复习

- 有序对(有序二元组)　$<a,b> = \{\{a\},\{a,b\}\}$
- 有序三元组, 有序n元组
- 卡氏积　$A\times B = \{ <x,y> \mid x\in A \wedge y\in B \}$
- 二元关系相关的基本概念：域、单根、单值
- 二元关系相关的运算：逆、合成、限制、象
- 基本概念和运算相关的定律：了解证明

第二章 二元关系

2.3 关系矩阵和关系图

1. 关系矩阵
2. 关系图
3. 集合

关系矩阵(matrix)

- **定义2.9** 设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $R\subseteq A\times A$, 则R的关系矩阵 $M(R)=(r_{ij})_{n\times n}$, 其中 $r_{ij}=\begin{cases}1, & a_i R a_j \\ 0, & \text{否则}\end{cases}$
- 例如, $A=\{a,b,c\}$,

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$,

$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$, 则

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

#

关系矩阵的性质

- R的集合表达式与R的关系矩阵可以唯一相互确定
- $M(R^{-1}) = (M(R))^T$.　　　(^{T}表示矩阵转置)
- $M(R_1 \circ R_2) = M(R_2) \bullet M(R_1)$.　　($\bullet$表示矩阵“乘法”，其中加法使用逻辑加法$\vee$，乘法使用逻辑乘法$\wedge$.)

例2.4

- 设 $A=\{a,b,c\}$, $R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$, $R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$,

用$M(R_1)$, $M(R_2)$确定$M(R_1^{-1})$, $M(R_2^{-2})$, $M(R_1 \circ R_1)$, $M(R_1 \circ R_2)$, $M(R_2 \circ R_1)$, 从而求出它们的集合表达式.

例题2.4(解)

- $R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$,
  $R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$,
- 解: $M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, $M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

  $M(R_1^{-1})=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$, $M(R_2^{-1})=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}$.

  $R_1^{-1} = \{<c,b>,<a,b>,<b,a>,<c,b>\}$

例题2.4(解)

- 解(续):

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R_1\circ R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$R_1 \bigcirc R_1$ = {<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>}.

例题2.4(解)

- 解(续): $M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, $M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

$$M(R_1\circ R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$M(R_2\circ R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$R_1 \bigcirc R_2$ = {<a,a>,<a,c>}.

$R_2 \bigcirc R_1$ = {<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>}.

#

关系图(graph)

- **定义2.10** 设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $R\subseteq A\times A$, 则A中元素以"○"表示(称为顶点), R中元素以"→"表示(称为有向边); 若x_iRx_j, 则从顶点x_i向顶点x_j引有向边$\langle x_i,x_j\rangle$, 这样得到的图称为R的关系图 $G(R)=\langle V,E\rangle$,其中V表示顶点集合，E表示边集合。

关系图举例

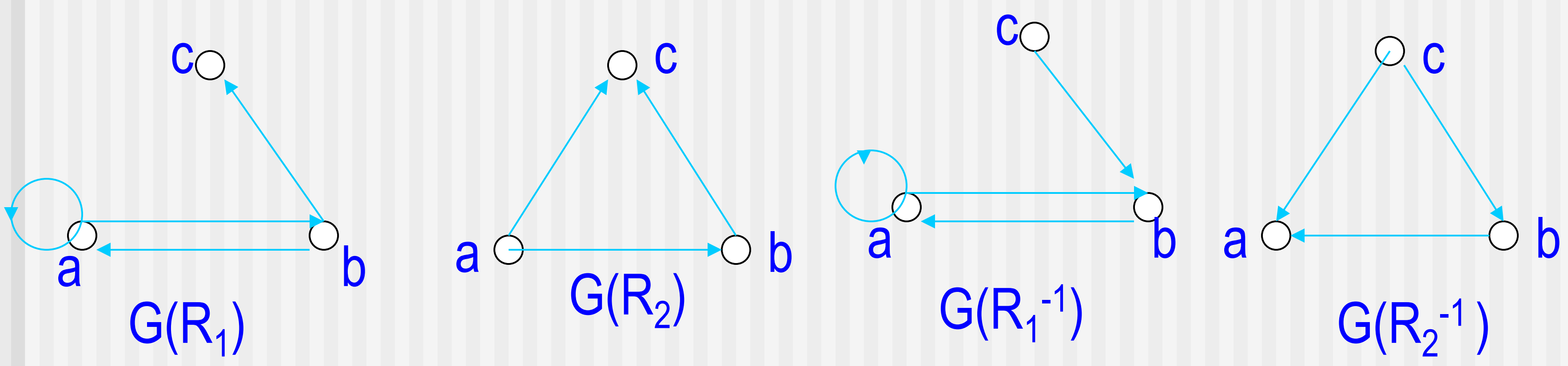
- 例如, $A=\{a,b,c\}$,

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$,

$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$,

$R_1^{-1}=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle\}$

$R_2^{-1}=\{\langle b,a\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle\}$



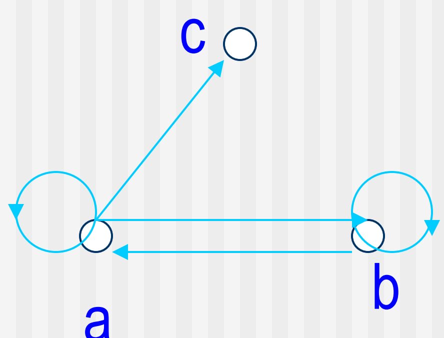
$G(R_1)$ $G(R_2)$ $G(R_1^{-1})$ $G(R_2^{-1})$

关系图举例(续)

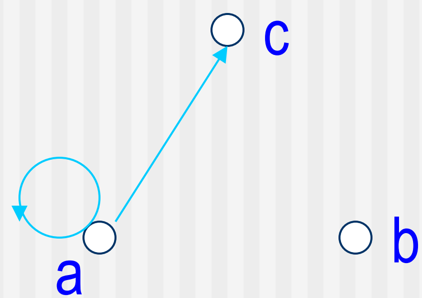
$R_1 \circ R_1 = \{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>\}.$

$R_1 \circ R_2 = \{<a,a>,<a,c>\}.$

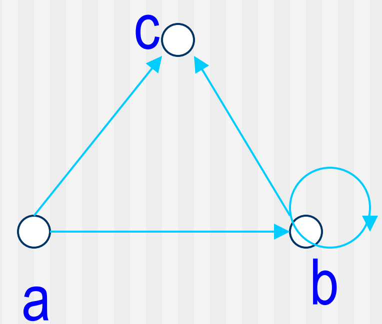
$R_2 \circ R_1 = \{<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>\}.$



$G(R_1 \circ R_1)$



$G(R_1 \circ R_2)$



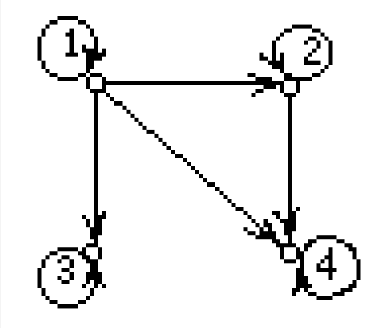
$G(R_2 \circ R_1)$

例 设A={1，2，3，4}，用集合表示法、关系矩阵和关系图给出A上的整除关系D_A。

解：$D_A=\{<x,y> \mid x,y\in A \wedge x\text{整除}y\}$

$=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,2>,<2,4>,<3,3>,<4,4>\}$

$$M_{DA}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$



注意：

1) R的集合表达式,关系矩阵,关系图三者均可以唯一互相确定。集合表达式便于书写，关系矩阵便于存储，关系图直观清晰；

2) 对于$R\subseteq A\times B$, $|A|=n$,$|B|=m$,关系矩阵M(R)是$n\times m$阶的,关系图G(R)中的边都是从A中元素指向B中元素的.

