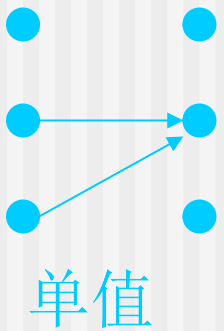
第3章 函数

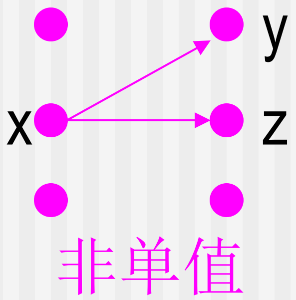
- 函数的基本概念
- 函数的性质
- 函数的合成
- 反函数

函数(function)

- 单值的二元关系称为**函数**或**映射**
- 单值: $\forall x \in \mathrm{dom}F$, $\forall y,z \in \mathrm{ran}F$,

$$xFy \wedge xFz \rightarrow y=z$$





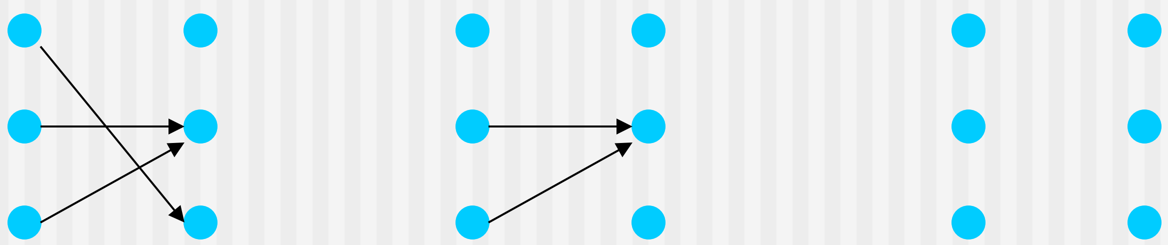
- $\varnothing$是空函数
- 常用F,G,H,…,f,g,h,…表示函数.
- $F(x)=y \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F \Leftrightarrow xFy$

偏函数(partial function)

- A到B的偏函数F: $\mathrm{dom}F \subseteq A \land \mathrm{ran}F \subseteq B$
- 偏函数记作 $F:A \rightarrow B$, 称A为F的前域,
- A到B的全体偏函数记为$A \rightarrow B$

$$A \rightarrow B = \{\, F \mid F:A \rightarrow B \,\}$$

$$A \nrightarrow B \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$



例1

- 例1: 设 $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2\}$, 求$A \nrightarrow B$.
- 解: $|A|=2, |B|=2, |A\times B|=4, |P(A\times B)|=2^4=16$.

$f_0=\varnothing$, $f_1=\{<a,1>\}$, $f_2=\{<a,2>\}$,

$f_3=\{<b,1>\}$, $f_4=\{<b,2>\}$,

$f_5=\{<a,1>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,1>,<b,2>\}$,

$f_7=\{<a,2>,<b,1>\}$,$f_8=\{<a,2>,<b,2>\}$.

$A \nrightarrow B = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$. #

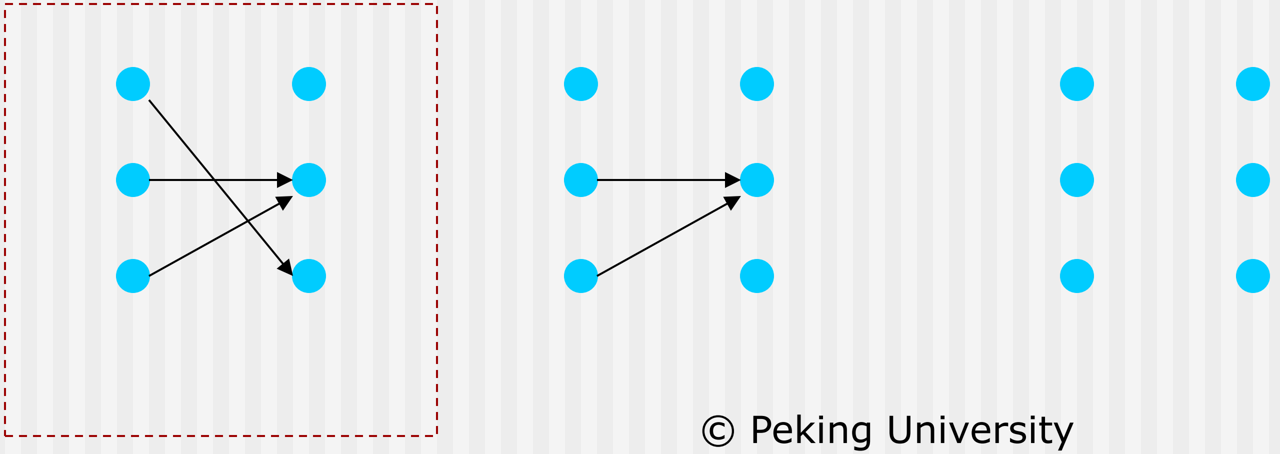
- 非函数: $\{<a,1>,<a,2>\}$, $\{<b,1>,<b,2>\}$,

$\{<a,1>,<a,2>,<b,1>\}$,…

全函数(total function)

- 全函数: domF=A
- 全函数记作 $F:A\to B$
- A到B的全体全函数记为B^A或$A\to B$

$$B^A = A\to B = \{ F \mid F:A\to B \}$$



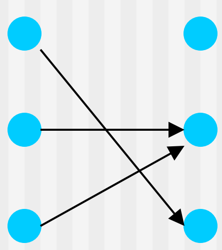
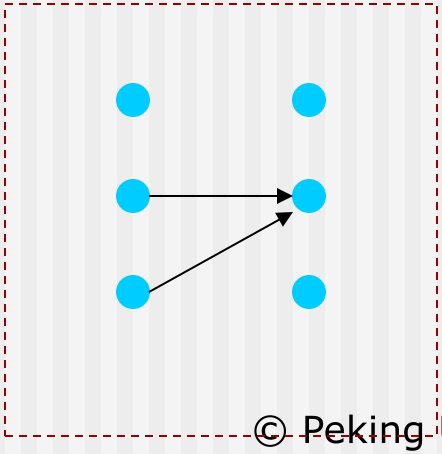
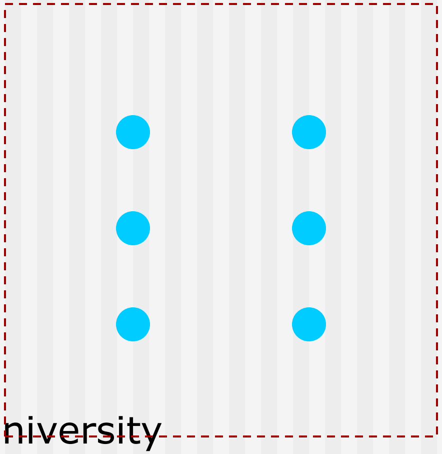
关于B^A

- $B^A = A \rightarrow B = \{F \mid F: A \rightarrow B\}$
  $= \{F \mid F$是A到B的全函数$\}$
- 全函数数：$|B^A| = |B|^{|A|}$.
- 当$A=\varnothing$时，$B^A=\{\varnothing\}$
- 当$A\neq\varnothing$且$B=\varnothing$时，$B^A=A\rightarrow B=\varnothing$,
  $A ⇸ B=\{\varnothing\}$.

