第七次习题课参考解答 三重积分及重积分的应用

1. 计算下列各题:

(1) 设V是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和球面$x^2+y^2+z^2=R^2$所围成的区域，求三重积分$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$.

解：用球坐标系，令$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi, \end{cases}$

则$V=\{(\rho,\varphi,\theta)\mid\ 0\le\rho\le R,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ 0\le\theta\le 2\pi\}$，故

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\rho^4 d\rho\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi=\frac{\pi R^5}{5}(2-\sqrt{2}).$$

(2) 求$\iiint\limits_\Omega (1+x^2+y^2)zdxdydz$，其中$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\le z\le H\right\}$.

解：用柱坐标系，$\Omega=\left\{(r,\theta,z)\mid 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le H,\ r\le z\le H\right\}$，故

$$\iiint\limits_\Omega (1+x^2+y^2)zdxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^H dr\int_r^H(1+r^2)zrdz=\pi\left(\frac{H^4}{4}+\frac{H^6}{12}\right).$$

(3) 设$f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，令$F(t)=\iiint\limits_\Omega\left(z^2+f(x^2+y^2)\right)dxdydz$，其中

$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid 0\le z\le h,\ \ x^2+y^2\le t^2\right\}\quad(t>0)$. 求$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}$.

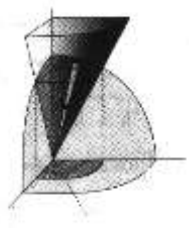
解：在柱坐标系下，$\Omega=\left\{(r,\theta,z)\mid 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le t,\ 0\le z\le h\right\}$，

$$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t rdr\int_0^h\left[z^2+f(r^2)\right]dz=\frac{\pi h^3}{3}t^2+2\pi h\int_0^t rf(r^2)dr,$$

由洛必达法则，$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}=\frac{\pi h^3}{3}+2\pi h\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\int_0^t rf(r^2)dr}{t^2}=\frac{\pi h^3}{3}+\pi hf(0)$.

(4) 求三重积分:$I=\iiint\limits_\Omega(x+y+z)dxdydz$，其中

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}.$$



解：由对称性可知$\iiint\limits_\Omega xdxdydz=0$和$\iiint\limits_\Omega ydxdydz=0$. 因此所求积分为$I=\iiint\limits_\Omega zdxdydz$. 以下我们分别用不同方法来求积分.

方法一、在球坐标系下，令$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi, \end{cases}$

则$\Omega=\{(\rho,\varphi,\theta)\mid\ 0\le\rho\le 1,\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4},\ 0\le\theta\le 2\pi\}$，故

$$I=\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\rho^2\sin\varphi)(\rho\cos\varphi)d\rho=\frac{\pi}{8}.$$

方法二、利用柱坐标系，令$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z,\end{cases}$

则$\Omega=\left\{(r,\theta,z)\mid 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ r\le z\le\sqrt{1-r^2}\right\}$，故

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1/\sqrt{2}}rdr\int_r^{\sqrt{1-r^2}}zdz=\frac{\pi}{8}.$$

（5）设 $f(x)\in C^1(\mathbb{R})$ 满足 $\int_{-1}^1 xf(x)dx=1$ 且 $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$．计算 $\iiint\limits_V(5x^3+f'(z)+3)dxdydz.$

解：因为

$$\iiint\limits_V f'(z)dxdydz=\int_{-1}^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z^2}f'(z)dxdy=\pi\int_{-1}^1 f'(z)(1-z^2)dz$$

$$=\pi f(z)(1-z^2)\Big|_{-1}^1+2\pi\int_{-1}^1 zf(z)dz=2\pi,$$

$\iiint\limits_V(5x^3+3)dxdydz=5\iiint\limits_V x^3dxdydz+3\iiint\limits_V dxdydz=4\pi$，故

$$\iiint\limits_V(5x^3+f'(z)+3)dxdydz=\iiint\limits_V(5x^3+3)dxdydz+\iiint\limits_V f'(z)dxdydz=6\pi.$$

