第六次习题课解答 二重积分及计算

1. 求解下列各题:

（1）求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$.

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{(1+\frac{i}{n})(1+(\frac{j}{n})^2)}\dfrac{1}{n^2}$

$$=\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}}\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dxdy=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{\pi}{4}\ln 2.$$

（2）求 $f(x)=\int_1^x\sin t^2dt$ 在 $[0,1]$ 上的平均值，即求 $\int_0^1 f(x)dx$.

解: $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(\int_1^x\sin t^2dt)dx=-\int_0^1(\int_x^1\sin t^2dt)dx$

$$=-\int_0^1(\int_0^t\sin t^2dx)dt=-\int_0^1 t\sin t^2dt=\frac{1}{2}(\cos 1-1).$$

（3）当 $t\to 0^+$ 时，求无穷小量 $f(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}[1-\cos(x^2+y^2)]dxdy$ 的阶.

解: 因为 $f(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}[1-\cos(x^2+y^2)]dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^t(1-\cos r^2)rdrd\theta$

$$=\pi(t^2-\sin t^2)=\pi(t^2-t^2+\frac{1}{6}t^6+o(t^6))=\pi(\frac{1}{6}t^6+o(t^6)),\ t\to 0,$$

因此当 $t\to 0^+$ 时，$f(t)$ 是 6 阶无穷小量.

（4）令 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0\right\}$. 计算 $\iint\limits_D\dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$.

解: 因为积分区域 D 关于 x 轴对称，且 $\dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是 y 的奇函数，因此

$$\iint\limits_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0.$$

故 $\iint\limits_D\dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_D\dfrac{1}{1+x^2+y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\dfrac{r}{1+r^2}drd\theta=\dfrac{\pi}{2}\ln 2.$

（5）设 $F(t)=\int_0^t dx\int_x^t e^{x+y}\cos\sqrt{y}dy$ （$t>0$），求 $F'(t)$.

解：$F(t)=\int_0^t dx\int_x^t e^{x+y}\cos\sqrt{y}dy=\int_0^t e^y\cos\sqrt{y}dy\int_0^y e^x dx=\int_0^t e^y\cos\sqrt{y}(e^y-1)dy$，

故 $F'(t)=e^t\cos\sqrt{t}(e^t-1)$.

（6）设 $f(x,y)$ 为连续函数且 $f(x,y)=f(y,x)$. 证明:

$$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_0^x f(1-x,1-y)dy.$$

证：令 $x=1-u, y=1-v$，则 $0\le v\le 1,\ 0\le u\le v$，且 $\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=1$. 于是

$$\int_0^1 dx\int_0^x f(1-x,1-y)dy=\int_0^1 dv\int_0^v f(u,v)du=\int_0^1 dv\int_0^v f(v,u)du=\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy.$$

（7）将定积分 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$ 转化为二重积分计算.

解：$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{(2-x)^2}\int_0^x\frac{1}{1+y}dy\right)dx=\int_0^1\frac{1}{1+y}\left(\int_y^1\frac{1}{(2-x)^2}dx\right)dy$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+y}\left(1-\frac{1}{2-y}\right)dy=\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{2}{1+y}-\frac{1}{2-y}\right)dy=\frac{1}{3}\ln 2.$$

（8）设 $f(x)\in C[0,1]$. 证明：$\int_0^1 e^{f(x)}dx\int_0^1 e^{-f(x)}dx\ge 1$.

