Системы координат

Система координат — комплекс определений, реализующий **метод координат**, то есть способ определять **положение** и перемещение точки или тела с помощью чисел или других символов.

Совокупность чисел, определяющих положение конкретной точки, называется **координатами этой точки**.

В **математике** координаты — совокупность чисел, сопоставленных точкам многообразия в некоторой карте определённого атласа.

В **элементарной геометрии** координаты — величины, определяющие положение точки на плоскости и в пространстве. На плоскости положение точки чаще всего определяется расстояниями от двух прямых (**координатных осей**), пересекающихся в одной точке (начале координат) под прямым углом; одна из координат называется **ординатой**, а другая — **абсциссой**.

В пространстве по системе Декарта положение точки определяется расстояниями от трёх плоскостей координат, пересекающихся в одной точке под прямыми углами друг к другу, или сферическими координатами, где начало координат находится в центре сферы.

В **географии** координаты выбираются как (приближённо) сферическая система координат — широта, долгота и высота над известным общим уровнем

В **астрономии** небесные координаты — упорядоченная пара угловых величин (например, прямое восхождение и склонение), с помощью которых определяют положение светил и вспомогательных точек на небесной сфере. В астрономии употребляют различные системы небесных координат. Каждая из них по существу представляет собой сферическую систему координат (без радиальной координаты) с соответствующим образом выбранной фундаментальной плоскостью и началом отсчёта.

Наиболее используемая система координат — **прямоугольная** система координат (также известная как декартова система координат).

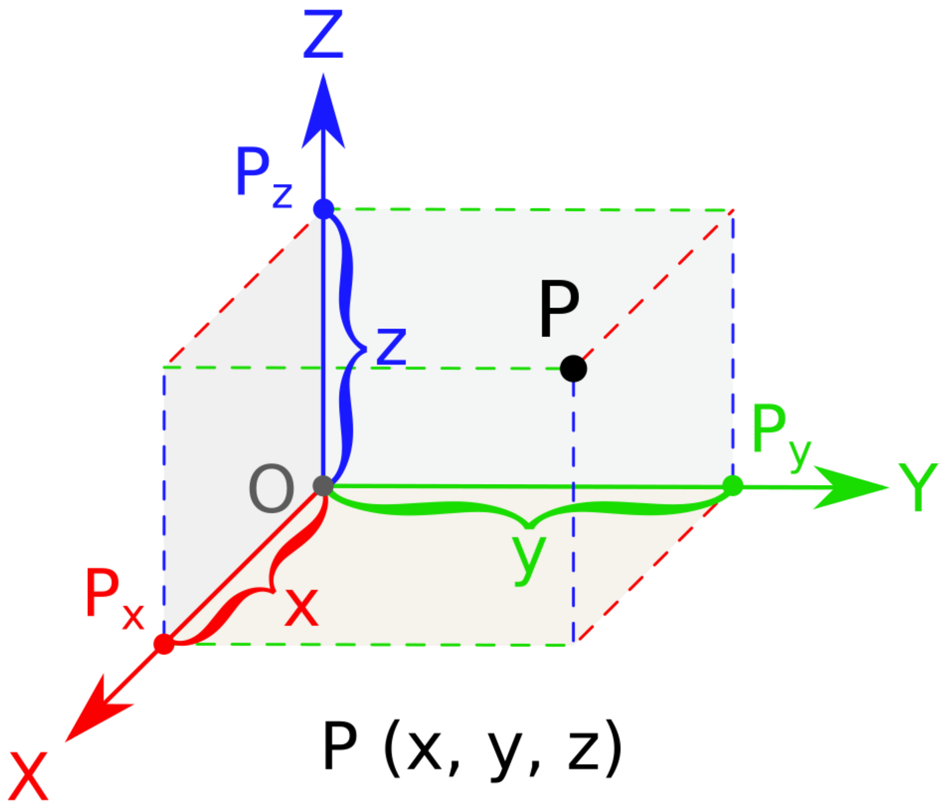
Координаты на плоскости и в пространстве можно вводить бесконечным числом разных способов. Решая ту или иную математическую или физическую задачу методом координат, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой задача решается проще или удобнее в данном конкретном случае.

Декартовы координаты

Прямоугольная система координат

- Расположение точки P на плоскости определяется **декартовыми координатами** с помощью пары чисел (x,y):
- x — расстояние от точки P до оси y с учетом знака
- y — расстояние от точки P до оси x с учетом знака

- В пространстве необходимы уже три координаты (x,y,z):
- x — расстояние от точки P до плоскости yz
- y — расстояние от точки P до плоскости xz
- z — расстояние от точки P до плоскости xy

