Critérios de falha

PROF. ALEXANDRE A. CURY

DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL

Critérios de falha

- A avaliação das tensões e deformações sempre é feita em função de certas propriedades do material.

- Entretanto, não basta apenas calcular essas grandezas. Precisamos confrontar os valores encontrados com limites pré-estabelecidos para verificar o estado em que o material se encontra, após as solicitações que venha a sofrer.

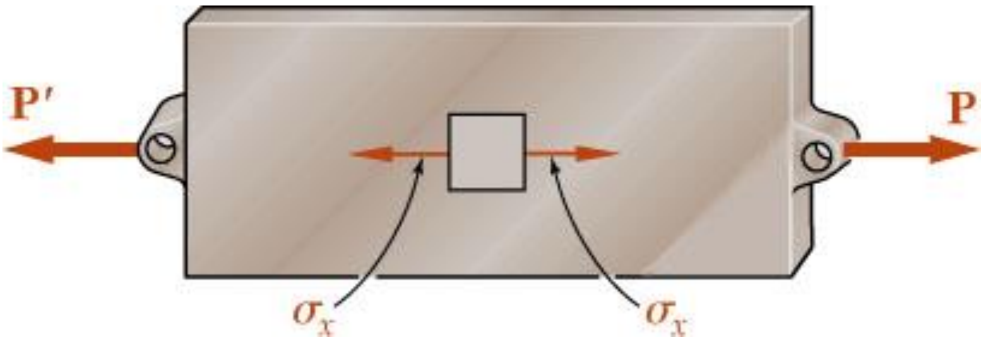
- Em outras palavras, é necessário identificar os valores de tensão e deformação que levarão o material a falhar (romper ou escoar, por exemplo).

- A questão, portanto, é: COMO estabelecer um critério de falha para um determinado material?

- Não existe uma resposta única para esta questão. Por isso, diversos critérios estão descritos na literatura e, para cada tipo de material, um critério pode ser considerado mais adequado que outros.

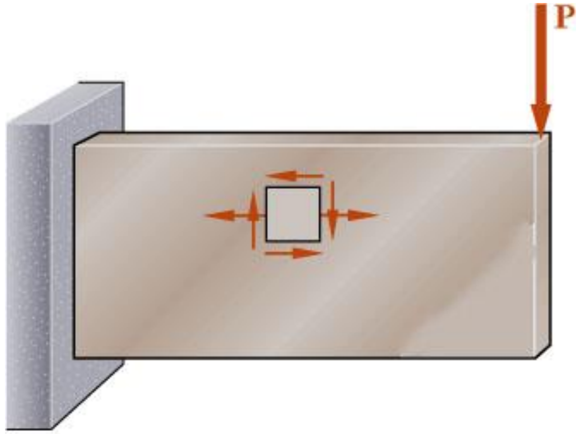
Critérios de falha

Para o caso de um elemento estrutural sujeito a um estado uniaxial de tensões, a condição para que ele não falhe, é simples:



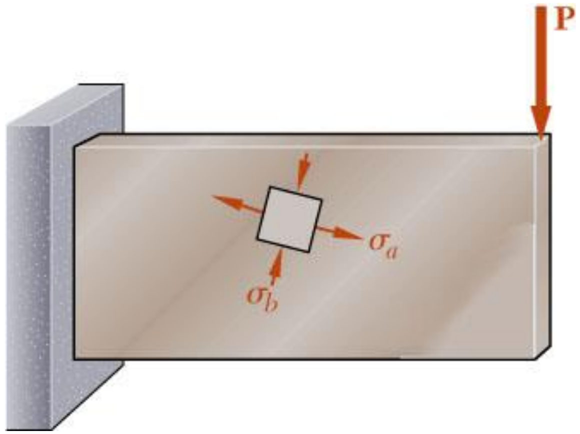
$\sigma_x < \sigma_r$, onde σ_r indica uma tensão de falha

Mas, e para um caso de solicitação mais geral e/ou complexa, como a mostrada abaixo?



E. Plano de Tensões

"transformando"



Tensões Principais

Critérios de falha

Portanto, quando o elemento estrutural está submetido a um estado multiaxial de tensões já não é tão simples assim!

Nesses casos, é necessário considerar o mecanismo real de falha, ou seja, é necessário identificar qual combinação de todas as componentes de tensão presentes no elemento estrutural (tração, compressão, cisalhamento) levará o material a falhar.

Assim, quatro teorias de falha serão estudadas neste curso, levando-se em consideração as características do material.

Critérios de falha

Materiais Frágeis

- Um material é considerado frágil quando rompe, à tração (ou compressão), ainda na fase elástica (sem “aviso prévio”).

- Em outras palavras, a falha se dá por ruptura, sem que haja escoamento.

- **Exemplos**: concreto simples, fibra de carbono, ferro fundido, vidro, porcelana, tijolo cerâmico, etc.

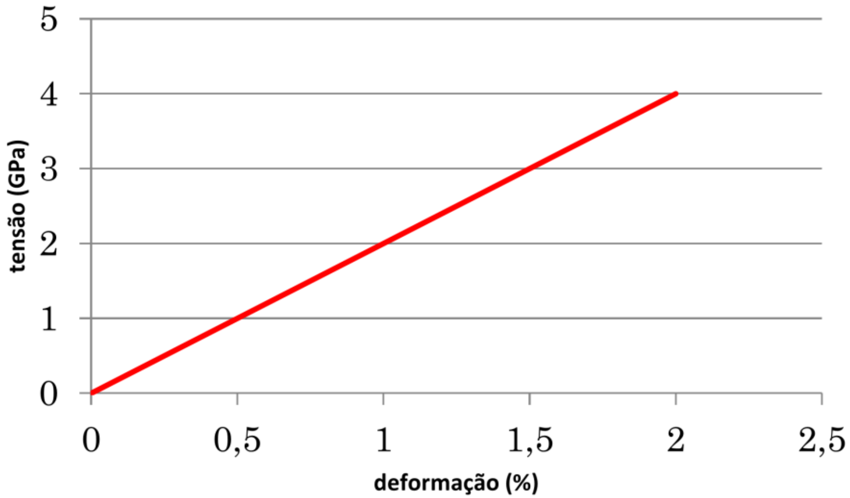


Gráfico “Tensão x Deformação” típico de um material frágil (ausência de patamar de escoamento)

Critérios de falha

Materiais Frágeis

1) Critério da Máxima Tensão Normal (Teoria de Rankine ou Teoria de Coulomb):

