2024 级微积分 A2 期末考试

mathsdream 整理版

2025.06.13

说明

题目解析见后。

点击链接可查看更多数学基础课程的近年考题：

`https://github.com/mathsdream/THU-math-source`。

一、填空题（每个空 3 分，共 30 分）

1. 函数 $f(x,y,z)=x^2+xy$ 在 $(1,0,1)$ 处沿方向 $\vec{v}=(2,-1,2)$ 的方向导数为 ________.

2. 设 $z=\arctan(xy^2)$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)}=$ ________.

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^p\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的两个偏导数存在，则 p 的范围为 ________.

4. 判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(n^3)}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ 的敛散性 (选填: “绝对收敛”、“条件收敛”或“发散”) ________.

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^{\sqrt{3}x}dy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy=$ ________.

6. 设 $L:x^2+(y-1)^2=1$，则 $\displaystyle\int_L(x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2)dl=$ ________.

7. 设 $L^+:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ z=x\end{cases}$，从 z 轴正向朝下看去，逆时针方向为正方向，则 $\displaystyle\int_{L^+}xz\,dz=$ ________.

8. 微分方程 $(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy=0$ 的通解为 ________.

9. 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt$，则 $f(x)$ 在点 $x_0=0$ 处的 Taylor 级数为 ________.

10. 设函数 $f(y)$ 可微，且 $\displaystyle\int_{L(A)}^{(B)}(z^2f(y)+e^x)dx+(xz^2+\cos y)dy+(2xyz-z)dz$ 与路径无关，则 $f(y)=$ ________.

二、解答题

1. (10 分) 求 $\iint_D \frac{2x}{y^2+xy^3}dxdy$, 其中 D 是由曲线 $xy=1, xy=2, y^2=x, y^2=2x$ 围成的有界区域.

2. (10 分) 曲面 $\Sigma: x=u\cos v, y=u\sin v, z=v \quad (0\le u\le 1, 0\le v\le 2\pi)$. 求积分 $\iint_\Sigma \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dS$.

3. (10 分) 设 S 是有界闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)|1\le x^2+y^2+z^2\le 4, z\ge\sqrt{x^2+y^2}\}$ 的边界面的外侧, 求 $I=\iint_S xz\,dy\wedge dz+yz\,dz\wedge dx+z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\wedge dy$.

4. (10 分) 计算 $\oint_{L^+}\frac{y\,dx-(x-2)dy}{(x-2)^2+4y^2}$, 其中 $L^+: x^2+y^2=10$, 逆时针方向.

5. (10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(n+1)!}$ 的收敛域及和函数.

6. (10 分) 设 $f(x)$ 为以 2π 为周期的函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上的定义为 $f(x)=\frac{2\pi|x|-x^2}{4}, x\in[-\pi,\pi]$.

   (I) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数.

   (II) 利用 $f(x)$ 的 Fourier 级数求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

   (III) 利用 $f(x)$ 的 Fourier 级数求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

7. (10 分) 设函数 $f(x,y,z)$ 在单位球 $B=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$ 上连续可微, 且当 (x,y,z) 满足 $x^2+y^2+z^2=1$ 时, $f(x,y,z)=0$. 证明:

   (I) $\iiint_B\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)dxdydz=-3\iiint_B f(x,y,z)dxdydz$.

   (II) $\left|\iiint_B f(x,y,z)dxdydz\right|\le\frac{\pi}{3}\max_{(x,y,z)\in B}||\nabla f(x,y,z)||$. 其中 $\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$.

三、附加题（本题完全正确才有分，且分数不计入总分，仅用于评判 A+）

设 $f_n(x)(n=1,2,\dots)$ 在区间 $[a,b]$ 上可微, 且 $\exists M>0$ 使得 $\forall n=1,2,\dots,\forall x\in[a,b]$ 都有 $|f_n'(x)|\le M$. 证明: 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

解析为个人做本卷时的第一思路，不代表最巧妙的解法，同时不保证完全无误，仅供参考。

一、填空题解析

1. 函数 $f(x,y,z)=x^2+xy$ 在 $(1,0,1)$ 处沿方向 $\vec{v}=(2,-1,2)$ 的方向导数为 1.

