计算物理 2018 秋季第四次作业

*

2019 年 1 月 29 日

1 利用标准的 4 阶 Runge-Kutta 来求解简单的常微分方程的初值问题

1.1 问题 (a)

观察到方程对于第一个方程对于 x 是齐次的，第二个方程对于 y 是齐次的，可以对 x,y 都进行正则化，把常数吸收到 x,y 中。令

$$\begin{cases} X = \frac{\delta}{\gamma}x \\ Y = \frac{\beta}{\alpha}y \end{cases} \tag{1}$$

可以把原方程变为

$$\begin{cases} \dot{X} = \frac{\delta}{\gamma}\dot{x} = \alpha\frac{\delta}{\gamma}x - \alpha(\frac{\delta}{\gamma}x)(\frac{\beta}{\alpha}y) = \alpha X - \alpha XY \\ \dot{Y} = \frac{\beta}{\alpha}\dot{y} = \gamma(\frac{\delta}{\gamma}x)(\frac{\beta}{\alpha}y) - \gamma\frac{\beta}{\alpha}y = \gamma XY - \gamma Y \end{cases} \tag{2}$$

接下来令 $T = \alpha t$, 则 $\frac{d}{dt} = \alpha\frac{d}{dT}$，故方程可以变为

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = X - XY \\ \frac{dY}{dT} = \frac{\gamma}{\alpha}XY - \frac{\gamma}{\alpha}Y \end{cases} \tag{3}$$

故只有 $\frac{\gamma}{\alpha}$ 一个参数。对 x,y,t 的重新定义见上换元的操作。

1.2 问题 (b)

有固定点。分别是 $(x, y) = (0, 0)$ 和 $(x, y) = (\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$。考虑在固定点附近的微扰，需要求出 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 在固定点附近关于 x,y 的偏导数，考虑其雅克比矩阵。

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{bmatrix} \tag{4}$$

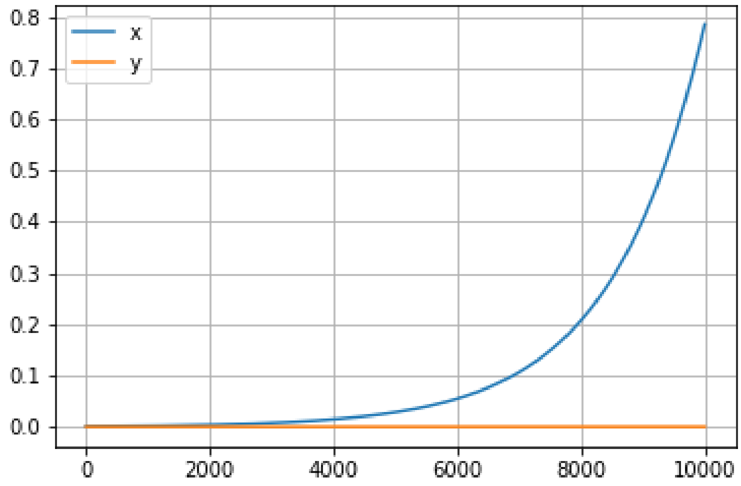

图 1: 固定点 1, 对 x 做微绕, 远离固定点

带入第一个固定点 $(x, y) = (0, 0)$，得到

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} \tag{5}$$

由于 $\alpha > 0, \gamma > 0$，故第一个固定点 $(x, y) = (0, 0)$ 是一个鞍点。如果有一个 dx>0，那么 $\dot{x}$>0，x 随着时间变大，远离固定点，也就是如果没有捕食者，少量的猎物就可以不断繁殖，数量增大；如果有一个 dy>0，那么 $\dot{y}$<0，y 随着时间减小，回到固定点，也就是如果没有猎物，即便只有少量捕食者，也会因为没有猎物而数量减少。这个状态并不是稳定的。

代入第二个固定点 $(x, y) = (\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$，得到

$$J\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

定性分析，如果有小的扰动 dy(dy>0)，会使得 $\dot{x}$ 为负，x 减小，dx 为负，$\dot{y}$ 为负，y 减小，故对 y 产生了回到平衡位置的作用，对 dx 可以进行类似的分析，可以得到这个点是稳定的平衡点。另一方面，也可以考虑这个矩阵的特征值，$\lambda_1 = i\sqrt{\alpha\gamma}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\alpha\gamma}$，对 x,y 进行线性组合找到特征向量 η_1, η_2，可以解得这两个特征向量是周期性变化的，周期为 $\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha\gamma}}$。这说明如果在这个固定点发生扰动，x,y 的值会产生周期性的变化，是一个稳定的点。

