第七次习题课题目 三重积分及重积分的应用

1. 计算下列各题:

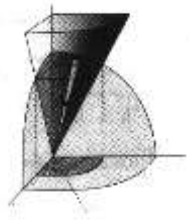
（1）设V是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和球面$x^2+y^2+z^2=R^2$所围成的区域，求三重积分$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$.

（2）求$\iiint\limits_\Omega (1+x^2+y^2)zdxdydz$，其中$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le H\right\}$.

（3）设$f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，令$F(t)=\iiint\limits_\Omega\left(z^2+f(x^2+y^2)\right)dxdydz$，其中$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le h,\ \ x^2+y^2\le t^2\right\}\quad(t>0)$. 求$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

（4）　求三重积分:$I=\iiint\limits_\Omega(x+y+z)dxdydz$，其中

$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$.



（5）　设$f(x)\in C^1(\mathbb{R})$满足$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=1$且

$V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le1\}$. 计算$\iiint\limits_V(5x^3+f'(z)+3)dxdydz.$

2. 计算下列立体的体积:

（1）　求由曲面$S:(x^2+y^2)^2+z^4=z$所围立体Ω的体积。

（2）　求由六个平面$3x-y-z=\pm1$，$-x+3y-z=\pm1$，$-x-y+3z=\pm1$所围立体Ω的体积。

（3）求曲面$\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$所围空间几何体$\Omega$的体积。

（4）设$a>0,b>0,c>0$. 计算曲面$\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2+\left(\dfrac{z}{c}\right)^2=1$与三个坐标面在第一卦限所围立体的体积。

3. 计算下列三重积分的值:

（1）$\iiint\limits_\Omega(x^2+z^2)dxdydz$，其中$\Omega$是球面$x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$所包围的空间区域。

（2）$\iiint\limits_\Omega\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}}dxdydz,\quad\Omega=\{(x,y,z)\,|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le1\}$.

（3）$\iiint\limits_\Omega x^2dxdydz$，其中$\Omega$由曲面$z=y^2$，$z=4y^2$及平面$z=x, z=2x, z=0, z=3$围成。

(4) $\iiint\limits_{\Omega}(x+|y|+|z|)dxdydz$，其中$\Omega=\{(x,y,z)\mid \quad |x|+|y|+|z|\le 1\}$.

(5) $\iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz$，$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 4, x^2+y^2+(z-2)^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$.

4. 解答下列各题:

(1) 计算螺旋面$S: x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi,\ \ z=a\varphi$（$0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi$，$a$为常数）的面积。

(2) 求由球面$x^2+y^2+z^2=a^2$和柱面$x^2+y^2=ax$（这里$a>0$）所围有界立体Ω的体积和表面积。(立体Ω称作 Viviani 立体)。

(3) 求两个圆柱$y^2+z^2=a^2$和$x^2+z^2=a^2$相交部分的体积和表面积，这里$a>0$.

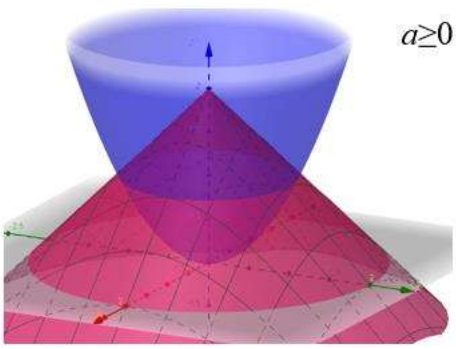
(4) 设环面S的参数方程:

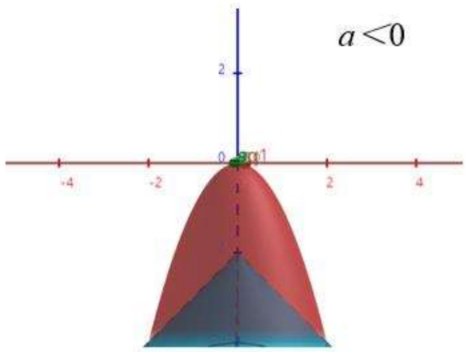
$x=(b+a\cos\theta)\cos\varphi$， $y=(b+a\cos\theta)\sin\varphi$， $z=a\sin\theta$，   (*)

$0\le\theta\le 2\pi$，$0\le\varphi\le 2\pi$，$0<a<b$.

求环面S的面积，以及由环面S所包围的立体Ω（实心轮胎）的体积。

(5) 求由曲面$x^2+y^2=az$与$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$所包围的空间几何体的表面积.





5. 设$A=(a_{ij})$为3×3实对称正定矩阵，$H(x)=\sum\limits_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$，则$H(x)=1$表示三维空间的一个椭球面。

(i) 证明：椭球面$H(x)=1$所包围立体Ω的体积为$V(\Omega)=\dfrac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}$.

(ii) 计算积分$I=\iiint\limits_{H(x)\le 1} e^{\sqrt{H(x)}}dx_1dx_2dx_3$.

广义重积分计算（这部分内容大纲不做要求，同学们根据自己的情况自由选择练习）

6. 计算广义三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$，其中 Ω 为无穷长的方体 Ω：

$0\le x,y\le 1$， $z\ge 0$.