Allgemeine Herleitung: B-Feld eines kurzen Drahtes (Biot-Savart)

$$\vec{B}\,(\overrightarrow{r1}) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,I\int\frac{\overrightarrow{ds}\times\overrightarrow{r12}}{r12^3}$$

$k = \mu_0\, I\,/\,4\,\pi$
wobei $\overrightarrow{r12} = \vec{r} - \overrightarrow{r2}$;
$\overrightarrow{r2}$ ... Vektor der den Leiter abrastert für die Integration
r Punkt in dem dem das Magnetfeld berechnet werden soll
$\overrightarrow{ds}$ Linienelement entlang des Leiters
$\overrightarrow{w1}$, $\overrightarrow{w2}$ Anfangs – und Endpunkt des Leiters

Koordinatentransformation von *K* nach
C* UND Berechnung des Magnetfeldes Bc in *C
Leiter der Länge L wird in den Nullpunkt des Koordinatensystems C gelegt
vom C – Nullpunkt in die zc – Richtung zeigend

C wird so gelegt, dass dort der Vektor r,
wo das Magnetfeld berechnet werden soll,
nur eine xc und zc – Komponente hat : rc = [xc, 0, zc]
(xc und zc werden über Vektorbeziehungen berechnet,
dabei ergeben sich die Einheitsvektoren
des Systems C : exc, eyc, ezc)
Vorteil : Das Magnetfeld Bc im Punkt rc hat nur eine yc – Komponente!
Bc = [0, Byc, 0]

Byc wird aus den Werten xc und zc berechnet (yc = 0)

Rücktransformation :
B = [Bx, By, Bz] aus Bc = [0, Byc, 0] berechnen über die Beziehung
***B* = Byc * eyc**

Reihenfolge
1 Berechnung ezc
2 Berechnung zc
3 Berechnung ezc
4 Berechnung xc
5 Berechnung exc
6 Berechung eyc = ezc × exc
7 Berechnung Byc
8 Berechnung B = [Bx, By, Bz] = Byc * eyc;

Eingangs – Parameter
w1 : Vektor Anfang des Drahtstücks
w2 : Vektor Ende des Drahtstücks
r : Vektor Berechnung des Magnetfeldes B = [Bx, By, Bz]

Hilfsberechnung
ww : Differenzvektor, entlang dessen integriert werden muss
L : Länge des Drahtstücks

```
w1 = {w1x, w1y, w1z};
w2 = {w2x, w2y, w2z};
r = {rx, ry, rz}

ww = w2 - w1
L = √ww.ww
```

{rx, ry, rz}

{-w1x + w2x, -w1y + w2y, -w1z + w2z}

$$\sqrt{(-w1x + w2x)^2 + (-w1y + w2y)^2 + (-w1z + w2z)^2}$$

Richtungsvektor des Drahtes : eww
entspricht auch dem zc - Einheitsvektor : ezc

```
L =.;
eww = ww / L;
ezc = eww
```

$$\left\{\frac{-w1x + w2x}{L}, \frac{-w1y + w2y}{L}, \frac{-w1z + w2z}{L}\right\}$$

Berechnung der Koordinaten zc un xc des *r* - Vektors im Koordinatensystem *C*, rc = [xc, 0, zc]
zc : *z* - Wert in *C*
Berechnung erfolgt mit Skalarprodukt :
cos (eww, (*r* - w1)) = zc / | *r* - w1 | (Aufzeichnen zum Verständnis)

```
zc = (r1 - w1).eww
```

$$\frac{(r1x - w1x)(-w1x + w2x) + (r1y - w1y)(-w1y + w2y) + (r1z - w1z)(-w1z + w2z)}{L}$$

vxc : xc - Vektor in *C*
xc : Betrag von vxc; (Aufzeichnen zum Verständnis)

```
zc =.;
vxc = r - (zc * eww + w1);
xc = √vxc.vxc
```

