PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMOS

PARTE V

TEORIA DA COMPLEXIDADE

1. Introdução

- A maioria dos problemas conhecidos e estudados se divide em dois grupos:
  - Problemas cuja solução é limitada por um polinômio de grau pequeno
    - Pesquisa binária: $\Theta(\log n)$
    - Ordenação: $\Theta(n \log n)$
    - Multiplicação de matriz: $\Theta(n^{2.81})$
  - Problemas cujo melhor algoritmo conhecido é não-polinomial
    - Problema do Caixeiro Viajante: $\Theta(n^2 2^n)$
    - Knapsack Problem: $\Theta(2^{n/2})$

- Algoritmos polinomiais são obtidos através de um entendimento mais profundo da estrutura do problema
- Um problema é considerado **tratável** quando existe um algoritmo polinomial para resolve-lo
- Algoritmos exponenciais são, em geral, simples variação de pesquisa exaustiva
- Um problema é considerado **intratável** se ele é tão difícil que não existe um algoritmo polinomial para resolve-lo

- Entretanto,
  - Um algoritmo $\Theta(2^n)$ é mais rápido que um algoritmo $\Theta(n^5)$ para $n \leq 20$
  - Existem algoritmos exponenciais que são muito úteis na prática
    - Algoritmo Simplex para programação linear é exponencial mas, executa muito rápido na prática
  - Na prática os algoritmos polinomiais tendem a ter grau 2 ou 3 no máximo e não possuem coeficientes muito grandes n^{100} ou $10^{99}n^2$ NÃO OCORREM

2. Decisão x Otimização

- Em um problema de **otimização** queremos determinar uma solução possível com o melhor valor.
- Em um problema de **decisão** queremos responder “sim” ou “não”.
- Para cada problema de otimização podemos encontrar um problema de decisão equivalente a ele.

Exemplo: Problema do Caixeiro Viajante

  - **Dados**: Um conjunto de cidades $C=\{c_1,c_2,...,c_n\}$, uma distância $d(c_i,c_j)$ para cada par de cidades c_i, $c_j \in C$ e uma constante K.
  - **Questão**: Existe um roteiro para todas as cidades em C cujo comprimento total seja menor ou igual a K?

3. Classe P e NP

- Classe P:
  - Um algoritmo está na Classe P se a complexidade do seu pior caso é uma função polinomial do tamanho da entrada de dados
- Classe NP:
  - Classe de problemas “Sim/Não” para os quais uma dada solução pode ser verificada facilmente
  - Existe uma enorme quantidade de problemas em NP para os quais não se conhece um único algoritmo polinomial para resolver qualquer um deles

Exemplo: Ordenação está em P

```
VOrdenacao(A,n)
inicio
   ordenado ← verdadeiro
   para i ← 1 até n-1 faça
      se A[i] > A[i+1] então
         ordenado ← falso
      fim se
   fim para
   se ordenado = falso então
      escreva "NAO"
   senão
      escreva "SIM"
   fim se
fim
```

- Complexidade: Θ(n)

Exemplo: Coloração de Grafos está em NP

```
VColoracao(G,C,K)
inicio
   colorido ← verdadeiro
   para i ← 1 até |E| faça
      se C[Ei.V1] = C[Ei.V2] então
         colorido ← falso
      fim se
   fim para
   se colorido = verdadeiro e |C| ≤ K então
      escreva "SIM"
   senão
      escreva "NAO"
   fim se
fim
```

- Complexidade: $\Theta(n^2)$, onde n é o número de vértices

4. Algoritmos Não-deterministas

- Um computador não-determinista, quando diante de duas ou mais alternativas, é capaz de produzir cópias de si mesmo e continuar a computação independentemente para cada alternativa
- Um algoritmo não-determinista é capaz de escolher uma dentre as várias alternativas possíveis a cada passo (o algoritmo é capaz de adivinhar a alternativa que leva a solução)
- Utilizam
    - a função escolhe(C): escolhe um dos elementos de C de forma arbitrária.
    - SUCESSO: sinaliza uma computação com sucesso
    - INSUCESSO: sinaliza uma computação sem sucesso
- Sempre que existir um conjunto de opções que levam a um término com sucesso então, este conjunto é sempre escolhido
- A complexidade da função escolhe é $\Theta(1)$

Exemplo: Pesquisa

- Pesquisar o elemento x em um conjunto de elementos A[1..n], n ≥ 1

```
j ← escolhe(A,x)
se A[j] = x então
   SUCESSO
senão
   INSUCESSO
fim se
```

