Análisis Matemático I (2012)

Ingeniería en Electrónica
Departamento de Ciencias Aplicadas y Tecnología

2025

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MORENO

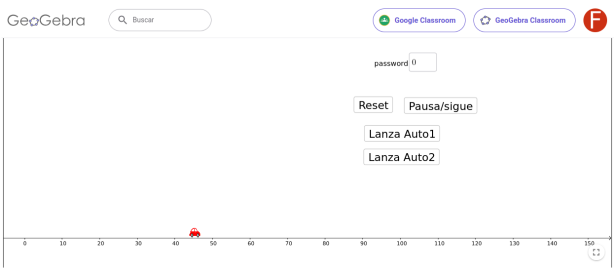
Índice general

Parte I

Modelización con funciones

Unidad 1: Modelos lineales

Problema 1. [Autitos en la pista]() Este problema es para investigar a partir de una applet de GeoGebra que pueden encontrar en este enlace (clic acá).



a) Jueguen un poco con la applet y escriban un breve texto que explique en qué consiste. El texto debería servir para que alguien que no haya visto la applet entienda de qué se trata.

b) Redacten dos o tres preguntas que se podrían investigar a partir de la applet. Estas preguntas serán compartidas en la clase y se discutirá las posibilidades y procedimientos convenientes para intentar responderlas.

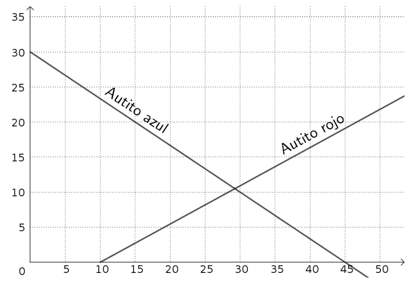
Problema 2. [GeoGebra y la app de los autitos]() En el Problema 1 usaron una applet programada en GeoGebra. ¿Cómo la programaron los docentes? ¿Qué recursos del software usaron? ¿Qué conocimientos matemáticos usaron? El objetivo último de este problema es que ustedes puedan investigar el software y aprender a:

- Reproducir esa applet programándola ustedes. ¿Cómo se mueven los autitos? ¿Por qué se mueven así? ¿Cómo se puede controlar eso?
- Aprender a introducir cambios y mejoras en la applet:
  - Que muestre los gráficos de las rectas.
  - Que se pueda cambiar la velocidad de cada autito y su punto de partida.
  - Que el usuario señale un punto de encuentro y que cuando los autos son lanzados y se encuentren aparezca un cartel que diga con qué porcentaje de error acertaste.

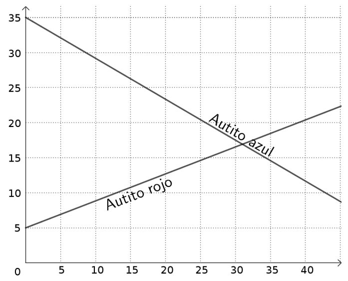
- Que cuando los autos choquen aparezca una explosión.

Problema 3. [Otros autitos] Cada gráfico corresponde a una situación como la de la applet del Problema 1. Para cada caso, respondan las preguntas que están a continuación.

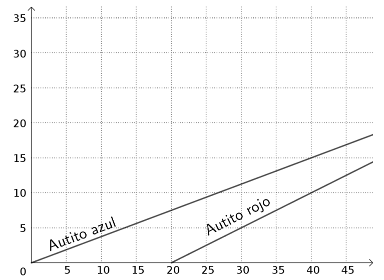
(i)



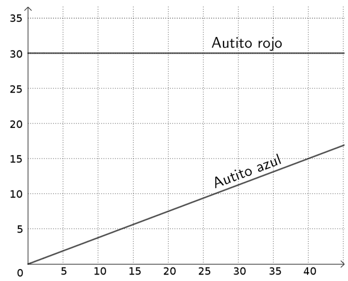
(ii)



(iii)



(iv)



(a) ¿Cuál de los dos autos va más rápido?

(b) ¿Alguno partió antes que el otro?

(c) ¿En qué sentido iba cada uno?

(d) ¿Dónde y en qué instante se encontraron?

Problema 4. [Problema de modelización abierto: celulares]( )

Tres compañías de telefonía celular estudian cómo ofrecer su plan para el nuevo **Mobicón Esmarfón**, con las prestaciones que se ven en el recuadro.

La compañia 1: Regala el teléfono y cobra un abono de $\$A_1$ por mes.

La compañia 2: Cobra el teléfono $\$C_2$ y un abono mensual de $\$A_2$.

La compañia 3: Cobra el teléfono $\$C_3$ da tres meses de abono gratuito y a partir del cuarto mes cobra el abono $\$A_3$.

+ WhatsApp
+ Pack 2 GB
+ Redes Sociales
+ Llamadas ilimitadas a todas las compañías
+ Noches Libres (500 MB por noche para usar de 22:00 a 06:00 AM)

(a) Construyan un modelo con GeoGebra, en el que A_1, A_2, A_3, C_2 y C_3, sean deslizadores. Investiguen los precios del mercado para elegir en qué rangos razonables se pueden mover esos deslizadores. El modelo debe servir para describir el costo que tiene para un cliente elegir cada una de las tres compañías, en función del tiempo que usará el teléfono.

(b) Jueguen con el modelo y elijan distintos valores de los deslizadores para que a un cliente que elegirá una compañía durante seis meses, un año, dos años, etc. le convenga la compañía 1, la 2 o la 3. Escriban en cada caso una explicación de por qué le convendrá una u otra.

Problema 5. [Problemas de un trazo. Función lineal]()

En los diccionarios chinos los ideogramas se ordenan por el número de trazos[1]. Los ideogramas son más complejos, cuanto más trazos tienen.

Basados en esa idea, pensamos que hay problemas matemáticos más y menos complejos. Son más complejos, los que demandan planificar toda una estrategia de resolución, con varios pasos que hay que ir ejecutando en orden. Los más simples de todos son los que tienen un solo paso: se pide hacer una cosa y nada más. Esos problemas son prácticamente ejercicios que requieren solamente saber hacer algo. Por eso los llamamos **Problemas de un trazo**. Son lo que se necesita manejar bien para poder ir avanzando en cada uno de los pasos de problemas complejos. Para las funciones lineales, identificamos los que vienen a continuación. ¿Se les ocurre algún otro?

L1. Dados dos puntos, escribir una fórmula de la función lineal que pasa por ellos.

L2. Dado un punto, escribir la fórmula de todas las funciones lineales que pasan por él.

L3. Dada la ecuación de una recta en la forma $Ax + By = C$ determinar la pendiente de la recta.

L4. Dada una función lineal, proponer otra que se cruce con la primera en un punto dado.

L5. Dada una función lineal y un punto que no está en su gráfico, escribir la ecuación de una recta paralela a la dada, pero que pase por el punto.

L6. Dada una función lineal y un punto, escribir la ecuación de una recta perpendicular a la dada, pero que pase por el punto.

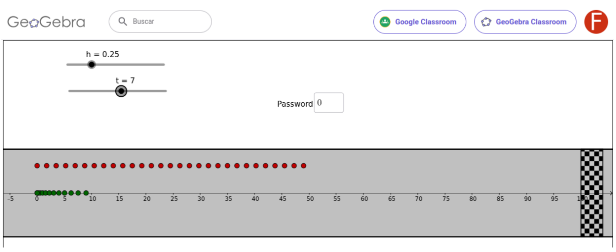
L7. Dadas dos funciones lineales, con distinta pendiente, encontrar las coordenadas del punto en el que se cruzan.

L8. Dados un punto $P = (a, b)$ y una pendiente m, graficar la recta que pasa por P y tiene pendiente m, sin obtener la ecuación.

[1] Es interesante visitar, por ejemplo, esta página.

Unidad 2: Modelos cuadráticos y variación

Problema 6. [Carrera]() Este problema es para investigar a partir de una applet de GeoGebra que pueden encontrar en este enlace (clic acá) y su consigna es exactamente la misma que la del **Problema 1**, porque es el tipo de abordaje de los problemas que nos acostumbraremos a hacer en esta materia.



a) Jueguen un poco con la applet y escriban un breve texto que explique en qué consiste. El texto debería servir para que alguien que no haya visto la applet entienda de qué se trata.

b) Redacten dos o tres preguntas que se podrían investigar a partir de la applet. Estas preguntas serán compartidas en la clase y se discutirá las posibilidades y procedimientos convenientes para intentar responderlas.

Problema 7. [Tiro vertical] Una bolita de vidrio es lanzada hacia arriba desde 1 m de altura y con una velocidad de 15 m/s. Si la variable t representa el tiempo (medido en segundos), la altura (en metros) a la que estará la bolita en cada instante viene dada por la fórmula

$$f(t) = -5t^2 + 15t + 1$$

a) ¿A qué altura del piso estará la bolita $0,5$ s después de ser lanzada?

b) ¿A qué altura estará 2 s después de ser lanzada?

c) ¿Se puede asegurar que la bolita estuvo ascendiendo durante los primeros dos segundos desde que fue lanzada?

d) Observen que, para esta función, es $f(0) = 1$. ¿Qué significa esta información en el contexto del problema?

e) Observen que $f(3) = 1$ y $f(4) = -19$ ¿Qué significan estos valores en el contexto del problema?

f) ¿Cuánto tarda la bolita en llegar al piso?

g) La **velocidad media** de la bolita entre un instante t_0 y un instante t_1 es la relación que hay entre la distancia recorrida por la bolita entre esos dos intantes y el tiempo $t_1 - t_0$ que le llevó recorrer esa distancia. Es decir:

$$\text{Velocidad media} = V_M = \frac{\text{Distancia recorrida}}{\text{Tiempo empleado}} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Para entender la definición, elijan dos instantes cercanos en el recorrido de la bolita, calculen la velocidad media en ese intervalo de tiempo y comparen con la que haya calculado otro compañero o compañera.

Problema 8. [Velocidad media]() Supongamos que k es algún número positivo. Si $f : [0, k] \to \mathbb{R} / f(t) = at^2 + bt + c$ da la posición en función del tiempo para un móvil.

a) Construyan una applet de GeoGebra donde:

- k, a, b y c sean deslizadores.
- Haya otros dos deslizadores t_0 y t_1.
- Haya dos puntos que se mueven sobre el gráfico de f y que corresponden la posición del móvil en los instantes t_0 y t_1.
- Haya en la pantalla un cartel que dice: *La velocidad media entre los instantes t_0 y t_1 es...*, de manera que el t_0 y el t_1 vayan cambiando en el cartel cuando el usuario mueve los deslizadores y aparezca en el cartel el cálculo de la velocidad media para esos valores de t_0 y t_1.

b) Si t es un instante de tiempo y h es un instante de tiempo muy chico, entonces $t + h$ representa "un ratito después del instante t". Hagan una segunda versión de la applet anterior que permita calcular y mostrar la velocidad media en intervalos de tiempo breves que van desde t hasta $t + h$.

c) Utilicen cualquiera de las dos applets para modificar los valores de a, b y c y determinar intervalos de tiempo en los que se pueda decir que:

- La velocidad media es positiva y cada vez mayor.
- La velocidad media es positiva y cada vez menor.
- La velocidad media es 0.

Problema 9. [Velocidad instantánea] Queremos estudiar como se podría definir en función del tiempo, la velocidad de un móvil como los que venimos viendo en problemas anteriores. Para eso vamos a calcular la velocidad media en distintos intervalos de su recorrido.

Consideren la función de posición $f : [0, 10] \to \mathbb{R}/f(t) = t^2$.

a) Partan el dominio de la función en 40 intervalos de tiempo iguales:
$0.0,\quad 0.25,\quad 0.5,\quad 0.75,\quad 1.0,\quad 1.25,\quad 1.5,\quad 1.75,\quad 2.0\ldots 9.5,\quad 9.75,\quad 10.0$
Calculen la velocidad media en cada uno de esos intervalos, con esta estrategia: organísense en el grupo de toda la clase para que cada uno calcule una velocidad media distinta y luego reúnan toda la información en una tabla, para construir un gráfico.

b) ¿Cómo se podría usar una computadora para sistematizar esta tarea?

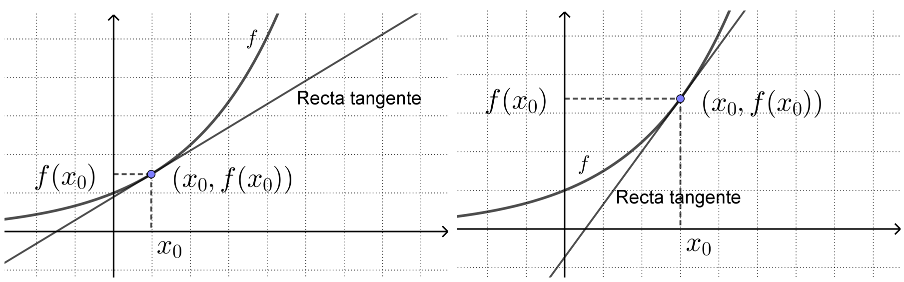
Problema 10. [Varias velocidades] Cada una de las siguientes funciones describe la posición de un automóvil en función del tiempo y se pueden considerar casos especiales de los que pueden representarse con la applet del **Problema 8**. Considérenlas para $t \geq 0$.

1. $f_1(t) = t^2 + 6t$
2. $f_2(t) = t^2 + 15t$
3. $f_3(t) = t^2 + 3t$
4. $f_4(t) = 3t^2$
5. $f_5(t) = \frac{1}{3}t^2$

Deduzcan en cada caso la función que da la velocidad del automóvil en cada instante t. Pueden graficarla con los recursos del **Problema 9**.

Problema 11. [Recta tangente] Lean el siguiente recuadro:

Recta tangente: La derivada de una función f en un punto x_0 de su dominio (en el que f es derivable) es la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$. La figura muestra el gráfico de una función f y su recta tangente en dos puntos distintos.



Esa recta tangente tiene una ecuación del tipo $y = mx + b$.

Pero, como su pendiente es $m = f'(x_0)$, la ecuación queda:

$$y = f'(x_0)x + b \tag{2.1}$$

Además, pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$. Poniendo esta condición en (2.1) se tiene que:

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$$

de donde, despejando b:

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0 \tag{2.2}$$

Poniendo esto en (2.1), resulta:

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 \tag{2.3}$$

y tomando factor común $f'(x_0)$ y ordenando, obtenemos, finalmente, la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$:

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)} \tag{2.4}$$

Consideren la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

1. Escriban la ecuación de la recta que es tangente al gráfico de f en el punto $(4, 1)$.
2. Lo mismo que en el ítem anterior, pero en el punto $(0, 1)$.
3. ( ) Grafiquen en GeoGebra f y las dos rectas halladas para verificar la tangencia.