证明：令 $D=\{(x,y)\mid\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$，则积分区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，因此由轮换对称性,

$$\int_0^1 e^{f(x)}dx\int_0^1 e^{-f(x)}dx=\int_0^1 e^{f(x)}dx\int_0^1 e^{-f(y)}dy=\iint_D e^{f(x)-f(y)}dxdy=\iint_D e^{f(y)-f(x)}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D(e^{f(x)-f(y)}+e^{f(y)-f(x)})dxdy\ge 1.$$

2. 解答下列各题:

（1）设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是由锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 以及平面 $z=x$ 和 $x=0$ 围成，求空间区域 Ω 的体积。

解：空间区域 Ω 在 xoy 坐标平面内的投影区域 D 由平面曲线 $1-x=\sqrt{x^2+y^2}$ 以及直线 $x=0$ 围成，且 D 在极坐标系下表示为 $D=\left\{(r,\theta)\mid\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le\frac{1}{1+\cos\theta}\right\}$，因此空间区域 Ω 的体积

$$V(\Omega)=\iint_D(1-\sqrt{x^2+y^2}-x)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{1+\cos\theta}}(1-r(1+\cos\theta))rdr$$

$$=\frac{1}{6}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}d\theta=\frac{1}{12}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4\theta}d\theta=\frac{1}{12}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{\tan^2\theta}{\cos^2\theta})d\theta=\frac{2}{9}.$$

(2) 求曲线 $(x^2+y^2)^2=2ax^3$ 所围平面区域的面积.

解：由 $(x^2+y^2)^2=2ax^3$，得 $r=2a\cos^3\theta\ (-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$，所求面积

$$S=\iint_D dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos^3\theta}\rho d\rho=2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta=\frac{5}{8}\pi a^2.$$

(3) 分别求出由平面 $z=x-y,\ z=0$ 与圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 所围成的两个空间几何体的体积.

解：在极坐标系下，记 $D_1=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le 2\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{4}\}$，且

$$D_2=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le 2\cos\theta,\ \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}.$$

则所围空间几何体位于 Oxy 平面上方部分的体积

$$V_1=\iint_{D_1}(x-y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(\cos\theta-\sin\theta)r^2dr$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos^4\theta-\sin\theta\cos^3\theta)d\theta=\frac{3}{4}\pi+\frac{5}{6}.$$

位于 Oxy 平面下方部分的体积

$$V_2=-\iint_{D_2}(x-y)dxdy=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(\cos\theta-\sin\theta)r^2dr$$

$$=-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\theta-\sin\theta\cos^3\theta)d\theta=\frac{5}{6}-\frac{\pi}{4}.$$

(4) 求两个球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 与 $x^2+y^2+(z-2)^2\le 4$ 所围立体的体积.

解：两个球面的交线方程为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x^2+y^2+(z-2)^2=4,\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}x^2+y^2=\frac{15}{16}\\ z=\frac{1}{4}.\end{cases}$ 于是所求立体

体积为

$$\iint_{x^2+y^2\le 15/16}\left(z_1(x,y)-z_2(x,y)\right)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 15/16}\left[\sqrt{1-x^2-y^2}-\left(2-\sqrt{4-x^2-y^2}\right)\right]dxdy$$
$$=\int_{x^2+y^2\le 15/16}\left(\sqrt{1-x^2-y^2}+\sqrt{4-x^2-y^2}\right)dxdy-2\pi\cdot\frac{15}{16}$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{15/4}}\left(\sqrt{1-r^2}+\sqrt{4-r^2}\right)rdr-\frac{15\pi}{8}$$
$$=\pi\int_0^{15/16}(\sqrt{1-s}+\sqrt{4-s})ds-\frac{15\pi}{8}=\frac{13\pi}{24}.$$

（5）求由曲线$(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})^2=x^2+y^2$所围成的平面图形的面积.

解：令$x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta$，则$\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=abr$，曲线所围平面区域$D$在极坐标系下的区域变换为$D'=\{(r,\theta):0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\}$. 于是所求区域的面积

$$S(D)=\iint_D dxdy=\iint_{D'}abrdrd\theta=ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}rdr$$
$$=\frac{1}{2}ab\pi(a^2+b^2).$$

3. 通过适当的坐标变换，计算下列二重积分.

（1）$I=\iint_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)dxdy,$ 其中D是介于圆周$x^2+y^2=4$与圆周$(x+1)^2+y^2=1$之间的部分.

