联系方式

- **教师**

  李素建：　lisujian@pku.edu.cn

  办公室：理科一号楼1443

  - https://pku-tangent.github.io/SetGraph/
  - http://123.56.88.210/discretemath.htm

- **助教**

  李铮：lycheelee@pku.edu.cn　(- 2100012915)

  朱大卫：zhudawei@pku.edu.cn (2100012917 - 2100012980)

  宋一帆：yfsong@pku.edu.cn　(2100012981 - 2100013088)

  李喆琛：1901111292@pku.edu.cn　(2100013089 - 2100013163)

  楼铁维：2101111504@stu.pku.edu.cn (2100013164 -)

第二章 二元关系

2-1 有序对与卡氏积

2-2 二元关系

2-3 关系矩阵和关系图

2-4 关系的性质

2-5 二元关系的幂运算

2-6 关系的闭包

2-7 等价关系和划分

2-8 序关系

2-1 有序对与卡氏积

1. 有序对(序偶 ordered pairs)的概念
2. 卡氏(笛卡儿)积
3. 笛卡儿积的性质

Ordered pairs

- $\{1,2\} = \{2,1\}$ unordered pair
- $<1,2> \neq \{2,1\}$ order pairs
- How to define $<.,.>$?
  - $<x,y>_1 = \{x,y\}$
  - $<x,y>_2 = \{x,\{y\}\}$ $(<\{\Phi\},\{\Phi\}>=<\{\{\Phi\}\},\Phi>)$

- The first successful definition was given by Norbert Wiener in 1914
  - $<x,y>=\{\{\{x\},\Phi\}, \{\{y\}\}\}$
- A simpler definition was given by Kazimierz Kuratowski in 1921, is in general use today
  - $<x,y>= \{\{x\},\{x,y\}\}$

1、序偶的概念

许多事物是成对出现的，而且这种成对出现的事物，具有一定的顺序。例如：上、下；左、右；3<4；平面上的坐标等。一般地说，由两个具有固定次序的客体组成，来表达两个客体之间的关系。

定义2.1 称{{a}, {a, b}}为由元素a、b构成的**有序对**或序偶，记作<a,b>。其中a称为有序对的第一个元素，b称为第二个元素，且a，b可以相同。

注：有序对可以看作是具有两个元素的集合，与一般集合不同的是有序对具有确定的次序。

- 定理2.1 $\langle a, b\rangle=\langle c, d\rangle$，当且仅当$a=c, b=d$。
  - 引理1 $\{x, a\}=\{x, b\}$，当且仅当$a=b$。
  - 引理2 设A, B是非空的集族，若A=B, 则
    (1) $\cup A=\cup B$ ； (2) $\cap A=\cap B$
- 推论 $a\neq b$时，$\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$

引理1的证明

- $\{x, a\}=\{x, b\}$ 当且仅当 $a=b$。

证明：$a=b \Rightarrow \{x, a\}=\{x, b\}$

$x=a$, $\{x, a\}=\{x, b\} \Rightarrow \{a, a\}=\{a, b\}$

$\Rightarrow \{a\}=\{a, b\} \Rightarrow b=a$

$x\neq a$, $a\in \{x, a\}=\{x, b\} \Rightarrow a=b$

$\therefore \{x, a\}=\{x, b\} \Leftrightarrow a=b$ #

引理2的证明

- 引理2 设A, B是非空的集族，若A=B, 则

  (1) $\cup A = \cup B$ ； (2) $\cap A = \cap B$

证明: (1)$\forall$**x,**

$x \in \cup A \Leftrightarrow \exists z(z \in A \wedge x \in z) \Leftrightarrow \exists z(z \in B \wedge x \in z) \Leftrightarrow x \in \cup B$

$\therefore \cup A = \cup B$

(2) $\forall$**x,**

$x \in \cap A \Leftrightarrow \forall z(z \in A \rightarrow x \in z) \Leftrightarrow \forall z(z \in B \rightarrow x \in z) \Leftrightarrow x \in \cap B$

$\therefore \cap A = \cap B$ #

定理证明

- $\langle a, b\rangle=\langle c, d\rangle$，当且仅当$a=c, b=d$。

证明：$\langle a, b\rangle=\langle c, d\rangle \Leftrightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\}=\{\{c\}, \{c, d\}\}$

$\Rightarrow \bigcup\{\{a\}, \{a, b\}\}= \bigcup\{\{c\}, \{c, d\}\} \Rightarrow \{a, b\}=\{c, d\}$

$\{\{a\}, \{a, b\}\}=\{\{c\}, \{c, d\}\} \Rightarrow \bigcap\{\{a\}, \{a, b\}\}=$
$\bigcap\{\{c\}, \{c, d\}\} \Rightarrow \{a\}=\{c\} \Leftrightarrow a=c$

$(\{a, b\}=\{c, d\}) \wedge (\{a\}=\{c\}) \Rightarrow b=d$

$\therefore \langle a, b\rangle=\langle c, d\rangle \Leftrightarrow a=c, b=d$。 #

推论证明

- 推论: $a \neq b \Rightarrow \langle a,b \rangle \neq \langle b,a \rangle$

证明: (反证) $\langle a,b \rangle = \langle b,a \rangle \Leftrightarrow a=b$,与 $a \neq b$矛盾. #

◆序偶的概念可推广到三元组、四元组、…、 n元组:

有序三元组(ordered triple)

$\langle x, y, z\rangle$表示序偶$\langle\langle x, y\rangle, z\rangle$;

有序四元组$\langle x, y, z, w\rangle$表示序偶$\langle\langle x, y, z\rangle, w\rangle$;

有序n元组$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$表示序偶$\langle\langle x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\rangle, x_n\rangle$

有序n元组

定义2.2 一个**有序n(n≥2)元组**是一个有序对，它的第一个元素为有序的(n−1)元组$\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\rangle$，第二个元素为$a_n$，记为$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$。即

$$\langle\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\rangle, a_n\rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$$

定理2.2 $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$当且仅当$a_i=b_i$，$i=1, 2, \ldots, n$.

注：n元组有严格的集合定义，但我们关注的是有序对及有序n元组的次序性，不过多讨论他们的集合表示。

2、卡氏积(Cartesian product)

- 定义2.3 设A、B为集合，称由A中元素为第一个元素，B中元素为第二个元素的所有有序对组成的集合为A与B的卡氏积(笛卡儿积)，记作$A\times B$，即$A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}$ 。

例1 设$A=\{a,b\}$，$B=\{1, 2, 3\}$，求$A\times B$，$B\times A$。

解：$A\times B=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle a,3\rangle,\langle b,1\rangle\langle b,2\rangle,\langle b,3\rangle\}$。

$B\times A=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$。

由此例可知，笛卡儿积不满足交换律。 #

卡氏积的性质

- 非交换: $A \times B \neq B \times A$

  (除非 $A=B \vee A=\varnothing \vee B=\varnothing$)
- 非结合: $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$

  (除非 $A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee C=\varnothing$)
- 分配律: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ 等
- 其他: $A \times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing$ 等

卡氏积非交换性

- 非交换: $A \times B \neq B \times A$

  (除非 $A=B \vee A=\varnothing \vee B=\varnothing$)

- 例: $A=\{1\}$, $B=\{2\}$.

  $A \times B = \{<1,2>\}$,

  $B \times A = \{<2,1>\}$.

卡氏积非结合性

- 非结合: $(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$

  (除非 $A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee C=\varnothing$)

- 反例: $A=B=C=\{1\}$.

