复习

- 关系的表示
- 5种性质：
  - 自反、反自反、对称、反对称、传递
- 幂运算
- 闭包
  - 自反闭包
  - 对称闭包
  - 传递闭包

第二章 二元关系

2.7 等价关系和划分

- 等价关系,等价类,商集
- 划分, 第二类Stirling数, 加细

等价(equivalence)关系定义

- **等价关系**: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 若R是自反的, 对称的, 传递的,则称R为等价关系

举例

- 例2.9: 判断是否等价关系(A是某班学生):

$R_1=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x$与$y$同年生$\}$

$R_2=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x$与$y$同姓$\}$

$R_3=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x$的年龄不比$y$小$\}$

$R_4=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x$与$y$选修同门课程$\}$

$R_5=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x$的体重比$y$重$\}$

解：R1: 自反性、对称性、传递性 （等价关系）

R2: 自反性、对称性、传递性 （等价关系）

R3: 自反性、无对称性、传递性

R4: 自反性、对称性、无传递性

R5: 无自反性、无对称性、传递性

例2.10

- 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 对R依次求三种闭包共有6种不同顺序, 其中哪些顺序一定导致等价关系?

  rst(R), rts(R), str(R), srt(R), trs(R), tsr(R)=t(s(r(R)))

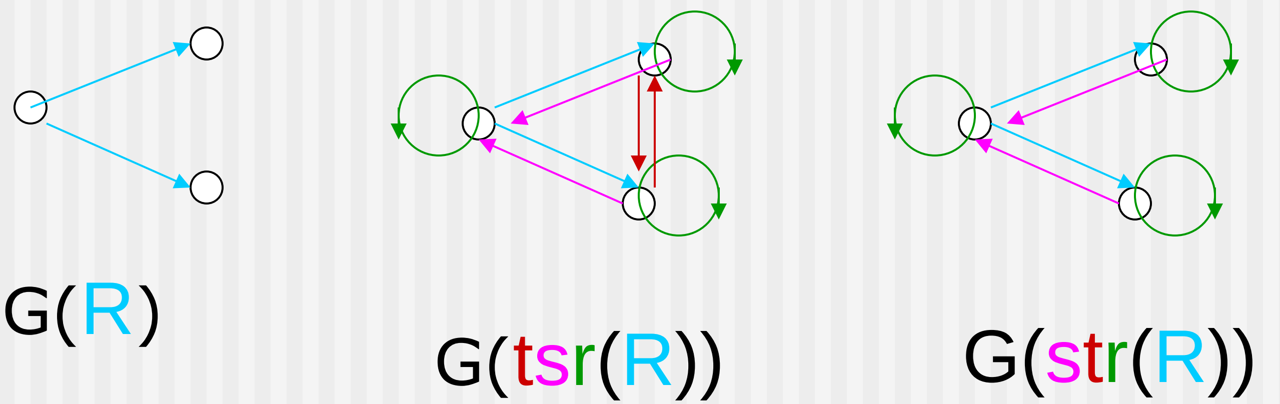
- 解: $st(R) \subseteq ts(R)$, $sr(R)=rs(R)$, $tr(R)=rt(R)$,

  tsr(R)=trs(R)=rts(R) (是否对称?)

  str(R)=srt(R)=rst(R) (是否传递?)

tsr(R)=trs(R)=rts(R) (等价关系)

str(R)=srt(R)=rst(R) (无传递性) ×



等价类(equivalence class)

定义2.15:等价类 设R是$A\neq\varnothing$上等价关系,$\forall x\in A$,令 $[x]_R=\{y \mid y\in A \land xRy\}$, 称$[x]_R$为x关于R的等价类, 简称x的等价类, 简记为$[x]$.

定理2.27等价类性质

- 定理27:设R是$A\neq\varnothing$上等价关系,$\forall x,y\in A$,

(1) $[x]_R\neq\varnothing$

(2) $xRy \Rightarrow [x]_R=[y]_R$;

(3) $\neg xRy \Rightarrow [x]_R\cap[y]_R=\varnothing$;

(4) $\cup\{\ [x]_R \mid x\in A\ \} = A$.

- 证明: (1) R自反 $\Rightarrow xRx \Rightarrow x\in[x]_R \Rightarrow [x]_R\neq\varnothing$.

定理2.27(证明(2))

(2) $xRy \Rightarrow [x]_R=[y]_R$;

证明:

只需证明$[x]_R\subseteq[y]_R$和$[x]_R\supseteq[y]_R$.

($\subseteq$) $\forall z$, $z\in[x]_R \wedge xRy \Rightarrow zRx \wedge xRy$

$\Rightarrow zRy \Rightarrow z\in[y]_R$. $\therefore [x]_R\subseteq[y]_R$.

($\supseteq$) 同理可证. #

定理2.27(证明(3))

(3) $\neg xRy \Rightarrow [x]_R \cap [y]_R = \varnothing$;

证明: (3) (反证) 假设$\exists z$, $z \in [x]_R \cap [y]_R$, 则

$z \in [x]_R \cap [y]_R \Rightarrow zRx \wedge zRy \Rightarrow xRz \wedge zRy$

$\Rightarrow xRy$, 这与$\neg xRy$矛盾!

$\therefore [x]_R \cap [y]_R = \varnothing$. #

定理2.27(证明(4))

- (4) $\bigcup\{ [x]_R \mid x \in A \} = A$.
- 证明: $A = \bigcup\{ \{x\} \mid x \in A \}$

  $\subseteq \bigcup\{ [x]_R \mid x \in A \}$

  $\subseteq \bigcup\{ A \mid x \in A \} = A$.

  $\therefore \bigcup\{ [x]_R \mid x \in A \} = A$. #

例2.11

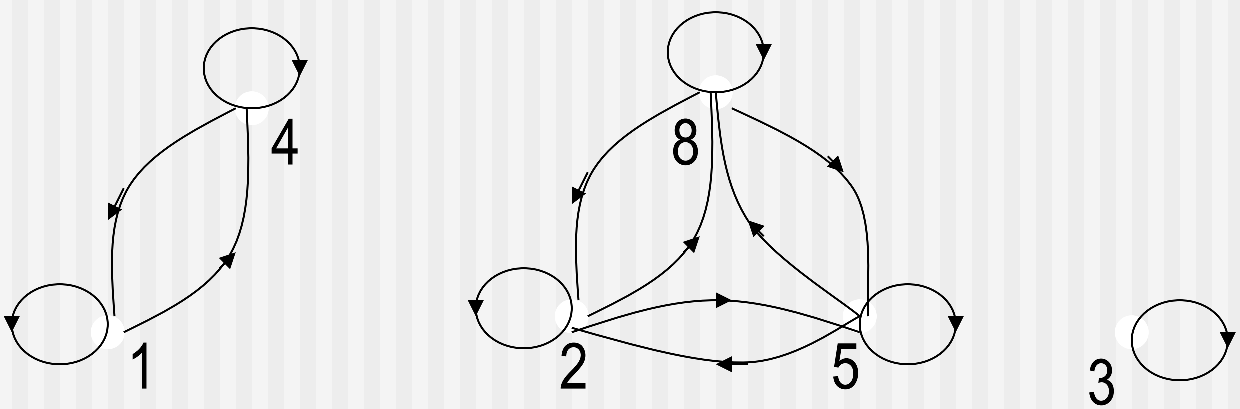
- 例11: 设 A={1,2,3,4,5,8}, 求

  $R_3 = \{ \langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\equiv y \pmod 3) \}$

的等价类, 画出R_3的关系图.

