Note_7/11/21_SV

Computational Topology

Lec03

$\boldsymbol{S}^2 \approx \boldsymbol{R}^2 \cup \{\infty\}$

- 球面与二维平面不同胚，但是和二维平面加上无穷远点同胚
  - 例如，将地球表面映射到平面地图上
  - 采用北极点投影方式map，上半球面投射到单位圆外，下半球面投射到单位圆内，北极点到无穷远点

2-manifold(with boundary)

- Def：若一个拓扑空间内所有点都在open discs中（或者每个点都有类似欧几里得点邻域），则称该拓扑空间为2-manifold
  - 例如，球面和二维平面
  - 有边界的2-manifold是指内部每一个点都有与D或者D_+同胚的邻域（且后种类型的点一定要有）的拓扑空间
- Def：有边界的2-manifold的边界是该空间中邻域同胚与half disc的点的几何
  - 集合A的∂A的定义也同上
  - 1-manifold就是circle或不相交的circles的集合
  - 有边界的1-manifloe其实是有端点的线段的集合，边界为端点的集合
  - 0-manifold就是任意离散点集

    - 2-manifolds也称surfaces，在理论和应用上都得到了良好的研究，是一类很好的空间

orientable manifolds

- 基于2-manifold
    - 莫比乌斯环是non-orientable，圆柱面是orientable，原因是前者一面，后者两面
    - 莫比乌斯环上的每个点都有两个边
    - 沿莫比乌斯环loop的顺时针轨迹经过扭曲处会反转orientation，该轨迹称为orientation reversing（不反转的称为orientation preserving）
- Def：如果2-manifold上所有的闭曲线都是orientation presevering，则称该流形是orientable，否则是non-orientable

0-, 1-manifolds

- 0-manifold：每点都必须有同胚于R^0（一个点）的邻域，是一个离散空间
    - 例如，Z^2，是每一点都具有整数坐标且在R^2中
    - 2Z^2，也就是每一点都具有偶数坐标且在R^2中，同胚于Z^2
- 1-manifold：有四种情况
    - 连通，compact，同胚于S1
    - 连通，compact且有边界，同胚于单位闭区间
    - 连通，non-compact，同胚于R1或者单位开区间
    - 连通，non-compact且有边界，同胚于R1+或者单位左闭右开区间

cover

- Def：$A \subseteq X$，$family\ \{C_j | j \in J\}$，若簇在X的幂集中，且满足$A \subseteq \cup_{j \in J} C_j$，则该簇为A的cover

- open cover：由open sets组成的cover
- A的subcover：A的一个cover的子集，且仍然是一个cover

finite subcover

- Def：集合A的每一个open cover都有一有限的subcover，则A是compact的
    - 对应的，拓扑空间$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{X}$是compact的，若$\boldsymbol{A}$的每一个open cover都有一个有限的subcover
    - compact的例子
    - finite subcover的例子

Lec04

- Def：chart

Hausdorff

- Def：hausdorff
- Def：separable

d-manifold

- Def：d-manifold：一个separable、hausdorff空间中的每一个x上都存在一个d维的chart，即x由同胚于Rd的邻域
    - 有边界的d-manifold
    - d-manifold的边界
- Def：embedding

考虑列举compact、connected、closed的2-manifolds

- S2

- 有边界的2-manifold：莫比乌斯环
- Klein bottle（K2）

torus

- 矩形—圆柱面—torus

projective plane

- （Real） Projective plane（RP2）（也称，Dunce hat）

connected sum（胶合同阶流形）

- Def：connected sum—"#"
  - 图示
  - 一旦胶合一个非orientable成分，结果就是非orientable

classification of surfaces

- 每一个compact、连通的2-manifold都同胚于S2或者T2的#或者RP2的#

$$\boldsymbol{R}P^2 \# \boldsymbol{R}P^2 \approx \boldsymbol{K}^2$$

Lec05

affine independence

- Def：（combination）linear combination—affine combination—convex combination
  - Def：convex hull：集合S的所有convex combinatoin的集合称为S的凸包
  - 图例
- Def：（independence）linearly（affinely）independence

    - 缩写：LI、AI
    - 举例子

simplex

- Def：（simplex）（k+1）个AI点集的凸包S是k-simplex
    - simplex的dimension为k
    - 各点为k-simplex的vertices
    - 对k举例
    - k-simplex同胚于k-ball
        - k-ball即B_k定义
        - k-ball的边界为（k-1）sphere
    - 高阶simplex由低阶simplex构成

face

- Def：（face/coface）
    - $\leq, \geq, \preceq, \succeq$

simplicial complex

- Def：simplical complex K是指simplices的集合，满足：
    - 1、K中每一个simplex的face也在K中
    - 2、K中两个simplex的交集如果非空则为二者的共同face，由1也在K中
    - 例子（为simplicial complex于非simplicial complex）
    - K的维度和其中最高维simplex的维度一样
    - 与流形的区别在于一个连续一个离散。通过同胚联系

underlying space

- Def：一个simplicial complex K的underlying space是指K中所有simplex和从ambient Euchidean space继承的拓扑构成的空间。
    - 也称为K的多面体
    - 一些性质

abstract simplicial complex(ASC)

