stellt auch eine gute Lösung dar, wenn man bei der Messung die Fehler unterschätzt hat und eine regelkonforme graphische Geradenanpassung deshalb nicht möglich ist.

Das Ziel der rechnerischen Geradenanpassung ist es, die Ausgleichsgerade für die gemessenen Datenpunkte (x_i, y_i) zu bestimmen, bei der die Summe der Quadrate der Abweichungen von der Ausgleichsgeraden minimal wird. (Daher auch der Name „Methode der kleinsten Fehlerquadrate“.)

Wir betrachten also zunächst diese Abweichungen Δy_i von der idealen Geraden:

$$\begin{array}{rcccl} \Delta y_i & = & f(x_i) - y_i & = & a x_i + b - y_i \\ \Rightarrow \quad (\Delta y_i)^2 & = & (a x_i + b - y_i)^2 & & \end{array}$$

Nun verlangen wir, dass die Summe dieser Abweichungsquadrate minimal wird. Die Summe hängt von der Wahl von a und b ab. Wir fordern also:

$$\begin{array}{rcccccl} \dfrac{\partial}{\partial a} \sum (\Delta y_i)^2 & = & \dfrac{\partial}{\partial a} \sum (\Delta y_i)^2 & = & 2 \sum (a x_i + b - y_i)\, x_i & \stackrel{!}{=} & 0 \\ \wedge \quad \dfrac{\partial}{\partial b} \sum (\Delta y_i)^2 & = & \dfrac{\partial}{\partial b} \sum (\Delta y_i)^2 & = & 2 \sum (a x_i + b - y_i) & \stackrel{!}{=} & 0 \end{array}$$

Alle Summen erstrecken sich von $i = 1 \ldots n$, wobei n die Anzahl der Messpunkte ist. Hieraus folgt

$$\begin{array}{rcl} a \sum x_i^2 + b \sum x_i & = & \sum x_i y_i \\ \wedge \quad a \sum x_i + nb & = & \sum y_i \end{array}$$

Mit den Abkürzungen $[x] := \sum x_i$, $[y] := \sum y_i$, $[xx] := \sum x_i^2$ und $[xy] := \sum x_i y_i$ erhält man für die gesuchten Größen a und b das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a \cdot [xx] + b \cdot [x] & = & [xy] \\ \wedge \quad a \cdot [x] \quad + n \cdot b & = & [y] \end{array}$$

mit den Lösungen (Cramersche Regel):

$$\boxed{\begin{array}{rclcl} a & = & \dfrac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [xy] & [x] \\ [y] & n \end{vmatrix} & = & \dfrac{1}{\Delta} \left(n \cdot [xy] - [x] \cdot [y] \right) \\[2ex] b & = & \dfrac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} [xx] & [xy] \\ [x] & [y] \end{vmatrix} & = & \dfrac{1}{\Delta} \left([xx] \cdot [y] - [x] \cdot [xy] \right) \\[2ex] \Delta & = & \begin{vmatrix} [xx] & [x] \\ [x] & n \end{vmatrix} & = & \left(n \cdot [xx] - [x] \cdot [x] \right) \end{array}}$$

Achtung: Die hier gewählte Abkürzung Δ ist nicht mit Unsicherheitsangaben der Art Δa zu verwechseln.

Um die Unsicherheiten von a und b zu bestimmen, benötigt man eine Angabe über den mittleren Fehler der Einzelmessung. Die wahren Abweichungen sind

$$\Delta y_i = a \cdot x_i + b$$

In der Fehlertheorie wird gezeigt, dass der mittlere Fehler der Einzelmessung Δy durch

$$(\Delta y)^2 = \frac{1}{f} \sum (\Delta y_i)^2$$

gegeben ist. f ist die Anzahl der Freiheitsgrade, d.h. die Zahl der Messpunkte minus der Zahl der aus diesen Punkten zu bestimmenden Parameter. In unserem Fall müssen die beiden Paramter a und b berechnet werden. Also