- 解: [1]=[4]={1,4}, [2]=[5]=[8]={2,5,8},

  [3]={3}. #



同余关系: 设$n \in \{2,3,4,\ldots\}$, $x,y \in Z$,

x与y模n同余(be congruent modulo n)

$\Leftrightarrow x \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow n|(x-y) \Leftrightarrow x-y=kn \ (k \in Z)$

同余关系是等价关系

商集(quotient set)

- 商集: 设R是非空集合A≠∅上等价关系, 以关于R的全体不同的等价类为元素的集合

$$A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$$

称为A关于R的商集, 简称A的商集.

由定理2.27,

A/R的任二元素是不交的,且$\cup$ A/R = A.

- 例11: $A/R_3 = \{ \{1,4\}, \{2,5,8\}, \{3\} \}$.

例2.12(1)

- 设$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, I_A, E_A,

$$R_{ij}=I_A\cup\{<a_i,a_j>,<a_j,a_i>\}$$

都是A上等价关系, 求对应的商集, 其中$a_i,a_j\in A$, $i\neq j$. $\varnothing$是A上等价关系吗?

解: $A/I_A=\{ \{a_1\}, \{a_2\},\ldots, \{a_n\} \}$

$A/E_A=\{ \{a_1,a_2,\ldots,a_n\} \}$

$A/R_{ij}= A/I_A\cup\{\{a_i,a_j\}\} - \{\{a_i\},\{a_j\}\}$.

$\varnothing$不是A上等价关系(非自反). #

例2.12(2)

- A={a,b,c},求出A上的全体等价关系及其对应的商集

解：共有5种

$R_1=I_A, R_2=E_A, R_3=I_A\cup\{\langle b,c\rangle\langle c,b\rangle\}$,

$R_4=I_A\cup\{\langle a,c\rangle\langle c,a\rangle\}$,

$R_5=I_A\cup\{\langle a,b\rangle\langle b,a\rangle\}$

商集: {{a},{b},{c}},

{{a,b,c}}, {{a},{b,c}},

{{a,c},{b}}, {{a,b},{c}}

2.7 等价关系和划分

- 等价关系,等价类,商集
- 划分, 第二类Stirling数, 加细

划分(partition)

- 划分: 设$A\neq\varnothing$, 若存在A的一个子集族 $\mathcal{A}\subseteq P(A)$,若$\mathcal{A}$满足

  (1) $\varnothing\notin\mathcal{A}$;

  (2) $\forall x,y(\ x,y\in\mathcal{A}\wedge x\neq y\Rightarrow x\cap y=\varnothing\ )$

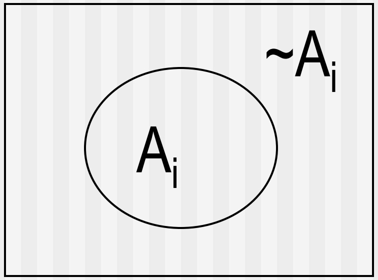
  (3) $\cup\mathcal{A} = A$

  则称$\mathcal{A}$为A的一个划分, $\mathcal{A}$中元素称为划分块(block).

划分(举例)

- 设 $\varnothing \neq A_1, A_2, \ldots, A_n \subset E$, 则以下都是划分:

$\mathcal{A}_i = \{A_i, \sim A_i\}$, ($i=1,2,\ldots,n$)

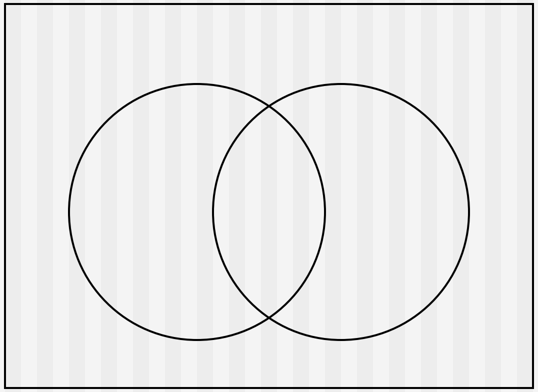


划分(举例)

- 设 $\varnothing \neq A_1, A_2, \ldots, A_n \subset E$, 则以下都是划分:

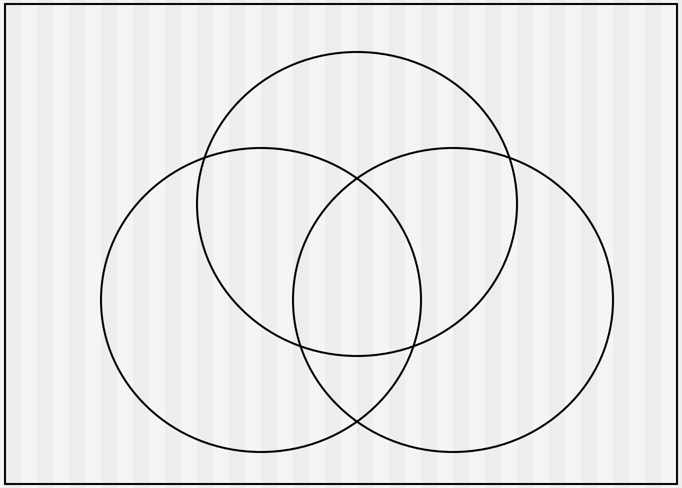
$\mathcal{A}_{ij} = \{A_i \cap A_j, \sim A_i \cap A_j, A_i \cap \sim A_j, \sim A_i \cap \sim A_j\} - \{\varnothing\}$

$(\ i,j = 1,2,\ldots,n \wedge i \neq j\ )$ ……



- 设 $\varnothing \neq A_1, A_2, \ldots, A_n \subset E$, 则以下都是划分:

$$\mathcal{A}_{12\ldots n} = \{\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \ldots \cap \sim A_n, \ldots,$$
$$\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \ldots \cap \sim A_{n-1} \cap A_n, \ldots$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\} - \{\varnothing\}. \quad \#$$



等价关系与划分是一一对应的

- 定理2.28: 设$A \neq \varnothing$, 则

(1) R是A上等价关系 $\Rightarrow$ A/R是A的划分

(2) $\mathcal{A}$是A的划分 $\Rightarrow$ $R_{\mathcal{A}}$是A上等价关系,其中

$$xR_{\mathcal{A}}y \Leftrightarrow \exists z(z \in \mathcal{A} \wedge x \in z \wedge y \in z)$$

$R_{\mathcal{A}}$称为由划分$\mathcal{A}$所定义的等价关系(同块关系). #

非空集合A上的等价关系与A的划分是一一对应的，所以A上有多少个不同的等价关系，就产生同样个数的不同的划分，反之亦然。

第二类Stirling数

第二类Stirling数(Stirling subset number):

把n个不同球放到k个相同盒子，要求无空盒，不同放法的总数$\left\{ {n \atop k} \right\}$，称为第二类Stirling数

- 把**n**元集划分成**k**个非空子集的分法总数

第二类Stirling数性质

1.