- Complexidade: $\Theta(1)$
- Para um algoritmo determinista a complexidade é $\Theta(n)$

Exemplo: Ordenação

- Ordenar um conjunto A contendo n inteiros n ≥ 1

```
NDOrdenacao (A,n)
inicio
   para i←1 até n faça B[i]=0;
   para i←1 até n faça
   inicio
      j ← escolhe(A,i);
      se B[j] = 0 então
         B[j] = A[i];
      senão
         INSUCESSO
      fim se
   fim para
   SUCESSO
fim
```

- B contém o conjunto ordenado
- A posição correta em B de cada inteiro de A é obtida de forma não-determinista

- Complexidade do algoritmo não-determinista: $\Theta(n)$
- Complexidade do algoritmo determinista: $\Theta(n \log n)$

5. Algoritmos Deterministas X Algoritmos Não-deterministas

- Classe P (*Polynomial-time Algorithms*)
  - Conjunto de todos os problemas que podem ser resolvidos por algoritmos deterministas em tempo polinomial
- Classe NP (*Nondeterministic Polinomial Time Algorithms*)
  - Conjunto de todos os problemas que podem ser resolvidos por algoritmos não-deterministas em tempo polinomial

Como Mostrar que um Determinado Problema está em NP?

- Basta apresentar um algoritmo não-determinista que execute em tempo polinomial para resolver o problema

Ou

- Basta encontrar um algoritmo determinista polinomial para verificar que uma dada solução é válida

Exemplo: Problema de decisão do Caixeiro Viajante está em NP

Algoritmo não-determinista em tempo polinomial

```
NDPCV(G,n,k)
   Soma ← 0
   para i ← 1 até n faça
      A[i] ← escolhe(G,n)
   fim para
   A[n+1] ← A[1]
   para i ← 1 até n faça
      Soma ← Soma + distancia entre A[i] e A[i+1]
   fim para
   se Soma ≤ k então
      SUCESSO
   senão
      INSUCESSO
   fim se
```

- Complexidade do algoritmo não-determinista: $\Theta(n)$
- Complexidade do algoritmo determinista: $O(n^2 2^n)$

Algoritmo determinista polinomial para verificar a solução

```
DPCVV(G,S,n,k)
   Soma ← 0
   para i ← 1 até n faça
      Soma ← Soma + distancia entre S[i] e S[i+1]
   se Soma ≤ k então
      escreva "SIM"
   senão
      escreva "NAO"
```

- Complexidade: $\Theta(n)$

6. Relação entre P e NP

P = NP ou P ≠ NP ?

- Como algoritmos deterministas são apenas um caso especial de algoritmos não-deterministas, podemos concluir que

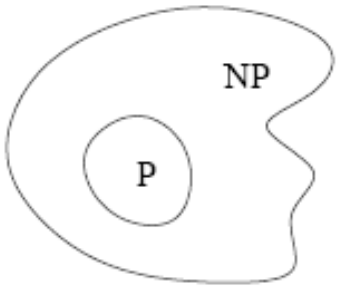
$$P \subseteq NP$$

- O que não sabemos é se

$$P = NP \text{ ou } P \neq NP$$

- Será que existem algoritmos polinomiais deterministas para todos os problemas em NP?
- Por outro lado, a prova de que P ≠ NP parece exigir técnicas ainda desconhecidas

Descrição tentativa de NP



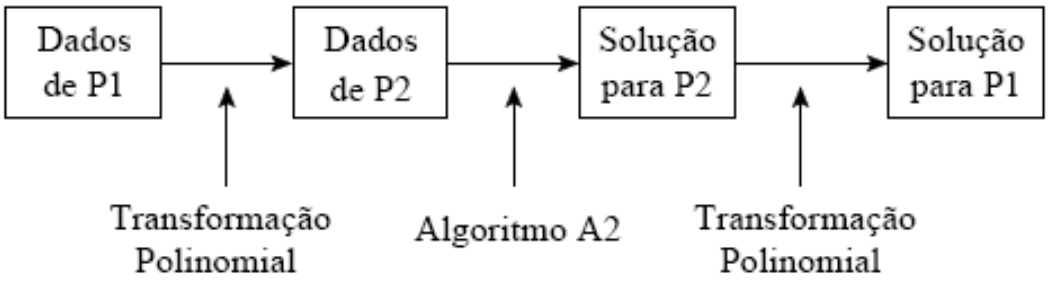
- P está contida em NP
- Acredita-se que NP seja muito maior que P

