第 1 章

質点の運動・速さ・加速度

力学とは、身近な物体の運動から天体の運行までを、少ない前提から統一的に説明しようとする学問です。

1.1 質点の運動

デカルト以降、僕たちはこの世界が三次元だと理解しています。どの物体も、どこかに基準を決めれば、3 つの実数の組でその位置を絶対的に決めることができるとしています。数学的には、物体は

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

の元によって表すことができます。

物体を強く押したり、持ち上げて手を放すなどすると、時間経過とともにその位置を変えます。この発想で、質点の運動というものを以下のように定義できます。

定義 1.1. $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ を閉区間とする。このとき、連続写像 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ を、閉区間 I における**質点の運動**といい、(I, γ) で表す。

もちろん「時間って何？」とか「空間って本当に 3 次元なの？」という疑問はありつつ、ここでは立ち入りません。あくまで「こういうモデルで話を進めてみましょうよ」という立場でやらせてもらいます。

また、質点の運動が明らかに二次元平面や一次元の直線に制限される場合、最初から γ の値域を $\mathbb{R}^2$ あるいは $\mathbb{R}$ に取っておくことがあります。

1.2 質点の速さ

車にはスピードメーターが搭載されていて、これを見ればおよそ何時間後に何 km 進むかが分かります。例えば 40km/h という数値を維持すれば、1 時間後には 40km 進んでいます。

逆に考えると、「移動距離」と「その距離を移動するのにかかった時間」という量は測定しやすいです。これの商を「速さ」として定義しておいて、速さを予測できる体系が作れれば実用上便利そうです。僕たちの質点の定義から、この「移動距離の変化の割合」として速さを次のように定義できます。

定義 1.2. (I, γ) を閉区間 I 上の質点の運動とする。$x, y \in I$、$x \neq y$ とする。このとき、以下の量を時刻 x から y への質点の**平均の速さ**という。

$$\frac{\gamma(y) - \gamma(x)}{y - x}$$

しかし、速さを定義するために二つの実数 x, y が必要というのは面倒です。特に、日常的な感覚として「一瞬の間にも速さはある」ような気がします。ここにおいて、y を**限りなく x に近づけた時の速さ**、つまり極限を知りたいという動機が生まれます。

しかし極限

$$\lim_{y \to x} \frac{\gamma(y) - \gamma(x)}{y - x}$$

が存在するかどうかは非自明です。次のざっくりした例で、極限が存在しない可能性を垣間見てみましょう。

例題 1.3. 1 次元の質点の運動

$$\gamma(t) := |t|$$

を考える。このとき、$x = 0$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(y) - \gamma(0)}{y - 0} &= \frac{|y|}{y} \\ &= \begin{cases} 1 & y > 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ゆえに右極限は 1 で、左極限は -1 となり左右の極限が異なる。

ここで「右極限」および「左極限」という言葉が出てきましたので、定義を述べておきましょう。といっても、高校数学で学習済みのものを $\varepsilon - \delta$ で厳密に書き直したにすぎません。

定義 1.4. f を関数とする。$a \in \mathbb{R}$ における f の右極限が L であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、任意の $x \in I$ に対して

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

を満たす時をいう。この様子を、以下の記号であらわす

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = L$$

$a \in \mathbb{R}$ における f の左極限が L であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、任意の $x \in I$ に対して

$$-\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

を満たす時をいう。この様子を、以下の記号であらわす

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = L$$

また、上の例題では次の結果を認めていたので証明しましょう。

定理 1.5. 実数 a を含むある区間で定義された関数 f について、$\lim_{x\to a} f(x)$ が存在するための必要十分条件は、$x = a$ における左右極限が存在して一致することである。

証明. (条件が必要であること) 仮定から、ある実数 L が存在して、任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ をうまくとれば、

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

が成り立つ。$0 < |x - a| < \delta$ は $0 < x - a < \delta$ かつ $-\delta < x - a < 0$ と同値であるから、すなわち

$$\begin{aligned} 0 < x - a < \delta &\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \\ -\delta < x - a < 0 &\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

ゆえに f の左右極限が存在して、それらは L で一致する。

(条件が十分であること) 仮定から、ある実数 L が存在して、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\delta_1, \delta_2 > 0$ が存在して、

$$\begin{aligned} 0 < x - a < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \\ -\delta_2 < x - a < 0 &\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ とおけば、

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta &\Leftrightarrow -\delta < x - a < \delta, x - a \neq 0 \\ &\Leftrightarrow -\delta < x - a < 0 \text{ or } 0 < x - a < \delta \end{aligned}$$

