第 1 章

質点の運動・速さ・加速度

力学とは、身近な物体の運動から天体の運行までを、少ない前提から統一的に説明しようとする学問です。

1.1 質点の運動

デカルト以降、僕たちはこの世界が三次元だと理解しています。どの物体も、どこかに基準を決めれば、3 つの実数の組でその位置を絶対的に決めることができるとしています。数学的には、物体は

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

の元によって表すことができます。

物体を強く押したり、持ち上げて手を放すなどすると、時間経過とともにその位置を変えます。この発想で、質点の運動というものを以下のように定義できます。

定義 1.1. $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ を閉区間とする。このとき、連続写像 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ を、閉区間 I における**質点の運動**といい、(I, γ) で表す。

もちろん「時間って何？」とか「空間って本当に 3 次元なの？」という疑問はありつつ、ここでは立ち入りません。あくまで「こういうモデルで話を進めてみましょうよ」という立場でやらせてもらいます。

また、質点の運動が明らかに二次元平面や一次元の直線に制限される場合、最初から γ の値域を $\mathbb{R}^2$ あるいは $\mathbb{R}$ に取っておくことがあります。

1.2 質点の速さ

車にはスピードメーターが搭載されていて、これを見ればおよそ何時間後に何 km 進むかが分かります。例えば 40km/h という数値を維持すれば、1 時間後には 40km 進んでいます。

逆に考えると、「移動距離」と「その距離を移動するのにかかった時間」という量は測定しやすいです。これの商を「速さ」として定義しておいて、速さを予測できる体系が作れれば実用上便利そうです。僕たちの質点の定義から、この「移動距離の変化の割合」として速さを次のように定義できます。

定義 1.2. (I, γ) を閉区間 I 上の質点の運動とする。$x, y \in I$、$x \neq y$ とする。このとき、以下の量を時刻 x から y への質点の**平均の速さ**という。

$$\frac{\gamma(y) - \gamma(x)}{y - x}$$

しかし、速さを定義するために二つの実数 x, y が必要というのは面倒です。特に、日常的な感覚として「一瞬の間にも速さはある」ような気がします。ここにおいて、y を**限りなく x に近づけた時の速さ**、つまり極限を知りたいという動機が生まれます。

しかし極限

$$\lim_{y \to x} \frac{\gamma(y) - \gamma(x)}{y - x}$$

が存在するかどうかは非自明です。次のざっくりした例で、極限が存在しない可能性を垣間見てみましょう。

例題 1.3. 関数

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; t \mapsto |t|$$

を考える。このとき、$x = 0$ とすると

$$\frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = \frac{|y|}{y} = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases}$$

ゆえに右極限は 1 で、左極限は -1 となり左右の極限が異なる。

ここで「右極限」および「左極限」という言葉が出てきましたので、定義を述べておきましょう。といっても、高校数学で学習済みのものを $\varepsilon - \delta$ で厳密に書き直したにすぎません。

定義 1.4. f を関数とする。$a \in \mathbb{R}$ における f の右極限が L であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、任意の $x \in I$ に対して

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

を満たす時をいう。この様子を、以下の記号であらわす

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = L$$

$a \in \mathbb{R}$ における f の左極限が L であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、任意の $x \in I$ に対して

$$-\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

を満たす時をいう。この様子を、以下の記号であらわす

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = L$$

また、上の例題では次の結果を認めていたので証明しましょう。

定理 1.5. 実数 a を含むある区間で定義された関数 f について、$\lim_{x \to a} f(x)$ が存在するための必要十分条件は、$x = a$ における左右極限が存在して一致することである。

証明. (条件が必要であること) 仮定から、ある実数 L が存在して、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ をうまくとれば、

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

が成り立つ。$0 < |x-a| < \delta$ は $0 < x-a < \delta$ かつ $-\delta < x-a < 0$ と同値であるから、すなわち

$$\begin{aligned} 0 < x-a < \delta &\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \\ -\delta < x-a < 0 &\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

ゆえに f の左右極限が存在して、それらは L で一致する。

(条件が十分であること) 仮定から、ある実数 L が存在して、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\delta_1, \delta_2 > 0$ が存在して、

$$\begin{aligned} 0 < x-a < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \\ -\delta_2 < x-a < 0 &\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ とおけば、

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta &\Leftrightarrow -\delta < x-a < \delta, x-a \neq 0 \\ &\Leftrightarrow -\delta < x-a < 0 \text{ or } 0 < x-a < \delta \end{aligned}$$

ところが δ の定義から $-\delta_2 < -\delta$、$\delta < \delta_1$ が成り立つから、

$$\begin{aligned} 0 < x-a < \delta &\Rightarrow 0 < x-a < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \\ -\delta < x-a < 0 &\Rightarrow -\delta_2 < x-a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

いずれにしても、$0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - L| < \varepsilon$ が示せた。 □

左右からの極限を考えるのが煩わしいので、関数の定義域を拡張して考えることもあります。うれしいことに、次のような言い換えが存在します。

定理 1.6. $I = [a, b]$ を閉区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を連続写像とする。このとき、極限

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在することと、以下の条件が満たされることは必要十分である。点 a を含むある開区間 I_a と、関数 $g : I_a \to \mathbb{R}$ が存在して、

- $f|_{I \cap I_a} = g|_{I \cap I_a}$
- g は $a \in I_a$ で微分可能

証明. 条件が十分であることは明らかなので、必要であることを証明する。仮定より、極限

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

が存在する。ここで、$g : (-\infty, b]$ を

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in (a, b)) \\ f(a) + L \cdot (x - a) & (x \leq a) \end{cases}$$

で定義すると、g は $(-\infty, b)$ 上で連続である ($\because$ 貼り合わせの補題)。また a で微分可能であることが次のように証明できる。$(f(x) - f(a))/(x - a)$ の右極限が存在することから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| < \varepsilon$$

ゆえに $0 < |x - a| < \delta$ のとき、

$$\begin{aligned} &\left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} - L \right| \\ =&\left| \frac{g(x) - f(a)}{x - a} - L \right| \\ =&\begin{cases} \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - L \right| & (x > a) \\ \left| \frac{L \cdot (x-a)}{x-a} - L \right| & (x < a) \end{cases} \\ =&\begin{cases} \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - L \right| & (x > a) \\ 0 & (x < a) \end{cases} \\ <&\epsilon \end{aligned}$$

$\square$

当然ながら同様に、次が成り立ちます

定理 1.7. $I = [a, b]$ を閉区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を連続写像とする。このとき、極限

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

が存在することと、以下の条件が満たされることは必要十分である。点 b を含むある開区間 I_b と、関数 $g : I_b \to \mathbb{R}$ が存在して、

