第一次习题课参考解答（多元函数极限、连续、偏导数及可微性）

1. 讨论下列函数在$(0,0)$点的累次极限与二重极限是否存在，若存在求其值，若不存在，说明理由。

(1) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$，$(x,y)\in\{(x,y)\,|\,x+y\neq 0\}$.

解：直接计算可得$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1$，且$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1$. 由于两个累次极限存在但不等，故$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在。

(2) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$，$(x,y)\neq(0,0)$.

解：令$y=x$，则$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x+1}=0$；取$y=x^3-x^2$，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}(1+x^3(x-1)^3)=1,$$

即，动点沿着两条不同的曲线趋近坐标原点，函数极限存在但不等，因此$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在. 而$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$.

(3) $f(x,y)=\dfrac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{x^2+y^2}$，其中$\alpha,\beta\geq 0$，且$\alpha+\beta>2$.

解：因为$\alpha,\beta\geq 0$，且$\alpha+\beta>2$，$|x|\leq(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$，$|y|\leq(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$，因此

$$0\leq\frac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{x^2+y^2}\leq\frac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{x^2+y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta-2}{2}}\to 0,\quad (x,y)\to(0,0),,$$

所以$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{x^2+y^2}=0.$

任意固定$x\neq 0$，因为$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{x^2+y^2}=0$，因此$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{x^2+y^2}=0$，类似地，有

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{x^2+y^2}=0.$$

2. 解答下列各题：

(1) 讨论$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$是否存在？

解：取 $y=x+1$, 则 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2}=\infty$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$ 不存在。

(2) 讨论 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ 是否存在?

解：当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$0\le\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\le\left|\frac{x}{x^2-xy+y^2}\right|+\left|\frac{y}{x^2-xy+y^2}\right|$$

$$=\frac{|x|}{\frac{3}{4}x^2+(\frac{1}{2}x-y)^2}+\frac{|y|}{\frac{3}{4}y^2+(\frac{1}{2}y-x)^2}\le\frac{4}{3}\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right),$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0.$

(3) 讨论 $f(x,y)=e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$ 在 $x\to+\infty,\ y\to-\infty$ 时的重极限与累次极限是否存在?

解：取 $y=-x$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(-2x^2)$ 不存在，故 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}f(x,y)$ 不存在。

任意固定 $y<0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,y)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$ 不存在，从而 $\lim\limits_{y\to-\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,y)$ 不存在；任意固定 $x>0$，因为

$$\lim_{y\to-\infty}f(x,y)=\lim_{y\to-\infty}e^{x^2-y^2}\sin(2xy)=0,$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to-\infty}f(x,y)=0$.

3. 计算下列函数极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}$;　　　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$.

解：(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}=\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(1+(x+y-1))^{\frac{1}{x+y-1}\cdot(x+y+1)}=e^2$.

(2) 由于

$$0\le\left|(x+y)\ln(x^2+y^2)\right|\le\left(|x|+|y|\right)\left|\ln(x^2+y^2)\right|\le\sqrt{2(x^2+y^2)}\left|\ln(x^2+y^2)\right|,$$

令 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，有 $\rho\to0$，且

$$\sqrt{2(x^2+y^2)}\left|\ln(x^2+y^2)\right| = 2\sqrt{2}\rho\left|\ln\rho\right| \to 0 \ \ (\rho\to 0),$$

故双侧趋近定理表明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)=0$.

解法二、因为 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\ln(x^2+y^2)=2\lim\limits_{y\to 0}y\ln y=0$，因此有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)=0.$$

4. 设 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数 $f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=-\infty.$ 证明：对任意常数 C，$f(x,y)=C$ 的解集合是有界闭集。

证明: 显然, 空集是有界闭集. 因此, 对任意常数 C，不妨设 $D=\left\{(x,y): f(x,y)=C\right\}\neq\varnothing$.

