2024春微积分A2期中考试试题　　2024年04月20日

一．填空题 (共10题, 每题3分)

1. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+xy^2}{x^2+y^2+y^4} =$ __________.

答: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+xy^2}{x^2+y^2+y^4} = 1$.

解: 根据等式

$$\frac{x^2+y^2+xy^2}{x^2+y^2+y^4} = 1 + \frac{xy^2-y^4}{x^2+y^2+y^4}$$

以及估计

$$\frac{|xy^2-y^4|}{x^2+y^2+y^4} \le \frac{|x|y^2+y^4}{x^2+y^2} \le |x|+y^2$$

我们立刻得到所求极限为 1.

2. 设 $f(x,y) = e^{x+y^2\sin x} + (x^3-1)\tan\frac{y}{x}$, 则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) =$ __________.

答: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = e$.

解: 由于 $f(x,0) = e^x$, 故 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = e^x$, 进而 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,0) = e^x$. 因此 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = e$.

3. 曲面 $z = \arctan\frac{y}{x}$ 在点 $(1,1,\frac{\pi}{4})$ 处的法线记作 ℓ. 若点 $(2,0,a)\in\ell$, 则 $a =$ __________.

答: $a = \frac{\pi}{4}+2$.

解: 计算得

$$z'_x = \frac{1}{(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad z'_y = \frac{1}{(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

于是曲面在点 $(1,1,\frac{\pi}{4})$ 处的法向量为

$$(-z'_x, -z'_y, 1)\Big|_{(1,1)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \parallel (1,-1,2).$$

故所求法线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 - t, \qquad -\infty < t < +\infty, \\ z = \frac{\pi}{4} + 2t. \end{cases}$$

当点 $(2, 0, a) \in \ell$ 时, 易见 $t = 1$, 故 $a = \frac{\pi}{4} + 2$.

4. 设曲面 S 由参数方程给出 $(u, v) \mapsto r(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v)$, 则曲面 S 上对应参数 $(u, v) = (0, 0)$ 的点处之切平面方程为 _________.

答: $y = 0$.

解: 曲面对应参数 $(u, v) = (0, 0)$ 的点为 $r(0, 0) = (0, 0, 0)$. 为求曲面在点 $(0, 0, 0)$ 处的切平面方程, 我们计算偏导数

$$r'_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad r'_u(0, 0) = (1, 0, 0),$$

$$r'_v = (-u\sin v, u\cos v, 1), \quad r'_v(0, 0) = (0, 0, 1)$$

由此得切平面的法向量为 $r'_u(0, 0) \times r'_v(0, 0) = (1, 0, 0) \times (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$. 因此所求切平面方程为 $y = 0$.

5. 函数 $x^2 + y^2$ 在点 $(1, 1)$ 处, 沿各方向之方向导数的最大值为 _________.

答: 最大值为 $2\sqrt{2}$.

解: 熟知方向导数沿着梯度方向取得最大值, 且最大值就是梯度的模. 故所求最大值为 $\|\nabla(x^2 + y^2)\|_{(1,1)} = \|(2, 2)\| = 2\sqrt{2}$.

6. 函数 $z = \frac{1}{x} + 4x + \frac{x}{y}$ 在点 $(1, 1)$ 处的微分为 $dz\Big|_{(1,1)} =$ _________.

答: 所求微分为 $dz\Big|_{(1,1)} = 4dx - dy$.

解: 对函数 $z=\frac{1}{x}+4x+\frac{x}{y}$ 求偏导得 $z'_x=\frac{-1}{x^2}+4+\frac{1}{y}$, $z'_y=\frac{-x}{y^2}$, 由此得 $z'_x(1,1)=4$, $z'_y(1,1)=-1$. 故所求微分为 $dz\Big|_{(1,1)}=z'_x(1,1)dx+z'_y(1,1)dy=4dx-dy$.

7. 设

$$f(y)=\int_0^{y^2}\frac{\sin(xy)}{x}dx,$$

则 $f'(1)=$__________.

答: $f'(1)=3\sin 1$.

解: 根据变上限求导规则得

$$f'(y)=\frac{\sin(y^3)}{y^2}(2y)+\int_0^{y^2}\Big[\frac{\sin(xy)}{x}\Big]'_y dx=\frac{2\sin(y^3)}{y}+\int_0^{y^2}\cos(xy)dx.$$

故

$$f'(1)=2\sin 1+\int_0^1\cos x dx=3\sin 1.$$

8. 记 $z=z(x,y)$ 为由方程 $z^x=y^z$ 在点 $(x,y,z)=(2,2,2)$ 附近所确定的隐函数, 则偏导数 $z'_x(2,2)=$__________.