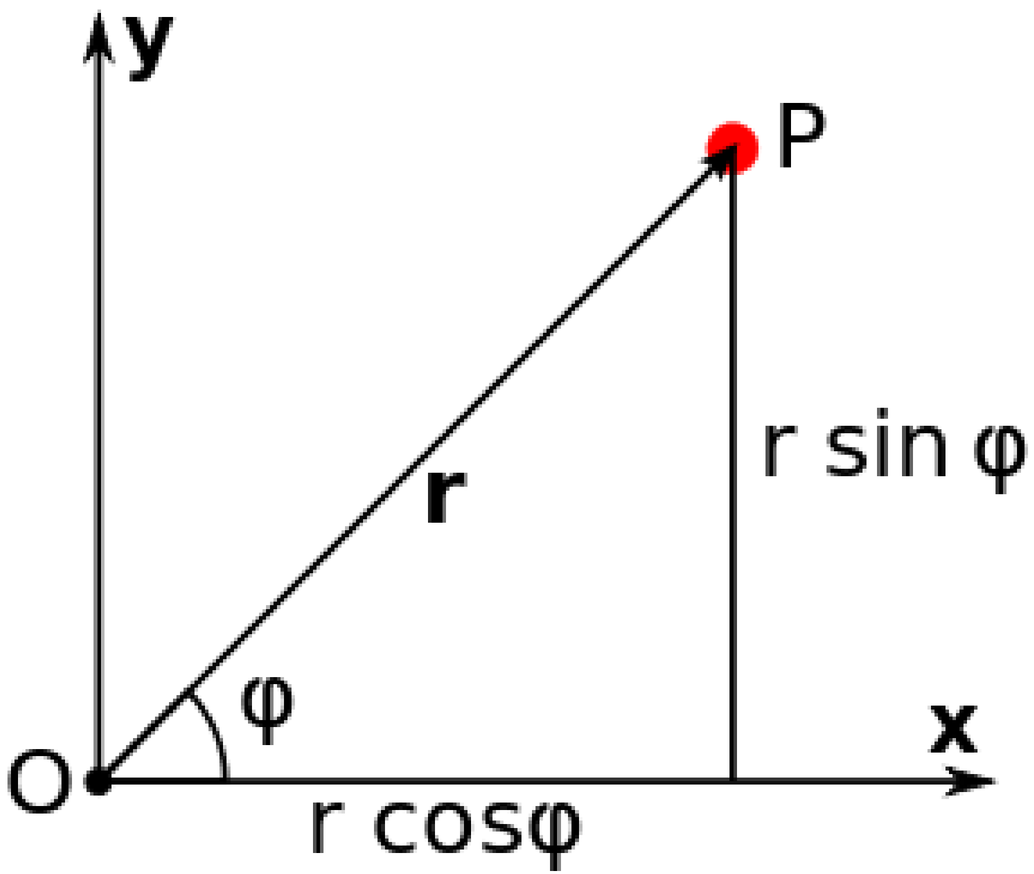


Полярные координаты

Полярная система координат

- В полярной системе координат, применяемой на **плоскости**, положение точки P определяется её расстоянием до начала координат **r = |OP|** и углом φ её радиус-вектора к оси **Ox**.

- В пространстве применяются обобщения полярных координат — цилиндрические и сферические системы координат.



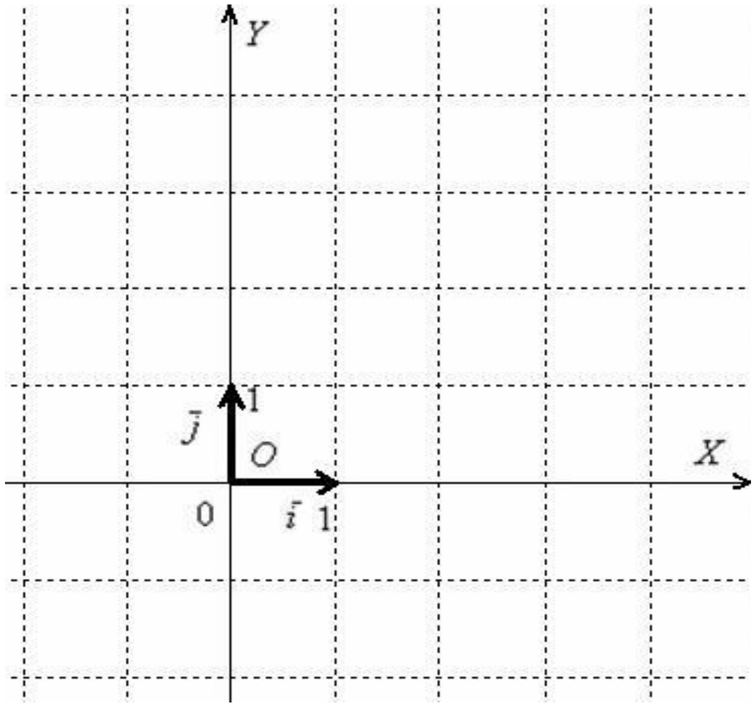
Как задать базис на плоскости

1) Выбрать базис плоскости. У плоскости есть 2 измерения: длина и ширина, поэтому интуитивно понятно, что для построения базиса потребуется два вектора.

2) На основе выбранного базиса **задать систему координат** (координатную сетку), чтобы присвоить координаты всем точкам, которые находятся на плоскости.

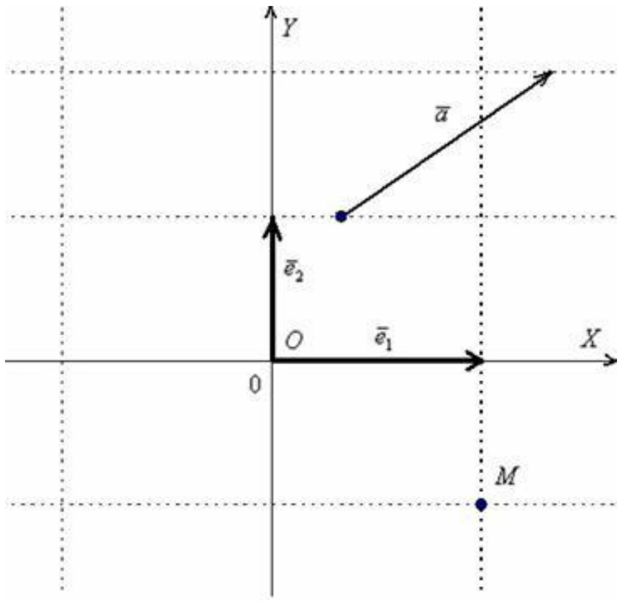
- Если векторы коллинеарны, то они линейно выражаются друг через друга: $\bar{e}_1 = \alpha\bar{e}_2$, $\bar{e}_2 = \frac{1}{\alpha}\bar{e}_1$
- Такие векторы называют линейно зависимыми.
- $\bar{v} = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2$, где α, β – действительные числа
- Вектор $\bar{v}$ представлен в виде **линейной комбинации** базисных векторов. То есть, выражение $\alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_2$ называют разложением вектора $\bar{v}$ по базису $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ или **линейной комбинацией базисных векторов**.