解析：
$$\mathrm{grad}f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=(2x+y,x,0).$$
代入点 $(1,0,1)$ 得：$\mathrm{grad}f=(2,1,0)$. 单位方向向量 $\vec{u}=\dfrac{\vec{v}}{||\vec{v}||}=(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. 所以方向导数为 $\mathrm{grad}f\cdot\vec{u}=1$.

2. 设 $z=\arctan(xy^2)$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,1)}=2$.

解析：
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2xy}{1+(xy^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2y-2x^2y^5}{(1+(xy^2)^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,1)}=2.$$

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^p\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的两个偏导数存在, 则 p 的范围为 $p>\dfrac{1}{2}$.

解析：
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{|x|^{2p}}{x}\sin\frac{1}{|x|}\end{aligned}$$
在 $x\to 0$ 时，$\sin\dfrac{1}{|x|}$ 在 $[-1,1]$ 之间振荡，所以当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{|x|^{2p}}{x}$ 趋于 0，原极限为 0，偏导数存在；当 $p\leq\dfrac{1}{2}$ 时，极限不存在，偏导数不存在。

由于 x,y 对称，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ 的分析同理，所以 $p>\dfrac{1}{2}$ 是两个偏导数都存在的充分必要条件。

4. 判断级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(n^3)}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ 的敛散性 (选填: “绝对收敛”、“条件收敛”或“发散”) 条件收敛.

解析：$\left|\dfrac{\cos(n^3)}{n^2}\right|\leq\dfrac{1}{n^2}$，由比较判敛法，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^3)}{n^2}$ 绝对收敛。

$\dfrac{1}{n}$ 单调递减趋于 0，由莱布尼茨法则，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，但 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛。

绝对收敛级数与条件收敛级数相加，仍然是条件收敛级数。

注：收敛级数加收敛级数为收敛级数，发散级数加收敛级数为发散级数，绝对收敛级数加绝对收敛级数为绝对收敛级数，条件收敛级数加绝对收敛级数为条件收敛级数。

5. $\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{3}x} dy + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{\pi}{6}$.

解析：将两个累次积分化成重积分，共同组成的积分区域为 $D = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{(x,y) \mid \frac{1}{2} \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$，绘制图形即可发现 D 实际上是单位圆 $x^2+y^2 \le 1$ 在 $y=0$ 和 $y=\sqrt{3}x$ 之间的扇形，其面积为 $\frac{\pi}{6}$。所以原积分等于 1 在 D 上的二重积分，也为 $\frac{\pi}{6}$。

6. 设 $L: x^2+(y-1)^2=1$, 则 $\int_L (x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2)dl = 4\pi$.

解析:首先注意到 $x\sqrt{x^2+y^2}$ 是一个关于 x 的奇函数,而 L 关于 $x=0$ 对称,所以 $\int_L x\sqrt{x^2+y^2}dl = 0$，只需要计算 $\int_L (x^2+y^2)dl$。对 L 用参数化表示:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1+\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

则 $dl = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt = dt$，所以

$$\begin{aligned} \int_L (x^2+y^2)dl &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + (1+\sin t)^2)dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2+2\sin t)dt \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

7. 设 $L^+: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=x \end{cases}$, 从 z 轴正向朝下看去, 逆时针方向为正方向, 则 $\int_{L^+} xz\,dz = 0$.

解析：由 Stokes 公式：

$$\int_{L^+} xz\,dz = \iint_{S^+} -zdz \wedge dx = 0$$

其中，取 $S^+: z = x(x^2+y^2+z^2 \le 1)$，上侧为正。最后的积分为 0 是因为这个曲面在 zOx 平面上的投影为一条线。

注：这题直接计算也可以，将 $z=x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=1$，得到 $2x^2+y^2=1$，所以 L^+ 的参数方程为：

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \\ y = \sin t \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

然后代入曲线积分即可将曲线积分化为一元积分计算。

8. 微分方程 $(2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy=0$ 的通解为 $x^2y^3-y^2\sin x+y+C=0$.

