

## 第九次习题课参考解答 曲面积分、Gauss 公式和 Stokes 公式的应用

1. 计算  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ . 其中  $S$  是锥体  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$  的边界.

解: 分别记  $S_1$  和  $S_2$  为锥体的侧面和上底面, 则

$$\iint_S (x^2 + y^2) dS = \iint_{S_1} (x^2 + y^2) dS + \iint_{S_2} (x^2 + y^2) dS,$$

$$\text{在 } S_1 \text{ 上, } dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy = \sqrt{2} dxdy \quad (z = \sqrt{x^2 + y^2}).$$

$$\text{在 } S_2 \text{ 上, } dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy = dxdy \quad (z = 1). \text{ 于是}$$

$$\iint_{S_1} (x^2 + y^2) dS = \sqrt{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot \sqrt{2} r dr = \pi / \sqrt{2},$$

$$\iint_{S_2} (x^2 + y^2) dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r dr = \pi / 2.$$

于是所求曲面积分  $\iint_S (x^2 + y^2) dS = \pi(1/2 + 1/\sqrt{2})$ . 解答完毕.

2. 求  $I = \iint_S (x + y + z)^2 dS$ , 其中  $S$  为球心在坐标原点的单位球面.

$$\text{解: } I = \iint_S (x + y + z)^2 dS = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) dS$$

$$= \iint_S (1 + 2xy + 2yz + 2zx) dS = 4\pi + 2 \iint_S (xy + yz + zx) dS$$

$$\text{其中 } 4\pi \text{ 是球的表面积. 由对称性可知, } \iint_S xy dS = \iint_S yz dS = \iint_S zx dS = 0, \text{ 故 } I = 4\pi.$$

解答完毕.

3. 计算第一型曲面积分  $I = \iint_S |z| dS$ , 以及第二型曲面积分  $J = \iint_{S^+} |z| dx \wedge dy$ , 其中曲面  $S$  为球

面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , 定向曲面  $S^+$  的正法向向外.

解: 分别记  $S_1, S_2$  为  $S$  的上半球面和下半球面, 它们的方程为

$$S_1: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq a^2\}, \quad S_1^+ \text{ 方向向上.}$$

$$S_2: z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D, \quad S_2^+ \text{ 方向向下.}$$

考虑第一型曲面积分  $I$ . 由球面的对称性,

$$\text{我们有 } \iint_{S_1} |z| dS = \iint_{S_2} |z| dS. \text{ 因此 } I = \iint_S |z| dS = \iint_{S_1} |z| dS + \iint_{S_2} |z| dS = 2 \iint_{S_1} z dS.$$

$$\text{对于上半球面 } S_1, \text{ 面积微元 } dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \frac{a dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}. \text{ 于是}$$

$$I = 2 \iint_{S_1} z dS = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy = 2a \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} dxdy = 2\pi a^3.$$

考虑第二型曲面积分  $J$ .

$$J = \iint_{S^+} |z| dx \wedge dy = \iint_{S_1^+} |z| dx \wedge dy + \iint_{S_2^+} |z| dx \wedge dy.$$

$$\text{注意到 } \iint_{S_1^+} |z| dx \wedge dy = \iint_{S_1} z \cdot \frac{z}{a} dS = \frac{1}{a} \iint_{S_1} z^2 dS,$$

$$\iint_{S_2^+} |z| dx \wedge dy = \iint_{S_2} -z \cdot \frac{z}{a} dS = -\frac{1}{a} \iint_{S_2} z^2 dS,$$

$$\text{故 } J = \iint_{S^+} |z| dx \wedge dy = \iint_{S_1^+} |z| dx \wedge dy + \iint_{S_2^+} |z| dx \wedge dy = 0. \text{ 解答完毕。}$$

4. 记  $S$  为锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $x^2 + y^2 = 2x$  所截的有限部分。规定曲面  $S$  的正向向下, 所得的定向曲面记为  $S^+$ . 求下面两个积分的值。

$$(i) \iint_S z dS. \quad (ii) \iint_{S^+} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy).$$

解: (i) 简单计算知锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  的面积微元为  $dS = \sqrt{2} dx dy$ . 因此

$$\iint_S z dS = \iint_{x^2 + y^2 \leq 2x} \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \frac{32\sqrt{2}}{9}.$$

(ii) 不难计算曲面  $S$  的单位正法向量为  $(x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2}, -1)/\sqrt{2}$ .