- **Базисом плоскости** называется пара линейно независимых (неколлинеарных) векторов $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, взятых в определённом порядке, при этом любой вектор плоскости является линейной комбинацией базисных векторов.
- Базисы $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ и $(\bar{e}_2, \bar{e}_1)$, – это два совершенно разных базиса!
- Базиса недостаточно, чтобы задать координатную сетку и присвоить координаты каждой точке на плоскости.
- Необходим отправной ориентир - начало координат.
- Существуют различия между прямоугольной системой координат и ортонормированным базисом $(\bar{\imath}; \bar{\jmath})$



Точка плоскости O, которая называется началом координат, и ортонормированный базис $(\bar{\imath}; \bar{\jmath})$ задают **декартову прямоугольную систему координат плоскости**. То есть, прямоугольная система координат однозначно определяется единственной точкой и двумя единичными ортогональными векторами $\bar{\imath}; \bar{\jmath}$.

С помощью точки O и ортонормированного базиса $(\bar{\imath}; \bar{\jmath})$ **ЛЮБОЙ ТОЧКЕ плоскости и ЛЮБОМУ ВЕКТОРУ плоскости** можно присвоить координаты.

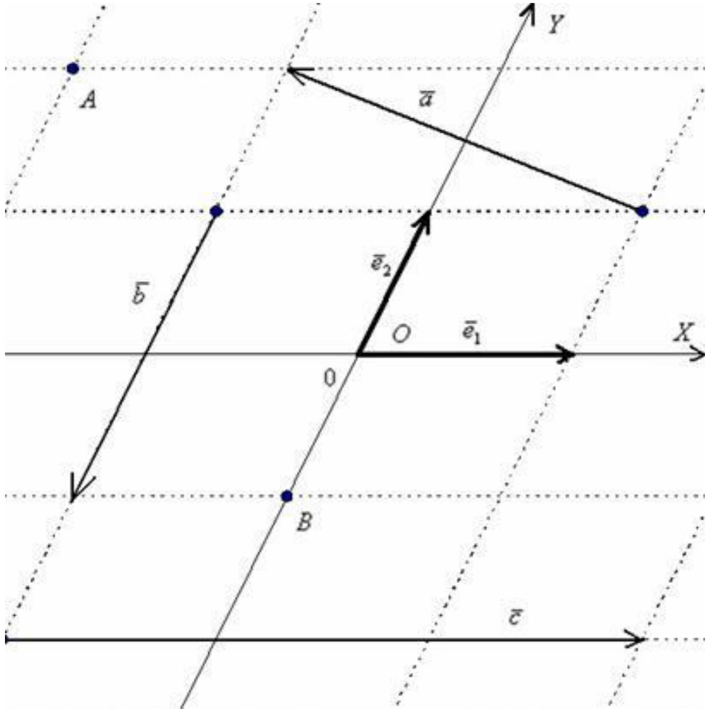


Начало координат с векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ задают координатную сетку, и любая точка плоскости, любой вектор имеют свои координаты в данном базисе.

M(1;-1) $\bar{a} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ $\bar{a}(1;1)$

В **ортогональном базисе**, а также в ***аффинных*** базисах плоскости и пространства единицы по осям считаются УСЛОВНЫМИ.

Такой базис называется ортогональным



Точка *O* плоскости, которая называется **началом координат**, и **неколлинеарные** векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2$, взятые в <u>определённом порядке</u>, задают **аффинную систему** координат плоскости

Иногда такую систему координат называют **косоугольной системой**.

$$\bar{a} = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 \quad \text{или} \quad \bar{a}(-2;1);$$

$$A(-2;2), \quad B(0;-1) \qquad \bar{b} = -2\bar{e}_2 \quad \text{или} \quad \bar{b}(0;-2);$$

$$\bar{c} = 3\bar{e}_1 \quad \text{или} \quad \bar{c}(3;0).$$

Базис трехмерного пространства

Точка

O

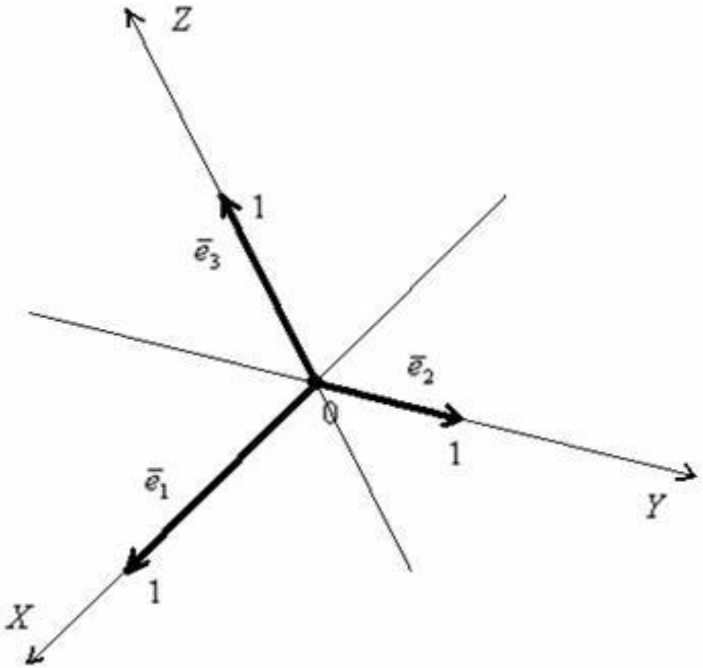
$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$

- Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны. Если такой плоскости не существует, то и векторы будут не компланарны.
- Три **компланарных** вектора всегда линейно зависимы, то есть линейно выражаются друг через друга.

