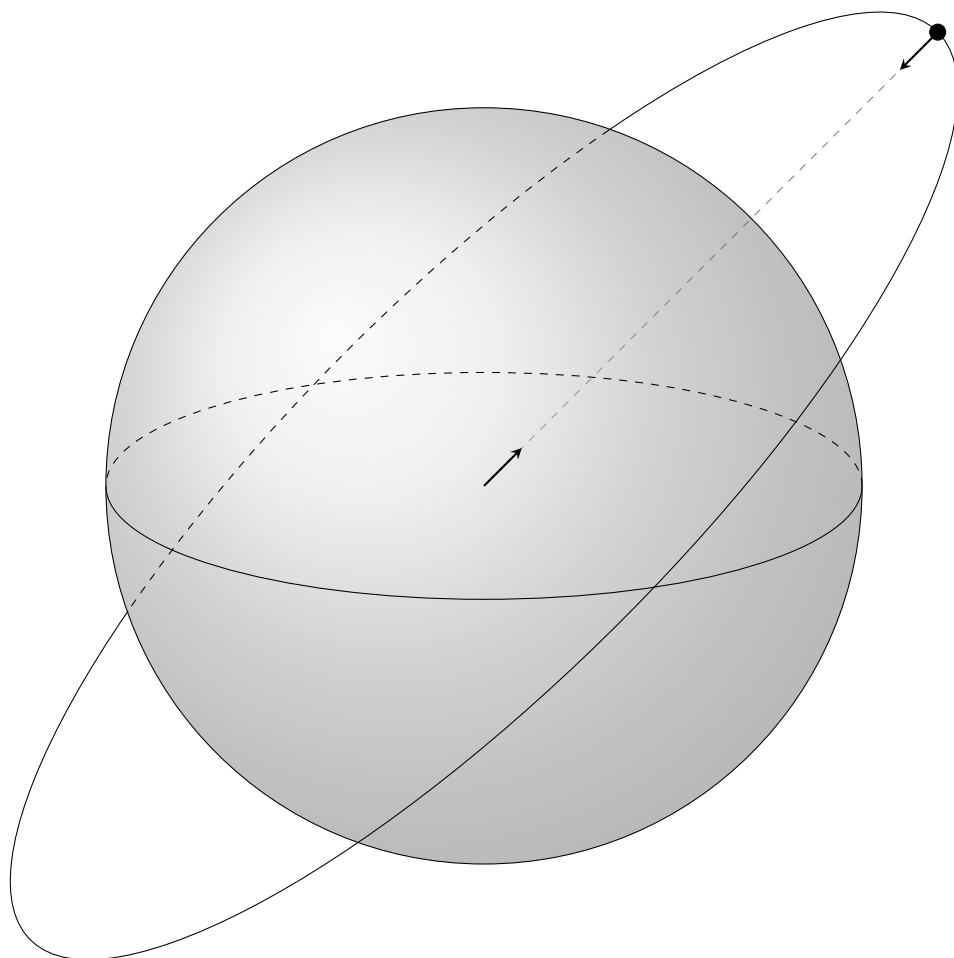


DOS LANÇAMENTOS SOB UM CAMPO GRAVITACIONAL

Pedro H. M. Bressan



Conteúdo

1	Campo Gravitacional Vertical	5
1.1	Ausência de forças dissipativas	5
1.1.1	Dedução vetorial	5
1.1.2	Função da Trajetória	7
1.1.3	Pontos Notáveis	7
1.2	Presença de fluido newtoniano	8
1.2.1	Ascensão	8
1.2.2	Descensão	9
1.3	Movimentação propulsão	11
2	Campo Gravitacional Radial	13
2.1	Movimento em Coordenadas Polares	13
2.2	Ausência de atmosfera	13
2.3	Presença de atmosfera newtoniana	15
2.4	Dinâmica de corpos extensos propulsionados	17
2.4.1	Foguete	17
A	Apêndice	19
A.1	Equação de Menchevisky	19
A.2	Efeitos dos ventos devidos à rotação da Terra	20
A.3	Movimentação do Centro de Massa	20
A.4	Arrasto e empuxo atmosféricos em corpos extensos	20
A.5	Mecânica Lagrangiana	20

Capítulo 1

Campo Gravitacional Vertical

1.1 Ausência de forças dissipativas

Os lançamentos realizados sob um campo gravitacional uniforme desprovido de demais efeitos dissipativos possuem uma aceleração constante (em geral direcionada para baixo), de modo que a velocidade do projétil sofre acréscimos iguais em tempos iguais ao longo do movimento.

Dessa forma, caracteriza-se por um Movimento Uniformemente Variado.

1.1.1 Dedução vetorial

Pela Segunda Lei do Movimento de Newton:

$$\mathbf{F}_G = m\mathbf{a} = -mg\hat{j} \Rightarrow \mathbf{a} = -g\hat{j}; \quad \left(g = |\mathbf{a}| \approx \frac{GM_{\oplus}}{r_{\oplus}^2} \approx 9.80665 \frac{m}{s^2} \right)$$

Como $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$, é possível resolver essa equação diferencial de segunda ordem de modo a descrever o movimento por sua velocidade e posição.

