

# 构造径向基函数实现对三维离散磁场的无散插值

侯传鹏、何建森

北京大学 地球与空间科学学院

2022 年 2 月份

## 磁场插值

插值是一种通过已知的、离散的数据点，推求新数据点的过程或方法。受限于采样率和资源消耗等，一次实验测量过程往往只能得到有限的数据点，这时往往希望得到一个连续的曲线及目标点的数据值。对数据使用的侧重不同可以选择不同的插值方法，如，准确程度、计算成本、曲线平滑程度、需要多少已知数据点。使用不同方法，插值结果会有很大不同。比如，相较于线性插值方法，多项式插值方法得到的曲线更加平滑，且在插值点处可微，但计算花销大。

在插值过程中，可以对插值结果添加额外的限制条件。在磁场的插值过程中，一个重要约束条件是磁场散度为 0。这一条件保证了磁流体动力学 (Magnetohydrodynamic, MHD) 的数值模拟的正确和稳定。基于无散度-径向基函数(Radial Basis Functions, RBFs)的插值方法可以很好地保证磁场散度为 0 的条件，且仅需少量的数据点 (3x3x3=27 个数据点) 就可以达到二阶精度(Zhang et al., 2021)。

## MHD 方程组的数据模拟过程中磁场散度问题

在利用 MHD 方程组进行数值模拟的过程中，磁场的散度一般不能保证精确为零( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ )。比如在用离散的数据点计算磁场的空间导数引入的误差在方程迭代中导致磁场散度变化。 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  的违反通常会导致数值不稳定性和非物理的结果 (Brackbill and Barnes 1980)。

有两类方法可以尽量降低 $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ 的影响。一类是控制 $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ 带来的后果，如，扩散方法(Feng et al., 2010, Yang et al., 2018)，在这个方法中，通过加入扩散项，使数值计算产生的磁场散度无法在一区域累积，保证磁场散度在整个计算区域保持较低的相对误差。将 $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$ 作为源项加入动量方程和磁场方程中也是一种处理方法 (Powell et al., 1999)。另一类方法是修正数据点的值，保证 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。如 Poisson 方程法，该方法引入 $B_{wrong} = \nabla \Phi$ ，则 $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla^2 \Phi$ ，通过 $\Phi$ 对磁场进行修正。

除以上方法外, McNally (2011) 成功地将无散度-径向基函数 (RBFs) 应用到 MHD 方程组的数值求解过程中, 并提出一种满足  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  的有限差分算子。RBFs 已被广泛应用于求解偏微分方程和数据插值过程中。下面介绍基于 RBFs 的插值过程。

## 径向基函数 RBFs

与多项式插值方法中使用不同次数的多项式对数据进行拟合不同, RBFs 使用移至目标点的单参数函数, 函数仅和目标点和数据点的距离有关。由于 RBFs 插值过程中与网格分布无关, 这个方法可以很好地处理不同网格间、不均匀网格等上的数据插值问题。

RBFs 的基本形式如下:

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) c_j$$

其中  $\mathbf{x}$  为目标点,  $\mathbf{x}_j$  为  $N$  个已知的数据点中的第  $j$  个,  $\psi$  是径向基函数,  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$  表示两者之间的距离,  $s(\mathbf{x})$  为插值结果,  $c_j$  为待定系数。这个公式的含义是把目标点周围的径向基函数按照不同的权重 ( $c_j$ ) 求和得到插值结果。

这一插值方法的突出优点是当径向基函数  $\psi$  满足的性质, 插值结果  $s$  也将具有统一性质。因此, 如果可以构建一个散度为零的径向基函数, 磁场插值结果也自然满足磁场散度为零。

## 构建无散度的径向基函数

任意一个无散矢量场  $\vec{u}$  总可以表示成另一个矢量场的旋度  $\nabla \times \vec{w}$ 。通常需要库伦规范  $\nabla \cdot \vec{w} = 0$  来保证  $\vec{w}$  的唯一性。因此  $\vec{w}$  又可写作是另一矢量函数的旋度, 如

$\vec{w} = \nabla \times \sum_{j=1}^N \phi(\|\vec{x} - \vec{x}_j\|) c_j$ 。最终可以得到 (Yang et al., 2014):

$$\vec{u} = \nabla \times \nabla \times \sum_{j=1}^N \phi(\|\vec{x} - \vec{x}_j\|) c_j$$

将已知数据点的位置和数据值代入上述方程, 可以得到  $N$  个线性方程组, 未知数为  $c_j$ 。通过求解矩阵得到  $c_j$ , 进而计算目标点的数据值。更详细的过程请参考 Zhang et al. (2021)。

## 无散度的径向基函数插值程序检验.

参照 Zhang et al. (2021)提供的 Fortran 程序, 本文将其改写为 Python 格式, 并利用磁偶极子的磁场分布对插值结果进行检验, 检验程序也为 Python 格式。

磁偶极子的磁场分布公式为:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}) + \frac{2\mu_0 \mathbf{m}}{3} \delta^3(\mathbf{r})$$