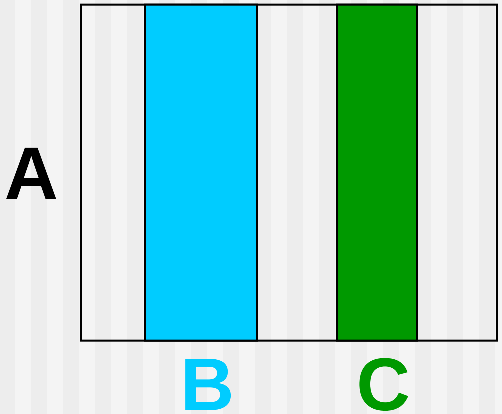
  $(A\times B)\times C = \{\langle\langle 1,1\rangle,1\rangle\}$,

  $A\times(B\times C) = \{\langle 1,\langle 1,1\rangle\rangle\}$.

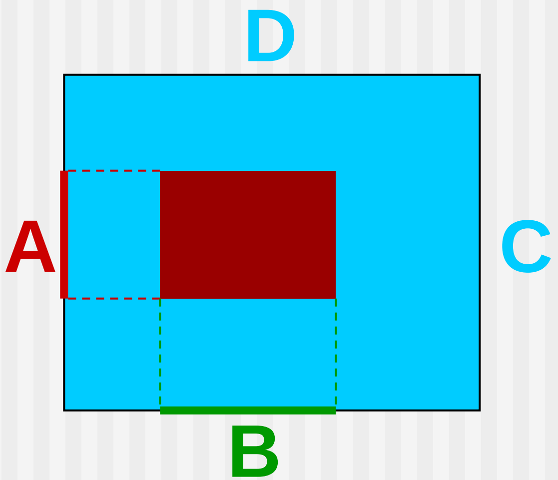
卡氏积分配律

- 1. $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$
- 2. $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$
- 3. $(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$
- 4. $(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$

卡氏积图示



$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$



$A\subseteq C \wedge B\subseteq D \Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$

笛卡儿积的性质

例 证明$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

证:在集合$(B\cap C)\times A$中任取$<x,y>$，那么

$<x,y>\in(B\cap C)\times A \Leftrightarrow x\in(B\cap C)\wedge y\in A$

$\Leftrightarrow (x\in B\wedge x\in C)\wedge y\in A$

$\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in A\wedge x\in C\wedge y\in A$

$\Leftrightarrow (x\in B\wedge y\in A)\wedge(x\in C\wedge y\in A)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(B\times A)\wedge<x,y>\in(C\times A)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(B\times A)\cap(C\times A)$

$\therefore (B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$。 #

(卡氏积图示)

3、笛卡儿积的性质(续1)

（5）若$C \neq \Phi$,则 $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \times C \subseteq B \times C) \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B)$

证: 证$\Rightarrow$, 任取$<x,y> \in A \times C$，有

$<x,y> \in A \times C \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C \Rightarrow x \in B \wedge y \in C \Rightarrow <x,y> \in B \times C$

因此， $A \times C \subseteq B \times C$。

证$\Leftarrow$, 若$A = \Phi$, 则$A \subseteq B$.

若$A \neq \Phi$,$C \neq \Phi$, $A \times C \subseteq B \times C$, 取$y \in C$，则有

$x \in A \Rightarrow x \in A \wedge y \in C$ （已设$y \in C$，故$y \in C$ 为真）

$\Leftrightarrow <x,y> \in A \times C \Rightarrow <x,y> \in B \times C \Leftrightarrow x \in B \wedge y \in C \Leftrightarrow x \in B$

因此， $A \subseteq B$

类似可证： $A \subseteq B \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B)$。 #

（6）设A、B、C、D为任意非空集合，则

$$(A \times B \subseteq C \times D) \Leftrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq D$$

（证明与性质（5）的证明方法类似，从略）

3、笛卡儿积的性质(续2)

例 证明$(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$。

证：$\langle x,y\rangle\in(A-B)\times C$

$\Leftrightarrow x\in(A-B)\wedge y\in C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B \wedge y\in C$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in C \wedge x\notin B)\vee (x\in A \wedge y\in C \wedge y\notin C)$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in C) \wedge (x\notin B\vee y\notin C)$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in C) \wedge (\neg x\in B\vee \neg y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A \wedge y\in C)\wedge\neg(x\in B\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in A\times C \wedge \neg\langle x,y\rangle\in B\times C$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in(A\times C)-(B\times C)$

所以，$(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$。 #

n维卡氏积

- n维卡氏积:

  $$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{ <x_1, x_2, \ldots, x_n> \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in A_n \}$$

- $A^n = A \times A \times \ldots \times A$
- $|A_i| = n_i, i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow$

  $$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_n.$$

- n维卡氏积性质与2维卡氏积类似.

n维卡氏积的性质

- 非交换： $A\times B\times C\neq B\times C\times A$

  (要求A,B,C均非空,且互不相等)
- 非结合：
- 分配律： 例如

  $$A\times B\times(C\cup D)=(A\times B\times C)\cup(A\times B\times D)$$
- 其他： 如 $A\times B\times C=\varnothing\Leftrightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing\vee C=\varnothing$.

小结

- 有序对(有序二元组)　$<a,b> = \{\{a\},\{a,b\}\}$
- 有序三元组, 有序n元组
- 卡氏积　$A\times B = \{ <x,y> \mid x\in A \wedge y\in B \}$
- 卡氏积性质：非结合、非交换、分配律等

2.2 二元关系

事物之间存在着各式各样的关系，例如，三名学生A、B、C选修α、β、γ、δ四门课，设A选α和δ，B选γ，C选α和β，那么，学生选课的对应关系可记作：

$$R=\{\langle A,\alpha\rangle,\langle A,\delta\rangle,\langle B,\gamma\rangle,\langle C,\alpha\rangle,\langle C,\beta\rangle\}$$

这个序偶的集合R反映了学生集合S={A,B,C}与课程集合T={α,β,γ,δ}之间的关系。

- 关系的概念
- 关系的运算（定理）

定义2.5 若集合F中的全体元素均为有序的n(n≥2)元组，则称F为**n元关系**。当n=2时，称F为二元关系，简称为关系。

对于二元关系F，若 <x,y>∈F，记作 xFy

表示方法：(中缀，前缀，后缀)

规定空集Ø为n元空关系，简称空关系

n元关系（续）

- 例1: F1={<a,b,c,d>,<1,2,3,4>,<物理,化学,生物,数学>},F1是4元关系. #
- 例2:F2={<a,b,c>,<α,β,γ>,<大李,小李,老李>}, F2是3元关系. #
- 例3:R1={<1,2>,<α,β>,<a,b>}, R1是2元关系. #
- 例4:R2={<1,2>,<3,4>,<白菜,小猫>}, R2是2元关系. #
- 例5:A={<a,b>,<1,2,3>,a,α,1}, A不是关系. #

关系的概念(续1)

定义2.6 设A和B是两个任意集合，卡氏积A×B的任一子集R称为**A到B的二元关系**。

$$R \subseteq A \times B \Leftrightarrow R \in P(A \times B)$$

若$|A|=m$,$|B|=n$, 则$|A \times B|=mn$, 故$|P(A \times B)|=2^{mn}$

即A到B不同的二元关系共有2^{mn}个

关系举例

例 设A={1，2，3，4}，求A上的小于等于关系L_A

解：$L_A=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\le y\}$

$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,$

$\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,4\rangle\}$ #

关系举例

- 设A={a1,a2}, B={b},

则A到B的二元关系共有4个:

$R_1=\Phi$, $R_2=\{<a1,b>\}$, $R_3=\{<a2,b>\}$,

$R_4=\{<a1,b>,<a2,b>\}$.