Velocidade: $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = -g\hat{j}$

Integrando ambos os lados:

$$\int \dot{\mathbf{v}}(t) dt = - \int g\hat{j} dt$$

$$\mathbf{v}(t) = -gt\hat{j} + C; \quad \text{observa-se que } C = \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$$

Logo,

$$\mathbf{v}(t) = -gt\hat{j} + \mathbf{v}_0$$

Posição: $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = -gt\hat{j} + \mathbf{v}_0$

Integrando ambos os lados:

$$\int \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int (-gt\hat{j} + \mathbf{v}_0) dt$$

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{gt^2}{2}\hat{j} + \mathbf{v}_0 t + D; \quad \text{observa-se que } D = \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$$

→ \mathbf{r}_0 geralmente é igual a 0, pois usualmente a origem dos eixos é a posição inicial da partícula.

Logo,

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{gt^2}{2}\hat{j} + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$$

Os vetores \mathbf{v}_0 e \mathbf{r}_0 podem ser descritos por meio de suas componentes horizontais e verticais com base no ângulo (α) em relação ao eixo x .

Assim, considerando que $|\mathbf{r}_0| = r_0$ e que $|\mathbf{v}_0| = v_0$:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_0 = r_0 \cos(\alpha)\hat{i} + r_0 \sin(\alpha)\hat{j} \\ \mathbf{v}_0 = v_0 \cos(\alpha)\hat{i} + v_0 \sin(\alpha)\hat{j} \end{cases}$$

Ou, pode-se definir $\begin{matrix} r_{0x} = r_0 \cos(\alpha) \\ r_{0y} = r_0 \sin(\alpha) \end{matrix}$ e $\begin{matrix} v_{0x} = v_0 \cos(\alpha) \\ v_{0y} = v_0 \sin(\alpha) \end{matrix}$, a equação torna-se: $\begin{cases} \mathbf{r}_0 = r_{0x}\hat{i} + r_{0y}\hat{j} \\ \mathbf{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} \end{cases}$

Dessa maneira, tomando $\mathbf{r}_0 = 0$, e substituindo as definições anteriores em $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$:
Igualmente:

$$\longrightarrow \mathbf{r}(t) = (v_{0x}t)\hat{i} + \left(v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}\right)\hat{j}$$

$$\longrightarrow \mathbf{v}(t) = (v_{0x})\hat{i} + (v_{0y} - gt)\hat{j}$$

$$\longrightarrow \mathbf{a} = -g\hat{j}$$

Parametrização da Trajetória

É a expressão das coordenadas x e y da partícula em função de outra variável t (tempo).

Com base nas equações obtidas na seção anterior, as quais revelam $\mathbf{r}(t)$ com base em escalares dos versores $(\hat{i}$ e $\hat{j})$ - sabendo que $\mathbf{r}_0 = 0$, fica evidente que as equações paramétricas são:

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \quad \text{e} \quad y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2}$$

$$\dot{x} = v_x = v_0 \cos \alpha \quad \text{e} \quad \dot{y} = v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

$$\ddot{x} = \dot{v}_x = a_x = 0 \quad \text{e} \quad \ddot{y} = \dot{v}_y = a_y = -g$$

Além disso, derivam-se as relações:

$$y = \frac{t}{2} \cdot (2v_0 \sin \alpha - gt)$$

$$\Rightarrow y = \frac{(v_{0y} + v_y)t}{2}$$

e

$$t = (v_{0y} - v_y)g^{-1} \Rightarrow 2y = 2v_{0y}(v_{0y} - v_y)g^{-1} - g^{-1}(v_{0y} - v_y)^2$$

$$-2gy = -v_{0y}^2 + v_y^2$$

$$\Rightarrow v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy$$

1.1.2 Função da Trajetória

A função da trajetória da altura (y) do projétil pela distância horizontal (x) da origem pode ser obtida eliminando o parâmetro (t):

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad \text{substituindo em } y \rightarrow y = \frac{v_0 \sin \alpha \cdot x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Logo,

$$y = \tan \alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

→ Isso mostra que a trajetória é parabólica, uma vez que y é uma função quadrática de x .

1.1.3 Pontos Notáveis

→ **Alcance** (distância horizontal máxima)

O alcance (d) de uma trajetória, cujo início e fim estão em $y = 0$, é dado por x quando $y = 0$ e $t \neq t_0$:

$$0 = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = t_0 = 0 \text{ (início)} \quad \text{ou} \quad t = t_f = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

Assim, o tempo em que o projétil atinge a distância horizontal máxima é t_f . Logo $d = x(t_f)$:

$$d = x(t_f) = (v_0 \cos \alpha) \cdot \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Portanto

$$d = x(t_f) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad \text{no tempo} \quad t_f = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

→ O maior alcance $\left(\frac{v_0^2}{g}\right)$ ocorre com $\alpha = \frac{\pi}{4}$

→ **Altura Máxima** (distância vertical máxima)

A altura máxima (h) é dada por y quando $\dot{y} = 0$ (ou quando $x = \frac{d}{2}$, meio da trajetória, que corresponde à metade do tempo final t_f):

$$\dot{y} = v_y = 0 \Rightarrow 0 = v_0 \sin \alpha - gt \Rightarrow t = t_m = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}; \quad \left(t_m = \frac{t_f}{2}\right)$$

Assim, o tempo em que o projétil atinge a altura máxima é t_m . Logo, $h = y(t_m)$:

$$h = y(t_m) = v_0 \sin \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Portanto

$$h = y(t_m) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad \text{no tempo} \quad t_m = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

→ Se $\alpha = 45^\circ$, $d = 4h$.

