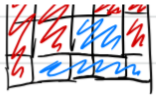
第七章进阶题 优秀作业

7.7

7.7. 使用 2 种颜色对一个 $n\times n$ 正方形棋盘的 n^2 个棋盘格进行染色，允许旋转，禁止翻转，求不等价的染色方案数.



解: $G=\{e,\ \pm 90°,\ 180°\}$

不动: $e=(1)\cdots(n^2)$ 1个置换, $C(e)=n^2$

$\pm 90°$: $(4)^{\lfloor\frac{n^2}{4}\rfloor}(1)^{n\%2}$ 2个置换. $C(90°)=C(-90°)=\lceil\frac{n^2}{4}\rceil$ // 棋盘上每4个点构成一个循环, 除了中心点.

$180°$ $(2)^{\lfloor\frac{n^2}{2}\rfloor}(1)^{n\%2}$ 1个置换 $C(180°)=\lceil\frac{n^2}{2}\rceil$ // 2

由 Pólya 定理, 有方案数 $N=\frac{1}{|G|}\sum_{p\in G} m^{c(p)}=\frac{1}{4}\left(1\cdot 2^{n^2}+2\cdot 2^{\lceil\frac{n^2}{4}\rceil}+1\cdot 2^{\lceil\frac{n^2}{2}\rceil}\right)=\begin{cases}2^{n^2-2}+2^{\frac{n^2}{4}-1}+2^{\frac{n^2}{2}-2} & n\text{偶}\\ 2^{n^2-2}+2^{\frac{n^2}{4}-\frac{1}{4}}+2^{\frac{n^2}{2}-\frac{3}{2}} & n\text{奇}\end{cases}$

评价: 不是很难.

7.7 解: 考虑棋盘的旋转群

不动旋转	1个置换		$(1)^{n^2}$	2^{n^2}
绕中心旋转 $\pm 90°$	2个置换	若 n 为奇数	$(1)(4)^{\frac{n^2-1}{4}}$	$2^{\frac{n^2+3}{4}}$
		若 n 为偶数	$(4)^{\frac{n^2}{4}}$	$2^{\frac{n^2}{4}}$
绕中心旋转 $180°$	1个置换	若 n 为奇数	$(1)(2)^{\frac{n^2-1}{2}}$	$2^{\frac{n^2+1}{2}}$
		若 n 为偶数	$(2)^{\frac{n^2}{2}}$	$2^{\frac{n^2}{2}}$

由 Pólya 定理, n 为奇数, $L=\frac{1}{4}\left[2^{n^2}+2\times 2^{\frac{n^2+3}{4}}+2^{\frac{n^2+1}{2}}\right]=2^{n^2-2}+2^{\frac{n^2-1}{4}}+2^{\frac{n^2-3}{2}}$

n 为偶数 $L=\frac{1}{4}\left[2^{n^2}+2\times 2^{\frac{n^2}{4}}+2^{\frac{n^2}{2}}\right]=2^{n^2-2}+2^{\frac{n^2-4}{4}}+2^{\frac{n^2-4}{2}}$

∴ 方案数为 $\begin{cases}2^{n^2-2}+2^{\frac{n^2-1}{4}}+2^{\frac{n^2-3}{2}}, & n\text{为奇数}\\ 2^{n^2-2}+2^{\frac{n^2-4}{4}}+2^{\frac{n^2-4}{2}}, & n\text{为偶数}\end{cases}$

难度2/5 适合程度4/5

Pólya定理的直接应用, 难度较低

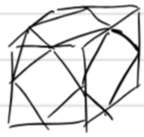
7.8

7.8. 将正六面体的各棱的中点相连，切掉八个角，得到一个新的多面体.

(1) 求该多面体的面数、顶点数、棱数；

(2) 使用红、黄、蓝 3 种颜色对该多面体的面染色，要求 4 个面为红色、4 个面为黄色、其余面为蓝色，并且所有红色面形状均相同、所有黄色面形状也均相同. 允许旋转，求不等价的染色方案数；

(3) 用火柴搭建该多面体，允许旋转，求不等价的方案数.