解：积分区域D关于x轴对称，故$\iint_D ydxdy=0.$

令$D_1=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$，$D_2=\left\{(x,y)\,|\,(x+1)^2+y^2\le 1\right\}$，则

$$I=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}dxdy-\iint_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2dr-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}d\theta\int_0^{-2\cos\theta}r^2dr=\frac{16}{9}(3\pi-2).$$

(2) $\iint_D(\sqrt{x}+\sqrt{y})dxdy$，$D$是由$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$，$x=0$，$y=0$所围成的平面区域.

解：令$\begin{cases}x=u^2\\ y=v^2,\end{cases}$ 则积分区域D在新坐标系下变换为$\Omega=\{(u,v)\,|\,0\le u\le 1, 0\le v\le 1-u\}$，

注意到$\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=4uv$，所以$\iint_D(\sqrt{x}+\sqrt{y})dxdy=4\int_0^1 du\int_0^{1-u}(u+v)uvdv=\frac{2}{15}$.

(3) $\iint\limits_D (x-y^2)dxdy$，$D$是由$y=2$，$y^2-y-x=1$，$y^2+2y-x=2$所围成的平面区域.

解：令$\begin{cases} u=y^2-x \\ v=y, \end{cases}$ 则积分区域D在新坐标系下变换为

$$\Omega=\{(u,v)\,|\,2-2v\le u\le v+1,\frac{1}{3}\le v\le 2\}.$$

注意到$\left|\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=1$，所以$\iint\limits_D (x-y^2)dxdy=-\int_{\frac{1}{3}}^{2}dv\int_{2-2v}^{1+v}udu=-\dfrac{175}{54}$.

(4) $\iint\limits_D (x+y)\sin(x-y)dxdy, D=\{(x,y)\,|\,0\le x+y\le\pi,0\le x-y\le\pi\}.$

解：令$x=\dfrac{1}{2}(u+v), y=\dfrac{1}{2}(u-v)$, 则$D'=\{(u,v)\,|\,0\le u\le\pi,0\le v\le\pi\}$, $\left|\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\dfrac{1}{2}.$

于是

$$\iint\limits_D (x+y)\sin(x-y)dxdy=\iint\limits_{D'} u\sin v\cdot\frac{1}{2}dudv=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}udu\int_0^{\pi}\sin vdv=\frac{1}{2}\pi^2.$$

(5) $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}dxdy,\ D=\{(x,y)\,|\,x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}.$

解：令$x=v-u, y=u$, 则$D'=\{(u,v)\,|\,0\le u\le v,0\le v\le 1\}$, $\left|\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=1.$

于是$\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}dxdy=\iint\limits_{D'} e^{\frac{u}{v}}dudv=\int_0^1 dv\int_0^v e^{\frac{u}{v}}du=\dfrac{1}{2}(e-1).$

4. 解答证明题:

（1）设$f(x,y)\in C^2$且满足$f(1,y)=0,\ f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$，其中

$D=\{(x,y)\,|\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$. 计算二重积分$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy.$

解：因为$f(1,y)=0,\ f(x,1)=0$，因此$f'_y(1,y)=0,\ f'_x(x,1)=0$. 这样

$$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy=\int_0^1 xdx\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1 x(yf'_x(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f'_x(x,y)dy)dx$$

$$=-\int_0^1 dy\int_0^1 xf'_x(x,y)dx=\int_0^1(xf(x,y)\Big|_0^1+\int_0^1 f(x,y)dx)dy$$

$$=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy=a.$$

（2）记 $D=\{(x,y)\mid |x|\le a,\ |y|\le a\}$. 设 $f(x)$ 是连续偶函数，证明：

$$\iint\limits_D f(x-y)dxdy = 2\int_0^{2a}(2a-u)f(u)du.$$

证明：令 $\begin{cases} u=x-y \\ v=x+y. \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(u+v) \\ y=\dfrac{1}{2}(v-u) \end{cases}$ 且积分区域 $D=\{(x,y)\mid |x|\le a,\ |y|\le a\}$ 转化为新坐标系下的区域 $D_1=\{(u,v)\mid |u|+|v|\le 2a\}$，且 $\left|\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}$.