答: $z'_x(2,2)=\frac{\ln 2}{\ln 2-1}$.

解: 对方程 $z^x=y^z$ 取对数得

$$x\ln z=z\ln y.$$

对上式关于 x 求偏导得 $\ln z+\frac{x}{z}z'_x=z'_x\ln y$. 令 $(x,y)=(2,2)$, 并注意到 $z(2,2)=2$, 我们得到

$$\ln 2+z'_x(2,2)=z'_x(2,2)\ln 2.$$

由此得

$$z'_x(2,2)=\frac{\ln 2}{\ln 2-1}.$$

9. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微, 且 $f(1,1)=1$, $f'_x(1,1)=2$, $f'_y(1,1)=3$. 定义 $g(x)=f(f(x,x),f(x,x))$, 则 $g'(1)=$ ________.

答: $g'(1)=25$.

解: 根据求偏导数的锁链规则得

$$g'(x)=f'_x(f'_x+f'_y)+f'_y(f'_x+f'_y)$$

令 $x=1$ 得 $g'(1)=2(2+3)+3(2+3)=25$.

10. 积分 $\int_0^1 \frac{x^2-x}{\ln x}dx=$ ________.

答: 积分值为 $\ln 3-\ln 2$.

解: 注意被积函数可以表为

$$\frac{x^2-x}{\ln x}=\int_1^2 x^y dy,$$

故

$$\int_0^1 \frac{x^2-x}{\ln x}dx=\int_0^1 dx\int_1^2 x^y dy.$$

由于函数 x^y 在闭矩形 $[0,1]\times[1,2]$ 上连续, 故可以交换上述积分次序, 即

$$\int_0^1 \frac{x^2-x}{\ln x}dx=\int_0^1 dx\int_1^2 x^y dy=\int_1^2 dy\int_0^1 x^y dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{x^{1+y}}{1+y}\bigg|_{x=0}^{x=1}\right)dy=\int_1^2\frac{dy}{1+y}=\ln(1+y)\Big|_1^2=\ln 3-\ln 2.$$

解答完毕.

二. 解答题 (共7题)

11. (10分) 讨论函数 $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ 在原点 $(x,y)=(0,0)$ 处的连续性, 偏导数的存在性, 以及可微性.

解: (i) 记 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$, 则 $f(x,y)$ 是全平面上有定义的初等函数. 故 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处连续. 也可直接由如下估计

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\sqrt[3]{x^3+y^3}\right|\le |x|+|y|$$

知 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处连续.

(ii) 由于

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\frac{x}{x}=1\to 1,\quad x\to 0,$$

故偏导数 $f'_x(0,0)$ 存在, 且 $f'_x(0,0)=1$. 同理可知偏导数 $f'_y(0,0)$ 存在, 且 $f'_y(0,0)=1$.

(iii) 假设 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处可微, 则依定义有

$$f(x,y)-f(0,0)=f'_x(0,0)x+f'_y(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2}),\quad (x,y)\to(0,0),$$

即 $\sqrt[3]{x^3+y^3}-(x+y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$, $(x,y)\to(0,0)$. 此即

$$\lim_{x^2+y^2\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.\quad (*)$$

易见上述极限式不成立, 因为当动点 (x,y) 在右半平面 $(x>0)$ 沿着直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时,

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}-(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{(\sqrt[3]{2}-2)x}{\sqrt{2}x}=\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}\to\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}.$$

由此可见极限式 (*) 不成立. 因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微. 解答完毕.

12. (10分) 设 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 的邻域内二阶连续可微, 求极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h,2h)-2f(h,h)+f(0,0)}{h^2}.$$

解法一: 考虑 $f(2h,2h)$ 在原点 $(0,0)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开

$$f(2h,2h)=f(0,0)+f'_x(0,0)2h+f'_y(0,0)2h$$

$$+\frac{1}{2}\Big(f''_{xx}(0,0)(2h)^2+2f''_{xy}(0,0)(2h)^2+f''_{yy}(0,0)(2h)^2\Big)+o(h^2)\quad (h\to 0)$$

$$= f(0,0) + 2\left(f'_x(0,0) + f'_y(0,0)\right)h + \left(2f''_{xx}(0,0) + 4f''_{xy}(0,0) + 2f''_{yy}(0,0)\right)h^2$$

$$+o(h^2) \quad (h \to 0).$$

同样展开 $f(h,h)$ 得

$$f(h,h) = f(0,0) + \left(f'_x(0,0) + f'_x(0,0)\right)h$$

$$+\frac{1}{2}\left(f''_{xx}(0,0) + 2f''_{xy}(0,0) + f''_{yy}(0,0)\right)h^2 + o(h^2) \quad (h \to 0).$$

