清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 **微积分 A（2）**　　　　A 卷　　　　2025 年 6 月 13 日 9:00-11:00

系名__________　**班级**__________　**姓名**__________　**学号**__________

一. 填空题（每个空 3 分，共 10 题）**（请将答案直接写在答题卡相应横线上！）**

1. 函数 $f(x,y,z)=x^2+xy$ 在 $(1,0,1)$ 处沿方向 $\vec{v}=(2,-1,2)$ 的方向导数为________。

2. 设 $z=\arctan(xy^2)$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)}=$________。

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^p\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的两个偏导数存在，则 p 的范围为________。

4. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\cos(n^3)}{n^2}+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ 的敛散性（ 选填：“绝对收敛”、“条件收敛”或“发散”） __________。

5. $\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{3}x}\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y=$ ________________。

6. 设 $L:x^2+(y-1)^2=1$，则 $\int_L\left(x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right)\mathrm{d}l=$________。

7. 设 $L^{+}:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ z=x\end{cases}$，从 z 轴正向朝下看去，逆时针方向为正方向，则 $\int_{L^{+}}xz\mathrm{d}z=$ ________。

8. 微分方程 $(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y=0$ 的通解为____________。

9. 设 $f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，则 $f(x)$ 在点 $x_0=0$ 处的 Taylor 级数为______________。

10. 设函数 $f(y)$ 可微，且 $\int_{L(A)}^{(B)}(z^2f(y)+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(xz^2+\cos y)\mathrm{d}y+(2xyz-z)\mathrm{d}z$ 与路径无关，则 $f(y)=$________。

二. 解答题（共 8 题）（**请写出详细的计算过程和必要的根据！**）

11. （10 分）求 $\iint_D \frac{2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2+xy^3}$，其中 D 是由曲线 $xy=1, xy=2, y^2=x, y^2=2x$ 围成的有界区域。

12. （10 分）曲面 $\Sigma: x=u\cos v, y=u\sin v, z=v\ (0\le u\le 1, 0\le v\le 2\pi)$. 求 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}S$.

13. （10 分）设 S 是有界闭区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|1\le x^2+y^2+z^2\le 4, z\ge\sqrt{x^2+y^2}\right\}$ 的边界面的外侧，求 $I=\oiint_S xz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

14. （10 分）计算 $\oint_{L^+} \frac{y\mathrm{d}x-(x-2)\mathrm{d}y}{(x-2)^2+4y^2}$，其中 $L^+: x^2+y^2=10$，逆时针方向。

15. （10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(n+1)!}$ 的收敛域及和函数。

16. （10 分）设 $f(x)$ 为 2π 周期函数，在 $[-\pi,\pi]$ 上的定义为 $f(x)=\frac{2\pi|x|-x^2}{4}$，$x\in[-\pi,\pi]$.

（I）求 $f(x)$ 的 Fourier 级数；

（II）利用 $f(x)$ 的 Fourier 级数求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$；

（III）利用 $f(x)$ 的 Fourier 级数求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

17. （10 分）设函数 $f(x,y,z)$ 在单位球 $B=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$ 上连续可微，且当 (x,y,z) 满足 $x^2+y^2+z^2=1$ 时，$f(x,y,z)=0$. 证明：

（I）$\iiint\limits_B\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-3\iiint\limits_B f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

（II）$\left|\iiint\limits_B f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right|\le\frac{\pi}{3}\max\limits_{(x,y,z)\in B}\|\nabla f(x,y,z)\|$，其中 $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

三. 附加题（共一题，附加题不计入总分，仅用于评判成绩 A+）

设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $[a,b]$ 上可微，且 $\exists M>0$，使得 $\forall n=1,2,\cdots,\forall x\in[a,b]$，都有 $|f_n'(x)|\le M$. 证明：若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛，则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。