

■ Berechnung des Magnetfeldes eines dünnen Leiters

Der dünne Draht sei gerade und habe den Anfangspunkt $s1$ und den Endpunkt $s2$.

Es fließt der Strom 'Strom' \Rightarrow von $s1$ nach $s2$!

Im Punkt $r1$ sollen die 3 Magnetfeldkomponenten berechnet werden.

Die Vorgehensweise ist die folgende: Anstatt das Integral direkt zu lösen, wird das Koordinatensystem K so gelegt, dass der Draht im neuen Koordinatensystem K' im Nullpunkt beginnt, entlang der z' -Achse verläuft bis zu seiner Länge $a=|(s2-s1)|$.

Weiterhin wird K' so gewählt, dass der Punkt $r1$ in der x' - und z' -Ebene liegt und somit keine y' -Komponente hat.

Alles in das Biot-Savart-Gesetz eingebracht, lässt den Vorteil erscheinen. In K' hat das B-Feld in $r1'$ nur eine Komponente in y' -Richtung.

Natürlich kann man das Integral des Biot-Savart-Gesetzes auch direkt für alle Komponenten lösen, jedoch ergibt sich ein unübersichtliches Gleichungsgefüge.

Es ergibt sich eine empfehlenswerte Übersichtlichkeit.

SCHEME:

INPUT: $s1, s2, r1, \text{Strom}$

CALCULATION:

- 1) a
- 2) e_{yy}
- 3) z' here zz
- 4) x' here xx
- 5) By' here Byy
- and finally
- 6) Bx, By, Bz out of Byy

```
In[28]:= s1 = {s1x, s1y, s1z}
          s2 = {s2x, s2y, s2z}
          ss = s2 - s1
          a = Sqrt[ss.ss]
          a = .;
          r1 = {r1x, r1y, r1z}
          ezz = ss / a
```

```
Out[28]= {s1x, s1y, s1z}
```

```
Out[29]= {s2x, s2y, s2z}
```

```
Out[30]= {-s1x + s2x, -s1y + s2y, -s1z + s2z}
```

```
Out[31]= Sqrt[(-s1x + s2x)^2 + (-s1y + s2y)^2 + (-s1z + s2z)^2]
```

```
Out[33]= {r1x, r1y, r1z}
```

```
Out[34]= { -s1x + s2x / a, -s1y + s2y / a, -s1z + s2z / a }
```

Gerade entlang der neuen z-Richtung in K', d.h. entlang ezz

In[35]:= **gerade** = **s1** + **zz** * **ezz**

Out[35]= $\left\{ s1x + \frac{(-s1x + s2x) zz}{a}, s1y + \frac{(-s1y + s2y) zz}{a}, s1z + \frac{(-s1z + s2z) zz}{a} \right\}$

Suche nach dem minimalsten Abstand

In[36]:= **hilf** = **r1** - **gerade**;

Simplify[**Solve**[**D**[$\sqrt{\text{hilf.hilf}}$, **zz**] == 0, **zz**]]

Out[37]= $\left\{ \left\{ zz \rightarrow \frac{(a(s1x^2 - r1y s1y + s1y^2 - r1z s1z + s1z^2 - s1x s2x + r1x(-s1x + s2x) + r1y s2y - s1y s2y + r1z s2z - s1z s2z))}{(s1x^2 + s1y^2 + s1z^2 - 2 s1x s2x + s2x^2 - 2 s1y s2y + s2y^2 - 2 s1z s2z + s2z^2)} \right\} \right\}$

In[38]:= **FullSimplify**[%]

Out[38]= $\left\{ \left\{ zz \rightarrow -\frac{a((r1x - s1x)(s1x - s2x) + (r1y - s1y)(s1y - s2y) + (r1z - s1z)(s1z - s2z))}{(s1x - s2x)^2 + (s1y - s2y)^2 + (s1z - s2z)^2} \right\} \right\}$

dieses Resultat kann ebenfalls durch Folgendes geliefert werden (wieder überprüft am 21.11.2006):

In[39]:= **zz** = (**r1** - **s1**) . (**s2** - **s1**) / **a**

Out[39]= $\frac{(r1x - s1x)(-s1x + s2x) + (r1y - s1y)(-s1y + s2y) + (r1z - s1z)(-s1z + s2z)}{a}$

Richtung von exx und xx

In[40]:= **zz** = .;

In[41]:= **xx** = $\sqrt{\text{hilf.hilf}}$

Out[41]= $\sqrt{\left(\left(r1x - s1x - \frac{(-s1x + s2x) zz}{a} \right)^2 + \left(r1y - s1y - \frac{(-s1y + s2y) zz}{a} \right)^2 + \left(r1z - s1z - \frac{(-s1z + s2z) zz}{a} \right)^2 \right)}$

In[43]:= **xx** = .;

In[44]:= **exx** = **hilf** / **xx**

Out[44]= $\left\{ \frac{r1x - s1x - \frac{(-s1x + s2x) zz}{a}}{xx}, \frac{r1y - s1y - \frac{(-s1y + s2y) zz}{a}}{xx}, \frac{r1z - s1z - \frac{(-s1z + s2z) zz}{a}}{xx} \right\}$

In[45]:= **eyy** = **FullSimplify**[**ezz** * **exx**]

Out[45]= $\left\{ \frac{-s1z s2y + r1z(-s1y + s2y) + r1y(s1z - s2z) + s1y s2z}{a xx}, \frac{r1z s1x - r1x s1z - r1z s2x + s1z s2x + r1x s2z - s1x s2z}{a xx}, \frac{-s1y s2x + r1y(-s1x + s2x) + r1x(s1y - s2y) + s1x s2y}{a xx} \right\}$

Berechnung des Magnetfeldes B_y'

$$\text{In}[46] := \text{Byy} = \text{FullSimplify}\left[10^{-7} * \text{Strom} * \int_0^d \frac{xx}{(xx^2 + (z - zz)^2)^{3/2}} dz\right]$$

$$\text{Out}[46] = \frac{\text{Strom} \left(-\frac{d-zz}{\sqrt{xx^2 + (d-zz)^2}} + \frac{zz}{\sqrt{xx^2 + zz^2}} \right)}{10000000 xx}$$

Aus B_y' die Komponenten für das Ausgangssystem K berechnen

Byy = . ;

Weil Bxx und Bzz 0 sind folgt:

B = Byy * eyy

$$\left\{ \frac{\text{Byy} (-s1z s2y + r1z (-s1y + s2y) + r1y (s1z - s2z) + s1y s2z)}{a \text{ xx}}, \right. \\ \frac{\text{Byy} (r1z s1x - r1x s1z - r1z s2x + s1z s2x + r1x s2z - s1x s2z)}{a \text{ xx}}, \\ \left. \frac{\text{Byy} (-s1y s2x + r1y (-s1x + s2x) + r1x (s1y - s2y) + s1x s2y)}{a \text{ xx}} \right\}$$