2.4 关系的性质

- 自反性(reflexivity)
- 反自反性(irreflexivity)
- 对称性(symmetry)
- 反对称性(antisymmetry)
- 传递性(transitivity)

自反性(reflexivity)

设A为一集合, $R\subseteq A\times A$, 对于任意的$x\in A$,均有xRx, 说R是A上自反的(reflexive)二元关系

$$\forall x(\ x\in A \rightarrow xRx\ ).$$

- R是非自反的 $\Leftrightarrow \exists x(\ x\in A \wedge \neg xRx)$

自反性

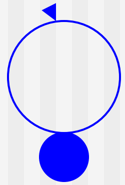
- 定理2.10: R是自反的

  $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

  $\Leftrightarrow R^{-1}$是自反的

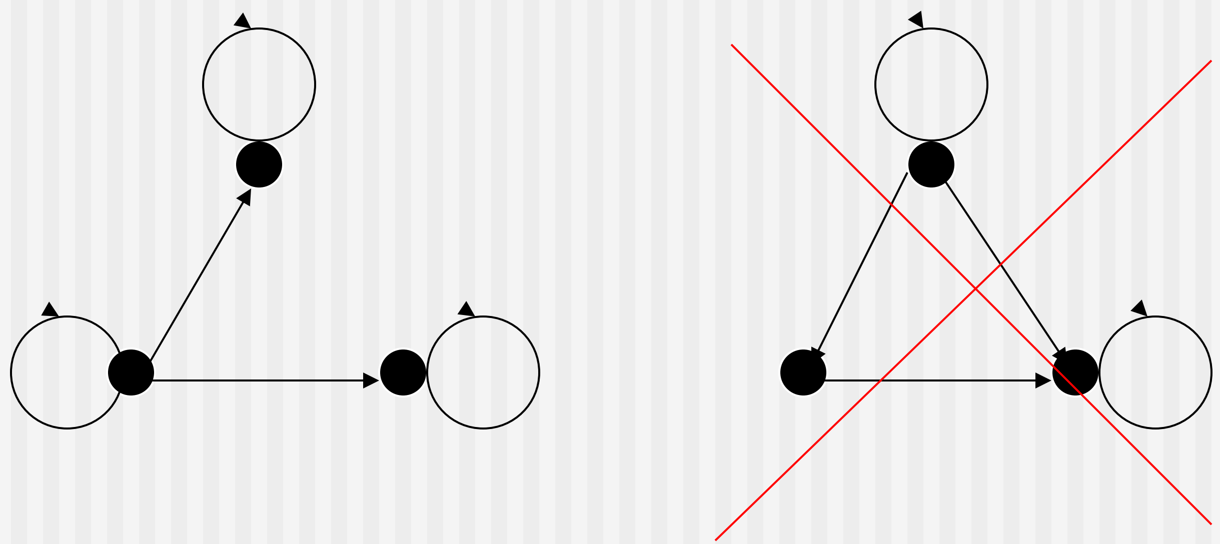
  $\Leftrightarrow$ M(R)主对角线上的元素全为1

  $\Leftrightarrow$ G(R)的每个顶点处均有环. #



自反性(举例)

例如，集合A上的全域关系E_A、恒等关系I_A、小于等于关系L_A、整除关系D_A都是A上的自反关系；包含关系(R⊆)、平面几何中的全等和相似关系也是自反关系。



反自反性(irreflexivity)

- 设A为一集合, $R \subseteq A \times A$, 对于任意的$x \in A$,均有$\langle x,x \rangle \notin R$, 则R是A上反自反的(irreflexive)二元关系

$$\forall x(x \in A \to \neg xRx).$$

- R是非反自反的 $\Leftrightarrow \exists x(\ x \in A \wedge xRx)$

反自反性

- 定理2.11: R是反自反的

  $\Leftrightarrow I_A \cap R = \varnothing$

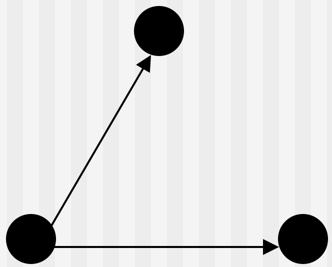
  $\Leftrightarrow R^{-1}$是反自反的

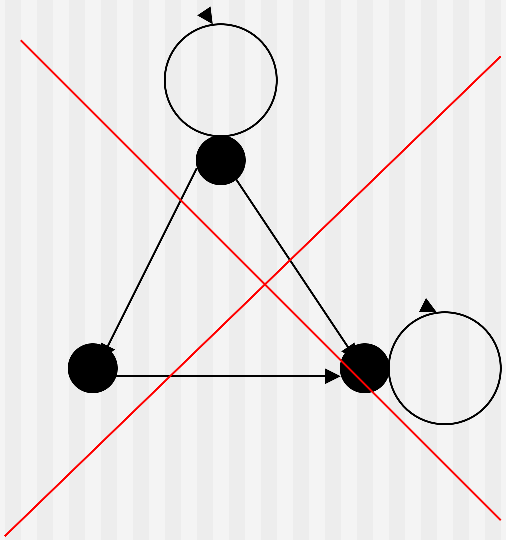
  $\Leftrightarrow M(R)$主对角线上的元素全为0

  $\Leftrightarrow G(R)$的每个顶点处均无环. #

反自反性(举例)

小于关系和真包含关系是反自反关系。





例　设A={1, 2, 3}，R_1, R_2, R_3,是A上的关系，其中

$R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle\}$

$R_3=\{\langle 1,3\rangle\}$

说明R_1, R_2, R_3,是否为A上的自反关系和反自反关系.

解：$\mathbf{R_2}$是自反的。

$\mathbf{R_3}$是反自反的。

$\mathbf{R_1}$既不是自反的，因为它不包含**<3,3>**；也不是反自反的，因为它包含了**<1,1>,<2,2>**。　**#**

既是自反的又是反自反的？　$\varnothing$上的空关系

对称性(symmetry)

- 对于任意的x,y∈A,若xRy,yRx,则称R为A上对称的(symmetric)二元关系

$$\forall x \forall y (x \in A \land y \in A \land xRy \rightarrow yRx).$$

- R非对称 $\Leftrightarrow \exists x \exists y (x \in A \land y \in A \land xRy \land \neg yRx)$