ところが δ の定義から $-\delta_2 < -\delta$、$\delta < \delta_1$ が成り立つから、

$$\begin{aligned} 0 < x - a < \delta &\Rightarrow 0 < x - a < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \\ -\delta < x - a < 0 &\Rightarrow -\delta_2 < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

いずれにしても、$0 < |x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - L| < \varepsilon$ が示せた。 □

左右からの極限を考えるのが煩わしいので、関数の定義域を拡張して考えることもあります。うれしいことに、次のような言い換えが存在します。

定理 1.6. $I = [a, b]$ を閉区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を連続写像とする。このとき、極限

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

が存在することと、以下の条件が満たされることは必要十分である。点 a を含むある開区間 I_a と、関数 $g : I_a \to \mathbb{R}$ が存在して、

- $f|_{I\cap I_a} = g|_{I\cap I_a}$
- g は $a \in I_a$ で微分可能

証明. 条件が十分であることは明らかなので、必要であることを証明する。仮定より、極限

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

が存在する。ここで、$g : (-\infty, b]$ を

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in (a,b)) \\ f(a) + L \cdot (x-a) & (x \leq a) \end{cases}$$

で定義すると、g は $(-\infty, b)$ 上で連続である ($\because$ 貼り合わせの補題)。また a で微分可能であることが次のように証明できる。$(f(x) - f(a))/(x-a)$ の右極限が存在することから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| < \varepsilon$$

ゆえに $0 < |x - a| < \delta$ のとき、

$$\begin{aligned} &\left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} - L \right| \\ =&\left| \frac{g(x) - f(a)}{x - a} - L \right| \\ =&\begin{cases} \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - L \right| & (x > a) \\ \left| \frac{L \cdot (x-a)}{x-a} - L \right| & (x < a) \end{cases} \\ =&\begin{cases} \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - L \right| & (x > a) \\ 0 & (x < a) \end{cases} \\ <&0 \end{aligned}$$

□

　これで、どんな区間であっても、その区間上の関数が微分可能かどうかを気楽に論じることができます。

定義 1.7. I を区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を (連続とは限らない) 関数、$x \in I$ とする。このとき、極限

$$f'(x) := \lim_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

が存在するとき、$f'(x)$ を f の x における**微分係数**、あるいは単に**微分**という。

　微分係数の書き方には複数あり、

$$\dot{f}(x) = f'(x) = \frac{df}{dx} = D_x f$$

などがあります。物理でよく使うのは

$$\dot{f}(x)$$

で、数学の、とくに一変数関数の微分は

$$f'(x)$$

と書くことが多い気がします。しかし、「どの変数で微分してるか」というのをはっきりさせたいときは

$$\frac{df}{dx}$$

を使うのが良い気がします。じゃあ $D_x f$ はいつ使うかというと、関数解析とか代数解析という分野でよく見かける気がします。結構その時の気分で書き分けたりしますが、できれば慣れてください。

…さて、一点のみならず、任意の点で微分可能な質点というのは行儀が良さそうです。

定義 1.8. I を区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を (連続とは限らない) 関数とする。I **上微分可能である**とは、任意の $x \in I$ に対して、微分係数 $f'(x)$ が存在する時を言う。このとき、関数

$$f' : I \to \mathbb{R}$$

を、f の**導関数**、あるいは単に**微分**という。

話がそれましたが、極限が存在するような運動に限って、いわば「瞬間の速さ」を定義することができます。

定義 1.9. (I, γ) を質点の運動、$t \in I$ とする。このとき、極限

$$\dot{\gamma}(t) := \lim_{y \to t} \frac{\gamma(t) - \gamma(y)}{t - y}$$

が存在するとき、γ は t で**微分可能**であるといい、極限の値 $\dot{\gamma}(t)$ を**微分係数**、あるいは単に**微分**という。あるいは $\dot{\gamma}(x)$ を質点の運動 γ の時刻 x における**速さ**という。

定義 1.10. (I, γ) を質点の運動とする。任意の $t \in I$ に対して微分係数 $\dot{\gamma}(t)$ が存在するとき、γ は I で**微分可能**であるといい、写像

$$\dot{\gamma} : I \to \mathbb{R}$$

を γ の**導関数**、あるいは単に**微分**という。

1.3 質点の加速度

ボールを持ち上げて、高いところから手を離すと落ちます。ただ落ちるだけじゃなく、だんだん速さが速くなっていきます。他にも例えば、ボールに紐をつけてブンブン回すと、速さの絶対値自体は時間変化しなくても、向きがグリグリ変わっています。そういった「速さの変化量」も実は目に見える量です。今回はいきなり微分で定義しましょう。

