Universidad Nacional de Moreno Pablo G. Provenzano

Carrera: Ingeniería Electrónica- Asignatura: Física 1

Centro de Masa.

Se ha estudiado que un sistema que no es afectado por fuerzas externas mantiene constante la cantidad de movimiento del sistema. Se ha aplicado este principio al análisis de colisiones (en una, dos, *n* dimensiones). Un concepto importante, que se va a estudiar es el denominado *centro de masa* (CM). Se ha visto que en toda colisión participan dos masas como mínimo. Si se tienen varias masas (iguales o distintas) distribuidas en el espacio, el centro de masa es un promedio de la distribución espacial de la masa de ese conjunto. También es aplicable a una sola masa. Considerando un conjunto de partículas que forman un sistema, el centro de masa es el punto donde se aplica la fuerza externa que genera el movimiento translacional del sistema de partículas, como si toda la masa del sistema estuviera en ubicada ese punto.

Veamos el siguiente caso: se tienen dos masas m_1 y m_2, que forman un sistema como muestra la figura 1. La masa m_2 es mayor que m_1. Su posición en un sistema de ejes coordenados muestra que ambas masas se disponen enteramente sobre el eje x, siendo sus coordenadas respectivas x_1 y x_2. El centro de masa, debido a esta disposición del sistema, es un punto que se encuentra en la distancia recta que separa ambas masas, y más cerca de la masa mayor. En el caso de la figura 1 la posición del centro de masa (CM) se calcula mediante la ecuación:

La componente sobre el eje *y* no existe aquí pues ambas masas están sobre el eje *x.*

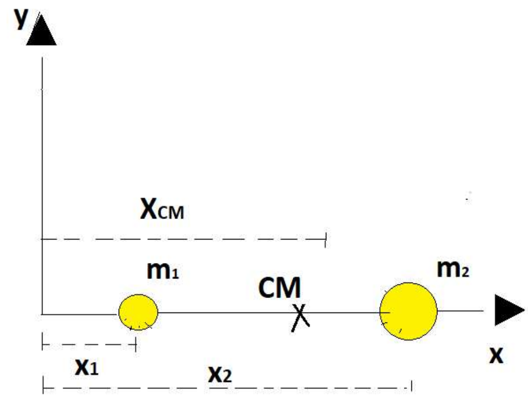


Figura 1

La figura 2 muestra un caso más general donde las partículas se disponen en el plano x,y. El centro de masa (CM) se encuentra sobre la distancia recta d, que separa ambas masas. La posición del CM (r_{CM}) tiene componentes sobre los ejes x e y, y su cálculo es el siguiente:

$$X_{CM} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \qquad (1)$$

$$Y_{CM} = \frac{y_1 \cdot m_1 + y_2 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \qquad (2)$$

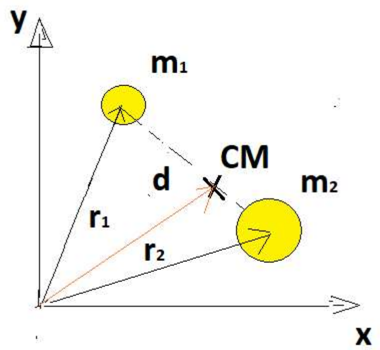


Figura 2

En el caso de *n* partículas en el espacio, las componentes del CM se calculan mediante las expresiones (3):

$$
\begin{aligned}
X_{CM} &= \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \ldots.. + x_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + \ldots. + m_n} = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{M} \\
Y_{CM} &= \frac{y_1 \cdot m_1 + y_2 \cdot m_2 + \ldots.. + y_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + \ldots. + m_n} = \frac{\sum y_i \cdot m_i}{M} \\
Z_{CM} &= \frac{z_1 \cdot m_1 + z_2 \cdot m_2 + \ldots.. + z_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + \ldots. + m_n} = \frac{\sum z_i \cdot m_i}{M}
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Luego, la posición del CM es:

$$\mathbf{r}_{CM} = X_{CM}\mathbf{i} + Y_{CM}\mathbf{j} + Z_{CM}\mathbf{k} \qquad (4)$$

Si la distribución de masa es continua (figura 3) se puede aplicar el mismo criterio anterior, dividiendo la masa en un número *n* de Δm.

Cuerpo con distribución continua de masa. Dividiendo el mismo en *n* Δm_i (pequeñas unidades de masa) y determinando la posición de cada Δm_i en un sistema de ejes coordenados, el CM se obtiene mediante integración:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\, dm_i \quad y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\, dm \quad \text{y} \quad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\, dm$$

$$\mathbf{r}_{CM} = x_{CM}\mathbf{i} + y_{CM}\mathbf{j} + z_{CM}\mathbf{k} \qquad (5)$$

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}_i \cdot dm_i \qquad (5')$$