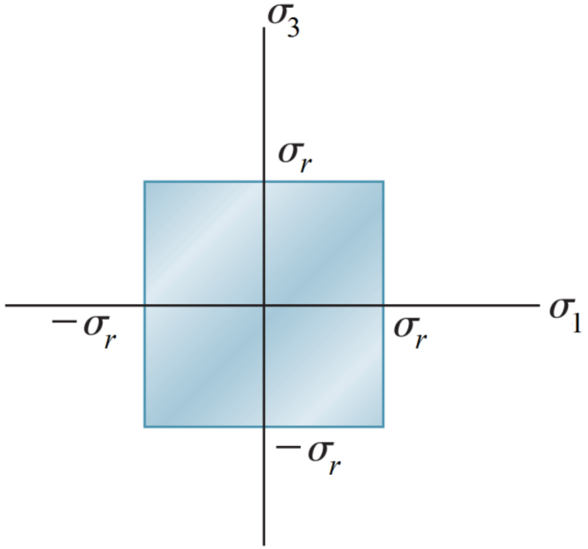
- Ocorre quando a tensão principal máxima no material atinge a tensão normal máxima que o material pode suportar em um teste de tração uniaxial.

- Esta teoria também admite que falhas em compressão ocorram na mesma tensão máxima que as falhas em tração.

$$|\sigma_1| < \sigma_r$$

$$|\sigma_3| < \sigma_r$$

Graficamente



Sendo σ_r a tensão de ruptura do material em um teste de tração uniaxial.

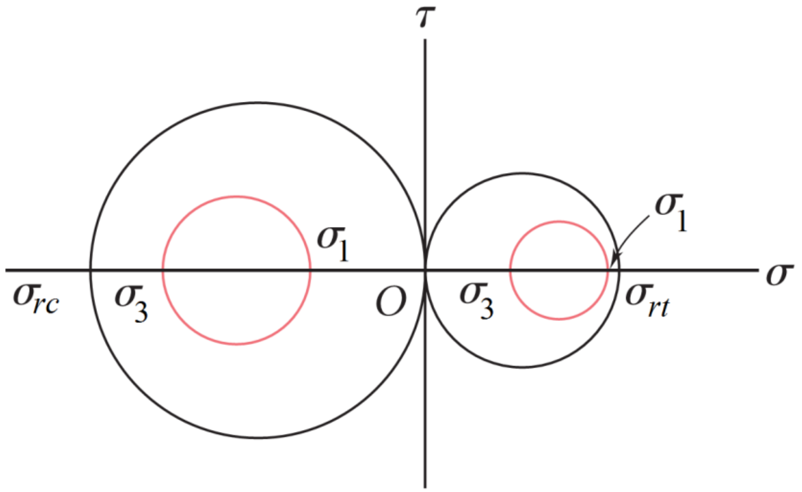
Critérios de falha

Materiais Frágeis

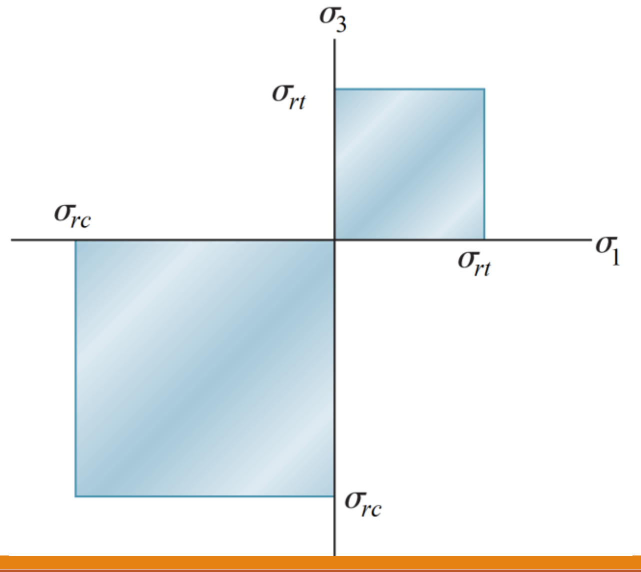
2) Critério de Falha de Mohr (ou Mohr-Coulomb):

- A principal limitação do critério anterior é considerar que as resistências à tração e à compressão de um material são iguais.

- O presente critério separa essas duas situações. Para tanto, são realizados ensaios de tração e compressão uniaxiais.