于是

$$f(2h,2h) - 2f(h,h) + f(0,0) = \left(f''_{xx}(0,0) + 2f''_{xy}(0,0) + f''_{yy}(0,0)\right)h^2 + o(h^2) \quad (h \to 0).$$

因此

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h,2h) - 2f(h,h) + f(0,0)}{h^2} = f''_{xx}(0,0) + 2f''_{xy}(0,0) + f''_{yy}(0,0).$$

解法二: 两次使用 L'Hospital 法则得

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h,2h) - 2f(h,h) + f(0,0)}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2f'_x(2h,2h) + 2f'_y(2h,2h) - 2f'_x(h,h) - 2f'_y(h,h)}{2h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4f''_{xx}(2h,2h) + 8f''_{xy}(2h,2h) + 4f''_{yy}(2h,2h) - 2f''_{xx}(h,h) - 4f''_{xy}(h,h) - 2f''_{yy}(h,h)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(4f''_{xx}(0,0) + 8f''_{xy}(0,0) + 4f''_{yy}(0,0) - 2f''_{xx}(0,0) - 4f''_{xy}(0,0) - 2f''_{yy}(0,0)\right)$$

$$= f''_{xx}(0,0) + 2f''_{xy}(0,0) + f''_{yy}(0,0).$$

解答完毕.

13. (12分) 设函数 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上二次连续可微. 对 $\forall\theta \in \mathbb{R}$, 令 $g_\theta(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta)$. 假设

$$\left.\frac{dg_\theta(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0 \quad 且 \quad \left.\frac{d^2 g_\theta(t)}{dt^2}\right|_{t=0} > 0, \quad \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

证明函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值.

证: 令 $x=t\cos\theta$, $y=t\sin\theta$, 则根据复合函数求偏导数的锁链法则得

$$\frac{dg_\theta(t)}{dt}=f'_x(x,y)\cos\theta+f'_y(x,y)\sin\theta.$$

由假设对任意 $\theta\in\mathbb{R}$

$$0=\frac{dg_\theta(t)}{dt}\Big|_{t=0}=f'_x(0,0)\cos\theta+f'_y(0,0)\sin\theta$$

可知 $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$. 故 $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的驻点. 进一步

$$\frac{d^2g_\theta(t)}{dt^2}=\frac{d}{dt}\Big[f'_x(x,y)\cos\theta+f'_y(x,y)\sin\theta\Big]$$

$$=f''_{xx}(x,y)(\cos\theta)^2+f''_{xy}(x,y)\cos\theta\sin\theta+f''_{yx}(x,y)\sin\theta\cos\theta+f''_{yy}(x,y)(\sin\theta)^2$$

$$=[\cos\theta,\sin\theta]H(x,y)\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix},$$

其中

$$H(x,y)=\begin{bmatrix}f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y)\\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y)\end{bmatrix}.$$

根据假设对任意 $\theta\in\mathbb{R}$

$$\frac{d^2g_\theta(t)}{dt^2}\Big|_{t=0}=[\cos\theta,\sin\theta]H(0,0)\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}>0.$$

这说明 Hesse 矩阵 $H(0,0)$ 正定. 因此点 $(0,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的极小值点. 证毕.

14. (10分) 已知椭球面 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1$ 与平面 $x+2y+2z=0$ 的交线是椭圆, 其在 Oxy 平面上的投影曲线 Γ 也是椭圆. 求 Γ 的四个顶点坐标.

