第二章习题 参考答案

2.1. 与课上习题（教材例 2.1.9）类似，具体过程略.

2.2. 令 $B = \arctan x \mid x \in A$，显然 B 中元素均在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 中. 将此区间等分为 12 份，则必有两元素 $\arctan x, \arctan y$ 在同一份中，不妨设 $\arctan x > \arctan y$，则

$$\tan\left(\arctan x - \arctan y\right) = \frac{x-y}{1+xy} \le \tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$$

2.3. 考虑每一行的染色，必有两个方格 i, j 染同一颜色 c，令 (i, j, c) 代表这一行的颜色. 在此视角下，行染色方式共有 $m\binom{m+1}{2}$ 种，根据鸽巢原理必有两行同色. 这意味着这两行在相同两列的四个方格染同色，即证.

2.4. 按模 10 的余数分为 $\{[0]\}, \{[5]\}, \{[1], [9]\}, \{[2], [8]\}, \{[3], [7]\}, \{[4], [6]\}$ 六类，必有两数位于同一类中，其和或差即满足要求.

2.5. 令进制为 k，若 $\frac{p}{q}$ 在此进制下是无限不循环小数，则意味着 $k^n p \bmod q$（$n = 0, 1, 2, \cdots$）有无穷多种可能的取值，显然矛盾. 故只可能为有限或无限循环小数.

2.6. 题设命题成立. 考虑数列中各项模 233 的余数，必有两项相同，二者之差为数列中某一项与 100^k 之积. 注意到 100 与 233 互质，因此必有数列中一项能被 233 整除.

2.7.

(1) 将 $[0, 1]$ 等分为 $n-1$ 段，则必有一段中含有 2 个点；

(2) 考虑 $\sqrt{n} = \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$ 的最坏情况，即证在 k^2 个点中必有两点间距不大于 $\frac{\sqrt{2}}{k-1}$. 将正方形等分为 $(k-1)^2$ 个边长为 $\frac{1}{k-1}$ 的小正方形，则必有一个小正方形中含有 2 个点.

2.8. 令 $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$，则数列

$$S_0, S_1, \cdots, S_{77}, S_0 + 22, S_1 + 22, \cdots, S_{77} + 22$$

中共有 156 项，但每一项均在 $0, 1, 2, \cdots, 154$ 中取值，其中必有两项相等. 余下略.

2.9. 设 $|B| \le 99$. 考虑向 B 中添加一个元素 b，该元素需满足 $\left|a_i - a_j\right| \ne \left|b_k - b\right|$. 固定 b_k，选取 $\left|a_i - a_j\right|$ 有 $\binom{101}{2} = 5050$ 种方式，选取 $b_k - b$ 符号有两种方式，共计从 S 中排除 10100 个元素；另外 b_k 本身也无法选择，合计 10101 个. 因此，S 中至多 $10101 \times 99 = 999999$ 个元素无法加入 B 中，这时总能向其中加入一个元素使 $|B|$ 增加 1，故能取到 $|B| = 100$.

若向 B 中添加元素时选最小值，则可将排除的元素数目从 10101 降至 5051，从而得到更强的结论．相关讨论略．

本题与鸽巢原理关系不够明确，在此向各位同学致歉．

2.10. 讨论该集合中元素模 3 的余数．每种余数最多有 2 个元素，否则三个同余数元素之和大于 3 且能被 3 整除，是合数．同时，三种余数的元素不能均存在，否则其和同样是合数．因此，集合中至多有 4 个元素，其模 3 的余数有两种取值，每种取值两个元素．

我们可逆向思考构造此集合．注意到集合中三个元素之和模 3 的余数必然是两个 1 和两个 2．任取两个足够大的、模 3 余 1 的质数（例如 $13, 19$），再任取两个足够大的、模 3 余 2 的质数（例如 $11, 17$），即可列方程求解集合中的四个元素（例如 $\{1, 3, 7, 9\}$）．容易看出，任意四个足够大的、模 3 余数满足要求的质数都对应一个题目要求的集合，因此答案有无穷多种．这里的“足够大”指的是大于 9，因为简单讨论可知集合中不能含有偶数，而三个奇数之和至少是 9．

2.11. 将 S 中元素排成一列 $s_1, s_2, \cdots, s_n$，记前缀和序列为 $T_n = \sum_{i=1}^{n} s_i$. 考虑各 $T_i - \lfloor T_i \rfloor$，若其在 $\left[0, \frac{1}{n+1}\right] \cup \left[\frac{n}{n+1}, 1\right]$ 中，则令 $A = \left\{s_k \mid k \le i\right\}$ 即可．否则将 $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right]$ 等分为 $n-1$ 个长度为 $\frac{1}{n+1}$ 的区间，必有 T_i, T_j 位于同一区间中；不妨设 $i < j$，则令 $A = \left\{s_k \mid i < k \le j\right\}$ 即可．

2.12. 注意到

$$\sum_{p} f(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i (n-1)! \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} n! \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{1}$$

若不存在 $f(p) - f(q)$ 是 $n!$ 的倍数，则 $f(p)$ 模 $n!$ 的取值遍历 $0, 1, 2, \cdots, n! - 1$．这意味着

$$\sum_{p} f(p) \bmod n! = \sum_{i=0}^{n!-1} i \bmod n! = \frac{n!(n!-1)}{2} \bmod n! \tag{2}$$

当 $n \ge 2$ 时 $n!$ 是偶数，而 n 是奇数，因此式 (1) 模 $n!$ 的余数为 0，而式 (2) 显然非零，矛盾．故原命题成立．

本题的上述证法最为简单，但是与鸽巢原理似乎没有什么关系，在此向各位同学致歉．

2.13. 用反证法，先假设所有三角形大小都大于 2．由此易见 x 轴上必恰有两点：

- 若有至多一点，则由鸽巢原理，x 轴某一侧有三点，因为其均为整点，显然其为顶点的三角形大小不超过 2；
- 若有至少三点，则这三点直接构成零面积三角形．

同理，y 轴上也恰有两点．以上四点中，若某一点距原点距离为 1，则该点与另一轴上两点构成的三角形大小不超过 2，因此这四点坐标必为 $(\pm 2, 0)$ 和 $(0, \pm 2)$．现在任取一个位于某一象限中的点，该点和与该象限相邻两半轴上的两点构成三角形面积必不大于 2，矛盾．

此题结论可加强，事实上各点的坐标不必为整数，结论仍然成立. 对这一问题有兴趣的同学可自行搜索 *Heilbronn Triangle Problem* 或阅读杨路、张景中、曾振柄先生发表于 *1992* 年的论文《最初几个 *Heilbronn* 数的猜想和计算》.

2.14. 若已知 $x \neq y \Rightarrow n \bmod x \neq n \bmod y$，则由 $n \bmod 1 = 0$ 可依次推得 $n \bmod 2 = 1$、$n \bmod 3 = 2$、……，直至 $n \bmod m = m - 1$．如此即有 $(n+1) \bmod M = 0$，矛盾.

2.15. 将 101 个正整数排成一列，其前缀和数列为 $S_1, S_2, \cdots, S_{101}$．考虑其中各项模 100 的余数，其中必有两项相等，因此存在连续若干元素之和是 100 的倍数，可能的取值为 100 或 200．若为 100，即证；若为 200，则其余元素之和为 100，同样可证.