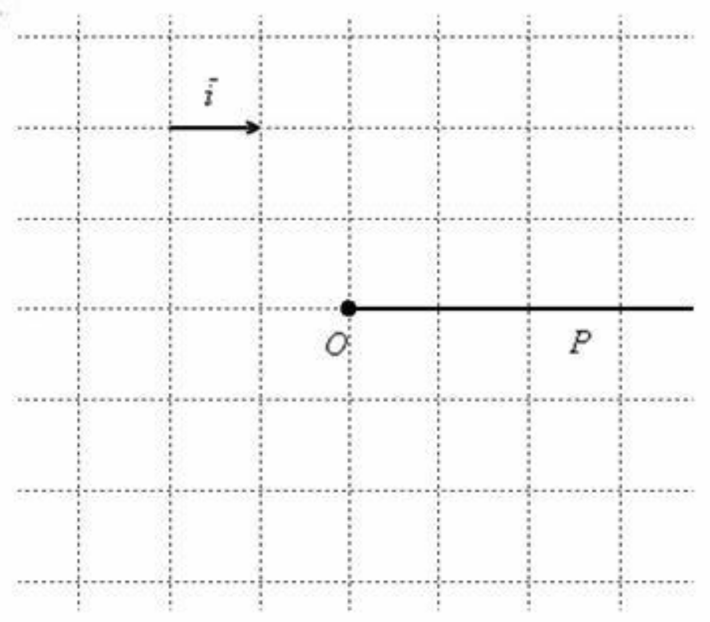
, взятые в определённом порядке, задают ***аффинную систему координат трёхмерного пространства***:

пространства, которая называется **началом координат**, и **некомпланарные** векторы

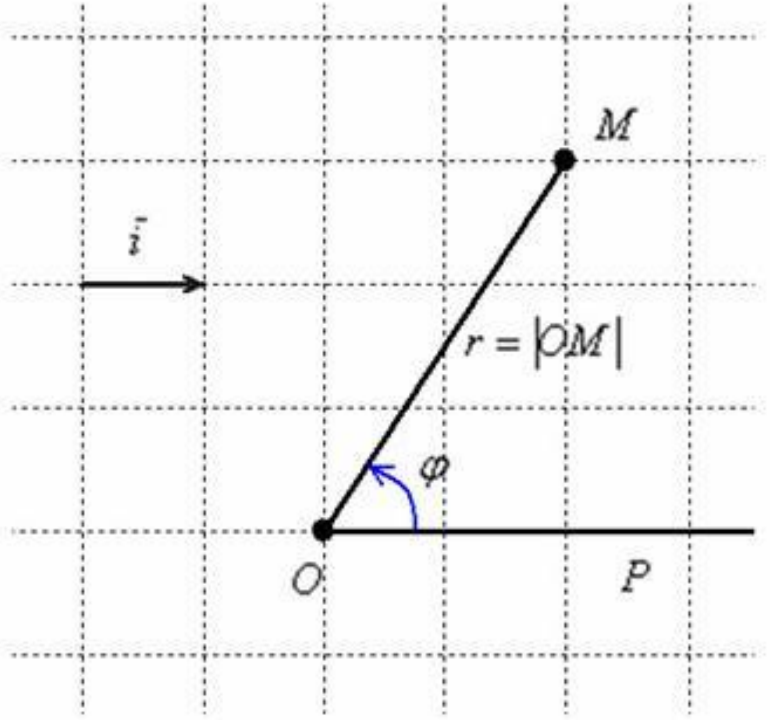
- **Базисом трёхмерного пространства** называется тройка линейно независимых (некомпланарных) векторов $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, взятых в определённом порядке, при этом любой вектор пространства единственным образом раскладывается по данному базису $\bar{v} = \alpha\bar{e}_1 + \beta\bar{e}_1 + \gamma\bar{e}_1$, где α, β, γ – координаты вектора $\bar{v}$ в данном базисе
- Точка O пространства, которая называется началом координат, и некомпланарные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, взятые в определённом порядке, задают **аффинную систему координат** трёхмерного пространства
- **Аффинная система координат**, также косоугольная система координат — прямолинейная система координат в аффинном пространстве.



Полярные координаты



Чтобы определить полярную систему координат на плоскости, достаточно зафиксировать начало координат O и задать единичный координатный вектор $\bar{\imath}$. Точка O называется **полюсом**, а луч OP, сонаправленный с вектором $\bar{\imath}$ – **полярной осью**.



Любая отличная от начала координат точка M плоскости однозначно определяется своим расстоянием $r=|OM|$ от полюса и ориентированным углом φ между полярной осью и отрезком OM

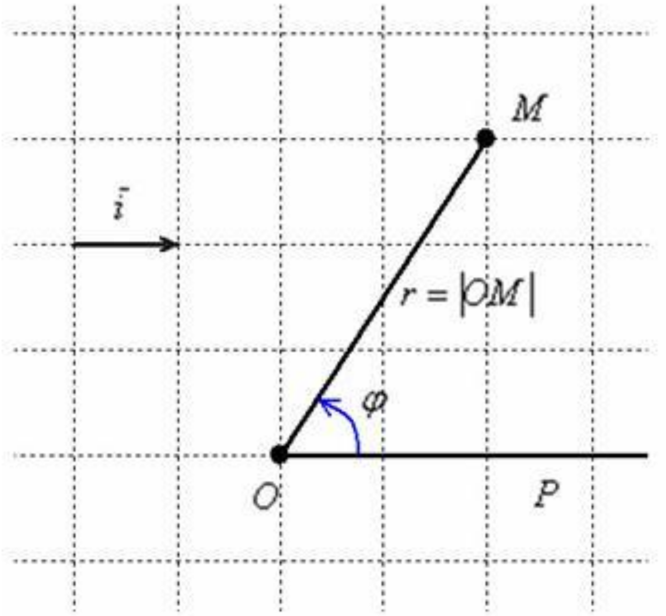
Для самого полюса $r=0$, а также – угол φ не определён.

Число r=|OM| называют **полярным радиусом** точки M или первой полярной координатой. Расстояние не может быть отрицательным, поэтому полярный радиус любой точки $r \geq 0$ (первую полярную координату также обозначают греческой буквой («ро») ρ.

Число φ называют полярным углом данной точки или второй полярной координатой. Полярный угол стандартно изменяется в пределах $-\pi < \varphi \leq \pi$ (главные значения угла).

или $0 < \varphi \leq 2\pi$
Пару (r, φ) называют полярными координатами точки M. Из ΔOMP находятся их конкретные значения.