首先证明 D 是闭集。任取 D 中的收敛点列 $\left\{(x_n,y_n)\right\}$ 使得 $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0),\ n\to\infty.$ 则有 $f(x_n,y_n)=C$. 令 $n\to\infty,$ 由 f 的连续性，有

$$f(x_0,y_0)=\lim_{n\to+\infty}f(x_n,y_n)=C.$$

故 $(x_0,y_0)\in D.$ 所以 D 是闭集。

下证 D 是有界集。由 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=-\infty$ 可知，存在 $r>0$ 使得

$$f(x,y)<C-1,\quad \forall(x,y)\in\left\{(x,y)\mid x^2+y^2>r^2\right\}.$$

所以对 $\forall(x,y)\in D,$ 有 $x^2+y^2\le r^2$，故 D 是有界集。

5. 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某个邻域内有定义， $f(0,0)=0$，且

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$，其中 a 为常数。证明:

(1) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续;

(2) 若 $a\neq-1$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，但不可微;

(3) 若 $a=-1$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微。

证明: 因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$，因此

$$\frac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a+o(1)，\ （(x,y)\to(0,0)）$$

故 $f(x,y)=(a+1)\sqrt{x^2+y^2}+o(\sqrt{x^2+y^2})$， $(x,y)\to(0,0)$.

(1) 由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$, 因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续。

(2) 若 $a\neq-1$，容易看出 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续。由于

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(a+1)|x|+o(|x|)}{x}$$

不存在，同理可知 $f_y'(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$ 不存在，因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微。

(3) 若 $a=-1$，则 $f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$，且

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{o(|x|)}{x}=0,$$

同理求得 $f_y'(0,0)=0$，因此

$$f(x,y)-f(0,0)=f_x'(0,0)\mathrm{d}x+f_y'(0,0)\mathrm{d}y+o(\sqrt{x^2+y^2}),\ (x,y)\to(0,0),$$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微.

6. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的连续性及可微性。

解：(1) 因为

$$\left|\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)\right|\le\sqrt{|xy|}\to0,\quad (x,y)\to(0,0),$$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续。

(2) 因为 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，且

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(\Delta y,0)-f(0,0)}{\Delta y}=0,$$

因此

$$\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0{,}0)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0)\Delta y\right)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(\Delta x^2+\Delta y^2).$$

取 $\Delta y=\Delta x$，则 $\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)\to\frac{1}{\sqrt{2}}$ （$\Delta x\to 0$），

所以当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时，$\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)$ 不是无穷小量。因此 $f(x,y)$ 在 $(0{,}0)$ 点不可微。

7. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内有定义，若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，证明：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微。

证明：因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，记 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=a$．由于函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，因此

$$f(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}(x^2+y^2)$$

$$=\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\right)\cdot\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\right)=0.$$

从而 $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)}{x^2}\lim\limits_{x\to0}x=0,$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{x\to0}\frac{f(0,y)}{y^2}\lim_{x\to0}y=0,$$

这样

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\right)\cdot\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\right)=0,$$

故，由函数可微的定义知，函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微。

8. 设函数 $f(x,y)$ 的两个偏导函数存在，且这两个偏导函数在点 $(0,0)$ 处连续。

已知 $f'_x(0,0)=3,\quad f'_y(0,0)=4.$ 求极限 $\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t}.$

解：因为函数 $f(x,y)$ 的两个偏导函数 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，因此由可微的充分条件知，函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，故

$$f(t,t)-f(0,0)=f_x'(0,0)t+f_y'(0,0)t+o(t),\ (t\to 0)$$

所以 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,t)-f(0,0)}{t}=f_x'(0,0)+f_y'(0,0)+\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{o(t)}{t}=7.$

9. 求解下列问题：

(1) 设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\sin y+\dfrac{1}{1-xy}$，且 $f(1,y)=\sin y$，求 $f(x,y)$.

解：对 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\sin y+\dfrac{1}{1-xy}$ 两边关于 x 求不定积分，得

$$f(x,y)=x\sin y-\frac{1}{y}\ln\left|1-xy\right|+g(y).$$

已知 $f(1,y)=\sin y$，所以 $g(y)=\dfrac{1}{y}\ln\left|1-y\right|$，故

$$f(x,y)=x\sin y-\frac{1}{y}\ln\left|1-xy\right|+\frac{1}{y}\ln\left|1-y\right|.$$

(2) 设函数 $f(x,y)$ 的全微分为 $df(x,y)=e^{xy}(y\sin x+\cos x)dx+xe^{xy}\sin x dy$，且 $f(0,0)=1$，求 $f(x,y)$.