解: 我们先求出椭圆 Γ 的方程. 由平面方程 $x+2y+2z=0$ 解得 $z=-\frac{x}{2}-y$. 将其代入椭球面方程 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1$ 即得椭圆 Γ 的方程

$$\begin{cases}x^2+2xy+3y^2=4,\\ z=0.\end{cases}$$

由于椭圆 Γ 关于坐标原点对称, 其中心为 $(0,0)$, 故椭圆 Γ 的四个顶点就是 Γ 上的点 (x,y) 到中心 $(0,0)$ 的距离最远点和最近点. 因此求 Γ 上四个顶点坐标的问题, 归结为求目标函数 x^2+y^2 在约束条件 $x^2+2xy+3y^2=4$ 下的极值问题. 作 Lagrange 函数 $L=x^2+y^2-\lambda(x^2+2xy+3y^2-4)$, 并考虑函数 L 的驻点方程组

$$\begin{cases} 2x-2\lambda(x+y)=0, \\ 2y-2\lambda(x+3y)=0, \\ x^2+2xy+3y^2=4. \end{cases}$$

第一个方程乘以 $(x+3y)$, 减去第二个方程乘以 $(x+y)$ 得 $x^2+2xy-y^2=0$. 这个方程与第三个方程联立得

$$\begin{cases} x^2+2xy-y^2=0, \\ x^2+2xy+3y^2=4. \end{cases}$$

由此解得 $y=1$ 或 $y=-1$. 对 $y=1$, 解得 $x=-1\pm\sqrt{2}$; 对 $y=-1$, 解得 $x=1\pm\sqrt{2}$. 故 Lagrange 函数 L 的所有四个驻点为

$$(x,y)=(-1+\sqrt{2},1),\ (-1-\sqrt{2},1),\ (1+\sqrt{2},-1),\ (1-\sqrt{2},-1).$$

显然这四个点就是所求的椭圆 Γ 的四个顶点及其坐标. 解答完毕.

15. (10分) 根据隐函数定理, 证明方程组 $\begin{cases} x^3+y^3=2z^3 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ 在点 $(x,y,z)=(1,1,1)$ 附近确定了两个 C^∞ 类隐函数 $y=y(x)$, $z=z(x)$, 并证明隐函数 $z(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值.

解: 记 $f(x,y,z)=x^3+y^3-2z^3$, $g(x,y,z)=x+y+z-3$, 则 $(x,y,z)=(1,1,1)$ 满足

$$\begin{cases} f(1,1,1)=0, \\ g(1,1,1)=0, \end{cases}$$

并且

$$\left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}\right|_{(1,1,1)}=\begin{bmatrix} 3y^2 & -6z^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{(1,1,1)}=\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

非奇异, 故根据隐函数定理可知, $\exists\delta > 0$, $\eta > 0$, 以及由 $(1-\delta, 1+\delta)$ 到点 $(1,1)$ 的 η 邻域的隐向量值函数 $(y,z) = (y(x), z(x))$, 满足 $(y(1), z(1)) = (1,1)$, 并且

$$\begin{cases} f(x, y(x), z(x)) \equiv 0, \\ g(x, y(x), z(x)) \equiv 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x^3 + y(x)^3 - 2z(x)^3 \equiv 0, \\ x + y(x) + z(x) - 3 \equiv 0. \end{cases} \tag{1}$$

由于函数 $f, g \in C^\infty$ 因此 $y(\cdot), z(\cdot) \in C^\infty$. 对恒等式 (1) 求导得

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y(x)^2 y'(x) - 6z(x)^2 z'(x) = 0, \\ 1 + y'(x) + z'(x) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

令 $x = 1$ 得

$$\begin{cases} 1 + y'(1) - 2z'(1) = 0, \\ 1 + y'(1) + z'(1) = 0. \end{cases}$$

解之得 $y'(1) = -1$, $z'(1) = 0$. 由此可见 $x = 1$ 是函数 $z(x)$ 的驻点. 对恒等式 (2) 再次求导得

$$\begin{cases} 6x + 3y(x)^2 y''(x) + 6y(x)[y'(x)]^2 - 6z(x)^2 z''(x) - 12z(x)[z'(x)]^2 = 0, \\ y''(x) + z''(x) = 0. \end{cases}$$

令 $x = 1$, 并注意到 $y(1) = 1$, $z(1) = 1$, $y'(1) = -1$, $z'(1) = 0$ 即得

$$\begin{cases} 6 + 3y''(1) + 6 - 6z''(1) = 0, \\ y''(1) + z''(1) = 0. \end{cases}$$

解之得 $y''(1) = -\frac{4}{3}$, $z''(1) = \frac{4}{3}$. 由于 $z'(1) = 0$, $z''(1) > 0$, 故隐函数 $z(x)$ 在 $x = 1$ 处取得严格极小值. 解答完毕.

