Universidad Nacional de Moreno Pablo G. Provenzano

Carrera: Ingeniería Electrónica- Asignatura: Física 1.

Cantidad de Movimiento Angular.

Introducción

Se tiene el disco de la figura 1, donde hay una fuerza F aplicada en el borde del mismo, a una distancia r del eje en torno al que gira. El eje se encuentra en la dirección de la coordenada Y. El Momento de Torsión (M_o) generado se define como el producto vectorial entre la fuerza *F* aplicada y el radio r:

$$\overline{M}_0 = \overline{F} \times \overline{r} \tag{1}$$

El producto vectorial se resuelve:

$$M_0 = F \cdot r \cdot \sin\theta \tag{2}$$

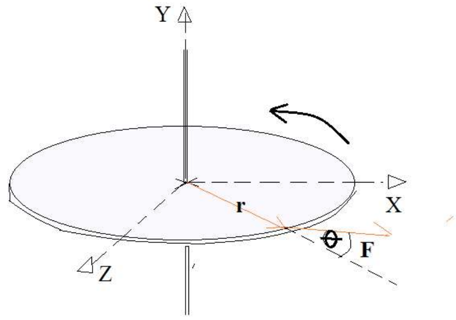


Figura 1: disco rotando en torno al eje vertical

El Momento de Torsión es un vector perpendicular al plano formado por los vectores *F* y *r.* El sentido del M_o se puede determinar mediante la regla de la mano derecha:

La figura 2 muestra la posición de los dedos pulgar,extendido y el resto de los dedos cerrados en el sentido de giro, en este caso, mirando la figura 1, ese sentido es antihorario. El dedo pulgar indica el sentido del vector M_o

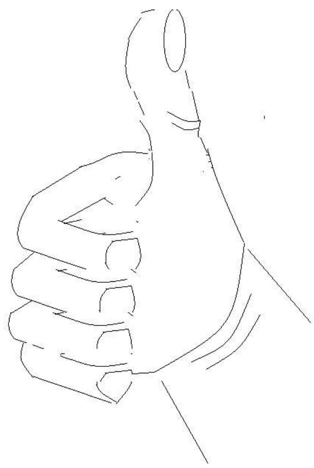


Figura 2: regla de la mano derecha

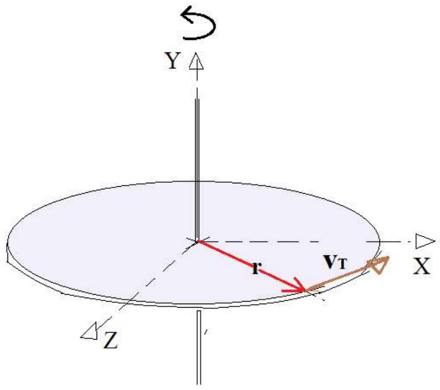
Cantidad de Movimiento Angular

Se ha definido en el capítulo Cantidad de Movimiento Lineal, qué es la cantidad de movimiento, las leyes que operan en sistemas aislados y la variación de cantidad de movimiento cuando operan agentes externos. Estos conceptos son aplicables también al movimiento rotacional del cuerpo rígido.

La Cantidad de Movimiento Lineal se ha definido como un vector, producto de la masa del objeto estudiado y su velocidad:

$$\overline{P} = m \cdot \overline{v}$$	(3)

Se define ahora Cantidad de Movimiento angular (*L*) en sistemas rotantes al vector:

$$\overline{L} = \overline{P} \times \overline{r} = \left(m \cdot \overline{v} \right) \times \overline{r}$$	(4)
 Figura 3: disco rotando el torno al eje vertical	

*S*e observa en la figura 3 a *r* y al vector velocidad tangencial *(v_T).* El vector *P* tiene la misma dirección y sentido que $v_{T.}$

Al tratarse del producto vectorial de *P* y *r, ese producto se* expresa como:

	$$\left\|\overline{L}\right\| = \left(m \cdot \left\|\overline{v}\right\| \right) \cdot \left\|\overline{r}\right\| \cdot \sin\theta$$	(5)
Se asume que θ =π/2 (r y v son perpendiculares)	$$L = m \cdot v \cdot r$$	(5')

La magnitud de *L* es:

$$\left[\overline{L} \right] = kg \cdot \frac{m}{s} \cdot m = kg \cdot \frac{m^2}{s}$$	(6)

siendo *L* un vector, su dirección será, siguiendo la regla dela mano derecha (ver figura 2) aplicado al sistema de la figura 3, perpendicular al plano del disco es decir, estará sobre el eje vertical (y), con sentido ascendente.

