第四次习题课参考解答 Taylor 展式、极值

1． 将函数$\ln(1+x+y+z)$在点$(x,y,z)=(0,0,0)$分别展开成带 Peano 余项的二阶泰勒展式和带有 Lagrange 余项的一阶 Taylor 展式。

解：将$\ln(1+u)$在$u=0$处展开成带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式：

$$\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^2+o(u^2)\text{，}\ u\to 0\,.$$

将$u=x+y+z$代入到上式即得

$$\ln(1+x+y+z)=(x+y+z)-\frac{1}{2}(x+y+z)^2+o(\rho^2)\text{，}\ \rho\to 0\,.$$

上式即为所求的带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式。这里$\rho^2=x^2+y^2+z^2$，注意

$o((x+y+z)^2)=o(\rho^2)$.

为了求带 Lagrange 余项的 Taylor 展式，我们需要求函数的 Hesse 矩阵。容易计算

$$\mathrm{grad}(\ln(1+x+y+z))=\frac{1}{1+x+y+z}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

故$\ln(1+x+y+z)$在(x,y,z)处的 Hesse 矩阵为

$$H(x,y,z)=\frac{-1}{(1+x+y+z)^2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}.$$

从而$\ln(1+x+y+z)$在$(0,0,0)$处带 Lagrange 余项的一阶 Taylor 展式为

$$\ln(1+x+y+z)=(x+y+z)-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}H(\theta x,\theta y,\theta z)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$=(x+y+z)-\frac{1}{2}\frac{(x+y+z)^2}{[1+\theta(x+y+z)]^2}\,.$$

其中$\theta\in(0,1)$.

2. 设 $f(x,y)\in C^2$. 证明：$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(2h,e^{-\frac{1}{2h}})-2f(h,e^{-\frac{1}{h}})+f(0,0)}{h^2}$.

证明：分别将 $f(2h,e^{-\frac{1}{2h}})$ 与 $f(h,e^{-\frac{1}{h}})$ 在$(0,0)$点展开为带有拉格朗日余项的一阶的泰勒展式

$$f(2h, e^{-\frac{1}{2h}}) = f(0,0) + f_x'(0,0)2h + f_y'(0,0)e^{-\frac{1}{2h}} + \frac{1}{2} f_{xx}''(2\theta_1 h, \theta_1 e^{-\frac{1}{2h}})4h^2$$
$$+ f_{xy}''(2\theta_1 h, \theta_1 e^{-\frac{1}{2h}})2he^{-\frac{1}{2h}} + \frac{1}{2} f_{yy}''(2\theta_1 h, \theta_1 e^{-\frac{1}{2h}})e^{-\frac{1}{h}},\ \theta_1 \in (0,1),$$

$$f(h, e^{-\frac{1}{h}}) = f(0,0) + f_x'(0,0)h + f_y'(0,0)e^{-\frac{1}{h}} + \frac{1}{2} f_{xx}''(\theta_2 h, \theta_2 e^{-\frac{1}{h}})h^2$$
$$+ f_{xy}''(\theta_2 h, \theta_2 e^{-\frac{1}{h}})he^{-\frac{1}{h}} + \frac{1}{2} f_{yy}''(\theta_2 h, \theta_2 e^{-\frac{1}{h}})e^{-\frac{2}{h}},\ \theta_2 \in (0,1),$$

由于 $f(x,y)$ 的二阶偏导数在点 $(0,0)$ 连续，且注意到 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{2h}}}{h} = 0,\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} = 0$，因此

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2h, e^{-\frac{1}{2h}}) - 2f(h, e^{-\frac{1}{h}}) + f(0,0)}{h^2}$$
$$= \lim_{h\to 0^+}[f_y'(0,0)\frac{e^{-\frac{1}{2h}} - 2e^{-\frac{1}{h}}}{h^2} + 2f_{xx}''(2\theta_1 h, \theta_1 e^{-\frac{1}{2h}}) - f_{xx}''(\theta_2 h, \theta_2 e^{-\frac{1}{h}}) + 2f_{xy}''(2\theta_1 h, \theta_1 e^{-\frac{1}{2h}})\frac{e^{-\frac{1}{2h}}}{h}$$
$$-2f_{xy}''(\theta_2 h, \theta_2 e^{-\frac{1}{h}})\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} + \frac{1}{2}f_{yy}''(2\theta_1 h, \theta_1 e^{-\frac{1}{2h}})\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h^2} - f_{yy}''(\theta_2 h, \theta_2 e^{-\frac{1}{h}})\frac{e^{-\frac{2}{h}}}{h^2}]$$
$$= f_{xx}''(0,0).$$