1.2 Presença de fluido newtoniano

$$\ddot{\mathbf{r}} = -g\hat{j} - \frac{kv^2}{m}\hat{\mathbf{v}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -g - \frac{k\dot{y}|\dot{y}|}{m}\hat{j} - \frac{k\dot{x}|\dot{x}|}{m}\hat{i}$$

Logo:

$$\begin{cases} \ddot{y} = -g - \frac{k\dot{y}|\dot{y}|}{m} \\ \ddot{x} = -\frac{k\dot{x}|\dot{x}|}{m} \end{cases}$$

Tais equações diferenciais não podem ser resolvidas analiticamente através de uma única expressão, uma vez que a função modular $|x|$ não é diferenciável em $x = 0$.

Contudo, pode-se resolvê-las em casos específicos, por exemplo:

1.2.1 Ascensão

$$\rightarrow \dot{x} \geq 0 \text{ e } \dot{y} \geq 0$$

Movimento horizontal

$$\ddot{x} = -\frac{k\dot{x}^2}{m}$$

$$m \int \frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2} dt = -kt + a$$

$$m \int \frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2} = -kt + a$$

$$\frac{m}{\dot{x}} + a_0 = kt - a \quad ; \quad (-a - a_0 = A_1)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{m}{kt + A_1}$$

$$x + b = m \int \frac{dt}{kt + A_1} \quad \begin{matrix} u = kt + A_1 \\ du = kdt \end{matrix}$$

$$x + b = \frac{m}{k} \int \frac{du}{u} \Rightarrow x = \frac{m}{k} \cdot \ln |kt + A_1| + b_0 - b \quad ; \quad (B_1 = b_0 - b)$$

$$\Rightarrow x = \frac{m \cdot \ln(kt + A_1)}{k} + B_1$$

Em que

$$A_1 = \frac{m}{v_{0x}} \quad ; \quad B_1 = -\frac{m \cdot \ln A_1}{k} \quad ; \quad (A_1 \geq 0)$$

Movimento vertical

$$\ddot{y} = -g - \frac{k\dot{y}^2}{m}$$

$$-m \int \frac{\ddot{y}}{mg + k\dot{y}^2} dt = t + c$$

$$-m \int \frac{d\dot{y}}{mg + k\dot{y}^2} = t + c \quad \begin{array}{l} u = \dot{y} \sqrt{\frac{k}{gm}} \\ du = \sqrt{\frac{k}{gm}} d\dot{y} \end{array}$$

$$-m \int \frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}}{mg + u^2 gm} du = t + c \Rightarrow -\sqrt{\frac{mg}{k}} \int \frac{du}{1 + u^2} = t + c$$

$$\sqrt{\frac{m}{gk}} \arctan \left(\dot{y} \sqrt{\frac{k}{gm}} \right) + c_0 = -t - c \quad ; \quad (-c - c_0 = C_1)$$

$$\arctan \left(\dot{y} \sqrt{\frac{k}{gm}} \right) = (C_1 - t) \sqrt{\frac{gk}{m}}$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \sqrt{\frac{gm}{k}} \cdot \tan \left[(C_1 - t) \cdot \sqrt{\frac{gk}{m}} \right]$$

$$y + d = \sqrt{\frac{gm}{k}} \int \tan \left[(C_1 - t) \cdot \sqrt{\frac{gk}{m}} \right] dt \quad \begin{array}{l} u = (C_1 - t) \cdot \sqrt{\frac{gk}{m}} \\ du = -\sqrt{\frac{gk}{m}} dt \end{array}$$

$$y + d = -\frac{m}{k} \int \tan u du \Rightarrow y = -\frac{m}{k} \cdot \ln(\sec u) + d_0 - d \quad ; \quad (d_0 - d = D_1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{m}{k} \cdot \ln \left\{ \cos \left[(C_1 - t) \cdot \sqrt{\frac{gk}{m}} \right] \right\} + D_1$$

Em que

$$C_1 = \sqrt{\frac{m}{gk}} \cdot \arctan \left(v_{0y} \sqrt{\frac{k}{gm}} \right)$$

$$D_1 = \frac{m}{k} \cdot \ln \left\{ \sec \left[C_1 \cdot \sqrt{\frac{gk}{m}} \right] \right\}$$

Uma vez que, $\dot{y} = 0$, se $t = C_1$, D_1 é a altura máxima do lançamento.

1.2.2 Descensão

$$\rightarrow \dot{x} \geq 0 \text{ e } \dot{y} \leq 0$$

Movimento horizontal

$$\ddot{x} = -\frac{k\dot{x}^2}{m}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{m}{kt + A_2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{m \cdot \ln(kt + A_2)}{k} + B_2$$

Movimento vertical

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= -g + \frac{k\dot{y}^2}{m} \\
-m \int \frac{\ddot{y}}{mg - k\dot{y}^2} dt &= t + c_3 \\
-m \int \frac{d\dot{y}}{mg - k\dot{y}^2} &= t + c_3 \quad \begin{aligned} u &= \dot{y} \sqrt{\frac{k}{gm}} \\ du &= \sqrt{\frac{k}{gm}} d\dot{y} \end{aligned} \\
-m \int \frac{\sqrt{\frac{gm}{k}}}{mg - u^2 gm} du &= t + c_3 \Rightarrow -\sqrt{\frac{mg}{k}} \int \frac{du}{1 - u^2} = t + c \\
\sqrt{\frac{m}{gk}} \operatorname{artanh} \left(\dot{y} \sqrt{\frac{k}{gm}} \right) + c_4 &= -t - c_3 \quad ; \quad (-c_3 - c_4 = C_2) \\
\operatorname{artanh} \left(\dot{y} \sqrt{\frac{k}{gm}} \right) &= (C_2 - t) \sqrt{\frac{gk}{m}} \\
\Rightarrow \dot{y} &= \sqrt{\frac{gm}{k}} \cdot \tanh \left[(C_2 - t) \cdot \sqrt{\frac{gk}{m}} \right] \\
y + d_3 &= \sqrt{\frac{gm}{k}} \int \tanh \left[(C_2 - t) \cdot \sqrt{\frac{gk}{m}} \right] dt \quad \begin{aligned} u &= (C_2 - t) \cdot \sqrt{\frac{gk}{m}} \\ du &= -\sqrt{\frac{gk}{m}} dt \end{aligned} \\
y + d_3 &= -\frac{m}{k} \int \tanh u du \Rightarrow y = -\frac{m}{k} \cdot \ln (\cosh u) + d_4 - d_3 \quad ; \quad (d_4 - d_3 = D_2) \\
\Rightarrow y &= D_2 - \frac{m}{k} \cdot \ln \left\{ \cosh \left[(C_2 - t) \cdot \sqrt{\frac{gk}{m}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Pode-se utilizar essa expressão para completar a trajetória anterior após seu apogeu, de modo que $A_2 = A_1$, $B_2 = B_1$ e:

$$t_0 = C_1 \quad ; \quad C_2 = C_1$$

Uma vez que, $\dot{y} = 0$, se $t = C_1$, D_2 é a altura máxima (inicial) do lançamento e é equivalente a D_1 .

Função da Trajetória

Subida:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{e^{\frac{k(x-B_1)}{m}} - A_1}{k} \\
\Rightarrow y &= \frac{m}{k} \cdot \ln \left\{ \cos \left[\left(C_1 - \frac{e^{\frac{k(x-B_1)}{m}} - A_1}{k} \right) \cdot \sqrt{\frac{gk}{m}} \right] \right\} + D_1
\end{aligned}$$

Descida:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{e^{\frac{k(x-B_2)}{m}} - A_2}{k} \\
\Rightarrow y &= D_2 - \frac{m}{k} \cdot \ln \left\{ \cosh \left[\left(C_2 - \frac{e^{\frac{k(x-B_2)}{m}} - A_2}{k} \right) \cdot \sqrt{\frac{gk}{m}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

1.3 Movimentação propulsão

Conforme a descrição da equação que rege sistemas de massa variáveis no apêndice:

Ausência de forças dissipativas

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= -g\hat{j} + \frac{\mathbf{E}}{m(t)} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= -\left(\frac{\dot{m}v_e \cos \alpha}{m(t)}\right) \hat{i} - \left(g + \frac{\dot{m}v_e \sin \alpha}{m(t)}\right) \hat{j} \\ \mathbf{r} &= -\left(v_e \cos \alpha \int_0^t \int_0^t \frac{\dot{m}}{m(\tau)} d\tau\right) \hat{i} - \left(\frac{gt^2}{2} + v_e \sin \alpha \int_0^t \int_0^t \frac{\dot{m}}{m(\tau)} d\tau\right) \hat{j}\end{aligned}$$

Se a velocidade de exaustão do propulsor for constante.

Presença de fluido newtoniano

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= -g\hat{j} - \frac{kv^2}{m(t)}\hat{\mathbf{v}} + \frac{\mathbf{E}}{m(t)} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= -\left(\frac{\dot{m}v_e \cos \alpha + k\dot{x}|\dot{x}|}{m(t)}\right) \hat{i} - \left(g + \frac{\dot{m}v_e \sin \alpha + k\dot{y}|\dot{y}|}{m(t)}\right) \hat{j}\end{aligned}$$

Nota-se que é possível considerar o campo gravitacional variável, de maneira que na equação diferencial g é alterado por $\frac{gr_{\oplus}^2}{(r_{\oplus} + y)^2}$.

Capítulo 2

Campo Gravitacional Radial

2.1 Movimento em Coordenadas Polares

Conveniente é expressar o movimento em coordenadas polares, visto que se trata de um sistema em torno da circunferência de um corpo massivo.

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} - \sin \theta \hat{\mathbf{j}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} r = v \cos \Phi \\ \dot{r} = v \sin \Phi \end{cases}$$

Posição:

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}}$$

Vetor tangente à circunferência do corpo esférico:

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \cos \theta \cdot \dot{\theta} \hat{\mathbf{i}} - \sin \theta \cdot \dot{\theta} \hat{\mathbf{j}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} - \sin \theta \hat{\mathbf{j}}$$

Velocidade:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\Rightarrow v^2 = \dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2$$

Aceleração:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{r} \hat{\mathbf{r}} + \dot{r} \boldsymbol{\theta} + (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}} - r \dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}}$$

$$= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{r}} + (2 \cdot \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

2.2 Ausência de atmosfera

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{gr_{\oplus}^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\kappa}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad ; \quad (\kappa = gr_{\oplus}^2)$$

$$(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{r}} + (2 \cdot \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\frac{\kappa}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Portanto, pela igualdade das componentes:

I)

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\kappa}{r^2}$$

II)

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$$

$$(r^2\dot{\theta})' = 0 \Rightarrow r^2\dot{\theta} = h$$

Em que h é uma constante em relação ao tempo, podendo ser determinada pelas condições iniciais: $h = r_0^2 \dot{\theta}_0$.