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0, \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1, \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1, \left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = C_n^2, \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1.$$

2. 递推公式：

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}.$$

先把n-1个元素分成k个子集, 再加入第n个元素到其中之一

先把n-1个元素分成k-1个子集, 再让第n个元素自成一子集

第二类Stirling数表

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1	*				
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1,170	1,050	266	28	1	
9	0	1	255	3,035	7,770	6,951	2,646	462	36	1
10	0	1	511	9,330	34,501	42,525	22,827	5,880	750	45

例2.13

- 问A={a,b,c,d}上有多少种等价关系?
- 解:

$$B_4=\begin{Bmatrix}4\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}4\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}4\\3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}4\\4\end{Bmatrix}=1+(2^3-1)+C_4^2+1=1+7+6+1=15.$$

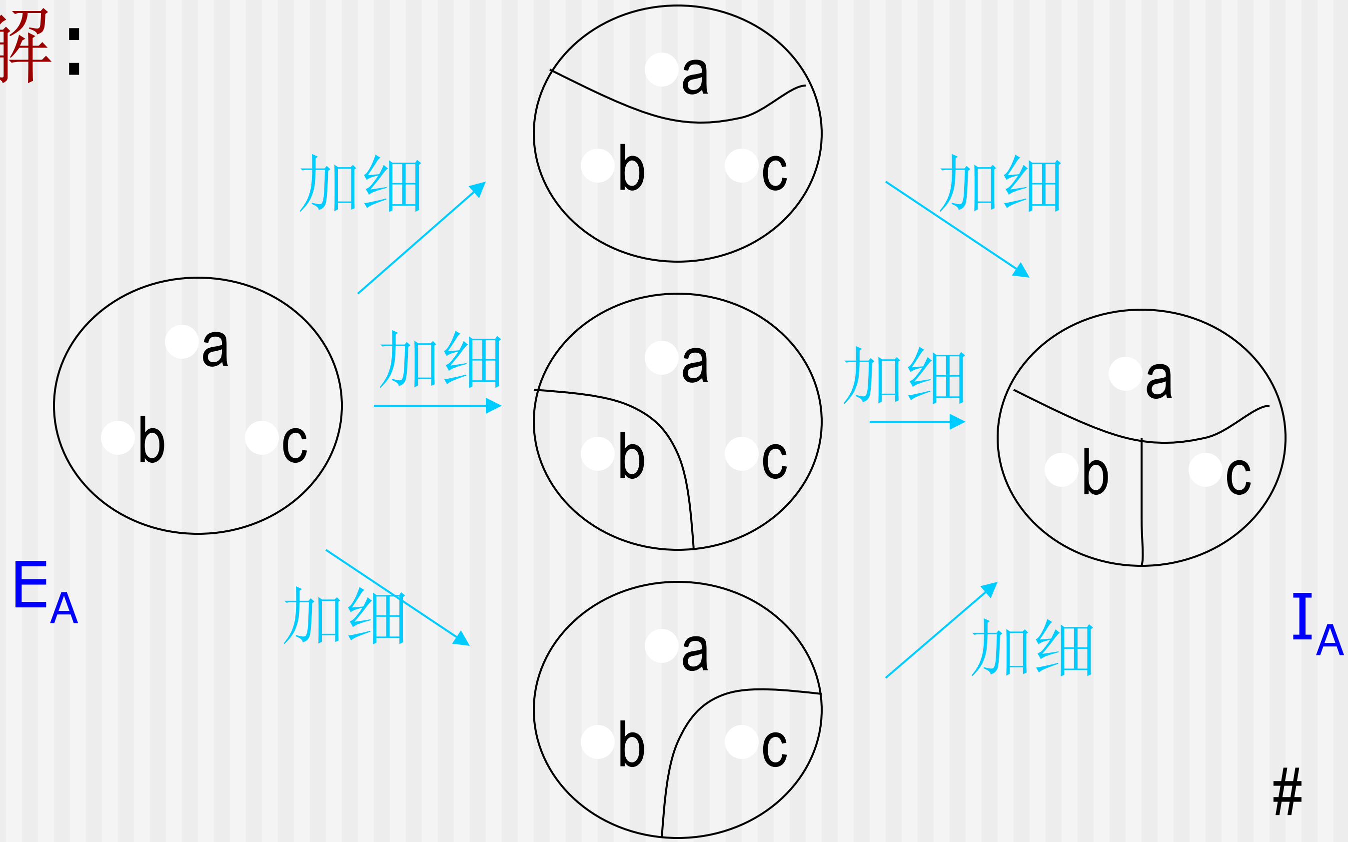
#

划分的加细(refinement)

- 划分的加细：设$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$都是集合A的划分，若$\mathcal{A}$的每个划分块都包含于$\mathcal{B}$的某个划分块中，则称$\mathcal{A}$为$\mathcal{B}$的加细.
- $\mathcal{A}$为$\mathcal{B}$的加细 $\Leftrightarrow$ $R_{\mathcal{A}} \subseteq R_{\mathcal{B}}$

例2.14

- 考虑A={a,b,c}上的划分之间的加细.
- 解:



#

2.8 序关系

- 偏序,线序,拟序,良序
- 哈斯图
- 特殊元素: 最大/小元, 极大/小元, 上/下界, 上/下确界
- (反)链

偏序(partial order)关系

- 偏序关系: 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \emptyset$, 若R是自反的, 反对称的, 传递的, 则称R为偏序关系
- 通常用 $\preccurlyeq$ 表示偏序关系,读作 “小于等于”

$$\langle x,y \rangle \in R \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow x \preccurlyeq y$$

- 偏序集: $<A, \preccurlyeq>$, $\preccurlyeq$ 是A上偏序关系

偏序集$<A,\leq>$, $<A,\geq>$, $<A,|>$

- $\emptyset \neq A \subseteq R$

  $\leq = \{ <x,y> \mid x,y \in A \wedge x \leq y \}$,

  $\geq = \{ <x,y> \mid x,y \in A \wedge x \geq y \}$,

- $\emptyset \neq A \subseteq Z_+ = \{ x \mid x \in Z \wedge x > 0 \}$

  $| = \{ <x,y> \mid x,y \in A \wedge x | y \}$

偏序集$<\mathcal{A},\subseteq>$

- $\mathcal{A}\subseteq P(A)$, $\subseteq = \{ <x,y> \mid x,y\in\mathcal{A} \wedge x\subseteq y \}$
- 设$A=\{a,b\}$, $\mathcal{A}_1=\{\varnothing,\{a\},\{b\}\}$, $\mathcal{A}_2=\{\{a\},\{a,b\}\}$,