解析：首先看看其是否为全微分方程，令 $P=2xy^3-y^2\cos x, Q=1-2y\sin x+3x^2y^2$，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}&=-2y\cos x+6xy^2\\ \frac{\partial P}{\partial y}&=6xy^2-2y\cos x\\ \frac{\partial Q}{\partial x}&=\frac{\partial P}{\partial y}\end{aligned}$$

所以这是一个全微分方程，存在一个原函数 $F(x,y)$，使得 $dF=Pdx+Qdy$。先将 P 对 x 积分，有：

$$F(x,y)=\int(2xy^3-y^2\cos x)dx=x^2y^3-y^2\sin x+g(y)$$

其中 $g(y)$ 是关于 y 的任意可微函数。接下来将 $F(x,y)$ 对 y 求偏导数，并与 Q 比较：

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}&=3x^2y^2-2y\sin x+g'(y)\\ &=Q=1-2y\sin x+3x^2y^2\end{aligned}$$

由此可得 $g'(y)=1$，所以 $g(y)=y+C$。因此，原方程可以化为

$$dF(x,y)=0 \implies x^2y^3-y^2\sin x+y+C=0$$

9. 设 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$, 则 $f(x)$ 在点 $x_0=0$ 处的 Taylor 级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$.

解析：

$$\begin{aligned}e^{t^2}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n!}\\ f(x)&=\int_0^x e^{t^2}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\end{aligned}$$

10. 设函数 $f(y)$ 可微, 且 $\int_{L(A)}^{(B)}(z^2f(y)+e^x)dx+(xz^2+\cos y)dy+(2xyz-z)dz$ 与路径无关, 则 $f(y)=y$.

解析：令 $P=z^2f(y)+e^x, Q=xz^2+\cos y, R=2xyz-z$，由积分与路径无关，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}&=2xz-2xz=0\\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}&=2zf(y)-2yz=0\\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}&=z^2-z^2f'(y)=0\end{aligned}$$

由上可解得，$f(y)=y$。

二、解答题解析

1.（10 分）求 $\iint_D\frac{2x}{y^2+xy^3}dxdy$, 其中 D 是由曲线 $xy=1, xy=2, y^2=x, y^2=2x$ 围成的有界区域.

解析：由积分区域形式，考虑做换元 $u = xy, v = \dfrac{y^2}{x}$，则新的积分区域为 $\{(u,v) \mid 1 \le u \le 2, 1 \le v \le 2\}$。为了计算雅可比行列式，先计算

$$\begin{aligned}\left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right| &= \left\|\begin{matrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{matrix}\right\| \\ &= \left\|\begin{matrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x}\end{matrix}\right\| \\ &= \frac{3y^2}{x} = 3v\end{aligned}$$

所以 $\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \dfrac{1}{3v}$。

由此，原积分变为

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{2x}{y^2+xy^3}dxdy &= \iint_{D_{uv}} \frac{2}{v(1+u)} \cdot \frac{1}{3v}dudv \\ &= \int_1^2 \int_1^2 \frac{2}{3v^2(1+u)}dudv \\ &= \frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}\end{aligned}$$

2.（10 分）曲面 $\Sigma : x = u\cos v, y = u\sin v, z = v \quad (0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2\pi)$. 求积分 $\displaystyle\iint_\Sigma \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dS$.

解析：首先计算曲面 Σ 的面积元素 dS。由参数化方程，计算：

$$(A,B,C) = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right) = (\sin v, -\cos v, u)$$

所以 $dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv = \sqrt{1+u^2}dudv$。

由此，原积分变为

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{v}{\sqrt{1+u^2}} \cdot \sqrt{1+u^2}dudv \\ &= \int_0^{2\pi} vdv \int_0^1 du = 2\pi^2.\end{aligned}$$

3.（10 分）设 S 是有界闭区域 $\Omega = \{(x,y,z) | 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4, z \ge \sqrt{x^2+y^2}\}$ 的边界面的外侧, 求 $I = \displaystyle\iint_S xz\,dy\wedge dz + yz\,dz\wedge dx + z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\wedge dy$.

解析：闭合曲面，考虑直接使用 Gauss 公式：

$$I = \iiint_\Omega 2z + \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$$

做球坐标变换，设 $x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi$，代入 Ω 的不等式集，得到 $1 \le r^2 \le 4, r\cos\varphi \ge r\sin\varphi$，即 $1 \le r \le 2, \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$，$\theta \in [0, 2\pi]$。所以

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^2 (2r\cos\varphi + r\sin\varphi)\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta = \frac{15\pi(\pi+2)}{16}$$

4.（10 分）计算 $\displaystyle\oint_{L^+} \frac{y\,dx - (x-2)dy}{(x-2)^2+4y^2}$, 其中 $L^+ : x^2+y^2 = 10$, 逆时针方向.