对称性

- 定理2.12: R是对称的

  $\Leftrightarrow R^{-1}=R$

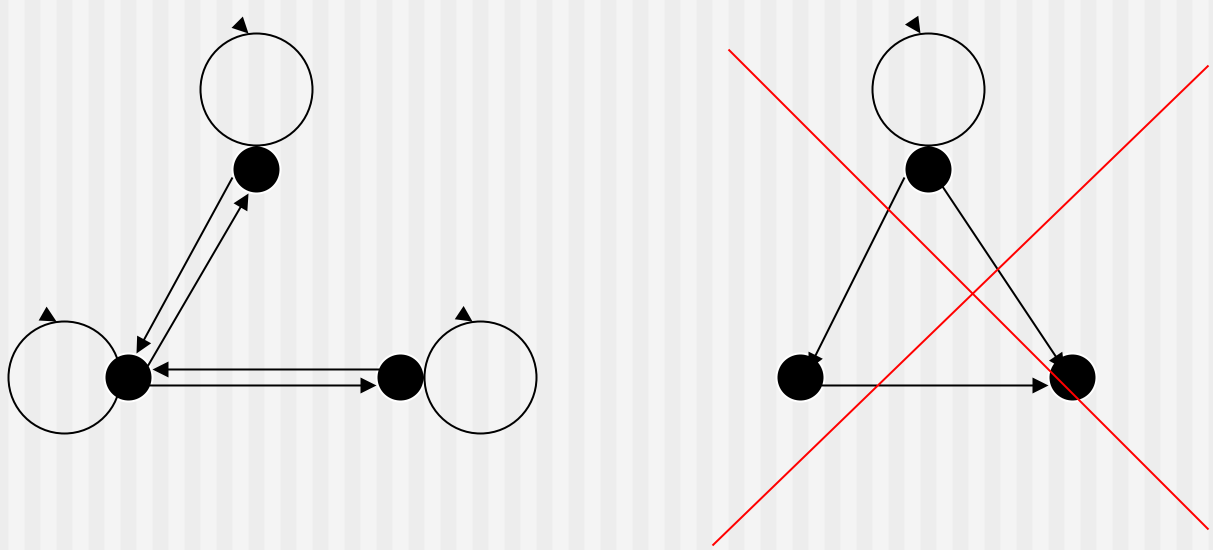
  $\Leftrightarrow R^{-1}$是对称的

  $\Leftrightarrow$ M(R)是对称的

  $\Leftrightarrow$ G(R)的任何两个顶点之间若有边, 则必有两条方向相反的有向边. #

对称性(举例)

- 恒等关系I_A、全域关系E_A是A上的对称关系。
- 同学关系、几何中的相似关系是对称关系。



反对称性(antisymmetry)

- 设$R \subseteq A \times A$, 说R是反对称的(antisymmetric),若
  $\forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x=y)$
- R非反对称 $\Leftrightarrow \exists x \exists y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \wedge x \neq y)$

反对称性

- 定理2.13: R是反对称的

  $\Leftrightarrow R^{-1} \cap R \subseteq I_A$

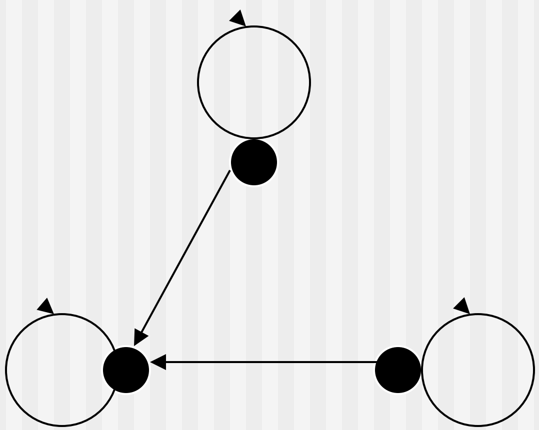
  $\Leftrightarrow R^{-1}$是反对称的

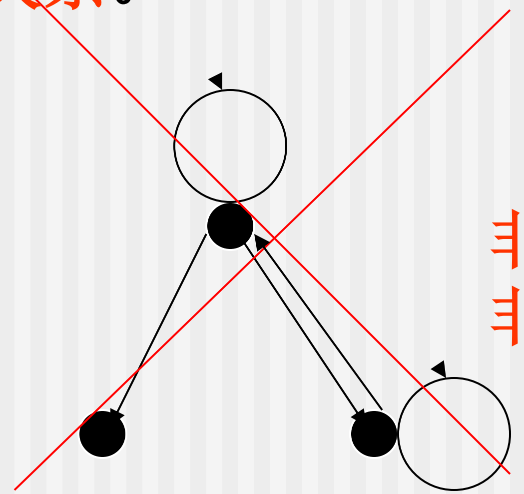
  $\Leftrightarrow$ 在M(R)中, $\forall i \forall j (i \neq j \wedge r_{ij}=1 \rightarrow r_{ji}=0)$

  $\Leftrightarrow$ 在G(R)中, $\forall x_i \forall x_j (i \neq j)$, 若有有向边 $\langle x_i, x_j \rangle$, 则必没有$\langle x_j, x_i \rangle$. #

反对称性(举例)

小于等于(≤)关系是反对称关系。

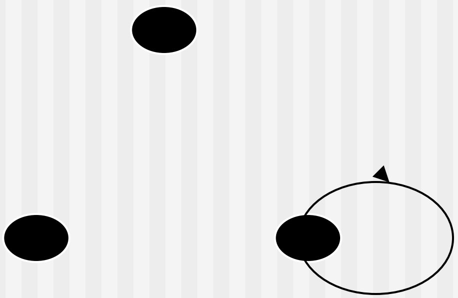




非反对称关系
非对称关系

对称且反对称关系 ？

对称且反对称？



传递性(transitivity)

- 设A为一集合, $R\subseteq A\times A$, 对于任意的$x,y,z\in A$,若xRy且yRz, 则xRz,则称R为A上传递的(transitive)二元关系

  $\forall x\forall y\forall z(x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz\rightarrow xRz)$.
- R非传递$\Leftrightarrow$

  $\exists x\exists y\exists z(x\in A\wedge y\in A\wedge z\in A\wedge xRy\wedge yRz\wedge\neg xRz)$

- 定理14: R是传递的

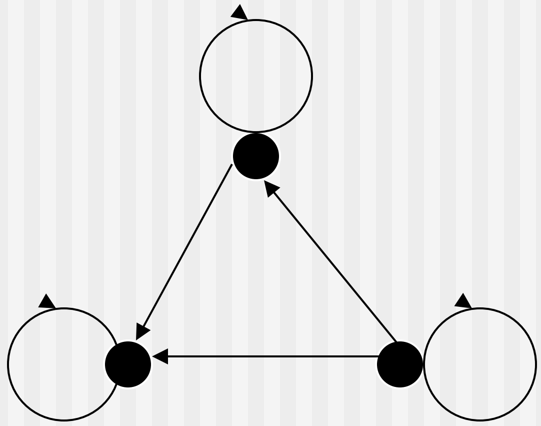
$\Leftrightarrow$ $R\bigcirc R\subseteq R$

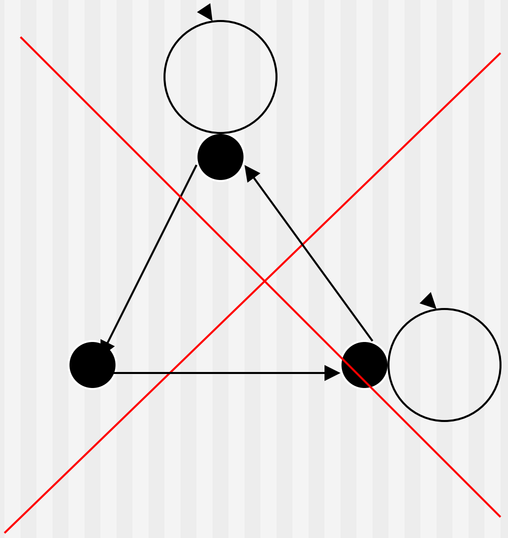
$\Leftrightarrow$ 在 $M(R\bigcirc R)$ 中， $\forall i\forall j$, 若 $r_{ij}'=1$, 则 $M(R)$中相应的元素$r_{ij}=1$.