- $f|_{I \cap I_b} = g|_{I \cap I_b}$
- g は $b \in I_b$ で微分可能

これで、どんな区間であっても、その区間上の関数が微分可能かどうかを気楽に論じることができます。

定義 1.8. I を区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を (連続とは限らない) 関数、$x \in I$ とする。このとき、極限

$$f'(x) := \lim_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

が存在するとき、$f'(x)$ を f の x における**微分係数**、あるいは単に**微分**という。

微分係数の書き方には複数あり、

$$\dot{f}(x) = f'(x) = \frac{df}{dx} = D_x f$$

などがあります。物理でよく使うのは

$$\dot{f}(x)$$

で、数学の、とくに一変数関数の微分は

$$f'(x)$$

と書くことが多い気がします。しかし、「どの変数で微分してるか」というのをはっきりさせたいときは

$$\frac{df}{dx}$$

を使うのが良い気がします。じゃあ $D_x f$ はいつ使うかというと、関数解析とか代数解析という分野でよく見かける気がします。結構その時の気分で書き分けたりしますが、できれば慣れてください。

…さて、一点のみならず、任意の点で微分可能な質点というのは行儀が良さそうです。

定義 1.9. I を区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を (連続とは限らない) 関数とする。I **上微分可能である**とは、任意の $x \in I$ に対して、微分係数 $f'(x)$ が存在する時を言う。このとき、関数

$$f' : I \to \mathbb{R}$$

を、f の**導関数**、あるいは単に**微分**という。

話がそれましたが、極限が存在するような運動に限って、いわば「瞬間の速さ」を定義することができます。

定義 1.10. (I, γ) を質点の運動、$t \in I$ とする。このとき、極限

$$\dot{\gamma}(t) := \lim_{y \to t} \frac{\gamma(t) - \gamma(y)}{t - y}$$

が存在するとき、γ は t で**微分可能**であるといい、極限の値 $\dot{\gamma}(t)$ を**微分係数**、あるいは単に**微分**という。あるいは $\dot{\gamma}(x)$ を質点の運動 γ の時刻 x における**速さ**という。

定義 1.11. (I, γ) を質点の運動とする。任意の $t \in I$ に対して微分係数 $\dot{\gamma}(t)$ が存在するとき、γ は I で**微分可能**であるといい、写像

$$\dot{\gamma} : I \to \mathbb{R}$$

を γ の**導関数**、あるいは単に**微分**という。

1.3　質点の加速度

ボールを持ち上げて、高いところから手を離すと落ちます。ただ落ちるだけじゃなく、だんだん速さが速くなっていきます。他にも例えば、ボールに紐をつけてブンブン回すと、速さの絶対値自体は時間変化しなくても、向きがグリグリ変わっています。そういった「速さの変化量」も実は目に見える量です。今回はいきなり微分で定義しましょう。

定義 1.12. (I,γ) を質点の運動、$x \in I$ とする。また、γ は x のある開近傍で常に微分可能であるとする。このとき、極限

$$\ddot{\gamma}(x) := \lim_{y\to x} \frac{\dot{\gamma}(y)-\dot{\gamma}(x)}{y-x}$$

が存在するとき、γ は x で**二階微分可能**であるという。$\ddot{\gamma}(x)$ を質点の運動 γ の時刻 x における**加速度**という。

定義 1.13. (I,γ) を質点の運動とする。任意の $x \in I$ に対して、極限

$$\ddot{\gamma}(x) := \lim_{y\to x} \frac{\dot{\gamma}(y)-\dot{\gamma}(x)}{y-x}$$

が存在するとき、γ は I で**二階微分可能**であるといい、写像

$$\ddot{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$$

を γ の**二階導関数**あるいは単に**二階微分**という。

今まで質点 γ は閉区間 I から $\mathbb{R}^3$ への連続写像として定義していましたが、ここにきて γ は二階微分可能であるして再定義しましょう。

定義 1.14. $I := [a,b] \subset \mathbb{R}$ を閉区間とする。このとき、連続写像 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ が I 上で二階微分可能であるとき、区間 I における**質点の運動**といい、(I,γ) で表す。

第 2 章

運動の法則

質点に対して、いくつかの仮定 (公理) を追加します。力学はここから始まるのです。まずは運動の状況を見ていきましょう。

2.1 簡単な運動

最も簡単な運動は「静止」している状態でしょう。

定義 2.1. 質点の運動 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ が定値写像になっているとき、質点 γ は**静止**しているという。静止している質点の運動は、静止であると言い表す。

静止の次に簡単な運動は、速さが変化しない運動、つまり「等速直線運動」でしょう。

定義 2.2. 質点の運動 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ に対し、$\dot{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ が定値写像になっているとき、質点 γ は**等速直線運動**しているという。等速直線運動している質点の運動は、等速直線運動であると言い表す。

質点が静止しているならば、等速直線運動しているということが言えます。

定理 2.3. 質点 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ の運動が静止であるならば、その運動は等速直線運動である。

証明. γ は静止しているので、任意の 2 時刻 $t_0, t \in I$ において $\gamma(t) = \gamma(t_0)$。ゆえに

$$\dot{\gamma}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} 0 = 0$$

よって γ は等速直線運動である。 □

また、等速直線運動する質点の加速度 $\ddot{\gamma}$ は 0 への定値写像であることが同値であることも言えます。ここには**平均値の定理**を用いるのですが、それはのち (§ 3.4) に証明しましょう。いったん平均値の定理は認めて、以下を証明しましょう。

定理 2.4. 質点 γ の運動が等速直線運動であることと、任意の $t_0 \in I$ に対して $\ddot{\gamma}(t_0) = 0$ は同値である。

証明. 質点 γ の運動が等速直線運動であるとすると、任意の $t, t_0 \in I$ に対して、$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t_0)$。ゆえに

$$\ddot{\gamma}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t_0)}{t - t_0} = 0$$

ゆえに $\ddot{\gamma}(t_0) = 0$ $({}^\forall t_0 \in I)$。

逆に $\ddot{\gamma}(t_0) = 0$ $({}^\forall t_0 \in I)$ とする。γ を成分ごとに分けて、$\gamma(t) := (\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t))$ で考える。このとき任意の $t_1, t_2 \in I$、$t_1 < t_2$ に対して、平均値の定理から、ある $c \in (t_1, t_2)$ が存在して、

$$\frac{\dot{\gamma}_i(t_1) - \dot{\gamma}_i(t_2)}{t_1 - t_2} = \ddot{\gamma}_i(c) = 0, \quad (i = x, y, z)$$

をみたす。すなわち $\dot{\gamma}_i(t_1) = \dot{\gamma}_i(t_2)$ なので、$\dot{\gamma}_i(t)$ は定数写像となる。 □

2.2　力の定義

「力」という概念の定義は非常に難しいものです。アリストテレスは「槍を投げると、飛んでいる間は運動方向に力が働き続ける。その力が徐々に失われて行って、しまいには地面に落ちる」というような考え方をしていたようです。