Retomando la expresión (5):

$$L = m \cdot \left(\omega \cdot r \right) \cdot r \cdot \sin\theta \quad \Rightarrow \quad L = m \cdot \omega \cdot r^2 \cdot \sin\theta$$	(7)

Queda, entonces:

$$L = \mathrm{I} \cdot \omega$$	(7')

Si en el disco de la figura 2 estuvieran aplicados varios Momentos de Torsión, los momentos angulares respectivos se suman vectorialmente, obteniéndose un momento angular resultante:

$\overline{L} = \sum \overline{L_i}$	(8)

Se quiere analizar el momento angular L del disco rígido. En la figura 4 se han indicado tres porciones de masa (coloreadas en azul) y se observa que las respectivas velocidades tangenciales y distancias al eje de rotación de cada porción son distintas:

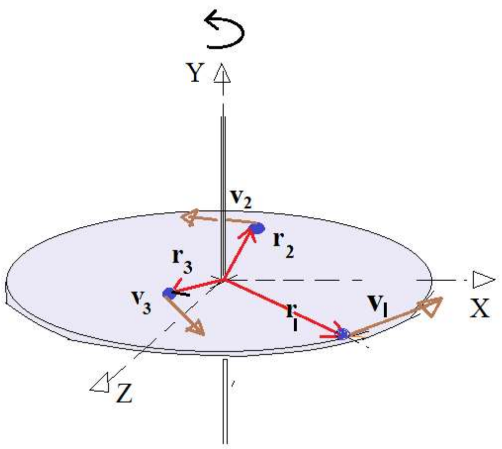


Figura 4: Partículas del disco con sus velocidades respectivas

Aplicando la expresión (8) a este caso, expresada en término de sus velocidades y radios, se tiene, pa esas tres partículas:

$L = m_1 \cdot v_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot v_2 \cdot r_2 + m_3 \cdot v_3 \cdot r_3$ $L = m_1 \cdot \omega \cdot r_1^2 + m_2 \cdot \omega \cdot r_2^2 + m_3 \cdot \omega \cdot r_3^2$ $L = \omega\left(m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2\right)$	(8')

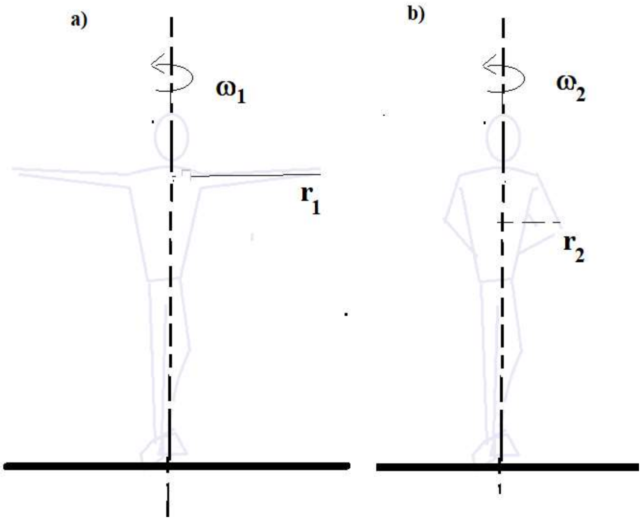
Extendiendo a todas las partículas que componen el disco:

$\overline{L} = m_1 \cdot \omega \cdot r_1^2 + m_2 \cdot \omega \cdot r_2^2 + ... + m_n \cdot \omega \cdot r_n^2$ $\overline{L} = \omega\left(m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + ... + m_n \cdot r_n^2\right)$	(9)

Puesto que ω es la misma para toda partícula que conforma el sistema rotante.

Conservación del momento angularen un sistema aislado:

Consideremos un bailarín sobre patines, que en un momento comienza a girar sobre su propio eje corporal, con los brazos extendidos: No hay fuerzas externas aplicadas a él, a excepción de la fuerza peso. Que no genera torque por estar sobre el mismo eje de rotación en esa instancia el bailarín gira sobre su propio eje con velocidad angular ω_1 y la distancia de la punta de sus dedos a ese eje es r_1 (Figura 5a). Si encoje los brazos, se observa que su velocidad angular ω aumenta.



Figuras 5a y 5b: Movimiento der giro del bailarín en torno a su eje axial, con los brazos extendidos, y luego encogidos.

No habiendo Momento de Torsión neto, el Momento Angular L se conserva:

$$L = I \cdot \omega$$
$$L = m_B \cdot r_1^2 \cdot \omega_1 = m_B \cdot r_2^2 \cdot \omega_2$$
$$L = I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2 \qquad (10)$$

Referencias:

Serway, R.; Jewett, J. - 'Física para Ciencias e Ingeniería' Cap 11. Vol. 1 – 7ª edición- Cengaje Learning (2008).

Sears, F., Semansky, M. Young, H.; Fredman, R. 'Física Universitaria' Cap.10- Vol 1- 12ª Edición- México- Pearson (2009)