Então, considerando $u = \frac{1}{r}$:

$$\Rightarrow u^2 = \frac{\dot{\theta}}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -r^{-2} \frac{dr}{d\theta}$$

Pode-se reescrever \dot{r} :

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} \Rightarrow \dot{r} = -h \frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = -h \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = -h \dot{\theta} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

Logo, a equação diferencial (I) torna-se:

$$-h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - h^2 u^3 = -\kappa u^2$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\kappa}{h^2}$$

Seu polinômio auxiliar é:

$$w^2 + 1 = 0 \Rightarrow |w| = i$$

$$u = c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta$$

$$u = C \cos (\theta + \theta_0)$$

Por uma escolha de coordenadas em que $\theta_0 = 0$, uma solução particular da equação é $\frac{\kappa}{h^2}$ de modo que:

$$u = \frac{\kappa}{h^2} + C \cos \theta$$

$$r = \frac{1}{\frac{\kappa}{h^2} + C \cos \theta}$$

Considerando: $d = \frac{1}{C}$ e $e = \frac{Ch^2}{\kappa}$

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

No apêndice, outra abordagem a esse problema é fornecida.

2.3 Presença de atmosfera newtoniana

Visto que, em um lançamento usual, o coeficiente de Rayleigh é maior do que 1000, o fluxo turbulento do fluido predomina. Logo, o atrito é proporcional ao quadrado da velocidade da partícula.

De modo que, o lançamento é regido pela equação:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{gr_{\oplus}^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} - \frac{kv^2}{m} \hat{\mathbf{v}}$$

Em coordenadas polares:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} - \sin \theta \hat{\mathbf{j}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} r = v \cos \Phi \\ \dot{r} = v \sin \Phi \end{cases}$$

Aceleração:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{r} \hat{\mathbf{r}} + \dot{r} \dot{\boldsymbol{\theta}} + (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}} - r \dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}} \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{r}} + (2 \cdot \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

Logo, a equação que rege o lançamento torna-se:

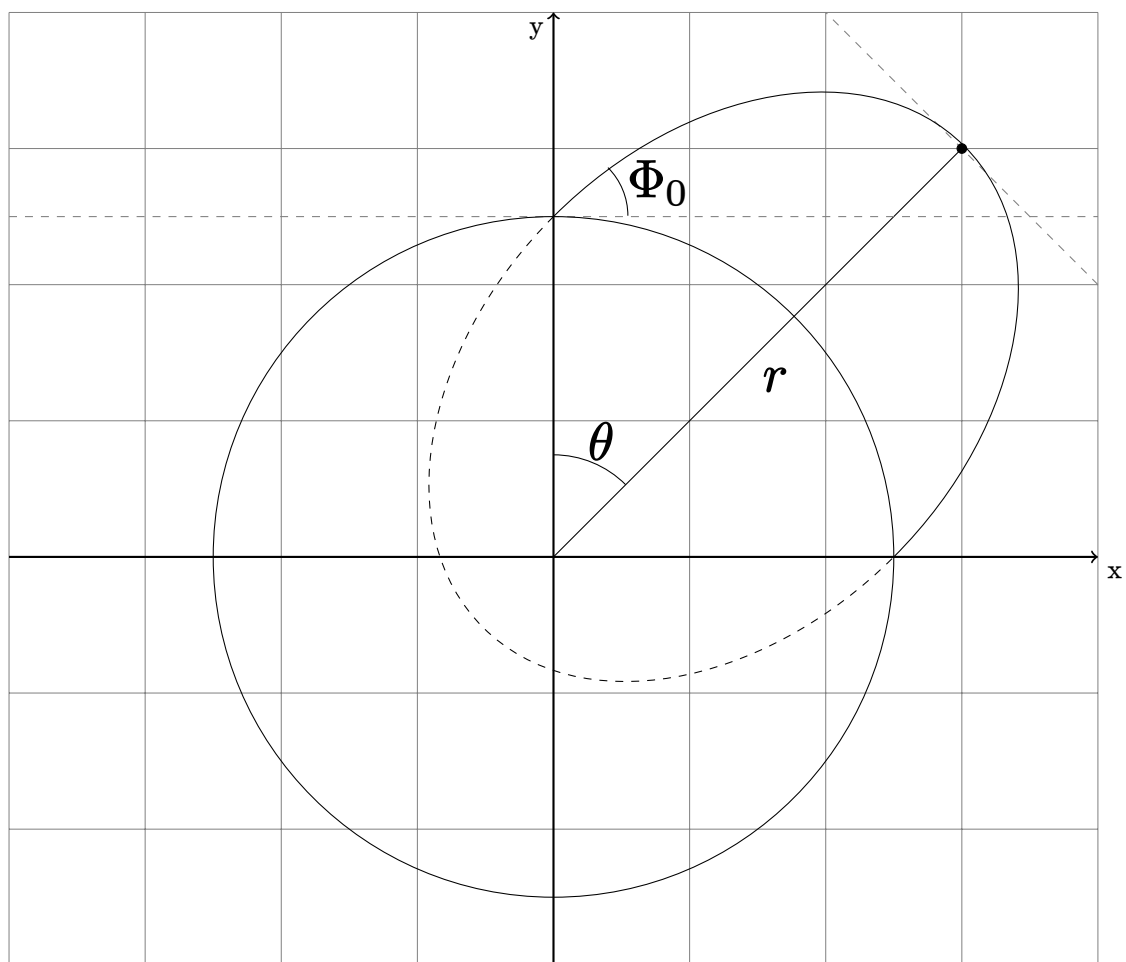
$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{gr_{\oplus}^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} - \frac{k \cdot (\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2)}{m} \hat{\mathbf{v}} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= -\frac{gr_{\oplus}^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} - \frac{kv^2 \sin \Phi}{m} \hat{\mathbf{r}} - \frac{kv^2 \cos \Phi}{m} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= -\left(\frac{gr_{\oplus}^2}{r^2} + \frac{kv^2 \sin \Phi}{m} \right) \hat{\mathbf{r}} - \frac{kv^2 \cos \Phi}{m} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{r}} + (2 \cdot \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}} &= -\left(\frac{gr_{\oplus}^2}{r^2} + \frac{kv^2 \sin \Phi}{m} \right) \hat{\mathbf{r}} - \frac{kv^2 \cos \Phi}{m} \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned}$$