実際のところ「力」って何なのさ？という問題は哲学の分野で語ってもらうことにして、物理学ではとにかく**定量化して計算できること**を重視します。言い換えれば、そのように現実世界を「モデリング」して、定量的な計算や未来予測を可能にしようぜ、というのがニュートンの思想の一端ではないでしょうか。

2.2.1　身近な例

椅子を引いたり、押し戻したりするとき、僕たちは「椅子に力をかけた」と思うでしょう。これはなぜそう思うのでしょうか？いくつか考えられる理由がありますが、大きく分けて以下の二種類あると思います。

- それなりに筋肉を使って、疲れるから
- 椅子が動いたから

どちらも一理あります。

では、自由落下するボールはどうでしょうか？現代人は「地球からの重力が働いている」と理解していますが、ニュートン以前の科学者の気持ちになってみると、上記の「椅子の例」とは若干異なっているように思うかもしれません。というのも、力というのは、人間ないし動物などが体を触れてものを動かすときに働くように思えるからです。

しかしこの自由落下するボールにも、椅子の例と同様の考え方で、力が働いていると考える方法もあるにはあります。これらはどちらも

速度が時間変化している (=加速度が生じている)

のです。

椅子の例だと、静止している状態 (つまり速度 0 の状態) から力をかけることで、速度に変化を与え、結果としてその位置を移動させています。自由落下するボールはもっと単純で、観測事実として時間に比例して落下速度が速くなっていくことが分かっていました。

結局のところ、自由落下するボールには力が働いているのか、いないのか？

いったん働いているとして考えてみて、うまくいったら儲けもん！

こういう考え方をしてみましょう。もし自由落下するボールにも力が働いているのであれば、力とは質点の運動に対して、**その速度を変化させる原因になるもの**であるはずです。

仮にそうであるとして、どうすれば「うまくいった」と言えるでしょうか？物理学は常に、先行研究や実験事実をフォローすることを求められます。先行研究や実験事実をフォローすれば、うまくいったと言えるでしょう。

2.2.2　天体の運行

ニュートンの時代には、天体の観測技術が十分高まっており、星々の運行に関する膨大な研究データが存在していたようです。それらのデータから、ケプラーは有名な 3 法則を導きました。ニュートンは力学を考えるに当たって、おそらく、ケプラーの法則のことを考えていたんだと思います。

先ほどの身近な例で言った、「自由落下するボールに力が働いている」と仮定するとしたら、加速度の変化は力の存在を意味します。ケプラーの第一法則によれば、惑星は太陽の周りを楕円運動しており、これは加速度が変化する運動なので、惑星には、どこからかの力が働いているはずです。またこの楕円運動の焦点の一つが太陽なので、惑星にかかっている力の有力候補は、太陽ぐらいしかないです。あとはこの力の向きや大きさを見積もって、ケプラーの法則に近づけられれば！？あるいはさらに、同じ法則で自由落下するボールの運動も記述できれば、「うまくいった」と言えるんじゃないでしょうか？

…「ニュートンのりんご」って、こういう感じの話なんじゃないですかね、知らんけど。

2.2.3　力の定義

もし太陽と惑星の関係と同じように、自由落下するボールの運動も記述できるとするならば、ボールに対する「太陽」はなんでしょう？それはもう「地球」しかないでしょう。いずれにしても、力というのは質点単体で考えることはできず、二つ以上の質点の相互作用のことを力と呼んでいるのかもしれません。**いや、そういうことにしましょう**。そういえば椅子を引く例にしても「手」と「椅子」の間の関係で成り立つ現象ですし、振り子をブラブラさせるのだって「手」と「紐」と「振子」と「重力」の間の現象です。

以上を踏まえて、力は次のように、ふわっと定義します。

定義 2.5. 力とは、質点間の相互作用を定量的に表すベクトル量である。

「力」を「相互作用」に言い換えただけのように見えますが、「定量的なベクトル量」ということにしたことに意味があります。これは「**力の線形和**」を考える妥当性があるよと宣言したことにもなります。そのため、質点に複数の力がかかっているとき、その力の総和を「**合力**」と言い表すこともあります。

また、「加速度を変化させるものを力と呼びたい」という考えから、次のような力も考えなければならないです。自由落下するボールは加速度を変化させるので、何かの力が働いているとみなすことになりましょう。これを仮に**重力**と呼びましょう。しかし机に置いてあるボールは、加速度を変化させません。これはおそらく、空中では働いている力が、机の上にボールを置いたことで重力と釣り合う力が働いていることになります。高校時代にこれは、机からの**垂直抗力**と呼んでいたものです。このように「質点の運動を束縛する力」が働いていることもあります。これをそのまま、**束縛力**と呼びます。

さらにもう一つ、**質点の速さそのものによって受ける力**があります。身近な例であれば、雨の落下時にかかる空気摩擦です。空気摩擦は雨の落下が速くなればなるほど強くかかってしまうような気がします。雨の例のほかにも、電磁気学におけるローレンツ力というのがあり、磁場中を荷電粒子が動くと、思わぬ方向に力が働くのです。

このように色々な力があるんですが、大きく分けて 2 種類あると考えましょう。

- 外力 F とは、$I \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ の開集合 U から $\mathbb{R}^3$ への連続写像
- 束縛力 F_c は、観測事実から逆算ないし予測して追加されるベクトル量

質点 (I, γ) に外力 F がかかっている様子は、

$$F(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t))$$

で得られます。束縛力に関しては、少々面倒なので、暫くの間は束縛力はないものと考えて差し支えありません。

ちなみに、今まで「力によって加速度が変わる」とも取れる言い方もしていましたが、実際のところ本当にそうなのかはわかりません。この節の冒頭にも述べたように、「加速度が変わると力が働いたように『見える』」というだけで、力を定義したに過ぎないです。人間がそう感じるというだけで、自然法則が本当にそう動いているかは分かりません。ここまで言っておいてなんですが、実際のところ力とは一体何なのでしょうか？

2.3　運動の法則

力の定義が済んだところで、力と質点の運動の関係についての法則を定義していきましょう。

2.3.1　ガリレイの相対性原理と慣性系

さて僕たちはこれから、質点と力の間の関係を定式化して、質点の未来予測を可能とする理論を建てようとしています。その前に一点、力の定義の穴を埋めておきましょう。

力の定義は、「加速度が変化するときに力が働いているように感じる」という人間本位の考えに基づいて力を定義しましたが、ある見方をすると「ある人から見ると加速度が変化するように見え、別の人から見ると加速度が変化していないように見える」ということが起こりえることを考慮していませんでした。例えばメリーゴーランドに乗っている人から見て静止している質点は、メリーゴーランドの外から見ている人には回転運動という加速度が変化する運動をしています。これでは力の定義というのが、見ている人、すなわち**観測者**によって異なってしまいます。

