



北京大学物理学院 李健通

用 β 粒子检验相对论性动量-动能关系

Bryan

北京大学物理学院 学号: 1500000000 *

(日期: 2018 年 3 月 1 日)

对于高速运动的物体, 狭义相对论给出了与经典情形完全不同的描述; 本实验旨在从动量-能量关系这一角度, 验证这一描述的准确性。实验中使用 $^{90}\text{Sr}-^{90}\text{Y}$ β 源产生速度接近光速的 β 粒子, 通过分别测定其动量、能量, 分析其动量-能量关系, 验证了狭义相对论的预测。

在此基础上, 本实验进一步探究了空气对 β 粒子运动的影响; 证实了空气导致 β 粒子的自由程显著减小, 并对 1 atm 下 β 粒子的衰减长度进行了估计。这确认了真空环境在本实验中的必要性。

关键词: 狭义相对论, 色散关系, β 衰变, β 粒子

* guesswhat@email.addr;

I. 引言

19 世纪，电磁理论得到了极大的发展；麦克斯韦（James C. Maxwell）等人的工作表明，电磁理论可以完美地整合到一组方程中^[1]，这便是麦克斯韦方程组。麦克斯韦方程组完整地描述了经典电动力学中的现象，其波动解自然地给出了电磁波的预测；通过计算波速：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (1)$$

麦克斯韦发现^[1]，可见光正是一种电磁波，从而统一了光学和电磁学。

然而，麦克斯韦方程与经典的伽利略变换不可调和。于是人们猜测，麦克斯韦方程实际只适用于一个特殊的参考系；相应地，电磁波在一种特殊的介质——以太（aether）中传播，可以通过精确测量光速的变动获得地面参考系相对以太的漂移速度。然而，实验迹象表明，这一漂移速度十分微小；迈克尔逊-莫雷实验（Michelson-Morley experiment, 1887）^[2] 给出漂移速度的上限为 8 km/s，考虑地球的公转以及太阳系的运动，这一速度实在微乎其微，令人费解¹。

人们不得不转而考虑另一种可能的办法，即对伽利略变换进行修正。经由洛伦兹（Hendrik Lorentz, 参见 [4]）、庞加莱（Henri Poincaré, 参见 [5]）及爱因斯坦（Albert Einstein）等人的共同努力，以洛伦兹变换为基础的狭义相对论时空观得以建立。相对论时空观与经典时空观的主要差异在于：

- a. **光速不变**：在所有惯性系中，真空光速恒为 c ，它同时也是运动速度的上限；
- b. **相对时空**：不存在绝对时空，尤其是不存在绝对的时间坐标；所有惯性系在物理上都是平等的，物理规律具有相同的形式。

¹ 最近的实验结果给出的上限为 $10^{-17}c \approx 3 \text{ nm/s}$ ，参见 [3]。

相对论时空观自然与电动力学相容，但又引出了一些新的疑问。例如，作为时间相对性的直接推论，运动的时钟与静止的时钟并不同步（钟慢效应）；类似的反直观现象还有动尺收缩等等。进一步，对于高速运动的粒子而言，狭义相对论的动力学对物体的动量-动能关系做出了不寻常的预计；通过探测高速运动粒子的动量和能量，我们可以方便地验证这一新的色散关系（dispersion relation, 借用了光学中动量-能量关系的等价表述），从而初步检验狭义相对论的正确性；此即本实验的首要目的。

II. 理论

相对论性的时空由事件（events）构成，时空间隔表示为四矢量：

$$\begin{aligned} dx^\mu &\sim \begin{pmatrix} c dt \\ d\mathbf{x} \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \\ dx^0 &= c dt, \quad dx^i = d\mathbf{x}^i, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2)$$

其中 c 为光速；光速不变原理表明，变换到另一惯性系后，相应的**时空间隔**保持不变（类似于洛伦兹变换中，空间间隔保持不变），即：

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &\equiv \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (c dt)^2 - d\mathbf{x}^2 \text{ 是洛伦兹不变量（标量）,} \\ \eta_{\mu\nu} &\sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