Problema 12. [Ecuaciones de cinemática] Lean el siguiente recuadro:

Cuando en Física se estudia el movimiento de un cuerpo que tiene aceleración constante, se define esa aceleración como la variación de la velocidad en relación al tiempo. Dadas una velocidad v en un instante inicial t_0 y en un instante posterior t, esa variación se calcula como

$$a = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}. \tag{2.5}$$

Si, para simplificar las expresiones, consideramos que el instante inicial es $t_0 = 0$, la ecuación (2.5) queda

$$a = \frac{v(t) - v(0)}{t}, \tag{2.6}$$

de donde resulta, despejando,

$$v(t) = at + v(0) \tag{2.7}$$

Sabiendo que la velocidad $v(t)$ es la derivada de la posición $x(t)$, ¿cómo tiene que ser la fórmula de la posición en función del tiempo?

Problema 13. [Problemas tomados de la guía de Física I] El objetivo de incluir aquí estos problemas es contribuir a que puedan apreciar el diálogo que hay entre la Matemática y la Física. Los problemas de modelizar el movimiento de un cuerpo dieron históricamente motivación para el desarrollo de buena parte de lo que hoy llamamos Cálculo Diferencial. Hay quien elige aprender Matemática para luego entender los temas de Física y hay quien prefiere apoyarse en los contextos físicos para motivar la comprensión de la matemática. Cada uno y cada una debe encontrar su camino (y luego recorrerlo con MRU o MRUV).

a) La posición de un auto de carrera se observó en varios momentos; los resultados se resumen en la tabla siguiente.

t[s]	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
x[m]	0.0	2.3	9.2	20.7	36.8	57.5

Encuentren la velocidad promedio del auto para:

(i) El primer intervalo de tiempo de 1 s.
(ii) Los últimos 3 s.
(iii) Todo el periodo de observación.

b) Un auto va por una ruta a una velocidad constante de 60 km/h. Al ver un semáforo en rojo aplica el freno y se detiene en 10 s. Permanece parado durante 30 s. y vuelve a arrancar tardando 20 s. en llegar a misma velocidad a la que venía. Fijen un sistema de coordenadas y contesten:

(i) ¿Cuál es su aceleración antes de ver el semáforo?
(ii) ¿Cuál es su aceleración en el momento que está frenando?
(iii) ¿Cuál es su aceleración entre que arranca y alcanza la misma velocidad?
(iv) Realicen gráficos de la aceleración y la velocidad en función del tiempo que describan lo que sucedió antes, durante y después de la detención en el semáforo.

c) Para reducir su velocidad de 10 m/s a 5 m/s de manera uniforme, un móvil recorre una distancia de 100 metros. Hallar la aceleración y la distancia recorrida hasta detenerse.

Problema 14. [Problemas de un trazo. Función cuadrática]()

C1. Dados tres puntos no alineados y con distintas abscisas, escribir una fórmula de la función cuadrática que pasa por ellos.

C2. Dados dos puntos, escribir la fórmula de todas las funciones cuadráticas que pasan por ellos.

C3. La fórmula de una función cuadrática se puede escribir como:

(i) $f(x) = ax^2 + bx + c$

(ii) $f(x) = a(x-p)^2 + q$

(iii) $f(x) = a(x-x_0)(x-x_1)$

siempre con $a \neq 0$

Dada una función cuadrática expresada de cualquiera de las formas (i), (ii) o (iii), manipular la expresión algebraica para expresarla de cualquiera de las otras dos formas.

C4. Dada una función cuadrática en cualquiera de las formas (i), (ii) o (iii) y un punto $P = (r, s)$ decidir si el punto pertenece o no al gráfico de la función.

C5. Resolver ecuaciones de las formas

a) $ax^2 + bx + c = 0$

b) $a(x-p)^2 + q = 0$

c) $a(x-x_0)(x-x_1) = 0$

C6. Dada una función cuadrática en cualquiera de las formas (i), (ii) o (iii) construir la parábola que es su gráfico.

C7. Dada una función cuadrática en cualquiera de las formas (i), (ii) o (iii) identificar el eje de simetría de la parábola (que es su gráfico).

C8. Dada una función cuadrática en cualquiera de las formas (i), (ii) o (iii) identificar el vértice de la parábola (que es su gráfico).

C9. Dada una función cuadrática en cualquiera de las formas (i), (ii) o (iii) encontrar pares de puntos x_n, x_m, tales que $f(x_n) = f(x_m)$.

C10. Dadas dos funciones cuadráticas determinar la intersección de sus gráficas y decidir si se trata de un punto, de dos puntos o de ningún punto.

C11. Dadas una función cuadrática y una lineal determinar la intersección de sus gráficas y decidir si se trata de un punto, de dos puntos o de ningún punto.

Problema 15. [Problemas de un trazo. Función cuadrática y derivada]()

D1. Dada una función cuadrática en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ o $f(x) = a(x-p)^2 + q$, escribir su derivada.

D2. Dada una función cuadrática en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ o $f(x) = a(x-p)^2 + q$, escribir la ecuación de la recta tangente a su gráfico en un punto $P = (x_0, f(x_0))$.

D3. Dada una función cuadrática en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ o $f(x) = a(x-p)^2 + q$, y un número real k, determinar x_0 tal que $f'(x_0) = k$.

D4. Dada una función lineal $f(x) = mx + b$ encontrar una función cuadrática F tal que $F' = f$.

D5. Dada una función lineal $f(x) = mx + b$ y un punto $(x_0, f(x_0))$, hallar una función cuadrática g tal que el gráfico de f sea la recta tangente al gráfico de g en $(x_0, g(x_0))$.

D6. Dada una función cuadrática en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ o $f(x) = a(x-p)^2 + q$ identificar el vértice resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$.

D7. Dada una función cuadrática en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ o $f(x) = a(x-p)^2 + q$ identificar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento resolviendo las inecuaciones $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$.

Unidad 3: Funciones polinómicas

Problema 16. [Explorar applet polinómicas]() Lean el siguiente recuadro:

En estas últimas dos unidades hemos estudiado en detalle las funciones lineales, que responden a fórmulas del tipo

$$f(x) = mx + b$$

y las funciones cuadráticas, que responden a fórmulas del tipo

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Debido al valor del máximo exponente que aparece en las variables en cada una de estas funciones, se dice que las lineales son **de grado 1** y las cuadráticas son **de grado 2**. Siguiendo de la misma manera, se puede pensar en una familia más general de funciones, donde los grados son más altos. Como irán apareciendo más términos y sería incómodo ir eligiendo distintas letras para nombrar a cada coeficiente, comenzaremos a nombrarlos de otra manera: a_0 será el término independiente, a_1 el coeficiente lineal (la pendiente m de la recta), a_2 el coeficiente cuadrático y así sucesivamente. Con esta escritura las fórmulas quedarían así:

Una función de grado 1 tendría la forma $f(x) = a_1x + a_0$

(con $a_1 \neq 0$).

Una función de grado 2: $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

(con $a_2 \neq 0$).

Una función de grado 3: $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

(con $a_3 \neq 0$).

Una función de grado 4: $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

(con $a_4 \neq 0$).

Y así sucesivamente.

En la otra dirección, una función constante $f(x) = a_0$ (con $a_0 \neq 0$) tiene grado 0.

La función constante, pero nula, cuya fórmula es $f(x) = 0$, es también polinómica, pero **no tiene grado**.

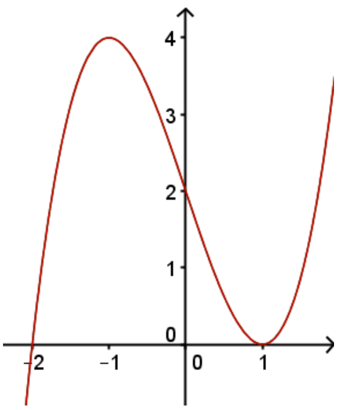
Todas estas funciones se llaman **funciones polinómicas**.

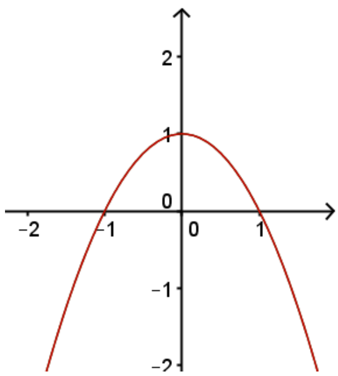
Este problema nos servirá para investigar propiedades de los gráficos de distintas funciones polinómicas, en relación a sus fórmulas y también distintas formas equivalentes de escribir sus fórmulas.

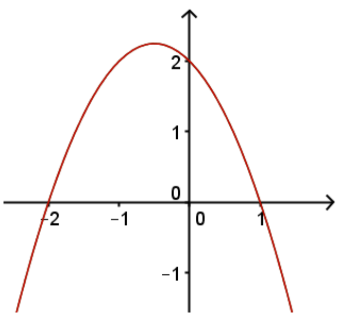
Abran el archivo FuncionesPolinomicas.ggb. La idea es explorarlo y construir entre todos observaciones y afirmaciones que podamos comprobar o descartar para ir conociendo a estas funciones.

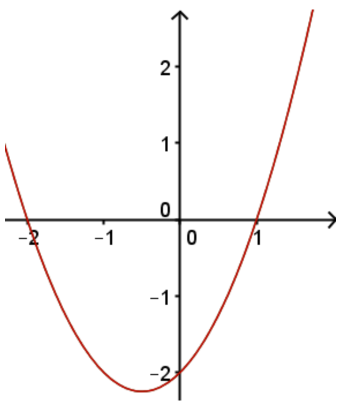
Problema 17. [Gráficos y fórmulas]() Utilicen las conclusiones del 16 para decidir cuál de los gráficos corresponde a cada una de las funciones polinómicas de grado 2 dadas.

$$f(x) = (x+2)(x-1) \qquad\qquad g(x) = -(x+2)(x-1)$$

a)


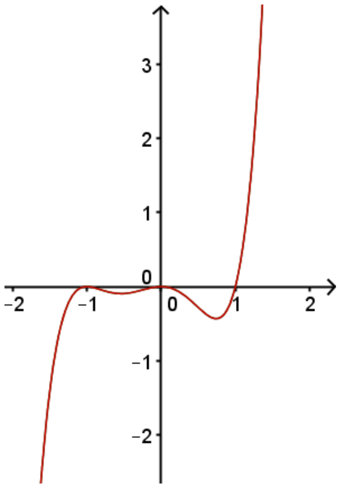
b)


c)


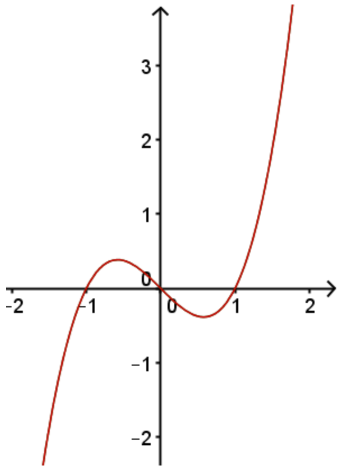
d)


Problema 18. [Más gráficos y fórmulas]() Utilicen las conclusiones del 16 para decidir cuál de los gráficos corresponde a cada una de las funciones polinómicas dadas.

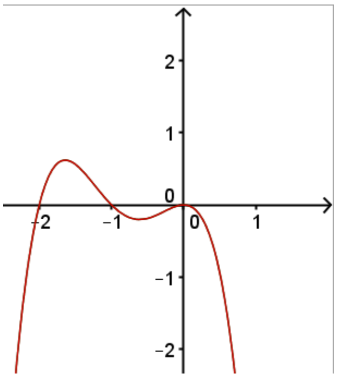
$$f(x) = x^3 - x \qquad\qquad g(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$$



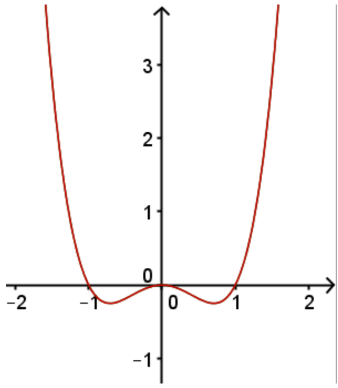
a)



b)



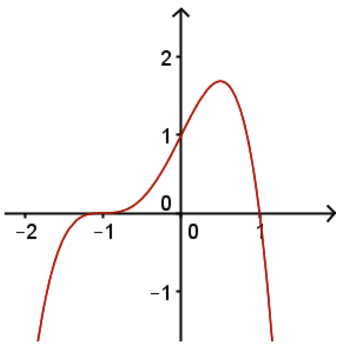
c)



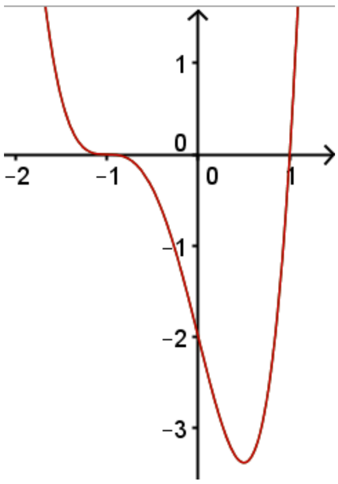
d)

Problema 19. [Todavía más gráficos y fórmulas]() La misma consigna que en los problemas anteriores, para las siguientes funciones y gráficos.

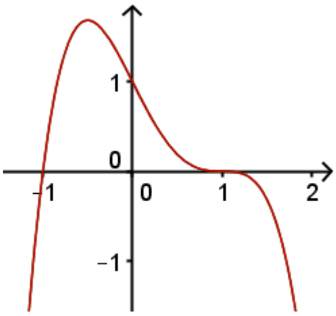
$$f(x) = -(x+1)^3(x-1) \qquad g(x) = 2x^2(x+1)(x-1)^2$$

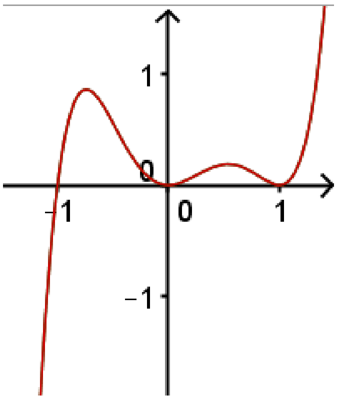


a)



b)

c) 

d) 

Problema 20. [Comando Desarrolla]( )

a) Verifiquen sus respuestas del 19 ingresando en la **Barra de Entrada** de **GeoGebra** las funciones $f(x) = -(x+1)^3(x-1)$ y $g(x) = 2x^2(x+1)(x-1)^2$.

b) Investiguen el comando `Desarrolla[ <Función> ]` para las funciones del ítem anterior. ¿Cómo funciona ese comando? ¿Cómo harían calculando con lápiz y papel lo que hace el comando?

Problema 21. [Manejo algebraico: distributiva]( )

a) Desarrollen calculando con lápiz y papel las siguientes funciones polinómicas:

   a) $f_1(x) = (x-5)(x-2)(x+1)$.
   b) $f_2(x) = x(x+2)(x-1)$.
   c) $f_3(x) = (x-3)(x+3)(x+1)^2$.
   d) $f_4(x) = (x-5)^2(x-2)$.

b) Observen las fórmulas de f_1, f_2, f_3 y f_4 dadas en el ítem anterior y las versiones desarrolladas obtenidas. ¿A partir de cuál de esas versiones les resultaría más fácil dibujar un gráfico aproximado de las funciones?