観測者がどのような運動をしているかによって、基本的な運動法則の記法が変わってしまっては、何かをすり抜けてしまったように感じませんでしょうか？じゃあ観測者の運動に依存して、それぞれ運動法則を書けばいいでしょうか？いや、それも…カッコつけて言えば、オッカムの剃刀的に違和感があります。

そこで、「メリーゴーランドに乗ってる」というような奇妙な状況は一旦排除して、基礎的な運動法則を打ち立てましょう。力学はもともと、天体の運行を調べるための、自然科学の数学的諸原理を記述するためにニュートンが作り出したものなのです。ということで、まず宇宙に対して静止している系というものの存在を仮定します。

定義 2.6. 射影

$$
\begin{aligned}
t &: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3; (t,(x,y,z)) \mapsto t \\
x &: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3; (t,(x,y,z)) \mapsto x \\
y &: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3; (t,(x,y,z)) \mapsto y \\
z &: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3; (t,(x,y,z)) \mapsto z
\end{aligned}
$$

の組 (t,x,y,z) を**標準慣性系**とよぶ。

次にガリレイ変換を定義します。

定義 2.7 (ガリレイ変換と慣性系)**.** (t,x,y,z) を標準慣性系、t' を実数、$(t_0,x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^4, (v_x,v_y,v_z)\in\mathbb{R}^3$ をベクトル、また

$$
R := \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}
$$

は回転行列[*1]であるとする。このとき、写像

$$
\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ v_2 & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ v_3 & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}
$$

を**ガリレイ変換**といい、ガリレイ変換後の座標系

$$
\begin{aligned}
t' &= t + t_0 \\
x' &= v_1 t + R_{11}x + R_{12}y + R_{13}z + x_0 \\
y' &= v_2 t + R_{21}x + R_{22}y + R_{23}z + y_0 \\
z' &= v_3 t + R_{31}x + R_{32}y + R_{33}z + z_0
\end{aligned}
$$

を**慣性系**という。

[*1] R をこの行列としたとき、縦に並んでいる 3 本のベクトルが互いに直交していて長さが 1、かつ、行列式が 1 なものを (3 次の) 回転行列といいます。具体的には

$$
\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix},
$$

によって生成されます。

例題 2.8. 簡単のため回転行列を $R = 1$(単位行列)、$v_2 = v_3 = 0$ とする。このとき、ガリレイ変換は

$$
\begin{aligned}
t' &= t + t_0 \\
x' &= v_1 t + x \\
y' &= y \\
y' &= z
\end{aligned}
$$

となります。これは、x 軸上をトコトコ走る列車に乗った実験室をイメージしたものになっています。

「力学の法則は慣性系の違いにおいて不変なように記述すべし」と高らかに宣言するのが、ガリレイの相対性原理です。

定義 2.9 (ガリレイの相対性原理)**.** 力学の諸法則は、慣性系の違いにおいて理論の形を変えないべきである。

よく磨いた剃刀ですな。まあ、あとでアインシュタインがひっくり返すんですけどね。

2.3.2　慣性の法則

慣性系やガリレイの相対性原理のおかげで、慣性の法則を慣性系の範囲で語ることができます。まず、自由粒子というものを定義します。

定義 2.10. ある慣性系において、合力 0 の力がかかっている質点を**自由粒子**と呼ぶ。

定義 2.11 (慣性の法則)**.** 自由粒子は (静止を含めた) 等速直線運動をする。数式で書けば、ある慣性系 (t, x, y, z) において、自由粒子 (I, γ) は

$$\ddot{\gamma}(t) = 0$$

を満たす。

慣性の法則がガリレイの相対性原理を満たしていることを確認しましょう。質点の運動に関してガリレイ変換をすると

$$
\begin{pmatrix} t' \\ \gamma'_x(t') \\ \gamma'_y(t') \\ \gamma'_z(t') \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} t + t_0 \\ v_1 t + R_{11}\gamma_x(t) + R_{12}\gamma_y(t) + R_{13}\gamma_z(t) + x_0 \\ v_2 t + R_{21}\gamma_x(t) + R_{22}\gamma_y(t) + R_{23}\gamma_z(t) + y_0 \\ v_3 t + R_{31}\gamma_x(t) + R_{32}\gamma_y(t) + R_{33}\gamma_z(t) + z_0 \end{pmatrix}
$$

というふうにガラガラ変わってしまいます。ところがこれの 1 回微分は

$$
\begin{aligned}
\frac{d\gamma'(t')}{dt'} &= \frac{dt}{dt'}\frac{d\gamma'(t')}{dt} = \frac{d(t' - t_0)}{dt'}\frac{d\gamma'(t')}{dt} = \frac{d\gamma'(t')}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_1 t + R_{11}\gamma_x(t) + R_{12}\gamma_y(t) + R_{13}\gamma_z(t) + x_0 \\ v_2 t + R_{21}\gamma_x(t) + R_{22}\gamma_y(t) + R_{23}\gamma_z(t) + y_0 \\ v_3 t + R_{31}\gamma_x(t) + R_{32}\gamma_y(t) + R_{33}\gamma_z(t) + z_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v_1 + R_{11}\dot{\gamma}_x(t) + R_{12}\dot{\gamma}_y(t) + R_{13}\dot{\gamma}_z(t) \\ v_2 + R_{21}\dot{\gamma}_x(t) + R_{22}\dot{\gamma}_y(t) + R_{23}\dot{\gamma}_z(t) \\ v_3 + R_{31}\dot{\gamma}_x(t) + R_{32}\dot{\gamma}_y(t) + R_{33}\dot{\gamma}_z(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となり、もう一度微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d^2\gamma'(t')}{dt'^2} &= \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_1 + R_{11}\dot{\gamma}_x(t) + R_{12}\dot{\gamma}_y(t) + R_{13}\dot{\gamma}_z(t) \\ v_2 + R_{21}\dot{\gamma}_x(t) + R_{22}\dot{\gamma}_y(t) + R_{23}\dot{\gamma}_z(t) \\ v_3 + R_{31}\dot{\gamma}_x(t) + R_{32}\dot{\gamma}_y(t) + R_{33}\dot{\gamma}_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}\ddot{\gamma}_x(t) + R_{12}\ddot{\gamma}_y(t) + R_{13}\ddot{\gamma}_z(t) \\ R_{21}\ddot{\gamma}_x(t) + R_{22}\ddot{\gamma}_y(t) + R_{23}\ddot{\gamma}_z(t) \\ R_{31}\ddot{\gamma}_x(t) + R_{32}\ddot{\gamma}_y(t) + R_{33}\ddot{\gamma}_z(t) \end{pmatrix} \\ &= R\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}\end{aligned}$$