$\Leftrightarrow$ 在$G(R)$中, $\forall x_i\forall x_j\forall x_k$, 若有有向边$<x_i,x_j>$,$<x_j,x_k>$, 则必有有向边$<x_i,x_k>$. #

传递性(举例)

例如，A上的全域关系、恒等关系和空关系都是A上的传递关系。小于关系，小于等于关系、整除关系、包含关系和真包含关系也是相应集合上的传递关系。





举例

- 在 $N = \{0,1,2,\ldots\}$ 上:
- $\leq=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\leq y\}$自反,反对称,传递
- $\geq=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\geq y\}$自反,反对称,传递
- $<=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x<y\}$反自反,反对称,传递
- $>=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x>y\}$反自反,反对称,传递
- $|=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x|y\}$反对称,传递,? ($\neg 0|0$)
- $I_N=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x=y\}$自反,对称,反对称,传递
- $E_N=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\}=N\times N$自反,对称,传递. #

例2.5

- $A=\{a,b,c\}$

$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<a,c>\}$,

$R_2=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$,

$R_3=\{<a,a>,<b,b>,<a,b>,<b,a>,<c,c>\}$,

$R_4=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,c>\}$,

$R_5=\{<a,a>,<a,b>,<b,b>,<c,c>\}$,

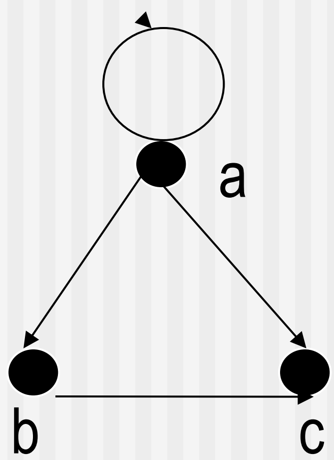
$R_6=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<a,a>\}$,

讨论以上各关系的性质

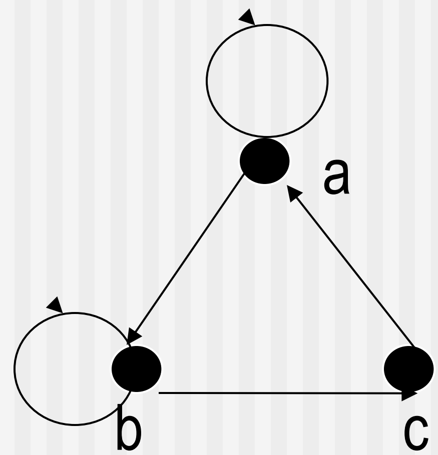
例2.5(续)

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\}$反对称,传递

$R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$反对称



$G(R_1)$

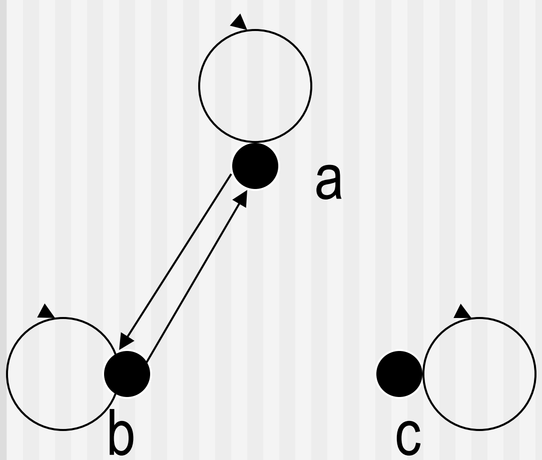


$G(R_2)$

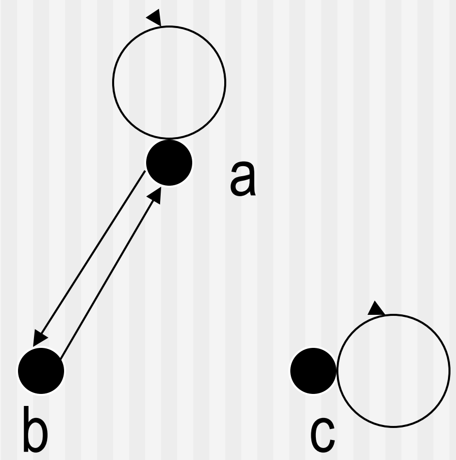
例2.5(续)

R_3={<a,a>,<b,b>,<a,b>,<b,a>,<c,c>}
自反,对称,传递

R_4={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,c>}对称



$G(R_3)$

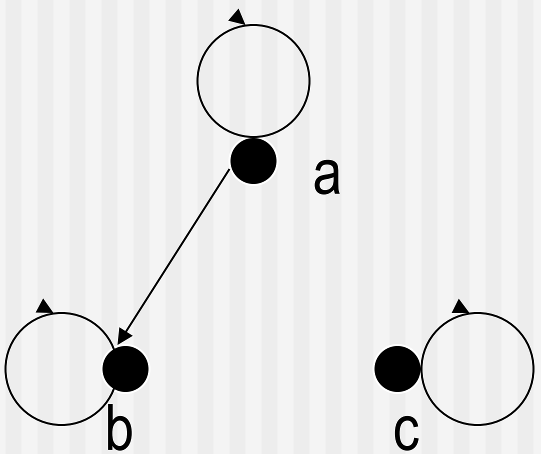


$G(R_4)$

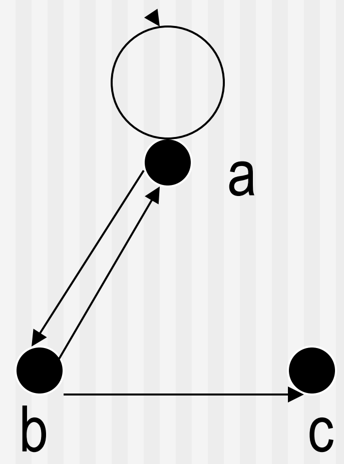
例5(续)

R_5={<a,a>,<a,b>,<b,b>,<c,c>}自反,反对称,传递

R_6={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<a,a>}没有以上5种性质中的任何一种.　　#



$G(R_5)$



$G(R_6)$

关系运算的性质

- 定理2.15 设$R_1,R_2 \subseteq A \times A$

(1)若R_1,R_2是自反的,则R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \bigcirc R_2$, $R_2 \bigcirc R_1$也是自反的;

(2)若R_1,R_2是反自反的,则R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1-R_2 , R_2-R_1也是反自反的;

(3)若R_1,R_2是对称的,则R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1-R_2 , R_2-R_1, $\sim R_1$, $\sim R_2$也是对称的;

(4)若R_1,R_2是反对称的,则R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1 \cap R_2$, R_1-R_2 , R_2-R_1也是反对称的;

(5)若R_1,R_2是传递的,则R_1^{-1}, R_2^{-1}, $R_1 \cap R_2$也是传递的.

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}, R_2^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√		
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \circ R_2$, $R_2 \circ R_1$	√				
R_1-R_2 , R_2-R_1		√	√	√	
$\sim R_1$, $\sim R_2$			√		

定理2.15(证明(1))

(1) R_1,R_2自反 $\Rightarrow R_1\circ R_2$自反.

证明:$\forall x$,

$$x\in A$$

$$\Rightarrow xR_2x \wedge xR_1x$$

$$\Rightarrow xR_1\circ R_2x$$

$\therefore$ R_1,R_2自反 $\Rightarrow R_1\circ R_2$自反. #

定理2.15(证明(2))

(2) R_1,R_2反自反 $\Rightarrow$ $R_1\cap R_2$反自反.