定義 1.11. (I, γ) を質点の運動、$x \in I$ とする。また、γ は x のある開近傍で常に微分可能であるとする。このとき、極限

$$\ddot{\gamma}(x) := \lim_{y \to x} \frac{\dot{\gamma}(y) - \dot{\gamma}(x)}{y - x}$$

が存在するとき、γ は x で**二階微分可能**であるという。$\ddot{\gamma}(x)$ を質点の運動 γ の時刻 x における**加速度**という。

定義 1.12. (I, γ) を質点の運動とする。任意の $x \in I$ に対して、極限

$$\ddot{\gamma}(x) := \lim_{y \to x} \frac{\dot{\gamma}(y) - \dot{\gamma}(x)}{y - x}$$

が存在するとき、γ は I で**二階微分可能**であるといい、写像

$$\ddot{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$$

を γ の**二階導関数**あるいは単に**二階微分**という。

今まで質点 γ は閉区間 I から $\mathbb{R}^3$ への連続写像として定義していましたが、ここにきて γ は二階微分可能であるして再定義しましょう。

定義 1.13. $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ を閉区間とする。このとき、連続写像 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ が I 上で二階微分可能であるとき、区間 I における**質点の運動**といい、(I, γ) で表す。

第 2 章

運動の法則

質点に対して、いくつかの仮定 (公理) を追加します。力学はここから始まるのです。まずは運動の状況を見ていきましょう。

2.1 簡単な運動

最も簡単な運動は「静止」している状態でしょう。

定義 2.1. 質点の運動 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ が定値写像になっているとき、質点 γ は**静止**しているという。静止している質点の運動は、静止であると言い表す。

静止の次に簡単な運動は、速さが変化しない運動、つまり「等速直線運動」でしょう。

定義 2.2. 質点の運動 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ に対し、$\dot{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ が定値写像になっているとき、質点 γ は**等速直線運動**しているという。等速直線運動している質点の運動は、等速直線運動であると言い表す。

質点が静止しているならば、等速直線運動しているということが言えます。

定理 2.3. 質点 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ の運動が静止であるならば、その運動は等速直線運動である。

証明. γ は静止しているので、任意の 2 時刻 $t_0, t \in I$ において $\gamma(t) = \gamma(t_0)$。ゆえに

$$\dot{\gamma}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} 0 = 0$$

よって γ は等速直線運動である。 □

また、等速直線運動する質点の加速度 $\ddot{\gamma}$ は 0 への定値写像であることが同値であることも言えます。ここには**平均値の定理**を用いるのですが、それはのち (§ 3.4) に証明しましょう。いったん平均値の定理は認めて、以下を証明しましょう。

定理 2.4. 質点 γ の運動が等速直線運動であることと、任意の $t_0 \in I$ に対して $\ddot{\gamma}(t_0) = 0$ は同値である。

証明. 質点 γ の運動が等速直線運動であるとすると、任意の $t, t_0 \in I$ に対して、$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t_0)$。ゆえに

$$\ddot{\gamma}(t_0) \lim_{t \to t_0} \frac{\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(t_0)}{t - t_0} = 0$$

ゆえに $\ddot{\gamma}(t_0) = 0$ $({}^\forall t_0 \in I)$。

逆に $\ddot{\gamma}(t_0) = 0$ $({}^\forall t_0 \in I)$ とする。γ を成分ごとに分けて、$\gamma(t) := (\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t))$ で考える。このとき任意の $t_1, t_2 \in I$、$t_1 < t_2$ に対して、平均値の定理から、ある $c \in (t_1, t_2)$ が存在して、

$$\frac{\dot{\gamma}_i(t_1) - \dot{\gamma}_i(t_2)}{t_1 - t_2} = \ddot{\gamma}_i(c) = 0, \quad (i = x, y, z)$$

をみたす。すなわち $\dot{\gamma}_i(t_1) = \dot{\gamma}_i(t_2)$ なので、$\dot{\gamma}_i(t)$ は定数写像となる。 □

2.2　運動の法則

「力」という概念の定義は非常に難しいものです。例えば僕たちは地球の重力が働いていると知っていますが、重力があるからといって地球の中心に向かって落ち続けるということはないです。それは重力と地面からの垂直抗力が釣り合っているから、と説明できます。しかしそのように説明をもとに色々な現象を実証していくのは、実際には容易ではありません。