を満たすので、「質点の二階微分が消える」という性質はガリレイ変換で保たれており[*2]、慣性の法則はガリレイの相対性原理を満たしています。これは、慣性の法則がちゃんと力学の法則なってますよと保証してくれています。

2.3.3　運動方程式

僕たちの直感によれば、質点の加速度と、力の間に関係式があるはずだというモデルを作る妥当性があるのでした。ところが、例えば重さの違う二つの大玉を押すことを考えてみましょう。この大玉を時速 10km の速さまで加速させるのに必要な「大変さ」は、それぞれ異なります。「重さ」の定義はまだ行っていないですが、どのみち実体験として、「加速させる大変さが異なる物体がある」というのは実体験としてあります。この「加速する大変さ」は、このような考察から質点に依存しているはずです。そこで質点に対して一つパラメータを追加しましょう。

定義 2.12 (慣性質量)**.** 0 以上の実数 m と質点 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ の組 (γ, m) を、**質量付き質点**といい、m をその **(慣性) 質量**という。誤解のないときは、質量付き質点を単に質点と呼び、$\gamma := (I, \gamma, m)$ であらわす。

これで力学の最も基本的な法則を定義することができます。

定義 2.13 (運動方程式)**.** I を区間、$U \subset I \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ を開集合とする。外力 $F : U \to \mathbb{R}^3$ に対して、質量付き質点 (I, γ, m) が

$$F(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = m\ddot{\gamma}(t)$$

を満たす時、**質量付き質点** (I, γ, m) **は外力** F **に束縛される**という。

この等式はあくまで「加速度が変わったら力がかかった！」ないし「力によって加速度が変わったとみなせる」という身勝手な直感をもとに建てた式です。ゆえに、実は「質点の加速度×質量が質点にかかっている力」なのか、「力によって質点の速度が変わる」のかは微妙な問題です。鶏と卵の問題というものです。ニュートン力学が当たり前に受け入れられている現代では、質点の加速度と力の間に運動方程式のような関係があってもおかしく感じないかもしれませんが、それ以前の科学者・哲学者はそれはそれは色々なことを考えたことでしょう。ニュートン以降は「この両者の関係がこのように定まっていると仮定する」としている感覚に近いかもしれません。少なくとも『本当にそうなのか？そもそも「力」って何？』という哲学っぽい問題にまで踏み込んでないです。ともあれこの前提によって、不思議議なことに色々な現実の問題を解決することができるのです。

[*2] 回転行列はもちろん正則行列だから。

ところで、運動方程式の定義における力は外力のみ考えています。実際には垂直抗力などの $F(t,\gamma(t),\dot{\gamma}(t))$ ではとらえきれない、質点の運動を実験によって観測してモデル化しないと定式できない力もあるのでした。現実問題を考えるに当たっては、例えば空気抵抗のように、左辺にそのような項を加えて方程式を解いていきます。しかし「力学の基本原理」という意味では、そのような力を加えるべきではないでしょう。

力学の基本原理といえば、ガリレイ変換で不変であるべきなのでした。そこのところどうなのか、見ていきましょう。

2.3.4 力のガリレイ変換

加速度 $\ddot{\gamma}(t)$ はガリレイ変換

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ v_2 & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ v_3 & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

に対して、

$$\frac{d^2\gamma'(t')}{dt'} = R\frac{d^2\gamma(t)}{dt^2}$$

と変換することを見ています。「ガリレイ変換で不変な法則のみが根本的な力学の原理である」とする立場を厳守するならば、運動方程式

$$F(t,\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) = m\ddot{\gamma}(t)$$

の左辺もガリレイ変換後、ガリレイ変換の回転行列部分 R が掛かる形で変換されねばなりません。

$$F(t',(x',y',z'),(\dot{x'},\dot{y'},\dot{z'})) = RF(t,(x,y,z),(\dot{x},\dot{y},\dot{z}))$$

実際のところ、運動方程式においては上記を仮定に加えることにします。

定義 2.14. F を外力とする。ガリレイ変換

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ v_2 & R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ v_3 & R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

に対して、

$$F(t',(x',y',z'),(\dot{x'},\dot{y'},\dot{y'})) = RF(t,(x,y,z),(\dot{x},\dot{y},\dot{z}))$$

と変換する外力を**ガリレイ不変な外力**または**真の力**[*3]と呼ぶ。

これによって運動方程式を修正しましょう。

[*3] コリオリ力などの「見かけの力」に対応しての命名。使うかどうかは未定。

定義 2.15 (運動方程式)**.** I を区間、$U \subset I \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ を開集合とする。ガリレイ不変な外力 $F : U \to \mathbb{R}^3$ に対して、質量付き質点 (I, γ, m) が

$$F(t, \gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = m\ddot{\gamma}(t)$$

を満たす時、**質量付き質点** (I, γ, m) **は (ガリレイ不変な) 外力** F **に束縛される**という。

これはあくまで基本原理であって、宇宙の法則はこれに従っているだろうというニュートンのモデリングにすぎません (多分)。なのでもちろん、例えば空気抵抗ありの落下運動のように、ガリレイ不変とは限らない力を考慮して、運動方程式を立てて解くという場面もよく見かけます。

第 3 章

微分の基礎

せっかく微分がでてきたので、数学的にしっかり基礎づけしていきましょう。x^n の微分もできないようではこの先困るので、この章では $n \in \mathbb{Q}$ の範囲までの微分ができるようになるまで頑張りましょう。

3.1 定義のおさらい

定義 3.1. I を区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を (連続とは限らない) 関数、$x \in I$ とする。このとき、極限

$$f'(x) := \lim_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

が存在するとき、$f'(x)$ を f の x における**微分係数**、あるいは単に**微分**という。

定義 3.2. I を区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を (連続とは限らない) 関数とする。I **上微分可能である**とは、任意の $x \in I$ に対して、微分係数 $f'(x)$ が存在する時を言う。このとき、関数

$$f' : I \to \mathbb{R}$$

を、f の**導関数**、あるいは単に**微分**という。

$y \to x$ を、$y = x + h$ の変数変換によって

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

と書き換えることも多いし、なんなら高校の教科書での定義はこっちですね。

3.2 例題集

3.2.1 べき関数

まずは簡単なところから行きましょう。$n > 0$ を整数として、

$$f(x) = x^n$$

を微分してゆきましょう。このとき

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}hx^{n-2} + \cdots + h^{n-1} \to nx^{n-1} \quad \text{as } h \to 0$$

ゆえに

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

です。

3.3　微分の性質

3.3.1　微分可能ならば連続

定理 3.3. I を区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を I 上微分可能な関数とする。このとき、f は I 上連続である。

証明. 任意の $a \in I$ と、十分 0 に近い $h \neq 0$ に対して、

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \to f'(a) \cdot \lim_{h \to 0} h = 0$$