真偏函数(proper partial function)

- 真偏函数: $\mathrm{dom}F \subset A$,
- 真偏函数记作$F:A \nrightarrow B$,
- A到B的全体真偏函数记为$A \nrightarrow B$

$$A \nrightarrow B = \{\ F \mid F:A \nrightarrow B\ \}$$

例1(续)

- 例1(续): 设 $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2\}$, 求$A \nrightarrow B$.
- 解: $f_0=\varnothing$, $f_1=\{<a,1>\}$, $f_2=\{<a,2>\}$,

$f_3=\{<b,1>\}$, $f_4=\{<b,2>\}$,

$f_5=\{<a,1>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,1>,<b,2>\}$,

$f_7=\{<a,2>,<b,1>\}$,$f_8=\{<a,2>,<b,2>\}$.

$A \nrightarrow B=\{f_0 , f_1 , f_2 , f_3 , f_4\}$. #

- 说明: $F \in A \mathrel{+\!\!\!+\!\!\!\!\to} B \Rightarrow F \in \mathrm{dom}F \to B$

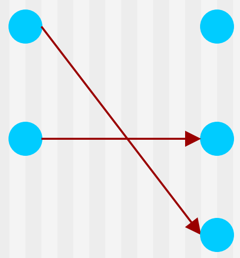
  $F \in A \mathrel{+\!\!\!\!\to} B \Rightarrow F \in \mathrm{dom}F \to B$

- $A \mathrel{+\!\!\!\!\to} B = A \to B \cup A \mathrel{+\!\!\!+\!\!\!\!\to} B$

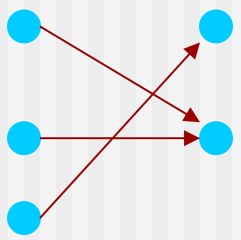
- 以下讨论A到B的全函数

全函数性质

- 设 F:A→B,
- 单射(injection): F是单根的
- 满射(surjection): ranF=B
- 双射(bijection): F既是单射又是满射,
  亦称为一一映射(1-1 mapping).



单射



满射

例2

- 例2: 设$A_1=\{a,b\}$, $B_1=\{1,2,3\}$,

  $A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$,

  $A_3=\{a,b,c\}$, $B_3=\{1,2,3\}$,

  求$A_1\rightarrow B_1$,$A_2\rightarrow B_2$,$A_3\rightarrow B_3$中的单射,满射,双射.

例2(解(1))

- 例2: (1) $A_1=\{a,b\}$, $B_1=\{1,2,3\}$,
- 解: (1) $A_1 \rightarrow B_1$中无满射,无双射,单射6个:
  $f_1=\{<a,1>,<b,2>\}$,
  $f_2=\{<a,1>,<b,3>\}$,
  $f_3=\{<a,2>,<b,1>\}$,
  $f_4=\{<a,2>,<b,3>\}$,
  $f_5=\{<a,3>,<b,1>\}$,
  $f_6=\{<a,3>,<b,2>\}$.

例2(解(2))

- 例2: (2) $A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$,
- 解: (2) $A_2 \to B_2$中无单射,无双射,满射6个:
  $f_1=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$,
  $f_2=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle\}$,
  $f_3=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$,
  $f_4=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,2\rangle\}$,
  $f_5=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$,
  $f_6=\{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle\}$.

例2(解(3))

- 例2: (3) $A_3=\{a,b,c\}$, $B_3=\{1,2,3\}$,
- 解: (3) $A_2\to B_2$中双射6个:

$f_1=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,3\rangle\}$,

$f_2=\{\langle a,1\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,2\rangle\}$,

$f_3=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,3\rangle\}$,

$f_4=\{\langle a,2\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,1\rangle\}$,

$f_5=\{\langle a,3\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$,

$f_6=\{\langle a,3\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle\}$. #

单射、满射和双射的数目

- 设|A|=n, |B|=m, 问A→B中有多少单射, 满射,双射?
- n<m时, A→B中无满射,双射, 单射个数为

$$m(m-1)\ldots(m-n+1)$$

- n=m时, A→B中双射个数为 n!
- n>m时, A→B中无单射,双射, 满射个数为

$$m!\left\{ {n \atop m} \right\}.$$

例3

- A,B是非空有穷集,讨论下列函数的性质

1. $f:A\to B$, $g:A\to A\times B$, $\forall a\in A$,
   $g(a)=\langle a,f(a)\rangle$
2. $f:A\times B\to A$, $\forall \langle a,b\rangle\in A\times B$,
   $f(\langle a,b\rangle)=a$
3. $f:A\times B\to B\times A$, $\forall \langle a,b\rangle\in A\times B$,
   $f(\langle a,b\rangle)=\langle b,a\rangle$

例3(解)

1. $f:A\to B, g:A\to A\times B, \forall a\in A, g(a)=<a,f(a)>$
   - 当$|B|>1$时,g是单射,非满射,非双射
   - 当$|B|=1$时,g是单射,满射,双射
2. $f:A\times B\to A, \forall <a,b>\in A\times B, f(<a,b>)=a$
   - 当$|B|>1$时,f非单射,是满射,非双射
   - 当$|B|=1$时,f是单射,满射,双射
3. $f:A\times B\to B\times A, \forall <a,b>\in A\times B,$ $f(<a,b>)=<b,a>$
   - f是单射,满射,双射