Portanto, pela, igualdade das componentes:

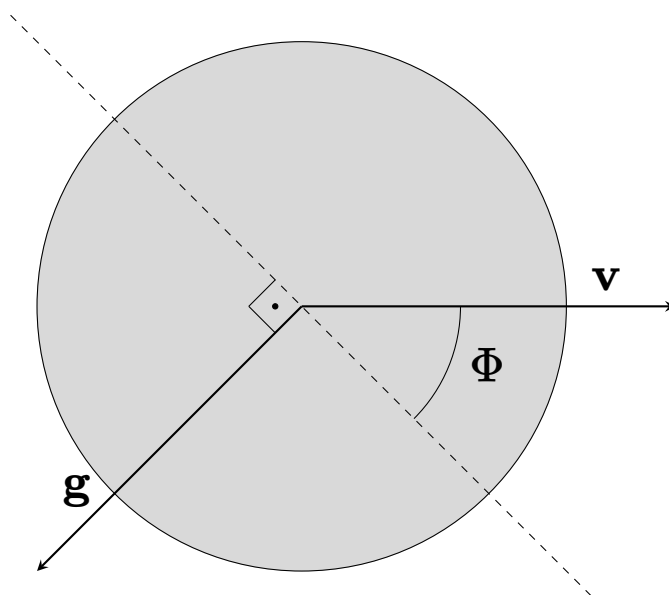
$$\begin{cases} \ddot{r} = r \dot{\theta}^2 - \frac{kv^2 \sin \Phi}{m} - \frac{gr_{\oplus}^2}{r^2} \\ \ddot{\theta} = -\frac{kv^2 \cos \Phi}{mr} - \frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \end{cases}$$

Pode-se aplicar tal aproximação a um lançamento de um projétil de massa constante em um planeta cuja forma seja próxima de uma esfera, e cuja atmosfera se comporte de modo aproximadamente newtoniano; semelhantemente às condições terrestres.

Representação do lançamento através do plano que contém a aceleração resultante:



De maneira que a configuração do projétil é:

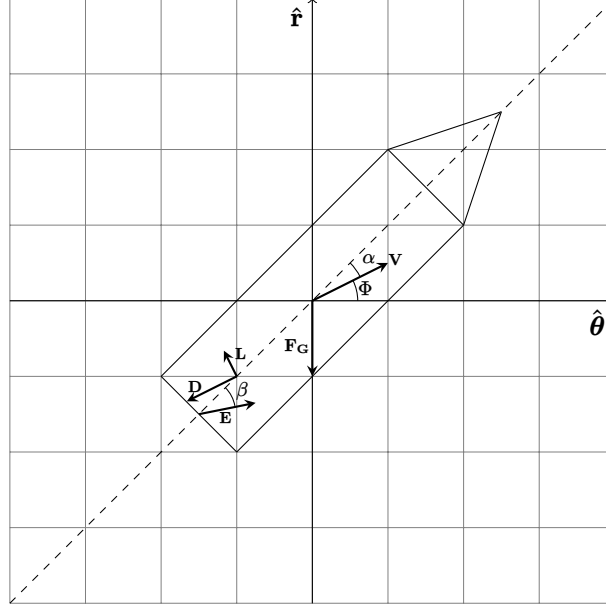


2.4 Dinâmica de corpos extensos propulsionados

Conforme a equação de Menchevsky derivada no apêndice, dadas as forças externas, pode-se calcular a trajetória do corpo:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = -m(t) \cdot \frac{gr_{\oplus}^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} - kv^2 \hat{\mathbf{v}} + cv^2 \hat{\mathbf{L}}$$

2.4.1 Foguete



Da figura, derivam-se:

$$\mathbf{E} = -\dot{m}v_e \sin(\beta + \alpha + \Phi) \hat{\mathbf{r}} - \dot{m}v_e \cos(\beta + \alpha + \Phi) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{D} = -\frac{C_d \rho A(\alpha) v^2}{2} \sin \Phi \hat{\mathbf{r}} - \frac{C_d \rho A(\alpha) v^2}{2} \cos \Phi \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{L} = \frac{C_L \rho A(\alpha) v^2}{2} \cos \Phi \hat{\mathbf{r}} - \frac{C_L \rho A(\alpha) v^2}{2} \sin \Phi \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\left(k = \frac{C_d \rho A(\alpha)}{2} \quad ; \quad c = \frac{C_L \rho A(\alpha)}{2} \right) \quad \text{e} \quad \Phi = \arctan\left(\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}r}\right)$$

Torque:

$$\frac{dH}{dt} = \tau_{\mathbf{E}} + \tau_{\mathbf{D}} + \tau_{\mathbf{L}}$$

$$\dot{H} = Db_{\mathbf{D}} \sin \alpha + Lb_{\mathbf{L}} \cos \alpha - Eb_{\mathbf{E}} \sin \beta \quad ; \quad (b_{\mathbf{D}} = b_{\mathbf{L}} = b_{C_p})$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{Db_{C_p} \sin \alpha + Lb_{C_p} \cos \alpha - Eb_{\mathbf{E}} \sin \beta}{I}$$