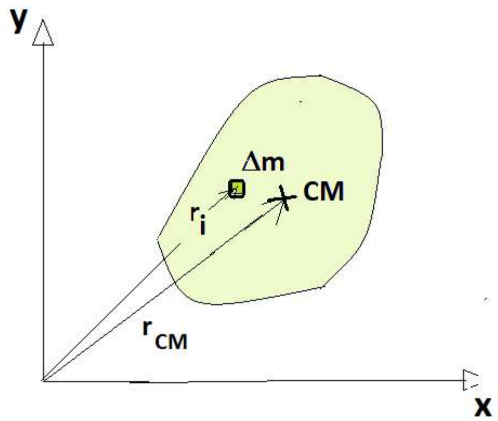
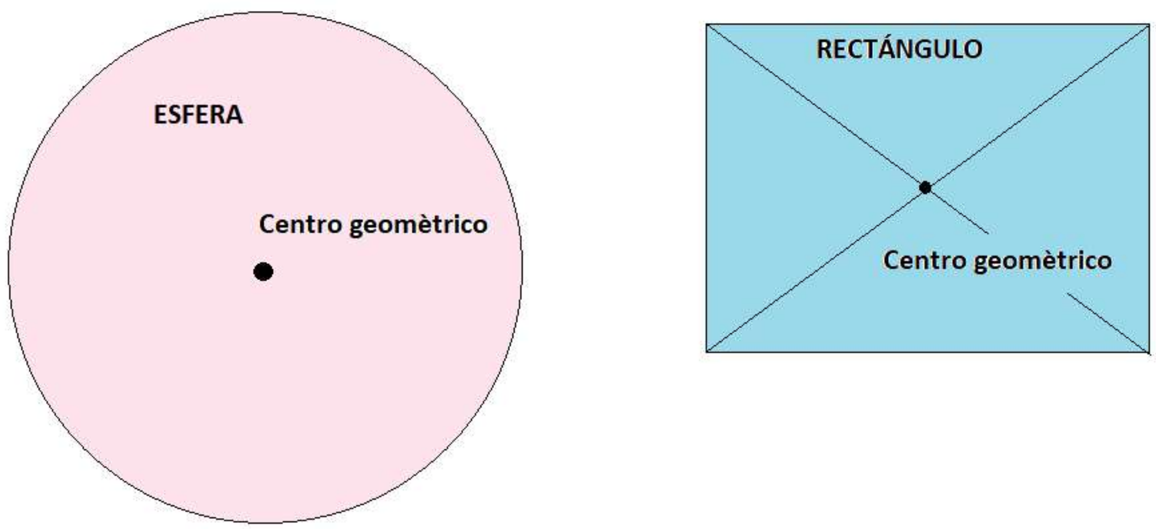


Figura 3

Objetos regulares e irregulares:

Un objeto regular, es decir, que mantiene simetría respecto a sus ejes fundamentales, tiene su centro de masa sobre el eje de simetría o el plano de simetría: un rectángulo, una esfera o un cubo presentan su CM en su centro geométrico.



Figuras 4: Figuras geométricas regulares, el CM coincide con el centro geométrico.

Ahora, cómo se puede determinar el centro de masa en un objeto irregular? Por ejemplo, una llave: una forma práctica y sencilla es colgar la llave de un punto, por ejemplo del punto A, y trazar la vertical determinando el segmento AB, vertical. Luego se cuelga la llave desde otro punto, por ejemplo, desde C y se traza la vertical dibujando el segmento CD, como se muestra en la figura 5. En el punto donde se cruzan ambos segmentos se halla el centro de masa de la llave.

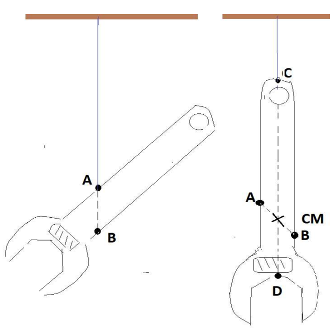


Figura 5: Forma práctica de determinar el CM en un cuerpo regular-

Movimiento de un sistema de partículas

Se estudia ahora la velocidad de un sistema de partículas, representada por la velocidad de su CM. Dividiendo la expresión (5') entre *dt*, se obtiene la velocidad del CM:

$$\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{\mathbf{v}}_i \qquad (7)$$

entonces:

$$M\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}} = \sum_i m_i\vec{\mathbf{v}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{tot}} \qquad (8)$$

La ecuación (8) indica que la cantidad de movimiento lineal del sistema de partículas es igual a la masa de todas las partículas sumadas y multiplicada por la velocidad del CM. Es equivalente a tener una sola masa M(que totalice la masa del sistema) moviéndose a la velocidad del CM.

Se procede a dividir ahora la ecuación (8) entre *dt* obteniendo:

$$\vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{CM}} = \frac{d\mathbf{v}_{\mathrm{CM}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{\mathbf{v}}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{\mathbf{a}}_i \qquad (9)$$

La aceleración de

$$M\mathbf{a}_{\mathrm{CM}} = \sum_i m_i\mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \qquad (10)$$

La expresión (10) está indicando que las fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas (internas y externas) se pueden calcular como la sumatoria de las masas de todas las partículas multiplicada por la aceleración del CM. Pero las fuerzas internas se cancelan entre sí por la 3º Ley de Newton, entonces la expresión (10) está referida expresamente a la sumatoria de fuerzas externas que estén actuando sobre el sistema:

$$M \cdot a_{CM} = \sum F_{ext} \qquad (11)$$

Es decir, que el CM de un sistema se mueve como lo haría una masa M (de igual magnitud que la sumatoria de masas del sistema) bajo la influencia de una fuerza externa F_{ext} . De esta forma queda expresada la 2º Ley de Newton para un sistema de partículas con aceleración lineal.

Integrando la ecuación (11) respecto de *t*:

$$\int \sum \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}\, dt = \int M\vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{CM}}\, dt = \int M \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}}}{dt}\, dt = M\int d\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}} = M\,\Delta\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{CM}} \qquad (12)$$

se tiene:

$$\overline{I} = \Delta\overline{P}_{TOT}$$

Que es la generalización del Teorema del Impulso y la Cantidad de Movimiento a un sistema de partículas.

Referencias:

Serway, R.; Jewett, J. - 'Física para Ciencias e Ingeniería' Cap. 9. Vol. 1 – 7ª edición- Cengaje Learnig (2008).

Sears, F., Semansky, M. Young, H.; Fredman, R. 'Física Universitaria' Cap.11- Vol 1- 12ª Edición- México- Pearson (2009)