考察运动物体的共动参考系，其时间坐标 τ 称为固有时或原时，有：

$$(c d\tau)^2 - 0 = (c dt)^2 - (d\mathbf{x})^2 \Rightarrow d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} dt, \quad (4)$$

这里 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}$. γ 因子表征了相对论与经典情形的差异。

四动量 $p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \sim \gamma m \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$, 它同样是洛伦兹标量; 这给出:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu &= \left(\frac{E}{c} \right)^2 - \mathbf{p}^2 = (mc)^2, \\ E^2 &= \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \end{aligned} \quad (5)$$

此即相对论性色散关系。我们发现, 非零质量的粒子不仅具有动能, 还具有静能 mc^2 ; 扣除掉静能后, 粒子的动能可表示为:

$$E_k = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - m^2 c^4 \rightarrow \frac{1}{2} m v^2 \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) \quad (6)$$

可见, 在低速极限下, 相对论性色散关系回归至经典情形; 而对于高速运动的粒子, $\left(\frac{v}{c} \right)^2$ 阶项不可忽略, 两者将会出现显著的差异。本实验即采用 β 衰变产生的高速 β 粒子, 试图观测这一非经典的现象。

III. 实验装置

实验装置的基本结构如图 1 所示, 使用 $^{90}\text{Sr}-^{90}\text{Y}$ β 源产生高速 β 粒子 (负电子, 质量 $m = 0.511 \text{ MeV}/c^2$), 能量上限为 2.27 MeV , 假定相对论色散关系确切无误, 这意味着粒子的速度最高可达 97% 光速, 应当出现显著的相对论效应。

带电粒子的动量通过**磁谱仪**测定。据经典电动力学, 磁场中电子的运动方程:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (7)$$

注意到相对论与电动力学的相容性, 此运动方程对高速情形依然成立; 垂直射入匀强磁场中的粒子轨迹为圆弧, 方程进一步简化为:

$$p = eBR = \left(\frac{BRc}{\text{MV}} \right) \frac{\text{MeV}}{c} \quad (8)$$

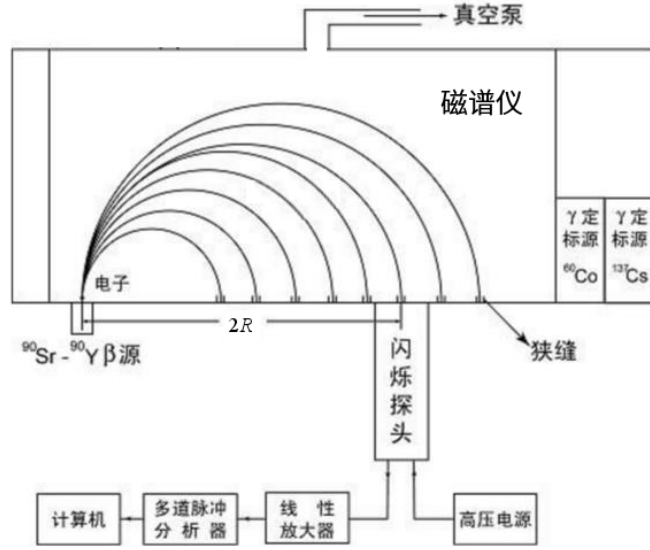


图 1: 实验装置示意图, 参考 [6].