Problema 22. [Derivar funciones polinómicas I]( ) Lean el siguiente recuadro:

En la Unidad anterior conocimos el concepto de derivada y aprendimos a derivar funciones lineales y cuadráticas. Recordemos:

> La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en ese punto.

La derivada de una función constante es 0, porque su gráfico es una recta horizontal y la recta tangente a esa recta en todo punto es la recta misma, que tiene pendiente 0.

La derivada de una función lineal (polinómica de grado 1) $f(x) = mx + b$ es la pendiente de su recta tangente. Pero en todo punto la recta tangente es la misma $f(x) = mx + b$, cuya pendiente es m. Por lo tanto, la derivada de $f(x) = mx + b$ es $f'(x) = m$.

En particular, si $f(x) = x$ entonces es $f'(x) = 1$.

Vamos a mostrar que con esto nos alcanza para conocer las derivadas de otras funciones polinómicas como $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, etc.

Lo único que necesitamos conocer es cómo se deriva el producto de dos funciones. Y para eso necesitamos tener presente la definición de **derivada** con la que trabajamos en los Problemas 8 y 9 de la Unidad anterior:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

No importa que en este curso no hagamos un estudio sistemático y detallado del concepto de límite. Para entender esta definición hay que comprender que $h \to 0$ significa que h se va acercando a 0 y uno observa qué sucede con el cociente. Podemos tener una idea poniendo valores de h pequeños, como por ejemplo $h = 0.00001$. Pero siempre debe ser $h \neq 0$ porque no se puede dividir por 0. En el cociente de la definición de derivada el numerador y el denominador se acercan a 0 a la vez, pero de manera que el cociente termina acercándose a un número, que es, en cada punto x, el valor de la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función f en el punto $(x, f(x))$.

Supongamos ahora que queremos conocer la derivada de $f(x)g(x)$. Para eso estudiamos el límite

$$[f(x)g(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Sumamos y restamos una misma cantidad, solo para escribir la expresión de manera distinta, pero equivalente [a].

$$
\begin{aligned}
[f(x)g(x)]' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - g(x+h)f(x) + g(x+h)f(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h) + (g(x+h)-g(x))f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} f(x) \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}
$$

Lo que se ha demostrado es la manera de derivar un producto de dos funciones:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{3.8}$$

[a] Es un procedimiento común en matemática (y también en otras disciplinas): cambiar la manera de expresar algo para que se entienda un aspecto que con la expresión anterior no se entendía o no se alcanzaba a ver.

a) Consideren que $f(x) = x^2$ es equivalente a $f(x) = x \cdot x$ y utilicen la derivada del producto para deducir la derivada de $f(x) = x^2$ (que ya conocen).

b) Consideren que $f(x) = x^3$ es equivalente a $f(x) = x^2 \cdot x$ y utilicen la derivada del producto para deducir la derivada de $f(x) = x^3$.

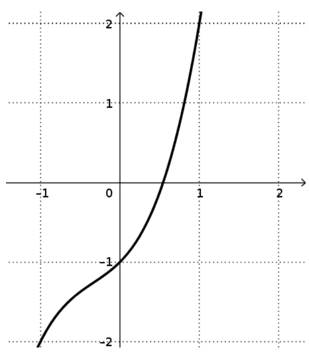
c) Consideren que $f(x) = x^4$ es equivalente a $f(x) = x^3 \cdot x$ y utilicen la derivada del producto para deducir la derivada de $f(x) = x^4$.

d) Si no se aburrieron y todavía lo necesitan, consideren que $f(x) = x^5$ es equivalente a $f(x) = x^4 \cdot x$ y utilicen la derivada del producto para deducir la derivada de $f(x) = x^5$.

e) Continúen en esta línea hasta que sean capaces de decir cuál es la derivada de $f(x) = x^n$, para cualquier entrero positivo n.

Problema 23. [Raíces de funciones polinómicas]()

Consideren la función $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$, cuyo gráfico está a la derecha. Recordemos que un número x_0 es raíz de f si $f(x_0) = 0$. Por lo tanto, se ve en el gráfico que f tiene una raíz entre 0 y 1.



a) Realicen alguna exploración con calculadora para encontrar un valor aproximado de esa raíz.

b) Escriban una serie de instrucciones que le expliquen a una persona con una calculadora cómo llevar adelante esa exploración, de manera sistemática.

Problema 24. [Raíces de funciones polinómicas II]()

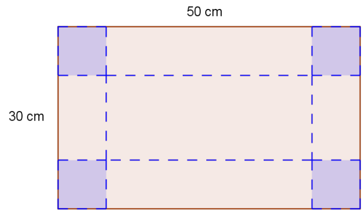
a) Observen la animación que se muestra en esta applet (clic acá). Traten de explicar en palabras qué es lo que va sucediendo, a partir de una lista que lo cuente paso a paso.

b) Consideren que la función es $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$, como en el problema anterior y úsenla como ejemplo para realizar este procedimiento. Nota: la comprensión de cuál es el objetivo de lo que están observando es parte necesaria de la motivación que puedan encontrar para llevar adelante esta tarea.

c) ¿Pueden pensar alguna manera de sistematizar este procedimiento con el recurso de una computadora?

Problema 25. [Caja de volumen máximo] Cortando cuadrados iguales de las esquinas de una plancha de cartón de
50 cm × 30 cm, el cartón puede plegarse para formar una caja.

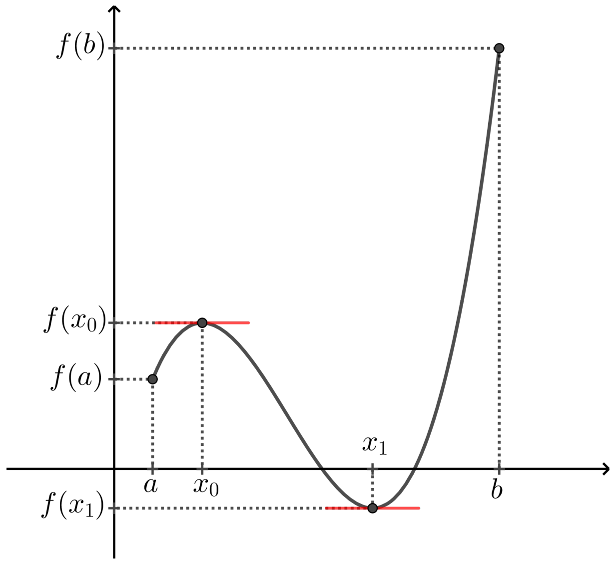
¿Cuál debe ser la medida del lado del cuadradito cortado para que el volumen de la caja que se arme sea lo mayor posible?



Problema 26. [Definición de extremos] Lean el siguiente recuadro:

El problema anterior es un ejemplo muy concreto de una variedad de problemas para los que la modelización mediante funciones y los recursos del cálculo resultan herramientas extraordinarias. Se trata de los problemas de optimización. Permanentemente se presentan en las aplicaciones económicas, físicas e ingenieriles situaciones en las que se requiere identificar las mejores condiciones mediante un modelo: dónde es menor la temperatura, bajo qué condiciones un costo que hay que afrontar es lo menor posible, qué camino es más rápido, etc. Eso nos lleva a caracterizar y definir los valores extremos de una función, en su dominio.

Observen el gráfico de la función f:



La función está definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. En dicho intervalo, alcanza distintos tipos de extremos. Alcanza un **máximo local** de valor $f(x_0)$ en el punto x_0. Es apenas local, porque es el máximo valor que toma f en los alrededores del punto x_0, aunque luego sea superado por otros valores que toma f, por ejemplo cerca del punto b. En cambio f alcanza un **máximo absoluto** de valor $f(b)$ en el punto b. Es absoluto porque no hay en todo el dominio de f otro punto en el que f valga más de lo que vale en b.

Por otra parte, f alcanza un **mínimo local** de valor $f(a)$ en el punto a, que es apenas local, porque es el mínimo valor que toma f en los alrededores del punto a (observen que esos *alrededores* existen solo a la derecha de a, por ser a un punto frontera del dominio de f), aunque existan otros puntos en los que f vale menos que lo que vale en a, por ejemplo cerca del punto x_1. Precisamente en el punto x_1 la función f alcanza un **mínimo absoluto**, porque no hay ningún punto en $[a, b]$ en el que f valga menos que lo que vale en x_1.

El gráfico de f tiene también destacados dos segmentos horizontales en los puntos del intervalo abierto (a, b) en los que f alcanza extremos. Esos segmentos muestran que la recta tangente en dichos puntos es horizontal, lo que en términos de la derivada, significa que f' se anula (vale 0) en dichos puntos. Formalmente, esto se conoce como el teorema de Fermat (Pierre de Fermat, francés (1601-1665)): Sea f una función derivable en el intervalo abierto (a, b). Si f alcanza un máximo o un mínimo en el punto $x_0 \in (a, b)$ entonces $f'(x_0) = 0$.

Esta anulación de la derivada permite identificar los extremos (máximos o mínimos) locales de puntos del dominio que no son frontera del mismo, siempre que la derivada exista en esos puntos. Los puntos x_0 del dominio de f en los que la derivada de f se anula ($f'(x_0) = 0$) se denominan **puntos críticos** de f.

Concretamente definimos:

$f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza un **máximo local** en $x_0 \in I$ si existe algún intervalo abierto que contiene a x_0 tal que para cualquier punto x de dicho intervalo resulta $f(x) \leq f(x_0)$.

$f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza un **mínimo local** en $x_0 \in I$ si existe algún intervalo abierto que contiene a x_0 tal que para cualquier punto x de dicho intervalo resulta $f(x) \geq f(x_0)$.

$f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza un **máximo absoluto** en $x_0 \in I$ si para cualquier x de dicho intervalo resulta $f(x) \leq f(x_0)$.

$f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza un **mínimo absoluto** en $x_0 \in I$ si para cualquier x de dicho intervalo resulta $f(x) \geq f(x_0)$.

Vuelvan al Problema 25 y observen el gráfico. Identifiquen analíticamente el máximo de la función y completen la resolución del problema.

Problema 27. [Practicar búsqueda de extremos I] Encuentren los extremos locales de cada una de las siguientes funciones. ¿Son máximos o mínimos locales? ¿Cómo lo pueden decidir?

a) $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

b) $f(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$

Problema 28. [Practicar búsqueda de extremos II] Buscar puntos críticos de las siguientes funciones demanda resolver ecuaciones polinómicas de grado mayor que 2. En el Problema 24 se estudió un recurso para hacerlo de forma aproximada. Utilicen ese recurso para buscar los extremos locales de cada función.

a) $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - x^2 + x + 1$

b) $f(x) = -\frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + x^2 + x - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 + x^2$

Problema 29. [Extremos con animación]

a) Accedan a este enlace https://www.geogebra.org/m/kzeu8kxr y observen cómo varía el cuadrilero verde cuando se mueve el deslizador n.

   (i) Calculen el área del cuadrilátero para un par de valores de n que elijan.

   (ii) Determinen analíticamente para qué valor de n es mínima el área del polígono verde.

b) Lo mismo que en el ítem anterior, pero con la figura de este enlace:

   https://www.geogebra.org/m/zuxd56ne

Problema 30. [Construir applet para extremos]() Realicen en GeoGebra la siguiente construcción dinámica:

(i) La construcción debe moverse con un deslizador.

(ii) Debe consistir en un rectángulo con una semicircunferencia sobre uno de sus lados, de manera que ese lado del rectángulo sea un diámetro de la circunferencia.

(iii) Al mover el deslizador, el largo y el ancho del rectángulo deben variar, pero de tal manera que el perímetro total de la figura (formado por tres lados del rectángulo y por la semicircunferencia) mida siempre 8 unidades.

¿Para qué valor del deslizador el área de la figura resulta máxima?

Problema 31. [Perímetro mínimo] De todos los rectángulos de área 100 m^2 determinen, si es posible, el rectángulo que tenga menor perímetro.

Problema 32. [Caja sin tapa] Se desea fabricar una caja sin tapa, de base cuadrada[2]. El material para fabricar las caras laterales cuesta $3 el cm^2 y el del fondo –que debe ser más rígido– cuesta $4 el cm^2. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de volumen máximo que se puede construir con un presupuesto de $48?

Problema 33. [Triángulo de área mínima] Hallen una ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 5)$ y forma en el primer cuadrante un triángulo de área mínima.

Problema 34. [La pista de atletismo] Una pista de atletismo consta de una zona rectangular y un semicírculo en cada uno de sus extremos. Si el perímetro de la pista ha de ser 200 metros, calculen las dimensiones que hacen máxima el área de la zona rectangular. ¿Cuál es el área total de la pista?

Problema 35. [Rectángulo en triángulo] Determinen las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 cm y 12 cm, si el rectángulo tiene un vértice en el ángulo recto del triángulo y otro vértice en la hipotenusa del triángulo.

Problema 36. [Rectángulo inscripto en parábola] Un rectángulo tiene un vértice en $(0, 0)$, un lado sobre el eje x y otro lado sobre el eje y. El vértice opuesto a $(0, 0)$ está sobre la parábola de ecuación $y = 2x^2 - 9x + 12$ con $0 \leq x \leq 3$ ¿Cuál es el área máxima posible para el rectángulo?

[2] Los **Problemas** 32, 33, 34, 35 y 36 fueron tomados y adaptados de la Práctica del curso Cálculo Diferencial e Integral, de la Escuela de Matemática Instituto Tecnológico de Costa Rica. Ver `https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/practicas/`

Problema 37. [Maxi en bicicleta] Maxi sale de su casa a dar un paseo en bicicleta. El gráfico corresponde a la función f que muestra la posición de Maxi (respecto de su casa que está en el 0 y medida en kilómetros) en función del tiempo (medido en horas).

a) Redactá un texto que describa con el mayor detalle que puedas, cómo fue el recorrido en el paseo de Maxi. Decidir qué aspectos es importante mencionar y de qué manera el gráfico lo informa es parte de la comprensión del problema.

b) Compartí tu texto con el de algún compañero o compañera. ¿Dicen lo mismo? ¿Se contradicen? ¿Se complementan?

c) Trazá un gráfico aproximado de la función f' (derivada de f). ¿Qué representa?

d) ¿Te ayuda el gráfico de f' a mejorar la precisión de lo que escribiste en el punto a)?

e) Trazá un gráfico aproximado de la función f'' (derivada de f' y derivada segunda de f). ¿Qué representa?

f) ¿Te ayuda el gráfico de f'' a mejorar la precisión de lo que escribiste en el punto a)?

g) Con tus conocimientos de las funciones polinómicas, proponé la fórmula de una de ellas, cuyo gráfico se ajuste lo mejor que puedas al de f. Calculá f' y f'' y usalas para verificar si los gráficos trazados antes resultan adecuados.

Concavidad y puntos de inflexión

Problema 38. [Teoría concavidad] Lean las siguientes páginas que introducen el concepto de punto de inflexión, extraídas del libro Cálculo Aplicado de Hallett y otros autores [1]. Intenten resolver los ejemplos antes de leer cada solución.

