

# 分治策略

李琦煜  
杨思祺  
张远鹏

算法设计与分析 2020 小班 17

2020 年 2 月 28 日

# 基本思想

设  $P$  是待求解的问题,  $|P|$  代表该问题的规模, 一般的分治算法思路:

- 如果  $|P|$  不超过  $c$ , 则直接求解。
- 如果  $|P|$  超过  $c$ , 则将  $P$  划分为子问题  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , 递归地依次求解并归并得到  $P$  的答案。

通常都是递归算法, 时间复杂度分析往往依赖于求解递推方程。

# 分析方法

- $T(n) = \sum_{i=1}^k a_i T(n-i) + f(n)$

- $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + d(n)$

第一类如汉诺塔分治算法，可以使用迭代、递归树、尝试法等求解。

第二类如二分检索和归并排序算法，可以使用迭代法、递归树、主定理等求解。

# 芯片测试

有  $n$  个芯片，其中好芯片比坏芯片至少多 1 片，需要通过测试从中找出 1 片好芯片。测试需要 2 片芯片互相测试，好芯片的报告是正确的，坏芯片的报告是不可靠的。请使用最少的测试次数找出 1 片好芯片。

# 芯片测试

- 如果剩下芯片数  $k$  为偶数，则分为  $\frac{k}{2}$  两两测试并按照如下规则筛选芯片
  - ▶ 如果两片芯片报告都为好，则任取一片。
  - ▶ 否则两片芯片全都丢弃。
- 如果剩下芯片数  $k$  为奇数，则分为  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  和单独的一片，组内两两测试并按上述规则筛选，单独的一片和其他所有芯片测试
  - ▶ 如果报告为坏的次数多于报告为好的次数，则丢弃。
  - ▶ 如果报告为好的次数不少于报告为坏的次数，则该芯片为好芯片。
- 如果剩下的芯片数不超过 3，可以直接出解。

每轮至少筛去一半芯片，总时间复杂度  $T(n) = T(\frac{n}{2}) + O(n) = O(n)$ 。

# 幂乘算法

计算  $a^n$ ，其中  $n$  为自然数。

朴素做法需要  $O(n)$  次乘法。采用如下分治算法只需要  $O(\log n)$  次

$$\blacksquare a^n = a^{\frac{n}{2}} \times a^{\frac{n}{2}}$$

$$\blacksquare a^n = a^{\frac{n-1}{2}} \times a^{\frac{n-1}{2}} \times a$$

该分治算法不仅可以运用在求实数的幂的问题，还可以运用在求矩阵的幂、求实数的倍数、求 K 步最短路等问题。

# 幂乘算法（应用）

求 Fibonacci 数列的第  $n$  项  $F_n$ 。

朴素算法需要做  $O(n)$  次加法，但是得益于

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

可以通过计算 rhs 求解  $F_n$ ，而该过程可以应用幂乘算法，只需要做  $O(\log n)$  次乘法。