Graficamente

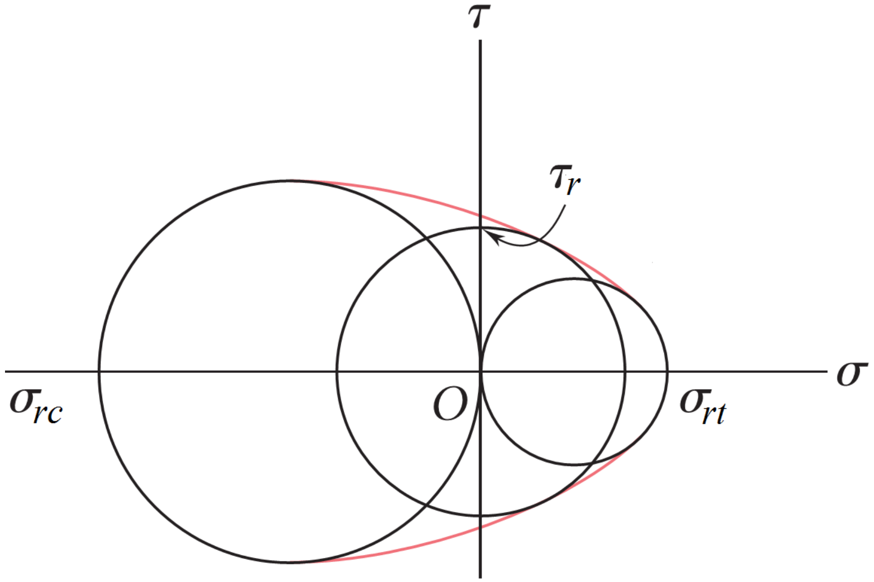


Critérios de falha

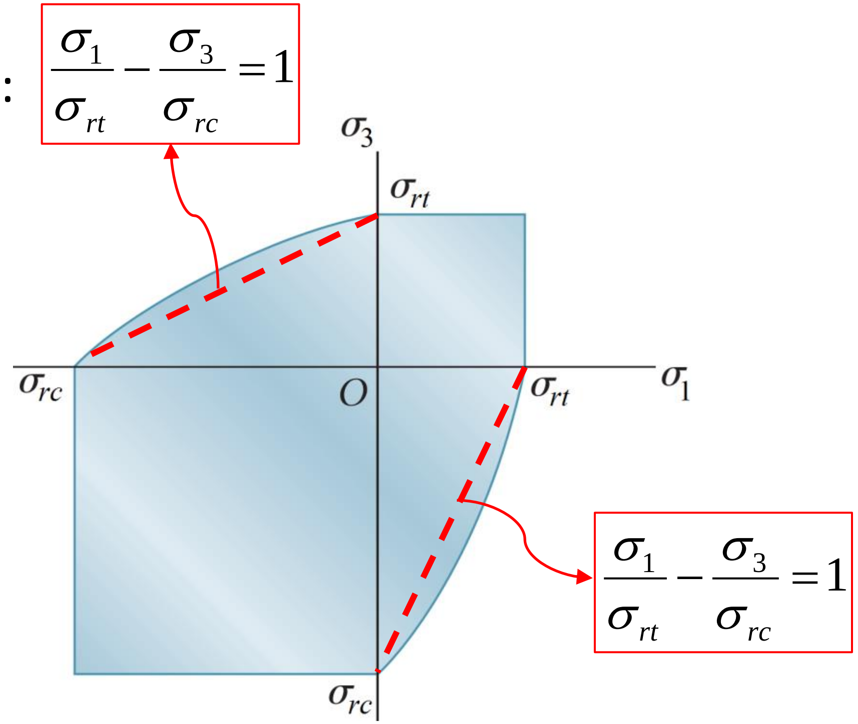
[Materiais Frágeis]()

2) Critério de Falha de Mohr (ou Mohr-Coulomb):

- Pode-se, ainda, considerar um terceiro ensaio: o de torção.
- Neste caso, um terceiro círculo é construído e uma envoltória é traçada:



Graficamente



Critérios de falha

Materiais Dúcteis

- Um material é considerado dúctil quando suporta grandes deformações antes de romper.
- Em outras palavras, a falha se dá por escoamento, após a ocorrência de deformações plásticas (irreversíveis).
- **Exemplos**: aço, cobre, ouro, etc.

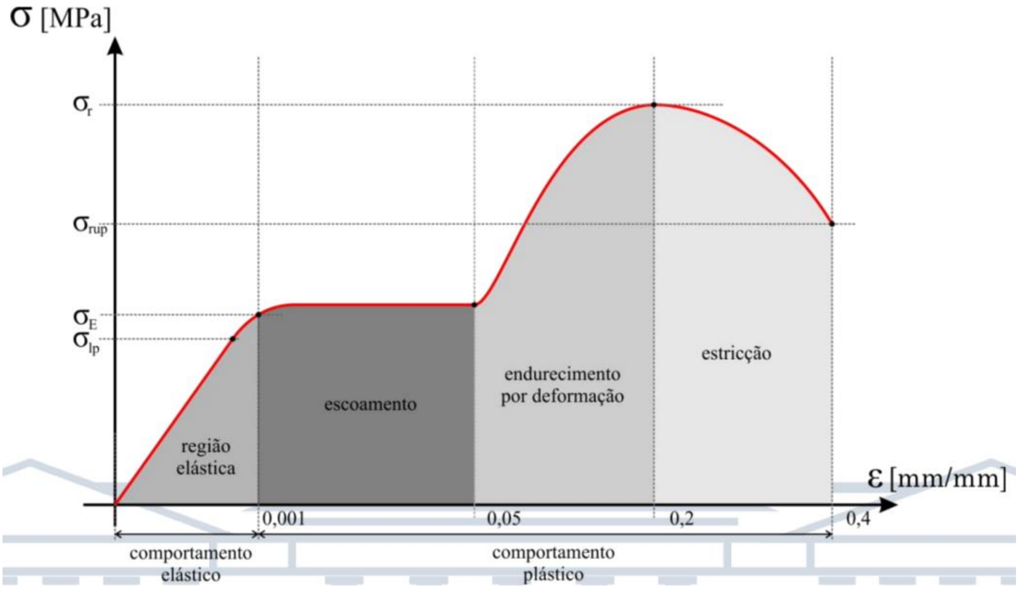


Gráfico "Tensão x Deformação" típico de um material dúctil (presença de patamar de escoamento)

Critérios de falha

Materiais Dúcteis

3) Critério de Falha de Tresca (Máxima Tensão Cisalhante):

- Vimos no curso que, quando um elemento estrutural é ensaiado à tração (uniaxial), a tensão cisalhante máxima ocorre a 45º em relação ao eixo axial (longitudinal) do elemento.

- Vimos, ainda, que o valor desta tensão cisalhante máxima é a metade da máxima tensão normal.

- Assim sendo, considerando que o material dúctil "falha" quando ocorre o escoamento, a máxima tensão cisalhante pode ser escrita como:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_e}{2}, \text{ onde } \sigma_e \text{ representa a tensão de escoamento do material}$$

- O critério de Tresca se enuncia como: "Um elemento estrutural (dúctil) irá falhar se a tensão cisalhante máxima ultrapassar a máxima tensão cisalhante obtida em um ensaio de tração uniaxial realizado no mesmo material".

Critérios de falha

Materiais Dúcteis

3) Critério de Falha de Tresca (Máxima Tensão Cisalhante):

Vimos que a máxima tensão tangencial em um ponto pode ser calculada como:

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}$$

Assim, o critério de Tresca pode ser descrito como:

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} < \frac{\sigma_e}{2} \Rightarrow \boxed{|\sigma_1 - \sigma_3| < \sigma_e}$$

OBS: Equação válida se σ_1 e σ_3 possuírem sinais contrários.