Concavidad y puntos de inflexión

El análisis de los puntos de la gráfica de una función en los que la pendiente cambia de signo nos conduce a los puntos críticos. Ahora estudiaremos los puntos de la gráfica en los que cambia la concavidad, ya sea de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Un punto en el que la gráfica de una función f cambia de concavidad se llama **punto de inflexión** de f.

Las palabras "punto de inflexión de f" pueden referirse ya sea a un punto del dominio de f o a un punto de la gráfica de f. El contexto del problema dirá a cuál se refiere.

¿Cómo localizar un punto de inflexión?

Como la concavidad de la gráfica de f cambia en un punto de inflexión, el signo de f'' cambia en ese punto: es positivo en un lado del punto de inflexión y negativo en el otro. Por consiguiente, en el punto de inflexión, f'' es igual a cero o no está definida (véase la figura 4.13).

172 **Cálculo aplicado**

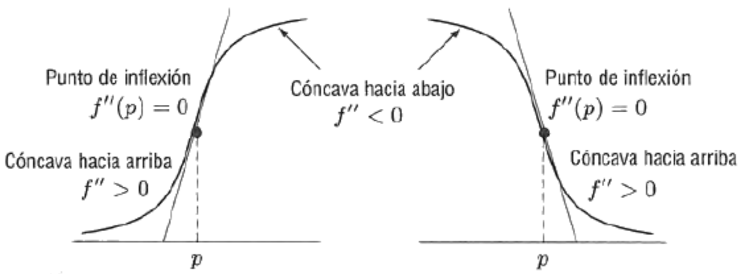


Figura 4.13. Cambio en la concavidad (de positiva a negativa o viceversa) en el punto p.

Ejemplo 1 Encuentre los puntos de inflexión de $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$.

Solución En la figura 4.14 parte de la gráfica de f es cóncava hacia arriba y parte es cóncava hacia abajo, de modo que la función debe tener un punto de inflexión. Sin embargo, al observar la gráfica es difícil localizar exactamente al punto de inflexión. Para encontrar exactamente el punto de inflexión, calculamos el punto en el que la segunda derivada es igual a cero.[1] Puesto que $f'(x) = 3x^2 - 18x - 48$,

$$f''(x) = 6x - 18 \quad \text{por tanto} \quad f''(x) = 0 \quad \text{cuando} \quad x = 3.$$

La gráfica de $f(x)$ cambia de concavidad en $x = 3$, de modo que $x = 3$ es un punto de inflexión.

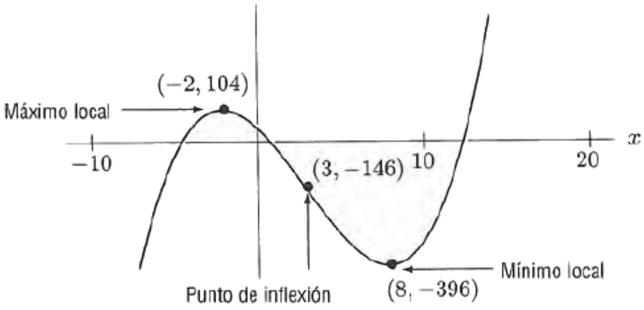


Figura 4.14. Gráfica de $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$ que muestra el punto de inflexión en $x = 3$.

Ejemplo 2 Trace la gráfica de una función f con las siguientes propiedades: f tiene un punto crítico en $x = 4$ y un punto de inflexión en $x = 8$; el valor de f' es negativo a la izquierda de 4 y positivo a la derecha de 4; el valor de f'' es positivo a la izquierda de 8 y negativo a la derecha de 8.

Solución Debido a que f' es negativa a la izquierda de 4 y positiva a la derecha de 4, el valor de $f(x)$ es decreciente a la izquierda de 4 y creciente a la derecha de 4. Los valores de f'' nos dicen que la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba a la izquierda de 8 y cóncava hacia abajo a la derecha de 8. En la figura 4.15 se da una posible gráfica.

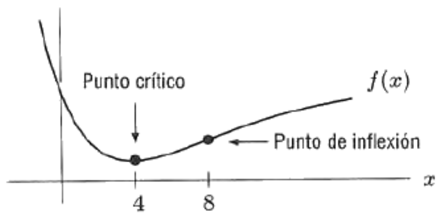


Figura 4.15. Función con un punto crítico en $x = 4$ y un punto de inflexión en $x = 8$.

[1] Para un polinomio, la segunda derivada no puede estar indefinida.

Ejemplo 3 La figura 4.16 muestra una población que crece hacia una población límite, L. Hay un punto de inflexión en la gráfica en el punto donde la población alcanza $L/2$. ¿Cuál es la importancia del punto de inflexión para la población?

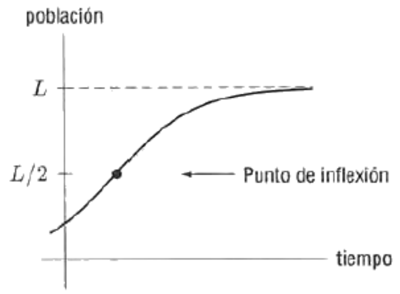


Figura 4.16. Punto de inflexión de la gráfica de una población que crece hacia una población limite, L.

Solución En los años anteriores al punto de inflexión, la población aumenta cada vez más rápido en cada año. En los años posteriores al punto de inflexión, la población aumenta cada vez más lentamente cada año. En el punto de inflexión, la población aumenta lo más rápido posible.

Ejemplo 4 **(a)** ¿Cuántos puntos críticos y cuántos puntos de inflexión tiene la función $f(x) = xe^{-x}$?
(b) Utilice derivadas para localizar con exactitud los puntos críticos y los puntos de inflexión.

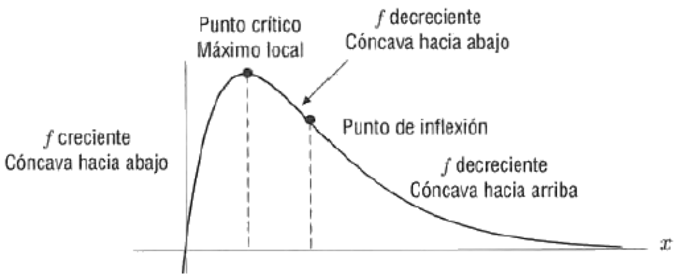


Figura 4.17. Gráfica de $f(x) = xe^{-x}$.

Solución **(a)** La figura 4.17 muestra la gráfica de $f(x) = xe^{-x}$. Parece tener un punto crítico, que es un máximo local. ¿Existe algún punto de inflexión? Como la gráfica de la función es cóncava hacia abajo en el punto crítico y cóncava hacia arriba para x grande, la gráfica de la función cambia de concavidad, de modo que debe haber un punto de inflexión a la derecha del punto crítico.

(b) Para hallar el punto crítico, encuentre al punto donde la primera derivada de f es cero o esté indefinida. La regla del producto da

$$f'(x) = x(-e^{-x}) + (1)(e^{-x}) = (1-x)e^{-x}.$$

Tenemos que $f'(x) = 0$ cuando $x = 1$, por lo que el punto crítico está en $x = 1$. Para localizar al punto de inflexión, se determina el punto en el que la segunda derivada de f cambia de signo. Al emplear la regla del producto en la primera derivada, tenemos

$$f''(x) = (1-x)(-e^{-x}) + (-1)(e^{-x}) = (x-2)e^{-x}.$$

Tenemos que $f''(x) = 0$ cuando $x = 2$. Puesto que $f''(x) > 0$ para $x > 2$ y $f''(x) < 0$ para $x < 2$, la concavidad cambia de signo en $x = 2$. Por tanto, el punto de inflexión está en $x = 2$.

¡Atención!

No todos los puntos x en los que $f''(x) = 0$ (o f'' no esté definida) son puntos de inflexión (así como no todos los puntos en los que $f' = 0$ son máximos o mínimos locales). Por ejemplo, $f(x) = x^4$ tiene a

$f''(x) = 12x^2$ por lo que $f''(0) = 0$, pero $f'' > 0$ cuando $x > 0$ y cuando $x < 0$, de ahí que la gráfica de f es cóncava hacia arriba en ambos lados de $x = 0$. No hay *ningún* cambio de concavidad en $x = 0$ (véase la figura 4.18).

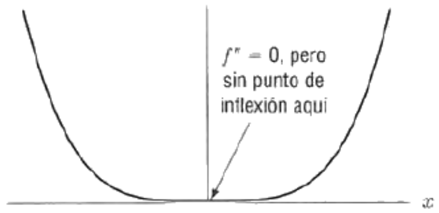


Figura 4.18. Gráfica de $f(x) = x^4$.

Ejemplo 5 Supongamos que se vierte agua en el florero de la figura 4.19 a una razón constante medida en litros por minuto. Trace una gráfica de $y = f(t)$, la profundidad del agua respecto al tiempo, t. Explique la concavidad e indique los puntos de inflexión.

Solución Observe que el volumen de agua en el florero aumenta a una razón constante.

Al principio, el nivel del agua, y, aumenta muy lentamente debido a que la base del florero es amplia y por ello se necesita mucha agua para aumentar la profundidad, pero a medida que el florero se hace angosto aumenta la razón a la que sube el nivel del agua. Esto significa que de inicio y aumenta a una razón creciente y la gráfica es cóncava hacia arriba. El nivel del agua aumenta lo más rápido posible, por lo que la razón de cambio de la profundidad y está a un punto máximo cuando el agua llega a la mitad del florero, donde el diámetro es más pequeño; éste es el punto de inflexión (véase la figura 4.20). Después de eso, la razón a la que cambia el nivel del agua comienza a decrecer y, por tanto, la gráfica es cóncava hacia abajo.

Figura 4.19. Un florero.

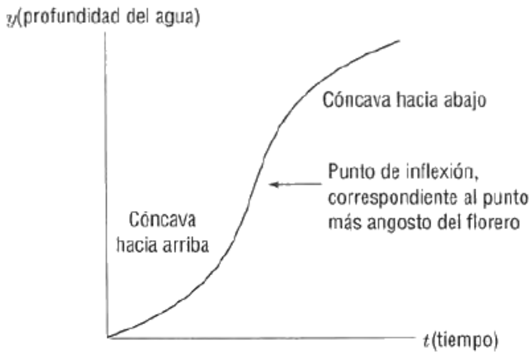


Figura 4.20. Gráfica de la profundidad del agua en el florero, y, respecto al tiempo, t.

Ejemplo 6 ¿Cuál es la concavidad de la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$?

Solución Tenemos $f'(x) = 2ax + b$ y $f''(x) = 2a$. La segunda derivada de f tiene el mismo signo que a. Si $a > 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba en todos los puntos, una parábola que se abre hacia arriba. Si $a < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo en todos los puntos, una parábola que se abre hacia abajo. (Véase la figura 4.21.)

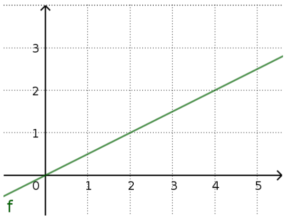
Figura 4.21. Concavidad de $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Problema 39. [Ejercicio de imaginación]() Con lápiz y papel:

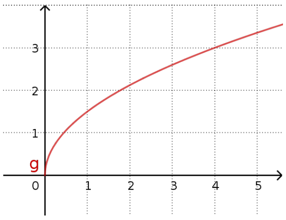
a) Teniendo en cuenta que la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en ese punto, piensen cómo puede ser el gráfico de una función f, tal que $f'(x) = f(x)$ para todos los valores de x. Si después de cinco minutos no se les ocurre nada de nada, pasen a la parte b).

b) Expliquen por qué ninguna de las funciones cuyos gráficos se muestran a continuación es igual a su propia derivada.

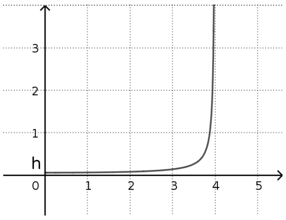
(i)



(ii)



(iii)



c) Si no salió antes de discutir estos gráficos, vuelvan al ítem a).

Unidad 4: Funciones exponenciales

Problema 40. [Función exponencial] Lean el siguiente recuadro:

Una función cuyo gráfico tiene el aspecto que se discute en el **Problema** 39 se llama **exponencial**, porque la variable ocupa el lugar del exponente en una potencia:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / f(x) = a^x, \qquad\qquad a > 0, a \neq 1$$

Definir de manera general estas funciones es bastante delicado y nosotros las conoceremos de una manera intuitiva, apoyándonos en los cálculos que sabemos hacer. Los casos más simples son aquellos en los que la base a y el exponente x toman valores enteros (y en algunos casos fracciones), ya que todos podemos calcular 2^3 (¿cuál es su valor?) o $(\frac{1}{2})^3$ (¿cuál es su valor?), aunque todavía no estamos preparados para poder decir cuánto es $2^{\sqrt{2}}$ (más desconcertante todavía sería pensar en $\pi^{\sqrt{2}}$). La calculadora o la computadora nos devolverán valores aproximados cuando necesitemos tener una idea de cuánto vale $2^{\sqrt{2}}$ y comprenderemos de a poco qué significa eso, basándonos en nuestra experiencia con cálculos como 2^3 o $(\frac{1}{2})^3$. Para desarrollar esa experiencia proponemos las preguntas a continuación.

a) Sea $f(x) = 2^x$. Completen la siguiente tabla y construyan, a mano, un gráfico aproximado.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

b) Sea $g(x) = (\frac{1}{2})^x$. Completen la siguiente tabla y construyan, a mano, un gráfico aproximado.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$							

c) Ingresen las funciones f y g en un graficador (por ejemplo GeoGebra). Exploren los gráficos y expliquen qué significa, como sugiere el recuadro más arriba, que no podemos calcular $2^{\sqrt{2}}$ o $(\frac{1}{2})^{\sqrt{2}}$, pero que podemos tener una idea intuitiva de sus valores.

Problema 41. [Gráficos de exponenciales]() () Dadas las siguientes funciones exponenciales:

1. $f(x) = 2^x$
2. $f(x) = 2^x - 1$
3. $f(x) = 2^{x-1}$
4. $f(x) = -2 \cdot 2^{x-1}$
5. $f(x) = 2^x + 3$
6. $f(x) = 2^{x+4}$
7. $f(x) = (\frac{1}{2})^x$
8. $f(x) = (\frac{1}{2})^{x-1}$
9. $f(x) = (-2) \cdot (\frac{1}{2})^{x-1}$
10. $f(x) = (\frac{1}{2})^x - 2$
11. $f(x) = 3^x$
12. $f(x) = 3^{x+3}$

a) Grafiquen cada una.

b) Determinen Dominio e Imagen.

c) Hallen, si posee, las intersecciones con los ejes.

d) Indiquen si tiene asíntota y en tal caso den una ecuación de la misma.

Problema 42. [Crecimiento poblacional]() Un pueblo tiene actualmente de 2000 habitantes y su población está creciendo a razón de $5\,\%$ por año.

a) Estimen cuál será la población dentro de 10 años a partir de ahora.

b) Estimen cuánto tardará la población en duplicarse, si continúa siempre creciendo a este ritmo.

c) Escriban una fórmula para la población P como función del tiempo t en años.

d) Tracen una gráfica de P en función de t.

e) Revisen sus estimaciones en las preguntas a) y b).

f) ¿Cómo se modificaría la fórmula si la población crece de la misma manera, pero el tiempo se mide en meses?