アリストテレスは「槍を投げると、飛んでいる間は運動方向に力が働き続ける。その力が徐々に失われて行って、しまいには地面に落ちる」というような考え方をしていたようです。

実際のところ「力」って何なのさ？という問題は哲学の分野で語ってもらうことにして、物理学ではとにかく**定量化して計算できること**を重視します。言い換えれば、そのように現実世界を「モデリング」して、定量的な計算や未来予測を可能にしようぜ、というのがニュートンの思想の一端ではないでしょうか。

2.2.1　慣性の法則

これまで静止する質点や、等速直線運動する質点を見てきました。果たしてこれらに力はかかっていると言えましょうか？（いや、ない。）ということを踏まえた、「力がかかっていない」というニュートン流の定義がこちらになります。

定義 2.5 (慣性の法則)**.** 質点が等速直線運動するとき、またそのときに限って**質点には力が働いていない**と言い表す。

これは力が働いていないから等速直線運動するという因果関係…ではなく、「力が働いていないこと」の定義です。「等速直線運動しているからこそ『力が働いていない』と**定義した**」んです。気を付けてくださいね。

ガリレイの相対性原理

物理学では「観測の対象となる物理現象」の他に、実は「それを観測する主体 (観測者)」の二者が存在しています。しかも観測者というのは複数存在しえます。

例えば雨の落下という物理現象を考えましょう。地表に対して静止している観測者にとっては、(風がなければ) 雨は地面に対して垂直に落下しているように見えます。ところが等速直線運動している列車に乗っている観測者からは、斜めに落ちていくように見えます。当の物理現象である雨の落下が、観測者によって物理法則が変わってしまうことを意味するかというと、答えは NO です。たしかに見かけの運動は変わったかに見えますが、それは地面上でも列車内でも同じ法則によって記述されうる現象ではあります。そんなぐらいの原理を**ガリレイの相対性原理**といいます。

より詳細にガリレイの相対性原理に迫るため、まずは座標変換について次のように定式しましょう。

定義 2.6 (ガリレイ変換)**.** $A : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が、回転行列 R[*1]、ベクトル $(v_x, v_y, v_z), (x_0, y_0), z_0$ に対して

$$A(t, x, y, z) := (x, y, z)R + (v_x, v_y, v_z)t + (x_0, y_0, z_0)$$

と書けるとき、A を**ガリレイ変換**という。通常のユークリッド空間から、ガリレイ変換で移りあう座標系は**慣性系**と呼ばれ、これも記号 A で表される。

慣性系 A と質点の運動 (I, γ) に対して、

$$\gamma_A : I \to \mathbb{R}^3; t \mapsto A(t, \gamma(t))$$

とおくことにします。この準備で、等速直線運動という質点の性質が、以下の意味でガリレイ変換で保たれることがわかります。

定理 2.7. 任意の質点 (I, γ) が等速直線運動するとき、任意の慣性系 A に対して、(I, γ_A) も等速直線運動する。

ガリレイの相対性原理は、「ガリレイ変換によって変わる観測者ごとに同じ観測を行っても、結局どれも同じ結果になるだろう」という話です。そのうち「力が働いていない版」として、慣性の法則を定式し直すと以下のようになりましょう。

定義 2.8 (慣性の法則 (慣性系))**.** 質点 (I, γ) に力が働いていないとは、ある慣性系 A が存在して、(I, γ_A) が等速直線運動するときをいう。

2.2.2　運動方程式

ここをしっかり定義すると、力の正体にあまり深入りすることなく、この定義の対偶をとって次のように考えることができます。つまり、力が働いているということは、等速直線運動しないということです。等速直線運動しない具合を力と呼ぶべきであって、そうすることで力を定量的に測ることができます。つまり、速さの変化の割合…加速度が、その質点にかかっている力を表しているはずです。

ところが、例えば重さの違う二つの大玉を押すことを考えてみましょう。この大玉を時速 10km の速さまで加速させるのに必要な「大変さ」は、それぞれ異なります。「重さ」の定義はまだ行っていないです

[*1] 普通の 2 次元の回転行列を 3 次元に拡大して、よしなに 0 で埋めたやつです。$SO(3)$ の元と言ったほうが早い人もいましょう。

が、どのみち実体験として、「加速させる大変さが異なる物体がある」というのは実体験としてあります。この「加速する大変さ」は、このような考察から質点に依存しているはずです。そこで質点に対して一つパラメータを追加しましょう。

定義 2.9 (慣性質量)**.** 0 以上の実数 m と質点 $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ の組 (γ, m) を、**質量付き質点**といい、m をその **(慣性) 質量**という。誤解のないときは、質量付き質点を単に質点と呼び、$\gamma := (I, \gamma, m)$ であらわす。