β 粒子源出射的粒子经准直后进入磁谱仪, 真空泵可控制其真空度, 减少碰撞导致的能
动量改变。 β 粒子运动半周后离开磁谱仪, 进入闪烁探头; 数据按图示流程进行采集、分析。
闪烁探头固定在轨道上, 有坐标 x 便于确定其位置; 实际有:

$$2R = x - 6.15 \text{ cm}$$

应当注意, 辐射阻尼可能导致粒子损失动能。利用亚伯拉罕-洛伦兹方程:

$$\mathbf{F} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{a}} \quad (9)$$

结合本实验中装置的 $B = 603.4 \text{ G} = 60.34 \text{ mT}$, 加速度的变化率 $\dot{a} \sim \frac{v^2}{r} \cdot \frac{v}{r}$, 估计辐射
阻尼的等效作用力 F 及外磁场作用力 evB 分别为:

$$F \sim \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{v}{c}\right)^3 \sim 10^{-26} \text{ N}, \quad evB \sim ecB \left(\frac{v}{c}\right) \sim 10^{-12} \text{ N} \quad (10)$$

因此可以安全地略去辐射阻尼的影响。

动能测定通过 NaI (Tl) 闪烁体探测器实现。入射粒子的动能传递给闪烁体使之
激发、退激, 放出光子 (闪烁), 经光电倍增、前置放大、线性放大等步骤, 转化为充
分强的电脉冲输入多道分析器; 多道分析器将脉冲强度转化为道址 n 存储并计数。

本实验中，光电倍增管加高压 $U = 594 \text{ V}$ 。注意，上述能量转换过程基本上是线性的，即有 $n \propto E$ ；利用标准放射源 ^{137}Cs 和 ^{60}Cs 进行定标，可进一步确定 $n-E$ 关系，由此获得粒子的动能。此外， β 粒子在穿入、穿出真空室以及进入探头的过程中存在能量损失，需要进行修正；采用 [6] 给出的数值进行修正²。

IV. 结果与分析

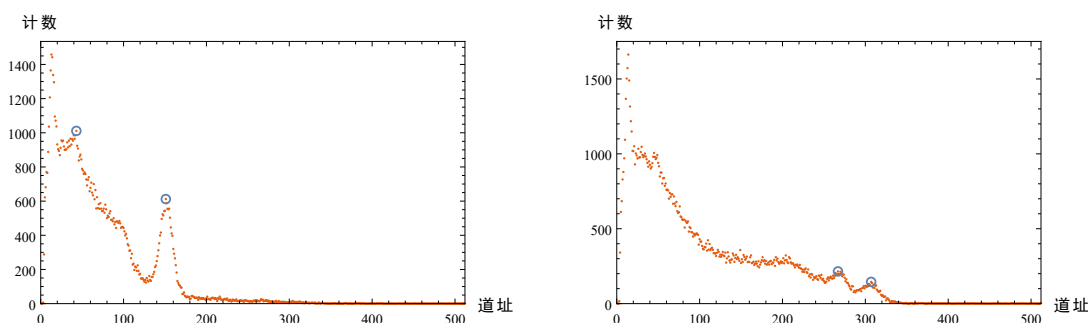


图 2: 多道分析器的定标，
左图为 ^{137}Cs 能谱，右为 ^{60}Cs 能谱，实际采样时长（活时）720 s。
标准峰值在图中以圆圈标出。

测定标准源的能谱，结果如上；比较已知的 ^{137}Cs 峰值（0.662 MeV, 0.184 MeV）和 ^{60}Cs 峰值（1.173 MeV, 1.333 MeV），可得线性关系³：

$$n = \left((0.00 \pm 0.02) + (2.29 \pm 0.02) \cdot \frac{E}{\text{MeV}} \right) \times 10^2, \quad (11)$$

$$R^2 = 0.9998$$

利用该式，即可由 n 得到 β 粒子的实测动能，进一步修正后得到真空室中 β 粒子的实际动能。在此基础上依次选取 №. 2~8 出射窗口，测定粒子的动能分布，如下所示；这里方便起见，依然选取道址作为能量的标度。

² 参考 [6] p.96~97, 表 2-6-1 及 2-6-2.