$\mathcal{A}_3=P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,则

$$\subseteq_1 = I_{\mathcal{A}1} \cup \{ <\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}> \}$$

$$\subseteq_2 = I_{\mathcal{A}2} \cup \{ <\{a\},\{a,b\}> \}$$

$$\subseteq_3 = I_{\mathcal{A}3} \cup \{ <\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>, <\varnothing,\{a,b\}>, <\{a\},\{a,b\}>, <\{b\},\{a,b\}> \}$$

偏序集$<\pi, \leq_{加细}>$

- $A \neq \varnothing$, π是由A的一些划分组成的集合

  $\leq_{加细} = \{ <x,y> \mid x,y \in \pi \wedge x是y的加细 \}$

- 设$A=\{a,b,c\}$,

  $\mathcal{A}_1=\{\{a,b,c\}\}, \mathcal{A}_2=\{\{a\},\{b,c\}\}$,

  $\mathcal{A}_3=\{\{b\},\{a,c\}\}, \mathcal{A}_4=\{\{c\},\{a,b\}\}$,

  $\mathcal{A}_5=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$

取$\pi_1=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2\}, \pi_2=\{\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3\}, \pi_3=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3,\mathcal{A}_4,\mathcal{A}_5\}$

$\leq_1 = I_{\pi 1} \cup \{ <\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_1> \}$, $\leq_2 = I_{\pi 2}$,

$\leq_3 = I_{\pi 3} \cup \{ <\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_1>, <\mathcal{A}_3,\mathcal{A}_1>, <\mathcal{A}_4,\mathcal{A}_1>, <\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_1>, <\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_2>, <\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_3>, <\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_4> \}$. #

哈斯图(Hasse diagram)

- 设<A, ≤>是偏序集, x,y∈A
- 可比(comparable):

  x与y可比 $\Leftrightarrow$ $x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$
- 覆盖(cover):

  y覆盖x $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \wedge \neg\exists z(z \in A \wedge x \preccurlyeq z \preccurlyeq y)$
- 哈斯图: 当且仅当y覆盖x时,在x与y之间画无向边, 并且x画在y下方.
  - 省去每个顶点的环
  - 若x≺y,但y不覆盖x, 省去x与y之间的连线

例2.16(1)(2)

- 画出下列偏序关系的哈斯图.

(1) $\langle A, | \rangle$, $A=\{1,2,3,4,5,6,9,10,15\}$

(2) $\langle \mathcal{A}, \subseteq \rangle$, $A=\{a,b,c\}$, $\mathcal{A} \subseteq P(A)$,

$\mathcal{A}=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$

- 解:

例2.16(1)(2)

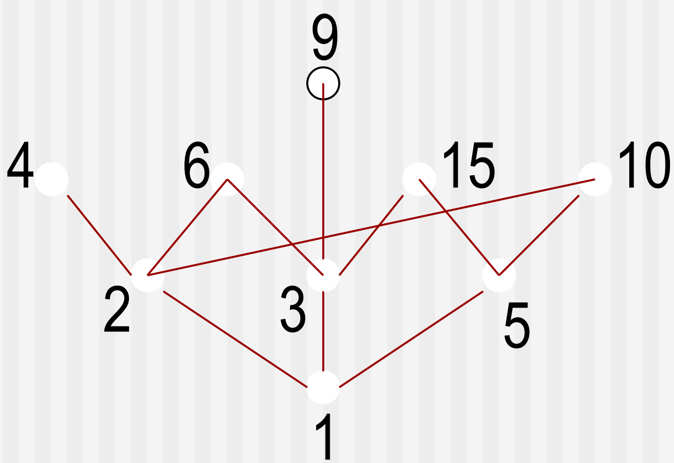
- 画出下列偏序关系的哈斯图.

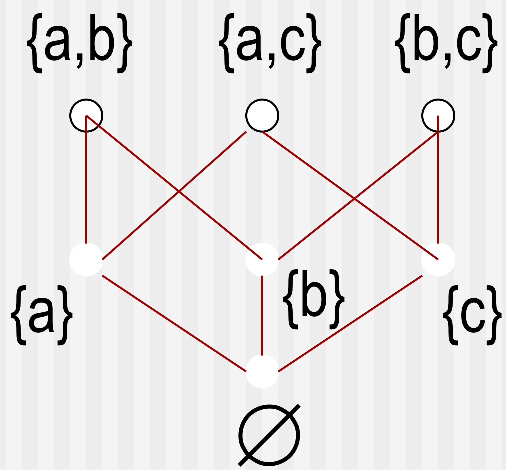
(1) $<A,|>$, $A=\{1,2,3,4,5,6,9,10,15\}$

(2) $<\mathcal{A},\subseteq>$, $A=\{a,b,c\}$, $\mathcal{A}\subseteq P(A)$,

$\mathcal{A}=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$

- 解:





例2.16(3)

- 画出下列偏序关系的哈斯图.

(3) $<\pi, \leq_{加细}>$, $\pi=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3,\mathcal{A}_4,\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_6\}$, $A=\{a,b,c,d\}$

$\mathcal{A}_1 = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\} \}$, $\mathcal{A}_2 = \{ \{a,b\}, \{c,d\} \}$,

$\mathcal{A}_3 = \{ \{a,c\}, \{b,d\} \}$, $\mathcal{A}_4 = \{ \{a\}, \{b,c,d\} \}$,

$\mathcal{A}_5 = \{ \{a\}, \{b\}, \{c,d\} \}$, $\mathcal{A}_6 = \{ \{a,b,c,d\} \}$

- 解:

例2.16(3)

- 画出下列偏序关系的哈斯图.