ゆえに f は連続。 □

3.3.2　線形性

定理 3.4. I を区間、$f, g : I \to \mathbb{R}$ を I 上微分可能な関数、$a, b \in \mathbb{R}$ とする。このとき、関数

$$af + bg : I \to \mathbb{R}; x \mapsto af(x) + bg(x)$$

も I 上可微分であり、

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x)$$

が成り立つ。

証明. 任意の $x \in I$ と十分 0 に近い h に対して、

$$\begin{aligned}
&\frac{\{af(x+h) + bg(x+h)\} - \{af(x) + bg(x)\}}{h} \\
=&a\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + b\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
\to&af'(x) + bg'(x)
\end{aligned}$$

□

この定理を大学 1 年生に「線形性」といってもピンとこないと思います。一応もっと踏み込んで解説しましょう。区間 I に対して、

$$\begin{aligned}
C^1(I) &:= \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ は } I \text{ 上微分可能であり、} f' \text{ は } I \text{ 上連続 }\} \\
C^0(I) &:= \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ は } I \text{ 上連続 }\}
\end{aligned}$$

と定義すると、$C^0(I)$ は体 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になっています。また定理から、$C^1(I)$ も体 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になっており、写像

$$\frac{d}{dx} : C^1(I) \to C^0(I); f \mapsto \frac{df}{dx}$$

が線形写像になっている、というわけです。もちろん $C^1(I)$ や $C^0(I)$ なんて無限次元ベクトル空間ですから、線形写像 d/dx を表現する行列なんて分かりっこないです。でもそういう行列なしに、固有値や固有ベクトルを求めてやったりすることができます。これが線形代数という抽象化の力です。

ちなみに

定義 3.5. I を区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を関数、$r \geq 0$ を整数とする。このとき、f が I 上 r 回微分可能かつ、r 回目の導関数

$$f^{(r)}(x) := (f^{(r-1)})'(x)$$

が連続であるとき、**f は I 上 C^r 級関数である**という。I 上 C^r 級である関数全体がなす $\mathbb{R}$ ベクトル空間を

$$C^r(I)$$

で表す。

r 回微分もいくつか記法があって、

$$f^{(r)}(x) = \frac{d^r f}{dx^r} = D_x^r f$$

などがあります。

例題 3.6. 多項式関数

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{R}[x]$$

は、$\mathbb{R}$ 上微分可能であり、

$$f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + a_1$$

が成り立つ。

3.3.3　積の微分

定理 3.7. I を区間、$f, g : I \to \mathbb{R}$ を I 上微分可能な関数とする。このとき、関数

$$fg : I \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x)g(x)$$

も I 上可微分であり、

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

がなりたつ。

証明. 任意の $x \in I$ と十分 0 に近い h に対して、

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
=&\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\\
=&f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)\\
\to&f(x)g'(x)+f'(x)g(x)
\end{aligned}$$

(最後に可微分関数の連続性を使用しています) □

例題 3.8. $f, g : I \to \mathbb{R}$ を C^r 級関数としたとき、

$$(fg)^{(r)} = f^{(r)}g + {}_rC_1 f^{(r-1)}g^{(1)} + {}_rC_2 f^{(r-2)}g^{(2)} + \cdots + fg^{(r)}$$

が帰納的に成り立つ。

3.3.4 商の微分

定理 3.9. I を区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を I 上微分可能かつ、$f(x) \neq 0$ ($^\forall x \in I$) をみたす関数とする。このとき、

$$\frac{1}{f} : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{f(x)}$$

もまた I 上微分可能であり、

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

が成り立つ。

証明. 任意の $x \in I$ と十分 0 に近い h に対して、

$$\begin{aligned}
&\frac{1/f(x+h)-1/f(x)}{h}\\
=&-\frac{1}{f(x)f(x+h)}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
\to&-\frac{f'(x)}{f(x)^2}
\end{aligned}$$

□

例題 3.10. f, g を I 上微分可能な関数で、g は I 上 0 にならないとする。このとき、積の微分と商の微分から

$$\frac{f}{g} : I \to \mathbb{R}$$

も I 上可微分関数であり、

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

例題 3.11. $x \neq 0$ に対して

$$(x^{-1})' = \frac{(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$$

一般に、任意の整数 $n > 0$ について

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

であることが帰納法により次のように示せる。仮に $(x^{-n+1})' = (-n+1)x^{-n}$ が成り立つとすると、

$$(x^{-n})' = (x^{-1} \cdot x^{-n+1})' = -x^{-2} \cdot x^{-n+1} + x^{-1} \cdot (-n+1)x^{-n} = -nx^{-n-1}$$

ゆえに一般の整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

が成り立つ。

3.4 平均値の定理

力学で運動の等速直線運動を調べるために平均値の定理が出てきたので、ここで証明しましょう。また、次に紹介する合成関数の微分公式の証明にも使います。

まず補題として、ロルの定理を証明します。

定理 3.12 (ロルの定理)**.** $a, b \in \mathbb{R}$、$a < b$ とする。連続写像 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が開区間 (a, b) で微分可能であり、かつ $f(a) = f(b)$ とする。このとき、ある $c \in (a, b)$ が存在して、$f'(c) = 0$ を満たす。

証明. 閉区間 $[a, b]$ はコンパクトだから、最大値最小値の定理より、値域には最大値 M と最小値 m が存在する。もし $m = M$ であれば、f は定値関数だから定理は自明。ゆえに $m < M$ であるとしてよい。このとき $m < f(a) = f(b)$ または $f(a) = f(b) < M$ である。ここでは $f(a) = f(b) < M$ の場合を証明する ($m < f(a) = f(b)$ の場合も同様)。

$M = f(c)$ となる $c \in (a, b)$ をとる。このとき、$f'(c) = 0$ を証明する。仮に $L := f'(c) > 0$ であるとすると、f は $c \in (a, b)$ で微分可能なので、$\varepsilon := L/2 > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \frac{L}{2}$$

よって $0 < |x - c| < \delta$ のとき、

$$\begin{aligned} &-\frac{L}{2} < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L < \frac{L}{2} \\ \Longleftrightarrow\ &\frac{L}{2} < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < \frac{3L}{2} \end{aligned}$$

x として $0 < x - c < \delta$ を満たすように取っておけば、上記の不等式の辺々に $x - c$ をかけることで

$$f(x) - f(c) > \frac{L}{2}(x - c) > 0$$

ゆえに $f(x) > f(c) = M$ となり、M が最大値であったことに矛盾。

もし $L := f'(c) < 0$ のときは、$\varepsilon := -L/2 > 0$ に対して、ある $\delta' > 0$ が存在して、

$$0 < |x-c| < \delta' \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - L \right| < -\frac{L}{2}$$