これで力学の最も基本的な法則を定義することができます。

定義 2.10 (運動方程式)**.** 質量付き質点 (I, γ, m) に対して、

$$F := m\ddot{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$$

を、質点 (γ, m) にかかる力と呼ぶ。

このように、いったん力は質点に対して上記のように定義しました。普通は上記とは逆に、質点にかかっている力を先に考えて、上記の運動方程式にあてはめることで質点の運動を予測します。そのように考える場合、力と運動方程式は次のように再定義することになります。

定義 2.11 (運動方程式)**.** $I \subset \mathbb{R}$ を区間、$U \subset \mathbb{R}^3$ を部分位相空間とする。連続写像

$$F : I \times U \to \mathbb{R}^3$$

を**力 (力場)** と呼ぶ。また、質量付き質点 (I, γ, m) に対して、

$$m\ddot{\gamma} = F(t, \gamma(t))$$

を質点 (γ, m) の**運動方程式**と呼ぶ。上記の運動方程式を満たす質点は、力場 F に**束縛される**という。

このように「質点の加速度×質量が質点にかかっている力」なのか、「力によって質点の速度が変わる」のかは実は微妙な問題です。鶏と卵の問題というものです。ニュートン力学が当たり前に受け入れられている現代では、質点の加速度と力の間に運動方程式のような関係があってもおかしく感じないかもしれませんが、それ以前の科学者・哲学者はそれはそれは色々なことを考えたことでしょう。ニュートン以降は「この両者の関係がこのように定まっていると仮定する」としている感覚に近いかもしれません。少なくとも『本当にそうなのか？そもそも「力」って何？』という哲学っぽい問題にまで踏み込んでないです。ともあれこの前提によって、不思議なことに色々な現実の問題を解決することができるのです。

第 3 章

微分の基礎

せっかく微分がでてきたので、数学的にしっかり基礎づけしていきましょう。

3.1 定義のおさらい

定義 3.1. I を区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を (連続とは限らない) 関数、$x \in I$ とする。このとき、極限

$$f'(x) := \lim_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

が存在するとき、$f'(x)$ を f の x における**微分係数**、あるいは単に**微分**という。

定義 3.2. I を区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を (連続とは限らない) 関数とする。I **上微分可能である**とは、任意の $x \in I$ に対して、微分係数 $f'(x)$ が存在する時を言う。このとき、関数

$$f' : I \to \mathbb{R}$$

を、f の**導関数**、あるいは単に**微分**という。

$y \to x$ を、$y = x + h$ の変数変換によって

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

と書き換えることも多いし、なんなら高校の教科書での定義はこっちですね。

3.2 例題集

3.2.1 べき関数

まずは簡単なところから行きましょう。$n > 0$ を整数として、

$$f(x) = x^n$$

を微分してゆきましょう。このとき

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} hx^{n-2} + \cdots + h^{n-1} \to nx^{n-1} \quad \text{as } h \to 0$$

ゆえに
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
です。

3.3 微分の性質

3.3.1 微分可能ならば連続

定理 3.3. I を区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を I 上微分可能な関数とする。このとき、f は I 上連続である。

証明. 任意の $a \in I$ と、十分 0 に近い $h > 0$ に対して、
$$f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \to f'(a) \cdot \lim_{h \to 0} h = 0$$
ゆえに f は連続。 □

3.3.2 線形性

定理 3.4. I を区間、$f, g : I \to \mathbb{R}$ を I 上微分可能な関数、$a, b \in \mathbb{R}$ とする。このとき、関数
$$af + bg : I \to \mathbb{R}; x \mapsto af(x) + bg(x)$$
も I 上可微分であり、
$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x)$$
が成り立つ。

証明. 任意の $x \in I$ と十分 0 に近い h に対して、
$$\begin{aligned} &\frac{\{af(x+h) + bg(x+h)\} - \{af(x) + bg(x)\}}{h} \\ =&a\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + b\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ \to&af'(x) + bg'(x) \end{aligned}$$
□

例題 3.5. 多項式関数
$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{R}[x]$$
は、$\mathbb{R}$ 上微分可能であり、
$$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_1$$
が成り立つ。

3.3.3　積の微分

定理 3.6. I を区間、$f, g : I \to \mathbb{R}$ を I 上微分可能な関数とする。このとき、関数

$$fg : I \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x)g(x)$$

も I 上可微分であり、

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

がなりたつ。

証明. 任意の $x \in I$ と十分 0 に近い h に対して、

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
=&\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
=&f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x) \\
\to&f(x)g'(x) + f'(x)g(x)
\end{aligned}$$