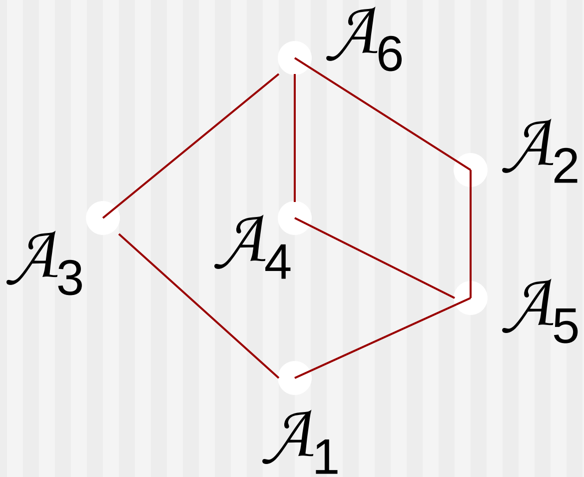
(3) $<\pi, \leq_{\text{加细}}>$, $\pi=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3,\mathcal{A}_4,\mathcal{A}_5,\mathcal{A}_6\}$, A={a,b,c,d}

$\mathcal{A}_1 = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\} \}$, $\mathcal{A}_2 = \{ \{a,b\}, \{c,d\} \}$,

$\mathcal{A}_3 = \{ \{a,c\}, \{b,d\} \}$, $\mathcal{A}_4 = \{ \{a\}, \{b,c,d\} \}$,

$\mathcal{A}_5 = \{ \{a\}, \{b\}, \{c,d\} \}$, $\mathcal{A}_6 = \{ \{a,b,c,d\} \}$

- 解:



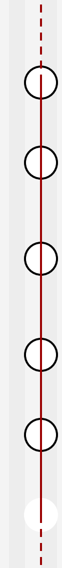
#

全序(total order)关系

- 全序关系: 若偏序集$\langle A, \preccurlyeq \rangle$满足

  $\forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \rightarrow x$与$y$可比)

  则称$\preccurlyeq$为全序关系, 称$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为全序集
- 全序关系亦称线序(linear order)关系
- 例: $\langle A, \leq \rangle$, $\langle A, \geq \rangle$



拟序(quasi-order)关系

- 拟序关系: 设 $R\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 若R是反自反的, 传递的, 则称R为拟序关系
- 通常用$\prec$表示拟序关系
- 反自反性与传递性蕴涵反对称性
- 拟序集: $<A, \prec>$, $\prec$是A上拟序关系
- 例子: 设$\varnothing\neq A\subseteq R$, $\varnothing\neq B\subseteq Z_+$

  $<A,<>,<A,>>,<B,|'>,<\mathcal{A},\subset>$

$|' = \{ <x,y> \mid x,y\in B \wedge x|y \wedge x\neq y\}$

定理2.29

- 定理2.29:设$\preccurlyeq$是非空集合A上偏序关系,$\prec$是A上拟序关系,则
  (1) $\prec$是反对称的;
  (2) $\preccurlyeq - I_A$是A上拟序关系;
  (3) $\prec \cup I_A$是A上偏序关系.
- 证明: (1) $x \prec y \wedge y \prec x \Rightarrow x \prec x$, 矛盾!
  (2)(3) 显然.

- 偏序关系与拟序关系的本质区别在于前者具有自反性，后者具有反自反性，但是可以互相转化。
- 共同实质是均具有反对称性和传递性
- 拟序关系与偏序关系的哈斯图在画法上完全相同，注意前者顶点均无环。

定理2.30

- 定理2.30:设$\prec$是非空集合A上拟序关系,则

  (1) $x\prec y$, $x=y$, $y\prec x$中至多有一式成立;

  (2) $(x\prec y \vee x=y) \wedge (y\prec x \vee y=x) \Rightarrow x=y$.

- 证明: (1) 两式以上成立导致 $x < x$, 矛盾!

(2) 若$x\neq y$,则$x=y$,与$y=x$为假,则可以推出 $(x < y) \wedge (y < x)$, (由已知条件)

与(1)矛盾! #

三歧性(trichotomy)

- 三歧性：设$\prec$是非空集合A上拟序关系，若$x\prec y, x=y, y\prec x$中有且仅有一式成立,则称$\prec$ 具有三歧性.
- 拟全序关系:设$\prec$是非空集合A上拟序关系，若$\prec$具有三歧性，则称$\prec$为拟全序关系，或拟线序关系,称$\langle A,\prec\rangle$为拟线序集.

- 最大元, 最小元
- 极大元, 极小元
- 上界, 下界
- 最小上界(上确界), 最大下界(下确界)

最大元, 最小元

- 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$
- 最大元(maximum/greatest element):

  y是B的最大元 $\Leftrightarrow$

  $$\forall x(\ x\in B \rightarrow x\preccurlyeq y\ )$$
- 最小元(minimum/least element):

  y是B的最小元 $\Leftrightarrow$

  $$\forall x(\ x\in B \rightarrow y\preccurlyeq x\ )$$

最大元, 最小元举例(例16(1))

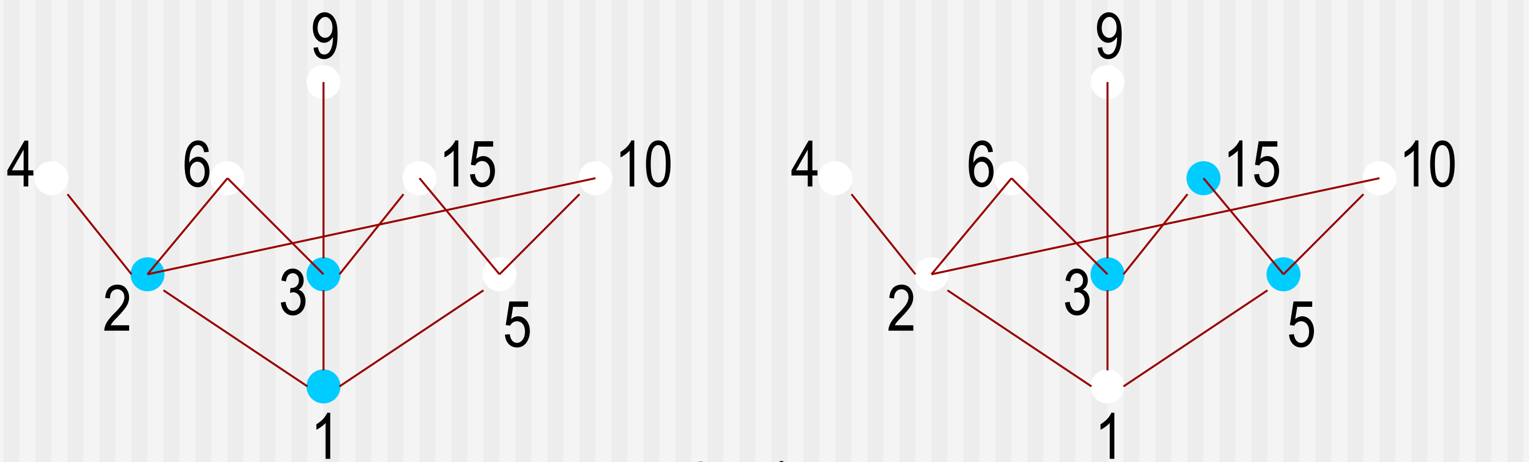
- 例16(1): <A,|>, A={1,2,3,4,5,6,9,10,15}

  B_1={1,2,3}, B_2={3,5,15}, B_3=A.