(1) 原六面体每个顶点对应1个三角形面，每个面对应1个正方形面.

∴ 面数 $f=8+6=14$

每个原顶点对应3条新棱，每新棱对应1原顶点，

∴ 棱数 $e=3\times 8=24$

由欧拉定理 $v+f-e=2$，顶点数 $v=e-f+2=24-14+2=12$

$$\begin{cases} f=14 \\ v=12 \\ e=24 \end{cases}$$

(2)

		$8\times\triangle$	颜色 u 与 v	$6\times\diamond$	颜色 x 与 y
不动	1个	$(1)^8$	$(u+v)^8$	$(1)^6$	$(x+y)^6$
◇◇ 中心转 ±90度	2×3个	$(4)^2$	$(u^4+v^4)^2$	$(1)^2(4)^1$	$(x+y)^2(x^4+y^4)$
◇◇ 中心转 180度	3个	$(2)^4$	$(u^2+v^2)^4$	$(1)^2(2)^2$	$(x+y)^2(x^2+y^2)^2$
◇◇ 顶点转 180度	6个	$(2)^4$	$(u^2+v^2)^4$	$(2)^3$	$(x^2+y^2)^3$
△▽ 中心转 ±120度	2×4个	$(1)^2(3)^2$	$(u+v)^2(u^3+v^3)^2$	$(3)^2$	$(x^3+y^3)^2$

$$P_1(G)=\frac{1}{24}\left[(u+v)^8+6(u^4+v^4)^2+3(u^2+v^2)^4+6(u^2+v^2)^4+8(u+v)^2(u^3+v^3)^2\right]$$

$$P_2(G)=\frac{1}{24}\left[(u+v)^8(x+y)^6+6(u^4+v^4)^2(x+y)^2(x^4+y^4)\right.$$
$$\left.+3(u^2+v^2)^4(x+y)^2(x^2+y^2)^2+6(u^2+v^2)^4(x^2+y^2)^3+8(u+v)^2(u^3+v^3)^2(x^3+y^3)^2\right]$$

① 当染红色和黄色的面均为△时，方案数为 $P_1(G)$ 中 u^4v^4 的系数.

$$N_1=\frac{1}{24}\left[\binom{8}{4\ 4}+6\binom{2}{1\ 1}+3\binom{4}{2\ 2}+6\binom{4}{2\ 2}+8\binom{2}{1\ 1}\binom{2}{1\ 1}\right]=\frac{1}{24}\left[70+12+18+36+16\right]=7$$

② 当涂红色的面为口，黄色为△时

方案数为 $P_2(G)$ 中 $u^4v^4x^4y^2$ 的系数.

$$N=\frac{1}{24}\left[\binom{8}{4}\binom{6}{4}+6\binom{2}{1}\binom{2}{2}\binom{1}{1}+3\binom{4}{2}\left[\binom{2}{2}\binom{2}{1}+\binom{2}{0}\binom{2}{2}\right]+6\binom{4}{2}\binom{3}{2}+8\binom{2}{1}\binom{2}{1}\cdot 0\right]$$

$$=\frac{1}{24}\left[70\cdot 15+12+3\cdot 6\cdot 3+6\cdot 6\cdot 3\right]=\frac{1}{24}\cdot(1050+12+54+108)=51$$

③ 当涂红色的面为△，黄色为口时，情况与②对称.

综合①②③，不等价的方案数为 $7+51\times 2=109$

(3)

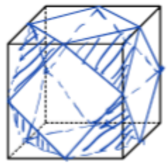
		24条棱
不动	1个	$(1)^{24}$
◇◇ 中心轴±90度	2×3个	$(4)^{\frac{24}{4}}=(4)^6$
◇◇ 中心轴180度	3个	$(2)^{12}$
◇◇ 顶点轴180度	6个	$(2)^{12}$
△▽ 中心轴±120度	2×4个	$(3)^8$

所幸没有轴穿过棱，因为每条棱两侧不对称.

不等价方案数 $N=\frac{1}{24}\left(2^{24}+6\cdot 2^6+9\cdot 2^{12}+8\cdot 2^8\right)=700688$

评价：不是很难.