16. (10分) 计算如下含参变量的广义积分, 并说明必要的依据

$$J(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x} e^{-x} dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

解: 记

$$f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x} e^{-x},$$

则通过补充定义 $f(0,y)=y$ 可使 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续. 进一步 $f'_y(x,y)=\cos(xy)e^{-x}$ 也在 $\mathbb{R}^2$ 上连续. 显然含参变量的广义积分

$$\int_0^{+\infty} f'_y(x,y)dx = \int_0^{+\infty} \cos(xy)e^{-x}dx \quad (*)$$

关于 $y\in\mathbb{R}$ 一致收敛. 事实上 $|f_y(x,y)|\le e^{-x}$, 并且广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ 收敛. 故利用 Weierstrass 一致收敛判别法 (或 M-判别法) 知积分 (*) 关于 $y\in\mathbb{R}$ 一致收敛. 于是根据积分号下求导定理知

$$J'(y)=\int_0^{+\infty} f'_y(x,y)dx=\int_0^{+\infty}\cos(xy)e^{-x}dx.$$

对上式右端的积分两次分部积分即得

$$\begin{aligned}
J'(y) &= \int_0^{+\infty}\cos(xy)e^{-x}dx \\
&= -e^{-x}\cos(xy)\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - y\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin(xy)dx \\
&= 1 + ye^{-x}\sin(xy)\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - y^2\int_0^{+\infty}\cos(xy)e^{-x}dx \\
&= 1 - y^2\int_0^{+\infty}\cos(xy)e^{-x}dx = 1 - y^2 J'(y).
\end{aligned}$$

由此解得 $J'(y)=\frac{1}{1+y^2}$. 这里也可以利用不定积分的计算公式

$$\int \cos(ax)e^{bx}dx = \frac{e^{bx}}{a^2+b^2}\Big(b\cos(ax)+a\sin(ax)\Big)+c$$

得到 $J'(y)=\frac{1}{1+y^2}$. 于是 $J(y)=\arctan y + c$. 由定义知 $J(0)=0$, 故常数 $c=0$. 因此 $J(y)=\arctan y$. 解答完毕.

17. (i) (3分) 记 $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$, 则平面曲线 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, F(x,y)=0\}$ 是熟知的双纽线, 具有无穷大符号 ∞ 的形状. 求函数 $F(x,y)$ 之驻点(即临界点)的个数; (ii) (5分) 对一般在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微的函数 $G(x,y)$, 假设曲线 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, G(x,y)=0\}$ 具有无穷大符号 ∞ 的形状. 问函数 $G(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上至少有多少个驻点? 并证明你的结论.

解: (i) 令

$$\begin{cases} F'_x = 4x(x^2+y^2) - 4x = 0, \\ F'_y = 4y(x^2+y^2) + 4y = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x(x^2+y^2-1) = 0, \\ y(x^2+y^2+1) = 0. \end{cases}$$

由此可解得函数 F 有且仅有 3 个驻点 $(x,y) = (0,0), (-1,0), (1,0)$.

(ii) 设函数 $G(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续可微, 假设曲线 $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, G(x,y) = 0\}$ 具有无穷大符号 ∞ 的形状, 则函数 $G(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上至少有 3 个驻点. 理由如下.

(1) 首先可断言, 曲线 Γ 的自相交点, 即无穷大符号 ∞ 的交点是函数 $G(x,y)$ 一个驻点. 若不然, 即交点不是驻点, 亦即梯度 (G'_x, G'_y) 在交点处非零, 则两个一阶偏导数 G'_x 和 G'_y 至少有一个在交点处非零. 根据隐函数定理知, 曲线 Γ 在交点附近可表为函数曲线 $y = f(x)$ 或 $x = g(y)$, 而不是自相交的曲线. 故断言成立.

(2) 其次我们考虑曲线 Γ, 即无穷大符号 ∞ 形状的曲线所围的两个有界闭区域, 也就是位于交点左右两侧的有界闭区域, 分别记作 D_1 和 D_2. 显然函数 $G(x,y)$ 在闭区域 D_1 的内部或者恒大于零, 或者恒小于零. 对于前者, $G(x,y)$ 在有界闭区域 D_1 上的最大值必大于零, 且最大值点必为内点, 而这个内点必为驻点. 对于后者, $G(x,y)$ 在有界闭区域 D_1 上的最小值必小于零, 且最小值点必为内点, 而这个内点必为 $G(x,y)$ 的驻点. 因此 G 在闭域 D_1 的内部至少存在一个驻点. 同理 G 在闭域 D_2 的内部也至少存在一个驻点. 故 G 在 $\mathbb{R}^2$ 上至少存在 3 个驻点. 解答完毕.