第六次习题课解答 二重积分及计算

1. 求解下列各题:

（1）求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$.

（2）设 $f(x)=\int_1^x \sin t^2 dt$，求 $\int_0^1 f(x)dx$.

（3）当 $t\to 0^+$ 时，求无穷小量 $f(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}[1-\cos(x^2+y^2)]dxdy$ 的阶.

（4）令 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0\right\}$. 计算 $\iint\limits_{D}\dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$.

（5）设 $F(t)=\int_0^t dx\int_x^t e^{x+y}\cos\sqrt{y}dy$ （$t>0$），求 $F'(t)$.

（6）设 $f(x,y)$ 为连续函数且 $f(x,y)=f(y,x)$. 证明:

$$\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_0^x f(1-x,1-y)dy.$$

（7）将定积分 $\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$ 转化为二重积分计算.

（8）设 $f(x)\in C[0,1]$. 证明: $\int_0^1 e^{f(x)}dx\int_0^1 e^{-f(x)}dx\ge 1$.

2. 求解下列各题:

（1）设 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 是由锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 以及平面 $z=x$ 和 $x=0$ 围成，求空间区域 Ω 的体积.

（2）求曲线 $(x^2+y^2)^2=2ax^3$ 所围平面区域的面积.

(3) 分别求出由平面 $z=x-y,\ z=0$ 与圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 所围成的两个空间几何体的体积.

(4) 求两个球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 与 $x^2+y^2+(z-2)^2\le 4$ 所围立体的体积.

（5）求由曲线 $(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2})^2=x^2+y^2$ 所围成的平面图形的面积.

3. 通过适当的坐标变换，计算下列二重积分.

（1） $I=\iint\limits_{D}(\sqrt{x^2+y^2}+y)dxdy,$ 其中 D 是介于圆周 $x^2+y^2=4$ 与圆周 $(x+1)^2+y^2=1$ 之间的部分.

(2) $\iint\limits_D (\sqrt{x}+\sqrt{y})dxdy$， D是由$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$， $x=0$， $y=0$所围成的平面区域.

(3) $\iint\limits_D (x-y^2)dxdy$， D是由$y=2$， $y^2-y-x=1$， $y^2+2y-x=2$所围成的平面区域.

(4) $\iint\limits_D (x+y)\sin(x-y)dxdy, D=\{(x,y)\,|\,0\le x+y\le\pi, 0\le x-y\le\pi\}.$

(5) $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}dxdy, D=\{(x,y)\,|\,x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}.$

4. 解答证明题:

(1) 设 $f(x,y)\in C^2$ 且满足 $f(1,y)=0,\ \ f(x,1)=0$， $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$， 其中 $D=\left\{(x,y)\,|\ \ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\right\}$. 计算二重积分 $\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy.$

(2) 记 $D=\left\{(x,y)\,|\ \ |x|\le a,\ |y|\le a\right\}.$ 设 $f(x)$ 是连续偶函数，证明:

$$\iint\limits_D f(x-y)dxdy=2\int_0^{2a}(2a-u)f(u)du.$$

(3) 设 $f(u)$ 连续，且 $D=\{(x,y):|x|\le\dfrac{A}{2},|y|\le\dfrac{A}{2}\}.$ 证明:

$$\iint\limits_D f(x+y)dxdy=\int_{-A}^{A}f(u)(A-|u|)du\,.$$

(4) 记 $D_\delta=\left\{(x,y)\,|\ \ \delta^2\le x^2+y^2\le 1\right\}$. 设 $f(x,y)\in C^1$ 满足当 $x^2+y^2=1$时，有 $f(x,y)=0$. 证明: $\lim\limits_{\delta\to 0^+}\iint\limits_{D_\delta}\dfrac{xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)}{x^2+y^2}dxdy=-2\pi f(0,0).$