(最後に可微分関数の連続性を使用しています) □

3.3.4　商の微分

定理 3.7. I を区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を I 上微分可能かつ、$f(x) \neq 0$ ($^\forall x \in I$) をみたす関数とする。このとき、

$$\frac{1}{f} : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{f(x)}$$

もまた I 上微分可能であり、

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

が成り立つ。

証明. 任意の $x \in I$ と十分 0 に近い h に対して、

$$\begin{aligned}
&\frac{1/f(x+h) - 1/f(x)}{h} \\
=&-\frac{1}{f(x)f(x+h)}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
\to&-\frac{f'(x)}{f(x)^2}
\end{aligned}$$

□

例題 3.8. f, g を I 上微分可能な関数で、g は I 上 0 にならないとする。このとき、積の微分と商の微分から

$$\frac{f}{g} : I \to \mathbb{R}$$

も I 上可微分関数であり、

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

例題 3.9. $x \neq 0$ に対して

$$(x^{-1})' = \frac{(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$$

一般に、任意の整数 $n > 0$ について

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$$

であることが帰納法により次のように示せる。仮に $(x^{-n+1})' = (-n+1)x^{-n}$ が成り立つとすると、

$$(x^{-n})' = (x^{-1} \cdot x^{-n+1})' = -x^{-2} \cdot x^{-n+1} + x^{-1} \cdot (-n+1)x^{-n} = -nx^{-n-1}$$

ゆえに一般の整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

が成り立つ。

3.4　平均値の定理

まず補題として、ロルの定理を証明します。

定理 3.10 (ロルの定理)**.** $a, b \in \mathbb{R}$、$a < b$ とする。連続写像 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が開区間 (a, b) で微分可能であり、かつ $f(a) = f(b)$ とする。このとき、ある $c \in (a, b)$ が存在して、$f'(c) = 0$ を満たす。

証明. 閉区間 $[a, b]$ はコンパクトだから、最大値最小値の定理より、値域には最大値 M と最小値 m が存在する。もし $m = M$ であれば、f は定値関数だから定理は自明。ゆえに $m < M$ であるとしてよい。このとき $m < f(a) = f(b)$ または $f(a) = f(b) < M$ である。ここでは $f(a) = f(b) < M$ の場合を証明する ($m < f(a) = f(b)$ の場合も同様)。

$M = f(c)$ となる $c \in (a, b)$ をとる。このとき、$f'(c) = 0$ を証明する。仮に $L := f'(c) > 0$ であるとすると、f は $c \in (a, b)$ で微分可能なので、$\varepsilon := L/2 > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L\right| < \frac{L}{2}$$

よって $0 < |x - c| < \delta$ のとき、

$$\begin{aligned} & -\frac{L}{2} < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L < \frac{L}{2} \\ \iff & \frac{L}{2} < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < \frac{3L}{2} \end{aligned}$$

x として $0 < x - c < \delta$ を満たすように取っておけば、上記の不等式の辺々に $x - c$ をかけることで

$$f(x) - f(c) > \frac{L}{2}(x - c) > 0$$

ゆえに $f(x) > f(c) = M$ となり、M が最大値であったことに矛盾。

もし $L := f'(c) < 0$ のときは、$\varepsilon := -L/2 > 0$ に対して、ある $\delta' > 0$ が存在して、

$$0 < |x - c| < \delta' \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < -\frac{L}{2}$$

より、$0 < |x - c| < \delta$ のとき、

$$\begin{aligned} & \frac{L}{2} < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L < -\frac{L}{2} \\ \iff & \frac{3L}{2} < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < \frac{L}{2} \\ \therefore\ 0 > x - c > -\delta' \Rightarrow & f(x) - f(c) > \frac{L}{2}(x - c) > 0 \end{aligned}$$

より $f(x) > f(c) = M$ となって矛盾。以上より、$f'(c) = 0$ でなければならない。 □

定理 3.11 (平均値の定理)**.** 連続写像 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が開区間 (a, b) で微分可能とする。このとき、$c \in (a, b)$ が存在して、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

を満たす。

証明*.*

$$g : [a, b] \to \mathbb{R}; x \mapsto (b - a)(f(x) - f(a)) - (x - a)(f(b) - f(a))$$