将第二型曲面积分转化为第一型曲面积分, 有

$$\begin{aligned} & \iint_{S^+} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy) \\ &= \iint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right) dS = \iint_S 0 dS = 0. \text{ 解答完毕。} \end{aligned}$$

5. 求积分  $I = \iint_{\Sigma^+} f(x) dy \wedge dz + g(y) dz \wedge dx + h(z) dx \wedge dy$ , 其中  $\Sigma^+$  为长方体

$[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$  的边界, 正法向朝外, 函数  $f(x)$ ,  $g(y)$  和  $h(z)$  均为连续函数。

解: 边界面  $\Sigma$  由 6 个平面构成, 其朝外的单位法向量分别为:

$$x = 0: \mathbf{n} = (-1, 0, 0), \quad x = a: \mathbf{n} = (1, 0, 0),$$

$$y = 0: \mathbf{n} = (0, -1, 0), \quad y = b: \mathbf{n} = (0, 1, 0),$$

$$z = 0: \mathbf{n} = (0, 0, -1), \quad z = c: \mathbf{n} = (0, 0, 1),$$

$$\text{所以 } \iint_{\Sigma} f(x) dy \wedge dz = \iint_{\substack{0 \leq y \leq b \\ 0 \leq z \leq c}} f(a) dy dz - \iint_{\substack{0 \leq y \leq b \\ 0 \leq z \leq c}} f(0) dy dz = bc[f(a) - f(0)].$$

$$\text{同理 } \iint_{\Sigma} g(y) dz \wedge dx = \iint_{\substack{0 \leq z \leq c \\ 0 \leq x \leq a}} g(b) dz dx - \iint_{\substack{0 \leq z \leq c \\ 0 \leq x \leq a}} g(0) dz dx = ac[g(b) - g(0)],$$

$$\iint_{\Sigma} h(z) dx \wedge dy = \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b}} h(c) dx dy - \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b}} h(0) dx dy = ab[h(c) - h(0)].$$

因此  $I = bc[f(a) - f(0)] + ca[g(b) - g(0)] + ab[h(c) - h(0)]$ . 解答完毕。

6. 设  $S^+$  为锥面  $z^2 = x^2 + y^2$  位于  $0 \leq z \leq h$  的部分, 正法向向下。设  $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  为流体运动的速度场。求流体在单位时间里通过定向曲面  $S$  由内向外的流量  $Q$ , 即求曲面积分

$$Q = \iint_{S^+} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.$$

解: 曲面 (锥面)  $S$  的指定方向的单位正法向量  $\mathbf{n} = \frac{(x, y, -z)}{\sqrt{2}z}$ . 于是所求流量为

$$Q = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S (x, y, z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}z} (x, y, -z) dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S \frac{x^2 + y^2 - z^2}{z} dS = 0.$$

解答完毕。

7. 记  $S^+$  为圆柱面  $S: x^2 + y^2 = 1$  位于  $0 \leq z \leq 2$  的部分, 外法向为正, 计算曲面积分

$$I = \iint_{S^+} x(y-z)dy \wedge dz + (x-y)dx \wedge dy.$$

解: 记立体  $\Omega: x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2$ ;  $S_1^+: x^2 + y^2 \leq 1, z=0$ , 正法向向下;

$S_2^+: x^2 + y^2 \leq 1, z=2$ , 正法向向上。根据 Gauss 公式得

$$\begin{aligned} \iint_{(\partial\Omega)^+} x(y-z)dy \wedge dz + (x-y)dx \wedge dy &= \iiint_{\Omega} (y-z)dx dy dz = -\iiint_{\Omega} z dx dy dz \\ &= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^2 z dz = -2\pi. \end{aligned}$$

$$\text{而 } \iint_{(\partial\Omega)^+} x(y-z)dy \wedge dz + (x-y)dx \wedge dy = \iint_{S^+ + S_1^+ + S_2^+} x(y-z)dy \wedge dz + (x-y)dx \wedge dy,$$

