清华大学数学科学系小测验

2021–2022学年第1学期

考试科目：应用随机过程　　　　**考试时间：**2021 **年**11 **月**2 **日**

姓　名:____________________　　学　号: ______________________

1. (10分) 设二维随机向量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 24(1-x)y, & 0<y<x<1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

   (1) (5分) 求X的概率密度$f_X(x)$。

   (2) (5分) 固定$x\in(0,1)$，求在$X=x$的条件下Y的条件期望$E(Y|X=x)$.

2. (15分) 设$X=\{X_n:n\geq 0\}$是取值于$S=\{1,2,3,4\}$的离散时间参数时齐马氏链，转移阵为

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

   (1) (5分) 若X的初始分布为$P(X_0=1)=P(X_0=2)=\frac{1}{2}$, $P(X_0=3)=P(X_0=4)=0$，计算概率$P(X_1=3,X_2=2,X_3=4)$。

   (2) (10分) 给定S上的函数f：$f(1)=2.8$, $f(2)=2.1$, $f(3)=0.7$, $f(4)=4.2$，求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(X_k).$$

3. (10分) 设$X=\{X_n:n\geq 0\}$是取非负整数值的离散时间参数时齐马氏链，转移阵$\mathbb{P}=(p_{ij})_{i,j\geq 0}$的元素如下：$\forall i\geq 0$, $p_{i,i+1}=p$ $(0<p<1)$, $p_{i0}=1-p$, $p_{ij}=0$ $(\forall j\neq 0,i+1)$。马氏链X是否常返？为什么？

4. (15分) 假设$N=\{N_t:t\geq 0\}$是强度参数为$\lambda>0$的泊松过程。

   (1) (5分) $\forall 0<s<t$, 求$E(N_sN_t)$。

   (2) (10分) 利用强大数律证明$P\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{N_t}{t}=\lambda\right)=1$。