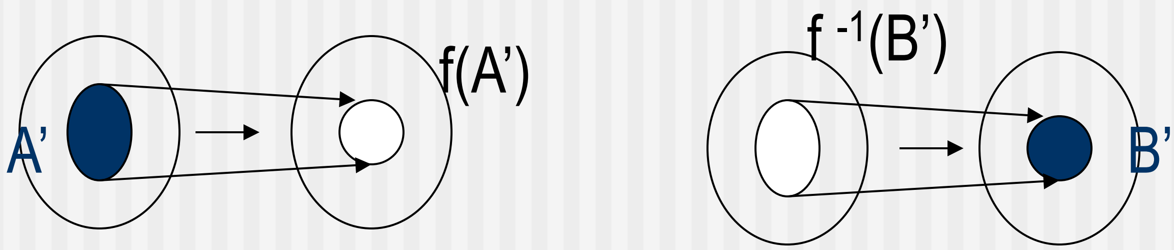
象(image), 原象(preimage)

- 设 $f:A\to B$, $A'\subseteq A$, $B'\subseteq B$
- A'的象是

$$f(A') = \{y \mid x\in A' \wedge y=f(x)\} \subseteq B$$

- $f(A) = \mathrm{ran} f$
- B'的原象是

$$f^{-1}(B') = \{x \mid y\in B' \wedge f(x)=y\} \subseteq A$$



象,原象(举例)

- 例: $f:R \to R$, $f(x)=x^2$.

$A_1=[0,+\infty)$, $A_2=[1,3)$, $A_3=R$

则: $f(A_1)=[0,+\infty)$, $f(A_2)=[1,9)$, $f(A_3)=[0,+\infty)$;

$B_1=(1,4)$, $B_2 = [0,1]$, $B_3=R$

则: $f^{-1}(B_1)=(-2,-1)\cup(1,2)$, $f^{-1}(B_2)=[-1,1]$, $f^{-1}(B_3)=R$

#

定理3.1

- 设f:C→D为单射,$\mathcal{C}$为C的非空子集族. $C_1,C_2 \subseteq C$,则
  1. $f(\cup\mathcal{C}) = \cup\{f(A) | A\in\mathcal{C}\}$
  2. $f(\cap\mathcal{C}) = \cap\{f(A) | A\in\mathcal{C}\}$
  3. $f(C_1-C_2) = f(C_1)-f(C_2)$.
- 证明: 利用定理2.9和f的单射性. #

回顾： 像的运算定理

- **定理2.9** 设R,S,A,B,$\mathcal{A}$为集合,$\mathcal{A}$≠∅,则

  (1) $R[A\cup B]=R[A]\cup R[B]$;

  (2) $R[\cup\mathcal{A}]=\cup\{R[A]|A\in\mathcal{A}\}$;

  (3) $R[A\cap B]\subseteq R[A]\cap R[B]$;

  (4) $R[\cap A]\subseteq\cap\{R[A]|A\in\mathcal{A}\}$;

  (5) $R[A]-R[B]\subseteq R[A-B]$;

  (6) $(R\circ S)[A]=R[S[A]]$.

定理3.2

- 设$f:C\to D$, $D_1,D_2\subseteq D$, $\mathscr{D}$是D的非空子集族. 则

  1. $f^{-1}(\cup\mathscr{D}) = \cup\{f^{-1}(D)|D\in\mathscr{D}\}$
  2. $f^{-1}(\cap\mathscr{D}) = \cap\{f^{-1}(D)|D\in\mathscr{D}\}$
  3. $f^{-1}(D_1-D_2) = f^{-1}(D_1)-f^{-1}(D_2)$.

- 证明: 利用逆都是单根的和定理3.1. #

特殊函数

- 常数函数:

  $f:A\to B,\ \exists b\in B,\ \forall x\in A,\ f(x)=b$

- 恒等函数:

  $I_A:A\to A,\ I_A(x)=x$

- 特征函数:

  $\chi_A:E\to\{0,1\},\ \chi_A(x)=1\Leftrightarrow x\in A$

当$\varnothing\subset A\subset E$时, χ_A是满射

与偏序关系和等价关系相关的概念

- 单调函数: $f:A\to B, <A,\preccurlyeq_A>, <B,\preccurlyeq_B>$偏序集
  - 单调增: $\forall x,y\in A,\ x \preccurlyeq_A y \Rightarrow f(x) \preccurlyeq_B f(y)$
  - 单调减: $\forall x,y\in A,\ x \preccurlyeq_A y \Rightarrow f(y) \preccurlyeq_B f(x)$,
  - 严格单调: 把$\preccurlyeq$换成$\prec$
- 自然映射: $f:A\to A/R,\ f(a)=[a]_R$, R为A上等价关系
  - 只有恒等关系才是单射

自然映射(举例)

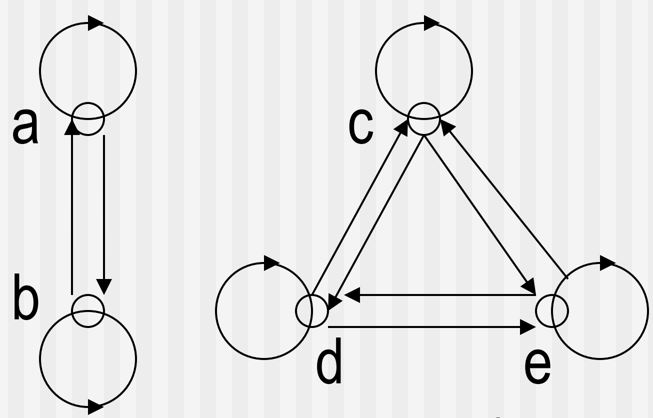
- 例: A={a,b,c,d,e,f}, A/R={{a,b},{c,d,e},{f}},

[a]=[b]={a,b}, [c]=[d]=[e]={c,d,e}, [f]={f},

$F:A\to A/R$, $F(x)=[x]$.