故 $\iint\limits_D f(x-y)dxdy = \dfrac{1}{2}\iint\limits_{D_1} f(u)dudv = \dfrac{1}{2}2\int_0^{2a}du\int_{-2a+u}^{2a-u} f(u)dv = 2\int_0^{2a}(2a-u)f(u)du.$

（3）设 $f(u)$ 连续，且 $D=\{(x,y)\mid |x|\le \dfrac{A}{2}, |y|\le \dfrac{A}{2}\}$. 证明：

$$\iint\limits_D f(x+y)dxdy = \int_{-A}^{A} f(u)(A-|u|)du.$$

证明：令 $\begin{cases} u=x+y \\ v=y, \end{cases}$ 则积分区域 D 转化为新坐标系下的如下区域

$$\Omega=\{(u,v)\mid -\frac{A}{2}\le v\le u+\frac{A}{2}, -A\le u\le 0\}\cup\{(u,v)\mid u-\frac{A}{2}\le v\le \frac{A}{2}, 0\le u\le A\},$$

注意到 $\left|\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \dfrac{1}{4}$，所以

$$\begin{aligned} \iint\limits_D f(x+y)dxdy &= \int_{-A}^{0}du\int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}+u} f(u)dv + \int_0^{A}du\int_{u-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} f(u)dv \\ &= \int_{-A}^{0} f(u)(u+A)du + \int_0^{A} f(u)(A-u)du \\ &= \int_{-A}^{A} f(u)(A-|u|)du. \end{aligned}$$

证毕.

（4）记 $D_\delta=\{(x,y)\mid \ \delta^2\le x^2+y^2\le 1\}$. 设 $f(x,y)\in C^1$ 满足当 $x^2+y^2=1$ 时，有 $f(x,y)=0$. 证明：$\lim\limits_{\delta\to 0^+}\iint\limits_{D_\delta}\dfrac{xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)}{x^2+y^2}dxdy = -2\pi f(0,0).$

证明：令$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 并记$u(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$．则

$$u_r'(r,\theta) = \cos\theta f_x' + \sin\theta f_y' = \frac{1}{r}(xf_x'(x,y) + yf_y'(x,y)).$$

故$\iint\limits_{D_\delta} \frac{xf_x'(x,y) + yf_y'(x,y)}{x^2 + y^2} dxdy = \iint\limits_{D_\delta} \frac{ru_r'(r,\theta)}{r^2} rdrd\theta = \iint\limits_{D_\delta} u_r'(r,\theta) drd\theta$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_\delta^1 u_r'(r,\theta) dr = \int_0^{2\pi} (u(1,\theta) - u(\delta,\theta)) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (f(\cos\theta, \sin\theta) - f(\delta\cos\theta, \delta\sin\theta)) d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} f(\delta\cos\theta, \delta\sin\theta) d\theta$$

$$= -2\pi f(\delta\cos\varphi, \delta\sin\varphi),$$

其中$\varphi \in (0, 2\pi)$. 因为 $f(x,y) \in C^1$，所以 $f(x,y)$ 在$(0,0)$连续，从而

$$\lim_{\delta \to 0^+} \iint\limits_{D_\delta} \frac{xf_x'(x,y) + yf_y'(x,y)}{x^2 + y^2} dxdy = -2\pi \lim_{\delta \to 0^+} f(\delta\cos\varphi, \delta\sin\varphi) = -2\pi f(0,0).$$

（5）设 $f(x,y) \in C^2$ 且关于两个变量x和y的周期都为 1，即对任意的(x,y),

$f(x+1,y) = f(x,y), \quad f(x,1+y) = f(x,y)$．若 $f(x,y)$ 满足

$\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 f(x,y)(f_{xx}''(x,y) + f_{yy}''(x,y)) dy \ge 0$，证明： $f(x,y)$ 是常函数。