  B_1的最大元是{}, B_1的最小元是{1}

  B_2的最大元是{15}, B_2的最小元是{}

  B_3的最大元是{}, B_3的最小元是{1}



极大元,极小元

- 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$
- 极大元(maximal element):

  y是B的极大元 $\Leftrightarrow \forall x(\ x\in B \land y\preccurlyeq x \to x=y\ )$

  (没有比y大的元素)
- 极小元(minimal element):

  y是B的极小元 $\Leftrightarrow \forall x(\ x\in B \land x\preccurlyeq y \to x=y\ )$

  （没有比y小的元素）

极大元,极小元举例(例16(1))

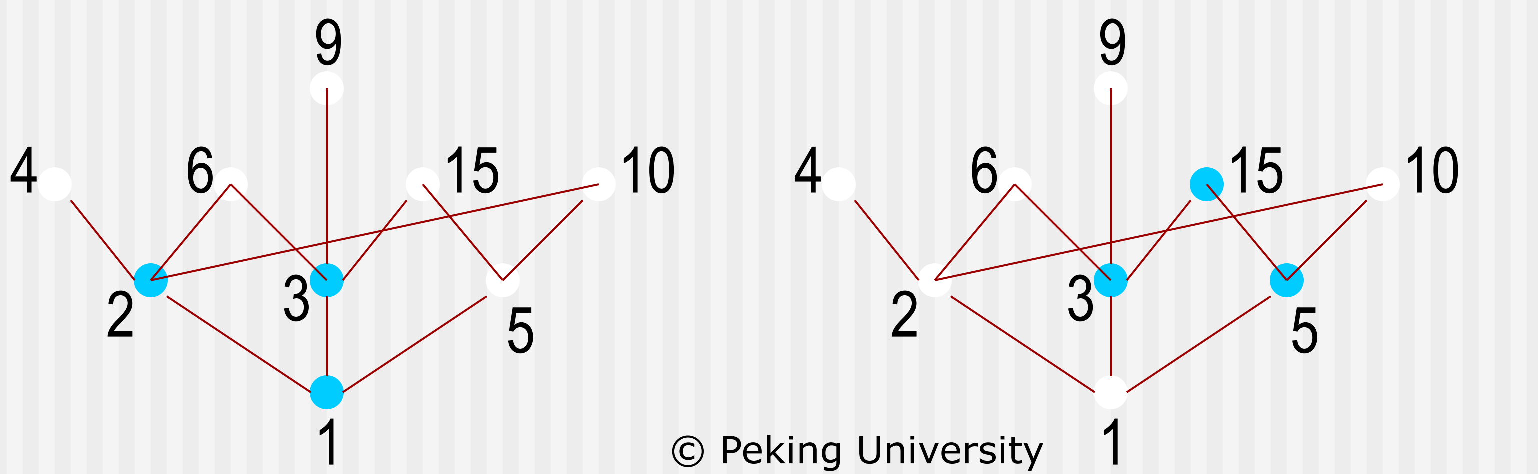
- 例16(1): $<A,|>$, $A=\{1,2,3,4,5,6,9,10,15\}$

  $B_1=\{1,2,3\}$, $B_2=\{3,5,15\}$, $B_3=A$.

B_1的极大元是$\{2,3\}$, B_1的极小元是$\{1\}$

B_2的极大元是$\{15\}$, B_2的极小元是$\{3,5\}$

B_3的极大元是$\{4,6,9,15,10\}$, B_3的极小元是$\{1\}$



上界, 下界

- 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$
- 上界(upper bound):
  y是B的上界 $\Leftrightarrow$
  $$\forall x(\ x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y\ )$$
- 下界(lower bound):
  y是B的下界 $\Leftrightarrow$
  $$\forall x(\ x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x\ )$$

上界, 下界举例(例16(1))

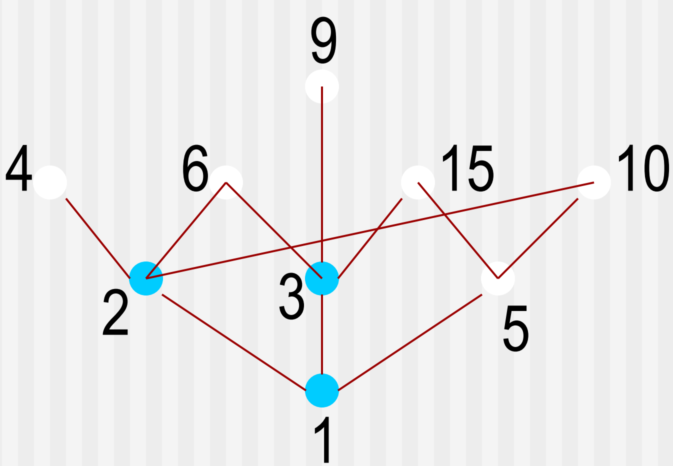
- 例16(1): $\langle A, | \rangle$, $A=\{1,2,3,4,5,6,9,10,15\}$

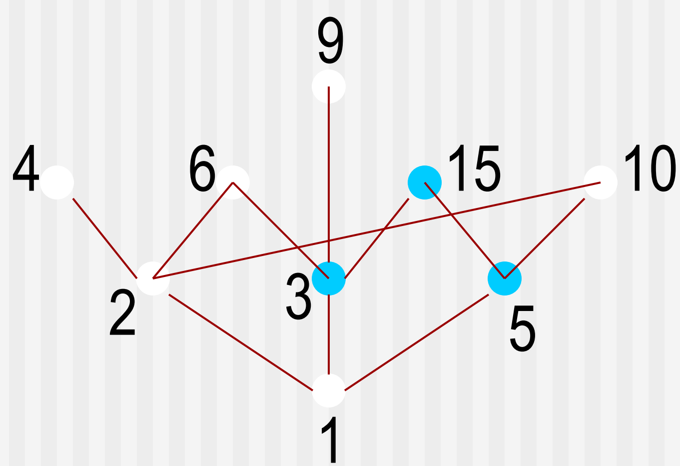
  $B_1=\{1,2,3\}$, $B_2=\{3,5,15\}$, $B_3=A$.

  B_1的上界是$\{6\}$, B_1的下界是$\{1\}$

  B_2的上界是$\{15\}$, B_2的下界是$\{1\}$

  B_3的上界是$\{\}$, B_3的下界是$\{1\}$





最小上界, 最大下界

- 设 $<A,\preccurlyeq>$ 为偏序集, $B \subseteq A$
- 最小上界(least upper bound):

  设 $C = \{ y \mid y$是B的上界 $\}$, C的最小元称为B的最小上界, 或上确界.
- 最大下界(greatest lower bound):

  设 $C = \{ y \mid y$是B的下界 $\}$, C的最大元称为B的最大下界, 或下确界.