2. 计算下列立体的体积：

（1） 求由曲面$S:(x^2+y^2)^2+z^4=z$所围立体Ω的体积。

解：记立体Ω的体积为$V(\Omega)$．对$\forall z\in[0,1]$，由观察可知，经过$(0,0,z)$垂直于z轴的平面去截立体Ω所得的截面为圆盘D_z，圆心位于$(0,0,z)$，半径为$r_z=(z-z^4)^{1/4}$，其面积为$\pi(z-z^4)^{1/2}$．于是

$$V(\Omega)=\iiint\limits_\Omega dxdydz=\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int_0^1\pi(z-z^4)^{1/2}dz=\frac{2\pi}{3}\int_0^1(1-u^2)^{1/2}du=\frac{\pi^2}{6}.$$

（2） 求由六个平面$3x-y-z=\pm1$，$-x+3y-z=\pm1$，$-x-y+3z=\pm1$所围立体Ω的体积。

解：作线性变换 $u=3x-y-z$，$v=-x+3y-z$，$w=-x-y+3z$，则

$\Delta=\{(u,v,w)\mid \ |u|\le 1,\ \ |v|\le 1,\ \ |w|\le 1\}$ 且

$\det\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{vmatrix}=16$．于是所求立体 Ω 体积

$$V(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=\iiint\limits_{\Delta}\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw=\frac{1}{16}V(\Delta)=\frac{1}{2}.$$

（3）求曲面 $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 所围空间几何体 Ω 的体积。

解：做变换，令

$$\begin{cases}x=a\rho\sin\varphi\cos\theta\\y=b\rho\sin\varphi\sin\theta\\z=c\rho\cos\varphi,\end{cases}$$

则 Ω 的边界的方程为 $\rho=\sin\varphi$，直角坐标系下的空间区域 Ω 变为 $O-\rho\varphi\theta$ 坐标系下的区域：

$$\Omega_{\rho\varphi\theta}=\{(\rho,\varphi,\theta)\,|\,0\le\rho\le\sin\varphi,0\le\varphi\le\pi,0\le\theta\le 2\pi\},$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}\right|\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=abc\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta,$$

故

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}dxdydz&=abc\iiint\limits_{\Omega_{\rho\varphi\theta}}\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta\\&=abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\sin\varphi}\rho^2 d\rho\\&=\frac{abc}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin^4\varphi d\varphi\\&=\frac{abc}{3}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2 abc}{4}.\end{aligned}$$

（4）设 $a>0,b>0,c>0$．计算曲面 $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2+\left(\dfrac{z}{c}\right)^2=1$ 与三个坐标面在第一卦限所围立体的体积。

解：做广义球坐标变换，令 $\begin{cases}x=a\rho\sin\varphi\cos^2\theta\\y=b\rho\sin\varphi\sin^2\theta\\z=c\rho\cos\varphi,\end{cases}$

则 $\left|\det\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}\right|=2abc\rho^2\sin\varphi\sin\theta\cos\theta$．在新坐标系中，曲面方程为 $\rho=1$，在第一卦限，$\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}],\varphi\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，于是所求立体的体积

$$V=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz=2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1\rho^2\sin\varphi\sin\theta\cos\theta d\rho=\frac{1}{3}abc.$$

3. 计算下列三重积分的值:

（1）$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)dxdydz$，其中$\Omega$是球面$x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$所包围的空间区域。

解：做变换，令

$$\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$$

则Ω的边界曲面的方程为$\rho=2a\cos\varphi$，直角坐标系下的空间区域Ω变为$O-\rho\varphi\theta$坐标系下的区域：

$$\Omega_{\rho\varphi\theta}=\{(\rho,\varphi,\theta)\,|\,0\le\rho\le 2a\cos\varphi,0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},0\le\theta\le 2\pi\},$$

$$\mathrm{dxdydz}=\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}\right|\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta,$$

故

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)dxdydz&=\iiint\limits_{\Omega_{\rho\varphi\theta}}(\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\rho^2\cos^2\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta\\&=\iiint\limits_{\Omega_{\rho\varphi\theta}}(\sin^2\varphi\cos^2\theta+\cos^2\varphi)\rho^4\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\pi}(\sin^2\varphi\cos^2\theta+\cos^2\varphi)d\theta\int_0^{2a\cos\varphi}\rho^4d\rho\\&=\frac{32a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^5\varphi(\pi\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cdot 2\pi)d\varphi\\&=\frac{32\pi a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^5\varphi(\sin^2\varphi+2\cos^2\varphi)d\varphi\\&=\frac{-32\pi a^5}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi(1+\cos^2\varphi)d(\cos\varphi)\\&=\frac{-32\pi a^5}{5}(-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})=\frac{28\pi a^5}{15}.\end{aligned}$$

（2）$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz,\quad \Omega=\{(x,y,z)\,|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$.