B到A的二元关系也有4个:

$R_5=\Phi$, $R_6=\{<b,a1>\}$, $R_7=\{<b,a2>\}$,

$R_8=\{<b,a1>,<b,a2>\}$. #

A上的二元关系

A上的二元关系: 是A×A的任意子集

R是A上的二元关系

$\Leftrightarrow R \subseteq A \times A \Leftrightarrow R \in P(A \times A)$

关系的概念(续4)

例 设集合A有n个元素, 问A上可能的二元关系有多少个?

解：集合A上的二元关系与$A\times A$的子集个数相同。若$|A|=n$，则$|A\times A|=n^2$， $A\times A$的子集个数就有2的n^2次方个。所以A上不同的二元关系有2的n^2次方个。

例如，集合$A=\{a, b\}$上的二元关系有16个

关系的概念(续3)

求：集合A={a, b}上的16个二元关系。

$R_1=\Phi$ (空关系)；

$R_2=\{\langle a,a\rangle\}$, $R_3=\{\langle b,b\rangle\}$, $R_4=\{\langle a,b\rangle\}$, $R_5=\{\langle b,a\rangle\}$;

$R_6=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$(恒等关系$I_A$),

$R_7=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle\}$, $R_8=\{\langle a,a\rangle,\langle b,a\rangle\}$,

$R_9=\{\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle\}$, $R_{10}=\{\langle b,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$, $R_{11}=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$;

$R_{12}=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle\}$, $R_{13}=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$,

$R_{14}=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$, $R_{15}=\{\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$;

$R_{16}=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$ (全域关系E_A)。

几种特殊的关系

称$E_A = \{(<x,y> \mid x \in A \land y \in A)\} = A \times A$ 是A上的**全域**关系。

称$I_A = \{(<x,x> \mid x \in A)\}$ 是A上的**恒等**关系。

若A是实数集或其子集,

称$D_A = \{(<x,y> \mid x \in A \land y \in A \land x|y)\}$ 是A上的**整除**关系。

称$L_A = \{(<x,y> \mid x \in A \land y \in A \land x \le y)\}$ 是A上的**小于等于**关系。

若A为任意的集合

称$\subseteq_A = \{(<x,y> \mid x \subseteq A \land y \subseteq A \land x \subseteq y)\}$ 是P(A)上的**包含**关系。

称$\subset_A = \{(<x,y> \mid x \subseteq A \land y \subseteq A \land x \subset y)\}$ 是P(A)上的**真包含**关系

整除关系举例

例: A={1,2,3,4,5,6}, 则

D_A={<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <1,5>, <1,6>, <2,2>,<2,4>,<2,6>, <3,3>,<3,6>,<4,4>,<5,5>,<6,6>}.

#

二元关系相关概念

- 定义域, 值域, 域
- 逆, 合成(复合)
- 限制, 象
- 单根, 单值

关系相关的概念

定义2.7 设R为任一集合，称

$$\mathrm{dom}R = \{ x \mid \exists y (\langle x,y\rangle \in R) \}$$

为R的定义域，称

$$\mathrm{ran}R = \{ y \mid \exists x (\langle x,y\rangle \in R) \}$$

为R的值域，称

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$$

为R的域。

例：设$R_1=\{a,b\}$,$R_2=\{a,b,<c,d>,<e,f>\}$,
$R_3=\{<1,2>,<3,4>,<5,6>\}$

解：

当**a,b**不是有序对时, $\mathbf{R_1}$和$\mathbf{R_2}$不是关系.

由定义得

$\mathrm{dom}R_1=\emptyset$, $\mathrm{ran}R_1=\emptyset$, $\mathrm{fld}R_1=\emptyset$,

$\mathrm{dom}R_2=\{c,e\}$,$\mathrm{ran}R_2=\{d,f\}$,$\mathrm{fld}R_2=\{c,e,d,f\}$,

$\mathrm{dom}R_3=\{1,3,5\}$,$\mathrm{ran}R_3=\{2,4,6\}$,$\mathrm{fld}R_3=\{1,2,3,4,5,6\}$

#

关系的运算

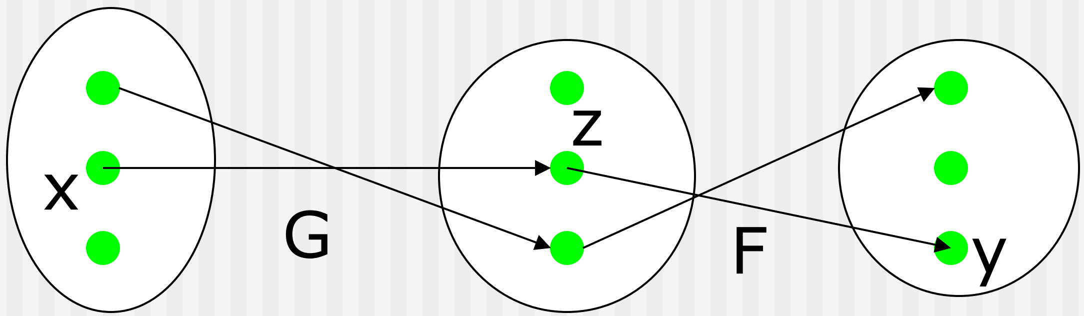
定义2.8 设F,G,A为3个集合，

(1) F的逆(inverse):

称$F^{-1}=\{<x,y>|<y,x>\in F\}$

(2) F与G的**合成**或**复合(composite):**

$F\circ G=\{<x,y>|\exists z(<x,z>\in G \wedge <z,y>\in F)$



- 注意

(1) 当R中无有序对时，domR,ranR,fldR均为∅

(2) $F\circ G$的合成为**逆序合成**

限制和像

- $F \upharpoonright A=\{<x,y> \mid <x,y> \in F \wedge x \in A\}$ 为F在A上的限制(restriction)
- $F[A]=\operatorname{ran}(F \upharpoonright A)$为A在F下的像
$F[A]=\{y \mid \exists x(x \in A \wedge xFy)\}$

单根

若对于任意的$y \in \mathrm{ran}F$,唯一地存在着$x \in \mathrm{dom}F$, 使得$<x,y> \in F$，则称F是**单根(single rooted)**的

$$\forall y(\, y \in \mathrm{ran}\ F \rightarrow \exists! x(\, x \in \mathrm{dom}F \wedge xFy)\,)$$
$$\Leftrightarrow (\forall y \in \mathrm{ran}\ F)(\exists! x \in \mathrm{dom}F)(xFy)$$

- $\exists!$表示“存在唯一的”

单值(single valued)

- 若对于任意的x$\in$domF,唯一地存在着y$\in$ranF，使得$<x,y>\in F$，则称F是**单值**的

$$\forall x(x\in \mathrm{dom}F \rightarrow \exists! y(y\in \mathrm{ran}\, F \wedge xFy))$$
$$\Leftrightarrow(\forall x\in \mathrm{dom}F)(\exists! y\in \mathrm{ran}\, F)(xFy)$$

例2.2

- 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,b,\langle c,d\rangle\}$,
  $R=\{\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle\}$,
  $F=\{\langle a,b\rangle, \langle a,\{a\}\rangle, \langle \{a\},\{a,\{a\}\}\rangle\}$,
  $G=\{\langle b,e\rangle,\langle d,c\rangle\}$.

求: (1) A^{-1}, B^{-1}, R^{-1}.

(2) $B\circ R^{-1}$, $G\circ B$, $G\circ R$, $R\circ G$.

(3) $F\upharpoonright\{a\}$, $F\upharpoonright\{\{a\}\}$, $F\upharpoonright\{a,\{a\}\}$, $F^{-1}\upharpoonright\{\{a\}\}$.

(4) $F[\{a\}]$, $F[\{a,\{a\}\}]$, $F^{-1}[\{a\}]$, $F^{-1}[\{\{a\}\}]$.