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника – есть отношение противолежащего катета к прилежащему катету: $tg\varphi = {}^{MP}/_{OP} = {}^{3}/_{2}$, следовательно, сам угол: $\varphi = arctg\, {}^{3}/_{2} \approx 0{,}98$ рад $\approx 0{,}56°$.



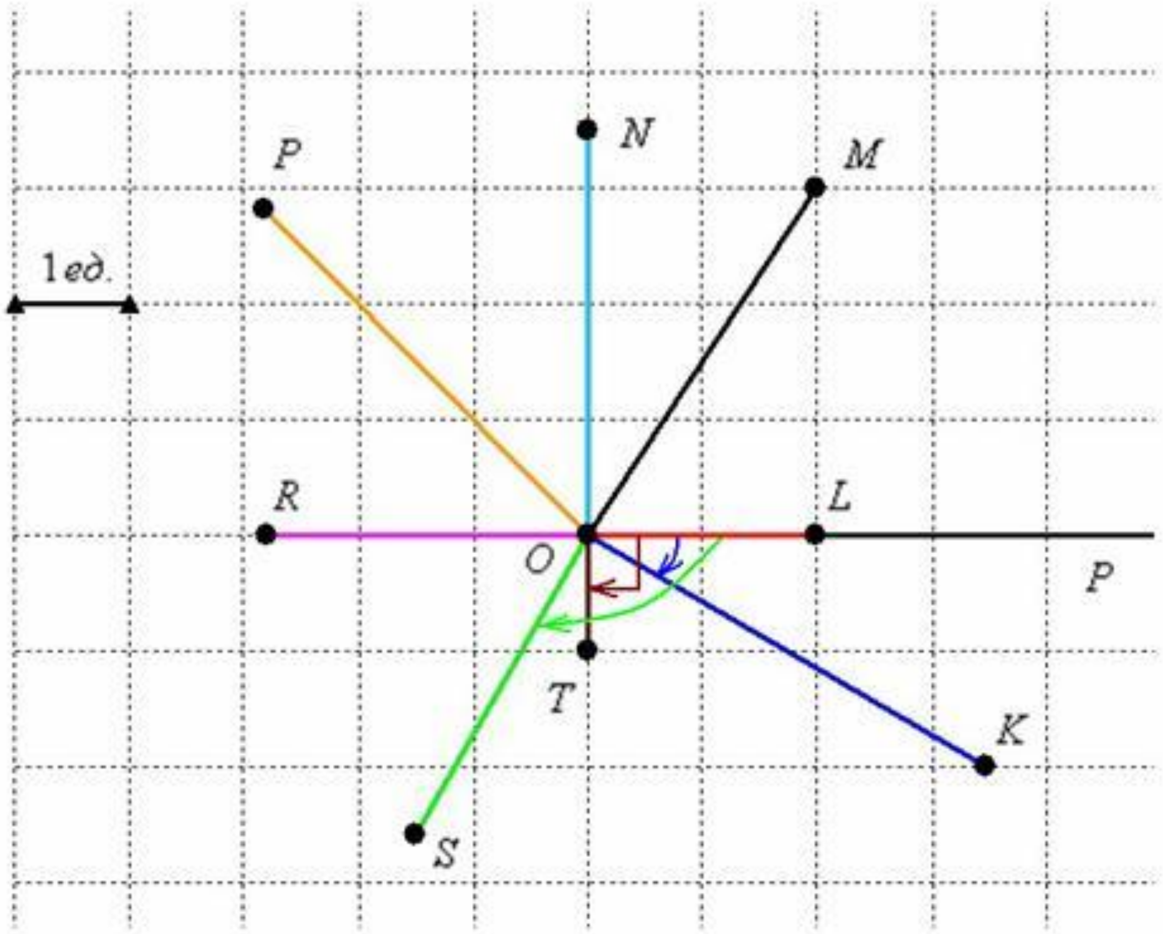
По теореме Пифагора, квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $OM^2 = OP^2 + MP^2$, значит, полярный радиус:

$$r = \sqrt{OP^2 + MP^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6 \text{ ед.}$$

Таким образом, M$\left(\boldsymbol{\sqrt{13}; arctg\, {}^{3}/_{2}}\right)$

1 **рад** × 180/π = 57,296°

1° × π/180 = 0,01745 рад



$$K\left(4;-\frac{\pi}{6}\right), L(2;0), M\left(\sqrt{13}; arctg\frac{3}{2}\right), N\left(\frac{7}{2};\frac{\pi}{2}\right), P\left(5;\frac{3\pi}{4}\right), R(2{,}8;\pi), S\left(3;-\frac{2\pi}{3}\right), T\left(1;-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\varphi_K=-\frac{\pi}{6},\ \varphi_S=-\frac{2\pi}{3},\ \varphi_T=-\frac{\pi}{2}$$