Caso σ_1 e σ_3 possuam mesmo sinal, as máximas tensões cisalhantes serão dadas por:

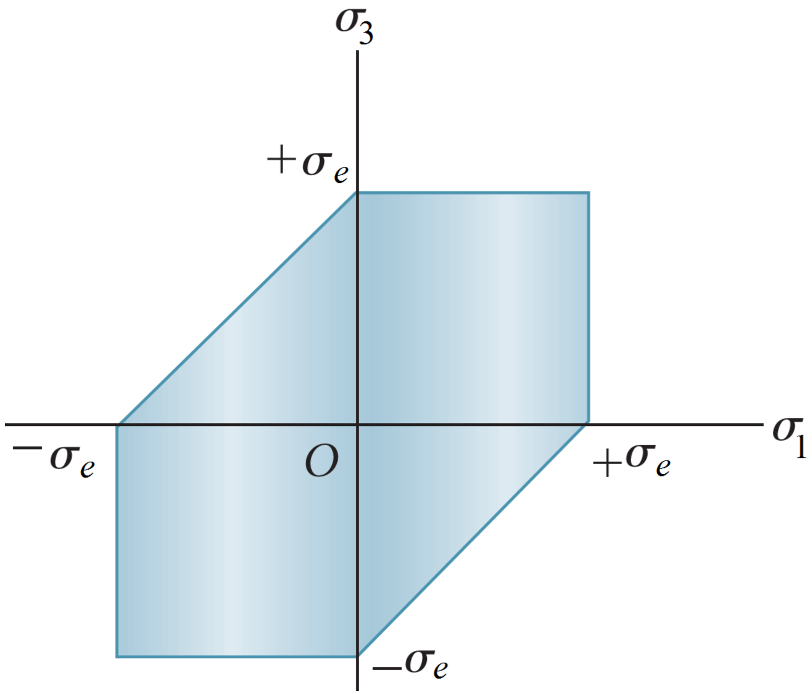
$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma_1 < \sigma_e \quad \text{e} \\ |\sigma_3| < \sigma_e \end{array}}$$

Critérios de falha

Materiais Dúcteis

3) Critério de Falha de Tresca (Máxima Tensão Cisalhante):

A representação gráfica do critério de Tresca é mostrada abaixo:



Hexágono de Tresca

Critérios de falha

Materiais Dúcteis

3) Critério de Falha de Tresca (Máxima Tensão Cisalhante):

Para o estado plano de tensões, podemos reescrever o critério de Tresca como:

$$|\sigma_1 - \sigma_3| < \sigma_e = \left|\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}\right| < \sigma_e$$

ou simplesmente: $\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2} < \sigma_e$

Para os casos em que $\sigma_{yy} = 0$, a equação se simplifica para: $\boxed{\sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\tau_{xy}^2} < \sigma_e}$

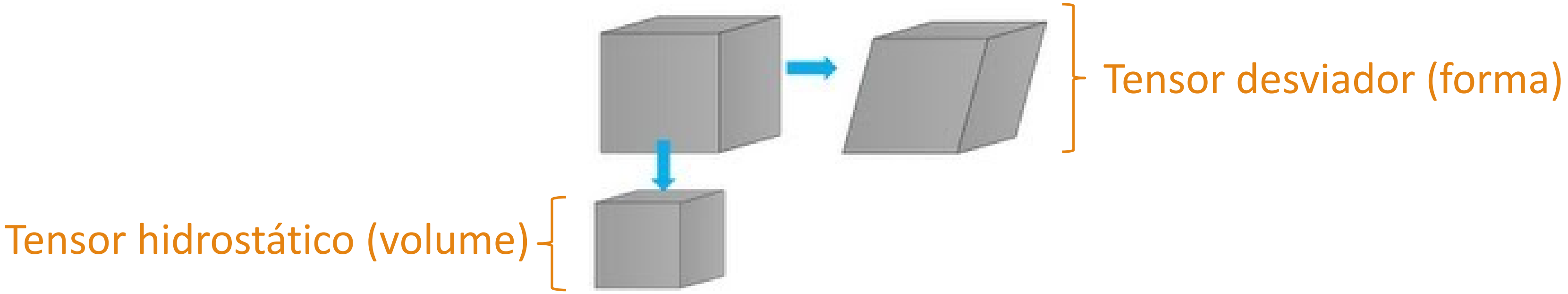
Critérios de falha

Materiais Dúcteis

4) Critério de Falha de von Mises (Máxima Energia de Distorção):

- Embora o critério de Tresca forneça uma hipótese razoável para o escoamento em materiais dúcteis, a teoria de von Mises se correlaciona melhor com os dados experimentais e, desse modo, é geralmente mais utilizada.

- Nessa teoria, são considerados conceitos de **energia** de distorção de um dado elemento, isto é, a energia associada a mudanças na forma do elemento e não do volume do mesmo.

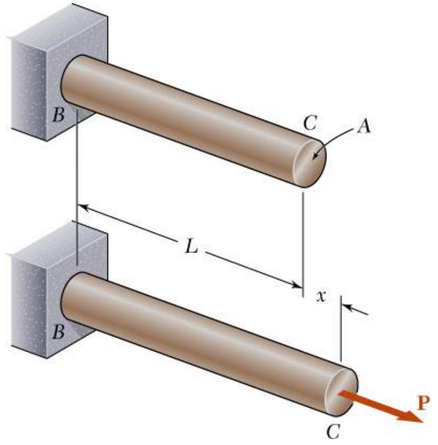


- O critério de von Mises se enuncia como: “Um elemento estrutural (dúctil) irá falhar se a energia associada à mudança de forma de um corpo, submetido a um carregamento multiaxial, ultrapassar a energia de distorção de um corpo de prova submetido a um ensaio uniaxial de tração”.

Critérios de falha

Antes de desenvolvermos o critério de von Mises, é importante tratarmos do conceito de **Energia de Deformação.**

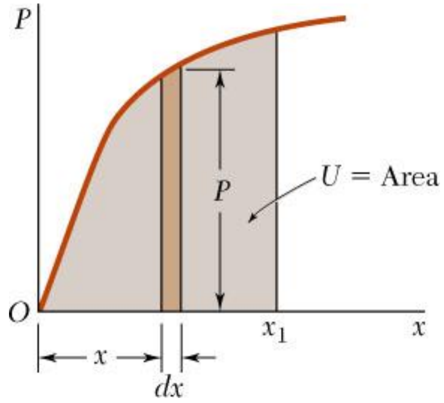
Seja uma barra uniforme submetida a uma força que cresce lenta e gradualmente.



O trabalho infinitesimal realizado pela força *P* à medida que a barra se alonga de um pequeno valor *dx* é dado por:

$$dU = P\,dx \rightarrow \text{trabalho infinitesimal}$$

Este trabalho é igual ao elemento de área de largura *dx* sob o gráfico "força-deslocamento".