证明：因为

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 f(x,y)(f_{xx}''(x,y) + f_{yy}''(x,y)) dy \\
&= \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 f(x,y) f_{xx}''(x,y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 f(x,y) f_{yy}''(x,y) dy,
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 f(x,y) f_{xx}''(x,y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 f(x,y) f_{xx}''(x,y) dx \\
&= \int_{-1}^1 \left(f(x,y) f_x'(x,y) \Big|_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^1 (f_x'(x,y))^2 dx \right) dy \\
&= -\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 (f_x'(x,y))^2 dx \right) dy \\
&= -\iint\limits_{\substack{|x|\le 1 \\ |y| \le 1}} (f_x'(x,y))^2 dxdy,
\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}f(x,y)f''_{yy}(x,y)dy$$
$$=\int_{-1}^{1}\left(f(x,y)f'_y(x,y)\Big|_{y=-1}^{y=1}-\int_{-1}^{1}(f'_y(x,y))^2dy\right)dx$$
$$=-\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}(f'_y(x,y))^2dy\right)dx$$
$$=-\iint\limits_{\substack{|x|\le 1\\ |y|\le 1}}(f'_y(x,y))^2dxdy,$$

故当$\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}f(x,y)(f''_{xx}(x,y)+f''_{yy}(x,y))dy\ge 0$时，必有

$$\iint\limits_{\substack{|x|\le 1\\ |y|\le 1}}[(f'_x(x,y))^2+(f'_y(x,y))^2]dxdy\le 0,$$

由于$(f'_x(x,y))^2+(f'_y(x,y))^2$是非负连续函数，因此对$\forall(x,y)$满足$|x|\le 1,\ |y|\le 1$，有$(f'_x(x,y))^2+(f'_y(x,y))^2=0$．从而对$\forall(x,y)$满足$|x|\le 1,\ |y|\le 1$，$f'_x(x,y)=0$且$f'_y(x,y)=0$，这样$f(x,y)$在区域$\{(x,y)\mid |x|\le 1,\ |y|\le 1\}$上是常数. 由函数$f(x,y)$的周期性可知，$f(x,y)$在其定义域上是常数. 证毕

（6） 设$f(x,y)$在开单位圆盘$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$上是$C^2$类函数，在闭单位圆盘$\overline{D}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$上连续。若函数$f(x,y)$在$\partial D=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$上取值为常数零，证明: $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}f(x,y)[f''_{xx}(x,y)+f''_{yy}(x,y)]dxdy\le 0$.

证明：将重积分化为累次积分，然后再做分部积分，并利用假设条件.

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}f(x,y)f''_{xx}(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)f''_{xx}(x,y)dx=\int_{-1}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}fdf'_x$$
$$=\int_{-1}^{1}\left[f(x,y)f'_x(x,y)\Big|_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}}-\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y^2}}f'_x(x,y)^2dx\right]dy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}f'_x(x,y)^2dxdy\le 0.$$

同理可证$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}f(x,y)f''_{yy}(x,y)dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}f'_y(x,y)^2dxdy\le 0$. 因此

$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}f(x,y)[f''_{xx}(x,y)+f''_{yy}(x,y)]dxdy\le 0$. 证毕

（7）设$f(x)\in C[0,1]$且$0<m\le f(x)\le M$ （$\forall x\in[0,1]$）.

证明: $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}} \frac{f(x)}{f(y)}dxdy \le \frac{(M+m)^2}{4Mm}$.