$$\sqrt{\left(\left(rx - w1x - \frac{(-w1x + w2x)\, zc}{L}\right)^2 + \left(ry - w1y - \frac{(-w1y + w2y)\, zc}{L}\right)^2 + \left(rz - w1z - \frac{(-w1z + w2z)\, zc}{L}\right)^2\right)}$$

xc - Einheitsvektor berechnen :

xc =.;
exc = vxc / xc

$$\left\{\frac{rx - w1x - \frac{(-w1x+w2x)\,zc}{L}}{xc},\ \frac{ry - w1y - \frac{(-w1y+w2y)\,zc}{L}}{xc},\ \frac{rz - w1z - \frac{(-w1z+w2z)\,zc}{L}}{xc}\right\}$$

yc – Einheitsvektor berechnen : eyc

eyc = ezc × exc

$$\left\{\frac{-w1z\,w2y + rz\,(-w1y + w2y) + ry\,(w1z - w2z) + w1y\,w2z}{L\,xc},\ \frac{rz\,w1x - rx\,w1z - rz\,w2x + w1z\,w2x + rx\,w2z - w1x\,w2z}{L\,xc},\ \frac{-w1y\,w2x + ry\,(-w1x + w2x) + rx\,(w1y - w2y) + w1x\,w2y}{L\,xc}\right\}$$

Byc (xc, zc) berechnen (Details siehe unteren Abschnitt)

$$\mathbf{Byc = k\left(\frac{zc}{xc\sqrt{xc^2 + zc^2}} + \frac{L - zc}{xc\sqrt{xc^2 + (zc - L)^2}}\right)}$$

[Bx, By, Bz] aus Byc berechnen
B = [Bx, By, Bz] in *K*
Bc = [0, Byc, 0] in *C*
B = Byc * eyc; eyc ist ein Vektor mit den 3 Komponenten von *K* !

B = Byc * eyc

$$\left\{-\frac{Byc\,(rz\,(w1y - w2y) + w1z\,w2y - w1y\,w2z + ry\,(-w1z + w2z))}{L\,xc},\ \frac{Byc\,(rz\,(w1x - w2x) + w1z\,w2x - w1x\,w2z + rx\,(-w1z + w2z))}{L\,xc},\ -\frac{Byc\,(ry\,(w1x - w2x) + w1y\,w2x - w1x\,w2y + rx\,(-w1y + w2y))}{L\,xc}\right\}$$

Biot-Savart-Gesetz: By im Koordinatensystem K'

$$\vec{B}\,(\vec{r1}) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\,I\int\frac{\vec{ds}\times\vec{r12}}{r12^3}$$

$k = \mu_0\, I / 4\,\pi$
wobei $\vec{r12} = \vec{r1} - \vec{r2}$;
$\vec{r1}$ Punkt in dem dem das Magnetfeld berechnet werden soll
$\vec{r2}$ Abraster – Punkt auf dem Leiter
$\vec{ds}$ Linienelement auf dem Leiter

```
s1 = {0, 0, 0};
s2 = {0, 0, a};
ds  = {0, 0, dz};
r1 = {rx, 0, rz};
r2 = {0, 0, z};
r12 = r1 - r2
```

$rr = \sqrt{r12.r12}$

{rx, 0, rz - z}

$\sqrt{rx^2 + (rz - z)^2}$

ds × r12

{0, dz rx, 0}

$\frac{ds \times r12}{rr^3}$

$\left\{0, \frac{dz\,rx}{(rx^2 + (rz - z)^2)^{3/2}}, 0\right\}$

Berechnung der Byc – Komponente

$$Byc = k \int \frac{rx}{(rx^2 + (rz - z)^2)^{3/2}}\, dz$$

$$-\frac{k\,(rz - z)}{rx\,\sqrt{rx^2 + (rz - z)^2}}$$

Magnetfeld entlang einer Parallele neben dem Drahtstück