$$f = n - 2$$

Kennt man den mittleren Fehler der Einzelmessung, dann ergeben sich die Unsicherheiten von a und b aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\begin{aligned} (\Delta a)^2 &= (\Delta y)^2 \sum \left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right)^2 \\ \wedge \quad (\Delta b)^2 &= (\Delta y)^2 \sum \left(\frac{\partial b}{\partial y_i}\right)^2 \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a}{\partial y_i} &&= \frac{1}{\Delta}\left(nx_i - [x]\right) \\ \wedge \quad & \frac{\partial b}{\partial y_i} &&= \frac{1}{\Delta}\left([xx] - x_i[x]\right) \\ \Rightarrow \quad & \sum \left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right)^2 &&= \frac{1}{\Delta^2}\left(n^2 \cdot [xx] - 2n \cdot [x] \cdot [x] + n \cdot [x] \cdot [x]\right) \\ & &&= \frac{n}{\Delta^2}\left(n \cdot [xx] - [x] \cdot [x]\right) \quad = \quad \frac{n}{\Delta} \\ \wedge \quad & \sum \left(\frac{\partial b}{\partial y_i}\right)^2 &&= \frac{1}{\Delta^2}\left(n \cdot [xx] \cdot [xx] - 2[x] \cdot [x] \cdot [xx] + [x] \cdot [x] \cdot [xx]\right) \\ & &&= \frac{[xx]}{\Delta^2}\left(n \cdot [xx] - [x] \cdot [x]\right) \quad = \quad \frac{[xx]}{\Delta} \end{aligned}$$

Für die Unsicherheiten von a und b gilt daher:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta a &= \sqrt{(\Delta y)^2 \, \frac{n}{\Delta}} \\ \Delta b &= \sqrt{(\Delta y)^2 \, \frac{[xx]}{\Delta}} \end{aligned}}$$

Beispiel:

Wir betrachten wieder das Beispiel zum freien Fall aus Abbildung 7. Die x-Werte sind in diesem Beispiel zwar nicht fehlerfrei, aber wir können so einen Vergleich der Resultate aus graphischer und rechnerischer Geradenanpassung erhalten. Für die rechnerische Geradenanpassung legen wir folgende Tabelle an:

i	x_i (s^2)	y_i (m)	x_i^2 (s^4)	$x_i \cdot y_i$ $(\mathrm{s}^2\,\mathrm{m})$	$a \cdot x_i + b$ (m)	$(\Delta y_i)^2$ (m^2)
1	2,56	8	6,55	20,48	16,02	64,38
2	4,84	33	23,43	159,72	26,10	47,64
3	9,00	41	81,00	369,00	44,48	12,10
4	11,56	61	133,63	705,16	55,79	27,15
5	16,00	81	256,00	1296,00	75,41	31,29
6	21,16	92	447,75	1946,72	98,21	38,50
$\sum$	65,12	316	948,36	4497,08		221,07
			Δ (s^4)	1449,54		
			a $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$	4,418		
			b (m)	4,71		
					$(\Delta y)^2$ (m)	55,27
					Δa $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$	0,478
					Δb (m)	6,01

Zunächst berechnet man die Summen

$$
\begin{aligned}
[x] &= \sum_{i=0}^{6} x_i = (2,56 + 4,84 + 9,00 + 11,56 + 16,00 + 21,16)\ \mathrm{s}^2 \\
&= 65,12\ \mathrm{s}^2 \\
[y] &= \sum_{i=0}^{6} y_i = (8 + 33 + 41 + 61 + 81 + 92)\ \mathrm{m} \\
&= 316\ \mathrm{m} \\
[xx] &= \sum_{i=0}^{6} x_i^2 = (6,55 + 23,43 + 81,00 + 133,63 + 256,00 + 447,75)\ \mathrm{s}^4 \\
&= 948,36\ \mathrm{s}^4 \\
[xy] &= \sum_{i=0}^{6} x_i \cdot y_i = (20,48 + 159,72 + 369,00 + 705,16 + 1296,00 + 1946,72)\ \mathrm{s}^2\,\mathrm{m} \\
&= 4497,08\ \mathrm{s}^2\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Die Größen Δ, a und b in der Tabelle ergeben sich dann aus:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= (n \cdot [xx] - [x] \cdot [x]) = 6 \cdot 948,36\ \mathrm{s}^4 - \left(65,12\ \mathrm{s}^2\right)^2 \\
&= 1449,54\ \mathrm{s}^4 \\
a &= \frac{1}{\Delta}\left(n \cdot [xy] - [x] \cdot [y]\right) = \frac{6 \cdot 4497,08\ \mathrm{s}^2\,\mathrm{m} - 65,12\ \mathrm{s}^2 \cdot 316\ \mathrm{m}}{1449,54\ \mathrm{s}^4} \\
&= 4,418\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{1}{\Delta}\left([xx]\cdot[y]-[x]\cdot[xy]\right) \quad = \quad \frac{948,36\ \mathrm{s}^4\cdot 316\ \mathrm{m} - 65,12\ \mathrm{s}^2\cdot 4497,08\ \mathrm{s}^2\,\mathrm{m}}{1449,54\ \mathrm{s}^4} \\
&= 4,71\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Damit kann man die Spalten $a\cdot x_i+b$ und $(\Delta y_i)^2=\sum\left(a\cdot x_i+b-y_i\right)^2$ berechnen. Abschließend werden die Unsicherheiten berechnet:

$$
\begin{aligned}
(\Delta y)^2 &= \frac{1}{f}\sum_{i=0}^{6}(\Delta y_i)^2 \quad = \quad \frac{1}{6-2}\cdot(64,38+47,64+12,10+27,15+31,29+38,50) \\
&= 55,27\ \mathrm{m} \\
\Delta a &= \sqrt{(\Delta y)^2\,\frac{n}{\Delta}} \quad = \quad \sqrt{55,27\ \mathrm{m}\cdot\frac{6}{1449,54\ \mathrm{s}^4}} \\
&= 0,478\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\
\Delta b &= \sqrt{(\Delta y)^2\,\frac{[xx]}{\Delta}} \quad = \quad \sqrt{55,27\ \mathrm{m}\cdot\frac{948,36\ \mathrm{s}^4}{1449,54\ \mathrm{s}^4}} \\
&= 6,01\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Wir erhalten also den Zusammenhang

$$
s=(4,4\pm 0,5)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ (\pm\ 11\ \%)\cdot t^2+(5\pm 6)\ \mathrm{m}\ (\pm\ 120\ \%)
$$

Dies stimmt innerhalb der Unsicherheitsgrenzen mit den Ergebnissen der graphischen Geradenanpassung und mit dem Literaturwert überein.

---

6 Literatur

- Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 3, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 6. Aufl., 2011 (Kapitel III und IV)
  `http://www.ub.uni-koeln.de/digital/e_books/index_ger.html`
- Walcher: Praktikum der Physik, Teubner, Stuttgart, 7. Auflage, 1994
- Westphal: Physikalisches Praktikum, Vieweg, Braunschweig, 13. Auflage, 1971

7 Zusammenfassung

Die folgende Seite fasst die wichtigsten Informationen zur Fehlerrechnung zusammen. Wir empfehlen Ihnen, diese Seite auszudrucken, damit Sie sie bei jeder Versuchsauswertung zu Rate ziehen können.

Fehlerrechnung - kurz und knapp

Unsicherheiten müssen immer angegeben und erläutert werden. Also: Immer Fehlerbalken und Extremalgeraden einzeichnen, Fehlerfortpflanzung beachten und Unsicherheiten/Fehlerquellen in der Diskussion begründen.

Werte mit Unsicherheiten angeben:

$$g = (9,841 \pm 0,003)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\ (\pm\ 0,3\,\%)$$

Mittelwert und Fehler des Mittelwertes (jeder Wert besitzt die gleiche Unsicherheit):

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \Delta\overline{x} = \pm\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2}$$

Gewichteter Mittelwert und Fehler (Werte haben unterschiedliche Unsicherheiten): Wichtig hier: Den inneren und den äußeren Fehler bestimmen und den Größeren auswählen.

$$w_i = \frac{1}{(\Delta x_i)^2} \qquad \overline{x} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} \qquad \Delta\overline{x}_{intern} = \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}} \qquad \Delta\overline{x}_{extern} = \sqrt{\frac{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n} w_i(\overline{x} - x_i)^2}{\sum w_i}}$$

Fehlerfortpflanzung nach Gauß:

$$\Delta f(x, y, z, \ldots) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right)^2 + \ldots}$$

Graphische Geradenanpassung:
Extremalgeraden einzeichnen und $a, \Delta a, b$ und Δb bestimmen:

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} \qquad \Delta a = \frac{a_1 - a_2}{2} \qquad b = \frac{b_1 + b_2}{2} \qquad \Delta b = \frac{b_1 - b_2}{2}$$

Rechnerische Geradenanpassung:
Benötigte Funktionen:

$$[x] = \sum x_i \qquad [y] = \sum y_i \qquad [xx] = \sum x_i^2 \qquad [xy] = \sum x_i y_i$$

$$\Delta = (n \cdot [xx] - [x] \cdot [x])$$

Die Werte für die Gerade $y = ax + b$ sind:

$$a = \frac{1}{\Delta}(n \cdot [xy] - [x] \cdot [y]) \qquad b = \frac{1}{\Delta}([xx] \cdot [y] - [x] \cdot [xy])$$

Zur Berechnung der Unsicherheiten benötigt man noch:

$$\Delta y_i = a x_i + b - y_i \qquad (\Delta y)^2 = \frac{1}{n-2}\sum(\Delta y_i)^2$$

und damit folgt für die Unsicherheiten:

$$\Delta a = \sqrt{(\Delta y)^2 \frac{n}{\Delta}} \qquad \Delta b = \sqrt{(\Delta y)^2 \frac{[xx]}{\Delta}}$$