Problema 43. [Mezclas y concentraciones]() Un barril de 200 L se llena por completo con agua pura. A continuación se bombea hacia el barril agua salada con una concentración de 40 g/L, y la mezcla resultante sale a la misma tasa. La cantidad de sal en el barril en el tiempo t se determina mediante:

$$Q(t) = 8000(1 - 0.995^t)$$

donde t se mide en minutos y $Q(t)$ se mide en gramos.

a) ¿Cuánta sal está en el barril después de 5 min?

b) ¿Cuánta sal está en el barril después de 10 min?

c) Discutan acerca de si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

   a) A medida que transcurra el tiempo siempre habrá cada vez más sal en el barril.

   b) Como cada vez habrá más sal en el barril, en algún momento habrá 10000 g de sal.

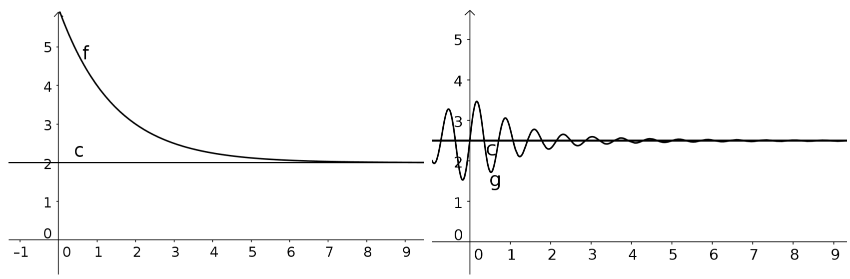
d) Dibujen una gráfica de la función $Q(t)$?

e) Usen la gráfica del inciso anterior para volver a pensar las respuestas dadas en el ítem c).

Problema 44. [Asíntota horizontal]() () Lean el siguiente recuadro:

Una **asíntota horizontal** de una función f es una recta horizontal a la que el gráfico de f se va acercando hasta confundirse con ella.

Interpretación gráfica: los siguientes gráficos muestran ejemplos de distintas funciones y sus asíntotas horizontales.



Interpretación en el contexto del Problema 43: que el gráfico de f se vaya confundiendo con la recta de ecuación $y = 8000$ a medida que crece t significa que cuanto más tiempo pase, más cerca estará el barril de estar completamente lleno con el agua que estaba ingresando y, por lo tanto, la cantidad de sal se acercará a la que hay en 200 L de agua con 40 g/L de sal.

Definición formal: la recta de ecuación $y = m$ es una asíntota horizontal de una función f, si la diferencia $f(t) - m$ se puede hacer tan cercana a 0 como se quiera, desde cierto valor de t en adelante.

En tal caso decimos que $f(x)$ *tiende* a m cuando x *tiende* a ∞. Y lo escribimos de esta manera:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = m$$

Si se desea precisar que la asíntota corresponde a las x crecientes o a las x decrecientes se escribe, respectivamente:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = m \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = m$$

Construyan en GeoGebra tres deslizadores a, b y c y definan la función $f(x) = c + ab^x$ (que se escribe `f(x)=c+a b^x`). Investiguen cómo influyen los valores de los deslizadores para que:

- La función tenga una asíntota del tipo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = m$ o del tipo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = m$, donde m puede ser positivo, negativo o cero.

- La función sea creciente (describe un fenómeno donde la cantidad va en aumento, como en el **Problema** 42) o decreciente (describe un fenómeno en el que la cantidad disminuye).

Escriban un pequeño informe en el que se consideren todos los casos posibles, acompañados de un gráfico ilustrativo, dibujado a mano. Elijan cómo les conviene organizar la información para que sea completo, ordenado y de fácil lectura. El objetivo de este informe es que sirva de guía para trazar un gráfico aproximado de una función exponencial, sin tener que construir una tabla de valores.

Problema 45. [La base está]() Para resolver una vez que esté muy pensado y desarrollado el **Problema** 39.

a) Realicen la siguiente construcción en GeoGebra:
   (i) Construyan un deslizador a que vaya de 0.5 a 4.
   (ii) Definan por barra de entrada la función `f(x)=a^x`, es decir, $f(x) = a^x$.
   (iii) Utilicen el comando `Derivada[]` para definir la función f' mediante `Derivada[f]`.

b) Observen que, al mover el deslizador a, como es de esperar, varían tanto el gráfico de f como el de f'. Utilicen este recurso para buscar una función cuya derivada sea igual a la función misma.

Problema 46. [Propiedades de la exponencial]() () Elijan valores para a, b y c e investiguen, haciendo experimentos con la calculadora, cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas y cuáles —según los experimentos— parecen ser verdaderas.

a) $a^{b+c} = a^b + a^c$
b) $a^{b \cdot c} = a^b + a^c$
c) $a^{b \cdot c} = a^b \cdot a^c$
d) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
e) $a^{b \cdot c} = (a^b)^c$
f) $a^{b-c} = a^b - a^c$
g) $a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$
h) $a^{\frac{b}{c}} = \frac{a^b}{a^c}$
i) $a^{\frac{b}{c}} = a^b - a^c$

Problema 47. [Exponencial con base e] Lean el siguiente recuadro:

La propiedad e) del **Problema 46** permite convencerse de que toda función exponencial de la forma

$$f(x) = ab^x \qquad (b > 0, b \neq 1)$$

puede escribirse en la forma

$$f(x) = ae^{\beta x}$$

En efecto,

$f(x) = ae^{\beta x} \Rightarrow f(x) = a(e^{\beta})^x$.

Entonces es cuestión de buscar un valor de β tal que sea $e^{\beta} = b$. Como b es positivo ese número existe siempre (¡Y hay uno solo!). Se trata del logaritmo natural de b que se escribe $\ln b$ y se puede obtener con la calculadora. Entonces, por definición:

$$\boxed{\ln b = \beta \Leftrightarrow e^{\beta} = b}$$

La ventaja de la escritura $f(x) = ae^{\beta x}$ es que a partir de ella es más cómodo derivar la función.

a) Escriban las funciones de los modelos presentados en los **Problemas 42 y 43** en la forma $f(x) = ae^{\beta x}$, es decir, de manera que la base sea el número e.

b) Investiguen cómo se calcula la derivada de $f(x) = ae^{\beta x}$ y utilicen ese resultado para derivar las funciones del ítem anterior.

c) Expliquen en palabras qué describe esa función derivada en el contexto de cada uno de los dos problemas.

Problema 48. [Álgebra de derivadas]() Lean el siguiente recuadro:

A partir de la definición de derivada, se puede deducir la manera de calcular la derivada de una suma, resta, producto o cociente de dos funciones. Estos resultados se conocen como el **álgebra de derivadas**. Todos los libros de Cálculo o Análisis Matemático (en particular los que figuran en la bibliografía de la materia) incluyen este tema en sus respectivos capítulos de Derivada. También se pueden encontrar en Internet numerosos videos que explican la manera de calcular estas derivadas. A continuación presentamos una lista de los resultados, para que estén a mano:

Recordemos que si f y g son dos funciones reales, su suma, resta, multiplicación y división están definidas en la intersección de sus dominios de las siguientes maneras:

- Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- Resta: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$.
- Multiplicación: $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
- División: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, en los puntos en los que es $g(x) \neq 0$.

Por ejemplo, si $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = x^2 + 1$:

- $(f+g)(x) = e^{2x} + (x^2+1)$.
- $(f-g)(x) = e^{2x} - (x^2+1)$.
- $(fg)(x) = e^{2x}(x^2+1)$.
- $(\frac{f}{g})(x) = \frac{e^{2x}}{x^2+1}$.

Si f y g son derivables, resulta:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, en los puntos en los que es $g(x) \neq 0$.

a) Calculen las derivadas de los ejemplos del recuadro anterior.

b) Calculen la derivada de cada una de cada una de las funciones del **Problema 41**.

c) Sabemos que la derivada de una función en un punto da la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en ese punto. Si la derivada (pendiente) es positiva significa que la función está creciendo. Y si es negativa, que está decreciendo. Analicen cómo pueden anticipar si cada una de esas funciones es creciente o decreciente (en el **Problema 41**) ya lo averiguaron, a través del estudio de su derivada.

Problema 49. [Corriente] La carga eléctrica q presente en un circuito se puede medir en Coulombs (C). Cuando las cargas circulan por el circuito, su velocidad de circulación, medida en Coulombs sobre segundo (C/s), es la corriente i. Esa unidad de corriente se llama Ampere: 1 A $= 1$ C/s. Por lo tanto, si $q(t)$ es el flujo de carga (la cantidad de carga que ha pasado por un punto del circuito en un tiempo t), se define:

$$i(t) = q'(t) \underset{\text{(Notación)}}{=} \frac{dq}{dt}$$

Determinen la corriente que fluye a través de un circuito si el flujo de la carga está dado por

a) $q(t) = (3e^{-t} - 5e^{-2t})$ nC

b) $q(t) = (e^{-3t}(3t+8))$ nC

Problema 50. [Función logaritmo] Lean el siguiente recuadro:

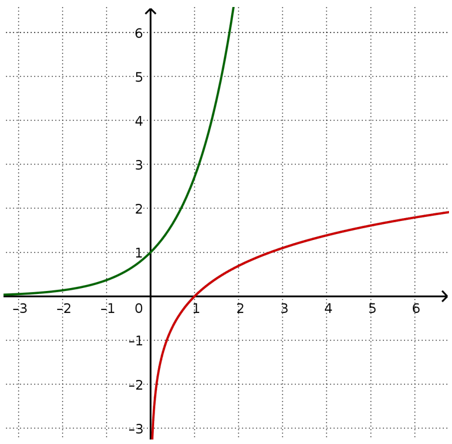
La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ / f(x) = e^x$ asigna a cada número real x el resultado de elevar el número e a la potencia x. Ese número es siempre positivo.

Podemos hacernos la pregunta inversa: dado un número y positivo, ¿qué potencia de e es? Es decir, ¿a qué valor de x hubo que elevar el número e para obtener y como resultado.

Como esta pregunta tiene una única respuesta para cada número positivo, estamos en presencia de otra función, que es la **inversa** de f, que ya mencionamos antes y que se llama **logaritmo natural** (se escribe $\ln$). Entonces, por definición:

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} / \ln(x) = y \Leftrightarrow e^y = x$$

La figura muestra el gráfico ya conocido de $f(x) = e^x$ junto al gráfico de la función $f^{-1}(x) = \ln(x)$ (la notación f^{-1} se suele usar para nombrar a la función inversa de una función f).



El objetivo de estas pregunta es ir conociendo un poco la función y cómo usar la calculadora.

a) Observando el gráfico de la función $\ln$ estimen los valores de $\ln(1)$, $\ln(e)$, $\ln(3)$, $\ln(4)$ y $\ln(5)$. Luego obtengan mejores aproximaciones con sus calculadoras y comparen con las estimaciones realizadas.

b) Observen el gráfico de la función $\ln$ y dibujen aproximadamente cómo será el gráfico de su derivada.

c) Mirando el gráfico de $(\ln)'$ propongan una posible fórmula para esa función derivada (si todavía no la conocen).

d) Investiguen cuál es la función $(\ln)'$.

Problema 51. [Propiedades del logaritmo] Lean el siguiente recuadro:

La función logaritmo tiene propiedades que la hacen muy útil para realizar algunos cálculos: transforma productos en sumas, cocientes en restas y potencias en productos. Concretamente:

Si x, x_1 y x_2 son números reales positivos y k es un número real cualquiera:

P1. $\ln(x_1 x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$

P2. $\ln(\frac{x_1}{x_2}) = \ln(x_1) - \ln(x_2)$

P3. $\ln(x^k) = k\ln(x)$

Vamos a mostrar por qué es verdad P3. Las otras dos propiedades las pueden investigar ustedes.

Llamemos

$$\ln(x^k) = a \tag{4.9}$$
$$\ln(x) = b \tag{4.10}$$

De (4.9) resulta

$$e^a = x^k \tag{4.11}$$

De (4.10) resulta

$$e^b = x \tag{4.12}$$

Pero entonces:

$$e^a \underset{(4.11)}{=} x^k \underset{(4.12)}{=} (e^b)^k = e^{kb}$$

Mirando los extremos de la cadena de igualdades anterior resulta que

$$e^a = e^{kb} \Rightarrow a = kb \underset{(4.9),(4.10)}{\Rightarrow} \ln(x^k) = k\ln(x)$$

Esta propiedad permite resolver ecuaciones despejando incógnitas que están en el exponente. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 5 = 2^x &\Rightarrow \ln(5) = \ln(2^x) \\ &\underset{P3.}{\Rightarrow} \ln(5) = x\ln(2) \\ &\Rightarrow x = \frac{\ln(5)}{\ln(2)} \end{aligned}$$

Hallen los valores de x que verifiquen las siguientes igualdades:

a) $3^{5x+2} = 243$

b) $8^{x-2} - 0,125 = 0$

c) $3^x \cdot 5^{2x} = 4$

d) $9^{2x-1} - 3 = 0$

e) $\frac{9^{2x-3}}{3^{x-2}} = 27 \cdot 81^{1-x}$

f) $\frac{4^{2x-1}}{8^{2-x}} = 16 \cdot 2^{2-2x}$

g) $3^{2-x} \cdot (5^{x+1})^{2-x} \cdot 6 = \frac{3^{2x}}{7}$

h) $(4^{1-x})^{2-3x} \cdot 2^{x+1} = 8^x \cdot \frac{1}{2}$

Problema 52. [La heladera portátil] Una heladera portátil de laboratorio está conectada a un sistema de control electrónico que, ante un corte de energía, activa un capacitor para mantener brevemente el funcionamiento del sistema. Durante las pruebas de ensayo, se observa que al momento del corte la tensión entregada por el capacitor comienza a descender, y se puede modelar mediante la siguiente función:

$$V(t) = 12e^{-\frac{t}{RC}}$$

donde: $V(t)$ es la tensión (en voltios, V) entregada al sistema en el instante t (en segundos, s) después del corte.

R es la resistencia del circuito (en ohmios, Ω).

C es la capacitancia del capacitor (en faradios, F).

Además, la corriente entregada por el capacitor en un instante t se puede calcular como:

$$I(t) = -C\frac{dV}{dt}$$

donde $I(t)$ es la corriente (en amperios, A).

Para que el sistema funcione correctamente, la tensión debe mantenerse igual o superior a 7 V durante al menos 2 s desde el corte de energía. Durante una prueba, se observa que a los 2 s la tensión entregada es de 7 V.

Con el objetivo de mejorar el diseño, se busca reducir la corriente inicial sin comprometer el tiempo durante el cual el sistema se mantiene operativo tras el corte. ¿Qué cambios se podrían hacer sobre los parámetros del circuito para lograrlo? Justifiquen su respuesta.

Unidad 5: Modelos oscilatorios

Problema 53. [El ojo de Londres] El *Ojo de Londres*[3] se puede modelizar por medio de una circunferencia de 120 metros de diámetro, cuyo centro se encuentra a 75 metros sobre el nivel del suelo.