例2.2(1)

- $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,b,<c,d>\}$,
  $R=\{ <a,b>, <c,d> \}$,

求: (1) A^{-1}, B^{-1},R^{-1}.

解: (1) $A^{-1} = \varnothing$,

$B^{-1} = \{<d,c>\}$,

$R^{-1} = \{<b,a>,<d,c>\}$.

例2.2(2)

- $B=\{a,b,<c,d>\}$,
  $R=\{<a,b>,<c,d>\}$,
  $G=\{<b,e>,<d,c>\}$.

求: (2) $B\circ R^{-1}$, $G\circ B$, $G\circ R$, $R\circ G$.

解: (2) $B\circ R^{-1}=\{<d,d>\}$,

$G\circ B=\{<c,c>\}$,

$G\circ R=\{<a,e>,<c,c>\}$,

$R\circ G=\{<d,d>\}$.

例2.2(3)

- $F=\{<a,b>,<a,\{a\}>,<\{a\},\{a,\{a\}\}>\}$,

求: (3) $F\upharpoonright\{a\}$, $F\upharpoonright\{\{a\}\}$, $F\upharpoonright\{a,\{a\}\}$, $F^{-1}\upharpoonright\{\{a\}\}$.

解: (3) $F\upharpoonright\{a\}=\{<a,b>,<a,\{a\}>\}$,

$F\upharpoonright\{\{a\}\}=\{<\{a\},\{a,\{a\}\}>\}$,

$F\upharpoonright\{a,\{a\}\} = F$,

$F^{-1}\upharpoonright\{\{a\}\}=\{<\{a\},a>\}$.

例2.2(4)

- $F=\{\langle a,b\rangle,\langle a,\{a\}\rangle,\langle\{a\},\{a,\{a\}\}\rangle\}$,

求: (4) $F[\{a\}]$, $F[\{a,\{a\}\}]$, $F^{-1}[\{a\}]$,

$F^{-1}[\{\{a\}\}]$.

解: (4) $F[\{a\}] = \{ b, \{a\} \}$,

$F[\{a,\{a\}\}] = \{ b, \{a\}, \{a,\{a\}\} \}$,

$F^{-1}[\{a\}] = \varnothing$,

$F^{-1}[\{\{a\}\}] = \{ a \}$. #

例2.3

- 设 $R=\{<x,y>|x,y\in Z\wedge y=|x|\}$,
  $A=\{0,1,2\}$, $B=\{0,-1,-2\}$

求: (1) $R[A\cap B]$ 和 $R[A]\cap R[B]$;

(2) $R[A]-R[B]$ 和 $R[A-B]$.

解: (1) $R[A\cap B]=R[\{0\}]=\{0\}$,

$R[A]\cap R[B]=\{0,1,2\}\cap\{0,1,2\}=\{0,1,2\}$;

(2) $R[A]-R[B]=\{0,1,2\}-\{0,1,2\}=\emptyset$,

$R[A-B]=R[\{1,2\}]=\{1,2\}$. #

- 定理2.3　　定义域和值域相关的定理
- 定理2.4　　逆的定义域和值域相关定理
- 定理2.5　　合成的结合律
- 定理2.6　　合成相关的分配律
- 定理2.7　　逆合成定理
- 定理2.8　　限制相关的定理
- 定理2.9　　像相关的定理

定理2.3 设F,G为二集合，则

(1) $\mathrm{dom}(F\cup G) = \mathrm{dom}F\cup\mathrm{dom}G$;

(2) $\mathrm{ran}(F\cup G) = \mathrm{ran}F\cup\mathrm{ran}G$;

(3) $\mathrm{dom}(F\cap G) \subseteq \mathrm{dom}F\cap\mathrm{dom}G$;

(4) $\mathrm{ran}(F\cap G) \subseteq \mathrm{ran}F\cap\mathrm{ran}G$;

(5) $\mathrm{dom}F-\mathrm{dom}G \subseteq \mathrm{dom}(F-G)$;

(6) $\mathrm{ran}F-\mathrm{ran}G \subseteq \mathrm{ran}(F-G)$.

定理2.3的证明

证：$\mathrm{dom}(F\cup G) = \mathrm{dom}F\cup\mathrm{dom}G$

证明：$\forall x,\ x\in\mathrm{dom}(F\cup G)$

$\Leftrightarrow\exists y(\langle x,y\rangle \in F\cup G)$

$\Leftrightarrow\exists y((\langle x,y\rangle \in F)\lor(\langle x,y\rangle\in G))$

$\Leftrightarrow\exists y(\langle x,y\rangle \in F) \lor \exists y(\langle x,y\rangle\in G)$

$\Leftrightarrow x\in\mathrm{dom}(F)\lor x\in\mathrm{dom}(G)$

$\Leftrightarrow x \in (\mathrm{dom}(F)\cup \mathrm{dom}(G))$

$\therefore\ \mathrm{dom}(F\cup G) = \mathrm{dom}F\cup\mathrm{dom}G$ #

定理2.3的证明(续)

证： $\mathrm{ran}(F\cap G) \subseteq \mathrm{ran}F\cap \mathrm{ran}G$

证明： $\forall y,\ y\in \mathrm{ran}(F\cap G)$

$\Leftrightarrow \exists x(<x,y> \in F\cap G)$

$\Leftrightarrow \exists x(<x,y>\in F\wedge <x,y>\in G)$

$\Rightarrow \exists x(<x,y>\in F)\wedge \exists x(<x,y>\in G)$ (P7)

$\Leftrightarrow y\in \mathrm{ran}(F)\wedge y\in \mathrm{ran}(G)$

$\Leftrightarrow y\in(\mathrm{ran}F \cap \mathrm{ran}G)$

$\therefore\ \mathrm{ran}(F\cap G) \subseteq \mathrm{ran}F\cap \mathrm{ran}G$ #

定理2.3的证明(续)

证：domF−domG $\subseteq$ dom(F −G)

证明：$\forall x,\ x\in(\mathrm{domF}-\mathrm{domG})$

$\Leftrightarrow(x\in \mathrm{domF})\wedge\neg(x\in \mathrm{domG})$

$\Leftrightarrow\ \exists y(<x,y>\in F)\wedge\forall z(<x,z>\notin G)$

$\Rightarrow\ \exists y(<x,y>\in(F-G))$

$\Leftrightarrow\ x\ \in\ \mathrm{dom}(F-G)$

$\therefore\ \mathrm{domF}-\mathrm{domG}\subseteq\mathrm{dom}(F-G)$

逆的定义域和值域相关定理

定理2.4 设F为任一集合，则

(1) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$;

(2) $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$;

(3) $(F^{-1})^{-1}\subseteq F$,当F为关系时，等号成立

定理2.4(1)的证明

(1) 证明: $\forall x,\ x \in \mathrm{dom}F^{-1}$

$\Leftrightarrow\ \exists y\{<x,y> \in F^{-1}\}$

$\Leftrightarrow\ \exists y\{<y,x> \in F\}$

$\Leftrightarrow\ x \in \mathrm{ran}F$

$\therefore \mathrm{dom}F^{-1} = \mathrm{ran}F$ #

定理2.4(3)的证明

(3) $(F^{-1})^{-1} \subseteq F$, 当F是关系时, 等号成立.

证明: (1) 设F是关系, 则$\forall <x,y>$,

$<x,y> \in (F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow x(F^{-1})^{-1}y \Leftrightarrow yF^{-1}x \Leftrightarrow xFy$.

这时$(F^{-1})^{-1} = F$.