Para deixar o foguete em equilíbrio estático com a movimentação do propulsor:

$$\dot{H} = 0$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{Db_{C_p} \sin \alpha + Lb_{C_p} \cos \alpha}{Eb_{\mathbf{E}}}\right)$$

Força Resultante (\mathbf{F}_R):

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{E}$$

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{E} + \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{F}_G$$

$$\mathbf{F}_R = -\dot{m}v_e \sin(\beta + \alpha + \Phi) \hat{\mathbf{r}} - \dot{m}v_e \cos(\beta + \alpha + \Phi) \hat{\boldsymbol{\theta}} - kv^2 \hat{\mathbf{v}} + cv^2 \hat{\mathbf{L}} - m(t) \cdot \frac{g \cdot r_{\oplus}^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Em coordenadas polares:

$$\mathbf{F}_R = \left(-\dot{m}v_e \sin(\beta + \alpha + \Phi) - kv^2 \sin \Phi - cv^2 \cos \Phi - m(t) \cdot \frac{g \cdot r_{\oplus}^2}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}}$$

$$+ \left(-\dot{m}v_e \cos(\beta + \alpha + \Phi) - kv^2 \cos \Phi + cv^2 \sin \Phi \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = - \left(\frac{\dot{m}v_e \sin(\beta + \alpha + \Phi) + kv^2 \sin \Phi + cv^2 \cos \Phi}{m(t)} + \frac{g \cdot r_{\oplus}^2}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}}$$

$$- \left(\frac{\dot{m}v_e \cos(\beta + \alpha + \Phi) + kv^2 \cos \Phi - cv^2 \sin \Phi}{m(t)} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{r}} + (2 \cdot \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}} = - \left(\frac{\dot{m}v_e \sin(\beta + \alpha + \Phi) + kv^2 \sin \Phi + cv^2 \cos \Phi}{m(t)} + \frac{g \cdot r_{\oplus}^2}{r^2} \right) \hat{\mathbf{r}}$$

$$- \left(\frac{\dot{m}v_e \cos(\beta + \alpha + \Phi) + kv^2 \cos \Phi - cv^2 \sin \Phi}{m(t)} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Portanto, pela igualdade das componentes:

$$\begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{\dot{m}v_e \sin(\beta + \alpha + \Phi) + kv^2 \sin \Phi + cv^2 \cos \Phi}{m(t)} - \frac{g \cdot r_{\oplus}^2}{r^2} \\ \ddot{\theta} = - \frac{\dot{m}v_e \cos(\beta + \alpha + \Phi) + kv^2 \cos \Phi - cv^2 \sin \Phi}{m(t)r} - \frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \\ \ddot{\alpha} = \frac{Db_{C_p} \sin \alpha + Lb_{C_p} \cos \alpha - Eb_{\mathbf{E}} \sin \beta}{I} \end{cases}$$

Ausência de atmosfera

Este caso pode ser considerado como uma forma especial da derivação acima, em que os efeitos da presença do fluido são desconsiderados. Portanto, as equações tornam-se:

$$\begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{\dot{m}v_e \sin(\beta + \alpha + \Phi)}{m(t)} - \frac{g \cdot r_{\oplus}^2}{r^2} \\ \ddot{\theta} = - \frac{\dot{m}v_e \cos(\beta + \alpha + \Phi)}{m(t)r} - \frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \\ \ddot{\alpha} = \frac{-Eb_{\mathbf{E}} \sin \beta}{I} \end{cases}$$

Apêndice A

Apêndice

A.1 Equação de Menchevisky

Conforme a Segunda Lei de Newton, aplicada a todo sistema (cuja massa é constante):

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \Rightarrow \mathbf{F} = M \mathbf{a}_{cm}$$

Dessa forma, não há alteração do momento do sistema devido à variação da massa de suas partes (forças internas). No entanto, os corpos do sistema podem ter uma variação do seu momento causada pela ejeção ou acréscimo de partículas (massa) já pertencentes ao sistema. Assim, o sistema não sofre variação do momento pela ação de forças internas, diferentemente dos seus corpos:

→ Acréscimo de massa

$$\begin{cases} \mathbf{P}(t) = m\mathbf{v} + \mathbf{v}_a \Delta m \\ \mathbf{P}(t + \Delta t) = (m + \Delta m) \cdot (\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \Delta \mathbf{P} = m\Delta \mathbf{v} + \mathbf{v}\Delta m + \Delta m\Delta \mathbf{v} - \mathbf{v}_a \Delta m$$

Dividindo ambos os lados por Δt :

$$\frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \frac{m\Delta \mathbf{v} + \mathbf{v}\Delta m + \Delta m\Delta \mathbf{v} - \mathbf{v}_a \Delta m}{\Delta t}$$

Tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - (\mathbf{v}_a - \mathbf{v}) \frac{dm}{dt}$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{v}_{\text{rel}} \frac{dm}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

→ Decréscimo de massa

$$\begin{cases} \mathbf{P}(t) = m\mathbf{v} \\ \mathbf{P}(t + \Delta t) = (m + \Delta m) \cdot (\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) - (\mathbf{v} + \mathbf{v}_e) \Delta m \end{cases}$$
$$\Rightarrow \Delta \mathbf{P} = m\Delta \mathbf{v} + \Delta m\Delta \mathbf{v} - \mathbf{v}_e \Delta m$$

Dividindo ambos os lados por Δt :

$$\frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \frac{m\Delta \mathbf{v} + \Delta m\Delta \mathbf{v} - \mathbf{v}_e \Delta m}{\Delta t}$$

Tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{v}_e \frac{dm}{dt}$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{v}_e \frac{dm}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Esse último caso aplica-se a um corpo cujo momento varia devido à expulsão de sua própria massa, como um foguete. Nesse caso, denomina-se por empuxo (**E**) do propulsor a força $\dot{m}\mathbf{v}_e$ gerada pela ejeção de massa.