を考えると、これは仮定より $[a, b]$ 上連続かつ $x \in (a, b)$ で微分可能。また

$$g(a) = g(b) = 0$$

ゆえ、ロルの定理より

$$0 = g'(c) = (b - a)f'(c) - (f(b) - f(a))$$

となる $c \in (a, b)$ が存在する。ゆえに

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

系 3.12 (合成関数の微分)**.** I, J を区間、$u : I \to J$ と $f : J \to \mathbb{R}$ をそれぞれ可微分関数とする。さらに導関数 $f' : J \to \mathbb{R}$ は連続でもあるとする。このとき、合成関数

$$f \circ u : I \to \mathbb{R}; x \mapsto f(u(x))$$

も微分可能であり、

$$(f \circ u)'(x) = f'(u(x))u'(x)$$

が成り立つ。

証明. 任意の $x \in I$ と十分 0 に近い h をとる。証明は二つのケースに分けられる。

まずある x の近傍が存在して、十分 0 に近い任意の h に対して $u(x) \neq u(x+h)$ であるとする。以下では $u(x) < u(x+h)$ であるとする ($u(x) > u(x+h)$ でも同様)。仮定より f は $[u(x), u(x+h)] \subset J$ において連続かつ微分可能なため、平均値の定理より

$$\frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{u(x+h) - u(x)} = f'(c_h)$$

を満たす $c_h \in [u(x), u(x+h)]$ が存在する。よって

$$\frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{h} = f'(c_h)\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

$h \to 0$ のとき $c_h \in [u(x), u(x+h)]$ であるから $c_h \to u(x)$。また仮定より f' は連続だったから、$f'(c_h) \to f'(u(x))$ となる。さらに u は微分可能だったから、すべてまとめて

$$(f \circ u)'(x) = \lim_{h \to 0}\frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{h} = \lim_{h \to 0}\left\{f'(c_h)\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right\} = f'(u(x))u'(x)$$

次に任意の x の近傍に対して、どのような h をとっても $u(x) = u(x+h)$ であるようなものが存在するとする。このとき、

$$\frac{f(u(x+h)) - f(u(x))}{h} = \frac{f(u(x)) - f(u(x))}{h} = 0$$

ゆえに $(f \circ u)'(x) = 0$ である。一方

$$u'(x) = \lim_{h \to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{u(x) - u(x)}{h} = 0$$

が成り立つ[*1]。ゆえに与式は成り立つ。 □

3.5　テイラー展開

[*1] これが成り立つのは、大前提として $(u(x+h) - u(x))/h$ の極限が存在するという仮定が含まれているからです。「任意の x の近傍に対して、どのような h をとっても $u(x) = u(x+h)$ であるようなものが存在する」という仮定から、数列 h_n であって、$h_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ かつ、$u(x+h_n) = u(x)$ $({}^\forall n)$ を満たすものが作れます。これについて、$u'(x)$ は $(u(x+h_n) - u(x))/h_n = 0$ の $n \to +\infty$ に関する極限に一致するというわけです。

第 4 章

運動方程式を解く

ニュートンの第二法則・運動方程式は現状、「力と質点の運動の関係ををこう定義してみた」という以上のものではないです。本章では、いくつか現実の問題に対して運動方程式を立てて、「質点の運動を予測する」というところまでやっていきましょう。

4.1 自由粒子

定義 4.1 (自由粒子)**.** 質点 (I, γ, m) が力場 $F(t, x, y, z) = 0$ に束縛されるとき、その質点を**自由粒子**という。

自由粒子の運動は慣性の法則によって等速直線運動をする…と思われるかもしれませんが、これは妥当ではありません。慣性の法則は「等速直線運動する質点には力が働いていない」とする仮定なので、自由粒子が等速直線運動するかどうかはまだ分からないのです。ということで、自由粒子の運動を調べていきましょう。

自由粒子の運動方程式は $m\gamma''(t) = 0$ ですが、m は定数なので

$$\gamma''(t) = 0$$

を考えればよいです。これは前章で見た通り、γ' が定値写像になることと同値な等式です。すなわち等速直線運動です。

さて、

$$\gamma'(t) = v_0 \in \mathbb{R}^3$$

とおいて、γ を求めていきましょう。再び平均値の定理を使って、任意の $a < b$ に対して、ある $c \in (a, b)$ が存在して、

$$\frac{\gamma(b) - \gamma(a)}{b - a} = \gamma'(c) = v_0$$

が成り立ちます。すなわち

$$\gamma(b) = v_0(b - a) + \gamma(a)$$

です。ここから少し直感的に議論しますが、b がめちゃくちゃ a に近い実数 $b = a + \Delta t$ であるとしましょう。

$$\gamma(a + \Delta t) = v_0 \Delta t + \gamma(a)$$

この式から読み取れるのは、「a から少しだけ値をずらした値が、$v_0\Delta t + \gamma(a)$ で得られる」です。もし a を $a+\Delta t$ に、$a+\Delta t$ を $a+2\Delta t$ にしても同様に

$$\begin{aligned}\gamma(a+2\Delta t) &= v_0\Delta t + \gamma(a+\Delta t)\\ &= 2v_0\Delta t + \gamma(a)\end{aligned}$$

