清华大学数学科学系小测验

2021–2022学年第1学期

考试科目：应用随机过程　　　　**考试时间：**2021 **年**12 **月**7 **日**

姓　名:______________________　**学　号:** ________________________

本试题共3 **道大题，满分**50 **分**

1. (8分) 设连续参数时齐马氏链$X=\{X_t: t\geq 0\}$的状态空间S有限，转移概率矩阵$\mathbb{P}(t)=(p_{ij}(t))_{i,j\in S}$在$t=0$处右连续。请写出$\mathbb{P}(t)$满足的Kolmogorov向前微分方程并加以证明。

2. (18分) 设$B=\{B_t: t\geq 0\}$是一维零初值标准布朗运动。

   (1) (9分) 任给$0<s<t<1$，求给定$B_1=0$条件下，(B_s, B_t)的条件概率密度函数。

   (2) (9分) 取定$t>0$，定义$M_t=\max_{0\leq s\leq t} B_s$。证明$M_t$是连续型随机变量并求出其概率密度函数。

3. (24分) 设$Y_0=0$; $\{Y_n: n\geq 1\}$是独立同分布随机变量列，满足$P(Y_1=1)=p\in(\frac{1}{2},1)$, $P(Y_1=-1)=q=1-p$。令$X_0=0$, $X_n=\sum_{k=1}^n Y_k$, $\forall n\geq 1$。任给$z\in\mathbb{Z}$，令$\phi(z)=(q/p)^z$, $T_z=\inf\{n\geq 0: X_n=z\}$. 对任意给定的整数$a<0<b$，令$T=\min(T_a, T_b)$.

   (1) (8分) 证明$\{\phi(X_n): n\geq 0\}$关于$Y=\{Y_n: n\geq 0\}$是鞅。

   (2) (8分) 证明$P(T<+\infty)=1$.

   (3) (8分) 证明
   $$P(T_a<T_b)=\frac{\phi(b)-\phi(0)}{\phi(b)-\phi(a)}.$$