F(a)={a,b}, F(b)={a,b}, F(c)={c,d,e},

F(d)={c,d,e}, F(e)={c,d,e}, F(f)={f}. #

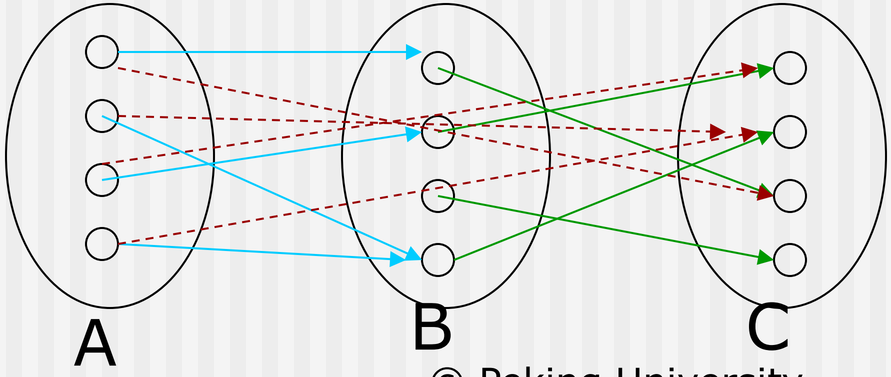


函数运算

- 合成(复合): 性质, 单调性
- 反函数: 存在条件(双射才有反函数)
- 单边逆: 左逆, 右逆, 存在条件

函数合成(composite)

- 定理3.3: 设 $g:A\to B$, $f:B\to C$, 则
  $f\circ g: A\to C$, $f\circ g(x)=f(g(x))$.
- 证明:
  - $f\circ g$是函数(即$f\circ g$单值)
  - $\mathrm{dom}\ f\circ g = A$
  - $\mathrm{ran}\ f\circ g \subseteq C$, $f\circ g(x)=f(g(x))$



定理3.3(证明)

- 证明: (1) $f\circ g$是函数,即$f\circ g$是单值的.

$\forall x\in f\circ g$, 若$\exists z_1,z_2\in ran(f\circ g)$,则

$x(f\circ g)z_1\wedge x(f\circ g)z_2$

$\Leftrightarrow\exists y_1(y_1\in B\wedge xgy_1\wedge y_1fz_1)\wedge\exists y_2(y_2\in B\wedge xgy_2\wedge y_2fz_2)$

$\Leftrightarrow\exists y_1\exists y_2(y_1\in B\wedge y_2\in B\wedge xgy_1\wedge xgy_2\wedge y_1fz_1\wedge y_2fz_2)$

$\Rightarrow\exists y(y\in B\wedge y_1=y_2=y\wedge y_1fz_1\wedge y_2fz_2)$

$\Rightarrow z_1=z_2$

定理3.3(证明续)

- 证明: (2) $dom(f\circ g) = A$.

  显然$dom(f\circ g)\subseteq A$,下证$A\subseteq dom(f\circ g)$,

$\forall x,\ x\in A$

$\Rightarrow\ \exists!y(y\in B\wedge xgy)$

$\Rightarrow\ \exists!y\exists!z(y\in B\wedge z\in C\wedge xgy\wedge yfz)$

$\Rightarrow\ \exists!z(z\in C\wedge x(f\circ g)z)$

$\Rightarrow\ x\in dom(f\circ g)$.

定理3.3(证明续)

- 证明: (3) $f \circ g(x)=f(g(x))$.

由(1)(2)知$f \circ g:A \to C$,

$\forall x, x \in A$

$\Rightarrow \exists! z(z \in C \land z=f \circ g(x))$

$\Leftrightarrow \exists! z \exists! y(z \in C \land y \in B \land y=g(x) \land z=f(y))$

$\Leftrightarrow \exists! z(z \in C \land z=f(g(x)))$

所以对任意$x \in A$, 有,$f \circ g(x)=f(g(x))$. #

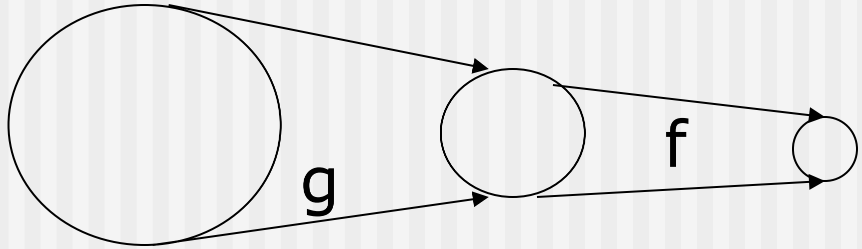
定理3.4

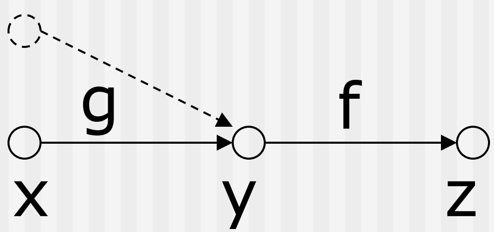
- 定理3.4: 设 $g:A\to B$, $f:B\to C$, $f\circ g:A\to C$,则

(1) f,g均为满射, 则 $f\circ g$也是满射.

(2) f,g均为单射, 则 $f\circ g$也是单射.

(3) f,g均为双射, 则 $f\circ g$也是双射. #





定理3.4(证明)

- 证明: (1) f,g均为满射, 则 $f\bigcirc g$也是满射. $\forall z, z\in C$

$\Rightarrow \exists y(y\in B \wedge z=f(y))$

$\Rightarrow \exists y\exists x(y\in B\wedge z=f(y)\wedge x\in A\wedge y=g(x))$

$\Rightarrow \exists y\exists x(y\in B\wedge x\in A\wedge z=f(g(x))=f\bigcirc g(x))$

$\Rightarrow \exists x(x\in A\wedge z=f\bigcirc g(x))$

所以$f\bigcirc g(x)$是满射 #

定理3.4(证明续)

- 证明: (2) f,g均为单射, 则 $f\bigcirc g$也是单射.

  $\exists z, z\in C$，存在$x_1, x_2\in A$ 使得

$x_1(f\bigcirc g)z \wedge x_2(f\bigcirc g)z$

$\Rightarrow \exists y_1 \exists y_2(y_1\in B\wedge y_2\in B\wedge y_1 f z\wedge x_1 g y_1\wedge y_2 f z \wedge x_2 g y_2)$

$\Rightarrow y_1=y_2 \wedge x_1=x_2$

$\Rightarrow x_1=x_2$

所以$f\bigcirc g(x)$是单射

由(1),(2)的证明保证(3)的正确性 #

定理3.5

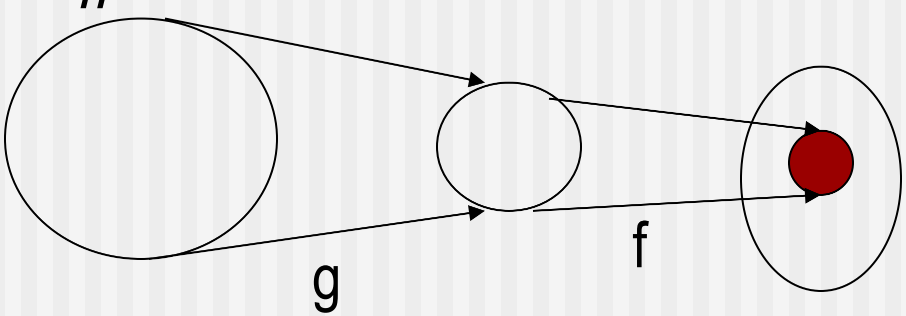
- 定理3.5: 设 g:A→B, f:B→C, 则

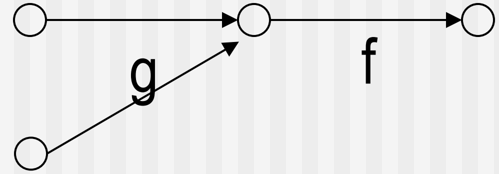
  (1) 若f○g为满射, 则f是满射.