其中,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1^+} x(y-z)dy \wedge dz + (x-y)dx \wedge dy &= \iint_{S_1^+} (x(y-z), 0, (x-y)) \cdot (0, 0, -1) dS \\ &= -\iint_{S_1^+} (x-y) dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (y-x) dx dy = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_2^+} x(y-z)dy \wedge dz + (x-y)dx \wedge dy &= \iint_{S_2^+} (x(y-z), 0, (x-y)) \cdot (0, 0, 1) dS \\ &= \iint_{S_2^+} (x-y) dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x-y) dx dy = 0, \end{aligned}$$

所以  $I = \iint_{S^+} x(y-z)dy \wedge dz + (x-y)dx \wedge dy = -2\pi$ . 解答完毕。

8. 设  $\Omega$  为由圆锥面  $S: x^2 + y^2 = z^2$  和平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  所围成的圆锥体。

证明：圆锥体的体积  $V = \frac{Sh}{3}$ ，其中  $S$  为圆锥的底面积， $h$  为圆锥的高。

证明：由于  $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$ ，其中  $S_1$  记锥面部分， $S_2$  记底面部分。因为锥面的顶点在原点，其上每一点的法向量与径向垂直，故  $\iint_{S_1} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) dS = 0$ ，其中  $\mathbf{n}$  为锥面  $S_1^+$  的单位正法向量。

$S_2$  为平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  的一部分，其单位法向量为  $\frac{\pm(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ 。注意到在

$S_2$  上，点的位置向量与正法向成锐角。因此

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) dS &= \iint_{S_2} \left| (x, y, z) \cdot \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| dS \\ &= \iint_{S_2} \left| \frac{Ax + By + Cz}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| dS = \iint_{S_2} \left| \frac{-D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| dS \\ &= \left| \frac{-D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \iint_{S_2} dS = Ah \end{aligned}$$

其中  $S = \iint_{S_2} dS$  为圆锥的底面积，而  $h = \left| \frac{-D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$  为原点到平面

$Ax + By + Cz + D = 0$  的距离，也就是圆锥的高。故

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{1}{3} \left( \iint_{S_1} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) dS + \iint_{S_2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) dS \right) = \frac{1}{3} \iint_{S_2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{Sh}{3} . \text{ 解答完毕。}$$

9. 设一元函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续可导，且对于任何位于半空间  $R_x^+ = \{(x, y, z), x > 0\}$  中的光滑有向封闭曲面  $S \subset R_x^+$ ，有  $\oint\!\!\!\oint_S xf(x)dy \wedge dz - xyf(x)dz \wedge dx - e^{2x}zdx \wedge dy = 0$ 。进一步假设  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ，求  $f(x)$ 。

解：对于  $\forall (x_0, y_0, z_0) \in R_x^+$ 。作以  $(x_0, y_0, z_0)$  为球心，以  $r > 0$  为半径的闭球  $B_r$  使得  $B_r \subset R_x^+$ 。于是由假设得  $\oint\!\!\!\oint_{\partial B_r} xf(x)dy \wedge dz - xyf(x)dz \wedge dx - e^{2x}zdx \wedge dy = 0$ 。

故据 Gauss 公式，有  $\iiint_{B_r} \left( \frac{\partial(xf(x))}{\partial x} + \frac{\partial(-xyf(x))}{\partial y} + \frac{\partial(-e^{2x}z)}{\partial z} \right) dxdydz = 0$ ，

$$\text{即 } \iiint_{B_r} [xf'(x) + (1-x)f(x) - e^{2x}] dxdydz = 0 .$$

再根据三重积分的积分中值定理可知，存在  $\xi \in [x_0 - r, x_0 + r]$ ，使得

$$\xi f'(\xi) + (1-\xi)f(\xi) - e^{2\xi} = 0 .$$

令  $r \rightarrow 0^+$  即得  $x_0 f'(x_0) + (1-x_0)f(x_0) - e^{2x_0} = 0$ 。

由于  $x_0 > 0$  是任意的, 故  $xf'(x) + (1-x)f(x) - e^{2x} = 0, \forall x > 0$ .