图 1 为磁偶极子的磁场分布用于检验磁场分布公式和程序。

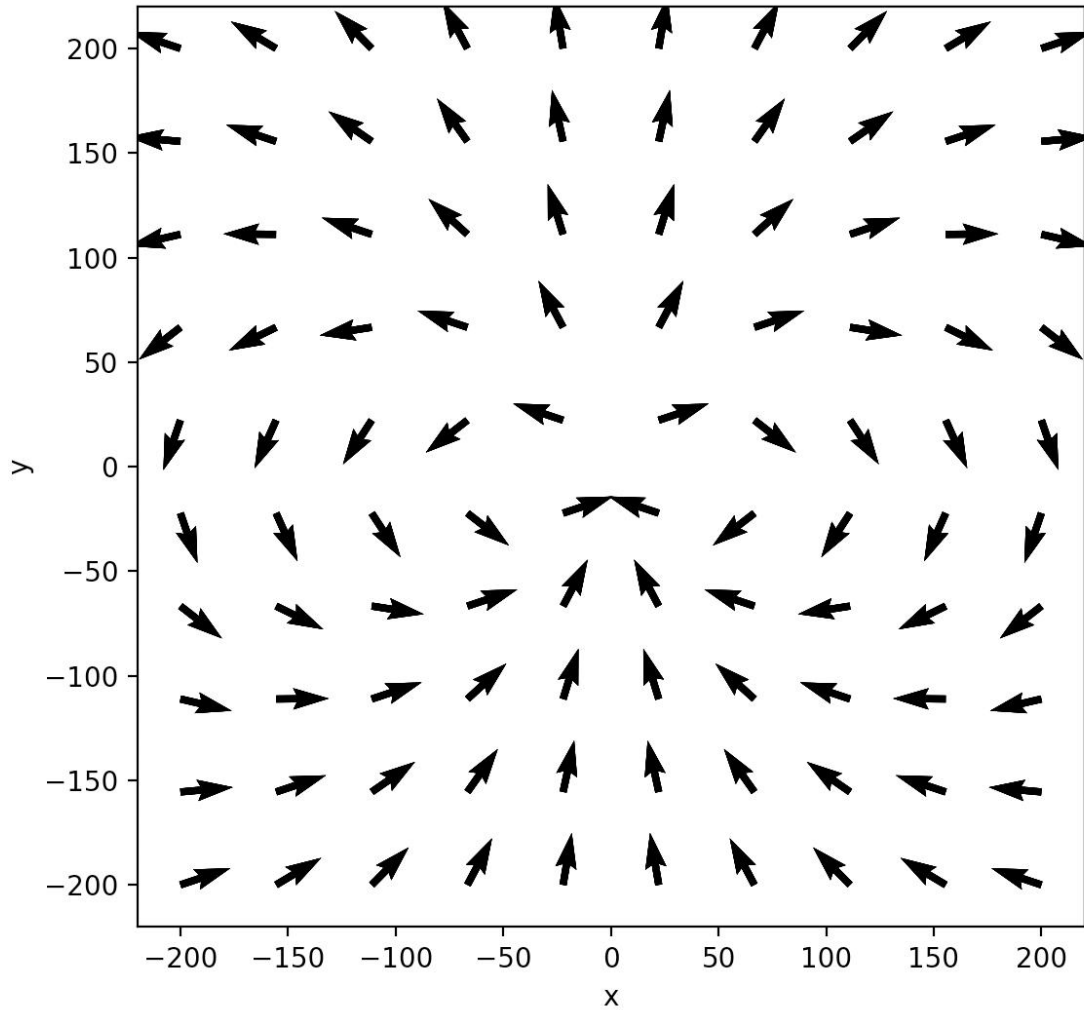


图 1. 磁偶极子的磁场分布。实际计算了三维分布, 图中仅展示了二维结果。

图 2 为目标点上理论值和 RBFs 插值结果的比较, 插值过程中仅使用目标点周围三个方向上  $3 \times 3 \times 3$  共 27 个数据点。27 个数据点可使插值结果可以达到二阶精度要求 (Zhang et al., 2021)。图中可见插值结果符合理论预测, 自然也是满足磁场散度为零。