7.8 解：(1) 顶点为正六面体的棱中点，顶点数 $v=12$



面为 6 个正方形和切掉 8 个角的 8 个截面 面数 $f=14$

由欧拉定理，棱数 $e=v+f-2=24$

(2) 记 6 个正方形面为 $S_1, S_2, \ldots, S_6$，8 个三角形面为 $T_1, T_2, \ldots, T_8$

考虑该多面体的转动群，面的置换表示

① 不动旋转 1 个置换 $(S_1)\cdots(S_6)(T_1)\cdots(T_8)$

不动点：1) 正方形面 4 红 2 蓝 三角形面 4 黄 4 蓝，不动图案 $C_6^4 \cdot C_8^4$

2) 正方形面 4 黄 2 蓝 三角形面 4 红 4 蓝，不动图案 $C_6^4 \cdot C_8^4$ $\qquad c_1(p_1)=2170$

3) 正方形面 6 蓝 三角形面 4 黄 4 红，不动图案 C_8^4

② 正方形面面中心轴转 $\pm 90^\circ$ 2×3 个置换

对于某个置换，$(S_1)(S_6)(S_2 S_3 S_4 S_5)(T_1 T_2 T_3 T_4)(T_5 T_6 T_7 T_8)$

染色 1) 正方形面 4 红 2 蓝 三角形面 4 黄 4 蓝，不动图案 1×2

2) 正方形面 4 黄 2 蓝 三角形面 4 红 4 蓝，不动图案 1×2 $\qquad c_1(p_2)=6$

3) 正方形面 6 蓝 三角形面 4 黄 4 红，不动图案 1×2

③ 正方形面面中心转180° 3个置换

对于某个置换，$(S_1)(S_6)(S_2S_4)(S_3S_5)(T_1T_3)(T_2T_4)(T_5T_7)(T_6T_8)$

染色 1) 正方形面 4红2蓝 三角形面 4黄4蓝，不动图案 $C_3^1\cdot C_4^2$

2) 正方形面 4黄2蓝 三角形面 4红4蓝，不动图案 $C_3^1\cdot C_4^2$ $\qquad C_1(p_3)=42$

3) 正方形面 6蓝 三角形面 4黄4红，不动图案 $1\times C_4^2$

④ 正方形顶点连线(原六面体棱中心连线)转180° 6个置换

对于某个置换，$(S_1S_6)(S_2S_3)(S_4S_5)(T_1T_5)(T_2T_8)(T_3T_7)(T_4T_6)$

染色 1) 正方形面 4红2蓝 三角形面 4黄4蓝，不动图案 $C_3^1\cdot C_4^2$

2) 正方形面 4黄2蓝 三角形面 4红4蓝，不动图案 $C_3^1\cdot C_4^2$ $\qquad C_1(p_4)=42$

3) 正方形面 6蓝 三角形面 4黄4红，不动图案 $1\times C_4^2$

⑤ 三角形面面中心(原六面体对角线)转±120° 2×4个置换

对于某个置换，$(S_1S_4S_5)(S_2S_3S_6)(T_3)(T_5)(T_1T_6T_8)(T_2T_4T_7)$

染色 1) 正方形面 4红2蓝 三角形面 4黄4蓝，不动图案 $0\cdot C_2^1C_2^1$

2) 正方形面 4黄2蓝 三角形面 4红4蓝，不动图案 $0\cdot C_2^1C_2^1$ $\qquad C_1(p_5)=4$

3) 正方形面 6蓝 三角形面 4黄4红，不动图案 $1\times C_2^1\cdot C_2^1$

方案 $l=\left((1\times 2170+6\times6+3\times42+6\times42+8\times4\right)\times\frac{1}{24}=109$ 种