这是一阶线性常微分方程, 求得其通解为  $f(x) = \frac{e^x}{x}(c + e^x)$ .

由假设  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ , 可得  $c = -1$ . 因此  $f(x) = \frac{e^x}{x}(e^x - 1)$ . 解答完毕。

10. 利用 Stokes 公式计算积分  $I = \oint_{L^+} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$ , 其中  $L^+$  为圆周

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y = x \tan \alpha \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

从  $ox$  轴的正向看去, 正向为逆时针方向。

解: 记  $S^+$  为由圆周  $L^+$  在平面  $y = x \tan \alpha$  上所围的部分 (闭圆盘), 其正法向与  $x$  轴正向成锐角。由 Stokes 公式得

$$I = \oint_{L^+} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz = \iint_S -2(1,1,1) \cdot \mathbf{n} dS$$

其中  $\mathbf{n}$  为  $S^+$  的单位正法向量。由假设知  $\mathbf{n} = (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0)$ . 于是

$$I = -2 \iint_S (1,1,1) \cdot (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0) dS = 2(\cos \alpha - \sin \alpha) \iint_S dS = 2\pi a^2 (\cos \alpha - \sin \alpha),$$

其中  $\iint_S dS = \pi a^2$  为平面  $y = x \tan \alpha$  在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  部分内的面积。解答完毕。

11. 设有向曲线  $L^+$  是平面  $x + y + z = 0$  与球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的交线, 从  $z$  轴正向看去为

$$\text{逆时针方向。求第二型曲线积分 } I = \int_{L^+} \frac{(y+1)dx + (z+2)dy + (x+3)dz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

解: 首先注意  $I = \int_{L^+} (y+1)dx + (z+2)dy + (x+3)dz$ .

记  $S^+$  为平面  $x + y + z = 0$  上包含于球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  内的部分, 且  $S^+$  的正法向与  $z$  轴的正向成锐角。根据 Stokes 公式得  $I = -\iint_{S^+} dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy$ . 注意到  $S$  的单位正

法向  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ . 于是  $I = -\iint_S (1,1,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) dS = -\sqrt{3} \iint_S dS = -\sqrt{3}\pi$ . 解答完毕。

12. 设  $\Sigma^+$  是锥面的一部分:  $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 1$ , 规定其正法线向下, 求曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma^+} xdy \wedge dz + 2ydz \wedge dx + 3(z-1)dx \wedge dy.$$

解: 设单位圆盘  $\Sigma_1^+$ :  $x^2 + y^2 \leq 1, z = 1$ , 正法线向上。记由锥面  $\Sigma^+$  和圆盘  $\Sigma_1^+$  所围成的立体为  $\Omega$ . 应用 Gauss 公式得

$$\iint_{\Sigma^+ + \Sigma_1^+} xdy \wedge dz + 2ydz \wedge dx + 3(z-1)dx \wedge dy = \iiint_{\Omega} 6dxdydz = 6V(\Omega) = 2\pi.$$

$$\text{而积分 } \iint_{\Sigma_1^+} xdy \wedge dz + 2ydz \wedge dx + 3(z-1)dx \wedge dy = \iint_{\Sigma_1} 3(z-1)dS = 0.$$

因此  $I = \iint_{\Sigma^+} xdy \wedge dz + 2ydz \wedge dx + 3(z-1)dx \wedge dy = 2\pi$ . 解答完毕。

13. 计算高斯积分  $I = \oiint_S \frac{\cos \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle}{r^2} dS$ , 其中  $S$  为一个不经过原点的光滑封闭曲面, 其中  $\vec{n}$  为  $S$

上点  $(x, y, z)$  处的外单位法向量,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

解: 记  $\vec{V} = \vec{r}/r^3 = (x, y, z)/r^3$ . 则  $I = \oiint_S \frac{\cos \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle}{r^2} dS = \oiint_S \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{n} dS = \oiint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS$ . 当  $S$  不