解：令

$$\begin{cases}x=a\rho\cos\theta\sin\varphi\\ y=b\rho\sin\theta\sin\varphi\\ z=c\rho\cos\varphi\end{cases}$$

则Ω的边界曲面的方程为$\rho=1$，直角坐标系下的空间区域Ω变为$O-\rho\varphi\theta$坐标系下的区域：

$$\Omega_{\rho\varphi\theta}=\{(\rho,\varphi,\theta)\,|\,0\le\rho\le 1,0\le\theta\le 2\pi,0\le\varphi\le\pi\},$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=abc\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

故

$$\iiint_\Omega\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^\pi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 abc\sqrt{1-\rho^2}\rho^2\mathrm{d}\rho$$

$$=4\pi abc\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\rho^2\mathrm{d}\rho\overset{\rho=\sin u}{=}4\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\sin^2 u\mathrm{d}u$$

$$=\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4u}{2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\pi^2 abc}{4}.$$

（3） $\iiint\limits_\Omega x^2dxdydz$，其中$\Omega$由曲面$z=y^2$， $z=4y^2$及平面$z=x, z=2x, z=0, z=3$围成。

解：空间Ω由关于Oxz坐标平面对称的两个区域组成，设Ω_1是第一卦限中的区域，则 $\iiint\limits_\Omega x^2dxdydz=2\iiint\limits_{\Omega_1}x^2dxdydz.$

作变换：

$$\begin{cases}u=\dfrac{x}{z}\\ v=\dfrac{y^2}{z}\\ w=z\end{cases}$$

则直角坐标系下的空间区域Ω_1变为$O-uvw$坐标系下的区域：

$$\Omega_{uvw}=\{(u,v,w)\,|\,\frac{1}{2}\le u\le 1,\frac{1}{4}\le v\le 1,0\le w\le 3\}$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\left|\det\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|^{-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\left|\det\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{z} & & \frac{x}{-z^2}\\ & \frac{2y}{z} & \frac{-y^2}{z^2}\\ & & 1\end{bmatrix}\right)\right|^{-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=\left|\frac{z^2}{2y}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\left|\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}w^{\frac{3}{2}}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}w^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

故

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 dxdydz = 2\iiint\limits_{\Omega_{uvw}} u^2 w^2 \cdot \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}} w^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$= \iiint\limits_{\Omega_{uvw}} u^2 v^{-\frac{1}{2}} w^{\frac{7}{2}} \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \int_{\frac{1}{2}}^{1} u^2 du \int_{\frac{1}{4}}^{1} v^{-\frac{1}{2}} dv \int_0^3 w^{\frac{7}{2}} dw$$

$$= \frac{21\sqrt{3}}{4}.$$

（4）$\iiint\limits_{\Omega} (x+|y|+|z|) dxdydz$，其中 $\Omega = \{(x,y,z) \mid \ |x|+|y|+|z| \le 1\}$.

解：由于 Ω 是对称的上下金字塔结构，由对称性易知 $\iiint\limits_{\Omega} xdxdydz = 0,$ 故所求积分是在第一卦限区域 Ω_1 内积分的 8 倍。此外，Ω 还具有轮换对称性，故

$$\iiint\limits_{\Omega} (x+|y|+|z|) dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} (|y|+|z|) dxdydz = 8\iiint\limits_{\Omega_1} (y+z) dxdydz$$

$$= 16\iiint\limits_{\Omega_1} zdxdydz = 16\int_0^1 zdz \iint\limits_{D_{xy}} dxdy = 16\int_0^1 zdz \cdot \frac{(1-z)^2}{2}$$

$$= 8\int_0^1 (z^3 - 2z^2 + z) dz = 8(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}.$$

（5）$\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz$，$\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 4, x^2+y^2+(z-2)^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}.$