A.2 Efeitos dos ventos devidos à rotação da Terra

A.3 Movimentação do Centro de Massa

Caso se queira lançar uma lua...

A.4 Arrasto e empuxo atmosféricos em corpos extensos

A.5 Mecânica Lagrangiana

$$\mathcal{L} = T - V$$

$$\mathcal{L} = \frac{m(t) \cdot v^2}{2} + \frac{GM_{\oplus}m(t)}{r}$$

$$\mathcal{L} = \frac{m(t) \cdot v^2}{2} + \frac{\mu m(t)}{r}; \quad (\mu = GM_{\oplus})$$

Em coordenadas polares nas quais definem-se os versores:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} - \sin \theta \hat{\mathbf{j}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} r = v \cos \Phi \\ \dot{r} = v \sin \Phi \end{cases} \Rightarrow v^2 = \dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2$$

Então derivando esse resultado:

$$v\dot{v} = \ddot{r}\dot{r} + r^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + r\dot{\theta}\dot{r}$$

Logo, o lagrangiano torna-se:

$$\mathcal{L} = \frac{m(t) \cdot (\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2)}{2} + \frac{\mu m(t)}{r}; \quad (\mu = GM_{\oplus})$$

Conforme a equação de Euler-Lagrange, considerando forças não conservativas F_{air} e E :

Na direção $\hat{\mathbf{r}}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = Q_r$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left(\frac{m(t) \cdot (\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2)}{2} + \frac{\mu m(t)}{r} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{m(t) \cdot (\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2)}{2} + \frac{\mu m(t)}{r} \right) = \dot{m}v_e \sin \Phi - k(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2) \sin \Phi$$

$$\frac{d}{dt} [m(t) \cdot \dot{r}] - \left(m(t) \cdot \dot{\theta}^2 r - \frac{\mu m(t)}{r^2} \right) = \dot{m}v_e \sin \Phi - k(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2) \sin \Phi$$

$$\dot{m}\dot{r} + m(t)\ddot{r} - m(t) \cdot \dot{\theta}^2 r + \frac{\mu m(t)}{r^2} = \dot{m}v_e \sin \Phi - k(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2) \sin \Phi$$

Na direção $\hat{\boldsymbol{\theta}}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Q_\theta$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{m(t) \cdot (\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2)}{2} + \frac{\mu m(t)}{r} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{m(t) \cdot (\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2)}{2} + \frac{\mu m(t)}{r} \right) = r \cdot \dot{m} v_e \cos \Phi - r \cdot k(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2) \cos \Phi$$

$$\frac{d}{dt} [m(t) \cdot \dot{\theta} r^2] = r \cdot \dot{m} v_e \cos \Phi - r \cdot k(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2) \cos \Phi$$

$$\dot{m} \cdot \dot{\theta} r^2 + m(t) \cdot (\ddot{\theta} r^2 + 2\dot{\theta} r \dot{r}) = r \cdot \dot{m} v_e \cos \Phi - r \cdot k(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2) \cos \Phi$$

$$\dot{m} \cdot \dot{\theta} r + m(t) \cdot (\ddot{\theta} r + 2\dot{\theta} \dot{r}) = \dot{m} v_e \cos \Phi - k(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2) \cos \Phi$$

Logo:

$$\dot{v} = - \left(\frac{\mu \cdot \sin \Phi}{r^2} \right) - \left(\frac{k(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2)}{m(t)} \right) + \left(\frac{\dot{m} v_e}{m(t)} \right) - \left(\frac{\dot{m} \dot{r}}{m(t)} + \frac{\dot{m} \cdot \dot{\theta} r}{m(t)} \right)$$

e

$$r\dot{\theta} = v \cos \Phi \Rightarrow \dot{v} \cos \Phi - v \sin \Phi \cdot \dot{\Phi} = \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$$v \sin \Phi \cdot \dot{\Phi} = \left[- \left(\frac{\mu \cdot \sin \Phi}{r^2} \right) - \left(\frac{k(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2)}{m(t)} \right) + \left(\frac{\dot{m} v_e}{m(t)} \right) - \left(\frac{\dot{m} \dot{r}}{m(t)} + \frac{\dot{m} \cdot \dot{\theta} r}{m(t)} \right) \right] \cos \Phi + \dot{r}\dot{\theta}$$

$$+ \left(\frac{k(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2) \cos \Phi}{m(t)} \right) - \left(\frac{\dot{m} v_e \cdot \cos \Phi}{m(t)} \right) + \frac{\dot{m} \cdot \dot{\theta} r}{m(t)}$$

$$v\dot{\Phi} = - \left[\left(\frac{\mu}{r^2} \right) + \left(\frac{\dot{m} \dot{r}}{m(t) \sin \Phi} + \frac{\dot{m} \cdot \dot{\theta} r}{m(t) \sin \Phi} \right) - \frac{v^2}{r} \right] \cos \Phi + \frac{\dot{m} \cdot \dot{\theta} r}{m(t) \sin \Phi}$$

O vetor velocidade radial é a projeção do vetor velocidade em o vetor posição:

$$\Phi = \arccos(\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}})$$

$$\Phi = \arccos\left(\frac{r \cdot \dot{\theta}}{v}\right)$$

O vetor velocidade radial é a projeção do vetor velocidade em o vetor posição:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{\dot{r}}{v}\right)$$