当F不是关系时,

$(F^{-1})^{-1} \subset F$, 例如, 设$F=\{<b,c>,a\}$, 则

$F^{-1}=\{<c,b>\}$, $(F^{-1})^{-1}=\{<b,c>\} \subset F$

$\therefore (F^{-1})^{-1} \subseteq F$. #

合成运算的结合律

定理2.5 设R_1,R_2,R_3为三个集合，则

$(R_1\circ R_2)\circ R_3 = R_1\circ(R_2\circ R_3)$

证明： $\forall\langle x,y\rangle$, $\langle x,y\rangle\in(R_1\circ R_2)\circ R_3$

$\Leftrightarrow \exists z(\langle x,z\rangle\in R_3\wedge\langle z,y\rangle\in(R_1\circ R_2))$

$\Leftrightarrow \exists z(\langle x,z\rangle\in R_3\wedge \exists t(\langle z,t\rangle\in R_2\wedge \langle t,y\rangle\in R_1))$

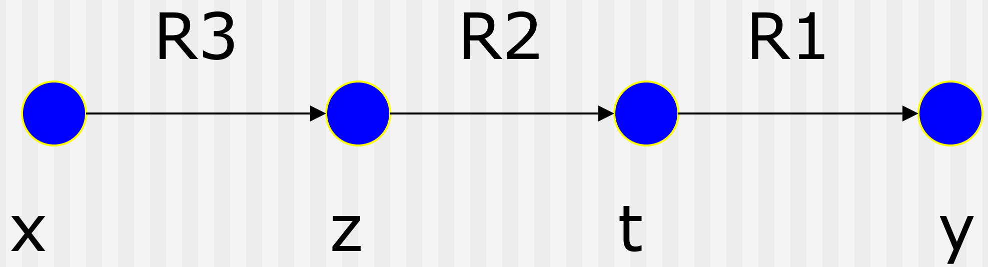
$\Leftrightarrow \exists z\ \exists t(\langle x,z\rangle\in R_3\wedge\langle z,t\rangle\in R_2\wedge \langle t,y\rangle\in R_1)$

$\Leftrightarrow \exists t(\exists z\ (\langle x,z\rangle\in R_3\wedge\langle z,t\rangle\in R_2\wedge \langle t,y\rangle\in R_1))$

$\Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle\in R_2\circ R_3\wedge \langle t,y\rangle\in R_1)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R_1\circ(R_2\circ R_3)$

$\therefore (R_1\circ R_2)\circ R_3 = R_1\circ(R_2\circ R_3)$ #


R3
R2
R1
x
z
t
y

合成运算的分配律

定理2.6 设R_1,R_2,R_3为三个集合，则

(1) $R_1\circ(R_2\cup R_3)=R_1\circ R_2\cup R_1\circ R_3$;

(2) $(R_1\cup R_2)\circ R_3=R_1\circ R_3\cup R_2\circ R_3$;

(3) $R_1\circ(R_2\cap R_3)\subseteq R_1\circ R_2\cap R_1\circ R_3$;

(4) $(R_1\cap R_2)\circ R_3\subseteq R_1\circ R_3\cap R_2\circ R_3$.

分配律的证明

$R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = R_1 \circ R_2 \cup R_1 \circ R_3$

证明： $\forall <x,y>, <x,y> \in R_1 \circ (R_2 \cup R_3)$

$\Leftrightarrow \exists z(<x,z> \in (R_2 \cup R_3) \wedge <z,y> \in R_1)$

$\Leftrightarrow \exists z((<x,z> \in R_2 \vee <x,z> \in R_3) \wedge <z,y> \in R_1)$

$\Leftrightarrow \exists z((<x,z> \in R_2 \wedge <z,y> \in R_1)$
$\vee (<x,z> \in R_3 \wedge <z,y> \in R_1))$

$\Leftrightarrow \exists z(<x,z> \in R_2 \wedge <z,y> \in R_1) \vee$
$\exists z(<x,z> \in R_3 \wedge <z,y> \in R_1)$

$\Leftrightarrow <x,y> \in R_1 \circ R_2 \vee <x,y> \in R_1 \circ R_3$

$\Leftrightarrow <x,y> \in (R_1 \circ R_2 \cup R_1 \circ R_3)$

$\therefore R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = R_1 \circ R_2 \cup R_1 \circ R_3$ #

分配律的证明(续)

$R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3$

证明： $\forall <x,y>, <x,y> \in R_1 \circ (R_2 \cap R_3)$

$\Leftrightarrow \exists z(<x,z> \in (R_2 \cap R_3) \wedge <z,y> \in R_1)$

$\Leftrightarrow \exists z((<x,z> \in R_2 \wedge <x,z> \in R_3) \wedge <z,y> \in R_1)$

$\Leftrightarrow \exists z((<x,z> \in R_2 \wedge <z,y> \in R_1) \wedge (<x,z> \in R_3 \wedge <z,y> \in R_1))$

$\Rightarrow \exists z(<x,z> \in R_2 \wedge <z,y> \in R_1) \wedge \exists z(<x,z> \in R_3 \wedge <z,y> \in R_1)$

$\Leftrightarrow <x,y> \in R_1 \circ R_2 \wedge <x,y> \in R_1 \circ R_3$

$\Leftrightarrow <x,y> \in R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3$

$\therefore R_1 \circ (R_2 \cap R_3) = R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3$ #

合成的逆运算

定理2.7 设F,G为二集合，则$(F\circ G)^{-1}=G^{-1}\circ F^{-1}$

证明：$\forall \langle x,y\rangle$, $\langle x,y\rangle \in (F\circ G)^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in F\circ G$

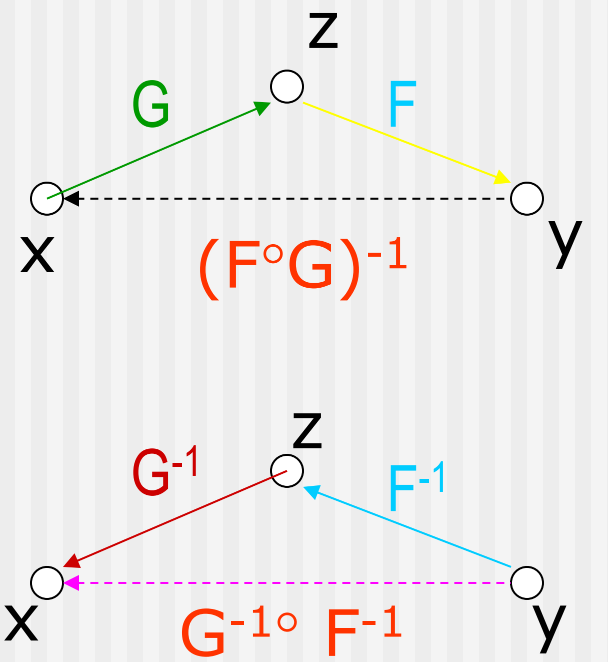
$\Leftrightarrow \exists z(\langle y,z\rangle \in G \wedge \langle z,x\rangle \in F)$

$\Leftrightarrow \exists z(\langle z,y\rangle \in G^{-1} \wedge \langle x,z\rangle \in F^{-1})$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in G^{-1}\circ F^{-1}$

$\therefore (F\circ G)^{-1}=G^{-1}\circ F^{-1}$ #

$$(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$$



定理2.8

定理2.8 设**R,S,A,B,$\mathcal{A}$**为集合**,$\mathcal{A}$≠∅,**则

(1)$R\upharpoonright(A\cup B)=(R\upharpoonright A)\cup(R\upharpoonright B)$;

(2)$R\upharpoonright\cup\mathcal{A}=\cup\{R\upharpoonright A \mid A\in\mathcal{A}\}$;

(3)$R\upharpoonright(A\cap B)=(R\upharpoonright A)\cap(R\upharpoonright B)$;

(4)$R\upharpoonright\cap\mathcal{A}=\cap\{R\upharpoonright A \mid A\in\mathcal{A}\}$;

(5)$(R\circ S)\upharpoonright A=R\circ(S\upharpoonright A)$.