解：由 $df(x,y)=e^{xy}(y\sin x+\cos x)dx+xe^{xy}\sin x dy$ 可知，

$$f_x'(x,y)=e^{xy}(y\sin x+\cos x)，且\ f_y'(x,y)=xe^{xy}\sin x.$$

对 $f_y'(x,y)=xe^{xy}\sin x$ 两边关于 y 求不定积分，得 $f(x,y)=e^{xy}\sin x+g(x)$，两边关于 x 求偏导，有 $f_x'(x,y)=ye^{xy}\sin x+e^{xy}\cos x+g'(x)$，又知

$$f_x'(x,y)=e^{xy}(y\sin x+\cos x),$$

因此 $g'(x)=0$，故 $g(x)=c$ 且 $f(x,y)=e^{xy}\sin x+c$. 由于 $f(0,0)=1$，所以 $c=1$ 且 $f(x,y)=e^{xy}\sin x+1$.

10. 设函数 $f(x,y)$ 的两个偏导函数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 U 内存在且有界，证明：

$f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续。

证明：因为函数 $f(x,y)$ 的两个偏导函数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 U 内存在且有界，

因此存在 $M>0$ 使得对任意的 $(x,y)\in U$，有 $\left|f_x'(x,y)\right|\le M$，$\left|f_y'(x,y)\right|\le M$.

任取 $(x,y)\in U$. 由一元函数的微分中值定理，存在 θ_1，$\theta_2\in(0,1)$ 使得

$$\begin{aligned}\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|&\le\left|f(x,y)-f(x,y_0)\right|+\left|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\right|\\&=\left|f_y'(x,y_0+\theta_1(y-y_0))(y-y_0)\right|+\left|f_y'(x_0+\theta_2(x-x_0),y_0)(x-x_0)\right|\\&\le M(\left|y-y_0\right|+\left|x-x_0\right|)\end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$. 所以 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续。

11. 给定单位向量 $\vec{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$，设 l 是以 $P_0(x_0,y_0)$ 为顶点，$\vec{v}$ 为方向向量的射线，则称极限

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in l}}f(x,y)=\lim_{t\to0^+}f(x_0+t\cos\theta,y_0+t\sin\theta)$$

为函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点沿着方向 $\vec{v}$ 的方向极限。讨论下列函数在 $(0,0)$ 点的方向极限及二重极限，并总结二者的关系。

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\quad(x,y)\ne(0,0);$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}, & y\ne0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$

解：(1) 对任意的单位向量 $\vec{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$f(t\cos\theta,t\sin\theta)=\cos2\theta$, 故

$$\lim_{t\to0^+}f(t\cos\theta,t\sin\theta)=\cos2\theta,$$

所以函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点沿着方向 $\vec{v}$ 的方向极限是 $\cos2\theta$. 故函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点沿着不同方向的方向极限不相等，从而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在。

(2) 对任意的单位向量 $\vec{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$，当 $\theta\ne0,\pi$ 时，

$$f(t\cos\theta,t\sin\theta)=\frac{t\cos^2\theta}{\sin\theta},$$

所以 $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t\cos\theta, t\sin\theta)=0.$ 当 $\theta=0,\pi$ 时， $f(t\cos\theta, t\sin\theta)=f(\pm t,0)=0,$ 故 $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t\cos\theta, t\sin\theta)=0.$ 因此函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点沿着任何方向的方向极限都存在且都等于零。

由于 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^3}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^3}=\infty$，所以二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在。

二重极限与方向极限的关系：函数在一点的二重极限存在，则在该点沿着任意方向的方向极限都存在且都等于二重极限的值；反之，若沿着两个不同方向的方向极限存在但不等，则二重极限不存在，即便函数在该点沿着任意方向的方向极限都存在且相等，函数在该点的二重极限也不一定存在，例如本题(2)中的函数，原因是它沿不同方向趋于零的快慢程度不同，沿着靠近 Oy 轴的方向趋于零的速度快，而沿着靠近 Ox 轴的方向趋于零的速度慢，以至于当 $\theta\to 0,\pi$ 时，函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点沿着方向 $\vec{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 趋于零的速度无限地变慢。

不难证明，若 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点沿任何方向的方向极限都存在且相等，而且沿不同方向收敛的快慢一致，则 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点的二重极限存在且等于这些方向极限。

12.设 $f(x,y)$ 定义在 $I_1=\{(x,y)\colon\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ 上，且在 $I_0=\{(x,0)\colon\ 0\le x\le 1\}$ 上连续，证明：$\exists\delta>0$ 使得 $f(x,y)$ 在 $I_\delta=\{(x,y)\colon\ 0\le x\le 1, 0\le y\le\delta\}$ 上有界。