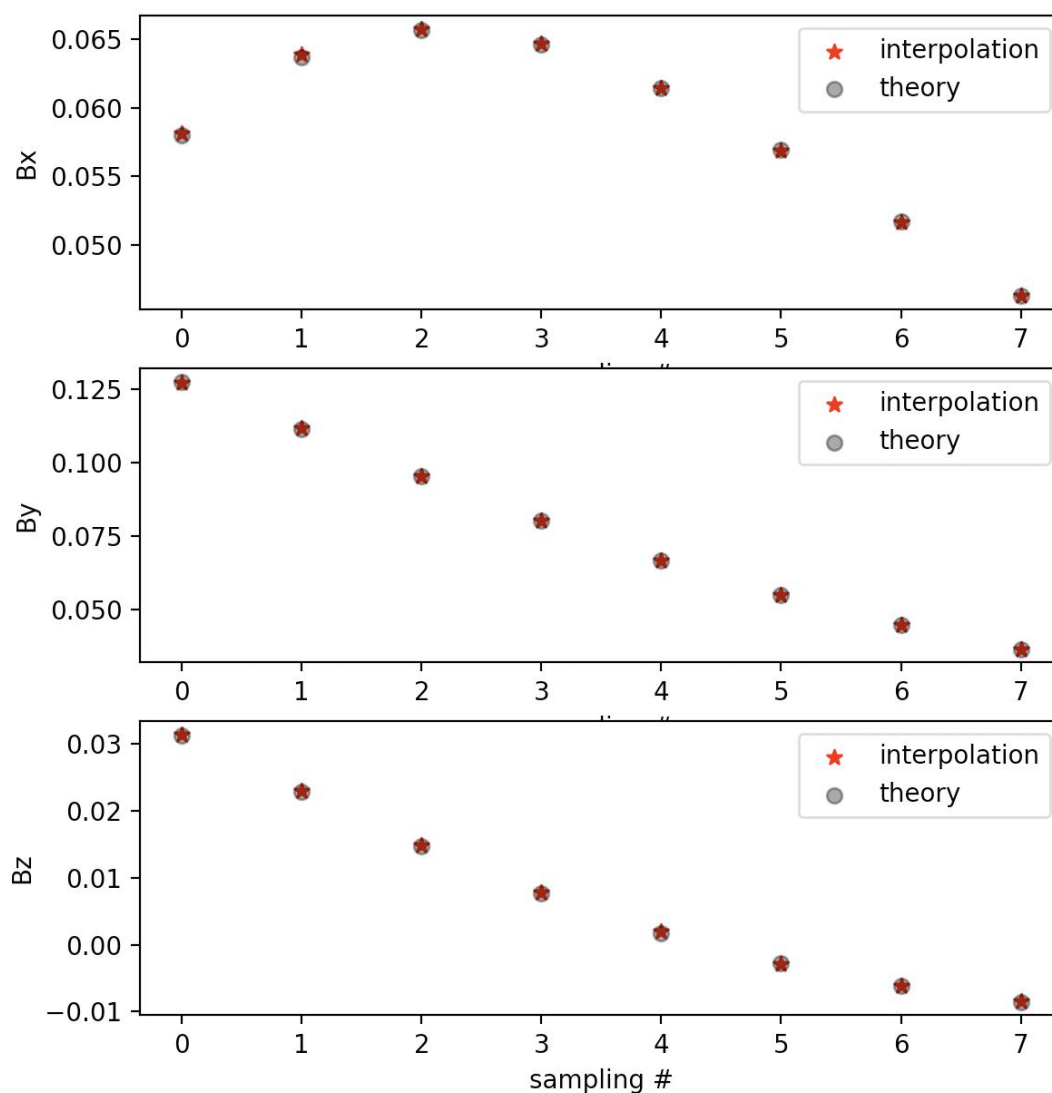


图 2 目标点上磁场理论值和 RBFs 插值结果的比较。

## RBFs 插值程序(Python)

北大网盘链接: <https://disk.pku.edu.cn:443/link/8547C2A48335DA9D9109EF3758DC2B54>  
Valid Until: 2024-05-31 23:59

百度网盘链接: <https://pan.baidu.com/s/1Wxqg81k-7Jb1PPkTGTyaYA>  
提取码: RBFB

## 参考文献

[1] Brackbill, J.U. and Barnes, D.C., 1980. The effect of nonzero  $\nabla \cdot \mathbf{B}$  on the numerical solution of the

- magnetohydrodynamic equations. *Journal of Computational Physics*, 35(3), pp.426-430.
- [2] Le Bras, S., Deniau, H. and Bogey, C., 2019. A technique of flux reconstruction at the interfaces of nonconforming grids for aeroacoustic simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 91(12), pp.587-614.
- [3] Feng, X., Yang, L., Xiang, C., Wu, S.T., Zhou, Y. and Zhong, D., 2010. Three-dimensional solar wind modeling from the Sun to Earth by a SIP-CESE MHD model with a six-component grid. *The Astrophysical Journal*, 723(1), p.300.
- [4] McNally, C.P., 2011. Divergence-free interpolation of vector fields from point values—exact  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  in numerical simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 413(1), pp.L76-L80.
- [5] Powell, K.G., Roe, P.L., Linde, T.J., Gombosi, T.I. and De Zeeuw, D.L., 1999. A solution-adaptive upwind scheme for ideal magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 154(2), pp.284-309.
- [6] Yang, S., Chen, Z., Yu, Y. and Ponomarenko, S., 2014. A divergence-free meshless method based on the vector basis function for transient electromagnetic analysis. *IEEE transactions on microwave theory and techniques*, 62(7), pp.1409-1416.
- [7] YANG, Z., SHEN, F., YANG, Y. and FENG, X., 2018. Three-dimensional MHD simulation of interplanetary solar wind. *Chinese Journal of Geophysics*, 61(11), pp.4337-4347.
- [8] Zhang, M., Feng, X., Liu, X. and Yang, L., 2021. A Provably Positive, Divergence-free Constrained Transport Scheme for the Simulation of Solar Wind. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 257(2), p.32.