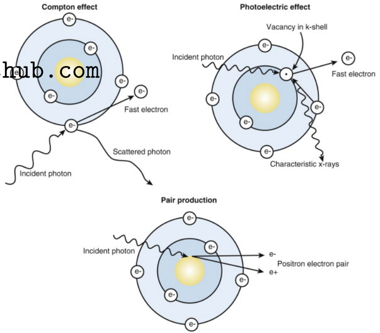
# 利用 Notebook 计算研究光电相互作用

## 基于实验：NaI (Tl) 闪烁谱仪测定 $\gamma$ 射线的能谱

北京大学物理学院 Bryan

No. 1500066666 | masked_email_please_contact@github.com




* Image courtesy:
https://www.sciencedirect.com/topics/medicine-and-dentistry/compton-scattering

# Notebook 计算简介

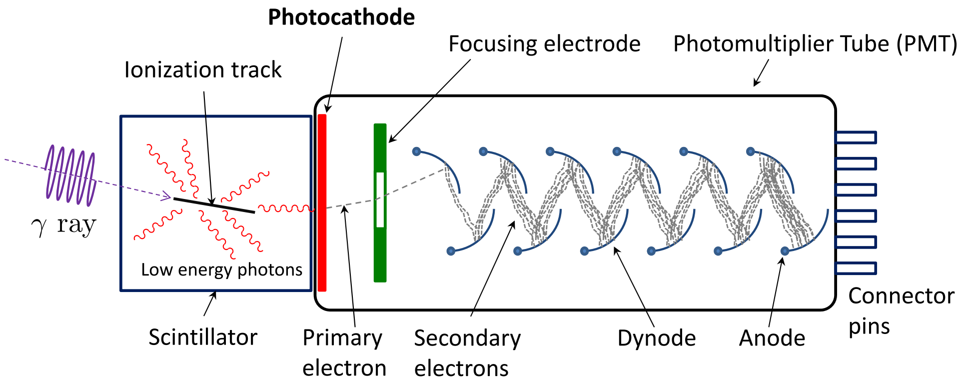
## 代码 + 图像 + 文档的数据处理环境

| 界面 / Front End | 后端 / Kernel |
| --- | --- |
| Mathematica™ | Wolfram™ |
| Jupyter | R<br>Python (NumPy, SciPy, ...)<br>Julia<br>CERN ROOT (C++)<br>. . . |
| sage | |

# 理论

# 闪烁体探头

$\gamma$ 光子 $\longrightarrow$ 激发电子 $\xrightarrow{\text{退激}}$ 闪烁光子（NaI (Tl): ~ 415 nm 蓝光）$\longrightarrow$ 光电倍增



# $\gamma$ 射线 $E_\gamma$ 与闪烁体的相互作用

## 考虑 $^{137}\mathrm{Cs}$ 源：$E_\gamma = 0.662\,\mathrm{MeV}$

1. **光电效应**：$E = E_\gamma - E_i \simeq E_\gamma \simeq 0.662\,\mathrm{MeV}$，$E_i \ll E_\gamma$.
2. **Compton 散射**：

$$E_{\gamma'} = E_\gamma \Big/ \Big(1 + \alpha\,(1 - \cos\theta)\Big), \quad \alpha = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}$$

$E = E_\gamma - E_{\gamma'}$ 随散射角 $\theta \in [0, \pi]$ 递增，

$$E_{\max} = E_\gamma \frac{2\alpha}{1 + 2\alpha} \simeq 0.478\,\mathrm{MeV}$$

* 反散射 + 光电效应 → 反散射峰 $E_{\gamma'} = E_\gamma - E_{\max} \simeq 0.184\,\mathrm{MeV}$.