(3) 参考棱的二着色

考虑该多面体的转动群，棱的置换表示

① 不动旋转 1个置换 $(1)^{24}$

② 正方形面面中心转±90° 2×3个置换 $(4)^6$

③ 正方形面面中心转180° 3个置换 $(2)^{12}$

④ 正方形顶点连线(原六面体棱中心连线)转180° 6个置换 $(2)^{12}$

⑤ 三角形面面中心(原六面体对角线)转±120° 2×4个置换 $(3)^8$

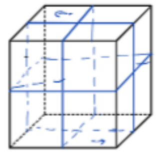
方案数 $l=\left(2^{24}+6\times2^6+3\times2^{12}+6\times2^{12}+8\times2^8\right)\times\frac{1}{24}=700688$

难度5/5 适合程度5/5

该大题综合性较强，三道小题各有侧重，第2小题的讨论需要细心，

难度上很适合作为进阶题

7.9



7.9 解：参考棱的4着色

考虑正方体的转动群，24个小正方形的置换表示

① 不动旋转 1个置换 $(1)^{24}$

② 面面中心转$\pm 90^\circ$ 2×3个置换 $(4)^6$ 面面中心 有4种选择 侧面 4种

③ 面面中心转180° 3个置换 $(2)^{12}$ 每个括号中 有4种选择 侧面 4种

④ 棱中对棱中 转180° 6个置换 $(2)^{12}$ 每个括号中 有4种选择

⑤ 对角线为轴转$\pm 120^\circ$ 2×4个置换 $(3)^8$ 每个括号中 有4种选择

方案数 $l = (4^{24} + 6\times 4^6 + 3\times 4^{12} + 6\times 4^{12} + 8\times 4^8)\times \frac{1}{24} =$

难度4/5 适合程度5/5 该题肖像的方向这一设定比较有新意

带来的不动方案数其实等价于4染色，难度适中

7.9. 现有一个 $2\times 2\times 2$ 正方体，其每个面均划分为 4 个 1×1 小正方形．有 24 张相同的 1×1 大小的肖像画，将其贴到正方体表面上的每个小正方形上．允许旋转，求不等价的方案数．

解. 每张肖像画的方向有 4 种可能性。**正方体 24 个小正方形面的置换群分类：**

不动: $(1)^{24}$，有 1 个，共有 1×4^{24} 个方案。

面面中心转 $\pm 90^\circ$: $(4)^6$，有 6 个，共有 6×4^6 个方案。

面面中心转 180°: $(2)^{12}$，有 3 个，共有 3×4^{12} 个方案。

棱中对棱中转 180°: $(2)^{12}$，有 6 个，共有 6×4^{12} 个方案。

对角线为轴转 $\pm 120^\circ$: $(3)^8$，有 8 个，共有 8×4^8 个方案。

该置换群的阶数为 24。

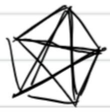
此时由**波利亚定理**可知，共有 $(1\times 4^{24}+6\times 4^6+3\times 4^{12}+6\times 4^{12}+8\times 4^8)/24$ 种不等价的方案数。

主要思路是讨论24个小正方形面的置换情况，这里我认为肖像画的意思就是不会存在转动后相同的图像(否则如果只说图像，可能需要分情况讨论)。

个人感受:感觉这道题目难度适中，是在正方体基础上衍生的，但是确实怕踩坑，而且没什么验证的方法。但如果思路没错的话，这道题应该算适中的计算题。

7.10

7.10. 现有一个包含 5 个节点的无向完全图，各节点之间没有区别．使用 3 种颜色对各条边进行染色，求不等价的染色方案数．



$|e(K_5)|=10$　　$|G|=5!=120$

不动　1　　$(1)^{10}$　　10

2点互换　10　　涉及 $(5-2)=3$ 组边的交换、 $(2)^3\cdot(1)^4$　　7

3点错排　$10\cdot 2=20$　　$(3)^2(3)^1(1)^1=(3)^3(1)^1$　　4

4点错排：$5D_4=45$　{ 两组 D_2　$\frac{C_5^2\cdot C_3^2}{2}=15$　$(2)^2(2)^2(1)^2=(2)^4(1)^2$　　6

　　　　　　　　　　| 不可分解　$45-15=30$　$(4)^1(4)^1(2)^1$　　3

5点错排：$D_5=44$　{ D_2+D_3　$2\cdot C_5^2\cdot C_3^3=20$　$(1)^1(3)^1(6)^1$　　3

　　　　　　　　　　| 不可分解　$44-20=24$　$(5)^2$　　2

$$N=\frac{1}{120}\left[3^{10}+10\cdot 3^7+20\cdot 3^4+15\cdot 3^6+30\cdot 3^3+20\cdot 3^3+24\cdot 3^2\right]=792$$