O trabalho total realizado pela força até o deslocamento final x_1, é dado por:

$$U = \int_0^{x_1} P\,dx$$

Critérios de falha

No caso de uma deformação linear elástica, como a mostrada na figura abaixo, temos a seguinte situação:

Energia Potencial Elástica

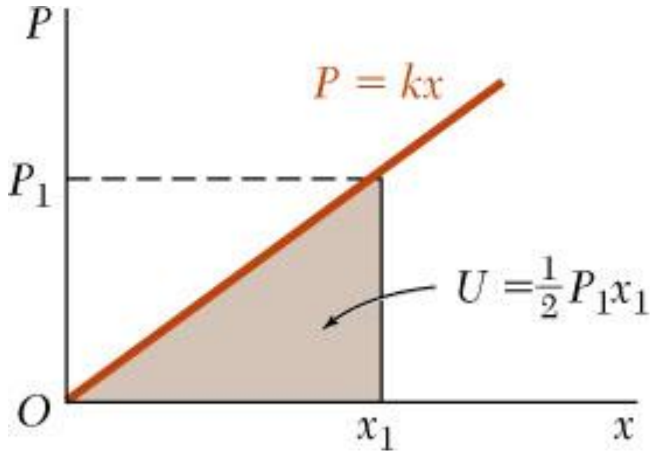
Pela Lei de Hooke, *P* = *kx.*

Assim, o trabalho total é dado por: $U = \int_0^{x_1} kx\,dx = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}P_1x_1$

Percebe-se, portanto, que a energia de deformação acumulada pela mola é equivalente à metade do trabalho realizado pela força *P.*

Esta constatação é o enunciado do *Teorema de Clayperon*:

"Quando uma carga cresce progressivamente de zero até o seu valor final, o trabalho de deformação, em regime elástico linear, é a metade do que seria realizado se a carga agisse desde o início com o seu valor final atual"



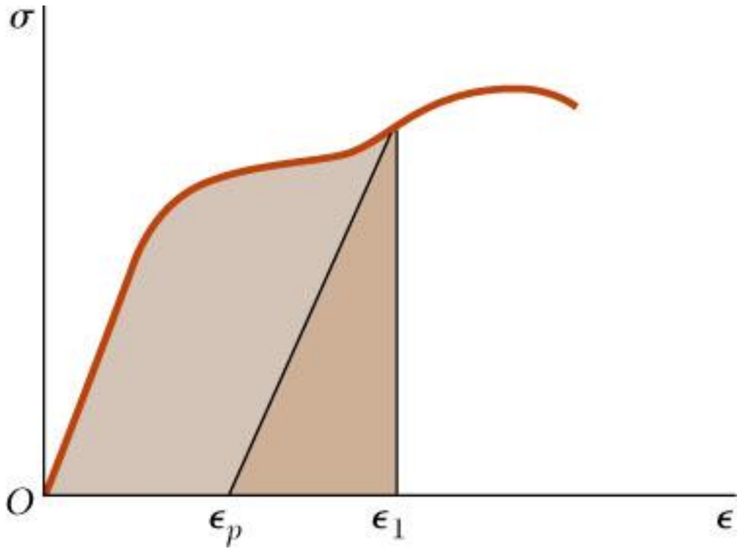
Critérios de falha

Para eliminar os efeitos do tamanho da estrutura, vamos dividir ambos os termos da expressão abaixo pelo seu volume:

$$U = \int_0^{x_1} P\,dx \;\Rightarrow\; \frac{U}{V} = \int_0^{x_1} \frac{P}{A}\frac{dx}{L} \;\Rightarrow\; \boxed{u = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma_x \, d\varepsilon_x}$$

Densidade de Energia de Deformação

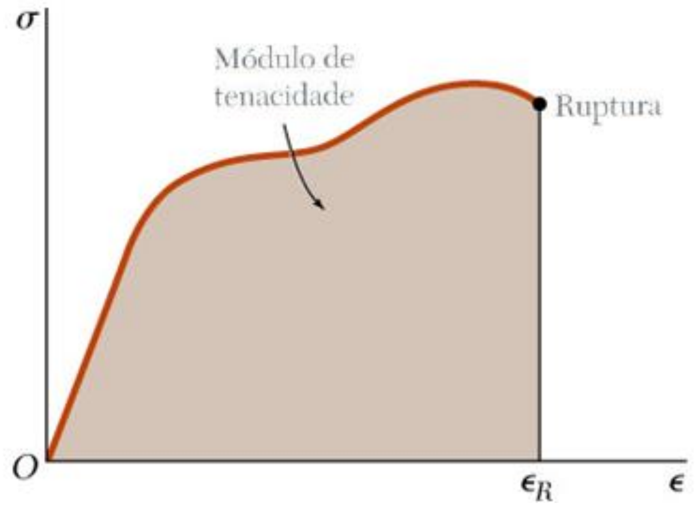
Graficamente,

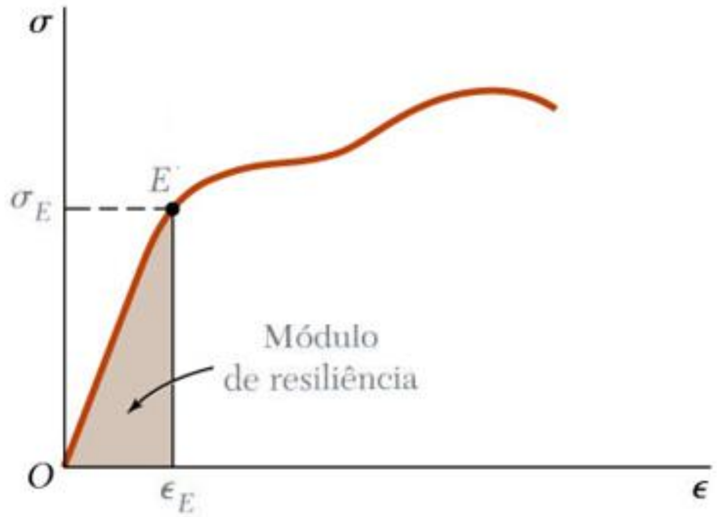


Observações:

- A densidade total de energia a tensão resultante da deformação é igual à área sob a curva de ε_1.
- Quando o material é descarregado, a tensão retorna a zero, mas há uma deformação permanente. Apenas a energia relativa à área triangular é recuperada.
- O restante da energia é dissipada como calor.