Consequências

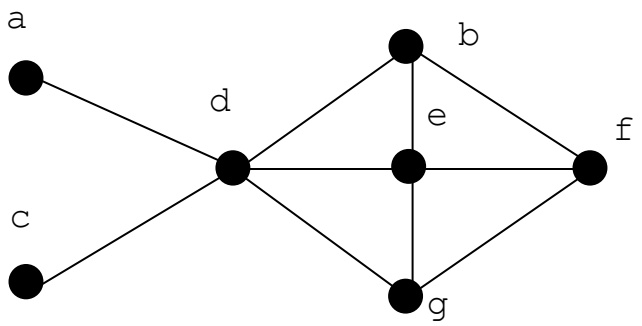
- Existem muitos problemas práticos em NP que podem ou não pertencer a P (não conhecemos nenhum algoritmo eficiente que execute em uma máquina determinista)
- Se conseguirmos provar que um problema não pertence a P, então não precisamos procurar por uma solução eficiente para ele
- Como não existe tal prova sempre há esperança de que alguém descubra um algoritmo eficiente
- Quase ninguém acredita que NP = P
- Existe um esforço considerável para provar o contrário: MAS O PROBLEMA CONTINUA EM ABERTO!

7. Redução Polinomial

- Sejam $\prod_1$ e $\prod_2$ dois problemas “sim/não”.
- Suponha que exista um algoritmo A2 para resolver $\prod_2$. Se for possível transformar $\prod_1$ em $\prod_2$ e sendo conhecido um processo de transformar a solução de $\prod_2$ numa solução de $\prod_1$ então, o algoritmo A2 pode ser utilizado para resolver $\prod_1$
- Se estas duas transformações puderem ser realizadas em tempo polinomial então, $\prod_1$ é polinomialmente redutível a $\prod_2$ ($\prod_1 \propto \prod_2$)



Exemplo de Transformação Polinomial



G(V,E)

- Conjunto independente de vértices
  - V'⊆ V tal que todo par de vértices de V' é não adjacente, ou seja, se v,w ∈ V' ⇒ (v,w) ∉ E
  - a, c, b, g é um exemplo de um conjunto independente de cardinalidade 4
- Clique
  - V'⊆ V tal que todo par de vértices de V' é adjacente, V' é um subgrafo completo, ou seja, se v,w ∈ V' ⇒ (v,w) ∈ E
  - d, b, e é um exemplo de um clique de cardinalidade 3
- Instância I do Clique
  - **Dados**: Grafo G(V,E) e um inteiro K > 0
  - **Decisão**: G possui um clique de tamanho ≥ k?
- Instância f(I) do Conjunto Independente
  - Considere o grafo complementar G' de G e o mesmo inteiro K, f é uma transformação polinomial porque:
    - G' pode ser obtido a partir de G em tempo polinomial
    - G possui clique de tamanho ≥ k se e somente se G' possui conjunto independente de vértices de tamanho ≥ k

Clique ∝ Conjunto Independente

Se existir um algoritmo que resolva o conjunto independente em tempo polinomial, este algoritmo pode ser utilizado para resolver o clique também em tempo polinomial

8. Satisfabilidade

- Definir se uma expressão booleana E contendo produto de adições de variáveis booleanas é satisfatível
  - Exemplo: $(x_1 + x_2) * (x_1 + \overline{x_3} + x_2) * (x_3)$

  onde x_i representa variáveis lógicas
  + representa OR
  * representa AND
  - representa NOT

- Problema: Existe uma atribuição de valores lógicos (V ou F) às variáveis que torne a expressão verdadeira ("satisfaça")?

  x_1=F, x_2=V, x_3=V Satisfaz!

