第四次习题课题目 Taylor 展式、极值

1． 将函数 $\ln(1+x+y+z)$ 在点 $(x,y,z)=(0,0,0)$ 分别展开成带 Peano 余项的二阶泰勒展式和带有 Lagrange 余项的一阶 Taylor 展式。

2. 设 $f(x,y)\in C^2$．证明：$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(2h,e^{-\frac{1}{2h}})-2f(h,e^{-\frac{1}{h}})+f(0,0)}{h^2}$.

3．在周长为 $2p$ 的三角形中求出满足下述要求的三角形：绕自己的一边旋转时所形成的旋转体的体积最大。

4. 设二元函数 $f(x,y)$ 在全平面上处处可微，且满足条件

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty. \qquad (*)$$

试证：对于任意给定的向量 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$，均存在一点 $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$ 使得 $\mathrm{gradf}(\xi,\eta)=(a,b)$.

5. 若 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$， $f'_x(x,0)=(x+1)\mathrm{e}^x$， $f(0,y)=y^2+2y$．求 $f(x,y)$ 的极值.

6. 假设 $u(x,y)$ 在闭圆盘 $\bar{D}=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\right\}$ 上连续，在开圆盘

$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\right\}$ 内二阶连续可微，且满足微分方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$.

若在圆盘边界 $\left\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\right\}$ 上， $u(x,y)\ge 0$，证明：在 $\bar{D}$ 上，有 $u(x,y)\ge 0$.

7. 设 $f(x,y)$ 是定义在 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\right\}$ 上的可微函数，$\left|f(x,y)\right|\le 1$．试证：在 D 内存在一点 (x_0,y_0) 使得 $\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right]^2+\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]^2\le 16$.

8. 已知二阶连续可微函数 $f(u,v)$ 在点 $(0,0)$ 处带有皮亚诺余项的二阶 Taylor 展开式为

$$f(u,v)=1+2u-uv+v^2+o(u^2+v^2),\quad (u,v)\to(0,0),$$

令 $w=f(x+y+z,xyz)$．求 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(1,0,-1)$.

9. 求原点到曲面 $z^2=xy+x-y+4$ 的最短距离．

10. 求平面 $x+y-z=0$ 与圆柱面 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0$ 相交所成椭圆的面积。

11. 已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6,\\ 4x+2y+z=30,\end{cases}$ 求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值.

12. 求函数 $z=xy(4-x-y)$ 在由三条直线 $x=1$， $y=0$ 和 $x+y=6$ 所围有界闭区域上的最值。

13. 设 $S:F(x,y,z)=0$ 是光滑曲面， $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面 S 外一点。证明：若 $Q\in S$ 使得线段 $\overline{P_0Q}$ 是 P_0 与曲面 S 上任意一点的连线中最短线段，则向量 $\overrightarrow{P_0Q}$ 必与曲面在该点的切平面垂直。

14. 求椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ lx+my+nz=0\end{cases}$ 的面积，其中 $l^2+m^2+n^2=1$.

15. 若 n 元函数 f 满足 $f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^k f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中 $t>0$，称 f 是 k 次齐次函数。设三元函数 $f(x,y,z)$ 可微,证明：函数 $f(x,y,z)$ 是 k 次齐次函数当且仅当 $xf'_x+yf'_y+zf'_z=kf(x,y,z)$.

====

以下供学有余力的同学选做.

16. 假设 $f(x,y)\in C^1(\mathbb{R}^2)$ 在全平面上除原点之外处处满足 $xf'_x+yf'_y>0$. 证明：原点是 $f(x,y)$ 的唯一极小值点，并且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

17. 设 $f(x,y)\in C^2(\mathbb{R}^2)$. 若 $f(x,y)$ 在任意一点 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 处的 Hesse 矩阵均是正定的，则 $f(x,y)$ 至多有一个驻点。

18. 设 $a_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$，证明：

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\le\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

且上式等号成立当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$.