

1. 问题描述

港口设有 $|\mathcal{J}|$ 个泊位和 $|\mathcal{K}|$ 艘拖船，在调度周期 $\mathcal{T} = 1, 2, \dots, T$ 内有 $|\mathcal{I}|$ 艘船舶申请靠泊。需为每艘船舶分配泊位、靠泊时刻及进/出港拖船服务，以最小化总调度成本。部分船舶允许不分配。

2. 符号定义

2.1 集合与索引

- $\mathcal{I} = 1, \dots, m$: 船舶集合，索引 i
- $\mathcal{J} = 1, \dots, n$: 泊位集合，索引 j
- $\mathcal{K} = 1, \dots, K$: 拖船集合，索引 k
- $\mathcal{T} = 1, \dots, T$: 时间集合，索引 t

2.2 参数

船舶-设施匹配相关：

- S_i : 船舶 i 的等级（统一的大小\服务需求等级）
- C_j : 泊位 j 的服务能力等级
- G_k : 拖船 k 的服务能力等级

时间相关：

- ETA_i : 船舶 i 的预期到达时段
- D_i : 船舶 i 的靠泊作业时长（连续时段数）
- τ_i^{in} : 船舶 i 的进港拖船服务时长
- τ_i^{out} : 船舶 i 的离港拖船服务时长
- ρ^{in} : 拖船完成进港服务后的准备时间
- ρ^{out} : 拖船完成离港服务后的准备时间
- Δ_i^{early} : 船舶 i 允许的最大提前时段数
- Δ_i^{late} : 船舶 i 允许的最大延迟时段数

成本相关：

- α_i : 船舶 i 的优先级权重
- β_i : 船舶 i 的单位等待成本
- γ_i : 船舶 i 的JIT偏差单位成本
- c_k : 拖船 k 的单位时段使用成本

系统参数：

- ϵ_{time} : 时序约束允许的最大时间偏差
- M : 大数参数（用于惩罚或逻辑放松）
- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$: 目标函数中的加权系数

2.3 决策变量

- $x_{ijt} \in \{0, 1\}$: 若船舶 i 在时段 t 开始在泊位 j 靠泊且 $C_j \geq S_i$ ，则取1
- $y_{ikt}^{in} \in \{0, 1\}$: 若拖船 k 在时段 t 开始为船舶 i 提供进港服务且 $G_k \geq S_i$ ，则取1
- $y_{ikt}^{out} \in \{0, 1\}$: 若拖船 k 在时段 t 开始为船舶 i 提供离港服务且 $G_k \geq S_i$ ，则取1
- $u_i^{early} \geq 0$: 船舶 i 相对于ETA的提前时间
- $u_i^{late} \geq 0$: 船舶 i 相对于ETA的延迟时间

3. 数学模型

3.1 目标函数

$$\min Z = \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3 + \lambda_4 Z_4$$

未服务惩罚：

$$Z_1 = \sum_{i \in \mathcal{I}} M \cdot \alpha_i \left(1 - \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{t \in \mathcal{T}} x_{ijt} \right)$$

在港总时间成本：

$$Z_2 = \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i \beta_i \left[\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t \in \mathcal{T}} (t + \tau_i^{out}) y_{ikt}^{out} - \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t \in \mathcal{T}} t \cdot y_{ikt}^{in} \right]$$

ETA偏差成本：

$$Z_3 = \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i \gamma_i \left(u_i^{early} + u_i^{late} \right)$$

拖船使用成本：

$$Z_4 = \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{t \in \mathcal{T}} c_k (\tau_i^{in} y_{ikt}^{in} + \tau_i^{out} y_{ikt}^{out})$$

3.2 约束条件

每艘船最多分配一次：

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{t \in \mathcal{T}} x_{ijt} \leq 1, \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (1)$$

进港拖船服务约束：

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t \in \mathcal{T}} y_{ikt}^{in} = \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{t \in \mathcal{T}} x_{ijt}, \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (2)$$

离港拖船服务约束：

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t \in \mathcal{T}} y_{ikt}^{out} = \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{t \in \mathcal{T}} x_{ijt}, \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (3)$$

船舶-泊位匹配约束：

$$x_{ijt} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} : C_j < S_i \quad (4)$$

船舶-拖船匹配约束：

$$y_{ikt}^{in} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}, k \in \mathcal{K}, t \in \mathcal{T} : G_k < S_i \quad (5)$$

$$y_{ikt}^{out} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}, k \in \mathcal{K}, t \in \mathcal{T} : G_k < S_i \quad (6)$$

每艘船最多一次进港服务：

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t \in \mathcal{T}} y_{ikt}^{in} \leq 1, \quad i \in \mathcal{I} \quad (7)$$

每艘船最多一次离港服务：

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t \in \mathcal{T}} y_{ikt}^{out} \leq 1, \quad i \in \mathcal{I} \quad (8)$$

进港时序约束：

$$0 \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{t \in \mathcal{T}} t \cdot x_{ijt} - \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t \in \mathcal{T}} (t + \tau_i^{in}) \cdot y_{ikt}^{in} \leq \epsilon_{time} \cdot \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{t \in \mathcal{T}} x_{ijt}, \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (9)$$

离港时序约束：

$$0 \leq \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t \in \mathcal{T}} t \cdot y_{ikt}^{out} - \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{t \in \mathcal{T}} (t + D_i) \cdot x_{ijt} \leq \epsilon_{time} \cdot \sum_{j \in \mathcal{J}} \sum_{t \in \mathcal{T}} x_{ijt}, \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (10)$$

泊位容量约束：

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{\tau=\max(1, t-D_i+1)}^t x_{ij\tau} \leq 1, \quad \forall j \in \mathcal{J}, t \in \mathcal{T} \quad (11)$$

拖船容量约束（考虑准备时间）：

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \left(\sum_{\tau=\max(1, t-\tau_i^{in}-\rho^{in}+1)}^t y_{ik\tau}^{in} + \sum_{\tau=\max(1, t-\tau_i^{out}-\rho^{out}+1)}^t y_{ik\tau}^{out} \right) \leq 1, \quad \forall k \in \mathcal{K}, t \in \mathcal{T} \quad (12)$$

拖船服务边界约束：

$$y_{ikt}^{in} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}, k \in \mathcal{K}, t < ETA_i - \Delta_i^{early} \text{ 或 } t > ETA_i + \Delta_i^{late} \quad (13)$$

ETA偏差线性化约束：

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{t \in \mathcal{T}} t \cdot y_{ikt}^{in} = ETA_i + u_i^{late} - u_i^{early}, \quad \forall i \in \mathcal{I} \tag{14}$$

变量定义域约束：

$$\begin{aligned} x_{ijt}, y_{ikt}^{in}, y_{ikt}^{out} &\in \{0, 1\}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{K}, t \in \mathcal{T} \\ u_i^{early}, u_i^{late} &\geq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I} \end{aligned} \tag{15}$$