包围坐标原点时, 向量值函数  $\vec{V}$  在由  $S$  所包围的闭区域内连续可微. 因此利用 Gauss 公式可得曲面积分  $\oiint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = 0$ . 当  $S$  包围坐标原点时, 原积分等于向量值函数  $\vec{V}$  沿着球面

$\Sigma^+: x^2 + y^2 + z^2 = \delta^2$  (外侧) 上的第二型曲面积分. 于是

$$I = \oiint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS = \oiint_{\Sigma^+} \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \oiint_{\Sigma^+} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \frac{\vec{r}}{r} dS = \frac{1}{\delta^2} \oiint_{\Sigma} dS = 4\pi. \text{ 解答完毕.}$$

14. 设  $\Sigma^+$  为曲面  $x = \sqrt{1-3y^2-3z^2}$  的前侧, 求  $\iint_{\Sigma^+} xdy \wedge dz + (y^3+2)dz \wedge dx + z^3dx \wedge dy$ .

解: 设  $\Sigma_1^+ = \{(x, y, z) | 3y^2 + 3z^2 \leq 1, x = 0\}$ , 方向指向  $x$  轴负向。

则由 Gauss 公式,

$$\iint_{\Sigma^+ + \Sigma_1^+} xdy \wedge dz + (y^3+2)dz \wedge dx + z^3dx \wedge dy = \iiint_{\Omega: 0 \leq x \leq \sqrt{1-3y^2-3z^2}} (1+3y^2+3z^2)dxdydz,$$

设  $y = r \cos \theta$ ,  $z = r \sin \theta$ , 则

$$\iiint_{\Omega: 0 \leq x \leq \sqrt{1-3y^2-3z^2}} (1+3y^2+3z^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} (1+3r^2)rdr \int_0^{\sqrt{1-3r^2}} dx = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} r(1+3r^2)\sqrt{1-3r^2} dr,$$

$$\text{令 } \sqrt{1-3r^2} = t, \text{ 则 } 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} r(1+3r^2)\sqrt{1-3r^2} dr = \frac{2\pi}{3} \int_0^1 (2-t^2)t^2 dt = \frac{14\pi}{45}.$$

$$\text{又 } \iint_{y^2+z^2 \leq \frac{1}{3}, x=0} xdy \wedge dz + (y^3+2)dz \wedge dx + z^3dx \wedge dy = 0,$$

$$\text{因此 } \iint_{\Sigma^+} xdy \wedge dz + (y^3+2)dz \wedge dx + z^3dx \wedge dy = \frac{14\pi}{45}.$$

15. 设  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ , 计算曲面积分  $I = \oiint_{\Sigma} (ax^2 + by^2 + cz^2) dS$ .

解: 设  $\Sigma^+$  是球面  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$  的外侧, 则其外单位法向量  $\vec{n} = (x, y, z-1)$ .

将曲面积分变形:

$$I = \oiint_{\Sigma} (ax^2 + by^2 + cz^2) dS = \oiint_{\Sigma} (ax \cdot x + by \cdot y + cz(z-1)) dS + \oiint_{\Sigma} c(z-1) dS + \oiint_{\Sigma} cdS.$$

将第一型曲面积分转化为第二型曲面积分, 并利用 Gauss 公式,

记  $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$ , 则

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} (ax \cdot x + by \cdot y + cz(z-1)) dS &= \oiint_{\Sigma^+} ax dy \wedge dz + by dz \wedge dx + cz dx \wedge dy \\ &= \iiint_{\Omega} (a + b + c) dx dy dz = \frac{4}{3} \pi (a + b + c). \end{aligned}$$

$$\text{又 } \oiint_{\Sigma} c(z-1) dS = \oiint_{\Sigma^+} cdx \wedge dy = \iiint_{\Omega} 0 dx dy dz = 0, \quad \oiint_{\Sigma} cdS = 4\pi c.$$

$$\text{故 } I = \frac{4}{3} \pi (a + b + 4c).$$