Supongamos –vista desde el Támesis– que la rueda gira en sentido antihorario a razón de 2 revoluciones por hora. Queremos obtener un modelo que permita obtener la altura de cierta canastilla (podemos considerarla como un punto a los fines de la modelización) para cada instante de tiempo, sabiendo que al tiempo $t = 0$ le corresponde la posición más baja que se puede encontrar la canastilla en cuestión.

Construyan el modelo (la función) e indiquen todos los razonamientos involucrados.

Problema 54. [Ojo de Londres: variantes]() En la applet Ojo de Londres está graficada la función $f(t) = a \cdot sen(b(t - c)) + d$ para ciertos valores de a, b, c y d. Cada uno de los parámetros puede modificarse moviendo los deslizadores correspondientes.

a) Indiquen qué parámetros corresponden a la solución del **Problema** 53 (expliquen si miden el tiempo en horas o en minutos) y guarden el gráfico obtenido.

b) En cada caso de los que vienen a continuación, modifiquen los parámetros para cumplir con la condición que se indica y expliquen cómo se modifica el gráfico, respecto del original.

[3] https://www.londres.es/london-eye

(i) La rueda gira al doble de velocidad.
(ii) La rueda gira a la mitad de velocidad.
(iii) Se considera como posición inicial de la silla el punto de altura máxima.
(iv) La silla pasa al ras del piso en su posición más baja.
(v) El centro de la rueda está a la misma altura, pero tiene un diámetro de 30 m.

Problema 55. [Ojo de Londres: más variantes]( ) Consideren la función

$$A(t) = 75 - 60\cos(\tfrac{\pi}{15}t)$$

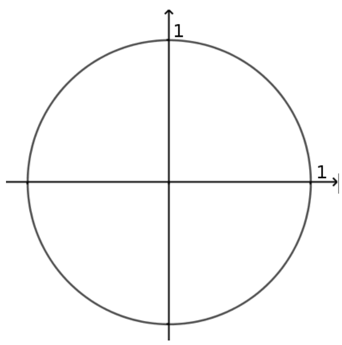
del **Problema** 53, que da la altura de la silla, en cada instante de tiempo t (en esta versión está medido en minutos). En la foto de dicho problema se ve que la rueda tiene unas 32 sillas[4]. Imaginen que las numeramos en sentido antohorario, comenzando por la que está más abajo al iniciar el movimiento de la rueda: silla 0, silla 1, silla 2, etc.

a) Modifiquen la fórmula de la función A para que, en vez de dar en cada instante la altura de la silla 1, dé en cada instante la altura de la silla n (para cualquier número n entre 1 y 32 que ustedes elijan).

b) Supongamos ahora que la rueda no tiene 32 sillas sino m sillas a intervalos regulares. Modifiquen la fórmula de la función A para que, en vez de dar en cada instante la altura de la silla 0, dé en cada instante la altura de la silla n (para cualquier número n entre 0 y $m-1$ que ustedes elijan).

Problema 56. [Definición de seno y coseno]( ) Lean el siguiente recuadro:

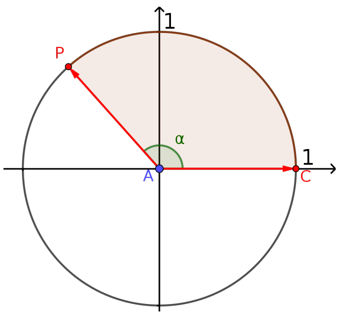
Llamamos **circunferencia trigonométrica** a la que tiene su centro en el origen de coordenadas y cuyo radio mide 1:



Consideramos un hecho aceptado[a] que la longitud de una circunferencia es $2\pi r$, donde r es el radio. Por lo tanto, la circunferencia trigonométrica tiene una longitud de 2π.

[4] Tal vez googleando pueden confirmar el dato.

Un punto cualquiera P de la circunferencia puede representarse con un vector que nace en el origen y termina en el punto.



Además, el punto puede identificarse de dos maneras:

- Dando sus coordenadas cartesianas (x, y).
- Dando la medida del ángulo que forma con el semieje positivo de las x, el vector que lo representa. La medida de este ángulo no se expresará en grados sexagesimales. Convenimos en identificar el ángulo con un número real t que es la longitud del arco comprendido entre el punto $(1, 0)$ y el punto P. El número puede ser mayor que 2π, en caso de que el arco corresponda a más de un giro, en sentido antihorario, o puede ser negativo, en caso de que el arco se piense barrido en sentido horario. Exploren el applet Movimiento oscilatorio para ayudarse a comprender esta idea.

Definición: Sea t un ángulo (número real) determinado por una posición de un punto $P = (x, y)$ sobre la circunferencia trigonométrica, como se describió más arriba. Se llama **coseno de** t a la coordenada $x(t)$ del punto P y se llama **seno de** t a su coordenada $y(t)$. Es decir:

$$P = (x, y) = (x(t), y(t)) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

[a] Hacia el final de la materia tendremos recursos para demostrarlo y para definir formalmente a qué se llama longitud de una curva.

Este problema/ejercicio es para poner a prueba si entendieron la definición anterior y entrenarse leyendo información en la circunferencia trigonométrica.

a) Representen aproximadamente en una circunferencia trigonométrica trazada a mano un punto P determinando un ángulo t tal que $\cos(t) = 0.6$ y $\operatorname{sen}(t) = 0.8$. Luego, solo con lápiz y papel, deduzcan y completen los siguientes valores:

(i) $\cos(\pi + t)$ y $\operatorname{sen}(\pi + t)$

(ii) $\cos(\pi - t)$ y $\operatorname{sen}(\pi - t)$

(iii) $\cos(\frac{\pi}{2} + t)$ y $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + t)$

(iv) $\cos(\frac{\pi}{2} - t)$ y $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - t)$

(v) $\cos(\frac{3\pi}{2} + t)$ y $\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} + t)$

(vi) $\cos(\frac{3\pi}{2} - t)$ y $\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} - t)$

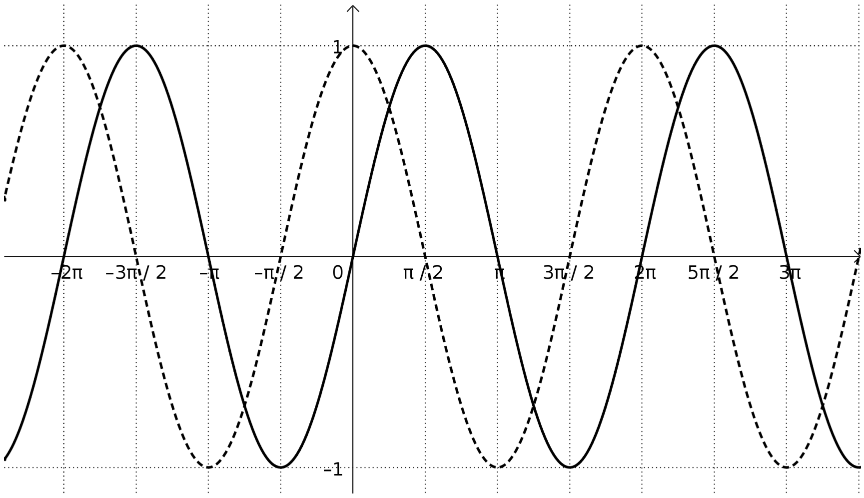
(vii) $\cos(-t)$ y $\operatorname{sen}(-t)$

b) Representen aproximadamente en una circunferencia trigonométrica trazada a mano un punto P determinando un ángulo t cualquiera. Apoyándose en ese dibujo y en el ítem anterior marquen con × la casilla de la tabla que corresponda (la primera fila está marcada a manera de ejemplo):

	$\cos(t)$	$\operatorname{sen}(t)$	$-\cos(t)$	$-\operatorname{sen}(t)$
$\cos(\pi + t)$			×	
$\operatorname{sen}(\pi + t)$				
$\cos(\pi - t)$				
$\operatorname{sen}(\pi - t)$				
$\cos(\frac{\pi}{2} + t)$				
$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + t)$				
$\cos(\frac{\pi}{2} - t)$				
$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - t)$				
$\cos(\frac{3\pi}{2} + t)$				
$\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} + t)$				
$\cos(\frac{3\pi}{2} - t)$				
$\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} - t)$				
$\cos(-t)$				
$\operatorname{sen}(-t)$				

Problema 57. [Lectura de gráficos]() Este problema/ejercicio es para entrenarse leyendo información en los gráficos del seno y el coseno.

En la siguiente figura los gráficos de las funciones $\cos$ y sen fueron construidos en un mismo sistema de coordenadas.



a) Identifiquen cuál de los dos gráficos (continuo o punteado) corresponde a cada función.

b) Ubiquen en el gráfico dos puntos $P = (t, \cos(t))$ y $Q = (t, \operatorname{sen}(t))$ tales que $\cos(t) \neq \operatorname{sen}(t)$.

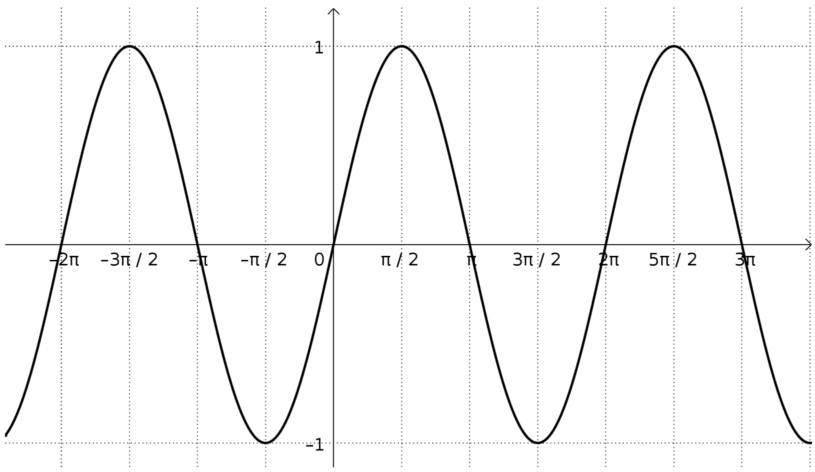
c) Solamente mirando el gráfico y sin espiar la tabla del **Problema** 56, vuelvan a completar una tabla como la de aquel problema:

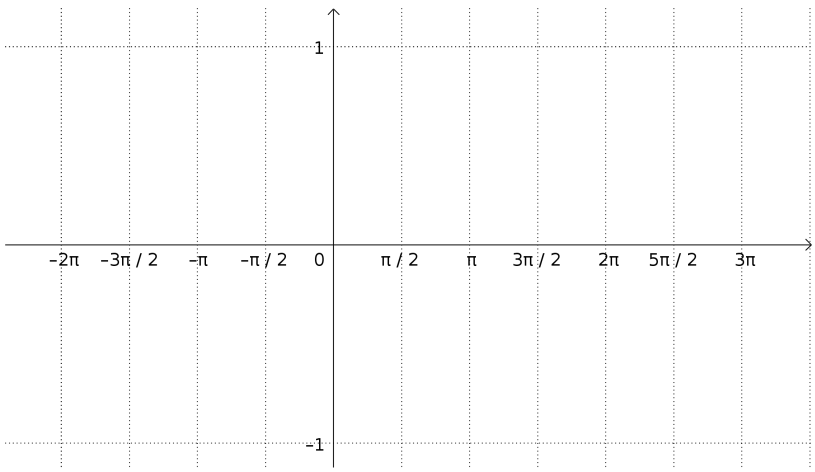
	$\cos(t)$	$\operatorname{sen}(t)$	$-\cos(t)$	$-\operatorname{sen}(t)$
$\cos(\pi + t)$			$\times$	
$\operatorname{sen}(\pi + t)$				
$\cos(\pi - t)$				
$\operatorname{sen}(\pi - t)$				
$\cos(\frac{\pi}{2} + t)$				
$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + t)$				
$\cos(\frac{\pi}{2} - t)$				
$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - t)$				
$\cos(\frac{3\pi}{2} + t)$				
$\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} + t)$				
$\cos(\frac{3\pi}{2} - t)$				
$\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} - t)$				
$\cos(-t)$				
$\operatorname{sen}(-t)$				

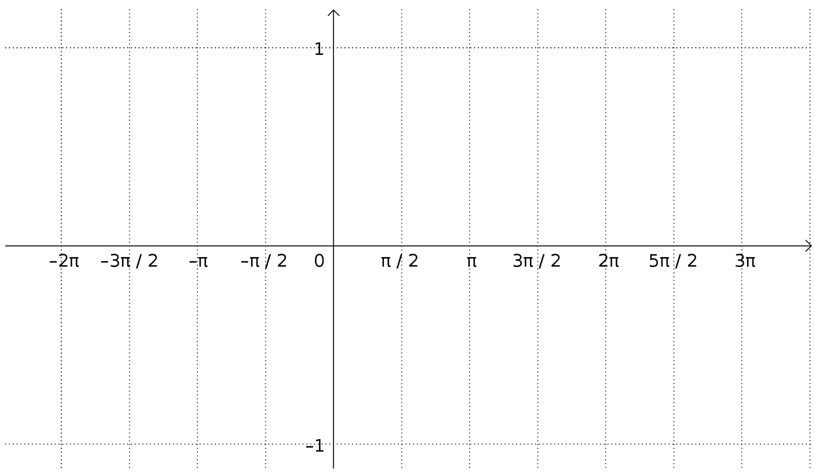
d) Comparen las tablas de este problema y del **Problema** 56. Si encuentran diferencias decidan cuál es la conclusión correcta.