下面用数值解验证以上理论分析的结果。

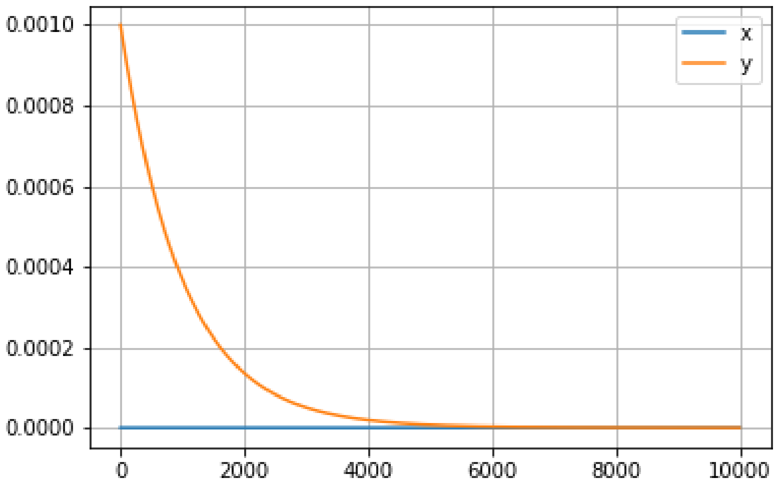

图 2: 固定点 1, 对 y 做微绕, 回到固定点

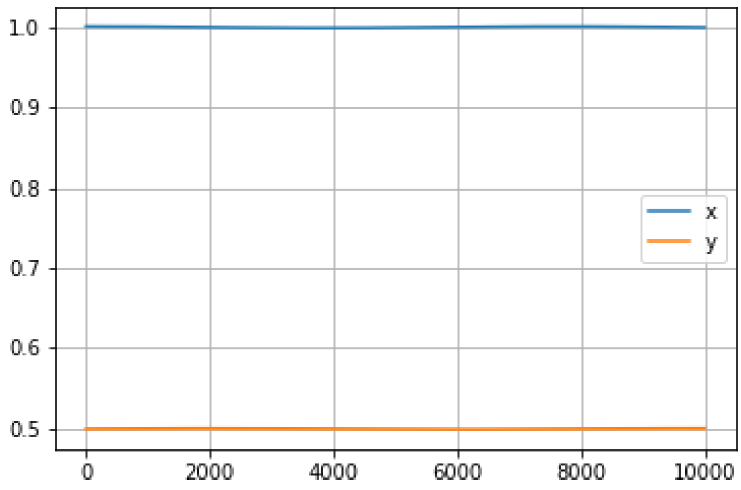

图 3: 固定点 2, 对 x 做微绕, 几乎保持不变, 周期变化幅度较小

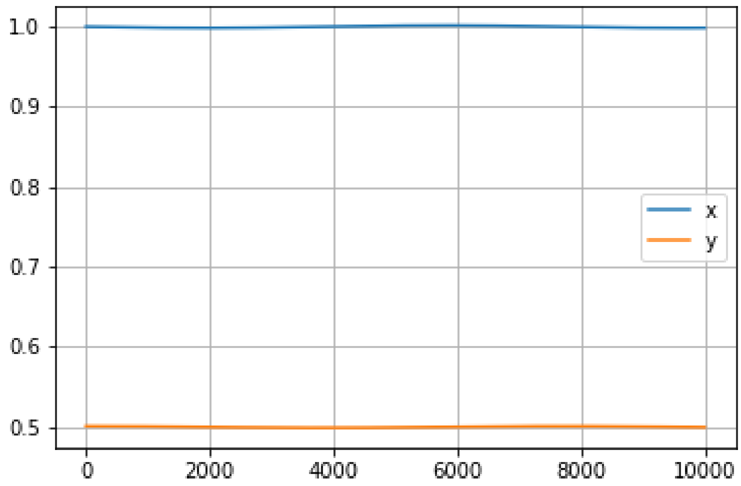

图 4: 固定点 2, 对 x 做微绕, 几乎保持不变, 周期变化幅度较小

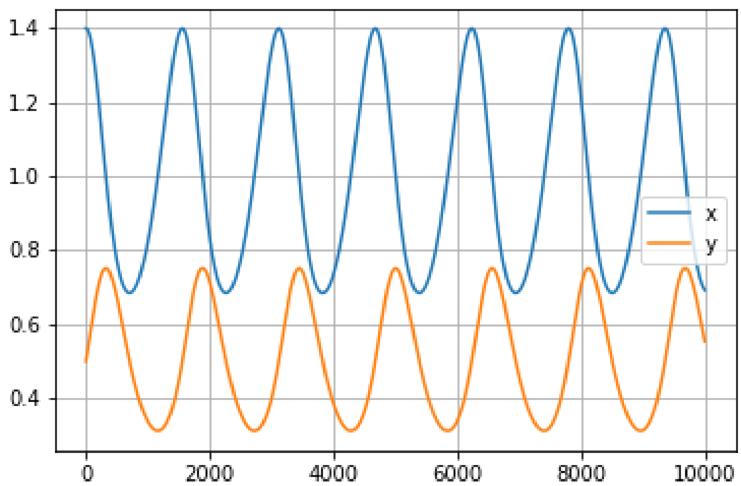

图 5: 固定点 1, 对 x 做非小量的扰动, 明显周期变化

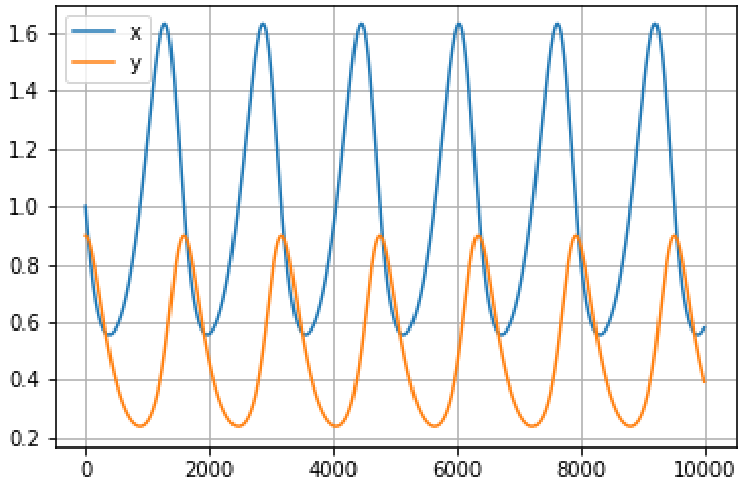

图 6: 固定点 1, 对 y 做非小量的扰动, 明显周期变化

1.3 问题 (c)

上两个方程相除可以得到

$$
\begin{aligned}
\frac{dY}{dX} &= \frac{\gamma}{\alpha}\frac{(X-1)Y}{(1-Y)X} \\