より、$0 < |x-c| < \delta$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} < \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - L < -\frac{L}{2} \\ \iff \frac{3L}{2} < \frac{f(x)-f(c)}{x-c} < \frac{L}{2} \\ \therefore\ 0 > x-c > -\delta' \Rightarrow f(x)-f(c) > \frac{L}{2}(x-c) > 0 \end{aligned}$$

より $f(x) > f(c) = M$ となって矛盾。以上より、$f'(c) = 0$ でなければならない。 □

定理 3.13 (平均値の定理)**.** 連続写像 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が開区間 (a,b) で微分可能とする。このとき、$c \in (a,b)$ が存在して、

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

を満たす。

証明.

$$g : [a,b] \to \mathbb{R}; x \mapsto (b-a)(f(x)-f(a)) - (x-a)(f(b)-f(a))$$

を考えると、これは仮定より $[a,b]$ 上連続かつ $x \in (a,b)$ で微分可能。また

$$g(a) = g(b) = 0$$

ゆえ、ロルの定理より

$$0 = g'(c) = (b-a)f'(c) - (f(b)-f(a))$$

となる $c \in (a,b)$ が存在する。ゆえに

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

□

系 3.14 (合成関数の微分)**.** I, J を区間、$u : I \to J$ と $f : J \to \mathbb{R}$ をそれぞれ可微分関数とする。さらに導関数 $f' : J \to \mathbb{R}$ は連続でもあるとする。このとき、合成関数

$$f \circ u : I \to \mathbb{R}; x \mapsto f(u(x))$$

も微分可能であり、

$$(f \circ u)'(x) = f'(u(x))u'(x)$$

が成り立つ。

証明. 任意の $x \in I$ と十分 0 に近い h をとる。証明は二つのケースに分けられる。

まずある x の近傍が存在して、十分 0 に近い任意の h に対して $u(x) \neq u(x+h)$ であるとする。以下では $u(x) < u(x+h)$ であるとする ($u(x) > u(x+h)$ でも同様)。仮定より f は $[u(x), u(x+h)] \subset J$ において連続かつ微分可能なため、平均値の定理より

$$\frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{u(x+h) - u(x)} = f'(c_h)$$

を満たす $c_h \in [u(x), u(x+h)]$ が存在する。よって

$$\frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{h} = f'(c_h)\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

$h \to 0$ のとき $c_h \in [u(x), u(x+h)]$ であるから $c_h \to u(x)$。また仮定より f' は連続だったから、$f'(c_h) \to f'(u(x))$ となる。さらに u は微分可能だったから、すべてまとめて

$$(f \circ u)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{h} = \lim_{h \to 0} \left\{ f'(c_h)\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right\} = f'(u(x))u'(x)$$

次に任意の x の近傍に対して、$u(x) = u(x+h)$ となる $h \neq 0$ が存在するとする。このとき、

$$\frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{h} = \frac{f(u(x)) - f(u(x))}{h} = 0$$

ゆえに $(f \circ u)'(x) = 0$ である。一方

$$u'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x) - u(x)}{h} = 0$$

が成り立つ[*1]。ゆえに与式は成り立つ。 □

例題 3.15. $n = p/q$ を有理数とする ($p \in \mathbb{Z}_{>0}$、$q \in \mathbb{Z}$)。このとき、

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}; x \mapsto x^n = x^{p/q}$$

は可微分関数であり、

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

が成り立つ。

実際、f の定義から

$$f(x)^q = x^p$$

なので、合成関数の微分から

$$qf(x)^{q-1} \cdot f'(x) = px^{p-1} \implies qx^{p-p/q}f'(x) = px^{p-1}$$

よって、両辺を $qx^{p-p/q}$ で割って

$$f'(x) = \frac{p}{q}x^{p-1-p+p/q} = nx^{n-1}$$

[*1] これが成り立つのは、大前提として $(u(x+h) - u(x))/h$ の極限が存在するという仮定が含まれているからです。「任意の x の近傍に対して、どのような h をとっても $u(x) = u(x+h)$ であるようなものが存在する」という仮定から、数列 h_n であって、$h_n \to 0$ ($n \to +\infty$) かつ、$u(x+h_n) = u(x)$ ($^\forall n$) を満たすものが作れます。これについて、$u'(x)$ は $(u(x+h_n) - u(x))/h_n = 0$ の $n \to +\infty$ に関する極限に一致するというわけです。

第 4 章

運動方程式を解く

ニュートンの第二法則・運動方程式は現状、「力と質点の運動の関係ををこう定義してみた」という以上のものではないです。本章では、いくつか現実の問題に対して運動方程式を立てて、「質点の運動を予測する」というところまでやっていきましょう。

4.1 自由粒子

定義 4.1 (自由粒子)**.** 質点 (I, γ, m) が力場 $F(t, x, y, z) = 0$ に束縛されるとき、その質点を**自由粒子**という。

自由粒子の運動は慣性の法則によって等速直線運動をする…と思われるかもしれませんが、これは妥当ではありません。慣性の法則は「等速直線運動する質点には力が働いていない」とする仮定なので、自由粒子が等速直線運動するかどうかはまだ分からないのです。ということで、自由粒子の運動を調べていきましょう。

自由粒子の運動方程式は $m\ddot{\gamma}(t) = 0$ ですが、m は定数なので

$$\ddot{\gamma}(t) = 0$$

を考えればよいです。これは前章で見た通り、$\dot{\gamma}$ が定値写像になることと同値な等式です。すなわち等速直線運動です。

さて、

$$\dot{\gamma}(t) = v_0 \in \mathbb{R}^3$$

とおいて、γ を求めていきましょう。再び平均値の定理を使って、任意の $a < b$ に対して、ある $c \in (a, b)$ が存在して、

$$\frac{\gamma(b) - \gamma(a)}{b - a} = \dot{\gamma}(c) = v_0$$

が成り立ちます。すなわち

$$\gamma(b) = v_0(b - a) + \gamma(a)$$

です。ここから少し直感的に議論しますが、b がめちゃくちゃ a に近い実数 $b = a + \Delta t$ であるとしましょう。

$$\gamma(a + \Delta t) = v_0 \Delta t + \gamma(a)$$

この式から読み取れるのは、「a から少しだけ値をずらした値が、$v_0\Delta t+\gamma(a)$ で得られる」です。もし a を $a+\Delta t$ に、$a+\Delta t$ を $a+2\Delta t$ にしても同様に

$$\begin{aligned}\gamma(a+2\Delta t)&=v_0\Delta t+\gamma(a+\Delta t)\\&=2v_0\Delta t+\gamma(a)\end{aligned}$$