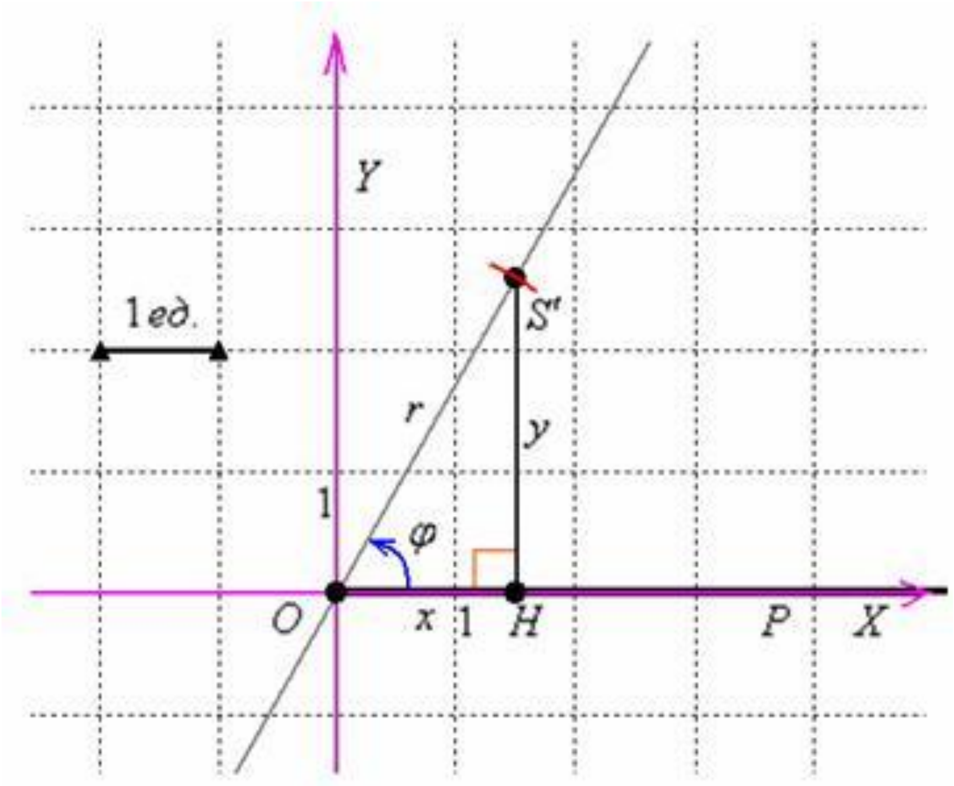
$$\varphi_K=-\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{11\pi}{6},\quad \varphi_S=-\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{4\pi}{3},\ \varphi_T=-\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{3\pi}{2}$$

Взаимосвязь прямоугольной и полярной системы координат

$S''\left(3; \frac{\pi}{3}\right)$

- Установим взаимосвязь полярных (r, φ) и декартовых $(x;y)$ координат на примере конкретной точки S``. Рассмотрим прямоугольный треугольник OHS``, в котором гипотенуза равна полярному радиусу: OS`$=r$, а катеты – координатам точки  в декартовой системе координат: OH=x, HS`=y.
- Синус острого угла – есть отношение противолежащего катета к гипотенузе: $sin\varphi = \frac{HS`}{OS`} = \frac{y}{r} \to y = r\ sin\varphi$
- Косинус острого угла – есть отношение прилежащего катета к гипотенузе: $\cos\varphi = \frac{OH}{OS`} = \frac{x}{r} \to y = r\ cos\varphi$

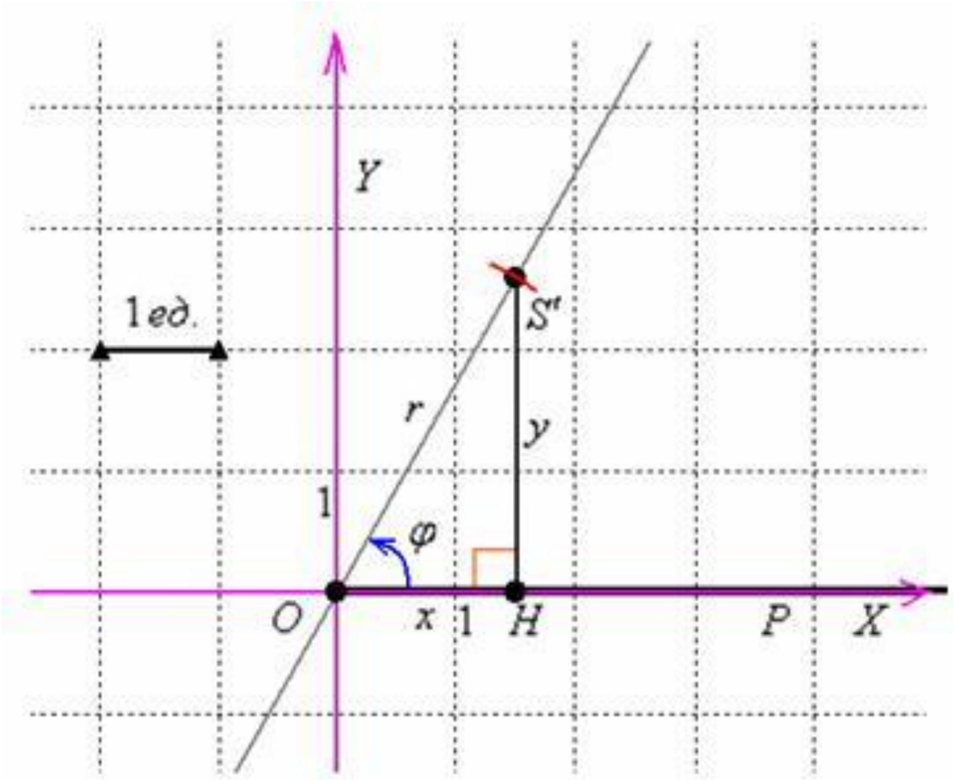
Формулы выражают декартовы координаты точки через её полярные координаты



$S''\left(3; \frac{\pi}{3}\right)$

- Установим взаимосвязь полярных (r, φ) и декартовых $(x;y)$ координат на примере конкретной точки S``. Рассмотрим прямоугольный треугольник OHS``, в котором гипотенуза равна полярному радиусу: $OS`=r$, а катеты – координатам точки в декартовой системе координат: OH=x, HS`=y.
- Синус острого угла – есть отношение противолежащего катета к гипотенузе: $sin\varphi = \frac{HS`}{OS`} = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\ sin\varphi$
- Косинус острого угла – есть отношение прилежащего катета к гипотенузе: $\cos\varphi = \frac{OH}{OS`} = \frac{x}{r} \rightarrow y = r\ cos\varphi$