证明：反证法。假设对 $\forall\delta>0,\ f(x,y)$ 在 I_δ 上都无界，则 $\exists(x_n,y_n)\in I_{\frac{1}{n}}$ 使得 $\left|f(x_n,y_n)\right|>n$. 由于 $\{(x_n,y_n)\}$ 有界，因此存在收敛子列 $\left\{(x_{n_k},y_{n_k})\right\}$，设 $(x_{n_k},y_{n_k})\to(x_0,y_0)\ \ (k\to\infty)$, 则 $x_0\in[0,1],\ y_0=0$, 由于 $f(x,y)$ 在 I_0 上连续，因此 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k},y_{n_k})=f(x_0,0)$，这与 $\left|f(x_{n_k},y_{n_k})\right|>n_k$ 矛盾，结论得证。证毕

====================

以下供学有余力的同学参考：

13. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的去心邻域内有定义，满足下列条件：

(1) 存在 x_0 的去心邻域 $\{x \mid 0<|x-x_0|<r\}$，使得对 $\forall x\in\{x \mid 0<|x-x_0|<r\}$，

$\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=g(x)$ 存在；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=h(y)$ 在 y_0 的某个去心邻域 $\{y \mid 0<|y-y_0|<\eta\}$ 内一致，即

对 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$ 使得对 $\forall x\in U_o(x_0,\delta)$，及对 $\forall y\in\{y \mid 0<|y-y_0|<\eta\}$，有

$|f(x,y)-h(y)|<\varepsilon.$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{y\to y_0} h(y)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

证明：因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=h(y)$ 在 y_0 的某个去心邻域 $\{y \mid 0<|y-y_0|<\eta\}$ 内一致，所以

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ (\delta<r),\ \forall x',x''\in U_0(x_0,\delta),\quad 0<|y-y_0|<\eta,$$

都有

$$|f(x',y)-f(x'',y)|<\varepsilon.$$

对上述不等式在 $y\to y_0$ 取极限，则由第一个条件得 $|g(x')-g(x'')|\le\varepsilon$，故由函数极限的柯西收敛原理知，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，记 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$. 因此

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta_1>0,\quad \forall x,\ 0<|x-x_0|<\delta_1,\ |g(x)-A|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

又由条件(2)知，对上述给定的 $\varepsilon>0$，

$$\exists\delta_2>0,\ \forall x,\ 0<|x-x_0|<\delta_2,\ 0<|y-y_0|<\eta,$$

有 $|h(y)-f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则 $\delta>0$. 取定 $\overline{x}\in\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$. 由条件(1)，对上述给定的 $\varepsilon>0$，$\exists\eta_1\in(0,\eta),\ s.t.\ \forall y,\ 0<|y-y_0|<\eta_1$，有

$$|f(\overline{x},y)-g(\overline{x})|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

从而对 $\forall y$，当 $0<|y-y_0|<\eta_1$ 时，有

$$|h(y)-A|\le|h(y)-f(\overline{x},y)|+|f(\overline{x},y)-g(\overline{x})|+|g(\overline{x})-A|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{y\to y_0} h(y)=A$. 证毕

课堂思考题：二元函数关于两个变量分别连续，附加什么条件可得到函数的连续性？

14. 证明：若函数 $f(x,y)$ 关于两个变量分别连续，且对其中的一个变量单调，则 $f(x,y)$ 是连续函数。

证明：设 $f(x,y)$ 定义在集合 D 上，且关于变量 y 单调增加。任取 $P_0(x_0,y_0)\in D$. 因为 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 关于变量 y 连续，故存在 $\delta_1>0\ s.t.|y-y_0|\le\delta_1$ 时，有

$$|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

特别地，$|f(x_0,y_0-\delta_1)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|f(x_0,y_0+\delta_1)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 因为 $f(x,y)$ 在 $P_1(x_0,y_0-\delta_1)$ 和 $P_2(x_0,y_0+\delta_1)$ 关于 x 连续，故存在 $\delta_2>0\ s.t.|x-x_0|\le\delta_2$ 时，有

$$|f(x,y_0-\delta_1)-f(x_0,y_0-\delta_1)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x,y_0+\delta_1)-f(x_0,y_0+\delta_1)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$，当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\le\delta$ 时，因 $f(x,y)$ 关于变量 y 单调增加，故

$$f(x,y)\le f(x,y_0+\delta_1)<f(x_0,y_0+\delta_1)+\frac{\varepsilon}{2}<f(x_0,y_0)+\varepsilon,$$