  (2) 若f○g为单射, 则g是单射.

  (3) 若f○g为双射, 则g是单射,f是满射.

  #





定理3.5(证明)

- 证明: (1) $f \bigcirc g$也是满射. 则f是满射 $\forall z, z \in C$

$\Rightarrow \exists x(x \in A \wedge x(f \bigcirc g)z)$

$\Rightarrow \exists y \exists x(x \in A \wedge y \in ran(g) \subseteq B \wedge xgy \wedge yfz)$

$\Rightarrow \exists y \exists x(x \in A \wedge y \in B \wedge y=g(x) \wedge z=f(y))$

$\Rightarrow \exists y(y \in B \wedge z=f(y))$

所以f是满射 #

定理3.5(证明续)

- 证明: (2) $f\circ g$也是单射. 则g是单射

若存在$y\in ran(g)\subseteq B$, 存在$x_1,x_2\in A$

$x_1gy \wedge x_2gy$

$\Rightarrow \exists z(z\in ran(f)\subseteq C \wedge yfz \wedge x_1gy\wedge x_2gy)$

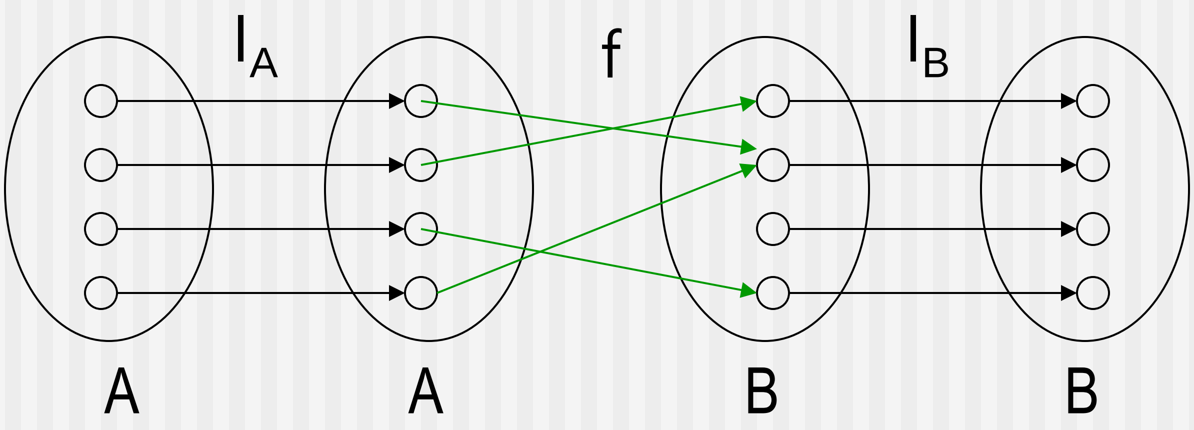
$\Rightarrow \exists z(z\in C \wedge x_1(f\circ g)z\wedge x_2(f\circ g)z)$

$\Rightarrow x_1=x_2$

所以g是单射 #

定理3.6

- 定理3.6: 设 $f:A\to B$, 则 $f=f\circ I_A=I_B\circ f$. #



定理3.7(单调性)

- 定理3.7: 设 $f:R\to R$, $g:R\to R$, 且f,g按$\leq$是单调增的, 则$f\circ g$也是单调增的.
- 证明: $x\leq y \Rightarrow g(x)\leq g(y) \Rightarrow f(g(x))\leq f(g(y))$. #

定理3.8

- 定理3.8: 设A为集合,则

  A^{-1}为函数 $\Leftrightarrow$ A为单根的. #

- 推论: 设R为二元关系,则

  R为函数 $\Leftrightarrow$ R^{-1}为单根的. #

定理3.8证明

A^{-1}为函数 $\Leftrightarrow$ A为单根的

证明： 先证$\Rightarrow$

若存在$y \in ranA$,存在$x_1,x_2 \in domA$,使得

$(x_1,y) \in A \wedge (x_2,y) \in A$

$\Leftrightarrow (y, x_1) \in A^{-1} \wedge (y, x_2) \in A^{-1}$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

所以，A是单根的

类似可证 $\Leftarrow$

反函数(inverse function)

- 定理3.9: 设 $f:A\to B$, 且为双射,则
  $f^{-1}:B\to A$, 且也为双射. #

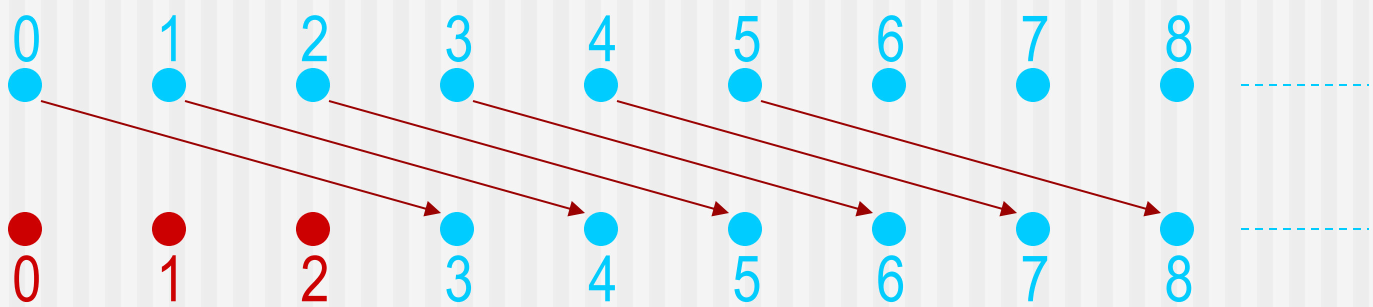
- 反函数: 若$f:A\to B$为双射, 则$f^{-1}:B\to A$称为f的反函数.