定理2.8(2)的证明

(2) $R{\uparrow}\cup\mathcal{A} = \cup\{\, R{\uparrow}A \mid A\in\mathcal{A}\};$

证明: $\forall \langle x,y\rangle,\ \langle x,y\rangle\in(R{\uparrow}\cup\mathcal{A})$

$\Leftrightarrow xRy \wedge x\in\cup\mathcal{A}$

$\Leftrightarrow xRy \wedge \exists A(\ A\in\mathcal{A} \wedge x\in A\ )$

$\Leftrightarrow \exists A(\ xRy \wedge x\in A \wedge A\in\mathcal{A}\ )$

$\Leftrightarrow \exists A(\ \langle x,y\rangle \in(R{\uparrow}A) \wedge A\in\mathcal{A}\ )$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in \cup\{\, R{\uparrow}A \mid A\in\mathcal{A}\}.$

$\therefore\ R{\uparrow}\cup\mathcal{A} = \cup\{\, R{\uparrow}A \mid A\in\mathcal{A}\}$ #

定理2.8(4)的证明

(4) $R\!\uparrow\!\cap\mathcal{A} = \cap\{ R\!\uparrow\! A \mid A\in\mathcal{A}\}$; $(\mathcal{A}\neq\varnothing)$

证明: $\forall\langle x,y\rangle$, $\langle x,y\rangle \in(R\!\uparrow\!\cap\mathcal{A})$

$\Leftrightarrow xRy\wedge x\in\cap\mathcal{A}\Leftrightarrow xRy\wedge \forall A(A\in\mathcal{A}\rightarrow x\in A)$

$\Leftrightarrow\forall A(xRy \wedge(\neg A\in\mathcal{A}\vee x\in A))$

$\Leftrightarrow\forall A((xRy \wedge\neg A\in\mathcal{A})\vee(xRy \wedge x\in A))$

$\Leftrightarrow\forall A(\neg(\langle x,y\rangle\notin R\vee A\in\mathcal{A})\vee(\langle x,y\rangle\in R\!\uparrow\! A))$

$\Leftrightarrow\forall A(\neg A\in\mathcal{A}\vee(\langle x,y\rangle\in R\!\uparrow\! A))$

$\Leftrightarrow\forall A(A\in\mathcal{A}\rightarrow \langle x,y\rangle\in R\!\uparrow\! A)$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in\cap\{ R\!\uparrow\! A \mid A\in\mathcal{A}\}$

$\therefore$ $R\!\uparrow\!\cap\mathcal{A} = \cap\{ R\!\uparrow\! A \mid A\in\mathcal{A}\}$ #

定理2.8(5)的证明

(5) $(R\bigcirc S)\upharpoonright A = R\bigcirc(S\upharpoonright A)$

证明: $\forall\langle x,y\rangle,\ \langle x,y\rangle\in((R\bigcirc S)\upharpoonright A)$

$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(R\bigcirc S)\wedge x\in A$

$\Leftrightarrow \exists z(xSz\wedge zRy\ )\wedge x\in A$

$\Leftrightarrow \exists z(xSz\wedge zRy \wedge x\in A)$

$\Leftrightarrow \exists z((xSz\wedge x\in A)\wedge zRy\ )$

$\Leftrightarrow \exists z(\ \langle x,z\rangle \in(S\upharpoonright A)\wedge zRy\ )$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in R\bigcirc(S\upharpoonright A)$

$\therefore\ (R\bigcirc S)\upharpoonright A = R\bigcirc(S\upharpoonright A).$

#

像的运算定理

定理2.9 设R,S,A,B,$\mathscr{A}$为集合,$\mathscr{A}\neq\varnothing$,则

(1) $R[A\cup B]=R[A]\cup R[B]$;

(2) $R[\cup\mathscr{A}]=\cup\{R[A]|A\in\mathscr{A}\}$;

(3) $R[A\cap B]\subseteq R[A]\cap R[B]$;

(4) $R[\cap\mathscr{A}]\subseteq\cap\{R[A]|A\in\mathscr{A}\}$;

(5) $R[A]-R[B]\subseteq R[A-B]$;

(6) $(R\circ S)[A]=R[S[A]]$.

例2.3

设$R=\{<x,y>|x,y\in Z\wedge y=|x|\}$, $A=\{0,1,2\}$, $B=\{0,-1,-2\}$.

求:(1)$R[A\cap B]$和$R[A]\cap R[B]$;(2)求$R[A]-R[B]$和$R[A-B]$

解:(1) $R[A\cap B]=R[\{0\}]=\{0\}$

$R[A]\cap R[B]=\{0,1,2\}\cap\{0,1,2\}=\{0,1,2\}$

(2)$R[A]-R[B]=\{0,1,2\}-\{0,1,2\}=\emptyset$

$R[A-B]=R[\{1,2\}]=\{1,2\}$ #

定理2.9(2)的证明

(2) $R[\cup\mathcal{A}] = \cup\{ R[A] \mid A\in\mathcal{A} \}$

证明: $\forall y,\ \ y\in R[\cup\mathcal{A}] \Leftrightarrow \exists x(xRy\wedge x\in\cup\mathcal{A})$

$\Leftrightarrow \exists x(\ xRy \wedge \exists A(\ A\in\mathcal{A} \wedge x\in A)\ )$

$\Leftrightarrow \exists A(\ A\in\mathcal{A} \wedge \exists x(\ xRy \wedge x\in A\ )\ )$

$\Leftrightarrow \exists A(A\in\mathcal{A}\wedge y\in R[A])$

$\Leftrightarrow y\in\cup\{ R[A] \mid A\in\mathcal{A} \}.$

$\therefore\ \ R\!\upharpoonright\!\cup\mathcal{A} = \cup\{ R\!\upharpoonright\! A \mid A\in\mathcal{A}\}.$ #

定理2.9(4)的证明

(4) $R[\cap\mathcal{A}] \subseteq \cap\{\, R[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$;

证明: $\forall y,\ \ y\in R[\cap\mathcal{A}] \Leftrightarrow \exists x(xRy\wedge x\in\cap\mathcal{A})$

$\Leftrightarrow\exists x(xRy\wedge\forall A(A\in\mathcal{A}\to x\in A))$

$\Leftrightarrow\exists x\forall \mathbf{A}(xRy\wedge(A\in\mathcal{A}\to x\in A))$

$\Leftrightarrow\forall \mathbf{A}\exists x(xRy\wedge(A\in\mathcal{A}\to x\in A))$ (1?)

$\Leftrightarrow\forall \mathbf{A}\exists x(A\in\mathcal{A}\to(xRy\wedge x\in A))$ (2?)

$\Leftrightarrow\forall A(A\in\mathcal{A}\to\exists x(xRy\wedge x\in A))\Leftrightarrow\forall A(A\in\mathcal{A}\to y\in R[A])$

$\Leftrightarrow y\in\cap\{\, R[A] \mid A\in\mathcal{A}\,\}$.

$\therefore\ R[\cap\mathcal{A}] \subseteq \cap\{\, R[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$.