证明: $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}} \frac{f(x)}{f(y)}dxdy = \int_0^1 \frac{1}{f(y)}dy\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx\int_0^1 f(x)dx.$

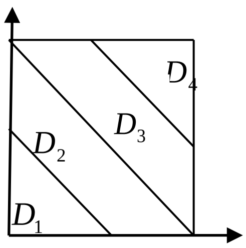
因为对 $\forall x\in[0,1]$, $(M-f(x))(f(x)-m)\ge 0,$ 因此 $(M+m)f(x)\ge f^2(x)+Mm,$ 从而

$M+m\ge f(x)+\frac{Mm}{f(x)},$ 两边积分得, $M+m\ge \int_0^1 f(x)dx + Mm\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx,$

记 $a=\int_0^1 f(x)dx,\ b=\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx,$ 则 $M+m\ge a+bMm\ge 2\sqrt{abMm},$ 故 $ab\le \frac{(M+m)^2}{4Mm}.$

所以 $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}} \frac{f(x)}{f(y)}dxdy = ab \le \frac{(M+m)^2}{4Mm}.$

(8) 求 $I=\iint\limits_D [x+y]d\sigma$, 其中 $D=[0,2]\times[0,2]$, $[x+y]$ 为取整函数。



解: 为方便,对 D 作分解 $D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$, 如图。于是

$$I=\iint\limits_D [x+y]d\sigma=\iint\limits_{D_1}[x+y]d\sigma+\iint\limits_{D_2}[x+y]d\sigma+\iint\limits_{D_3}[x+y]d\sigma+\iint\limits_{D_4}[x+y]d\sigma$$
$$=\iint\limits_{D_1}0d\sigma+\iint\limits_{D_2}1\cdot d\sigma+\iint\limits_{D_3}2\cdot d\sigma+\iint\limits_{D_4}3\cdot d\sigma$$
$$=S(D_2)+2S(D_3)+3S(D_4)=6.$$

其中 $S(D_2)=S(D_3)=\frac{3}{2}$, $S(D_1)=S(D_4)=\frac{1}{2}$, 解答完毕。

(9) 计算 $I=\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2\}$ 且 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\in C(D)$.

解: 考虑极坐标变换 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}$ $dxdy=\rho\, d\rho\, d\theta$. 则

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix} y\\ -x\end{pmatrix}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial(\rho,\theta)}\cdot\frac{\partial(\rho,\theta)}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix} y\\ -x\end{pmatrix}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\theta},$$

其中 $\frac{\partial(\rho,\theta)}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix} y\\ -x\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right)^{-1}\begin{pmatrix} y\\ -x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y\\ -x\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix}\rho\cos\theta & \rho\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y\\ -x\end{pmatrix}=\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix}0\\ -\rho\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}.$$

故 $I=\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy=-\iint\limits_{\substack{0\le\rho\le R\\0\le\theta\le2\pi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\theta}\rho d\rho d\theta$

$$=-\int_0^R d\rho\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial\theta}d\theta=-\int_0^R\left(f(\rho,2\pi)-f(\rho,0)\right)d\rho=0.$$

（10）计算 $I=\iint\limits_D\left|x^2+y^2-4\right|d\sigma$，$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le16\}.$

解：记 $D=D_1\cup D_2$，$D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le4\}$，$D_2=\{(x,y)\,|\,4\le x^2+y^2\le16\}$，则

$$I=\iint\limits_{D_1}(4-x^2-y^2)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-4)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4-r^2)rdr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^4(r^2-4)rdr$$

$$=2\pi\left(2r^2-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^2+2\pi\left(\frac{r^4}{4}-2r^2\right)\Big|_2^4=80\pi.$$

或者 $I=-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-4)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-4)dxdy$

$$=\iint\limits_{D_1\cup D_2}(x^2+y^2-4)dxdy-2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-4)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4(r^2-4)rdr-2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(r^2-4)rdr=80\pi.$$

解答完毕

5. 利用二重积分理论，证明下列结论：设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

（1）$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)dx$；

（2）$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$.

（3）$\int_a^b dx\int_x^b f(x)f(y)dy=\frac{1}{2}(\int_a^b f(x)dx)^2$.