  Exemplo: $(x_1) * (\overline{x_1})$ não é satisfatível

```
NDAval(E,n)
inicio
   para i<-1 até n faça
      xi <- escolhe(true,false)
   se E(x1,x2,...,xn) = true então
      SUCESSO
   senão
      INSUCESSO
   fim se
fim
```

- O algoritmo obtém uma das 2^n atribuições possíveis de forma não-determinista em O(n)

SAT $\in$ NP

Teorema de Cook

- S. Cook formulou a seguinte questão (em 1971): existe algum problema em NP tal que se ele for mostrado estar em P então este fato implicaria que P=NP.
- Teorema de Cook: Satisfabilidade está em P se, e somente se, P = NP
- Isto é: Se existe um algoritmo polinomial determinista para a satisfabilidade então, todos os problemas em NP poderiam ser resolvidos em tempo polinomial

Teorema: SAT está em P sse P = NP

Esboço da prova:

1. SAT está em NP. Logo, se P = NP então SAT está em P.
2. Se SAT está em P então P = NP
3. Prova descreve como obter de qualquer algoritmo polinomial não determinista de decisão A com entrada E uma fórmula Q(A,E) de forma que Q é satisfatível se e somente se A termina com sucesso para a entrada E. Isto significa que ele mostrou que para qualquer problema $\prod \in$ NP, $\prod \propto$ SAT

9. Conjunto NP-completo

- Um problema de decisão $\prod$ é denominado NP-Completo se
  1. $\prod \in$ NP
  2. Todo problema de decisão $\prod' \in$ NP satisfaz $\prod' \propto \prod$

- Apenas problemas de decisão (sim/não) podem ser NP-Completo

Como Provar que um Problema é NP-Completo

1. Mostre que o problema está em NP
2. Mostre que um problema NP-Completo conhecido pode ser polinomialmente transformado para ele
   - Porque:
     - Cook apresentou uma prova direta de que SAT é NP-Completo
     - Transitividade da redução polinomial

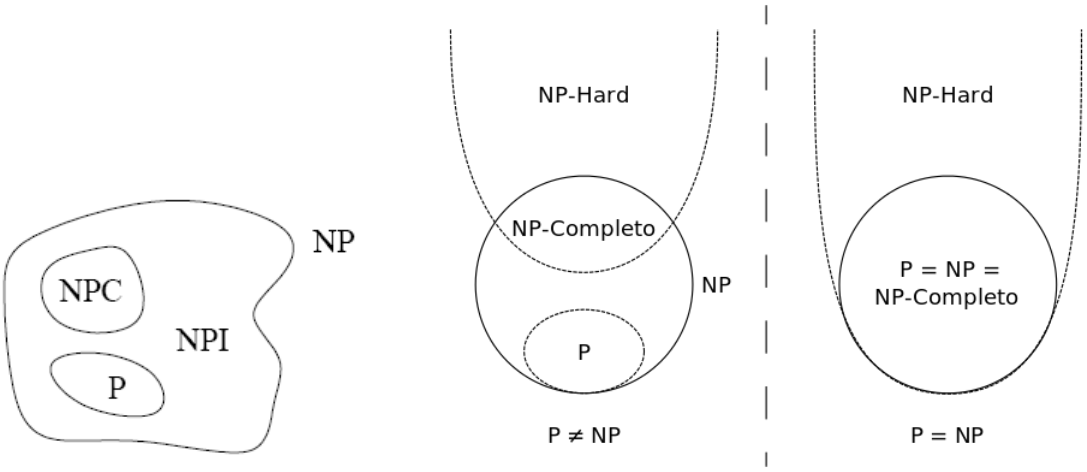
$$SAT \propto \prod_1 \text{ e } \prod_1 \propto \prod_2 \Rightarrow SAT \propto \prod_2$$

10. Conjunto NP-difícil

- Contém os problemas NP-completos
- Cuidado: um problema de otimização para o qual não existe algoritmo de complexidade polinomial é NP-difícil mas não pertence a NP!
- Entretanto, todo problema dessa natureza possui um correspondente de decisão em NP-completo.

Descrição tentativa de NP

Assumindo que P ≠ NP



- Se alguém encontrar um algoritmo polinomial que resolva algum problema NP-Completo então, todos os problemas em NP também terão solução polinomial, ou seja, **P será igual a NP.**
- Se alguém provar que um determinado problema em NP não tem solução polinomial então, todos os problemas em NP-Completo também não terão solução polinomial, ou seja, **P será diferente de NP.**

Qual é a Contribuição Prática da Teoria de NP-Completo?

- Fornece um mecanismo que permite descobrir se um novo problema é “fácil” ou “difícil”
- Se encontrarmos um algoritmo eficiente para o problema, então não há dificuldades. Senão, uma prova de que o problema é NP-Completo nos diz que se acharmos um algoritmo eficiente então estaremos obtendo um grande resultado.

Resumo

- Redução polinomial: poder transformar um problema A em outro B e transformar a solução de B em solução de A em tempo polinomial.