解析：令 $P=\dfrac{y}{(x-2)^2+4y^2}, Q=-\dfrac{x-2}{(x-2)^2+4y^2}$，则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$，很适合用格林公式，但原被积函数在 $x^2+y^2\le 10$ 区域中的 $(2,0)$ 处无定义，所以不能直接对这个区域使用格林公式，考虑挖洞处理，取 $C_\epsilon^+:(x-2)^2+4y^2=\epsilon^2$，顺时针方向，其中 $\epsilon<1$，再令 $D_\epsilon=\{(x,y)|(x-2)^2+4y^2\ge\epsilon^2, x^2+y^2\le 10\}$，对 D_ϵ 的边界（即 $L^+\cup C_\epsilon^+$）使用格林公式：

$$\oint_{L^+}\frac{y\,dx-(x-2)dy}{(x-2)^2+4y^2}+\oint_{C_\epsilon^+}\frac{y\,dx-(x-2)dy}{(x-2)^2+4y^2}=\iint_{D_\epsilon}0dxdy=0$$

由此可得

$$\oint_{L^+}\frac{y\,dx-(x-2)dy}{(x-2)^2+4y^2}=\oint_{C_\epsilon^-}\frac{y\,dx-(x-2)dy}{(x-2)^2+4y^2}$$

其中 $C_\epsilon^-:(x-2)^2+4y^2=\epsilon^2$，逆时针方向。对其做参数化：$x=2+\epsilon\cos t, y=\dfrac{\epsilon}{2}\sin t, t:0\to 2\pi$，则

$$\begin{aligned}\oint_{C_\epsilon^-}\frac{y\,dx-(x-2)dy}{(x-2)^2+4y^2}&=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{\epsilon}{2}\sin t\cdot(-\epsilon\sin t)-\epsilon\cos t\cdot\frac{\epsilon}{2}\cos t}{\epsilon^2}dt\\&=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}dt=-\pi\end{aligned}$$

所以 $\displaystyle\oint_{L^+}\frac{y\,dx-(x-2)dy}{(x-2)^2+4y^2}=-\pi$。

5.（10 分）求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(n+1)!}$ 的收敛域及和函数.

解析：先计算收敛域，使用比值判敛法：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)x^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{nx^n}{(n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x}{(n+2)n}\right|=0<1$$

所以该幂级数恒收敛，收敛域为 $\mathbb{R}$。

接下来计算和函数，看到阶乘，联想到 e^x 的幂级数展开，先把多余的 n 去掉，记 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(n+1)!}$，当 $x\neq 0$ 时，有

$$\begin{aligned}\frac{S(x)}{x}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}\\\int_0^x\frac{S(t)}{t}dt&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}=\frac{e^x-1-x}{x}\\\frac{S(x)}{x}&=(\frac{e^x-1-x}{x})'=\frac{(x-1)e^x+1}{x^2}\\S(x)&=\frac{(x-1)e^x+1}{x}\end{aligned}$$

而 $S(0)=0$，所以和函数 $S(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)e^x+1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$。

6.（10 分）设 $f(x)$ 为以 2π 为周期的函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上的定义为 $f(x)=\dfrac{2\pi|x|-x^2}{4}, x\in[-\pi,\pi]$.

(I) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数.

(II) 利用 $f(x)$ 的 Fourier 级数求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

(III) 利用 $f(x)$ 的 Fourier 级数求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

解析:

(I) 首先计算 $f(x)$ 的 Fourier 系数，$f(x)$ 是偶函数，所以只需要计算 a_0 和 a_n，其中

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{\pi^2}{3}$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=-\frac{1}{n^2},n=1,2,\dots$$

所以 $f(x)$ 的 Fourier 级数为：

$$f(x)\sim\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(nx)$$

(II) 由于 $f(x)$ 处处连续，所以 $f(x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(nx)$，令 $x=0$，得到

$$0=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

(III) 由 Parsval 等式，有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

将 a_0 和 a_n 代入，得到

$$\frac{\pi^4}{15}=\frac{\pi^4}{18}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^4}+0\right)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

7. (10 分) 设函数 $f(x,y,z)$ 在单位球 $B=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$ 上连续可微, 且当 (x,y,z) 满足 $x^2+y^2+z^2=1$ 时, $f(x,y,z)=0$. 证明:

(I) $\iiint_B\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)dxdydz=-3\iiint_B f(x,y,z)dxdydz.$

(II) $\left|\iiint_B f(x,y,z)dxdydz\right|\le\frac{\pi}{3}\max\limits_{(x,y,z)\in B}||\nabla f(x,y,z)||$. 其中 $\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$.