构造双射及求反函数

- $|A|=m$, $|B|=n$,

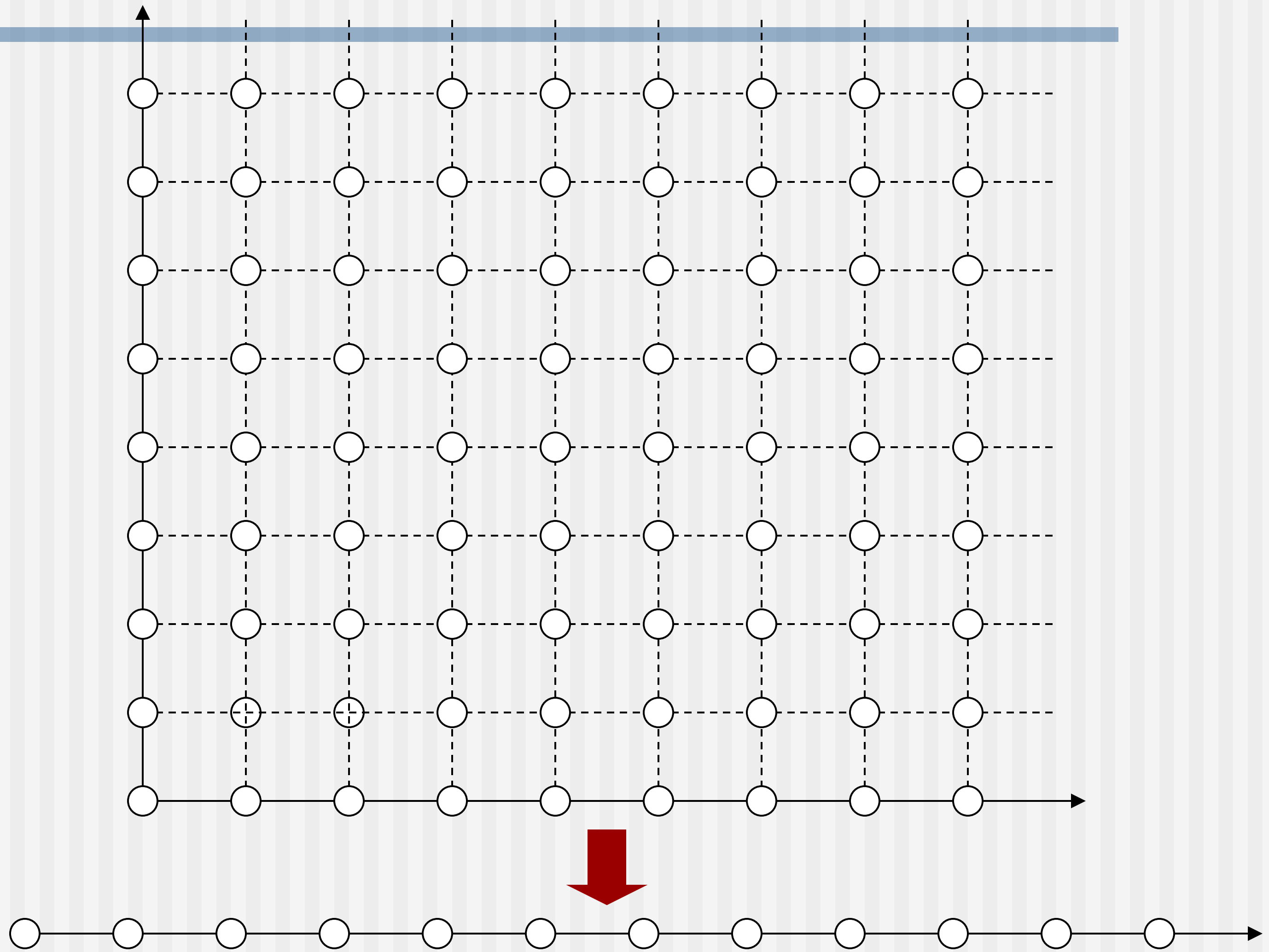
  $A\to B$存在双射 $\Leftrightarrow$ $n=m$
- $|A|=\infty$, $|B|=\infty$, $B\subset A$, $A\to B$可存在双射,例

  $f: N\to N-\{0,1,2\}$, $f(n)=n+3$



- $[0,1]\to(0,1)$? $R\to(0,1)$?
- $N\times N\to N$?

例3.6:构造N×N→N双射,反函数？



方法1：用自然数的特殊表示法

$\forall n \in N \wedge n \neq 0$, $\exists \alpha, \beta \in N$, β为奇数，使得

$$n=2^{\alpha}\beta$$

例：$1= 2^0\times 1$, $2= 2^1\times 1$, $3= 2^0\times 3,\ldots,$

$$6=2^1\times 3,\ldots,100=2^2\times 25,\ldots$$

令$n=2^{\alpha}\beta-1$,可以去掉$n\neq 0$的条件

令$\beta=2j+1$, β为奇数

$\forall n \in N$, $n=2^i(2j+1)-1$, $i,j \in N$, 此表示唯一.

方法1: $f:N\times N\to N$

- $f:N\times N\to N$, $f^{-1}:N\to N\times N$, $\forall\langle i,j\rangle\in N\times N$,