补充说明：4点错排中不可分解成2组2点错排的置换，若1条边在点置换后有一个顶点不变，则该点的等价类大小为4，剩下等价类大小为2．　例：$p=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$

$E_{e_{14}}=\{e_{14},e_{34},e_{23},e_{12}\}$

$E_{e_{13}}=\{e_{13},e_{24}\}$

评价：有点抽象

7.10. 现有一个包含 5 个节点的无向完全图，各节点之间没有区别．使用 3 种颜色对各条边进行染色，求不等价的染色方案数．

解. 5 节点无向完全图中，点的全置换对应对称群 S_5。

5 个节点的无向完全图的顶点置换与对应边置换:

顶点	边	个数	3 染色方案数
$(1)^5$	$(1)^{10}$	1 个	1×3^{10}
$(1)^3(2)^1$	$(1)^4(2)^3$	10 个	10×3^7
$(1)^1(2)^2$	$(1)^2(2)^4$	15 个	15×3^6
$(1)^2(3)^1$	$(1)^1(3)^3$	20 个	20×3^4
$(1)^1(4)^1$	$(2)^1(4)^2$	30 个	30×3^3
$(2)^1(3)^1$	$(1)^1(3)^1(6)^1$	20 个	20×3^3

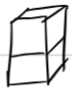
$(5)^1$	$(5)^2$	24 个	24×3^2

该置换群的阶数为 120。

此时由**波利亚定理**可知，共有 $(1 \times 3^{10} + 10 \times 3^7 + 15 \times 3^6 + 20 \times 3^4 + 30 \times 3^3 + 20 \times 3^3 + 24 \times 3^2)/120 = 792$ 种不等价的方案数。

7.11

7.11. 现有一个 $1\times1\times2$ 的小魔方，表面有 10 个色块．该魔方的两个 $1\times1\times1$ 小块间由转轴连接，可以旋转；同时整个魔方也可在空间中任意旋转．使用 2 种颜色对此魔方的每个色块染色，每种颜色分别恰好染 5 个色块，求不等价的染色方案数．



解：上下两块位置不变时，通过旋转转轴 有 4×4 种置换，而上下两块翻转后也有 4×4 种置换，

因此 $|G| = 4\times4\times2 = 32$

上下两块位置不变时的 16 种置换：

以两块中心连线为轴

不动	$(1)^{10}$	1 个	$(x+y)^{10}$
$(0,\pm90°)$、$(\pm90°,0)$	$(1)^6(4)^1$	2×2=4 个	$4(x+y)^6(x^4+y^4)$
$(0,180°)$、$(180°,0)$	$(1)^6(2)^2$	2 个	$2(x+y)^6(x^2+y^2)^2$
$(\pm90°,\pm90°)$	$(1)^2(4)^2$	4 个	$4(x+y)^2(x^4+y^4)^2$
$(\pm90°,180°)$、$(180°,\pm90°)$	$(1)^2(2)^2(4)^1$	2×2=4 个	$4(x+y)^2(x^2+y^2)^2(x^4+y^4)$
$(180°,180°)$	$(1)^2(2)^4$	1 个	$(x+y)^2(x^2+y^2)^4$

当上下两块位置翻转后，无论转轴如何转，每个面都离开了原来的位置，

此时置换的循环分解中不存在长度为 1 的循环置换，并由上述分解知也不会有 (3),(5) 等奇数长度的循环置换，

因此在母函数中对 x^5y^5 的系数贡献为 0，故不一一列出．

(或者考虑染色后，若上下两面颜色不同，则不是此类置换的不动点；若上下两面颜色都为 x，

则侧面上下各 4 个面中 x 的个数必不同 (0-3 或 1-2)，也不是不动点，故此类置换不存在不动点．)