证明:

（1） $\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 = \int_a^b f(x)dx\int_a^b f(y)dy = \iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} f(x)f(y)dxdy$

$$\le \frac{1}{2}\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}[f^2(x)+f^2(y)]dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} f^2(x)dxdy + \frac{1}{2}\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} f^2(y)dxdy$$

$$= \frac{1}{2}(b-a)\int_a^b f^2(x)dx + \frac{1}{2}(b-a)\int_a^b f^2(y)dy = (b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

（2）由不等式$[f(x)g(y)-f(y)g(x)]^2 \ge 0$得

$$0 \le \iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}[f(x)g(y)-f(y)g(x)]^2 dxdy$$

$$= \iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}[f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x)-2f(x)g(x)f(y)g(y)]dxdy$$

$$= 2\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx - 2\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$. 由此立刻得到不等式(2).

（3）令 $D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, x\le y\le b\}$， $E=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, a\le y\le x\}$. 则

D 与 E 关于 $y=x$ 对称，因此

$$\int_a^b dx\int_x^b f(x)f(y)dy = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b f(y)dy = \frac{1}{2}(\int_a^b f(x)dx)^2.$$

（4）若 $f(x)$ 是$[a,b]$上的非负连续函数，则

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kxdx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin kxdx\right)^2 \le \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2.$$

证明：将不等式左边的每一项改写为二重积分，

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kxdx\right)^2 = \int_a^b\int_a^b f(x)f(y)\cos kx\cos kydxdy,$$

$$\left(\int_a^b f(x)\sin kxdx\right)^2 = \int_a^b\int_a^b f(x)f(y)\sin kx\sin kydxdy,$$

由于 $\cos k(x-y)=\cos kx\cos ky+\sin kx\sin ky$， 并注意到， $f(y)\cos k(x-y)\le f(y)$，

所以

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kxdx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kxdx\right)^2=\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)\cos k(x-y)dxdy$$

$$=\int_a^b f(x)dx\int_a^b f(y)\cos k(x-y)dy\le\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2.$$

（5）若 $f(x),\ p(x),\ g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $p(x)$ 是正值函数， $f(x),\ g(x)$ 都是单调增加函数或都是单调减小函数，证明：

$$\int_a^b p(x)f(x)dx\cdot\int_a^b p(x)g(x)dx\le\int_a^b p(x)dx\cdot\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx.$$

（此不等式称为切比雪夫不等式）

证明：由于定积分与积分变量无关，将所证不等式中的积分乘积化为二重积分，考虑差

$$\begin{aligned}\Delta&=\int_a^b p(x)dx\cdot\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx-\int_a^b p(x)f(x)dx\cdot\int_a^b p(x)g(x)dx\\&=\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx\cdot\int_a^b p(y)dy-\int_a^b p(x)f(x)dx\cdot\int_a^b p(y)g(y)dy\\&=\iint_D\left(p(x)f(x)g(x)p(y)-p(x)f(x)p(y)g(y)\right)dxdy\\&=\iint_D p(x)f(x)p(y)\left(g(x)-g(y)\right)dxdy,\end{aligned}$$

由于积分区域 $D=[a,b]\times[a,b]$ 关于直线 $y=x$ 对称，因此由轮换对称性知，

$$\begin{aligned}\Delta&=\iint_D p(x)f(x)p(y)\left(g(x)-g(y)\right)dxdy\\&=\iint_D p(y)f(y)p(x)\left(g(y)-g(x)\right)dxdy\\&=\frac{1}{2}\iint_D p(x)p(y)\left(f(x)-f(y)\right)\left(g(x)-g(y)\right)dxdy,\end{aligned}$$

因为 $p(x)$ 是 $[a,b]$ 的正值函数， $f(x),\ g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的单调性相同，于是，在 D 上，被积函数

$$p(x)p(y)\left(f(x)-f(y)\right)\left(g(x)-g(y)\right)\ge 0,$$

从而 $\Delta\ge 0$，即 $\int_a^b p(x)f(x)dx\cdot\int_a^b p(x)g(x)dx\le\int_a^b p(x)dx\cdot\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx.$ 证毕

=====

以下内容为学有余力的同学选做。

6\. 设函数 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f_y'(x,y)$ 在平面区域 D 上连续，其中

$D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$，这里 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，且

$\varphi(x)\le\psi(x)$. 进一步假设 $f(x,\varphi(x))=0$, $\forall x\in[a,b]$. 证明存在常数 $C>0$, 使得 $\iint\limits_D f^2(x,y)dxdy\le C\iint\limits_D (f_y'(x,y))^2dxdy$.（这个不等式称作 Poincare 不等式）

证明：根据假设和 Newton—Leibniz 公式得 $f(x,y)=\int\limits_{\varphi(x)}^{y} f_t'(x,t)dt$.