  $$f(\langle i,j\rangle)=2^i(2j+1)-1,$$

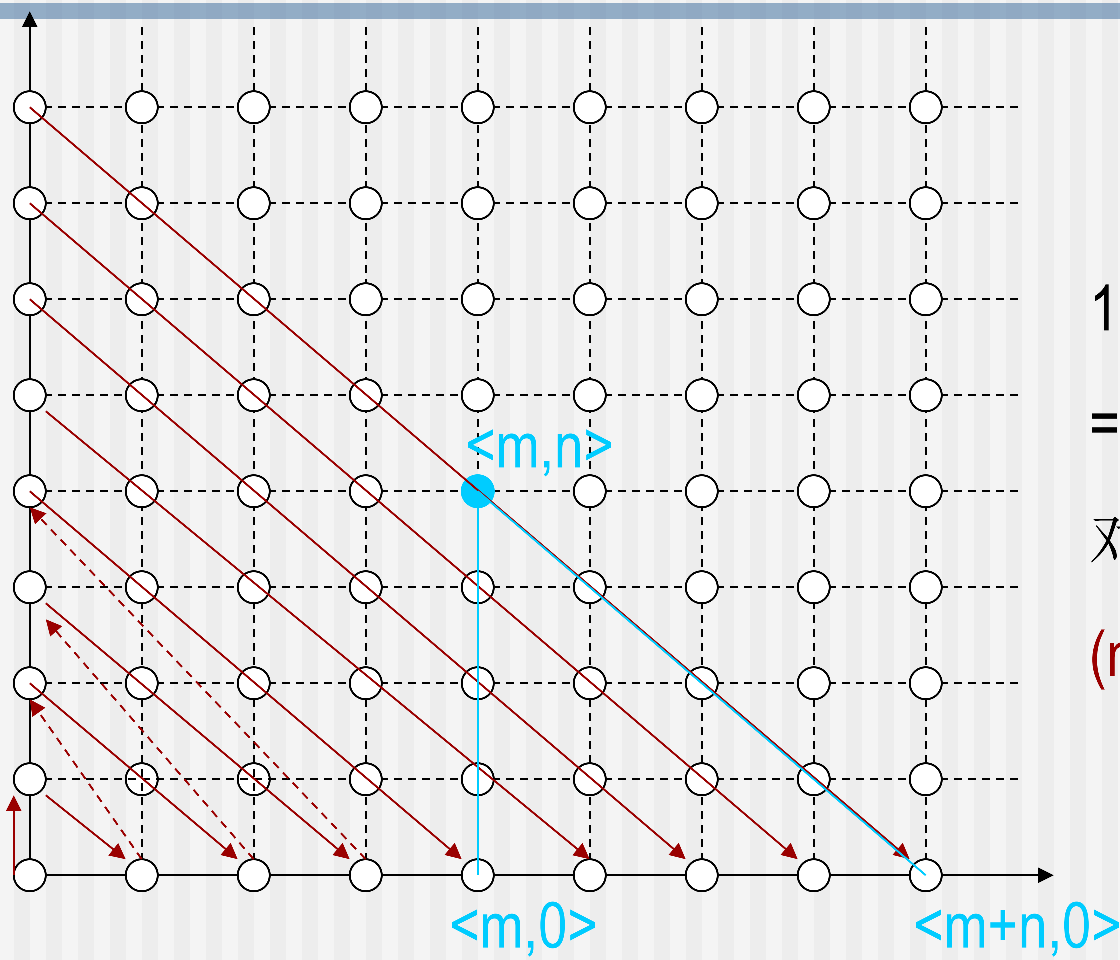
  $$f^{-1}(n)=f^{-1}(2^i(2j+1)-1)=\langle i,j\rangle.$$

- 例: $f(\langle 0,0\rangle)=0$, $f(\langle 0,1\rangle)=2$, $f(\langle 1,0\rangle)=1$,…

$f^{-1}(5)=\langle 1,1\rangle$, $f^{-1}(101)=\langle 1,25\rangle$,

$f^{-1}(200)=\langle 0,100\rangle$,…

方法2:Cantor编码—对角线法



$1+2+3+\ldots+(m+n)+(m+1)$

$=(m+n)(m+n+1)/2+(m+1)$

对应的自然数为

$(m+n)(m+n+1)/2+m$

方法2: $f:N\times N\to N$

- $f:N\times N\to N$, $f^{-1}:N\to N\times N$, $\forall\langle m,n\rangle\in N\times N$,

  $f(\langle m,n\rangle)=(m+n)(m+n+1)/2+m$,

- 求 $f^{-1}(r)=\langle ?,?\rangle=\langle m,n\rangle$.

$r=(m+n)(m+n+1)/2+m=t(t+1)/2+m$, $t=m+n$,

$0\le m\le t$, 求最大t, 使得$r\ge t(t+1)/2$.

$t^2+t-2r\le 0$, $t=\left\lfloor \frac{1}{2}(\sqrt{1+8r}-1)\right\rfloor$, $m=r-t(t+1)/2$, $n=t-m$.

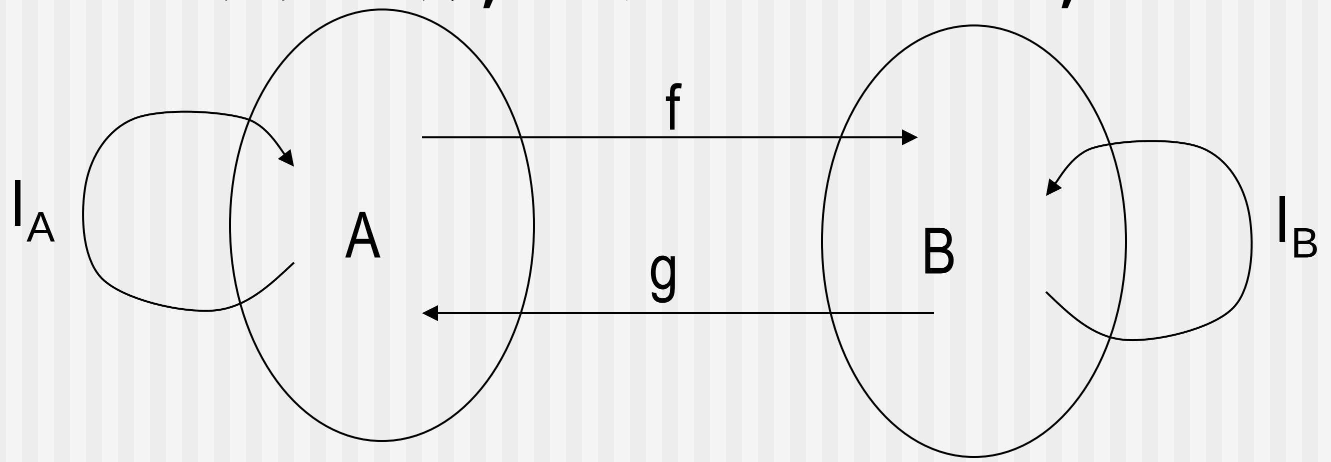
- 例: $f^{-1}(0)=\langle 0,0\rangle$, $f^{-1}(1)=\langle 0,1\rangle$,