最小上界,最大下界举例(例16(1))

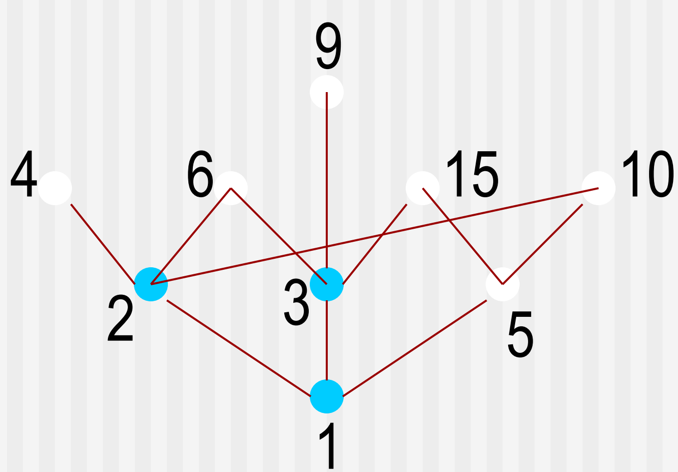
- 例16(1): <A,|>, A={1,2,3,4,5,6,9,10,15}

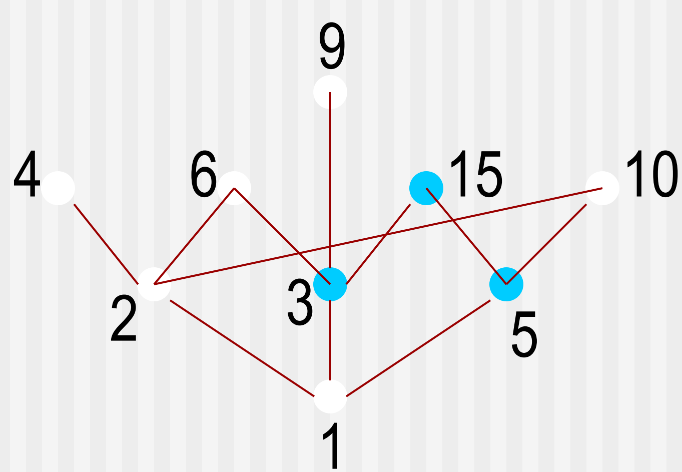
  B_1={1,2,3}, B_2={3,5,15}, B_3=A.

  B_1的最小上界是{6}, B_1的最大下界是{1}

  B_2的最小上界是{15}, B_2的最大下界是{1}

  B_3的最小上界是{}, B_3的最大下界是{1}





特殊元素比较

	存在(B非空有穷)	唯一	∈B
最大元	×(表示不一定)	√	√
最小元	×	√	√
极大元	√ (表示一定)	×	√
极小元	√	×	√
上界	×	×	×
下界	×	×	×
上确界	×	√	×
下确界	×	√	×

链(chain), 反链(antichain)

- 设<A,≼>为偏序集, B⊆A,
- 链(chain): B是A中的链 ⇔

  $\forall x \forall y(x \in B \wedge y \in B \rightarrow x$与$y$可比)

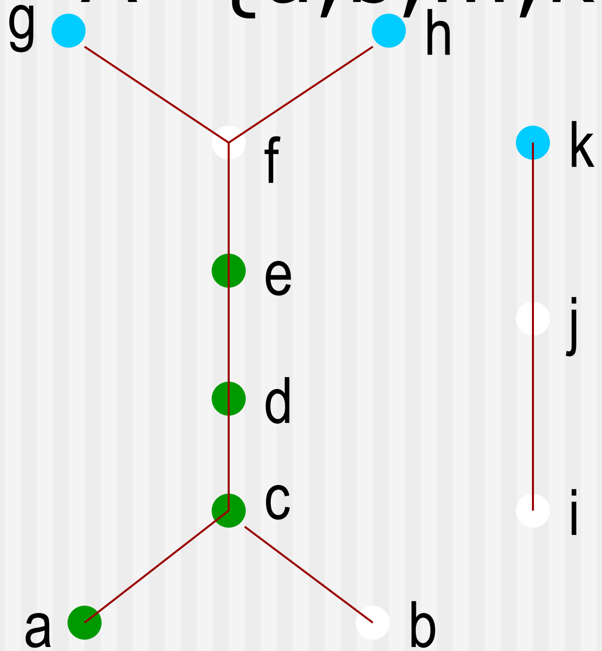
  |B|称为链的长度
- 反链(antichain): B是A中的反链 ⇔

  $\forall x \forall y(x \in B \wedge y \in B \wedge x \neq y \rightarrow x$与$y$不可比)

  |B|称为反链的长度

链，反链(举例)

- 设偏序集<A,≼>如图所示，A={a,b,…,k}.



B_1={a,c,d,e}是长为4的链

上界{e,f,g,h}, 上确界{e}

下界{a}, 下确界{a}

B_2={a,e,h}是长为3的链

B_3={b,g}是长为2的链

B_4={g,h,k}是长为3的反链

上界,下界,上确界,下确界: 无

B_5={a}是长为1的链和反链

B_6={a,b,g,h}既非链,亦非反链

定理2.31

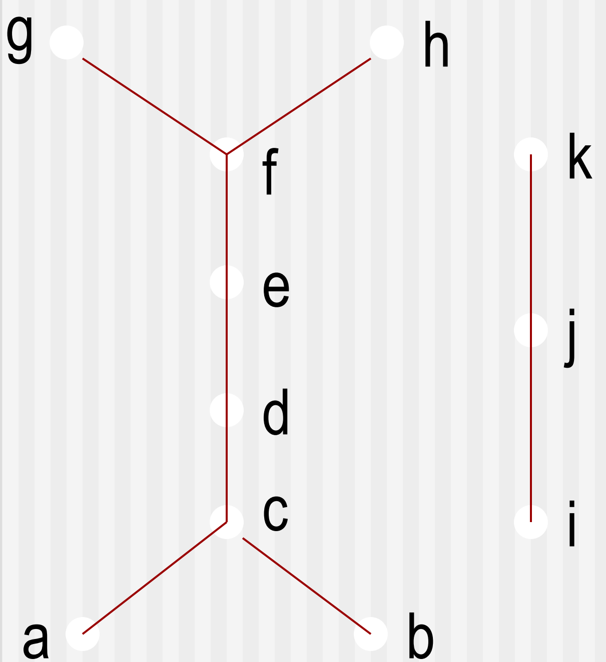
- 定理2.31: 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, A中最长链的长度为n, 则

  (1) A中存在极大元

  (2) A存在n个划分块的划分, 每个划分块都是反链(即A划分成n个互不相交的反链)

- 推论: 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, 若$|A|=mn+1$,则A中要么存在长度为$m+1$的反链, 要么存在长度为$n+1$的链.