- Classe P: Problemas para os quais existem soluções deterministas polinomiais. Como são um subconjunto da classe NP (uma vez que algoritmos determinísticos são subconjunto dos não-determinísticos), esses problemas são sempre associados a um problema correspondente de decisão. Exemplo: O problema de ordenação está associado ao problema de se decidir se uma determinada sequência está ordenada.

- Classe NP: Problemas de decisão que incluem a classe P, a classe NPI e a classe NP-completo. Problemas que não estão na classe P, mas pertencem à NP não têm solução polinomial conhecida. Todos eles devem poder ser resolvidos por um algoritmo não-determinista polinomial ou poder ter sua solução verificada por um algoritmo determinista polinomial.

- Classe NP-completo: Subconjunto de problemas de NP para os quais existe pelo menos um outro problema em NP que pode ser polinomialmente transformado neles. Assim, todos os problemas em NP-completo devem ser redutíveis entre si. Contém os problemas de decisão sem solução polinomial determinística conhecida. Por estarem em NP, devem poder ser resolvidos por um algoritmo não-determinista polinomial ou poder ter sua solução verificada por um algoritmo determinista polinomial.

- Classe NP-difícil: Conjunto com os problemas que são obtidos pela transformação polinomial de um outro problema que está em NP-completo. Contém problemas de otimização sem solução polinomial determinística conhecida e seus correspondentes problemas de decisão, mas também outros problemas difíceis. Os problemas de decisão correspondentes (NP-completos) ficam na interseção entre NP-difícil e NP. Os que não são de decisão ficam fora de NP, para os quais não se conhece solução polinomial determinística nem não-determinística.

- Classe NPI: Problemas de decisão associados aos problemas que não são de otimização, mas para os quais também não se conhece solução polinomial determinística. Exemplo: fatoração de grandes números não é um problema de otimização. Também não são de decisão mas possuem um correspondente de decisão e podem ser verificados por algoritmos determinísticos polinomiais, logo estão em NP.

- Satisfabilidade (SAT) é um problema de decisão pertencente a NP (provavelmente apenas em NP-completo)

Reduções:

- Todo problema em NP se reduz à SAT (Cook)

- NP-completo se reduz a NP-difícil, por definição (logo todos os NP-completos se reduzem entre si).

- SAT se reduz a todo problema NP-difícil (logo também a todo problema NP-completo)

- O problema da parada é NP-difícil pois é indecidível (logo não pode pertencer a NP) mas SAT, que pertence a NP-completo se reduz a ele.

- Não se conhece redução polinomial de NP-completo para NPI, nem para P.

- Se existir uma redução de NP-completo para P, teremos que P=NP

11. Algoritmos Aproximados

- Problemas de otimização que estão na classe NP não possuem soluções gerais eficientes.
- Algoritmos aproximados podem ser usados para se encontrarem soluções próximas do ótimo, em tempo polinomial.
- Estes algoritmos possuem diferentes níveis de sofisticação, entretanto, a maioria deles constitui-se de algoritmos gulosos baseados em alguma heurística.

- Algoritmos aproximados:
    - Algoritmos usados normalmente para resolver problemas para os quais não se conhece uma solução polinomial
    - Devem executar em tempo polinomial dentro de limites “prováveis” de qualidade absoluta ou assintótica

- Heurísticas:
    - Heurísticas são regras de bom senso, baseadas na experiência e na forma como resolvemos problemas naturalmente.
    - Algoritmos que têm como objetivo fornecer soluções sem um limite formal de qualidade, em geral avaliado empiricamente em termos de complexidade (média) e qualidade de soluções
    - É projetada para obter ganho computacional ou simplicidade conceitual, possivelmente ao custo de precisão

A) Exemplo: Problema do Caixeiro Viajante: visitar n cidades, passando por cada uma única vez, saindo e chegando de

uma mesma cidade. Todas as cidades estão interligadas e deseja-se a solução de menor custo.

- Heurística do caminho mais curto primeiro
- Heurística do caminho mais longo primeiro

B) Exemplo: Problema do Empacotamento (Bin Packing):
Utilizar o menor número possível de caixas para empacotar n objetos de tamanhos variados.

- Heurística do maior primeiro
- Heurística do melhor primeiro

C) Exemplo: Mochila
- Colocar os objetos com maior valor/tamanho primeiro

D) Exemplo: Coloração
- Atribuir cor ao vértice com maior grau primeiro