Problema 58. [Derivadas]() Recuerden que la derivada de una función en cada punto es la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en ese punto y que, por lo tanto, el signo de la derivada informa si la función está creciendo, decreciendo o si tiene un punto crítico. Teniendo esto presente:

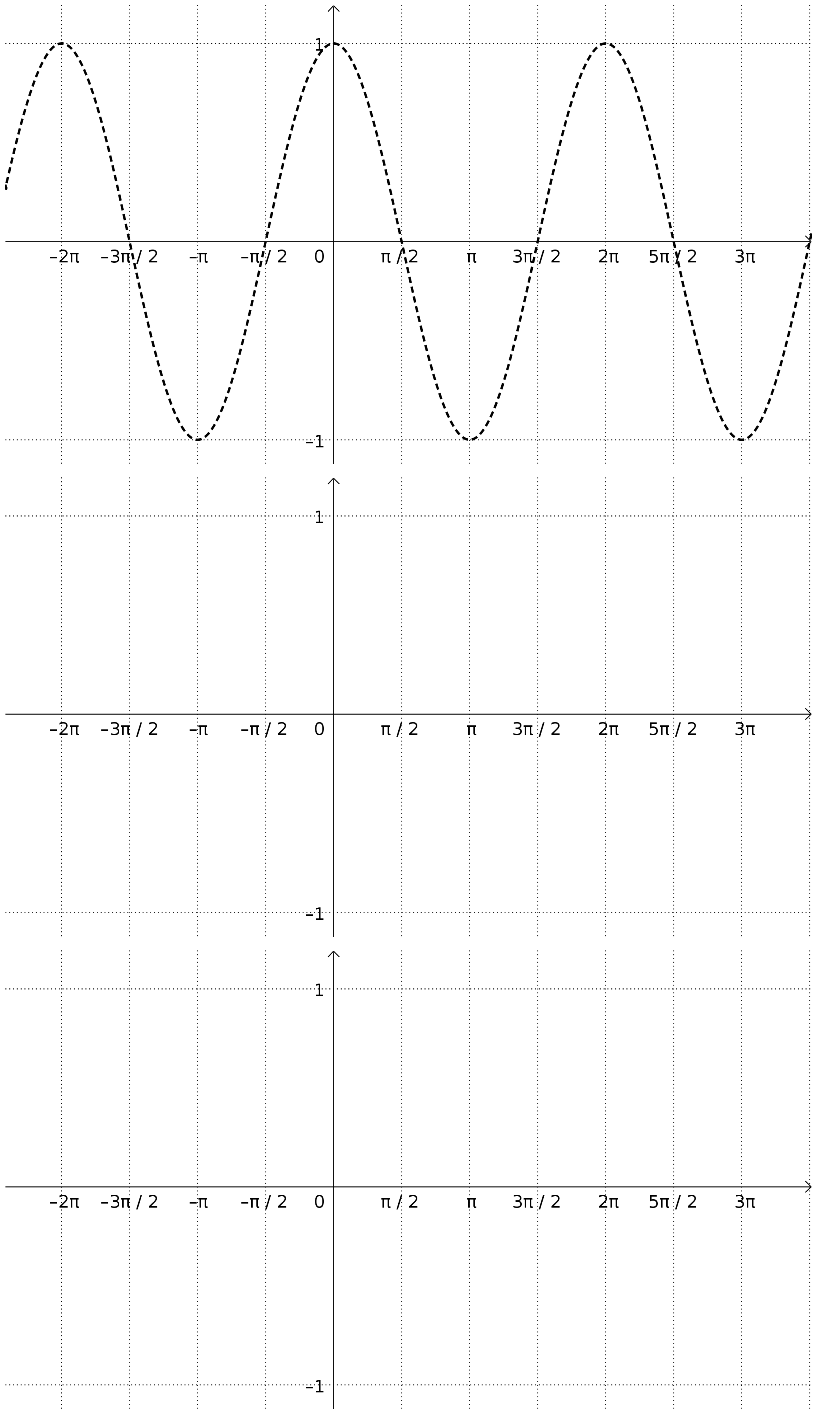
a) Observen la función f graficada y grafiquen abajo su derivada: $f' = \frac{df}{dt}$. Luego grafiquen abajo la derivada de su derivada: $f'' = \frac{d^2 f}{dt^2}$.







b) Observen la función g graficada y grafiquen abajo su derivada: $g' = \frac{dg}{dt}$. Luego grafiquen abajo la derivada de su derivada: $g'' = \frac{d^2g}{dt^2}$.



c) ¿Qué nos enseña este problema?

Problema 59. [Applet masa-resorte]() En Física se estudia el movimiento de una masa sujeta a un resorte. En vez de explicar en qué consiste este fenómeno proponemos interactuar con un applet al que pueden acceder en el siguiente enlace (clic acá).

a) Exploren el applet. En un primer acercamiento mantengan desactivada la casilla “m y k”, para que haya menos variables que estudiar. Describan el sistema, su funcionamiento e investiguen qué rol juegan los parámetros A y B.

b) Activen la casilla “m y k” e investiguen también la incidencia de esos parámetros.

Problema 60. [Sistema masa-resorte]() Lean el siguiente recuadro:

El movimiento del sistema masa-resorte observado en el **Problema** 59 se puede describir a partir de las leyes de Newton que se estudian en Dinámica. Para quienes no cursaron Física I, vamos a incluir aquí una explicación mínima.

Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo (por ejemplo tu brazo empujando un carrito de supermercado, un imán atrayendo a un clavo o la Tierra atrayéndonos con la fuerza de nuestro peso), el mismo se acelera en el sentido de la fuerza y de manera proporcional a la misma. Eso significa que si la fuerza es el doble de intensa, también es el doble la aceleración. Si la fuerza es el triple de intensa, la aceleración es el triple, etc. Esa relación se puede expresar matemáticamente mediante:

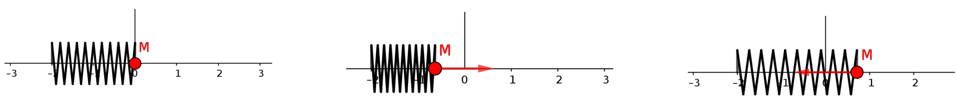
$$F = ma, \tag{5.13}$$

donde F es la fuerza, a es la aceleración y m es la constante de proporcionalidad, que se llama **masa** del cuerpo. En todos estos problemas supondremos siempre que la masa es constante (no cambia).

La unidad de aceleración ya la conocen: la mediremos en m/s^2. La masa se mide en kilogramos (kg). Por lo tanto la Fuerza se mide en kg m/s^2. Cuando una unidad compuesta de varias otras se vuelve muy engorrosa de escribir se le suele asignar un nombre propio. A la unidad kg m/s^2 se la denomina Newton y se la representa con la letra N:

$$1\text{N} = 1\text{kg m/s}^2$$

En este caso hay un cuerpo de masa m y un resorte que ejerce una fuerza sobre él, ya sea porque está comprimido y lo empuja hacia la derecha o porque está estirado y tira de él hacia la izquierda. Suponemos que esa fuerza del resorte responde a este comportamiento, que llamamos la Ley de Hooke: *La fuerza del resorte es directamente proporcional a la longitud de su estiramiento (o compresión). La constante de proporcionalidad es un número real positivo que se llama k.*



(a) Resorte relajado. (b) Resorte comprimido. (c) Resorte estirado.

Figura 5.1: La fuerza cambia de sentido, según si el resorte está comprimido o estirado.

Si ubicamos en $x = 0$ la posición del resorte cuando no está deformado, el resorte hará sobre M una fuerza que dependerá de la posición x que ocupe:

$$F = -kx \tag{5.14}$$

Antes de continuar, lean y respondan la pregunta a) debajo del recuadro.

(...un rato después de haber pensado la pregunta a))

Acá lo interesante es lo siguiente: no conocemos cómo es la fórmula de una función f que indique la posición de M en cada instante t, pero sabemos dos cosas:

1. Su derivada es la velocidad de M y su segunda derivada es la aceleración de M.
2. La fuerza del resorte (ecuación (5.14)) es igual a la masa por la aceleración (5.13).

Entonces podemos escribir:

$$-kf(t) = mf''(t) \qquad \text{o bien}$$
$$mf''(t) + kf(t) = 0 \tag{5.15}$$

Esta última ecuación es una ecuación diferencial. La incógnita es una función f desconocida, de la que se sabe una relación entre ella y una derivada (en este caso una derivada segunda). Las ecuaciones diferenciales son un campo vasto como un océano, dentro de la matemática y de las ciencias aplicadas. Ustedes van a conocer varias a lo largo de la carrera y también métodos para resolverlas. Acá no vamos a llegar tan lejos. Pero sí vamos a hacer algunos cálculos que ya sabemos resolver y que nos ayudarán a comprenderla. Para eso, hay que seguir con la pregunta b)

a) Analicen distintas posiciones x del cuerpo M en la ecuación 5.14 para entender cómo se comportan los signos, de manera que la fuerza F siempre indica en qué sentido está acelerando M.

b) Observen en la ecuación (5.15) que m y k son números positivos. Para manejar más cómodamente esa ecuación se suele hacer la sustitución $\frac{k}{m} = \omega^2$, con lo que queda

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = 0 \tag{5.16}$$

Muestren que todas las funciones de la forma $f(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$, donde A y B son parámetros reales, verifican la ecuación (5.16).

Problema 61. [Masa-resorte: probando el modelo]() Como se viene discutiendo en los problemas anteriores, supongan que la posición de una masa unida a un resorte, en función del tiempo, responde a la función

$$f(t) = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t) \tag{5.17}$$

a) Elijan valores para A, B, m y k (recuerden que $\frac{k}{m} = \omega^2$). Para esos valores, anticipen en qué posición estará la masa en el instante $t = 12.5$ s. Luego accedan nuevamente al applet del **Problema** 59 (clic acá), configuren esos valores de los parámetros y verifiquen su anticipación.

b) Ahora que conocen la función que describe el movimiento oscilatorio del sistema masa-resorte, vuelvan a interpretar qué representan los parámetros A y B.

c) ¿Cómo piensan que fue programado el applet? ¿Podrían programarlo ustedes?

Problema 62. [¿Son lineales el seno y el coseno?]

Existen funciones u operaciones que se *llevan bien* con la suma. Por ejemplo, la derivada: derivar una suma de funciones es lo mismo que sumar las derivadas de cada función. En símbolos lo decimos así:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

o bien

$$\tfrac{d}{dx}(f+g) = \tfrac{d}{dx}f + \tfrac{d}{dx}g$$

En cambio, otras funciones u operaciones no se comportan así. Por ejemplo, en general:

$$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$$

¿Qué pasa con el seno y el coseno de una suma?

¿Será $\mathrm{sen}(x+y) = \mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(x)$?

¿Será $\cos(x+y) = \cos(x) + \cos(x)$?

Investíguenlo explorando con la calculadora o —mucho mejor— proponiendo valores de x e y criteriosos que les permitan ver algún ejemplo, sin necesidad de usar la calculadora.

Problema 63. [Seno y coseno de la suma]() Lean el siguiente recuadro:

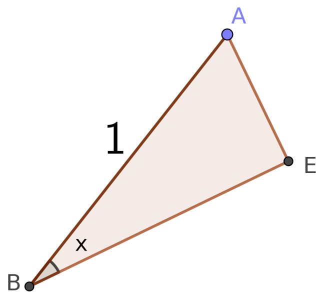
En general no es todo tan simple como que el seno de la suma de dos números sea la suma de sus senos, ni tampoco el coseno de la suma es la suma de los cosenos. Conviene conocer estas relaciones importantes:

Para cualquier par de números x e y:

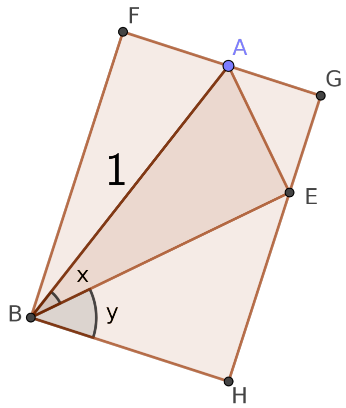
$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y) \tag{5.18}$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) \tag{5.19}$$

Este problema es optativo. Las relaciones anteriores hay que manejarlas bien. Pero acá tienen una oportunidad de ver por qué valen. Elegimos una ilustración geométrica donde x e y representan ángulos agudos. Pero es válida para todo par de números reales.

Realizamos la siguiente construcción, que conviene seguir con lápiz y papel.



Construimos un triángulo rectángulo cualquiera, de hipotenusa 1 y llamamos x a uno de sus ángulos.



Construimos un rectángulo cualquiera de manera que dos de sus lados concurran en el vértice del ángulo x y los otros dos contengan a los otros vértices del triángulo. Llamamos y al nuevo ángulo que se ve en la figura.

a) Expliquen por qué el ángulo FAB mide $x+y$.

b) Expliquen por qué el ángulo AEG mide y.

c) Basándose en que la hipotenusa AB mide 1 y en las relaciones

seno$= \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ y coseno$= \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

escriban las medidas de los segmentos BF, FA, AG, GE, EH, BH.

d) Miren con cariño toda la tarea realizada y miren de reojo las ecuaciones (5.18) del **Problema** 63.

e) Como ya vimos, para cualquier x real, $\cos(-x) = \cos(x)$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$. Utilicen estas relaciones para justificar también que para cualquier par de números x e y:

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) - \cos(x)\operatorname{sen}(y) \tag{5.20}$$
$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) \tag{5.21}$$

Problema 64. [Solución alternativa para sistema masa resorte] La función (5.17) del **Problema** 61 que describe la posición de la masa M para cada instante t en el sistema masa-resorte resulta incómoda para graficar porque es una suma de un seno y un coseno, con lo cual es difícil establecer su amplitud, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, etc. Afortunadamente es equivalente a otra de la forma

$$f(t) = a\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \tag{5.22}$$

a) Utilicen las relaciones (5.18) para mostrar cómo se puede pasar de la forma (5.22) a la forma (5.17)

b) En un sistema masa resorte la masa es de 50 g y la constante del resorte de 0.05 N/m. El resorte se estira 0.04 m y se lo suelta imprimiéndole una velocidad de -0.01 m/s.

   (i) Escriban su ecuación de movimiento en la forma (5.17) y en la forma (5.22).

   (ii) Grafiquen la función.

   (iii) ¿En qué instante pasará por primera vez por la posición de relajamiento del resorte y en qué instante pasará por segunda vez? ¿En qué sentido estará moviéndose en cada oportunidad?

   (iv) Suponemos en condiciones ideales, que el sistema queda oscilando, sin rozamiento. ¿Cuál será la posición de M a las 2 horas y cuál será su velocidad?

Problema 65. [Más resortes] Un resorte tiene la propiedad de que una fuerza de 400 N lo puede alargar 2 metros. Una masa de 50 kilogramos se une al extremo de ese resorte y se libera inicialmente desde la posición de equilibrio con una velocidad de 10 m/s, en el sentido en que el resorte se contrae.

a) Encuentren la función de movimiento.

b) Construyan un gráfico a mano, que describa las principales características del movimiento.

c) Un sensor se coloca en la posición inicial de la masa, registra su paso cada vez que la masa atraviesa esa posición y la envía a una computadora. ¿Cuántos registros tendrá la computadora después de 15 min?

Unidad 6: Derivadas, composición, optimización

Problema 66. [Composición de funciones]

Lean el siguiente recuadro:

Supongamos dos funciones $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida en un intervalo $[a, b]$ (que eventualmente puede ser toda la recta real) y $g : [c, d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supongamos también que todas las imágenes de puntos a través de f están en el dominio de g, es decir, $f([a, b]) \subset [c, d]$. Si esto sucede, es posible transformar un número en otro mediante f y luego tomar ese nuevo número y transformarlo mediante g, es decir, calcular $f(g(x))$.

Esta situación ya ha aparecido en problemas anteriores y podemos representarla esquemáticamente mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
[a,b] \subset \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & [c,d] \subset \mathbb{R} \\
x_0 \arrow[dr, "g\circ f"'] & y_0 \arrow[d, "g"] \\
 & \mathbb{R} \\
 & z_0
\end{tikzcd}$$

El diagrama muestra que g transforma al número x en un número y para que luego f transforme al número y en el número z. La flecha diagonal del diagrama muestra que, en síntesis, hay una función que ha transformado al número x en el número z. Esta función está nombrada con la notación $g \circ f$ que, por definición, significa:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

y se llama **composición de** g **con** f.

a) En el **Problema** 55, aunque todavía no la habíamos llamado así, había una composición de dos funciones. Identifiquen cuáles eran y armen un diagrama como el del recuadro.

b) Inventen dos funciones f y g y hagan un cálculo con un ejemplo para mostrar que, en general,

$$(g\circ f)(x) \neq (f\circ g)(x)$$

c) Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$, ¿qué diferencia hay entre $(fg)(x)$ y $(f\circ g)(x)$?