3. **正负电子对产生（然后湮灭）**：$m_e c^2 \simeq 0.511\,\mathrm{MeV}$

* 对 $^{137}\mathrm{Cs}$ 源 $E_\gamma < 2 m_e c^2$ 不会产生

# Compton 能谱

## 如何定量地得到 Compton 能谱？

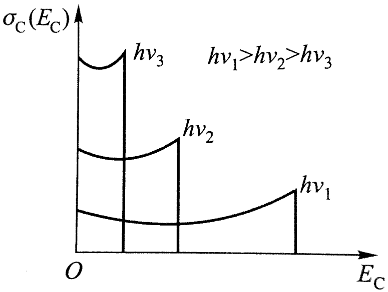



图 2-1-3　不同能量入射光子的康普顿电子的能量分布

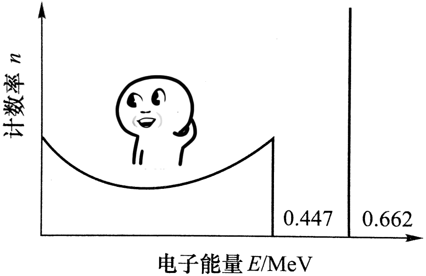



图 2-1-8　康普顿散射和单能光电峰

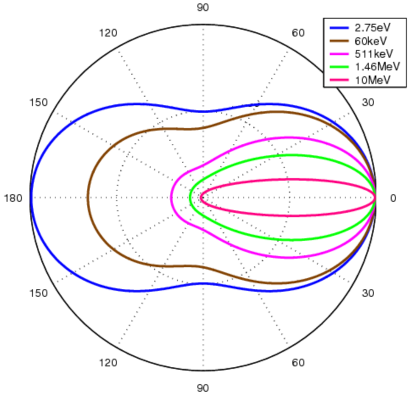
# Klein–Nishina 公式

## QED 的最早结果之一（由半经典方法得到）；时间点：Schrödinger 1926，Dirac 1928

- $p = \frac{E_{\gamma'}}{E_\gamma} = \frac{1}{1+\alpha\,(1-\cos\theta)}$，

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \propto p^2\left(p + p^{-1} - \sin^2\theta\right)\Big/2$$

- $\alpha = \frac{E_\gamma}{m_e c^2} \to 0$ 时，$p \to 1$，
  回归经典 Thomson 散射 $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \propto \frac{1+\cos^2\theta}{2}$.
- 图片源自 Wikipedia.



# Compton 谱线理论计算

- 截面关于 $E$ 的分布:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}E} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta} \bigg/ \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\theta} = 2\pi \sin\theta \, \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \bigg/ \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\theta} \tag{1}$$

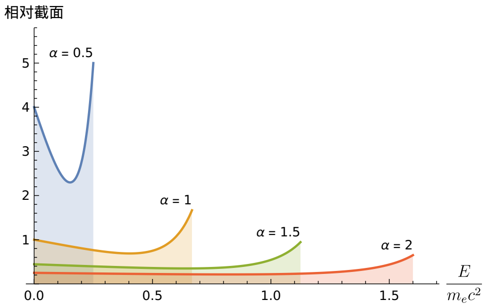
$E = E_\gamma\left(1 - \frac{1}{1+\alpha\,(1-\cos\theta)}\right)$,

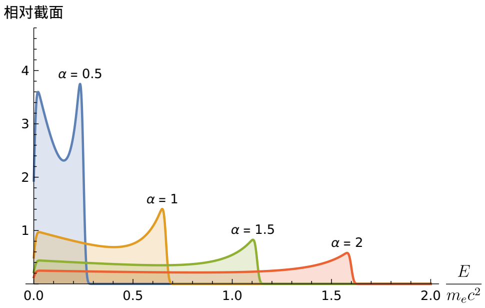
- 定性分析:
  - $E = 0, E_{\max}$ 处 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\theta} = 0$, 据 (1) 可见, 对应能谱上的峰值
  - $0 < E < E_{\max}$ 大致为低于左右峰值的平台