\frac{1-Y}{Y}dY &= \frac{\gamma}{\alpha}\frac{X-1}{X}dX \\
d(lnY - Y) &= d(\frac{\gamma}{\alpha}(X - lnX))
\end{aligned} \tag{7}
$$

也就是找到一个守恒量 $C' = \frac{\gamma}{\alpha}(X - lnX) + Y - lnY = \frac{\gamma}{\alpha}(\frac{\delta}{\gamma}x - lnx - ln\frac{\delta}{\gamma}) + \frac{\beta}{\alpha}y - lny - ln\frac{\beta}{\alpha}$ 。只用 x,y 表示则有守恒量为

$$C = \delta x - \gamma lnx + \beta y - \alpha lny \tag{8}$$

1.4 问题 (d)

代码见附件。演化图如下。

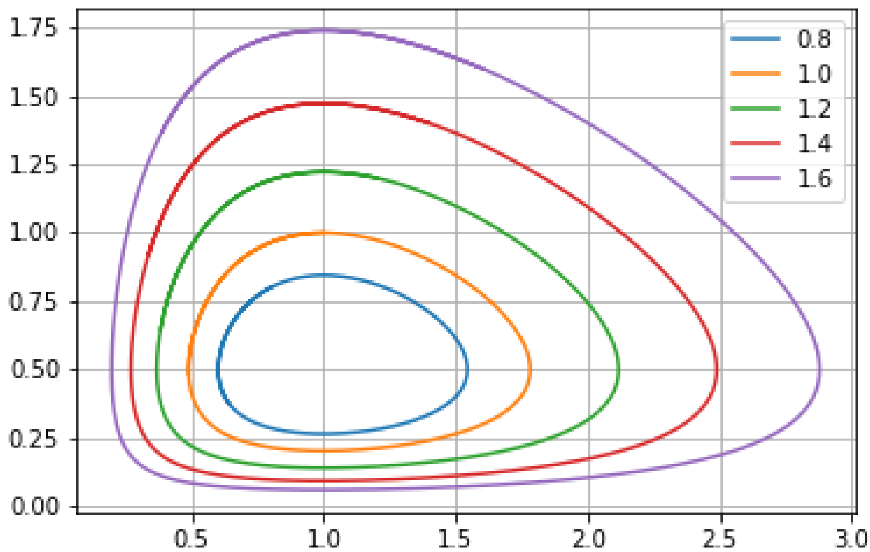

图 7: Runge-Kutta 4 阶方法求解微分方程组