$f^{-1}(2)=\langle 1,0\rangle$, $f^{-1}(3)=\langle 0,2\rangle$, …

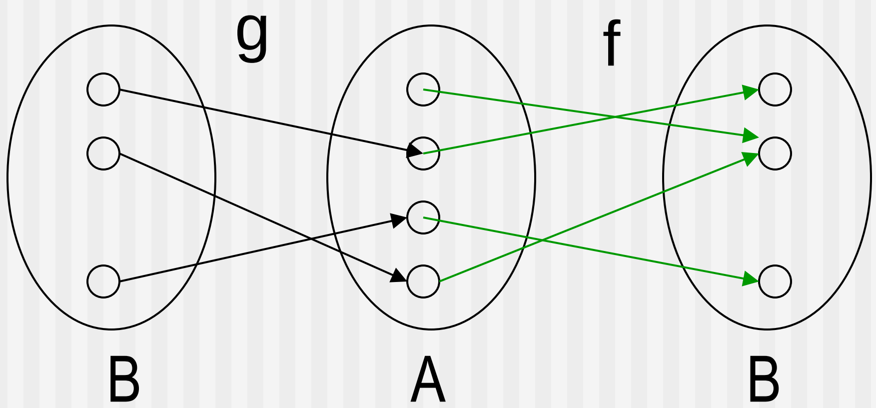
左逆、右逆

- 设$f:A\rightarrow B$，$g:B\rightarrow A$
- 左逆： g是f的左逆 $\Leftrightarrow$ $g\circ f=I_A$,
- 右逆： g是f的右逆 $\Leftrightarrow$ $f\circ g=I_B$,

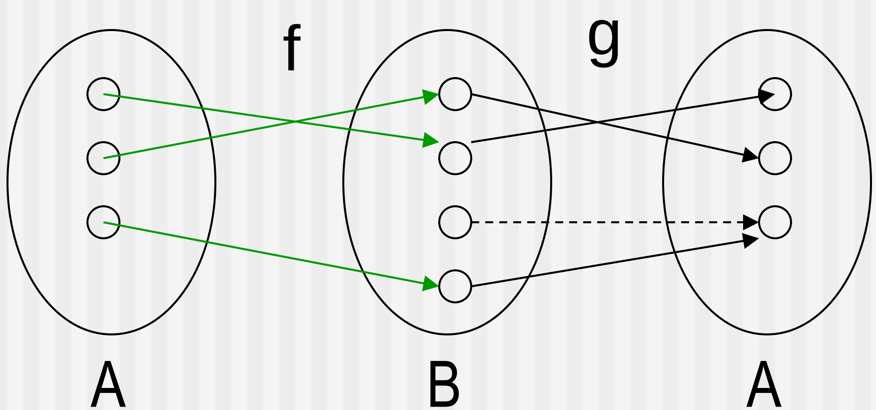
若$f:A\rightarrow B$为双射,f^{-1}既是f的左逆,又是f的右逆



举例



$f \circ g = I_B$



$g \circ f = I_A$

定理3.10

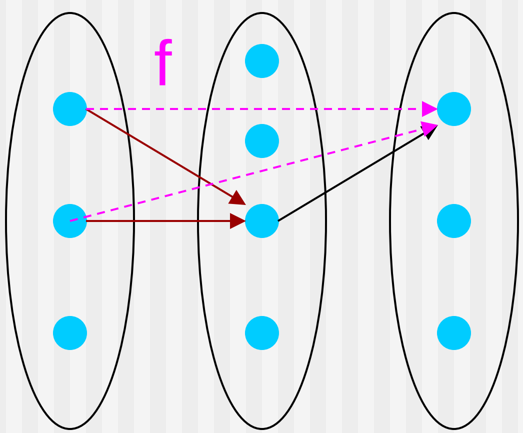
- 定理3.10: 设 f:A→B, 且A≠∅,则

  (1) f 存在左逆 ⇔ f 是单射;

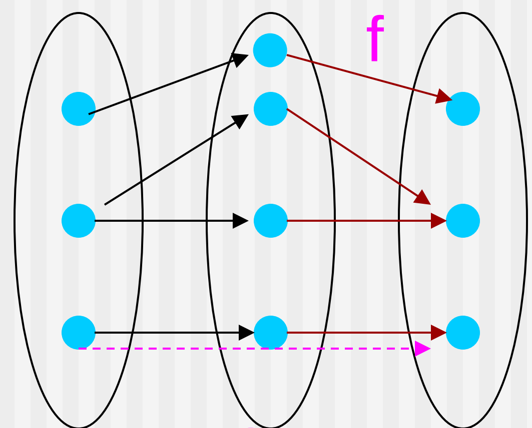
  (2) f 存在右逆 ⇔ f 是满射;

  (3) f 存在左逆,右逆 ⇔ f 是双射

  ⇔ f 的左逆和右逆相等. #



g○f



f○h

定理3.10(证明)

- 证明：f 存在左逆 $\Leftrightarrow$ f 是单射;

证$\Rightarrow$：设g是f的左逆,$g \circ f = I_A$, I_A是单射,所以f是单射；

证$\Leftarrow$：f是单射的,因而$f:A \to ranf$是双射的,所以由定理3.9,$f^{-1} \restriction ranf: ranf \to A$是双射的,存在$a \in A$,构造g如下：

$$g(y)=\begin{cases} f^{-1}(y), & y \in ranf \\ a, & y \in B-ranf \end{cases}$$

则$g:B \to A$为f的一个左逆，任意$x \in A$,

$$g \circ f(x)=g(f(x))=f^{-1}(f(x))=x$$

定理3.10(证明续)

- 证明：f 存在右逆 $\Leftrightarrow$ f 是满射;

证$\Rightarrow$：设h是f的右逆,$f\circ h=I_B$, I_B是满射,所以f是满射；

证$\Leftarrow$：f不一定是单射,因而f^{-1}不一定是函数,但一定是定义域为B的二元关系,构造$h:B\to A$如下：

任意$y\in B$,$f^{-1}(\{y\})=\{x|f(x)=y\}\neq\varnothing$(由于f是满射),取一个$x_0\in f^{-1}(\{y\})$,令$h(y)=x_0$,

则$h:B\to A$为f的一个右逆，任意$y\in B$,

$f\circ h(y)=f(h(y))=f(x_0)=y$

小结

- 概念:
  - 函数,偏函数,全函数,真偏函数
- 性质:
  - 单射, 满射, 双射
  - 计数
- 运算:
  - 合成
  - 反函数
  - 逆

作业

- P68: 3, 19, 20

给定集合A={a,b,c,d}，集合B={1,2,3}，则A到B的关系数量为____，A到B的偏函数数量为 _____，全函数数量为____，满射函数数量为____，单射函数数量为____

设X是一个有限集合，f:X→X，证明：如果f是单射或满射，则f是双射。