Формулы выражают декартовы координаты точки через её полярные координаты



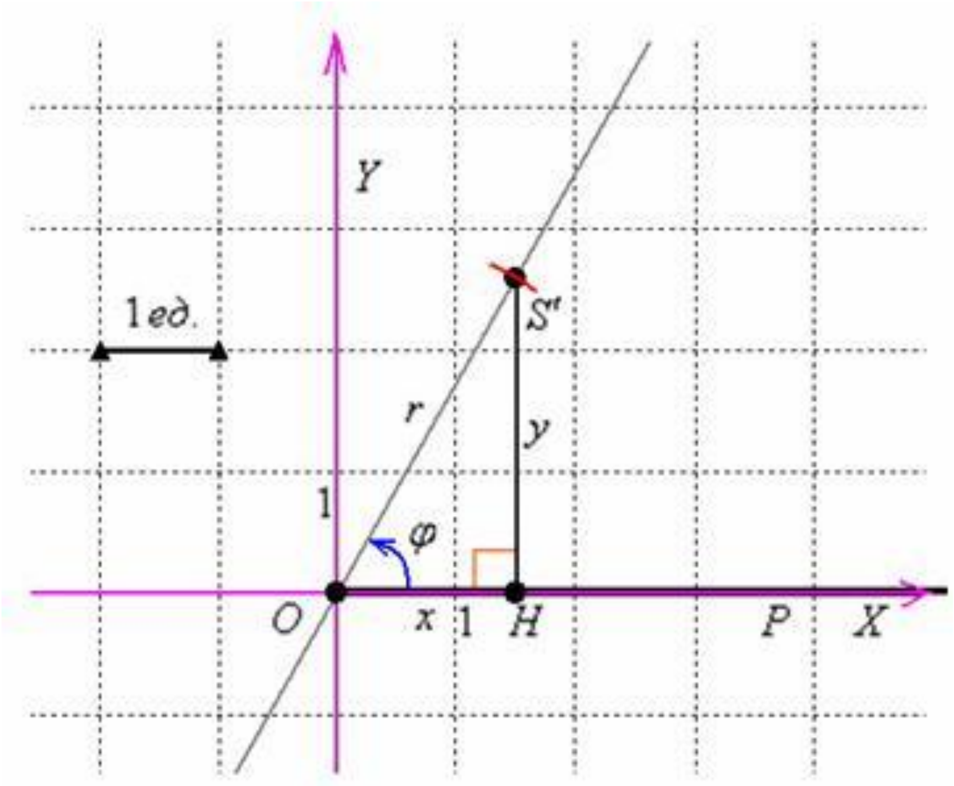
$S'\left(3;\frac{\pi}{3}\right)$

Найдём координаты точки $s`\left(3;\frac{\pi}{3}\right)$ в прямоугольной системе координат:

$$x = r\cos\varphi = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y = r\sin\varphi = 3\sin\frac{\pi}{3} = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6$$

$$S'\left(\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

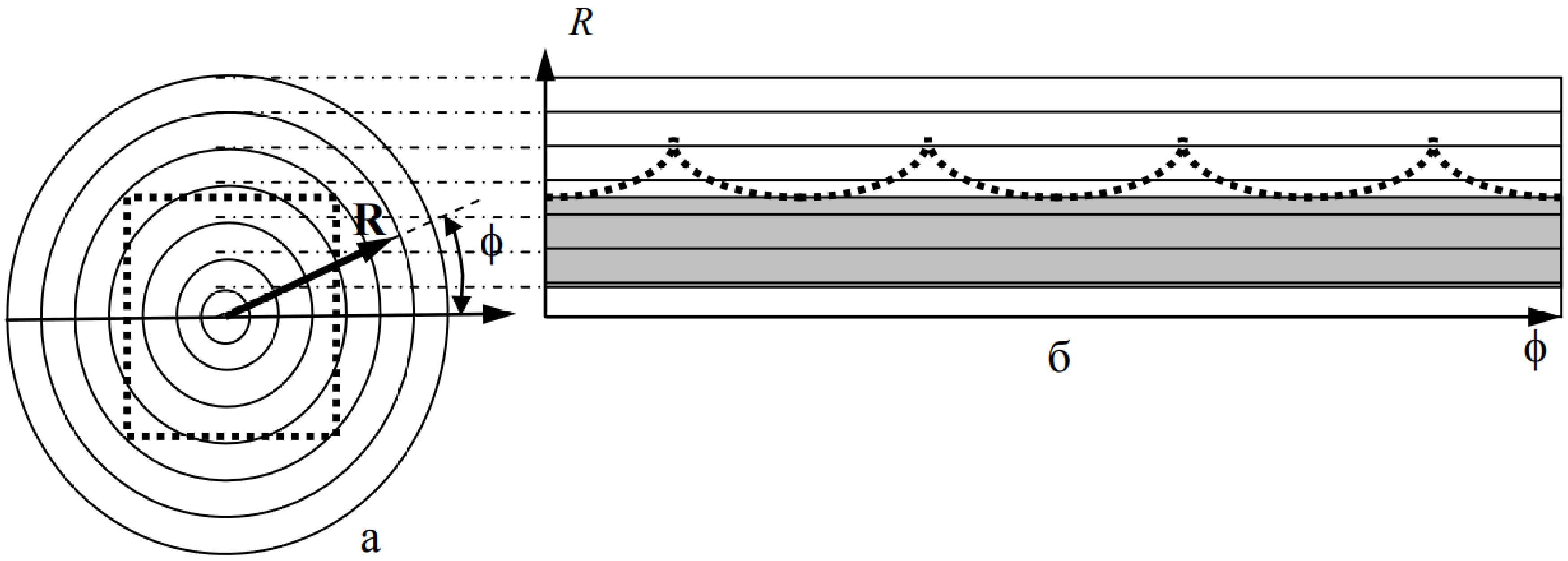


$$r = \sqrt{OH^2 + HS'^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

В случае, если изображение представлено в полярной системе координат, то координаты пиксела на плоскости описываются длиной радиуса-вектора $\boldsymbol{R}$, соединяющего центр пиксела с началом координат, и направлением радиуса-вектора, задаваемым углом φ азимута.