Critérios de falha





<u>Observações:</u>

- A densidade de energia de deformação resultante da configuração $\varepsilon_1 = \varepsilon_r$ é chamada de **<u>módulo de tenacidade:</u>**

$$u_r = \frac{\sigma_r^2}{2E}$$

- A energia por unidade de volume necessária para causar o material à ruptura está relacionada à sua **ductilidade**;
- Se a tensão estiver dentro do limite de escoamento, temos:

$$u = \int_0^{\varepsilon_1} \sigma_x \, d\varepsilon_x = \int_0^{\varepsilon_1} E\varepsilon_x d\varepsilon_x = \boxed{\frac{E\varepsilon_1^2}{2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{u = \frac{\sigma\varepsilon_1}{2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{u = \frac{\sigma_1^2}{2E}}$$

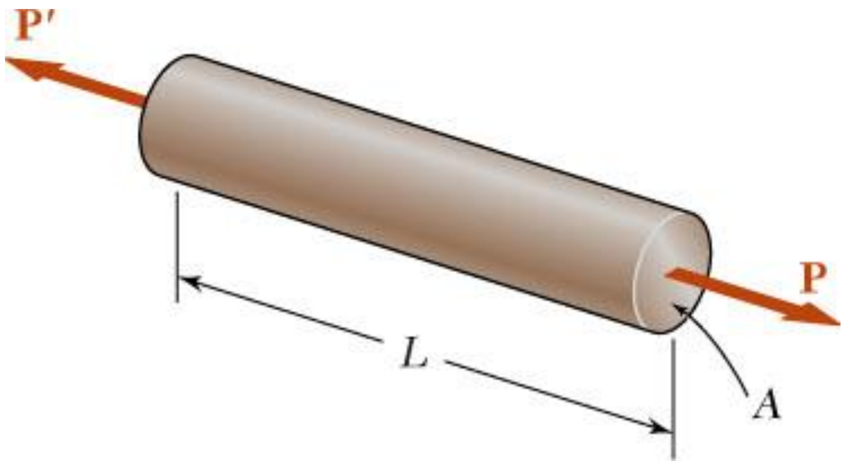
A densidade de energia de deformação resultante da configuração $\sigma_1 = \sigma_e$ é o **<u>módulo de resiliência</u>**:

$$u_e = \frac{\sigma_e^2}{2E}$$

Critérios de falha

A partir das expressões obtidas anteriormente, é possível calcular a Energia de Deformação para diferentes condições de carregamento.

<u>Carregamento Axial:</u>



Sendo a tensão normal dada por: $\sigma_x = P/A$

A Energia de Deformação Total é calculada como: $U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV$

Considerando-se que: $dV = A\,dx$

Substituindo-se apropriadamente, chegamos a:

$$\boxed{U = \int_0^L \frac{P^2}{2AE} dx}$$

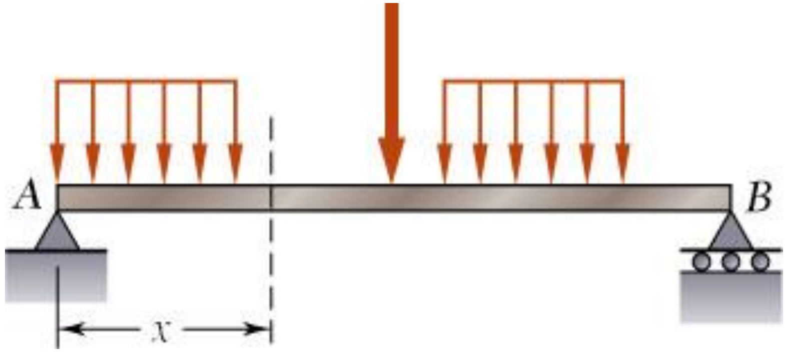
Para uma barra de seção transversal constante (ao lado), tem-se:

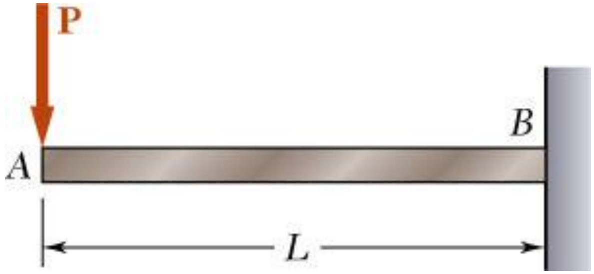
$$U = \frac{P^2 L}{2AE}$$

Critérios de falha

A partir das expressões obtidas anteriormente, é possível calcular a Energia de Deformação para diferentes condições de carregamento.

Flexão:





Sendo a tensão normal dada por: $\sigma_x = \dfrac{M\,y}{I}$

e considerando novamente $dV = A\,dx$, vem:

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dV = \int_0^L \int_A \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dA\,dx$$

Reorganizando as variáveis, vem:

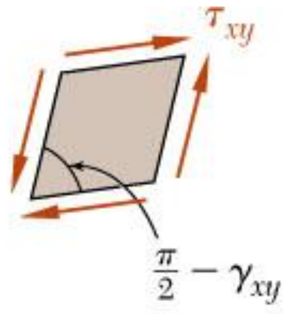
$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2} \left(\int_A y^2 dA \right) dx = \boxed{\int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx}$$

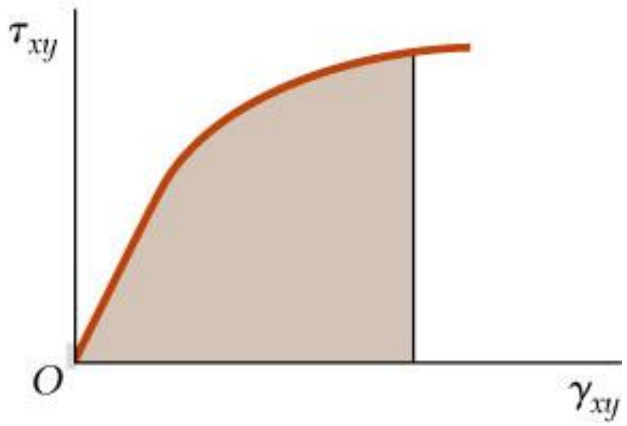
Para o caso de uma viga engasta-livre, com uma carga concentrada, tem-se: $U = \dfrac{P^2 L^3}{6EI}$

Critérios de falha

A partir das expressões obtidas anteriormente, é possível calcular a Energia de Deformação para diferentes condições de carregamento.

