分治策略

李琦煜
杨思祺
张远鹏

算法设计与分析 2020 小班 17

2020 年 2 月 28 日

基本思想

设 P 是待求解的问题，$|P|$ 代表该问题的规模，一般的分治算法思路：

- 如果 $|P|$ 不超过 c，则直接求解。
- 如果 $|P|$ 超过 c，则将 P 划分为子问题 $P_1, P_2, \ldots, P_k$，递归地依次求解并归并得到 P 的答案。

通常都是递归算法，时间复杂度分析往往依赖于求解递推方程。

分析方法

- $T(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i T(n-i) + f(n)$
- $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + d(n)$

第一类如汉诺塔分治算法，可以使用迭代、递归树、尝试法等求解。第二类如二分检索和归并排序算法，可以使用迭代法、递归树、主定理等求解。

芯片测试

有 n 个芯片，其中好芯片比坏芯片至少多 1 片，需要通过测试从中找出 1 片好芯片。测试需要 2 片芯片互相测试，好芯片的报告是正确的，坏芯片的报告是不可靠的。请使用最少的测试次数找出 1 片好芯片。

芯片测试

- 如果剩下芯片数 k 为偶数，则分为 $\frac{k}{2}$ 两两测试并按照如下规则筛选芯片
  - 如果两片芯片报告都为好，则任取一片。
  - 否则两片芯片全都丢弃。
- 如果剩下芯片数 k 为奇数，则分为 $\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$ 和单独的一片，组内两两测试并按上述规则筛选，单独的一片和其他所有芯片测试
  - 如果报告为坏的次数多于报告为好的次数，则丢弃。
  - 如果报告为好的次数不少于报告为坏的次数，则该芯片为好芯片。
- 如果剩下的芯片数不超过 3，可以直接出解。

每轮至少筛去一半芯片，总时间复杂度 $T(n) = T(\frac{n}{2}) + O(n) = O(n)$。

幂乘算法

计算 a^n，其中 n 为自然数。
朴素做法需要 $O(n)$ 次乘法。采用如下分治算法只需要 $O(\log n)$ 次

- $a^n = a^{\frac{n}{2}} \times a^{\frac{n}{2}}$
- $a^n = a^{\frac{n-1}{2}} \times a^{\frac{n-1}{2}} \times a$

该分治算法不仅可以运用在求实数的幂的问题，还可以运用在求矩阵的幂、求整数乘积、求 K 步最短路等问题。

幂乘算法（应用）

求 Fibonacci 数列的第 n 项 F_n。
朴素算法需要做 $O(n)$ 次加法，但是得益于

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

可以通过计算 rhs 求解 F_n，而该过程可以应用幂乘算法，只需要做 $O(\log n)$ 次乘法。

更多：幂乘算法

幂乘算法优化 $a \otimes a \otimes a \otimes \ldots \otimes a$ 的条件是 $\otimes$ 具有结合律。
众所周知，加法、乘法以及矩阵乘法都是具有结合律的。
幂乘算法经常和动态规划、Floyd 等其他算法结合在一起。

更多：幂乘算法

有一排 $2 \times n$ 的空地，要用 1×2 的骨牌填满，骨牌可以旋转，求方案数。
$n \le 10^9$

更多：幂乘算法

无向图上 n 个点，问负环最少包含多少条边。
$n \leq 100$

更多：幂乘算法

给定 n, k, r，求

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_{ik+r}^{nk} \mod P$$

$n \leq 10^9, 0 \leq r < k \leq 50$

更多：快速排序

求序列中第 k 小的元素。

更多：归并排序

求序列中的逆序对数。

更多：最大子段和

给出长度为 n 的整数序列 a_i，求最大的子段和。

END