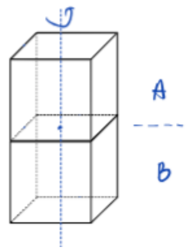
$$P(G) = \frac{1}{32}\Big((x+y)^{10} + 4(x+y)^6(x^4+y^4) + 2(x+y)^6(x^2+y^2)^2 + 4(x+y)^2(x^4+y^4)^2 + 4(x+y)^2(x^2+y^2)^2(x^4+y^4) + (x+y)^2(x^2+y^2)^4 + \text{无关项}\Big)$$

方案数为 $P(G)$ 中 x^5y^5 的系数．

$$N = \frac{1}{32}\left(C_{10}^5 + 4C_2^1C_6^1 + 2[C_2^1C_6^1 + C_6^3C_2^1] + 4C_2^1C_2^1 + 4C_2^1C_2^1 + C_2^1C_4^2 + 0\right)$$

$$= \frac{1}{32}(252 + 48 + 64 + 16 + 16 + 12) = 14$$

评价：不是很难

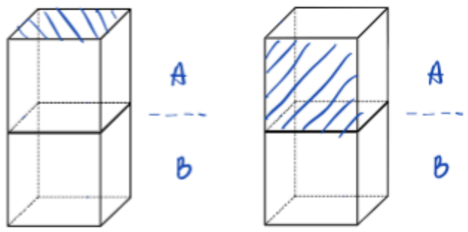


7.11 解：设两种颜色为 C_1、C_2，各染 5 个面

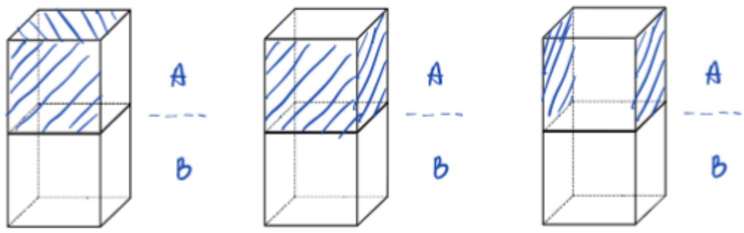
考虑上下 2 个小块（如右图中 A、B）的染 C_1 色的情况（剩下的面染 C_2）

① A：$5\times C_1$　B：$0\times C_1$　方案数 1

② A：$4\times C_1$　B：$1\times C_1$　方案数 2^2



③ A: $3\times C_1$ B: $2\times C_1$ 方案数 3^2



A块上 $2\times C_1$, $1\times C_1$, $0\times C_1$ 分别等价于方案③, ②, ①

总方案数为 $l = 1+2^2+3^2 = 14$

难度4/5 适合程度3/5

该题如果用polya定理讨论会非常复杂，直接讨论方案数则更简单

7.12

7.12解：考虑正方体的转动群，面的置换表示 每个数字有4种方向可贴

(认为2旋转180°后不会和5重合)

① 不动旋转 1个置换 $(1)^6$

② 正方形面面中心轴 ±90° 2×3个置换 $(1)^2(4)^1$ 无不动图象

③ 正方形面面中心轴 180° 3个置换 $(2)^3$ 无不动图象

④ 棱中对棱中 轴 180° 6个置换 $(2)^3$ 无不动图象

⑤ 对角线轴旋转 ±120° 2×4个置换 $(3)^2$ 无不动图象

方案数 $l = (4^6\times 6!)\cdot \frac{1}{24} = 122880$

难度3/5 适合程度4/5

该题难度不高，是Polya定理的直接应用

7.12 每个贴纸都有4个方向，相当于24染色，且4颜色一组，每组恰好用1种，写成母函数形式后发现只有不动置换 $(1)^6$ 对结果有贡献，对应系数为 $\frac{1}{24}(6!\times 4^6)=5!\times 4^5=122880$，即方案数

$\boxed{\text{评价}}$ 也可以固定2后贴其它的，此时不能旋转，共 $5!\times 4^5$ 种，对于此题是最方便的解法