<u>Cisalhamento puro:</u>





Para um material submetido a tensões de cisalhamento puro, tem-se:

$$u = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy}\, d\gamma_{xy}$$

Para valores de τ_{xy} dentro do limite proporcional, vem:

$$u = \frac{1}{2} G \gamma_{xy}^2 = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

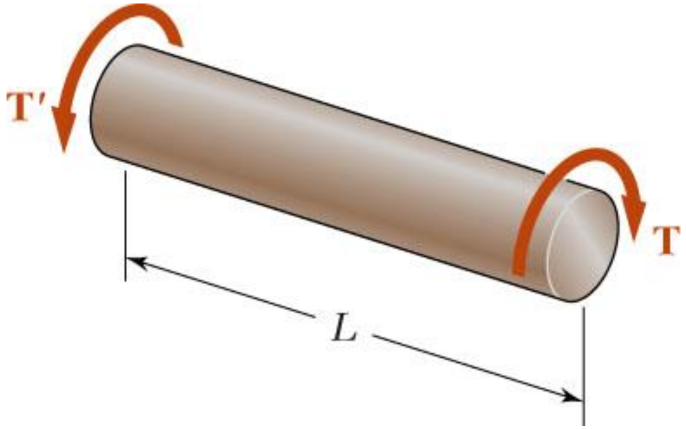
A energia de deformação total é, então:

$$U = \int u\, dV = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV$$

Critérios de falha

A partir das expressões obtidas anteriormente, é possível calcular a Energia de Deformação para diferentes condições de carregamento.

Cisalhamento puro:



A tensão cisalhante devida a um momento torsor é dada por: $\tau_{xy} = \frac{T\rho}{J}$

A energia de deformação total é: $U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV = \int \frac{T^2 \rho^2}{2GJ^2} dV$

Considerando $dV = A\,dx$, vem: $U = \int_0^L \int_A \frac{T^2 \rho^2}{2GJ^2} dA\,dx = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2} \left(\int_A \rho^2 dA \right) dx$

Que se simplifica em: $\boxed{U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx}$

Para o caso de uma barra circular sujeita a um torsor concentrado, tem-se:

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ}$$

Critérios de falha

Até agora, determinamos a energia de deformação devido à tensões uniaxiais e tensões de cisalhamento puro. Para os casos de um estado geral de tensão, temos:

$$u = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right)$$

Considerando-se um material elástico e isotrópico, a densidade de energia de deformação pode ser reescrita em função das tensões principais como:

$$u = \frac{1}{2E}\left[\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)\right]$$

A expressão acima pode ser decomposta em duas: uma representando a alteração do volume do material e outra, a distorção do material:

$$u_v = \frac{(1-2\nu)}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2 \rightarrow \text{alteração de volume do material}$$

$$\boxed{u_d = \frac{(1+\nu)}{6E}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2\right] \rightarrow \text{distorção do material}}$$

Critérios de falha

Materiais Dúcteis

4) Critério de Falha de von Mises (Máxima Energia de Distorção):

Como visto, a densidade de energia de distorção para um elemento sujeito a um estado triaxial de tensões pode ser escrita como:

$$\bar{u}_d = \frac{(1+\upsilon)}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2\right]$$

Em um ensaio de tração (uniaxial), a densidade de energia de distorção pode ser calculada, fazendo $\begin{cases}\sigma_1=\sigma_e\\ \sigma_2=\sigma_3=0\end{cases}$

$$\bar{u}_{tração} = \frac{(1+\upsilon)}{6E}\left[2\sigma_e^2\right] = \frac{(1+\upsilon)}{3E}\sigma_e^2$$

Pelo enunciado do critério, temos que: $\bar{u}_d < \bar{u}_{tração}$. Assim,

$$\boxed{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2 < 2\sigma_e^2} \Rightarrow \textbf{E. Triaxial de Tensões}$$

Critérios de falha

Materiais Dúcteis

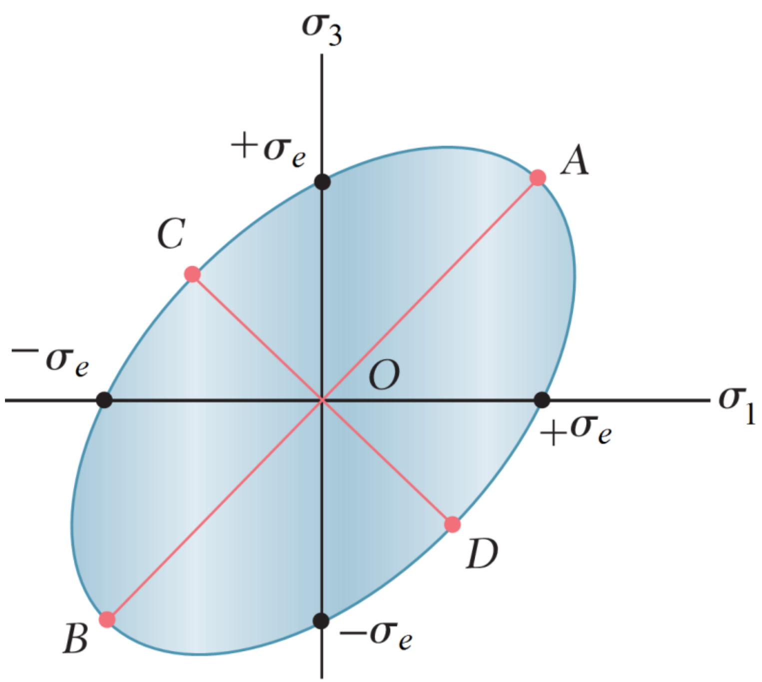
4) Critério de Falha de von Mises (Máxima Energia de Distorção):

Para o estado plano de tensões ($\sigma_2 = 0$), podemos reescrever o critério de von Mises como:

$$\bar{u}_d = \frac{(1+\upsilon)}{3E}\left(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2\right) \quad \text{e} \quad \bar{u}_{tração} = \frac{(1+\upsilon)}{3E}\sigma_e^2$$

Assim, $\boxed{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 < \sigma_e^2}$

Graficamente



Elipse de von Mises

Critérios de falha

Materiais Dúcteis

4) Critério de Falha de von Mises (Máxima Energia de Distorção):

Podemos reescrever a equação anterior em função do estado de tensões:

$$\sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\tau_{xy}^2} < \sigma_e$$