证明: (反证)

$$\exists x\in A,\ \langle x,x\rangle\in(R_1\cap R_2)$$

$$\Leftrightarrow xR_1x \wedge xR_2x$$

与R_1,R_2反自反矛盾!

$\therefore$ R_1,R_2反自反 $\Rightarrow$ $R_1\cap R_2$反自反. #

定理2.15(证明(3))

(3) R_1,R_2对称 $\Rightarrow$ R_1-R_2对称.

证明:$\forall x,y\in A$,

$$\langle x,y\rangle \in (R_1-R_2)$$

$$\Leftrightarrow xR_1y \wedge \neg xR_2y$$

$$\Leftrightarrow yR_1x \wedge \neg yR_2x$$

$$\Leftrightarrow y(R_1-R_2)x$$

$\therefore$ R_1,R_2对称 $\Rightarrow$ R_1-R_2对称. #

定理2.15(证明(3)续)

(3) R_1对称 $\Rightarrow$ $\sim R_1$对称.

证明: $\forall x,y\in A$,

$$x(\sim R_1)y \Leftrightarrow x(E_A-R_1)y$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in E_A \wedge <x,y>\notin R_1$$

$$\Leftrightarrow <y,x>\in E_A \wedge <y,x>\notin R_1$$

$$\Leftrightarrow y(E_A-R_1)x \Leftrightarrow y(\sim R_1)x$$

$\therefore$ R_1对称 $\Rightarrow$ $\sim R_1$对称. #

定理2.15(证明(4))

(4) R_1反对称 $\Rightarrow$ R_1^{-1}反对称.

证明: (反证) 若R_1^{-1}非反对称, 则

$$\exists x,y \in A,$$

$$xR_1^{-1}y \wedge yR_1^{-1}x \wedge x \neq y$$

$$\Leftrightarrow yR_1x \wedge xR_1y \wedge x \neq y$$

$$\Leftrightarrow R_1\text{非反对称}$$

与R_1反对称矛盾!

$\therefore$ R_1反对称 $\Rightarrow$ R_1^{-1}反对称. #

定理2.15(证明(5))

(5) R_1,R_2传递 $\Rightarrow$ $R_1\cap R_2$传递.

证明:$\forall x,y,z\in A$,

$$x(R_1\cap R_2)y \wedge y(R_1\cap R_2)z$$

$$\Leftrightarrow xR_1y \wedge xR_2y \wedge yR_1z \wedge yR_2z$$

$$\Leftrightarrow xR_1y \wedge yR_1z \wedge xR_2y \wedge yR_2z$$

$$\Rightarrow <x,z>\in R_1 \wedge <x,z>\in R_2$$

$$\Leftrightarrow x(R_1\cap R_2)z$$

$\therefore$ R_1,R_2传递 $\Rightarrow$ $R_1\cap R_2$传递. #

- 2.5 关系幂(power)运算

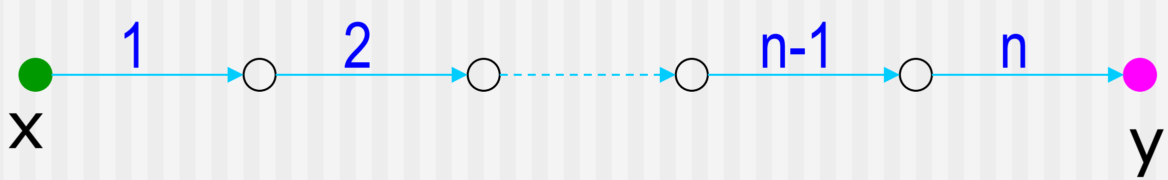
关系的n次幂

- 关系的n次幂(*n*th power)：设$R\subseteq A\times A$, $n\in N$, 则

  (1) $R^0 = I_A$;

  (2) $R^{n+1} = R^n\bigcirc R$, $(n\geq 1)$.

- $$R^n = \underbrace{R\circ R\circ\cdots\circ R}_{n个R}$$



定理2.17 指数律

- 指数律:

  (1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$;

  (2) $(R^m)^n = R^{mn}$.

- 说明:

  对一般关系R来说, $m,n \in N$.

定理2.17(证明(1))

- (1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$;
- 证明: (1) 给定m, 对n归纳.

n=0时, $R^m \circ R^n = R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$.

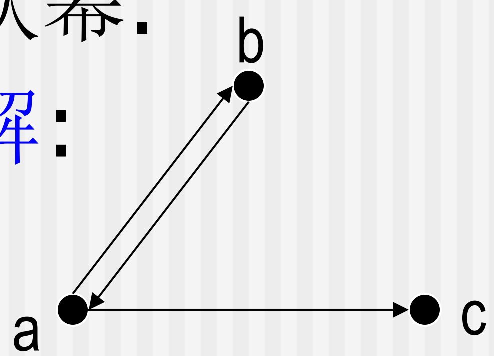
假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则

$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R^1) = (R^m \circ R^n) \circ R^1 = R^{m+n} \circ R = R^{(m+n)+1} = R^{m+(n+1)}$.

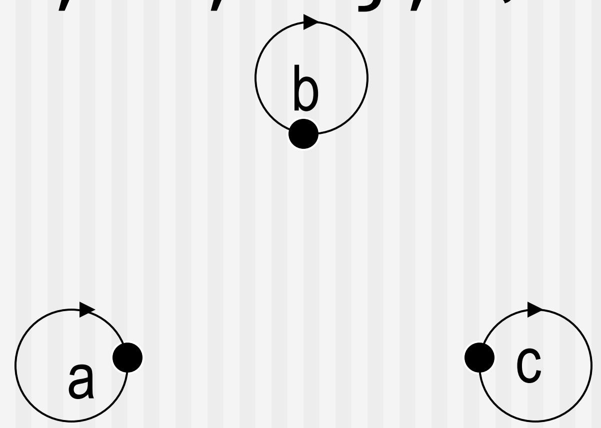
(2) 同样对m归纳. #

关系幂运算(举例)

- 例：设$A=\{a,b,c\}$，$R\subseteq A\times A$，$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,c\rangle\}$，求R的各次幂.
- 解：



$G(R)$



$G(R^0)$
$=G(\mathbf{I}_A)$

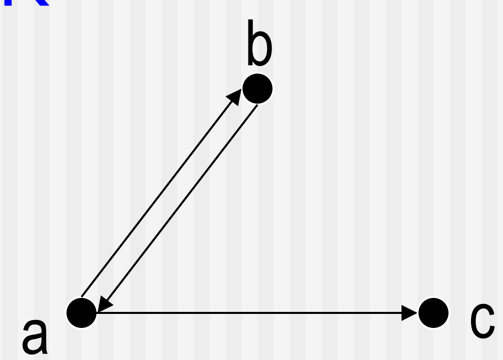
关系幂运算(举例,续)

- 解(续): $R^0 = I_A$,

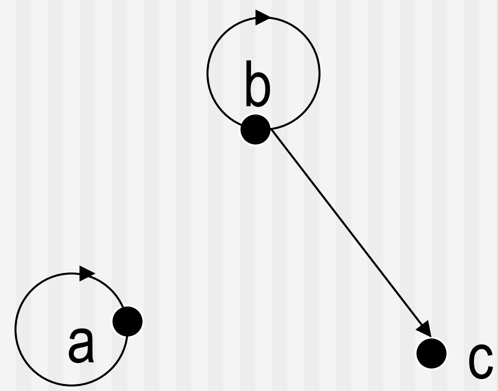
$R^1 = R^0 \circ R = \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,c\rangle\}$,