定理2.9(4)的证明(续)

(4) $R[\cap\mathcal{A}] \subseteq \cap\{ R[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$;

证明: $\forall y,\ \ y\in R[\cap\mathcal{A}] \Leftrightarrow \exists x(xRy \wedge x\in\cap\mathcal{A})$

$\Leftrightarrow \exists x(xRy \wedge \forall A(A\in\mathcal{A} \to x\in A))$

$\Leftrightarrow \exists x \forall \mathbf{A}(xRy \wedge (A\in\mathcal{A} \to x\in A))$

$\Rightarrow \forall \mathbf{A} \exists \mathbf{x}(\mathbf{xRy} \wedge (\mathbf{A}\in\mathcal{A} \to \mathbf{x}\in\mathbf{A}))$ (1?)

$\Rightarrow \forall \mathbf{A} \exists x(\mathbf{A}\in\mathcal{A} \to (\mathbf{xRy} \wedge \mathbf{x}\in\mathbf{A}))$ (2?)

$\Leftrightarrow \forall A(A\in\mathcal{A} \to \exists x(xRy \wedge x\in A)) \Leftrightarrow \forall A(A\in\mathcal{A} \to y\in R[A])$

$\Leftrightarrow y\in\cap\{ R[A] \mid A\in\mathcal{A} \}$.

$\therefore\ R[\cap\mathcal{A}] \subseteq \cap\{ R[A] \mid A\in\mathcal{A}\}$.

- (1) $\exists x \forall A (xRy \wedge (A \in \mathcal{A} \rightarrow x \in A))$

  $\Rightarrow \forall A \exists x (xRy \wedge (A \in \mathcal{A} \rightarrow x \in A))$
- (2) $\forall A \exists x (xRy \wedge (A \in \mathcal{A} \rightarrow x \in A))$

  $\Rightarrow \forall A \exists x (A \in \mathcal{A} \rightarrow (xRy \wedge x \in A))$

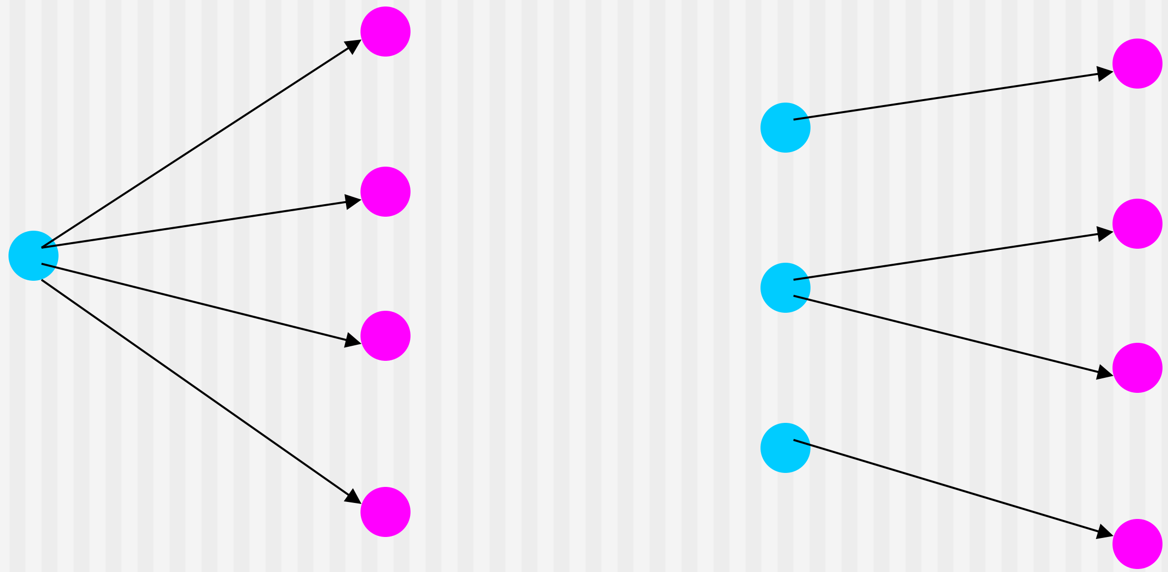
即，证明:

- (1) $\exists x \forall y A(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x,y)$
- (2) $r \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow p \rightarrow (r \wedge q)$

定理2.9(4)的证明(续)

（1） $\exists x \forall y A(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x,y)$

证明: 在任何解释下, 若左$\Leftrightarrow$1, 则右$\Leftrightarrow$1.



多量词

- $\forall x \forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$
- $\exists x \exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$

- $\forall x \forall y A(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x,y)$
- $\exists x \forall y A(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x,y)$
- $\forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow \exists y \exists x A(x,y)$

定理2.9(4)的证明(续)

(2) $r\wedge(p\to q) \Rightarrow p\to(r\wedge q)$

- 方法1: $(r\wedge(p\to q))\to(p\to(r\wedge q))$是永真式

  真值表, 等值演算

- 方法2: (反证) 设 "左$\Leftrightarrow$1"且 "右$\Leftrightarrow$0"

即$r\wedge(p\to q)\Leftrightarrow 1$且$p\to(r\wedge q)\Leftrightarrow 0$.

由$r\wedge(p\to q)\Leftrightarrow 1$得$r=1$, $p\to q=1$;

由$p\to(r\wedge q)\Leftrightarrow 0$得$p=1$, $r\wedge q=0$;

所以$q=0$, $p\to q=0$, 矛盾! #

定理2.9(5)的证明

(5) $R[A]-R[B] \subseteq R[A-B]$;

证明: $\forall y$, $y \in R[A]-R[B] \Leftrightarrow y \in R[A] \wedge \neg y \in R[B]$

$\Leftrightarrow \exists x(xRy \wedge x \in A) \wedge \neg\exists x(xRy \wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow \exists x(xRy \wedge x \in A) \wedge \forall x(\neg xRy \vee \neg x \in B)$

$\Leftrightarrow \exists x(xRy \wedge x \in A) \wedge \forall x(xRy \rightarrow \neg x \in B)$

$\overset{?}{\Rightarrow} \exists x(xRy \wedge x \in A \wedge \neg x \in B)$

$\Leftrightarrow \exists x(xRy \wedge x \in A-B) \Leftrightarrow y \in R[A-B]$.

$\therefore R[A]-R[B] \subseteq R[A-B]$. #

定理2.9(5)的证明(续)

$\exists x(xRy \wedge x \in A) \wedge \forall x(xRy \to \neg x \in B)$

$\Rightarrow \exists x(xRy \wedge x \in A \wedge \neg x \in B)$

前提: $\exists x(xRy \wedge x \in A)$, $\forall x(xRy \to \neg x \in B)$

结论: $\exists x(xRy \wedge x \in A \wedge \neg x \in B)$

定理2.9(5)的证明(续)

前提: $\exists x(xRy \wedge x \in A)$, $\forall x(xRy \to \neg x \in B)$

结论: $\exists x(xRy \wedge x \in A \wedge \neg x \in B)$

证明:

(1) $\exists x(xRy \wedge x \in A)$, 前提

(2) $cRy \wedge c \in A$, 存在指定规则

(3) $\forall x(xRy \to \neg x \in B)$, 前提

(4) $cRy \to \neg c \in B$, 全称指定规则

(5) cRy, 由(2)得出

(6) $\neg c \in B$, (4)(5)假言推理

(7) $cRy \wedge c \in A \wedge \neg c \in B$, (2)(6)合取

(8) $\exists x(xRy \wedge x \in A \wedge \neg x \in B)$, (7)存在推广规则. #

定理2.9(6)的证明

(6) $(R\circ S)[A] = R[S[A]]$.

证明:$\forall y$, $y\in(R\circ S)[A]$

$\Leftrightarrow \exists x(\ \langle x,y\rangle\in(R\circ S) \wedge x\in A\ )$

$\Leftrightarrow \exists x(\ \exists z(\ xSz \wedge zRy\ ) \wedge x\in A\ )$

$\Leftrightarrow \exists z(\ zRy \wedge \exists x(\ xSz \wedge x\in A\ )\ )$

$\Leftrightarrow \exists z(\ zRy \wedge z\in S[A]) \Leftrightarrow y\in R[S[A]]$.