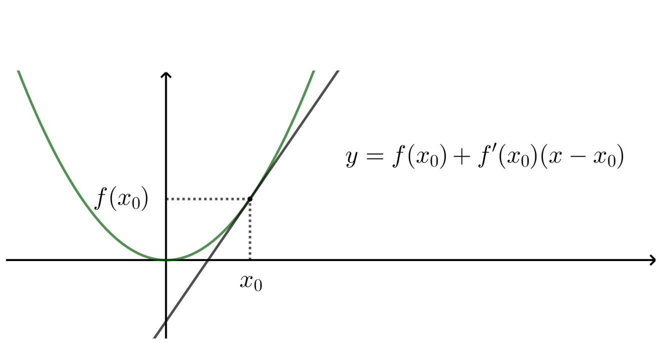
Problema 67. [Regla de la cadena] Lean el siguiente recuadro:

Para derivar funciones compuestas, contamos con el siguiente importante resultado:

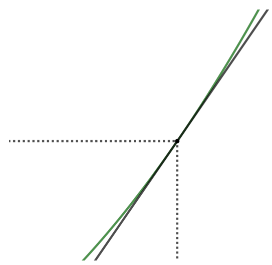
Derivación de funciones compuestas o Regla de la cadena: supongamos dos funciones f y g están definidas cumpliendo las condiciones mencionadas en el recuadro del **Problema** 66. Supongamos también que ambas funciones son derivables (existen sus derivadas en todos los puntos en los que pretendamos calcularlas). Si esto sucede, para cada punto $x_0 \in [a,b]$ vale lo siguiente:

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

¿Por qué funciona? Acá presentamos un argumento informal que permite hacerse una idea. La informalidad consiste en que debemos aceptar la idea de aproximación lineal de una función en un punto. Concretamente,



f y recta tangente en $(x_0, f(x_0))$



Detalle: cerca del punto se puede suponer que f y su recta tangente coinciden.

Vamos a escribir un argumento en el que las funciones f y g se reemplazan por sus rectas tangentes. Si bien debe estar claro que una recta tangente es apenas una aproximación de la función (y no la función misma), cuando quieran leer en detalle una demostración más formal de este resultado verán que con algunas discusiones técnicas más, el argumento es esencialmente el mismo.

Nos guiaremos con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \underset{x_0}{[a,b]\subset\mathbb{R}} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & \underset{y_0}{[c,d]\subset\mathbb{R}} \arrow[d, "g"] \\ & \underset{z_0}{\mathbb{R}} \end{tikzcd}$$

La ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Tomando la recta como aproximación de f, podemos escribir:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

o bien:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0) \tag{6.23}$$

Tengamos en cuenta que

$$f(x) = y \qquad \text{y} \qquad f(x_0) = y_0 \tag{6.24}$$

es decir, llamaremos y e y_0 a los elementos del dominio de g. Entonces, al igual que en (6.23):

$$g(y) - g(y_0) \approx g'(y_0)(y - y_0) \tag{6.25}$$

Reemplazando en (6.25) con (6.24), queda:

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) \approx g'(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) \tag{6.26}$$

Pero el último paréntesis de la ecuación anterior es igual al primer miembro de (6.23), por lo que podemos reemplazar y obtener:

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) \approx g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) \tag{6.27}$$

Casi terminando, escribimos esto con la notación para funciones compuestas:

$$(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) \approx \underbrace{g'(f(x_0))f'(x_0)}_{(*)}(x - x_0) \tag{6.28}$$

Esta última ecuación tiene exactamente el aspecto de las aproximaciones lineales que las ecuaciones (6.23) y (6.25) expresaban para f y g, respectivamente, pero en este caso correspondiente a la función compuesta $g \circ f$, en x_0. Lo que falta para que esto quede establecido es observar la expresión $(*)$, que debe jugar el rol de la derivada de $g \circ f$, en x_0. Pero esto es lo que queríamos poder afirmar:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Y esto concluye la demostración.

Supongan que en un sistema masa-resorte, la posición en función del tiempo viene dada por

$$f(t) = 2\,\mathrm{sen}(3t + \tfrac{\pi}{4})$$

a) ¿Cuál es la velocidad en función del tiempo?

b) ¿Cuál es la aceleración en función del tiempo?

Problema 68. [Cálculo de derivadas]() Consideren las funciones:

$f(x) = \mathrm{sen}(x)$ y $g(x) = e^{2x}$. Calculen a mano:

a) $(f+g)'(x)$

b) $(fg)'(x)$

c) $(\frac{f}{g})'(x)$

d) $(f \circ g)(x)$

e) $(g \circ f)(x)$

f) $(f \circ f)(x)$

Problema 69. [Intensidad de señal](/)

La función $[0,4] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + x^3 + 4x^2$ representa la posición de un móvil en función del tiempo (en ciertas unidades de longitud y de tiempo). Respondan las siguientes preguntas explicando cómo pueden llegar a la respuesta utilizando el recurso de GeoGebra y sin utilizarlo.

a) ¿En qué instante el móvil estuvo más alejado de su punto de partida? (¿Cómo se ve esto en el gráfico de f? ¿Cómo se deduce analíticamente?)

b) ¿En qué instante alcanzó su máxima velocidad? (¿Cómo se ve esto en el gráfico de f? ¿Cómo se ve esto en el gráfico de f'? ¿Cómo se deduce analíticamente?)

c) ¿En qué instante alcanzó su máxima aceleración? (¿Cómo se ve esto en el gráfico de f? ¿Cómo se ve esto en el gráfico de f'? ¿Cómo se ve esto en el gráfico de f''? ¿Cómo se deduce analíticamente?)

d) ¿Qué interpretación tienen los signos (positivo o negativo) que aparecen en cada cálculo de los ítems anteriores, en relación a la posición del vehículo, a su velocidad y a su aceleración?

e) La intensidad de señal de telefonía celular depende de la posición x en la ruta y viene dada por $i(x) = \frac{500}{(x-10)^2+25}$.

   i) ¿Cuál es el dominio de la función i en el contexto de este problema?

   ii) ¿Cuándo tiene el móvil señal de telefonía máxima y cuándo mínima?

Unidad 7: Integrales

Problema 70. [Dime cómo vas y te diré dónde estás]() Durante el intervalo de tiempo $[0,6]$ un móvil se desplaza con velocidad dada (en m/s) por

$$v(t) = 2t + C$$

donde C es alguna constante real. Interpreten y respondan cada una de las siguientes preguntas investigando cómo afecta el valor de C en cada caso.

a) Llamamos **desplazamiento** Δx a la diferencia entre la posición final y la posición inicial. ¿Cuál fue su desplazamiento entre $t = 0$ y $t = 6$?

b) ¿Qué distancia recorrió entre $t = 0$ y $t = 6$?

Problema 71. [Dime cómo vas y te diré dónde estás. Variante]() Como en el **Problema** 70, durante el intervalo de tiempo $[0,4]$ un móvil se desplaza con velocidad constante dada (en m/s) por

$$v(t) = -3t(t-2) + C$$

donde C es alguna constante real. Interpreten y respondan cada una de las siguientes preguntas investigando cómo afecta el valor de C en cada caso.

a) ¿Cuál fue su desplazamiento entre $t = 0$ y $t = 4$?

b) ¿Qué distancia recorrió entre $t = 0$ y $t = 4$?

Problema 72. [Una noción de integral] Lean el siguiente recuadro:

En los **Problemas** 70 y 71 calculamos el desplazamiento de un móvil en un intervalo, a partir de la función que da en cada instante la velocidad $v(t)$.

El desplazamiento entre los instantes t_0 y t_1 ($t_1 > t_0$) se definió como la diferencia de posición en ese intervalo:

$$\Delta x = x(t_1) - x(t_0)$$

Por otra parte, ya sabemos de unidades anteriores que, conociendo la función que da en cada instante la posición $x(t)$, resulta

$$x'(t) = v(t)$$

o bien, si uno prefiere esta escritura:

$$\frac{dx}{dt}(t) = v(t)$$

Entonces, el problema de calcular el desplazamiento Δx entre t_0 y t_1 se transforma en el problema de, dada la función v, encontrar la función x tal que para cada t en el intervalo $[t_0, t_1]$, verifica $x'(t) = v(t)$.

En tal caso, así como decíamos que v es la derivada de x, decimos que x es *una* **primitiva** de v. Escribimos:

$$\Delta x = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\, dt = x(t_1) - x(t_0)$$

y decimos también que el desplazamiento del móvil es la **integral** entre t_0 y t_1 de la función v. El símbolo dt en la escritura de la integral, forma parte de la notación habitual y lo verán aquí y en cualquier texto que consulten.

Calculen:

a) $\int_0^3 (t^2 - 3t)\, dt$

b) $\int_{-2}^2 t^3\, dt$

c) $\int_{-2}^2 t^4\, dt$

d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)\, dt$

e) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}(t)\, dt$

f) $\int_0^2 e^t\, dt$

Problema 73. [Desplazamiento masa-resorte] La velocidad de una masa unida a un resorte en cada instante t viene dada (en m/s) por:

$$v(t) = -2\operatorname{sen}(\tfrac{4}{3}t) + \frac{2}{3}\cos(\tfrac{4}{3}t)$$

a) ¿Cuál fue su desplazamiento entre $t = \pi/3$ y $t = \frac{7}{2}\pi$?

b) ¿Qué distancia recorrió en ese tiempo?

Problema 74. [Propiedades de la integral 1]() Consideren cualquiera de los ejemplos del **Problema** 72 y adáptenlo para construir un ejemplo de un cálculo concreto que muestre cómo interpretan cada una de las siguientes propiedades de la integral. En los casos en los que sea útil, construyan un gráfico que ilustre la propiedad:

a) Si $a < b < c$, se verifica $\displaystyle\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$

b) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

c) $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

d) $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

e) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Problema 75. [Propiedades de la integral 2]() Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que:

$$\int_1^2 f(x)\,dx = 4 \quad \int_1^5 f(x)\,dx = 6 \quad \int_1^5 g(x)\,dx = 8$$

.

Calculen las siguientes integrales definidas aplicando las propiedades pertinentes:

a) $\int_2^2 g(x)\,dx$

b) $\int_5^1 g(x)\,dx$

c) $\int_5^1 f(x)\,dx$

d) $\int_1^2 3f(x)\,dx$

e) $\int_2^5 f(x)\,dx$

f) $\int_1^5 [f(x)-g(x)]\,dx$

g) $\int_1^5 [4f(x)-g(x)]\,dx$

h) $\int_2^5 af(x)dx$

Problema 76. [Propiedades de la integral 3]() Sean dos funciones $f(x)$ y $h(x)$ integrables y tales que

$$\int_1^9 f(x)\,dx = -1 \quad \int_7^9 f(x)\,dx = 5 \quad \int_7^9 h(x)\,dx = 4$$

Utilicen las propiedades de integrales definidas para calcular:

a) $\int_1^9 -2f(x)\,dx$

b) $\int_7^9 [f(x)+h(x)]\,dx$

c) $\int_7^9 [2f(x)-3h(x)]\,dx$

d) $\int_9^1 f(x)\,dx$

e) $\int_1^7 f(x)\,dx$

f) $\int_1^9 (f(x)-2x^3)\,dx$

g) $\int_9^7 [h(x)-f(x)]\,dx$

h) $\int_7^1 f(x)\,dx$

Problema 77. [Propiedades de la integral 4]( ) Sea $\int_1^2 f(x)\,dx = 5$.

Encuentren:

a) $\int_1^2 f(u)\,du$

b) $\int_1^2 \sqrt{3} f(z)\,dz$

c) $\int_1^2 [-f(t)]\,dt$

Problema 78. [Sumas de Riemann]( ) Consideren otra vez la velocidad en función del tiempo del **Problema** 71:

$$v(t) = -3t(t-2)$$

Utilicen esta función para investiguen el funcionamiento de los comandos `SumaInferior` y `SumaSuperior` de GeoGebra, que se pueden ingresar desde la barra de entrada y respondan:

a) ¿Cuáles son los parámetros de esos comandos y qué rol juega cada uno? Redacten en una lista ordenada, paso a paso, una explicación de qué hace cada uno de esos comandos, como si fuera un *manual del usuario* de GeoGebra.

b) Expliquen (si no lo hicieron antes) la información que dan esos comandos en relación a las preguntas del **Problema** 71, que se trataba de velocidad, desplazamiento y distancia recorrida.

Problema 79. [Áreas bajo curvas] Encuentren las áreas de las regiones comprendidas entre cada una de las siguientes funciones y el eje x:

a) $y = -x^2 - 2x$, para $-3 \le x \le 2$

b) $y = 3x^2 - 1$, para $-2 \le x \le 2$

c) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, con $0 \le x \le 2$

d) $y = x^3 - 4x$, para $-2 \le x \le 2$

e) $y = x^{1/3}$, para $-1 \le x \le 8$

f) $y = x^{1/3} - x$, para $-1 \le x \le 8$

Problema 80. [Áreas entre curvas] Hallen el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. *Sugerencia: hallen primero los puntos de intersección entre cada par de funciones y determinen los límites de integración.*

a) $f(x) = x^2 \quad ; \quad g(x) = 2x$

b) $f(x) = 3\sqrt{x}$; $g(x) = 2x - 9$ en el primer cuadrante.

c) $f(x) = x^3$; $g(x) = x$

d) $f(x) = \text{sen}(x)$; $g(x) = \cos(x)$; $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

e) $f(x) = -x^2 + 4$; $g(x) = \frac{x^2}{2}$

Problema 81. [¿Es o no un cálculo de área?] Tracen la gráfica de la función $f(x) = x(x+2)(x-1)$. Encuentren el área encerrada por la gráfica y el eje x en el intervalo $[-2;1]$. Luego, calculen $\int_{-2}^{1} f(x)dx$ e interpreten el resultado obtenido en términos de área.

Problema 82. [Construcción y área]

a) Lean atentamente la siguiente descripción y construyan un gráfico con todos los objetos que se detallan.

   i) f es una función definida solo para $x \geq 0$, dada por la fórmula

   $$f(x) = -4x^3 + 12x^2 - 7x + 3$$

   ii) L es la recta tangente al gráfico de f en el punto (x_0, y_0) en que f alcanza su valor máximo.

b) Calculen el área de la región del primer cuadrante ($x \geq 0$, $y \geq 0$) limitada por el eje y, el gráfico de f y la recta L.

Problema 83. [Área entre dos funciones] Hallen el área de la región limitada por los gráficos de las funciones f y g dadas a continuación, escribiendo todos los cálculos que permiten obtenerla.

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5, \qquad g(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

Bibliografía

[1] Deborah Hughes-Hallet, Andrew M. Gleason, Patti F. Lock, and Daniel E. Flath. *Cálculo aplicado, Segunda edición*. CECSA, 2004.