

清华大学数学科学系小测验

2020-2021学年第1学期

考试科目：应用随机过程

考试时间：2020 年12 月8 日

姓 名: _____ 学 号: _____

1. (20分) 设 $B = \{B_t : t \geq 0\}$ 是一维零初值标准布朗运动。
 - (1) (10分) 任给 $0 < r < s < t$, 求 (B_r, B_s, B_t) 的联合概率密度。
 - (2) (10分) 取定 $t > 0$, 定义 $M_t = \max_{0 \leq s \leq t} B_s$ 。证明 M_t 是连续型随机变量并求出其概率密度函数。
2. (30分) 设 $X_0 = 0$, $\{X_n : n \geq 1\}$ 是独立同分布随机变量列, 满足 $P(X_1 = 1) = p \in [0, 1]$, $P(X_1 = -1) = q = 1 - p$ 。令 $S_0 = 0$, $L_0 = 0$, $Q_0 = 0$; 任给 $n \geq 1$, 令 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $L_n = S_n - n(p - q)$, $Q_n = L_n^2 - n(1 - (p - q)^2)$ 。
 - (1) (15分) 证明 $\{L_n : n \geq 0\}$, $\{Q_n : n \geq 0\}$ 关于 $\{X_n : n \geq 0\}$ 都是鞅。
 - (2) (15分) 给定整数 $a < 0 < b$, 令 $T = \inf\{n \geq 0 : S_n = a \text{ 或 } S_n = b\}$, 证明当 $p = \frac{1}{2}$ 时, $ET = |a|b$ 。