解：由于 Ω 是对称的上下 $\frac{1}{4}$ 球冠结构，且 Ω 关于 $z=1$ 对称，计 Ω_{up} 和 Ω_{down} 分别表示区域 Ω 位于平面 $z=1$ 上方与下方的区域，则由对称性，我们有

$$\iiint\limits_{\Omega_{up}} xyzdxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{down}} xy(2-z) dxdydz = 2\iiint\limits_{\Omega_{down}} xydxdydz - \iiint\limits_{\Omega_{down}} xyzdxdydz.$$

故

$$\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz = \iiint\limits_{\Omega_{up}} xyzdxdydz + \iiint\limits_{\Omega_{down}} xyzdxdydz = 2\iiint\limits_{\Omega_{down}} xydxdydz.$$

令 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ 则直角坐标系下的空间区域 Ω 在 Oxy 坐标平面上的投影区域 D_{xy} 变为 $O-\rho\theta$ 坐标系下的区域：$D_{\rho\theta} = \{(\rho,\theta) \mid 0 \le \rho \le \sqrt{3}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$，且

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta,$$

故

$$\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz = 2\iiint\limits_{\Omega_{down}} xydxdydz = 2\iint\limits_{D_{xy}} xydxdy\int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{1} dz = 2\iint\limits_{D_{xy}} xy(-1+\sqrt{4-x^2-y^2})dxdy$$

$$= 2\iint\limits_{D_{\rho\theta}} \rho^3 \sin\theta\cos\theta(\sqrt{4-\rho^2}-1)d\rho d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d(\sin\theta)\int_0^{\sqrt{3}} \rho^3(\sqrt{4-\rho^2}-1)d\rho$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \rho^3(\sqrt{4-\rho^2}-1)d\rho \overset{\rho=2\sin t}{=} 8\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 t(2\cos t-1)2\cos tdt$$

$$= \frac{53}{60}.$$

4. 解答下列各题:

(1) 计算螺旋面 $S: x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = a\varphi$（$0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$，$a$ 为常数）的面积。

解: $E = (x_r')^2 + (y_r')^2 + (z_r')^2 = 1,\quad F = (x_\varphi')^2 + (y_\varphi')^2 + (z_\varphi')^2 = r^2 + a^2,\quad G = 0,$

所以曲面的面积

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{EF - G^2}dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{a^2+r^2}dr = \pi R\sqrt{a^2+R^2} + \pi a^2 \ln(R+\sqrt{a^2+R^2}) - \pi a^2 \ln a.$$

(2) 求由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和柱面 $x^2+y^2=ax$（这里 $a>0$）所围有界立体 Ω 的体积和表面积。(立体 Ω 称作 Viviani 立体)。

解: 首先求立体 Ω 的体积. 显然立体 Ω 关于 Oxy 坐标平面对称。因此其体积

$$V(\Omega) = 2\iint\limits_{x^2+y^2\le ax} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy.$$

作极坐标变换 $x = r\cos\vartheta$，$y = r\sin\vartheta$. 注意到 Oxy 平面上的圆 $x^2+y^2=ax$ 的极坐标方程为 $r = \mathrm{a}\cos\vartheta$，$-\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$. 故

$$V(\Omega) = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{a\cos\vartheta} \sqrt{a^2-r^2}rdr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\cos\vartheta} d\vartheta = \frac{2a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-|\sin^3\vartheta|)d\vartheta$$

$$= \frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3\vartheta)d\vartheta = \frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right) = a^3\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}\right).$$

下求立体 Ω 的表面积 S. 显然 $\mathrm{S} = \mathrm{S}_{球} + \mathrm{S}_{柱}$，这里 $\mathrm{S}_{球}$ 代表球面的上下两个部分的面积，$\mathrm{S}_{柱}$ 代表柱面部分的面积。 根据对称性，有

$S_{球} = 2\iint\limits_{x^2+y^2\le ax}\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy$，其中 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 是上半球面的方程。

计算得 $S_{球} = 2\iint\limits_{x^2+y^2\le ax}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$. 用极坐标变换 $x=r\cos\vartheta$， $y=r\sin\vartheta$，

则 $S_{球} = 2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\vartheta\int_0^{a\cos\vartheta}\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}} = 2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[a-\sqrt{a^2(1-\cos^2\vartheta)}]d\vartheta$

$$=2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-|\sin\vartheta|)d\vartheta = 2a^2(\pi-2).$$

对于柱面部分的面积 $S_{柱}$，则用第一型曲线积分来计算比较方便。回忆第一型平面情形线积分的几何意义可知 $S_{柱} = 2\oint\limits_{x^2+y^2=ax}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dl$. 取圆周 $x^2+y^2=ax$ 的参数方程为

$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t$， $y=\frac{a}{2}\sin t$， $0\le t\le 2\pi$. 于是

$S_{柱} = 2\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-x(t)^2-y(t)^2}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt = 2a\cdot\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\sin(\frac{t}{2})dt = 4a^2$.