³ 简洁起见，此后的动能 E_k 均略去角标，记为 E 。

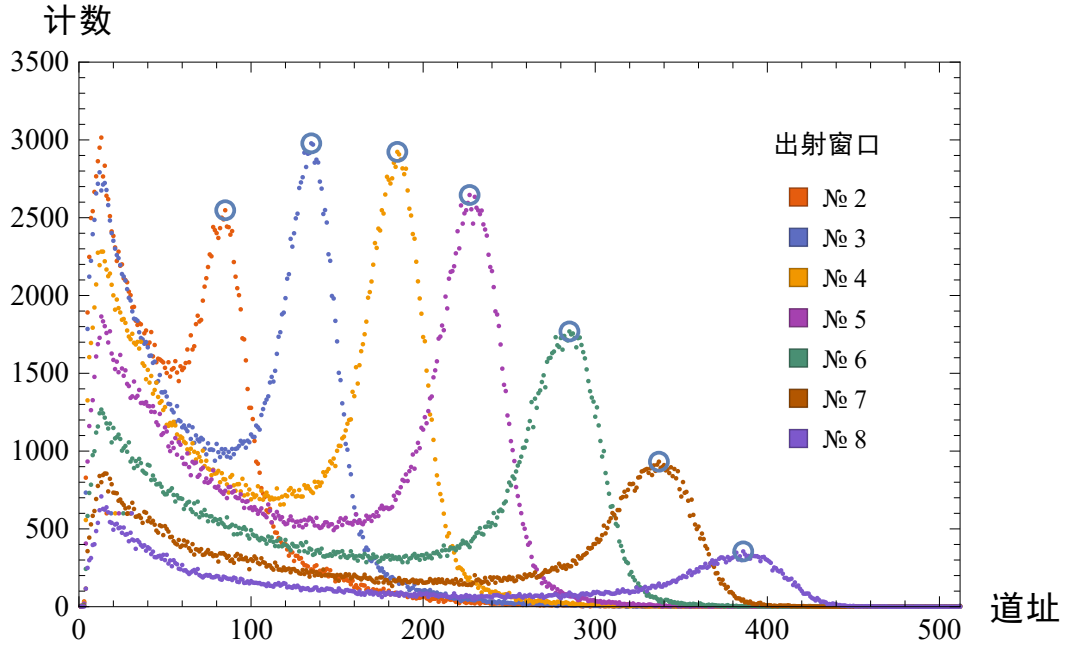


图 3: 真空状态下探测到的 β 粒子的能谱，
真空由机械泵抽取至极限获得，真空度 < -0.1 MPa（相对大气压的压差）。
能量由道址 $n = 1, 2, \dots, 512$ 表征，峰值以圆圈标记。
便于比较峰的强度，统一取活时 600 s。

由图可见峰值及其强度随出射窗口的变化——出射窗口的编号越大，对应粒子运动半径 R 越大，即其动量 p 越大；相应地，峰值对应的道址 n 越大，即粒子的动能 E_k 越大。此外，能、动量增大，峰值的强度先增后减，这实际表征了 $^{90}\text{Sr}-^{90}\text{Y}$ β 源的能谱。

能谱峰值对应的道址由计算机获取，其不确定度通过具体分析峰值附近的图像确定；这一过程具体如图 4 所示。所得峰值道址 n 利用 $n-E$ 关系转化为实测能量，再进一步修正得到 β 粒子能量；结果如表所示。