两边平方并应用 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$f^2(x,y)=\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{y} f_t'(x,t)dt\right)^2\le(y-\varphi(x))\int\limits_{\varphi(x)}^{y}(f_t'(x,t))^2dt\le[\psi(x)-\varphi(x)]\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)}(f_y'(x,y))^2dy$$

两边关于 y 在区间 $[\varphi(x),\psi(x)]$ 上积分得

$$\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^2(x,y)dy\le[\psi(x)-\varphi(x)]^2\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)}(f_y'(x,y))^2dy.$$

记 $C=\max\{[\psi(x)-\varphi(x)]^2, a\le x\le b\}$. 则 $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^2(x,y)dy\le C\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)}(f_y'(x,y))^2dy$.

对上述不等式关于 x 在区间 $[a,b]$ 上积分得 $\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^2(x,y)dy\le C\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)}(f_y'(x,y))^2dy$.

再将上式两边的累次积分换成重积分，即得所要证明的 Poincare 不等式。证毕

以下部分内容大纲不做要求：
二重积分的积分区域和被积函数都是有界的，将有界区域推广到无界区域，就有无穷二重积分，将有界函数推广到无界函数，就有瑕二重积分，无穷二重积分和瑕二重积分统称为广义二重积分，下面只给出无穷二重积分收敛与发散的概念，瑕二重积分收敛与发散的概念可类似瑕积分写出。

定义：若函数 $f(x,y)$ 定义在无界区域 D 上，符号 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 称为无穷二重积分. 如果任意包含原点的有界区域 G，函数 $f(x,y)$ 在 $G\cap D=E$ 上可积，设

$$d_G=\min\{\sqrt{x^2+y^2}\mid(x,y)\in\partial G\ \ (\text{区域}G\text{的边界})\}.$$

若极限 $\lim\limits_{d_G\to+\infty}\iint\limits_E f(x,y)dxdy$ 存在，称无穷二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 收敛，该极限称为函数 $f(x,y)$ 在无界区域 D 上的积分，且 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\lim\limits_{d_G\to+\infty}\iint\limits_E f(x,y)dxdy$. 若极限不存在，称无穷二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 发散.

7. 计算二重广义积分 $\iint\limits_{R^2} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy$.

解：作极坐标变换： $x=r\cos t$， $y=r\sin t$，则所求积分为

$$\iint\limits_{0\le r<+\infty,0\le t\le 2\pi} e^{-r^2}\sin r^2 r dr dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}dt\int_0^{+\infty}e^{-s}\sin s ds$$

注意 $\int_0^{+\infty}e^{-s}\sin s ds=\left.\frac{-e^{-s}(\cos s+\sin s)}{2}\right|_{s=0}^{s=+\infty}=\frac{1}{2}$. 于是我们得到

$$\iint\limits_{R^2} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy=\frac{\pi}{2}.$$ 解答完毕

8. 计算二重广义积分 $\iint\limits_{R^2} e^{2xy-2x^2-y^2}dxdy$.

解：注意 $2xy-2x^2-y^2=-(x-y)^2-x^2$. 令 $u=x$， $v=x-y$，则其逆变换为 $x=u$， $y=u-v$. 于是原积分等于

$$\iint\limits_{R^2} e^{2xy-2x^2-y^2}dxdy=\iint\limits_{R^2} e^{-u^2-v^2}\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2}dv=\pi.$$ 解答完毕