(3) 求两个圆柱 $y^2+z^2=a^2$ 和 $x^2+z^2=a^2$ 相交部分的体积和表面积，这里 $a>0$.

解：记所考虑的立体为 Ω， 其表面（即边界）为曲面 S. 根据对称性，我们仅考虑立体 Ω 和曲面 S 于第一卦限($x,y,z\ge 0$)的部分（分别记作 Ω_1 和 S_1 ）的体积和面积。曲面 S 和 S_1 的面积分别记为 S 和 S_1，显然 $V(\Omega)=8V(\Omega_1)$， $S=8S_1$.

在第一卦限，体积 $V(\Omega_1)$ 可看作是两个柱面下的体积：

$$z=\sqrt{a^2-x^2}\text{ ，}\ 0\le x\le a\text{，}\ 0\le y\le x\text{，}$$

$$z=\sqrt{a^2-y^2}\text{ ，}\ 0\le y\le a\text{，}\ 0\le x\le y\text{，}$$

而面积则是这两个柱面在给定范围内的面积。于是

$V(\Omega_1)=\iint\limits_{0\le x\le a,\,0\le y\le x}\sqrt{a^2-x^2}\,dxdy+\iint\limits_{0\le y\le a,0\le x\le y}\sqrt{a^2-y^2}\,dxdy.$

不难看出，上述两个积分相等。 因此

$$V(\Omega_1)=2\iint\limits_{0\le x\le a,\,0\le y\le x}\sqrt{a^2-x^2}\,dxdy=2\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx\int_0^x dy=2\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{2a^3}{3}.$$

下求S_1.

$$S_1=\iint\limits_{0\le x\le a,\,0\le y\le x}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy+\iint\limits_{0\le y\le a,0\le x\le y}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy,$$

第一个积分里$z=\sqrt{a^2-x^2}$； 而第二个积分里$z=\sqrt{a^2-y^2}$. 显然这两个积分相等。因此

$$S_1=2\iint\limits_{0\le x\le a,\,0\le y\le x}\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy=2\int_0^a dx\int_0^x\frac{ady}{\sqrt{a^2-x}}=2a\int_0^a\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=2a^2.$$

故$\mathrm{V}(\Omega)=\dfrac{16a^3}{3}$， $S=16a^2$.

(4) 设环面S的参数方程:

$x=(b+a\cos\theta)\cos\varphi$， $y=(b+a\cos\theta)\sin\varphi$， $z=a\sin\theta$， (*)

$0\le\theta\le 2\pi$， $0\le\varphi\le 2\pi$， $0<a<b$.

求环面S的面积，以及由环面S所包围的立体Ω（实心轮胎）的体积。

解：首先求环面S的面积S，计算得

$x'_\theta=-a\sin\theta\cos\varphi$， $y'_\theta=-a\sin\theta\sin\varphi$， $z'_\theta=a\cos\theta$，

$x'_\varphi=-(b+a\cos\theta)\sin\varphi$， $y'_\varphi=(b+a\cos\theta)\cos\varphi$， $z'_\varphi=0$.

故$E=x'^2_\theta+y'^2_\theta+z'^2_\theta=a^2$， $F=x'^2_\varphi+y'^2_\varphi+z'^2_\varphi=(b+a\cos\theta)^2$， $G=0$.