$\therefore\ (R\circ S)[A] = R[S[A]]$. #

小结

- 有序对
- 卡氏积
- 二元关系相关的基本概念
- 二元关系相关的运算
- 基本概念和运算相关的定律

2.3 关系矩阵和关系图

1. 关系矩阵

2. 关系图

3. 集合

关系矩阵(matrix)

- **定义2.9** 设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $R\subseteq A\times A$, 则R的关系矩阵 $M(R)=(r_{ij})_{n\times n}$, 其中
$$r_{ij}=\begin{cases}1, & a_iRa_j\\ 0, & 否则\end{cases}$$
- 例如, $A=\{a,b,c\}$,

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$,

$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$, 则

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

#

关系矩阵的性质

- R的集合表达式与R的关系矩阵可以唯一相互确定
- $M(R^{-1}) = (M(R))^T$. （^{T}表示矩阵转置）
- $M(R_1 \circ R_2) = M(R_2) \bullet M(R_1)$. （$\bullet$表示矩阵“乘法”，其中加法使用逻辑加法$\vee$, 乘法使用逻辑乘法$\wedge$. ）

例2.4

- 设 $A=\{a,b,c\}$,
  $R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$,
  $R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$,

用$M(R_1)$, $M(R_2)$确定$M(R_1^{-1})$, $M(R_2^{-2})$, $M(R_1○R_1)$, $M(R_1○R_2)$, $M(R_2○R_1)$, 从而求出它们的集合表达式.

例题2.4(解)

- $R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$,

  $R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$,
- 解:

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R_1^{-1})=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\qquad M(R_2^{-1})=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}.$$

$R_1^{-1} = \{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,b>\}$

$R_2^{-1} = \{<b,a>,<c,a>,<c,b>\}$

例题2.4(解)

- 解(续):

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R_1\circ R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$R_1 \bigcirc R_1$ = {<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>}.

例题2.4(解)

- 解(续): $M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, $M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

$$M(R_1\circ R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$M(R_2\circ R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$R_1 \bigcirc R_2 = \{<a,a>,<a,c>\}$.

$R_2 \bigcirc R_1 = \{<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>\}$.

#

关系图(graph)

- **定义2.10** 设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $R\subseteq A\times A$, 则A中元素以“○”表示(称为顶点), R中元素以“→”表示(称为有向边); 若x_iRx_j, 则从顶点x_i向顶点x_j引有向边$<x_i,x_j>$, 这样得到的图称为R的关系图 $G(R)=<V,E>$,其中V表示顶点集合，E表示边集合。

关系图举例

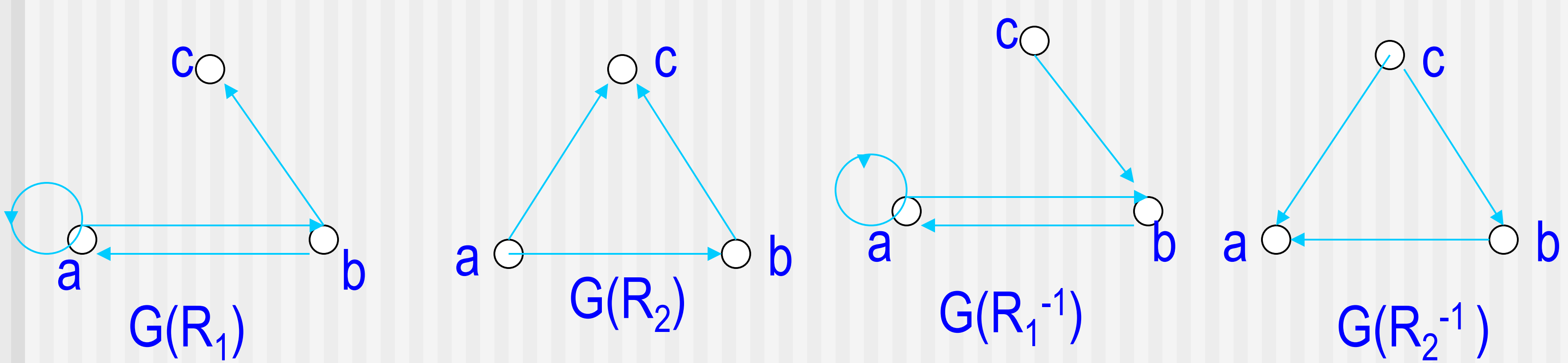
- 例如, $A=\{a,b,c\}$,

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle\}$,

$R_2=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$,

$R_1^{-1}=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle\}$

$R_2^{-1}=\{\langle b,a\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle\}$

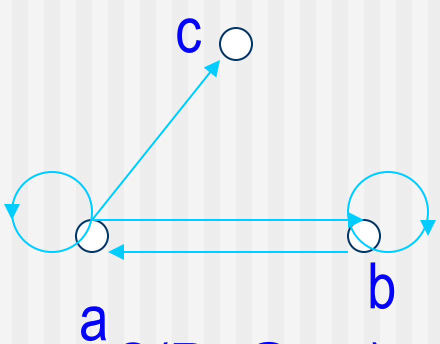


关系图举例(续)

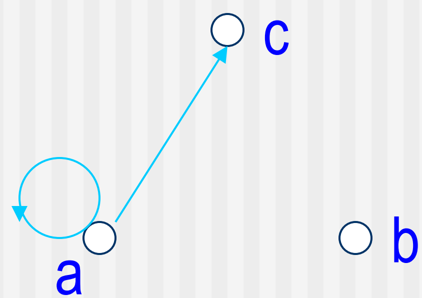
$R_1 \circ R_1 = \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}.$

$R_1 \circ R_2 = \{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle\}.$

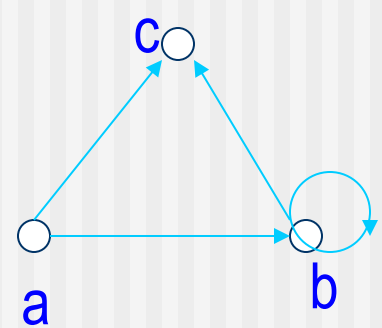
$R_2 \circ R_1 = \{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle\}.$



$G(R_1 \circ R_1)$



$G(R_1 \circ R_2)$



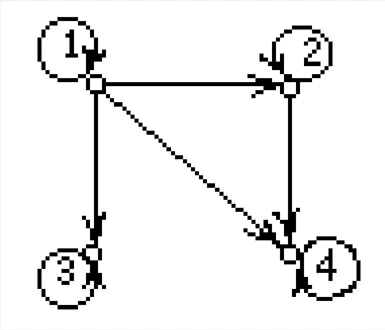
$G(R_2 \circ R_1)$

例 设A={1，2，3，4}，用集合表示法、关系矩阵和关系图给出A上的整除关系D_A。

解：$D_A=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x\text{整除}y\}$

$=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$

$$M_{DA}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$



注意：

1) R的集合表达式,关系矩阵,关系图三者均可以唯一互相确定。集合表达式便于书写，关系矩阵便于存储，关系图直观清晰；

2) 对于$R\subseteq A\times B$, $|A|=n$,$|B|=m$,关系矩阵M(R)是$n\times m$阶的,关系图G(R)中的边都是从A中元素指向B中元素的.

P53: 1

P54: 6, 7(1), 9, 11(2,4,5),12

$\bigcup\bigcup<\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\},<a,b>>=$ ____________

在A={a,b,c}上有多少个不同的二元关系？