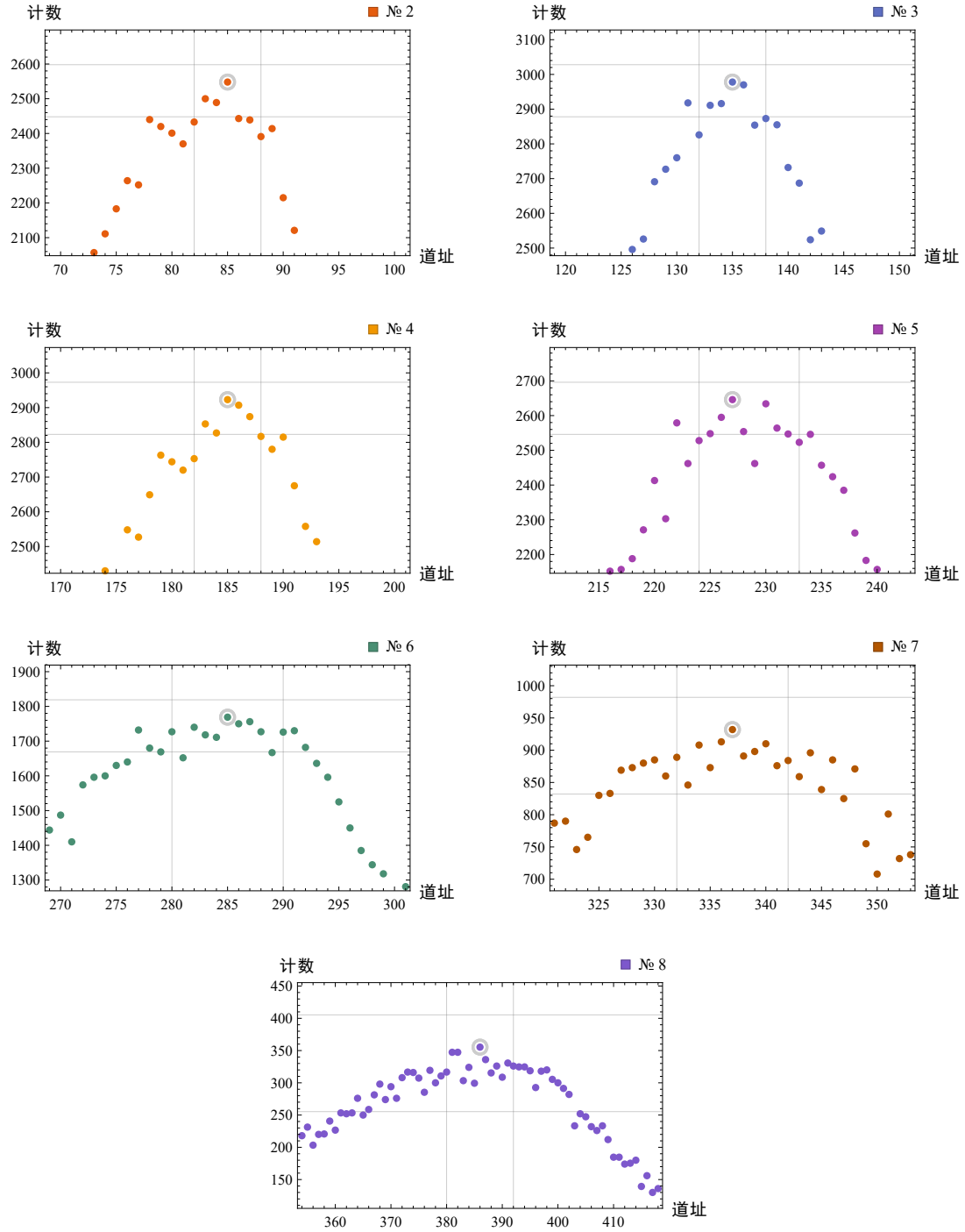


图 4: 真空 β 能谱 (图 3) 峰值的局部放大, 参考线表征峰值的极限不确定度。

表 I: β 粒子的能量测定数据表,
道址不确定度由图 4 确定, 实际能量由实测能量修正后得到。
最终不确定度 δE 包含了 δn 及线性拟合的贡献。 N° 为出射窗口编号。

N°	道址 n	不确定度 δn	实测能量 /MeV	实际能量 E /MeV	不确定度 δE /MeV
2	85	3	0.37	0.49	0.02
3	135	3	0.59	0.69	0.02
4	185	3	0.81	0.90	0.02
5	229	5	1.00	1.09	0.02
6	285	5	1.24	1.33	0.03
7	337	5	1.47	1.56	0.03
8	386	6	1.69	1.78	0.03

在此基础上, 将 E - p 关系作图如下; 其中, $p = eBR$ 的误差主要由 R 即 x 测定时的误差导致, 由于刻线不甚精确, 估计 δx 的上限高达 1 mm.

