第三次习题课题目 隐函数微分、多元函数微分学几何应用

1. 计算下列各题:

(1) 已知函数$z=z(x,y)$由方程$x^2+y^2+z^2=a^2$确定，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(2) 设函数$z=z(x,y)$由方程$(z+y)^x=x^2y$确定，求$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(3,3)}$.

(3) 设函数$z=z(x,y)$由方程$xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$确定，且$z(1,0)=-1$，求$dz\big|_{(1,0)}$.

2. 设函数$x=x(z),\ y=y(z)$由方程组$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-1=0\\ x^2+2y^2-z^2-1=0\end{cases}$确定， 求$\dfrac{dx}{dz},\ \dfrac{dy}{dz}$.

3. 已知函数$z=z(x,y)$由参数方程$\begin{cases}x=u\cos v\\ y=u\sin v\\ z=uv\end{cases}$给定，试求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设f，g，$h\in C^1$. 若矩阵$\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$可逆，且函数$u=u(x,y)$由方程组$\begin{cases}u=f(x,y,z,t)\\ g(y,z,t)=0\\ h(z,t)=0\end{cases}$ 确定，求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

5. 已知所有二阶实方阵$X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$构成一个 4 维线性空间$V$，定义向量值函数$\mathbf{f}:V\to V$为$\mathbf{f}(X)=X^2$，求$\mathbf{f}(X)$在$X_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$处的全微分。

6. 求解下列各题:

(1) 求螺线$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=ct\end{cases}$ $(a>0,c>0)$在点$M(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{\pi c}{4})$处的切线与法平面.

(2) 求曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-6=0\\ z-x^2-y^2=0\end{cases}$在点$M_0(1,1,2)$处的切线方程.

7. 求曲面$S:2x^2-2y^2+2z=1$上切平面与直线$L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\ x+y+z=0\end{cases}$平行的切点的轨迹。

8. 证明球面$S_1: x^2+y^2+z^2=R^2$与锥面$S_2: x^2+y^2=a^2z^2$正交.

9. 已知曲面S的方程$e^z=xy+yz+zx$，求曲面S在$(1,1,0)$处的切平面方程；若曲面S的显式方程为$z=f(x,y)$，求$\mathrm{grad}\, f(1,1)$.

10. 求证：通过曲面$S: \mathrm{e}^{xyz}+x-y+z=3$上点$(1,0,1)$的切平面平行于$y$轴.

11. 已知f可微，证明曲面$f\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$上任意一点处的切平面通过一定点，并求此点位置．

12. 设G是可导函数且在自变量取值为零时，导数为零，否则函数的导数都不等于零。曲面S由方程$ax+by+cz=G\left(x^2+y^2+z^2\right)$确定，试证明：曲面$S$上任一点的法线与某定直线相交。

13. 求过直线$\begin{cases}3x-2y-z=-15\\ x+y+z=10\end{cases}$且与曲面$S: x^2-y^2+z=10$相切的平面方程。

14. 证明：设$D\subset\mathbb{R}^2$是一个非空区域，且$z=f(x,y)\in C^2(D)$．则在旋转变换$u=x\cos\theta+y\sin\theta,\ v=-x\sin\theta+y\cos\theta$下，表达式$f''_{xx}+f''_{yy}$不变。