

清华大学数学科学系小测验

2020–2021学年第1学期

考试科目：应用随机过程

考试时间：2020 年11 月10 日

姓 名: _____ 学 号: _____

1. (10分) 设 $X = \{X_n : n \geq 0\}$ 是取值于 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 的离散时间参数时齐马氏链，转移阵为

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

求马氏链 X 的不变分布 $\pi = (\pi_i)_{1 \leq i \leq 4}$ 。

2. (20分) 设 $X = \{X_n : n \geq 0\}$ 是取非负整数值的离散时间参数时齐马氏链，转移阵 $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \geq 0}$ 的元素如下： $\forall i \geq 0, p_{i,i+1} = p$ ($0 < p < 1$), $p_{i0} = 1 - p$, $p_{ij} = 0$ ($\forall j \neq 0, i+1$)。令 $T_0 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}$ 。

(1) 求 $X_0 = 0$ 的条件下 T_0 的概率分布列 $P(T_0 = n | X_0 = 0)$ ($n \geq 1$)。

(2) 马氏链 X 是否正常返？为什么？

3. (20分) 假设 $N = \{N_t : t \geq 0\}$ 是强度参数为 $\lambda > 0$ 的泊松过程。

(1) $\forall 0 < s < t$, 非负整数 $i \leq j$, 求条件概率 $P(N_s = i | N_t = j)$ 。

(2) 利用强大数律证明 $P(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda) = 1$ 。