# 数值计算 Compton 能谱

[Mathematica 计算]，有限能量分辨带来的展宽：与 $\sigma = 0.01$ 正态分布卷积

- Mathematica 的独特优势：代数计算



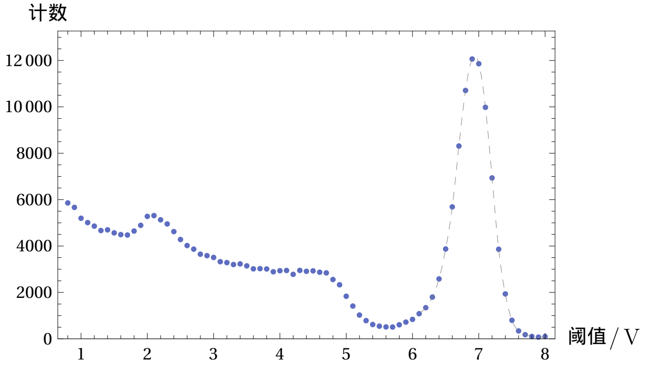



# 实验

# 单道：逐点测定全谱

## 有多道了，为何还要用单道？付老师答曰：体验一下…

- 阈值 $V$, 道宽 $\Delta V$, 计数 $V \sim V + \Delta V$,



# Notebook 可视化流程（*Workflow*）

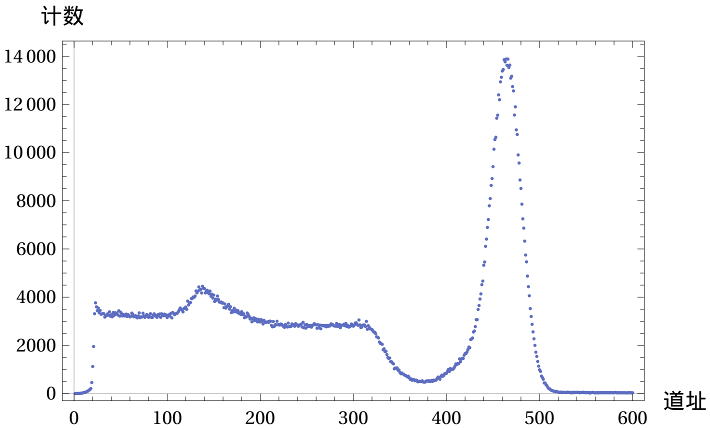
- 在数据表（如 Excel）中记录数据，文件名 data.ods
- Mathematica 可视化追踪：

```
Import["data.ods"][[1]] // ListPlot
```

- 分析：
  - 能量刻度：寻峰 FindPeaks，线性回归 LinearModelFit
  - 能量分辨：插值 Interpolation，求根 FindRoot 得半宽

# 多道：一步到位

## 多道与单道的结果在低能端不甚一致，原因未知



# 结语

# 总结

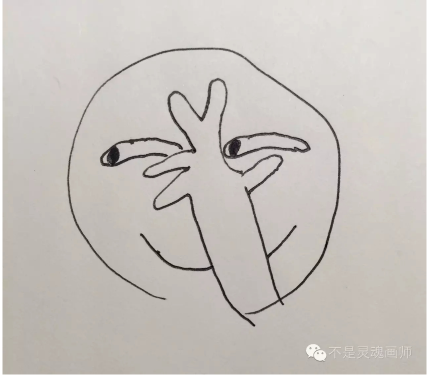
- Compton 能谱的形态：微分散射截面
- Notebook 计算在实验中的应用：
  - Mathematica 的独特优势：符号计算

    Compton 能谱的具体形式：

    $$\frac{e^2 - (-2 + e)\, e^2\, \alpha + e\,(-2 + 3\, e)\, \alpha^2 - 4\, e\, \alpha^3 + 2\, \alpha^4}{2\, \alpha^4\, (-e + \alpha)^2}$$

  - Notebook 界面的共同特点：快速可视化 + 代码可重复

# 致谢




谢谢大家！