于是S的面积为

$$S=\iint\limits_{0\le\theta\le 2\pi,0\le\varphi\le 2\pi}\sqrt{EG-F^2}\,d\theta d\varphi=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\pi}a(b+a\cos\theta)d\varphi=4ab\pi^2.$$

下求立体Ω的体积$\mathrm{V}(\Omega)=\iiint\limits_\Omega dxdydz$. 转化为先二后一的累次积分。

对$\forall z\in[-a,a]$，经过$(0,0,z)$做垂直于z轴的平面去截立体Ω，所得截面是一个平面环域，

即由两个同心圆周所围成的有界闭域。记这个平面域为Ω_z. 于是$V(\Omega)=\int_{-a}^a V(\Omega_z)dz$. 作

变量代换$z=a\sin\theta$， $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. 根据环面方程（*）我们不难看出平面环域

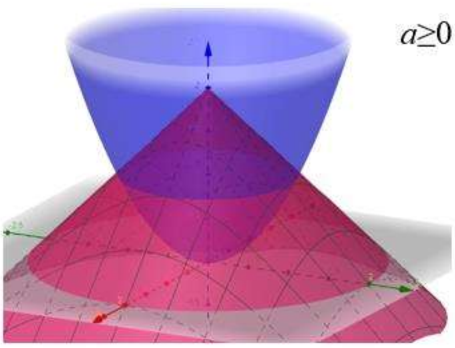
$\Omega_{a\sin\theta}$大圆周的半径为$R=b+a\cos\theta$， 小圆周的半径为$r=b-a\cos\theta$. 于是其面积为

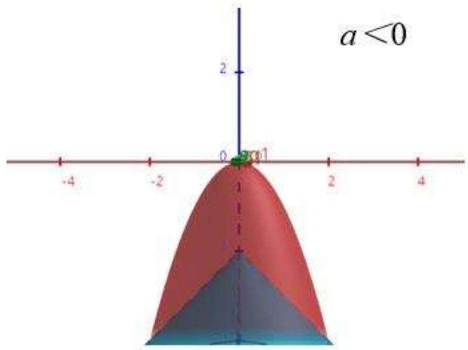
$S(\Omega_{a\sin\theta})=(R^2-r^2)\pi=4ab\pi\cos\theta$. 由此得

$$V(\Omega)=\int_{-a}^{a}V(\Omega_z)dz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4ab\pi\cos\theta d(a\sin\theta)=4a^2b\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=2a^2b\pi^2.$$

(5) 求由曲面 $x^2+y^2=az$ 与 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 所包围的空间几何体的表面积.

解:





情形 1: 当 $a\ge 0$ 时, 曲面分为上曲面的锥面 $\Sigma_1=\left\{(x,y,z)\middle|\ z\ge a, z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\right\}$ 与下曲面的抛物面 $\Sigma_2=\left\{(x,y,z)\middle|\ z\le a, az=x^2+y^2\right\}$. 两曲面的交线 $\gamma=\left\{(x,y,z)\middle|\ z=a, x^2+y^2=a^2\right\}$ 上的锥面 Σ_1 的面积:

$$S_1=\iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\pi a^2,$$

两曲面的交线下的抛物面 Σ_2 的面积:

$$S_2=\iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\frac{1}{a}\iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2+4\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2+4r^2}rdr=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi a^2,$$

于是表面积 $S=S_1+S_2=\frac{\pi}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1)a^2$.

情形 2: 当 $a<0$ 时, 所围空间体的上表面为抛物面 $\Delta_1=\left\{(x,y,z)\middle|\ z\ge 4a, az=x^2+y^2\right\}$, 下表面为锥面 $\Delta_2=\left\{(x,y,z)\middle| 4a\le z\le 2a, z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\right\}$, 两曲面的交线为 $\gamma=\left\{(x,y,z)\middle|\ z=4a, x^2+y^2=4a^2\right\}$,

上抛物面 Δ_1 的面积:

$$S_1=\iint_{x^2+y^2\le 4a^2}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\frac{1}{a}\iint_{x^2+y^2\le 4a^2}\sqrt{a^2+4\left(x^2+y^2\right)}\,dxdy=\frac{17\sqrt{17}-1}{6}\pi a^2.$$

下锥面Δ_2的面积:

$$S_2=\iint_{x^2+y^2\le 4a^2}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 4a^2}\sqrt{2}\,dxdy=4\sqrt{2}\pi a^2.$$

故表面积$S=S_1+S_2=\dfrac{\pi}{6}(24\sqrt{2}+17\sqrt{17}-1)a^2$.