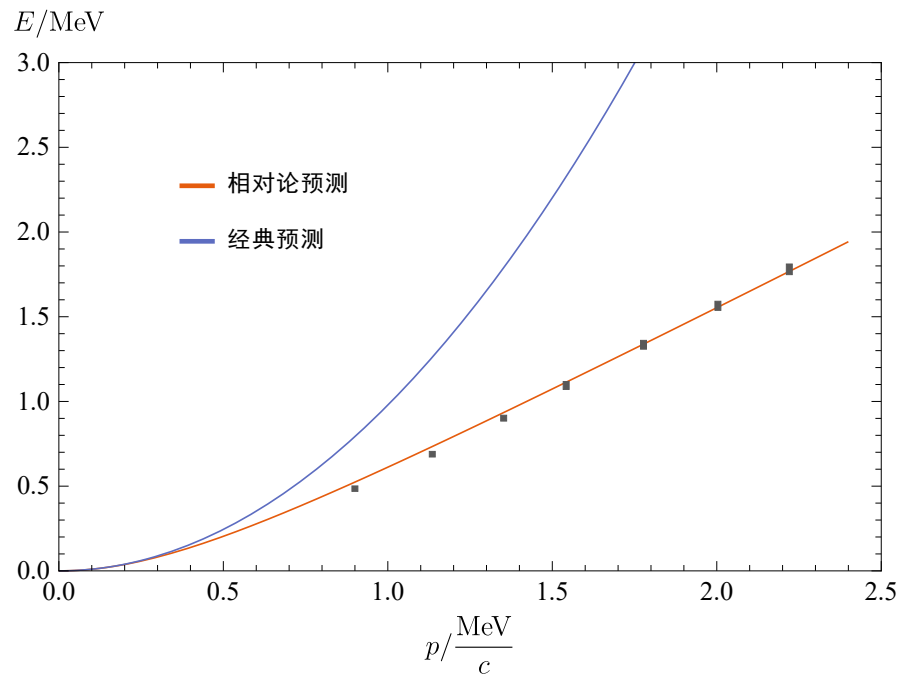


图 5: β 粒子的动量-能量关系, 理论预测由曲线给出。
实测数据表现为图中散点, 散点的尺度体现了其不确定度。

可见，实测数据与相对论性结果吻合得非常好，同时与经典结论明显不符。这便证实了高能 β 粒子遵循相对论性动量-能量关系。



进一步，考察空气对粒子运动的影响。在 1 atm 下重复实验，比较能量分布曲线，所得结果如下。可见，空气环境使峰值位置向道址更低方向（低能方向）偏移，且对峰值强度的影响十分明显；由于能量分布变得平缓，峰值位置的不确定度显著增大，这也不利于精确测定粒子的动能。