$R^2 = R^1 \circ R = \{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$,

$R^3 = R^2 \circ R = \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,c\rangle\} = R^1$



G(R)



G(R^2)

关系幂运算(举例,续2)

- 解(续): $R^4 = R^3 \circ R = R^1 \circ R = R^2$,
  $R^5 = R^4 \circ R = R^2 \circ R = R^3 = R^1$,

所以,

$$R^{2k+1}=R^1=R, \quad k=0,1,2,\ldots,$$

$$R^{2k}=R^2, \quad k=1,2,\ldots,. \qquad \#$$

定理2.16

- 定理2.16: 设 $|A|=n$, $R\subseteq A\times A$, 则 $\exists s,t\in N$, 并且 $0\leq s<t\leq 2^{n^2}$, 使得 $R^s = R^t$.
- 证明: $P(A\times A)$对幂运算是封闭的, 即
  $\forall R, R\in P(A\times A) \Rightarrow R^k\in P(A\times A), (k\in N)$.

$|P(A\times A)| = 2^{n^2}$, 在$R^0,R^1,R^2,\ldots,$ $R^{2^{n^2}}$这 $2^{n^2}+1$个集合中, 必有两个是相同的.

所以 $\exists s,t\in N$, 并且 $0\leq s<t\leq 2^{n^2}$,

使得 $R^s = R^t$. #

定理2.18

- 定理2.18: 设 $R \subseteq A \times A$, 若 $\exists s,t \in N$ $(s<t)$,使得$R^s = R^t$, 则

(1) $R^{s+k} = R^{t+k}$;

(2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$k,i \in N$, $p=t-s$;

(3) 令$S=\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则$\forall q \in N$, $R^q \in S$.

定理2.18(证明(2))

- (2) $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$k,i\in N$, $p=t-s$;
- 证明: $k=0$时,显然;

  $k=1$时,即(1);

  设 $k\geq 2$. 则

$$R^{s+kp+i} = R^{s+k(t-s)+i} = R^{s+t-s+(k-1)(t-s)+i}$$
$$= R^{t+(k-1)(t-s)+i} = R^{s+(k-1)(t-s)+i} = \ldots$$
$$= R^{s+(t-s)+i} = R^{t+i} = R^{s+i}.\qquad \#$$

定理2.18 (证明(3))

(3) 令$S=\{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则$\forall q\in N$, $R^q\in S$.

- 证明: 若$q<t-1$，结论显然成立;

若 $q>t-1\geq s$, 则令 $q=s+kp+i$,

其中 $k,i\in N$, $p=t-s$, $s+i<t$;

于是 $R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}\in S$.

幂指数的化简

- 方法: 利用定理16, 定理18.
- 例2.6: 设 $R \subseteq A \times A$, 化简R^{100}的指数. 已知

  (1) $R^7 = R^{15}$; (2) $R^3 = R^5$; (3) $R^1 = R^3$.
- 解:

(1) $R^{100}=R^{7+11\times 8+5}=R^{7+5}=R^{12}\in\{R^0,R^1,\ldots,R^{14}\}$;

(2) $R^{100}=R^{3+48\times 2+1}=R^{3+1}=R^4\in\{R^0,R^1,\ldots,R^4\}$;

(3) $R^{100}=R^{1+49\times 2+1}=R^{1+1}=R^2\in\{R^0,R^1,R^2\}$. #

总结

- 关系表示：关系矩阵和关系图
- 5种性质：
  - 自反
  - 反自反
  - 对称
  - 反对称
  - 传递
- 幂运算

2.6 关系的闭包

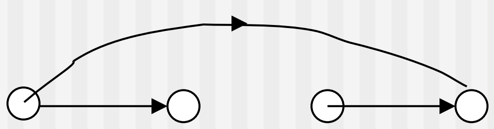
- 自反闭包r(R)
- 对称闭包s(R)
- 传递闭包t(R)
- 闭包的性质, 求法, 相互关系

什么是闭包?

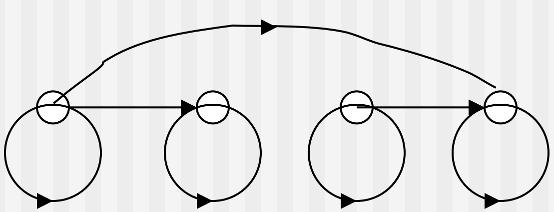
- 闭包(closure): 包含所有给定对象，并且具有指定性质的最小集合
- “最小”： 任何包含同样对象，具有同样性质的集合，都包含这个闭包集合

自反闭包(reflexive closure)

- 自反闭包: 包含给定关系R的最小自反关系, 称为R的自反闭包, 记作r(R).
  - (1) R $\subseteq$ r(R);
  - (2) r(R)是自反的;
  - (3) $\forall$S((R$\subseteq$S $\wedge$ S自反) $\rightarrow$ r(R)$\subseteq$S).



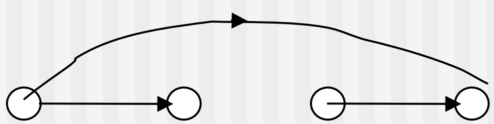
G(R)



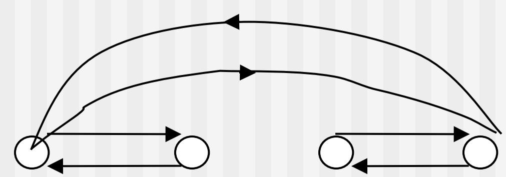
G(r(R))

对称闭包(symmetric closure)

- 对称闭包: 包含给定关系R的最小对称关系, 称为R的对称闭包, 记作s(R).
  - (1) $R \subseteq s(R)$;
  - (2) s(R)是对称的;
  - (3) $\forall S(\ (R \subseteq S \wedge S$对称$) \rightarrow s(R) \subseteq S\ )$.



G(R)



G(s(R))

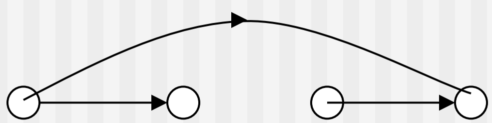
传递闭包(transitive closure)

- 传递闭包: 包含给定关系R的最小传递关系, 称为R的传递闭包, 记作t(R).

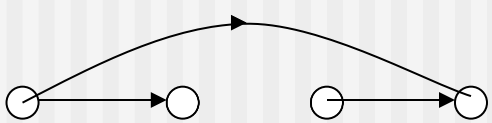
  (1) $R \subseteq t(R)$;

  (2) t(R)是传递的;

  (3) $\forall S(\,(R \subseteq S \wedge S$传递$) \rightarrow t(R) \subseteq S\,)$.



G(R)



G(t(R))

定理2.19

- 定理2.19: 设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \varnothing$,则

(1) R自反 $\Leftrightarrow r(R) = R$;

(2) R对称 $\Leftrightarrow s(R) = R$;

(3) R传递 $\Leftrightarrow t(R) = R$;

证明: (1) $R \subseteq R \wedge R$自反 $\Rightarrow r(R) \subseteq R$

又 $R \subseteq r(R)$, $\therefore r(R) = R$.