などが成り立ちます。a からの微小変化 Δt の大きさに比例して、v_0 の係数が増えていくので、多分こうでしょう。

$$\gamma(t) = v_0 t + \gamma(a)$$

$\cdots$もう少しまともにみましょう。積分の登場です。

4.2　積分と微分積分学の基本定理

閉区間 $I=[a,b]$ 上の関数 $f: I \to \mathbb{R}$ に対して、始点 a から微小な区間 Δx を積み上げて $t \in I$ まで足し上げることを考えます。より一般的な場合を考えて、a から t までの閉区間の分割の取り方を次のようにしましょう。

定義 4.2. 閉区間 $[a,t]$ に対して、数列 $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ が

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+t} = t$$

を満たす時、$\Delta := \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}$ を閉区間 $[a,t]$ の**分割**という。

既に動機は示しているので、次のようなことを考えたいですね。つまり、$\Delta := \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}$ を閉区間 $[a,t]$ の分割としたとき、

$$F_\Delta := \sum_{i=0}^{n} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

ただし $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ としています。これを $x_{i+t} - x_i$ が 0 に向かいつつ、区間をギャンギャンに細分する極限を考えたいです。その様子を一挙に表すために、分割の幅を考えます。

定義 4.3. $\Delta := \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}$ を閉区間 $[a,t]$ の分割としたとき、

$$|\Delta| := \max\{x_{i+1} - x_i \mid i = 0, \ldots, n\}$$

を、分割 Δ の**幅**という。

分割 Δ の幅を 0 に向かわせる極限 $|\Delta| \to 0$ を考えることで、区間の幅を狭めつつ細分も細かくするという状況を考えることができるわけです。

これで積分を定義する準備が整いました。

定義 4.4. $I := [a,b]$ を閉区間、$t \in I$、$f: I \to \mathbb{R}$ を (連続とは限らない) 関数とする。$\Delta := \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}$ を閉区間 $[a,t]$ の任意の分割とする。このとき、極限

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

が、$c_0, \ldots, c_n$ の選び方によらず収束するとき、関数 f は $[a,t]$ で**積分可能**であるといい、極限

$$\int_a^t f(x)dx := \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

と書き、f の a から t への **(リーマン) 積分**とよぶ。

定義はできたものの、これがいつ収束するのかを調べておく必要があります。実は比較的広い状況で積分可能であることが以下のように示せます。

定理 4.5. 関数 f が閉区間 $[a,t]$ で連続ならば、その閉区間で f は積分可能である。

証明. TODO: 一様連続だから。 □

もともと「微分して $\gamma'(t) = v_0$ となる γ を求めたい」ということでここまで進めてきました。実際、しっかりこれを証明することができます。

定理 4.6. 微分積分学の基本定理

証明. TODO □

系 4.7. $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ を C^1 級関数とし、$f := F'$ とする。このとき

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

微分積分学の基本定理によって、ある関数 f の積分を求めるためには、微分して f になる関数 F を求めれば良いことがわかりました。つまり、積分は微分の逆演算であるということです。ここに、積分の結果が関数なのか実数なのか分からなくなることが出てきたので、用語を定義しておきます。

定義 4.8. $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ を C^1 級関数とし、$f := F'$ とする。このとき、F を f の**原始関数**または**不定積分**と呼び、

$$F(x) := \int f(x)dx$$

と書く。また、

$$\int_a^b f(x)dx$$

を、f の **(a から b にかける) 定積分**と呼ぶ。

4.3　有名な微分と積分

4.4　一様な力場の運動

定義 4.9. 定値写像であるような力場

$$F : I \times \mathbb{R}^3 \to \{f\} \subset \mathbb{R}^3$$

を、**一様な力場**という。

例として、$a > 0$ に対して、一様な力場 $F(t, x, y, z) = (0, 0, -a)$ に束縛される質点の運動を調べましょう。

$$\gamma(t) := (\gamma_x(t), \gamma_y(t), \gamma_z(t))$$

とおいて、成分ごとに調べていきましょう。