- Def：（ASC）abstract simplicial complex S：有限非空集合的collection，有若A在S中，B为A的非空子集，则B也在S中
    - 对比simplicial complex的定义
    - S中的集合称为S的simplices，其维度有表达式
    - 上述表达式显示了此时的simplex的定义与通常定义的一致性
    - S中的单例集合称为其的vertices，注意其与几何simplicial complexes中的0-simplices的对应关系
    - ASC的例子
    - 已知几何simplicial complex K，通过取K中每个simplex的vertices的几何，可以得到对应的ASC S。
        - 此处S称为K的vertex scheme；K称为S的geometric realization

Lec13

groups

- Def：group为一个集合G与一个定义在G中元素上的二元运算且满足：
    - 运算是可结合的
    - 对该运算，存在G中元素e，使得其与其他任意元素a运算结果都为a。e称为identity element

- 对该运算，任意G中元素a，都存在a‘，使得a与a’运算结果为e，a‘称为a的逆
- G在运算下闭合，即任意俩G中元素的运算结果仍然在G中
- 若G有限，group的阶为G中元素的个数。若运算已知，一般以G表示group
- 例子
- 若运算可交换，则称该group为Abelian group，G为abelian
- Def：induced operation：S为G的子集，若S也在运算下闭合，则该运算称为S上来自G的induced operation
- Def：subgroup：H为G的子集，且H在运算下闭合，与运算合为一个group，则H为group的一个subgroup
    - TH：H为subgroup当且仅当：
    - 1、H在运算下闭合
    - 2、G中的e也在H中
    - 3、H包含其中任意元素的逆
    - 例子
- Def：cosets
    - left coset
    - right coset
    - 若G为abelian，则left与right coset等价
- 想用group来表征拓扑空间，因此，需要能够表征group的结构。可以用groups之间的map实现

homomorphisms

- Def：homomorphism：从G到G’的一个map称为homomorphism，若满足：

    - $\psi(a *_G b) = \psi(a) *_G \psi(b)$
    - 定理
    - Def：kernel：G‘的identity subgroup的逆同态为G的subgroup，称为kernel
        - kernel为subgroup，也可以定义cosets
    - 函数属性在group中的对应
        - 1-1——monomorphism
        - onto——epimorphism
        - bijection——isomorphism
            - groups之间的isomorphism就像拓扑空间之间的homeomorphism
    - Def：Finitely generated

Homology groups

讨论对于simplicial complex的homology，即simplicial homology。homology研究空间中的hole

- Def：p-chain：K为simplicial complex，p<=dimK，K的一个p-chain为K的p-simplices的formal sum（linear combination）
    - 公式
    - ai可以在Z2、Z、R、Q中
    - 例子
        - 注意chain不需要是连通的
        - chain也可以加减

Lec14

p-chain group C_p

- Def：p-chain group：p-chains与来自p-chains的群K的addition
    - 记为 $< C_p(K), +_2 > \ or \ < C_p(K), \boldsymbol{Z} >, \ or \ simply \ C_p(K), \ or \ even \ C_p$
    - Cp为一个Abelian group
        - 一些结果
    - elementary p-chains

使用boundary——Cp与Cp-1之间的homomorphisms以连接这些chain groups

p-boundary map $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$

- Def：boundary of a single simplex(an elementary chain)：p-simplex的boundary是其（p-1）faces的和
    - 公式
    - $\partial_p \sigma$是一个（p-1）chain
- Def：boundary of a p-chain：其p-simplices之boundaries之和
    - 也是一个（p-1）chain
    - 例子
    - boundary映射p-chain到（p-1）-chain
    - 是一个homomorpshism，称为p-th boundary map或者homomorphism
- Def：chain complex：一系列由boundary homomorphism连接的chain groups
    - 图示
    - 这里的complex不同于simplicial complex中的意思，chain complex实际上是一个ASC，其元素由boundary homomorphism连接

p-cycle

- Def：p-cycle：具有空boundary的p-chain
  - simplicial complex K的p-cycles形成一个group，记为Zp，为Cp的一个subgroup。且有$Z_p = ker\partial_p$（Zp是p-th boundary homomorphism的kernel），Zp是一个Abelian group
  - 由于vertex的boundary一定是空，因此0-chain一定是0-cycle

p-boundary

- Def：p-boundary：是指作为某个（p+1）-chain的边界的p-chain
  - 可以得到p-boundary形成的group Bp，Bp是Zp的subgroup
  - Bp是（p+1）-th boundary map的image
  - Bp是一个Abelian group
  - 例子

Lec15

fundamental lemma: $\partial\partial d = 0$

- **p-homology group** $H_p = Z_p/B_p$

ord(C_p)

rank $H_p = \beta_p$: p-th Betti number

Lec16

homology of torus & p-ball

Euler-Poincare theorem: $\chi = \sum_p (-1)^p \beta_p$

boundary matrix $[\partial_p]$

EROs

ECOs

Lec19

persistent homology

persistence of $[z]$

creator and destroyer simplices

Lec22

persistence diagram

fundamental lemma of persistent homology

matrix reduction using ECOs