(2)(3) 完全类似. #

定理2.20(单调性)

- 定理2.20: 设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$;

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$;

定理2.20(1)的证明

设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则 $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

证明:任意$<x,y> \in r(R_1)$

(1) $x=y$, $<x,y>=<x,x> \in r(R_2)$

(2) $x \neq y$, $<x,y> \in r(R_1)$

$\Rightarrow <x,y> \in R_1$

$\Rightarrow <x,y> \in R_2$

$\Rightarrow <x,y> \in r(R_2)$

$\therefore r(R_1) \subseteq r(R_2)$#

定理2.20(2)的证明

设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则 $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

证明:任意$<x,y> \in s(R_1)$

(1) $<x,y> \in R_1$,

$<x,y> \in R_1 \Rightarrow <x,y> \in R_2 \Rightarrow <x,y> \in s(R_2)$;

(2) $<x,y> \notin R_1$,

$<x,y> \notin R_1 \Rightarrow <y,x> \in R_1 \Rightarrow <y,x> \in R_2$

$\Rightarrow <x,y> \in s(R_2)$

$\therefore s(R_1) \subseteq s(R_2)$ #

定理2.20(3)的证明

设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则 $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明:任意$<x,y> \in t(R_1)$

(1) $<x,y> \in R_1$,

$<x,y> \in R_1 \Rightarrow <x,y> \in R_2 \Rightarrow <x,y> \in t(R_2)$;

(2) $<x,y> \notin R_1$,

$<x,y> \notin R_1$

$\Rightarrow <x,t_1> \in R_1 \wedge <t_1,t_2> \in R_1 \ldots \wedge <t_r,y> \in R_1$

$\Rightarrow <x,t_1> \in R_2 \wedge <t_1,t_2> \in R_2 \ldots \wedge <t_r,y> \in R_2$

$\Rightarrow <x,y> \in t(R_2)$

$\therefore t(R_1) \subseteq t(R_2)$ #

定理2.21(闭包在并运算上的分配律)

- 定理2.21: 设 $R_1,R_2\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 则

(1) $r(R_1\cup R_2) = r(R_1)\cup r(R_2)$;

(2) $s(R_1\cup R_2) = s(R_1)\cup s(R_2)$;

(3) $t(R_1\cup R_2) \supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

证明: (1) 利用定理2.20, $r(R_1\cup R_2)\supseteq r(R_1)\cup r(R_2)$.

$r(R_1)\cup r(R_2)$自反且包含$R_1\cup R_2$,所以

$r(R_1\cup R_2)\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$.

$\therefore\ r(R_1\cup R_2) = r(R_1)\cup r(R_2)$ #

定理2.21(证明(2))

- (2) $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$;
- 证明: 利用定理2.20,
  $s(R_1 \cup R_2) \supseteq s(R_1) \cup s(R_2)$.
  $s(R_1) \cup s(R_2)$对称且包含$R_1 \cup R_2$,所以
  $s(R_1 \cup R_2) \subseteq s(R_1) \cup s(R_2)$.
  $\therefore\ s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$ #

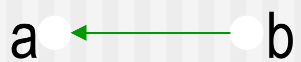
定理2.21(证明(3))

- (3) $t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$.
- 证明: 利用定理2.20,

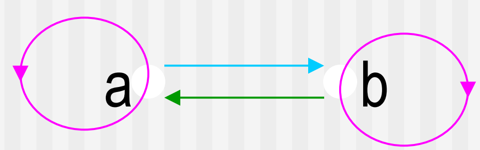
$$t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2).$$

注意: $t(R_1) \cup t(R_2)$不一定传递 . #

$G(R_1) = G(t(R_1))$



$G(R_2) = G(t(R_2))$



$G(t(R_1 \cup R_2))$

闭包的求法

- 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 则

定理2.22 (1) $r(R) = R\cup I_A$;

定理2.23 (2) $s(R) = R\cup R^{-1}$;

定理2.24 (3) $t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$.

  - R自反 $\Leftrightarrow I_A\subseteq R$

    R对称 $\Leftrightarrow R=R^{-1}$

    R传递 $\Leftrightarrow R^2\subseteq R$

定理2.22

- 定理2.22: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \emptyset$, 则

$$r(R) = R \cup I_A;$$

- 证明: $R \cup I_A$是自反的;

$I_A \subseteq R \cup I_A \Leftrightarrow R \cup I_A$自反 $\Rightarrow r(R) \subseteq R \cup I_A$;

$R \subseteq r(R) \wedge I_A \subseteq r(R) \Rightarrow R \cup I_A \subseteq r(R)$;

$\therefore r(R) = R \cup I_A$.

定理2.23

- 定理2.23: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \emptyset$, 则

$$s(R) = R \cup R^{-1};$$

- 证明:

(1) $(R \cup R^{-1})^{-1} = R \cup R^{-1} \Leftrightarrow R \cup R^{-1}$对称,并且 $R \subseteq R \cup R^{-1} \Rightarrow s(R) \subseteq R \cup R^{-1}$;

(2) $R \subseteq s(R) \wedge s(R)$对称

$\Rightarrow R \subseteq s(R) \wedge R^{-1} \subseteq s(R) \Rightarrow R \cup R^{-1} \subseteq s(R)$

$\therefore s(R) = R \cup R^{-1}$.

定理2.24

- 定理24: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots;$$

- 证明: (1)证明$R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$是传递的

$\forall x,y,z \in A$, $<x,y> \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \wedge <y,z> \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

$\Rightarrow \exists s(<x,y> \in R^s) \wedge \exists t(<y,z> \in R^t)$

$\Rightarrow <x,z> \in R^t \circ R^s \Rightarrow <x,z> \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

所以 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots;$

(2) $R^n \subseteq t(R)$(用归纳法证明)

$\Rightarrow R \subseteq t(R) \wedge R^2 \subseteq t(R) \wedge R^3 \subseteq t(R) \wedge \ldots$

$\Rightarrow R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \subseteq t(R)$

$\therefore t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

定理2.24的推论

- 推论: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $0<|A|<\infty$, 则$\exists \ell \in N$, 使得 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^\ell$;
- 证明: 由定理16知 $\exists s,t \in N$, 使得 $R^s = R^t$.

由定理2.18知 $R,R^2,R^3,\ldots \in \{ R^0,R^1,\ldots,R^{t-1} \}$.

取$\ell=t-1$, 由定理24知

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$$

$$= R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^\ell$$

$$\therefore\ t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^\ell .\qquad \#$$

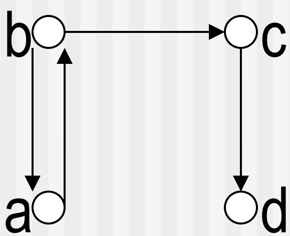
例2.8

例2.8: 设 A = { a,b,c,d },

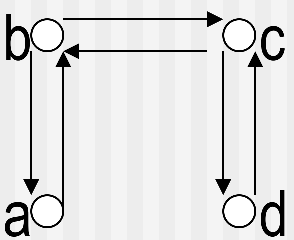
R ={ <a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d> }.

求 r(R), s(R), t(R).