解析:

(I) 由 Gauss 公式,

$$\begin{aligned}&\iint_{\partial B}xf(x,y,z)\,dy\wedge dz+yf(x,y,z)\,dz\wedge dx+zf(x,y,z)\,dx\wedge dy\\&=\iiint_B\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+3f(x,y,z)\right)dxdydz\end{aligned}$$

而在 $\partial B: x^2+y^2+z^2=1$ 上，$f(x,y,z)=0$，所以等式左侧等于 0，得到

$$\iiint_B \left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)dxdydz=-3\iiint_B f(x,y,z)dxdydz$$

(II) 记 $M=\max\limits_{(x,y,z)\in B}||\nabla f(x,y,z)||$，由 **(I)**，有

$$\begin{aligned}\left|\iiint_B f(x,y,z)dxdydz\right| &= \frac{1}{3}\left|\iiint_B (x,y,z)\cdot\nabla f(x,y,z)dxdydz\right|\\ &\le \frac{1}{3}\iiint_B ||(x,y,z)||\cdot||\nabla f(x,y,z)||dxdydz\\ &\le \frac{1}{3}M\iiint_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz\\ &= \frac{1}{3}M\cdot\pi=\frac{\pi}{3}M\end{aligned}$$

三、附加题解析

设 $f_n(x)(n=1,2,\dots)$ 在区间 $[a,b]$ 上可微, 且 $\exists M>0$ 使得 $\forall n=1,2,\dots,\forall x\in[a,b]$ 都有 $|f_n'(x)|\le M$. 证明: 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛, 则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

解析：回顾 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛的定义，即要求 $\forall\epsilon>0,\exists N(\epsilon)$ 使得当 $n>N$ 时，$\forall p\in\mathbb{N}^+,\forall x\in[a,b]$ 都有 $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\epsilon$。

先看看题目条件能得到什么。$|f_n'(x)|\le M \implies |f_n(x)-f_n(y)|\le M|x-y|$，函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛等价于对 $\forall x\in[a,b],\forall\epsilon>0,\exists N(x,\epsilon)$ 使得当 $n>N$ 时，$\forall p\in\mathbb{N}^+$ 都有 $|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\epsilon$。

下面开始证明：对 $\forall\epsilon>0$，取正整数 $K>\frac{3M(b-a)}{\epsilon}$，记 $x_k=a+\frac{k(b-a)}{K}, k=0,1,\dots,K$，则 $\forall k\in\{0,1,\dots,K-1\}$，都有 $|x_{k+1}-x_k|=\frac{b-a}{K}<\frac{\epsilon}{3M}$。

对 $\forall k\in\{0,1,\dots,K\}$，由逐点收敛性，存在正整数 $N(x_k,\epsilon)$，使得当 $n>N(x_k,\epsilon)$ 时，$\forall p\in\mathbb{N}^+$ 都有 $|f_{n+p}(x_k)-f_n(x_k)|<\frac{\epsilon}{3}$，取 $N=\max\limits_{k\in\{0,1,\dots,K\}}N(x_k,\epsilon)$，则当 $n>N$ 时，$\forall k\in\{0,1,\dots,K\},\forall p\in\mathbb{N}^+$ 都有 $|f_{n+p}(x_k)-f_n(x_k)|<\frac{\epsilon}{3}$。

接下来，考虑任意 $x\in[a,b]$，存在 $k\in\{0,1,\dots,K-1\}$ 使得 $x_k\le x\le x_{k+1}$，则 $|x-x_k|\le\frac{b-a}{K}<\frac{\epsilon}{3M}$。因此，当 $n>N$ 时，对 $\forall p\in\mathbb{N}^+$，有

$$\begin{aligned}|f_{n+p}(x)-f_n(x)| &\le |f_{n+p}(x)-f_{n+p}(x_k)|+|f_{n+p}(x_k)-f_n(x_k)|+|f_n(x_k)-f_n(x)|\\ &\le M\cdot\frac{\epsilon}{3M}+\frac{\epsilon}{3}+M\cdot\frac{\epsilon}{3M}=\epsilon\end{aligned}$$

因此，$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。