第三章进阶题

3.5

令 $A_k(x)=\sum_{n\geq 0}\binom{n+k}{k}x^n$，

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}A_k(x)&=\sum_{n\geq 0}\sum_{m=0}^{n}\binom{m+k}{k}x^n\\&=\sum_{n\geq 0}\binom{n+k+1}{k+1}x^n\\&=A_{k+1}(x)\end{aligned}$$

由$C(n,0)=1$得$A_0(x)=1+x+x^2+\ldots=1/(1-x)$，所以可得

$$A_k(x)=\frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

3.6

解. 使用母函数法，设 $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，其中 a_n 为所求的解数. 则有

$$\begin{aligned}G(x)&=(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x+x^2+x^3)(1+x^4+x^8+\cdots)(1+x)\\&=\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^4}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^4}\cdot(1+x)=\frac{1}{(1-x)^2}\\&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\end{aligned}$$

所以 $a_n=n+1$.

3.7

(1)

首先，$\lfloor 2n\rfloor=\lfloor 2n+1\rfloor=n$，故我们有 $a_{2n+1}=a_{2n}$。
其次，$\lfloor 2n\rfloor=\lfloor 2n-1\rfloor+1=n$，故我们有 $a_{2n}=a_{2n-1}+a_n$。
我们证明，a_n 是将 n 拆分成 2 的幂的和的方案数 b_n。
首先，易知 $b_0=b_1=1$，与 a_0,a_1 相同。故我们只需要证明 b_n 也满足上述两个递推关系。
首先，对于奇数 $n=2k+1$，易知将 n 分拆成的 2 的幂中必定包含至少一个 1。如果去掉这个 1，余下的正好构成 $n-1=2k$ 的拆分。反之亦然。故我们有 $a_{2k+1}=a_{2k}$。
其次，对于偶数 $n=2k$，首先考虑 n 的拆分中包含 1 的分拆，已知其数量为 $b_{n-1}=b_{2k-1}$。其次，考虑 n 的分拆中不包含 1 的分拆，由于所有数都是 2 的幂，且不包含 1，故如果我们将所有数同时除 2，对应的就是 k 的二幂分拆数。故我们有 $b_{2n}=b_{2n-1}+b_n$。
于是 b_n 满足的递推关系与 a_n 一样，故 $a_n=b_n$。
由于 a_n 是 n 的二幂拆分数，故我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\prod_{i=0}^{+\infty}(\sum_{j=0}^{+\infty}x^{j2^i})=\prod_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{1-x^{2^i}}$$

(2)

根据母函数性质

$\frac{A(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{n} a_i)x^n$，又根据递推关系有$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_{2n}$，故$\frac{A(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^n$。

(3)

设这样的数列有c_n个，首先有$c_0 = 1$，接下来考虑怎么计算c_n，可以枚举数列中的最后一项，由于数列中的最后一项要≥前面所有项的和，所以最后一项必须≥$\lceil \frac{n}{2} \rceil$，则前面所有的项之和必须≤$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，易得递推式

$$c_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_i$$

可以发现$\{c_n\}$的初值和递推式和$\{a_n\}$是一模一样的，所以$c_n = a_n$

(4)

根据数列的递推关系式，我们可知对任意$n \geq 1$，$a_n \geq a_{n-1}$。

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_i \\ &\leq \lfloor n/2 \rfloor a_{\lfloor n/2 \rfloor} \\ &\leq n a_{\lfloor n/2 \rfloor} \\ &\leq n^2 a_{\lfloor n/4 \rfloor} \\ &\leq n^{\lfloor \log_2 n \rfloor}(a_0 + a_1) \\ &= 2n^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \end{aligned}$$

故取$C = 2, n_0 = 1$，命题成立。

3.8

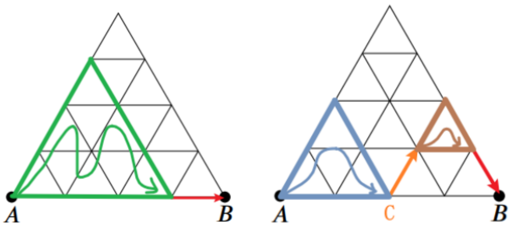

图 1: case1 & case2

考虑到达 B 点的最后一条路径:

(a) 向右: 对应左边图中的情形，容易看出这对应的方案数即为 a_{n-1}

(b) 向右下: 对应右图中的情形。我们考虑路径上与底边交点中最靠右的那个点（图中 C 点），它把路径分为了左右两部分计数。从图示中容易看出左半边的方案数为 a_2，右半边的方案数为 a_1。由于需要枚举 C 点位置，故这部分的方案数为一个卷积形式:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-1-i}$$

综上，有递推式

$$a_n = a_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-1-i}$$

其中 $a_0 = 1$。

设母函数

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

则

$$\begin{aligned} A(x)^2 &= (a_0 a_0) + (a_0 a_1 + a_1 a_0)x + (a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0)x^2 + \cdots \\ &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1)x + (a_3 - a_2)x^2 + \cdots \end{aligned}$$

故有

$$x(A(x)^2 + A(x)) + a_0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = A(x)$$

$$x \cdot A(x)^2 + (x-1)A(x) + 1 = 0$$

解得

$$A(x) = \frac{(1-x) \pm \sqrt{(x-1)^2 - 4x}}{2x} = \frac{(1-x) \pm \sqrt{x^2 - 6x + 1}}{2x}$$

考虑到 $A(0) = a_0 = 1$，上式中符号取减号:

$$A(x) = \frac{(1-x) - \sqrt{x^2 - 6x + 1}}{2x}$$