Если развернуть окружности равного радиуса в параллельные горизонтальные прямые, то это даст возможность представить азимут и радиус полярной системы координат ортогональными осями декартовой системы координат

Радиальную координату $\boldsymbol{R}$ можно представить в логарифмическом масштабе **[$\boldsymbol{R'}$=ln($\boldsymbol{R}$)]**

Декартовы координаты **{x,y}** пиксела могут быть преобразованы в полярно-логарифмические с помощью следующего преобразования:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

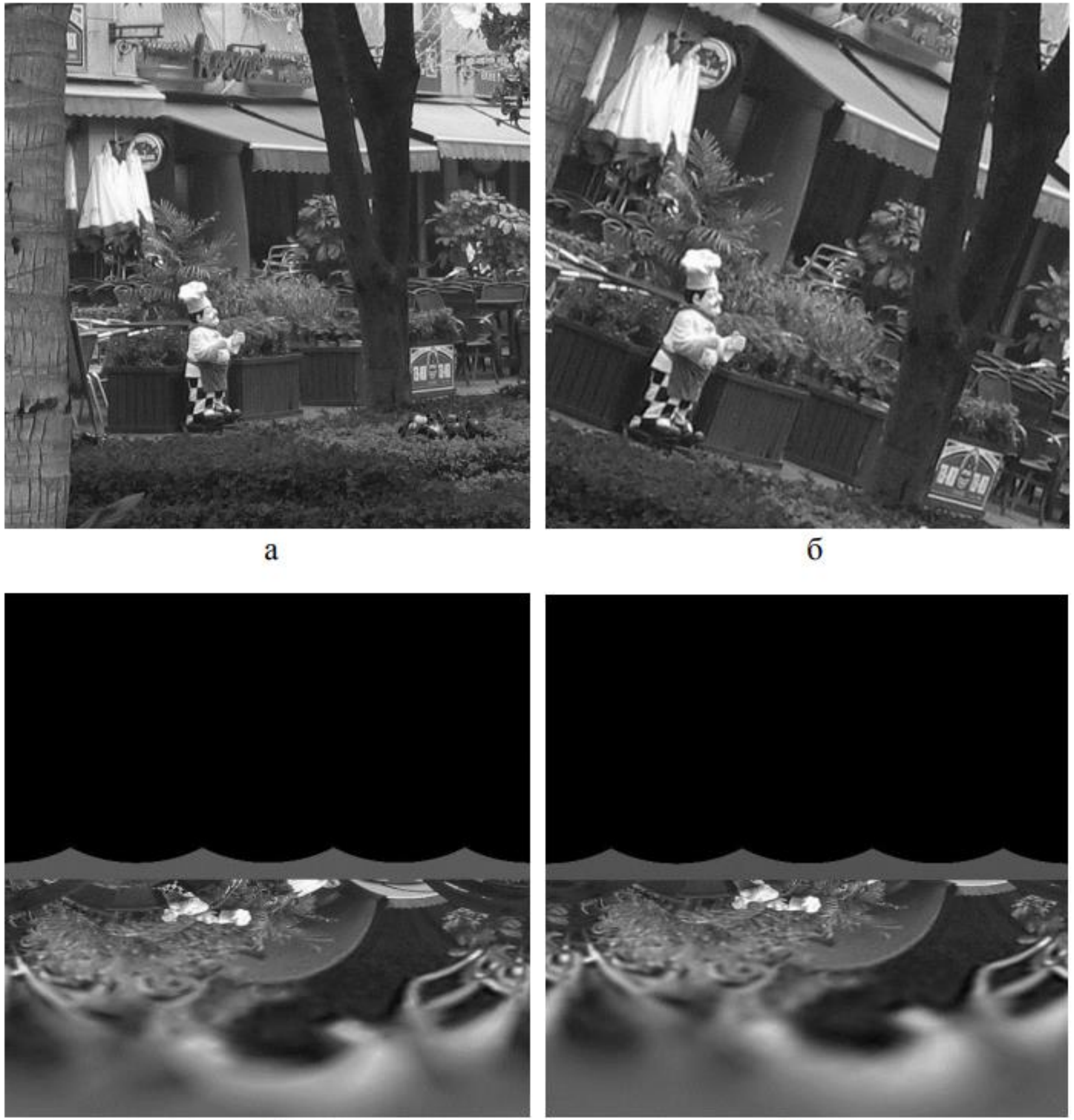
$$R` = \ln[(x^2 + y^2)^{1/2}]$$

Масштабирование изображения в исходной **декартовой системе** координат в М раз приведет к следующему изменению радиальной координаты в полярно-логарифмической системе координат:

$$R'(M) = \ln\{[(Mx)^2 + (My)^2]^{1/2}\} =$$
$$= \ln\{M[(x)^2 + (y)^2]^{1/2}\} = \ln(M) + \ln[(x^2 + y^2)^{1/2}].$$

Масштабирование изображения в исходной **декартовой системе** координат в М раз приведет к следующему изменению радиальной координаты в полярно-логарифмической системе координат:

Взаимно повернутые и масштабированные изображения (а) и (б), и их представления (в) и (г) в полярно-логарифмической системе координат, взаимно сдвинутые по координатным осям угла и радиуса



Для правильного перевода изображения в полярно-логарифмическую систему координат выполним следующую последовательность операций:

1.1. Пусть исходное (преобразуемое) изображение задано двумерным массивом пикселов $B_{i,j}$=B(x). X=(i, j)^T – вектор координат рассматриваемого пиксела.

1.2. Применим к изображению преобразование T в полярно-логарифмическую систему координат и рассчитаем минимальные и максимальные значения радиальной и азимутальной координат, пикселов преобразованного таким образом изображения

1.3. Вычисляем значения (яркости) каждого пиксела преобразованного изображения методом обратного проецирования координат субпикселов

- 1.3.1. Представим каждый пиксел преобразованного изображения как площадку, состоящую из QxQ субпикселов
- 1.3.2. Вычислим координаты обратной проекции каждого субпиксела, сформированного согласно пункту 1.3.1, из преобразованного изображения в преобразуемое изображение
- 1.3.3. Яркость B′ каждого пиксела преобразованного изображения вычисляется как среднее яркостей $b_{k,l}$ всех соответствующих ему субпикселов

Вычисление яркости пиксела в преобразованном изображении субпиксельным методом обратного проецирования (для наглядности вместо преобразования в полярно-логарифмическую систему координат здесь показано преобразование масштабированием и вращением)