などが成り立ちます。a からの微小変化 Δt の大きさに比例して、v_0 の係数が増えていくので、多分こうでしょう。

$$\gamma(t)=v_0t+\gamma(a)$$

…もう少しまともにみましょう。積分の登場です。

4.2　積分と微分積分学の基本定理

閉区間 $I=[a,b]$ 上の関数 $f:I\to\mathbb{R}$ に対して、始点 a から微小な区間 Δx を積み上げて $t\in I$ まで足し上げることを考えます。より一般的な場合を考えて、a から t までの閉区間の分割の取り方を次のようにしましょう。

定義 4.2. 閉区間 $[a,t]$ に対して、数列 $x_0,x_1,\ldots,x_{n+1}$ が

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n+t}=t$$

を満たす時、$\Delta:=\{x_0,\ldots,x_{n+1}\}$ を閉区間 $[a,t]$ の**分割**という。

既に動機は示しているので、次のようなことを考えたいですね。つまり、$\Delta:=\{x_0,\ldots,x_{n+1}\}$ を閉区間 $[a,t]$ の分割としたとき、

$$F_\Delta:=\sum_{i=0}^{n}f(c_i)(x_{i+1}-x_i)$$

ただし $c_i\in[x_i,x_{i+1}]$ としています。これを $x_{i+t}-x_i$ が 0 に向かいつつ、区間をギャンギャンに細分する極限を考えたいです。その様子を一挙に表すために、分割の幅を考えます。

定義 4.3. $\Delta:=\{x_0,\ldots,x_{n+1}\}$ を閉区間 $[a,t]$ の分割としたとき、

$$|\Delta|:=\max\{x_{i+1}-x_i\mid i=0,\ldots,n\}$$

を、分割 Δ の**幅**という。

分割 Δ の幅を 0 に向かわせる極限 $|\Delta|\to 0$ を考えることで、区間の幅を狭めつつ細分も細かくするという状況を考えることができるわけです。

これで積分を定義する準備が整いました。

定義 4.4. $I:=[a,b]$ を閉区間、$t\in I$、$f:I\to\mathbb{R}$ を (連続とは限らない) 関数とする。$\Delta:=\{x_0,\ldots,x_{n+1}\}$ を閉区間 $[a,t]$ の任意の分割とする。このとき、極限

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=0}^{n}f(c_i)(x_{i+1}-x_i)$$

が、$c_0, \dots, c_n$ の選び方によらず収束するとき、関数 f は $[a,t]$ で**積分可能**であるといい、極限

$$\int_a^t f(x)dx := \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

と書き、f の a から t への **(リーマン) 積分**とよぶ。

定義はできたものの、これがいつ収束するのかを調べておく必要があります。実は比較的広い状況で積分可能であることが以下のように示せます。

定理 4.5. 関数 f が閉区間 $[a,t]$ で連続ならば、その閉区間で f は積分可能である。

証明. TODO: 一様連続だから。 □

もともと「微分して $\dot{\gamma}(t) = v_0$ となる γ を求めたい」ということでここまで進めてきました。実際、しっかりこれを証明することができます。

定理 4.6. 微分積分学の基本定理

証明. TODO □

系 4.7. $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ を C^1 級関数とし、$f := F'$ とする。このとき

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

微分積分学の基本定理によって、ある関数 f の積分を求めるためには、微分して f になる関数 F を求めれば良いことがわかりました。つまり、積分は微分の逆演算であるということです。ここに、積分の結果が関数なのか実数なのか分からなくなることが出てきたので、用語を定義しておきます。

定義 4.8. $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ を C^1 級関数とし、$f := F'$ とする。このとき、F を f の**原始関数**または**不定積分**と呼び、

$$F(x) := \int f(x)dx$$

と書く。また、

$$\int_a^b f(x)dx$$

を、f の **(a から b にかける) 定積分**と呼ぶ。

4.3　簡単な積分

4.3.1　べき関数

整数 n に対する x^n の微分から

$$(x^{n+1})' = (n+1)x^n$$

でした。これを逆にすれば不定積分

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

が求まります。最後につけた C は**積分定数**というものです。不定積分では定数を足したぐらいでは微分したときに消えるので、その分の不定さを表しています。

4.3.2 自由粒子の運動再訪

自由粒子の運動方程式は

$$(\ddot{\gamma}_x(t), \ddot{\gamma}_y(t), \ddot{\gamma}_z(t)) = (0, 0, 0)$$

なので、まず一回積分して

$$(\dot{\gamma}_x(t), \dot{\gamma}_y(t), \dot{\gamma}_z(t)) = (C_x, C_y, C_z) =: v_0$$

となります。もちろん $v_0 \in \mathbb{R}^3$ は定数です。

もう一回積分すれば、

$$\gamma(t) = (\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t)) = v_0 t + (D_x, D_y, D_z) =: v_0 t + x_0$$

と求まります。これはちゃんと等速直線運動になっていますね！

なお

$$x_0 = \gamma(0)$$

は時刻 $t = 0$ での質点の位置を表し、

$$v_0 = \dot{\gamma}(0)$$

は時刻 $t = 0$ での質点の速さを表しています。運動方程式は一般に、ある時刻での質点の位置・速さを先に知っておかないと完璧には求めることはできません。

4.4 一様な力場の運動

定義 4.9. 定値写像であるような力場

$$F : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

を、**一様な力場**という。

例えば (実験室程度の広さの範囲の) 重力などがこれに該当します。身近ですね。簡単のために $a > 0$ に対して、一様な力場 $F(t, x, y, z) = (0, 0, -a)$ に束縛される質点の運動を調べましょう。

$$\gamma(t) := (\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t))$$

とおくと、運動方程式は

$$(\ddot{\gamma}_x(t), \ddot{\gamma}_y(t), \ddot{\gamma}_z(t)) = (0, 0, -a)$$

となります。前半二つは等速直線運動のときに求めた通り、

$$
\begin{aligned}
\gamma_x(t) &= C_x t + D_x \\
\gamma_y(t) &= C_y t + D_y
\end{aligned}
$$

です。z 成分についても普通に二度積分すると

$$
\begin{aligned}
\dot{\gamma}_z(t) &= -at + C_z \\
\gamma_z(t) &= -\frac{1}{2}at^2 + C_z t + D_z
\end{aligned}
$$

となり、質点の運動は

$$
\gamma(t) = x_0 + v_0 t + \left(0, 0, -\frac{1}{2}at^2\right)
$$

です。これはきれいな放物線ですね。簡単のために $x_0 = 0$、$v_0 = (1, 0, 0)$ であるとすると、

$$
\gamma(t) = \left(t, 0, -\frac{1}{2}at^2\right)
$$

なので、

$$
\begin{cases}
x = t \\
z = -\frac{1}{2}at^2
\end{cases}
$$

とおいて、t を消去すれば

$$
z = -\frac{1}{2}ax^2
$$

となって、xz 平面で放物線になっていることがわかります。一様な力場では、質点の運動は放物線を描くことがわかりました。