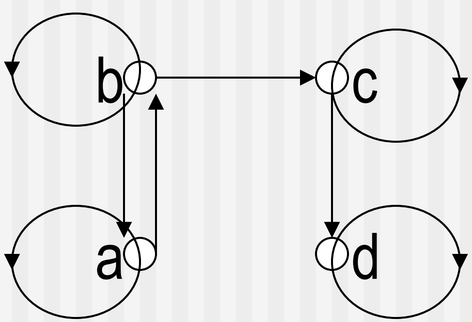
解:



$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$



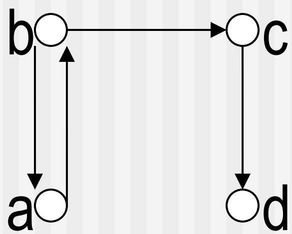
$$M(s(R))=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$



$$M(r(R))=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

例2.8(续)

解:



$$M(R^2)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

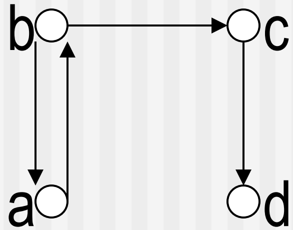
$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^3)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^4)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=M(R^2).$$

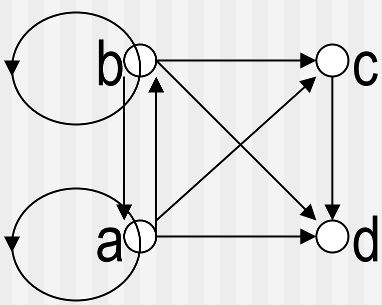
例8(续)

- 解:



$$M(t(R)) = M(R) \vee M(R^2) \vee M(R^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

#



闭包运算是否保持关系性质?

(1) R自反 $\Rightarrow$ s(R), t(R)自反 ?

(2) R对称 $\Rightarrow$ r(R), t(R)对称 ?

(3) R传递 $\Rightarrow$ s(R), r(R)传递 ?

定理2.25

- 定理2.25: 设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \varnothing$,则

(1) R自反 $\Rightarrow$ s(R)和t(R)自反;

(2) R对称 $\Rightarrow$ r(R)和t(R)对称;

(3) R传递 $\Rightarrow$ r(R)传递;

证明: (1) $I_A \subseteq R \cup R^{-1} = s(R)$

$\therefore$ s(R)自反.

$I_A \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = t(R)$

$\therefore$ t(R)自反. #

定理2.25(证明(2))

- (2) R对称 $\Rightarrow$ r(R)和t(R)对称;
- 证明: (2) $r(R)^{-1} = (I_A \cup R)^{-1} = I_A^{-1} \cup R^{-1}$

$= I_A \cup R^{-1} = I_A \cup R = r(R)$ $\therefore$ r(R)对称.

$t(R)^{-1} = (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots)^{-1}$

$= R^{-1} \cup (R^2)^{-1} \cup (R^3)^{-1} \cup \ldots$

$= R^{-1} \cup (R^{-1})^2 \cup (R^{-1})^3 \cup \ldots$ ($(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$)

$= R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = t(R)$, $\therefore$ t(R)对称.

定理2.25(证明(3))

- (2) R传递 $\Rightarrow$ r(R)传递;
- 证明: (2) $r(R)\circ r(R) = (I_A \cup R)\circ(I_A \cup R)$

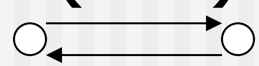
$= (I_A \circ I_A)\cup(I_A \circ R)\cup(R \circ I_A)\cup(R \circ R)$

$\subseteq I_A \cup R \cup R \cup R = I_A \cup R = r(R)$

$\therefore$ r(R)传递.　　#

- 反例: R传递, 但是s(R)非传递.

G(R)



G(s(R))

	自反性	对称性	传递性
r(R)	√ (定义)	√(2)	√(3)
s(R)	√(1)	√(定义)	×
t(R)	√(1)	√(2)	√(定义)

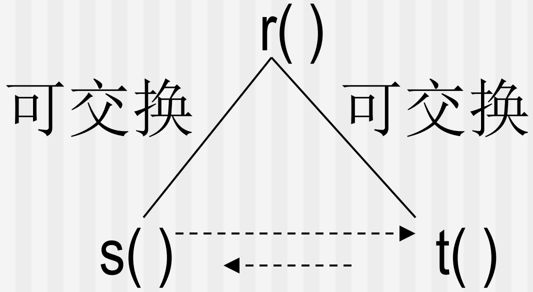
定理2.26

- 定理2.26: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

(1) $rs(R) = sr(R)$;

(2) $rt(R) = tr(R)$;

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$;



定理2.26(证明(1))

- (1) $rs(R) = sr(R)$;

证明: (1) $rs(R) = r(s(R)) = r(R \cup R^{-1})$
$= I_A \cup (R \cup R^{-1}) = (I_A \cup R) \cup (I_A^{-1} \cup R^{-1})$
$= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R)^{-1} = r(R) \cup r(R)^{-1}$
$= s(r(R)) = sr(R)$.

$\therefore$ $rs(R) = sr(R)$. #

定理2.26(证明(2))

- (2) $rt(R) = tr(R)$;

证明:(2) $rt(R) = r(t(R)) = r(R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots)$

$= I_A \cup (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots)$

$= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R \cup R^2) \cup (I_A \cup R \cup R^2 \cup R^3) \cup \ldots$

$= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R)^2 \cup (I_A \cup R)^3 \cup \ldots$

$= r(R) \cup r(R)^2 \cup r(R)^3 \cup \ldots = t(r(R))$.

$\therefore\ rt(R) = tr(R)$. #

定理2.26(证明(3))

- (3) $st(R) \subseteq ts(R)$;

证明:(3) $R \subseteq s(R)$

$$\Rightarrow st(R) \subseteq st(s(R))$$

$$= sts(R) = s(ts(R))$$

(s(R)对称，由定理2.25(2)得ts(R)对称)

$$s(ts(R)) = ts(R)$$

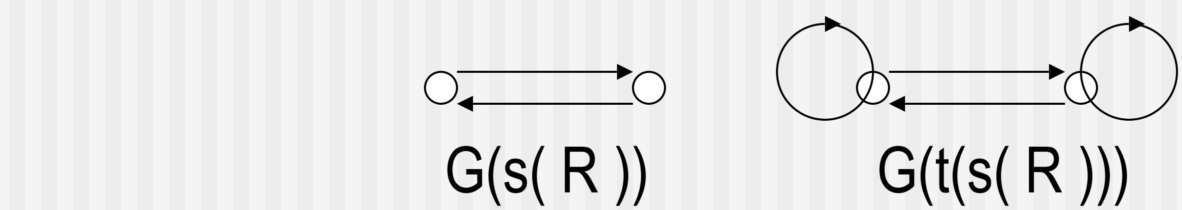
(由定理2.19得)

$$\therefore\ st(R) \subseteq ts(R).\quad \#$$

定理2.26(3)

- (3)

例： st(R) $\subset$ ts(R)



作业

- P54: 16, 17, 19,
- P55: 21, 22, 27，28
- P55 :29, 31

1 下面关于关系的性质和关系运算的说法中，正确的是（ ）

（A）若R是对称的，则~R也是对称的

（B）若R是自反的，则R^{-1}也是自反的

（C）若R_1和R_2是传递的，则$R_1 \cap R_2$也是传递的

（D）若R_1和R_2是反对称的，则$R_1 \cup R_2$也是反对称的

（E）若R_1和R_2是反自反的，则$R_1 - R_2$也是反自反的

2 二元关系$\mathrm{R} = \{< a,b >,< b,a >,< b,c >\}$，$R^2 =\_$， $R^{2020} = \_\_$

3 设A={a,b}，A上有__个自反关系，____个对称关系，_____个传递关系。

4 若R是传递的，则它的对称闭包也是传递的。（ ）