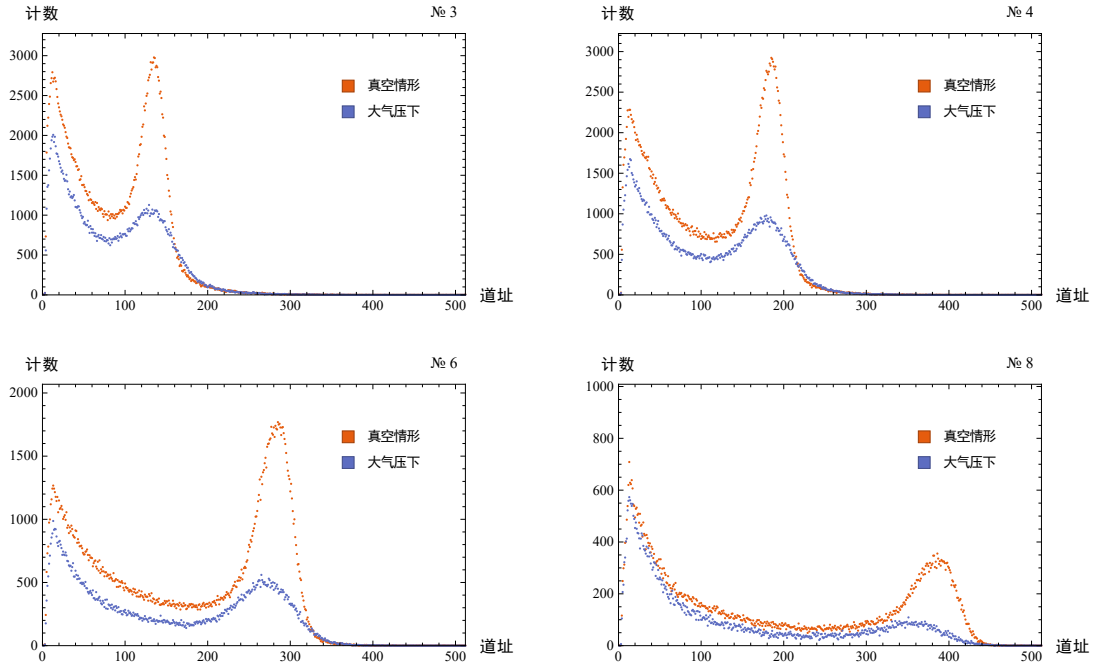


图 6: 真空与 1 atm 下 β 能谱的比较

在此基础上，我们尝试估计 β 粒子在 1 atm 的衰减长度 L_0 。与空气分子的碰撞导致沿轨迹运动的粒子数目指数衰减，考虑探测装置的效率 ϵ ，有探测到的粒子数目：

$$N_0 = \epsilon C e^{-\frac{L}{L_0}}, \quad p = p_0 = 1 \text{ atm} \quad (12)$$

此外，粒子的自由程反比于压强，故改变压强 p 时，有：

$$N = \epsilon C e^{-\frac{pL}{p_0 L_0}} \implies L_0 = L \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) / \ln \frac{N}{N_0} \quad (13)$$

本实验中， $L = \pi R$, $(1 - \frac{p}{p_0}) \rightarrow 1$, 进一步有：

$$L_0 = \pi R / \ln \frac{N}{N_0} \quad (14)$$

考虑本实验测得的能谱，如图 6 所示，实际上只有构成峰值的粒子是沿 $L = \pi R$ 路径抵达探测器的，峰值以外的能谱是被散射后的粒子之贡献，在能谱上体现为一指数衰减的背景。在计数 N 值时，应当去除这一背景；去除的方法如图所示。