同理可证， $f(x,y)>f(x_0,y_0)-\varepsilon$. 故当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\le\delta$ 时，有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$， 所以 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 连续。证毕

15. 若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上关于两个变量分别连续，证明：在下列条件之一满足时，

$f(x,y)$ 在区域 D 上处处连续。

(1) 对其中的一个变量（例如 y ）满足 Lipschitz 条件：即存在

$L>0\ s.t.\ \forall(x,y_1),\ (x,y_2)\in D$，有 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$.

(2) 对其中的一个变量（例如 x ）连续，关于另一个变量（例如 y ）是一致连续的，即对

$\forall x_0,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$ （只与 $\varepsilon,\ x_0$ 有关，而与 y 无关），当 $|x-x_0|<\delta$ 时，对任意的 y，

有 $|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon$.

证明：任取 $(x_0,y_0)\in D$.

(1) 对任意的 $\varepsilon>0$，因为 $f(x,y_0)$ 连续，因此存在 $\delta_1>0$，当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时，有

$\left|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 又当$\left|y-y_0\right|<\delta_2=\dfrac{\varepsilon}{2L}$时，有

$$\left|f(x,y)-f(x,y_0)\right|\le L\left|y-y_0\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取$\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$，则当$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\le\delta$时，有$\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|<\varepsilon$.

故$f(x,y)$在(x_0,y_0)连续，因为$(x_0,y_0)\in D$是任意的，所以$f(x,y)$在区域D上处处连续。

(2) 对任意的$\varepsilon>0$，因为$f(x_0,y)$连续，因此存在$\delta_1>0$，当$\left|y-y_0\right|<\delta_1$时，有

$\left|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 又由于$f(x,y)$对$x$连续且关于$y$是一致连续的，

所以存在$\delta_2>0$，当$\left|x-x_0\right|<\delta_2$时，对任意的$y$满足$\left|y-y_0\right|<\delta_1$，有

$$\left|f(x,y)-f(x_0,y)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取$\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$，则当$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\le\delta$时，有$\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|<\varepsilon$.

故$f(x,y)$在$(x_0,y_0)\theta$连续，因为$(x_0,y_0)\in D$是任意的，因此$f(x,y)$在区域D上处处连续。证毕

16. 证明：若函数$f'_x(x,y)$在(x_0,y_0)连续，且$f'_y(x_0,y_0)$存在，则$f(x,y)$在(x_0,y_0)可微。

证明：假设$f(x,y)$在$\mathbf{x}_0=(x_0,y_0)$点的邻域G内偏导函数$\dfrac{\partial f}{\partial x}$存在，且在$\mathbf{x}_0$点连续。设$\Delta x,\ \Delta y$充分小使得$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y),\ (x_0,y_0+\Delta y)\in G$，则$f(x,y)$在$\mathbf{x}_0=(x_0,y_0)$的全改变量

$$\begin{aligned}\Delta f&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]\end{aligned}$$

对于第一个括号内的表达式，固定$y_0+\Delta y$，关于x的一元函数$f(x,y_0+\Delta y)$在以x_0和$x_0+\Delta x$为端点的区间上运用拉格朗日微分中值定理，则存在$\theta_1\in(0,1)$使得

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)=f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x.$$

因为 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 连续，因此 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f_x'(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) = f_x'(x_0, y_0)$，从而

$$f_x'(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) = f_x'(x_0, y_0)+\alpha,$$

其中 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \alpha = 0$.

对于第二个括号，由于 $f_y'(x_0, y_0)$ 存在，因此由偏导数的定义，

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f_y'(x_0, y_0),$$

从而 $f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0) = f_y'(x_0, y_0)\Delta y+\beta\Delta y$，其中 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\beta = 0$. 所以

$$\Delta f = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y.$$

因为

$$0\le\frac{|\alpha\Delta x+\beta\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\le|\alpha|\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+|\beta|\frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\le|\alpha|+|\beta|\to 0\quad\big((\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\big),$$

所以 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$. 故 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ 可微. 证毕