举例



最长链长度为6, 如

B_1={a,c,d,e,f,h}, B_2={a,c,d,e,f,g},

A={a,b,…,k}可以划分为

$\mathcal{A}_1$= { {a,b,i}, {c,j}, {d}, {e}, {f}, {g,h,k} },

$\mathcal{A}_2$= { {a,b}, {c,i}, {d,j}, {e,k}, {f}, {g,h} }

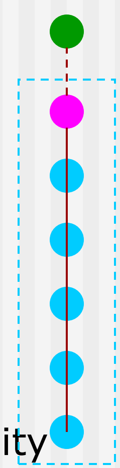
$|A|=11=2\times5+1$,

A中既有长度为2+1=3的反链,

也有长度为5+1=6的链

定理2.31(证明(1))

- 定理2.31: 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, A中最长链的长度为n, 则 (1) A中存在极大元
- 证明: (1) 设B是A中长度为n的最长链, B有极大元(也是最大元)y, 则y也是A的极大元, 否则A中还有比y“大”的元素z, B就不是最长链.



定理2.31(证明(2))

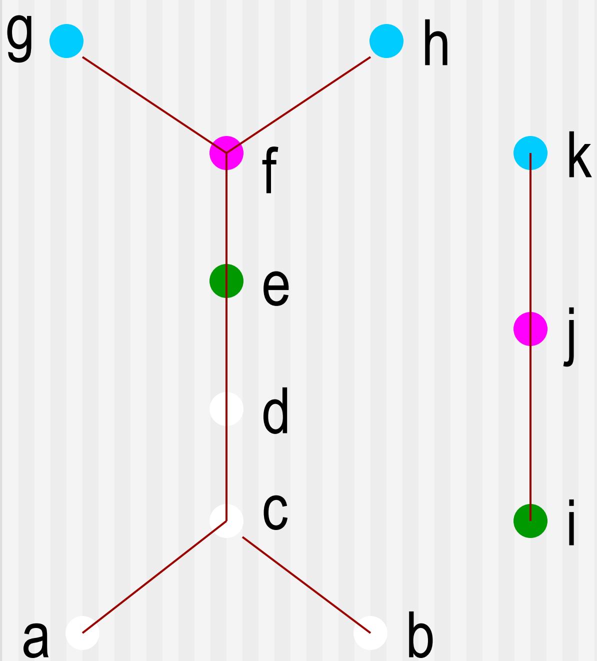
- 定理2.31: 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, A中最长链的长度为n, 则(2) A存在n个划分块的划分, 每个划分块都是反链(即A划分成n个互不相交的反链)
- 证明: (2) $A_1 = \{ x \mid x$是A中的极大元 $\}$,

  $A_2 = \{ x \mid x$是$(A-A_1)$中的极大元 $\}$,…

  $A_n = \{ x \mid x$是$(A-A_1-\ldots-A_{n-1})$中的极大元 $\}$,

  则 $\mathcal{A} = \{ A_1, A_2,\ldots, A_n \}$是满足要求的划分.

定理31(证明(2):举例)



最长链长度为6,

$A_1 = \{ g, h, k \}$,

$A_2 = \{ f, j \}$,

$A_3 = \{ e, i \}$,

$A_4 = \{ d \}$,

$A_5 = \{ c \}$,

$A_6 = \{ a, b \}$,

$\mathcal{A} = \{ \{a,b\}, \{c\}, \{d\}, \{e,i\}, \{f,j\}, \{g,h,k\} \}$

定理2.31(证明(2)续)

- 证明(续): [1] $A_1 = \{ x \mid x$是A中的极大元 $\}$, 极大元互相之间不可比, 所以A_1是反链, 同理$A_2,\ldots,A_n$都是反链.

  [2] 显然$A_1,A_2,\ldots,A_n$互不相交.

  [3] 最长链上的元素分属$A_1,A_2,\ldots,A_n$, 所以$A_1,A_2,\ldots,A_n$都非空.

  [4] 假设$z\in A-A_1-\ldots-A_n$,则最长链上的元素加上z就是长度为n+1的链, 矛盾! 所以$A=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$.

综上所述, $\mathcal{A}=\{ A_1,A_2,\ldots,A_n \}$确是所求划分. #

定理31推论(证明)

- 推论: 设<A,≼>为偏序集, 若 $|A|=mn+1$,则A中要么存在长度为 $m+1$的反链, 要么存在长度为$n+1$的链.
- 证明: (反证)假设A中既没有长度为$m+1$的反链, 也没有长度为$n+1$的链, 则按照定理2.31(2)中要求来划分A, A至多划分成n块, 每块至多m个元素, 于是A中至多有mn个元素, 这与$|A|=mn+1$矛盾! #

良序(well-order)

- 良序关系：设<A, $\prec$>为拟全序集，若A的任何非空子集B均有最小元，则称$\prec$为良序关系，<A, $\prec$ >为良序集
- 例：<N, $\prec$ >是良序集，<Z, $\prec$ >不是良序集

设 Σ 为一字母表，$<\Sigma,\leq>$为一良序集，那么Σ^*上的关系$\leq_{字}$称为Σ^*上的字典序（lexicographically ordered relation），定义如下：对任意x，$y\in\Sigma^*$

$$x\leq_{字}y 当且仅当(x为y字头)\vee(x = w\xi w' \wedge y = w\zeta w'' \wedge \xi\neq\zeta \wedge \xi\leq\zeta)$$

$$(\xi,\zeta\in\Sigma, w,w',w''\in\Sigma^*)$$

设Σ为一字母表，$<\Sigma,\leq>$为一良序集，那么Σ^*上的关系$\leq_{标}$称为Σ^*上的标准序（normally ordered relation），定义如下：对任意x，$y\in\Sigma^*$，$x\leq_{标}y$当且仅当$\|x\|<\|y\|\vee(\|x\|=\|y\|\wedge x\leq_{字}y)$（$\|w\|$表示字w的字长）

例 设$\Sigma = \{a,b\}$，$\lambda \leq a \leq b$，那么

（l）依字典序排列Σ^*如下：

λ ,a,aa,aaa, … , aab,aaab,ab,… , b,ba,baa, baaa，…

（2）依标准序排列如下：

λ ,a,b,aa,ab,ba,bb,aaa,aab,aba,abb,baa,bab,bba,bbb,…

小结

- 拟序关系
- 最大元，最小元，极大元，极小元
- 上界，下界，最小上界，最大下界
- 链，反链
- 良序关系

作业

- P56： 35, 37, 39
- P56: **45, 47, 49, 52**

（1）在A={a, b, c}上有多少个不同的二元关系？
（2）其中有多少个二元关系既是偏序关系又是等价关系？
（3）其中有多少个二元关系是偏序关系而不是等价关系？
（4）其中有多少个二元关系是等价关系而不是偏序关系？
（5）其中有多少个二元关系既不是等价关系也不是偏序关系？

若R是$\boldsymbol{A=\{a,b,c,d,e\}}$上的偏序关系，其中子集$\boldsymbol{\{b,c,d\}}$的上界是$\boldsymbol{\{a,b\}}$且无最小元，则满足该条件的偏序关系R有多少个？