2021 年线性代数与解析几何期末试题

一、填空题（共 5 题，每题 3 分）

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 3 元列向量。$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+6\boldsymbol{\alpha}_3]$，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则 $|\boldsymbol{B}|=$_________.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,x)^{\mathrm{T}}$ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值所对应的特征向量，则 $x=$_________.

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 由 3 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 交换 1,2 行得到，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 交换第 1,3 列得到，矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{15}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{16}=$_________.

4. 直线 $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 与平面 $2x+y-z-3=0$ 的交点是_________.

5. 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+x_2^2+2tx_2x_3+4x_3^2$ 的正惯性指数为 3，则参数 t 的取值范围为_________.

二、选择题（共 5 题，每题 3 分）

1. 设 4 元非齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的系数矩阵的秩为 2，$\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的两个解，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是导出组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关的解，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 (　　)

   A. $\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2)+k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$　　B. $\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)+k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$

   C. $\boldsymbol{X}_1+k_1(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2)+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$　　D. $\boldsymbol{X}_1+k_1(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2)+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_2$

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -2 & x & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} y & & \\ & 2 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$ 相似，则参数 x,y 的值为 (　　)

   A. $x=0,y=-1$　　B. $x=0,y=1$　　C. $x=y=-1$　　D. $x=y=0$

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，则下列说法正确的有多少个? (　　)

   (a) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$

   (b) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$

   (c) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$

   (d) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$

   A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. 设三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$ (　　)

   A. $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$　　B. $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$　　C. $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$　　D. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$

5. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，n 元向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，n 元向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，则下列说法正确的是 (　　)

A. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关　　　B. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关

C. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关　　　D. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关

三、(8 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 5x_5 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 - 11x_5 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 12x_5 = 6 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 13x_5 = t \end{cases}$$

有解，求参数 t 以及方程组的结构式通解。

四、(8 分) 设实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ 1 & & 1 & \\ & -3 & & 4\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^*=8\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{-1}+12\boldsymbol{E}_4$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

五、(9 分) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & & \\ 1 & -1 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1\end{bmatrix}$ 求 $\boldsymbol{A}^{2014}$ 以及 $|\boldsymbol{A}^{2014}|$.

六、(9 分) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,a,3)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基，$\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 在这个基下的坐标为 $(b,c,1)^{\mathrm{T}}$.

1. 求 a,b,c;
2. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个基，并求 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个过渡矩阵。

七、(9 分) 在 $\mathbb{R}^3$ 中，对于任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$，规定 $T(\boldsymbol{\alpha})=(x-y,y-z,z)^{\mathrm{T}}$.

1. 求线性变换 T 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 下的矩阵.

2. 求 T 的值域和秩.

八、(10 分) 已知点 $P(2,0,1)$ 和直线 $L:\begin{cases}x-y-4z+12=0\\2x+y-2z+3=0\end{cases}$

1. 将直线 L 化为对称式方程;

2. 求点 P 关于直线 L 的对称点.

九、（13 分）

1. 用正交线性变换化实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

为标准型，并写出所用的正交变换;

2. 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范型.

十、（4 分） 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 元非零列向量，$\boldsymbol{E}_n$ 为 n 阶单位矩阵. 证明

1. $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$

2. 当 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$ 时，矩阵 A 为降秩矩阵。