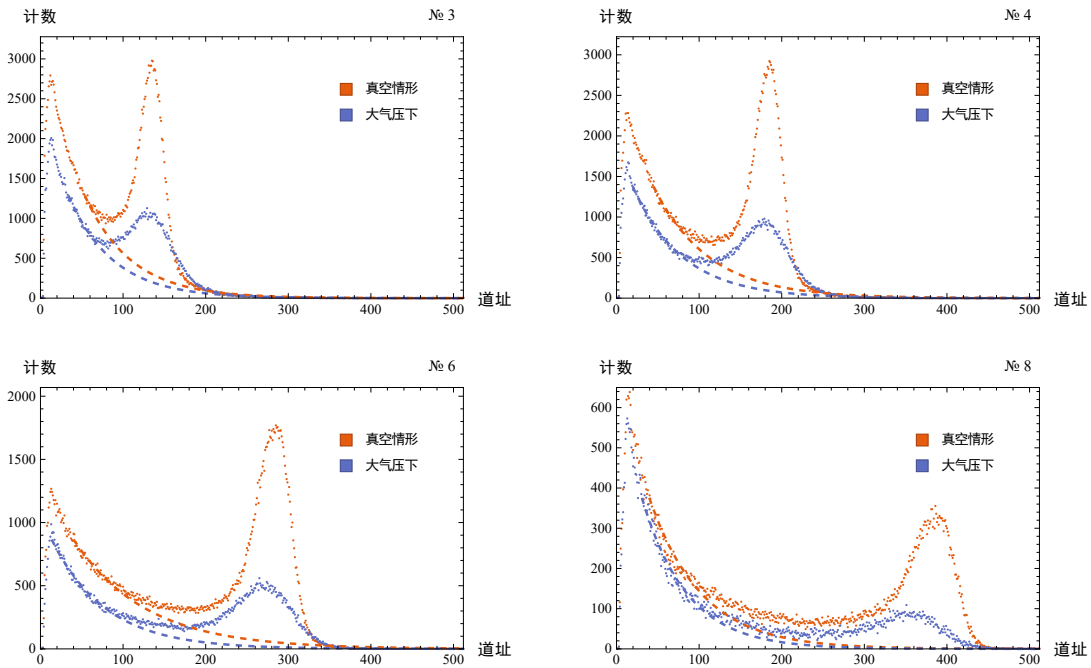


图 7: 背景能谱的识别与去除，以指数衰减的曲线表示。

注意到背景能谱的拟合实际上有不小的自由度；
尤其对于 №. 8 的情形，峰值展宽太大，难以精确拟合。
故由此计算得到的结果仅作为 L_0 的一个估计值。

表 II: β 粒子在 1 atm 空气中的衰减长度 L_0 测定,
由于 N, N_0 的不确定度很大, 这里的计算仅作为 L_0 的一个估计。
 N_0 为出射窗口编号。

N_0	N	N_0	R/cm	L_0/cm
3	111308	59190	6.3	31.3
4	131269	65565	7.5	33.9
6	107650	45078	9.8	35.4

可见, β 粒子在空气中的衰减长度 L_0 大致为三十几厘米, 且 L_0 似乎随着粒子能
动量 (对应出射窗口编号) 的增大而增大。

当然, 由于实际测算的数据只有 3 组, 这一结论的置信度并不很高, 需要进一步
实验加以证实; 但可以肯定的是, 该能量范围的 β 粒子在 1 atm 下的衰减长度大致均
在 30 cm~40 cm 上下, 与 L 在同一量级。这也进一步肯定了在真空环境中进行实验
的必要性。

V. 结论

实验证实了高能 β 粒子的动量-动能的关系 (色散关系) 满足狭义相对论的理论
预测, 即在误差容许的范围内, 有:

$$E_k = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - m^2 c^4 \quad (6)$$

从而初步验证了狭义相对论对高速运动物体的适用性。同时, 实验结果与经典理论的
严重偏离确认了经典力学对高速运动不适用。

在此基础上, 实验估测了 β 粒子在 1 atm 空气中的衰减长度 $L_0 \sim 30 \text{ cm} \sim 40 \text{ cm}$,
从而强调了真空环境对提高数据质量的重要意义。此外, 观察到衰减长度 L_0 似乎随
着粒子能量增大而增大, 这一结论符合直观; 但由于数据量有限, 需要进一步的实验
加以确认。

VI. 致谢

亲手接触放射源，还是有一些紧张的；感谢同组的韩霄同学，我们的讨论成果保证了实验顺利进行并获得成功。也感谢王思广老师细致而耐心的指导，这给我们带来了巨大的帮助。

-
- [1] MAXWELL J C. A dynamical theory of the electromagnetic field[J]. Philosophical transactions of the Royal Society of London, 1865, 155: 459–512.
 - [2] MICHELSON A A, MORLEY E W. On the relative motion of the earth and of the luminiferous ether[J]. Sidereal Messenger, vol. 6, pp. 306-310, 1887, 6: 306–310.
 - [3] HERRMANN S, SENGGER A, MÖHLE K, et al. Rotating optical cavity experiment testing lorentz invariance at the 10- 17 level[J]. Physical Review D, 2009, 80(10): 105011.
 - [4] LORENTZ H. Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light[C]//KNAW Proceedings: volume 6. [S.l.: s.n.], 1904: 1903–1904.
 - [5] POINCARÉ H. The measure of time[M]//The Concepts of Space and Time. [S.l.]: Springer, 1976: 317–327.
 - [6] 吴思诚, 荀坤. 近代物理实验[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2015.