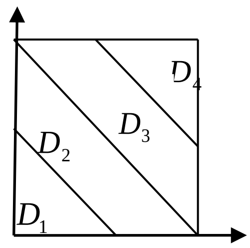
(5) 设 $f(x,y)\in C^2$ 且关于两个变量 x 和 y 的周期都为 1，即对任意的 (x,y), $f(x+1,y)=f(x,y),\quad f(x,1+y)=f(x,y)$. 若 $f(x,y)$ 满足 $\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}f(x,y)(f''_{xx}(x,y)+f''_{yy}(x,y))dy\ge 0,$ 证明: $f(x,y)$ 是常函数。

(6) 设 $f(x,y)\in C^2(D)$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$， 且 $f(x,y)$ 在闭单位圆盘 $\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上连续. 若函数 $f(x,y)$ 在 $\partial D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$ 上取值为常数零，证明: $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}f(x,y)[f''_{xx}(x,y)+f''_{yy}(x,y)]dxdy\le 0$.

(7) 设 $f(x)\in C[0,1]$ 且 $0<m\le f(x)\le M$ （$\forall x\in[0,1]$）.

证明：$\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}}\frac{f(x)}{f(y)}dxdy\le\frac{(M+m)^2}{4Mm}$.

（8）求 $I=\iint\limits_D[x+y]d\sigma$，其中 $D=[0,2]\times[0,2]$，$[x+y]$为取整函数。



（9）计算 $I=\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le R^2\right\}$ 且 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}\in C(D)$.

（10）计算 $I=\iint\limits_D\left|x^2+y^2-4\right|d\sigma$，$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 16\}$.

5. 利用二重积分理论，证明下列结论：设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

（1）$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)dx$；

（2）$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$.

（3）$\int_a^b dx\int_x^b f(x)f(y)dy=\frac{1}{2}(\int_a^b f(x)dx)^2$.

（4）若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负连续函数，则

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kxdx\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kxdx\right)^2\le\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2.$$

（5）若 $f(x),\ p(x),\ g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$p(x)$ 是正值函数，$f(x),\ g(x)$ 都是单调增加函数或都是单调减小函数，证明：

$$\int_a^b p(x)f(x)dx\cdot\int_a^b p(x)g(x)dx\le\int_a^b p(x)dx\cdot\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx.$$

（此不等式称为切比雪夫不等式）

=====
以下内容为学有余力的同学选做。

6. 设函数 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f_y'(x,y)$ 在 x -型区域

$$D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$$

上连续，其中 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，且 $\varphi(x)\le\psi(x)$．进一步假设 $f(x,\varphi(x))=0$，$\forall x\in[a,b]$．证明：存在常数 $C>0$，使得

$$\iint_D f^2(x,y)dxdy\le C\iint_D (f_y'(x,y))^2dxdy.$$

（这个不等式称作 Poincare 不等式）

以下部分内容大纲不做要求：

二重积分的积分区域和被积函数都是有界的，将有界区域推广到无界区域，就有无穷二重积分，将有界函数推广到无界函数，就有瑕二重积分，无穷二重积分和瑕二重积分统称为广义二重积分，下面只给出无穷二重积分收敛与发散的概念，瑕二重积分收敛与发散的概念可类似瑕积分写出。

定义：若函数 $f(x,y)$ 定义在无界区域 D 上，符号 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 称为无穷二重积分．如果任意包含原点的有界区域 G，函数 $f(x,y)$ 在 $G\cap D=E$ 上可积，设

$$d_G=\min\{\sqrt{x^2+y^2}\,|\,(x,y)\in\partial G\ \ (\text{区域}G\text{的边界})\}.$$

若极限 $\lim\limits_{d_G\to+\infty}\iint_E f(x,y)dxdy$ 存在，称无穷二重积分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 收敛，该极限称为函数 $f(x,y)$ 在无界区域 D 上的积分，且 $\iint_D f(x,y)dxdy=\lim\limits_{d_G\to+\infty}\iint_E f(x,y)dxdy.$ 若极限不存在，称无穷二重积分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ 发散.

7. 计算二重广义积分 $\iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy$.

8. 计算二重广义积分 $\iint_{R^2} e^{2xy-2x^2-y^2}dxdy$.