综上: $S=\begin{cases}\dfrac{\pi}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1)a^2, & a\ge 0,\\ \dfrac{\pi}{6}(24\sqrt{2}+17\sqrt{17}-1)a^2, & a<0.\end{cases}$

5. 设$A=(a_{ij})$为3×3实对称正定矩阵, $H(x)=\sum_{i.j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$, 则$H(x)=1$表示三维空间的一个椭球面。

(i) 证明: 椭球面$H(x)=1$所包围立体Ω的体积为$V(\Omega)=\dfrac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}$.

(ii) 计算积分$I=\iiint\limits_{H(x)\le 1}e^{\sqrt{H(x)}}dx_1dx_2dx_3$.

证明: (i) 由于A是实对称正定矩阵, 因此存在可逆矩阵P, 使得$A=P^tP$. 立体Ω在线性变换$y=Px$作用下的像集B是单位球。 这是因为

$$1=\sum_{i.j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=x^tAx=x^tP^tPx=y^ty=y_1^2+y_2^2+y_3^3,$$

其中$x=(x_1, x_2, x_3)^t$和$y=(y_1, y_2, y_3)^t$是两个列向量。于是立体Ω的体积

$$V(\Omega)=\iiint\limits_V dx_1dx_2dx_3=\iiint\limits_B|\det P^{-1}|dy_1dy_2dy_3=|\det P^{-1}|V(\mathrm{B})=\frac{4\pi}{3}|\det P^{-1}|.$$

根据关系$A=P^tP$, 我们有$(\det P)^2=\det A$, 于是$|\det P^{-1}|=\dfrac{1}{|\det P|}=\dfrac{1}{\sqrt{\det A}}$.

故$V(\Omega)=\dfrac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}$. 证毕.

(ii) 由于实对称矩阵 A 正定，因此存在正交矩阵 Q，使得 $A = Q^t \Lambda Q$，其中 Λ 为对角阵，对角元分别为 A 的三个特征值。 我们记这三个特征值为 a，b，c，它们均为正的。于是在正交变换 $y = Qx$ 下，我们有 $I = \iiint\limits_{ay_1^2+by_2^2+cy_3^2\le 1} e^{\sqrt{ay_1^2+by_2^2+cy_3^2}} dy_1 dy_2 dy_3$.

再对上述积分做广义球坐标变换 $y_1 = \frac{r}{\sqrt{a}}\sin\varphi\cos\theta$，$y_2 = \frac{r}{\sqrt{b}}\sin\varphi\sin\theta$，$y_3 = \frac{r}{\sqrt{c}}\cos\varphi$，

得 $I = \iiint\limits_{0\le r\le 1, 0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi} \frac{1}{\sqrt{abc}} e^r r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta = \frac{4\pi}{\sqrt{abc}}\int_0^1 r^2 e^r dr = \frac{4\pi(e-2)}{\sqrt{abc}}$.

由于 $abc = \det A$，因此 $I = \frac{4\pi(e-2)}{\sqrt{\det A}}$. 解答完毕.

广义重积分计算（这部分内容大纲不做要求，同学们根据自己的情况自由选择练习）

6. 计算广义三重积分 $I = \iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$，其中 Ω 为无穷长的方体 Ω：

$0 \le x, y \le 1$，$z \ge 0$.

解：将上述积分化为如下累次积分(先一后二)

$$I = \iint\limits_{0\le x,y\le 1} dxdy \int_0^{+\infty} \frac{dz}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)},$$

再将内层积分的被积函数分解为两个简单分式之差

$$\frac{1}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)} = \frac{1}{x^2-y^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2z^2} - \frac{y^2}{1+y^2z^2}\right),\quad x \ne y。于是$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dz}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)} = \frac{1}{x^2-y^2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{xd(xz)}{1+x^2z^2} - \int_0^{+\infty}\frac{ydyz}{1+y^2z^2}\right) = \frac{\pi}{2(x+y)}。(*)$$

由此得 $I = \frac{\pi}{2}\iint\limits_{0\le x,y\le 1}\frac{dxdy}{x+y} = \pi\ln 2$.

注：上述三重积分有两处奇性：$z = +\infty$ 处，以及 $x = y = 0$（z 轴）上。它们的收敛性不难证明。另外积分（*）的最后第二个等式当 $x = y$ 时仍然成立，这可以直接证明，者通过连续性证明。解答完毕