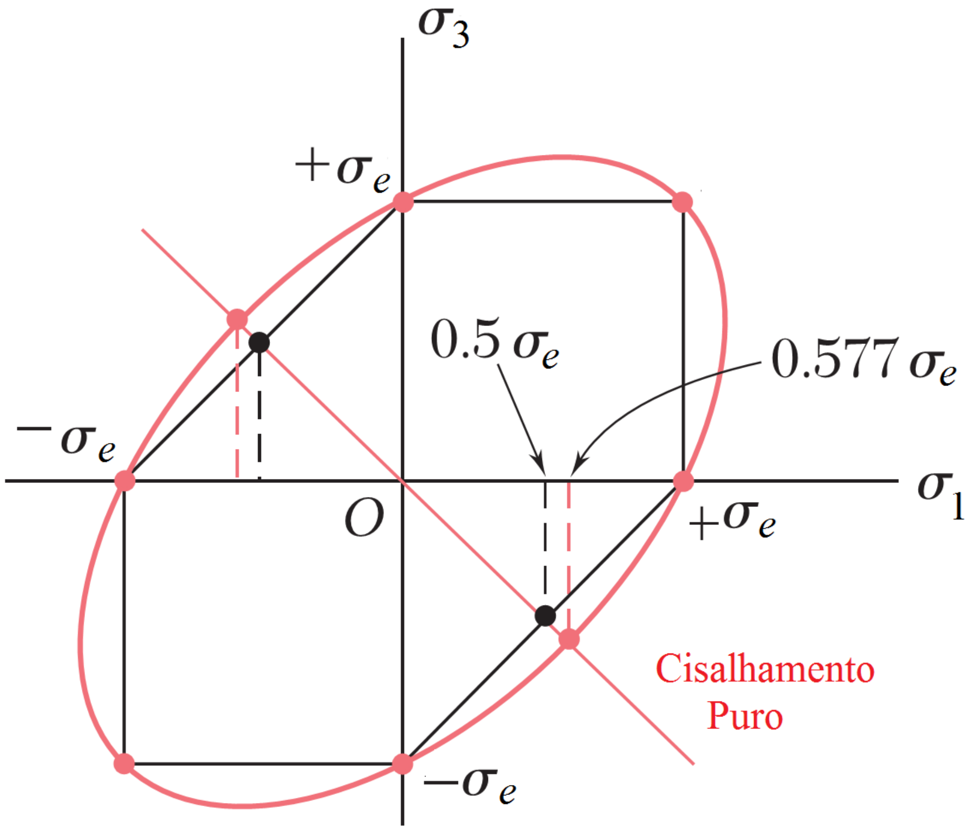
Para os casos em que $\sigma_{yy} = 0,$ a equação se simplifica para:

$$\boxed{\sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\tau_{xy}^2} < \sigma_e}$$

Critérios de falha

Materiais Dúcteis

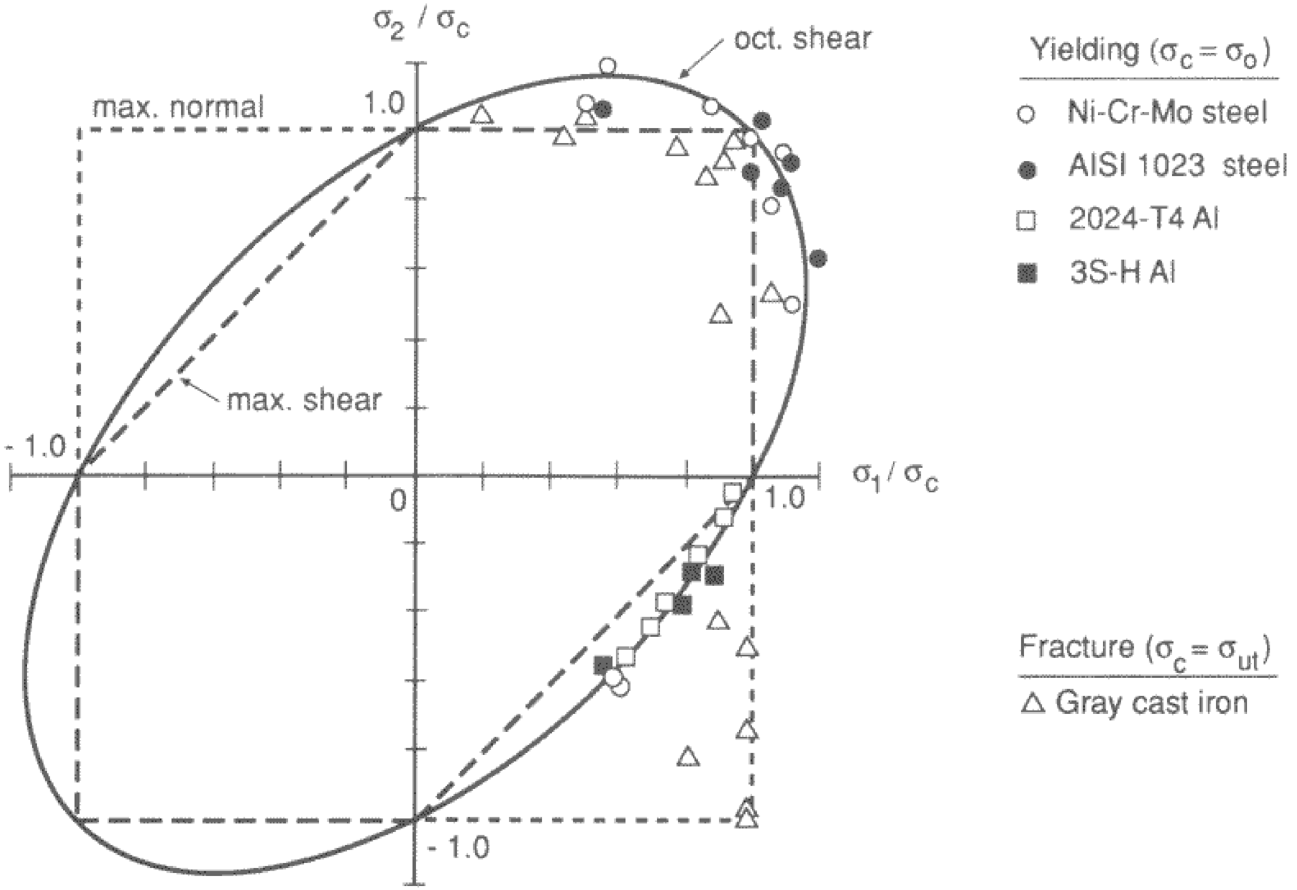
Comparativo entre critérios:



Critérios de falha

Comparativo entre critérios:

Ensaios experimentais realizados com materiais frágeis e dúcteis:



Critérios de falha

Referências:

Esses slides foram preparados usando como base:

1) Beer, Johnston – Mecânica dos Materiais – 6ª ed.
2) Apostila de Resistência dos Materiais I – Prof. Marco André Argenta – UFPR
3) Notas de aula do Prof. Elson Toledo