证毕

3．在周长为 $2p$ 的三角形中求出满足下述要求的三角形：绕自己的一边旋转时所形成的旋转体的体积最大。

解：设三角形三边的长分别为 $x,\ y,\ 2p-x-y$. 不妨设绕边长为 x 的边旋转，并假设该边上的高为 h. 则三角形的面积为 $S = \frac{xh}{2}$. 另一方面，根据三角形面积的海伦公式知

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

于是所求旋转体的体积为 $V = V(x,y) = \frac{1}{3}\pi h^2 x = \frac{4p\pi}{3}\frac{(p-x)(p-y)(x+y-p)}{x}$.

令 $\begin{cases} V_x' = 0 \\ V_y' = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} (2p-2x-y)x - (p-x)(x+y-p) = 0 \\ 2p-x-2y = 0, \end{cases}$

解得 $x = \frac{p}{2},\ y = \frac{3p}{4}$. 故所求三角形三边的长分别为 $\frac{p}{2},\ \frac{3p}{4},\ \frac{3p}{4}$. 解答完毕。

4．设二元函数 $f(x,y)$ 在全平面上处处可微，且满足条件 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\infty$.

试证：对于任意给定的向量 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$，均存在一点 $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$ 使得 $\mathrm{gradf}(\xi,\eta) = (a,b)$.

证明：由于 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty$，因此对于任意给定的向量 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$，有

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty}\frac{f(x,y)-ax-by}{\sqrt{x^2+y^2}}=+\infty .$$

故当 $x^2+y^2\to+\infty$ 时，函数

$$g(x,y)=f(x,y)-ax-by\to+\infty .$$

任取 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$，令 $g(x_0,y_0)=M$．则 $\exists d>0\ s.t.\ \forall(x,y),$ 当 $\sqrt{x^2+y^2}>d$ 时，有 $g(x,y)>M$．故存在 $(x_1,y_1)\in D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le d\}$ 使得 $g(x_1,y_1)=\min\limits_{(x,y)\in D}g(x,y)$．显然，$g(x_1,y_1)=\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}g(x,y)$．故 (x_1,y_1) 是 $g(x,y)$ 的极小值点，由极值的必要条件知

$$\mathrm{grad}\, g(x_1,y_1)=(0,0).$$

从而 $\mathrm{grad}\, f(x_1,y_1)=(a,b)$．证毕

5. 若 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$，$f'_x(x,0)=(x+1)\mathrm{e}^x$，$f(0,y)=y^2+2y$．求 $f(x,y)$ 的极值.

解：因为 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$，因此

$$\begin{aligned}f'_x(x,y)&=f'_x(x,0)+\int_0^y f''_{xy}(x,v)\mathrm{d}v\\&=(x+1)\mathrm{e}^x+\int_0^y 2(v+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}v\\&=(x+1)\mathrm{e}^x+(y^2+2y)\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x[x+(y+1)^2],\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(0,y)+\int_0^x f'_x(u,y)\mathrm{d}u\\&=y^2+2y+\int_0^x (u\,\mathrm{e}^u+(y+1)^2\,\mathrm{e}^u)\mathrm{d}u\\&=x\mathrm{e}^x+(y^2+2y)\mathrm{e}^x .\end{aligned}$$

所以 $f'_y(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$．令 $f'_y(x,y)=0$ 解得 $y=-1$，再由 $f'_x(x,y)=0$ 解得 $x=0$．故唯一的驻点是 $(x,y)=(0,-1)$．由于 $f''_{xx}(0,-1)=2,\ f''_{xy}(0,-1)=0,\ f''_{yy}(0,-1)=2$，这样

$$f''_{xx}(0,-1)f''_{yy}(0,-1)-(f''_{xy}(0,-1))^2=4>0,\ \ f''_{xx}(0,-1)=2>0,$$

所以 $(0,-1)$ 是函数的极小值点，且极小值 $f(0,-1)=-1$.

6. 假设 $u(x,y)$ 在闭圆盘 $\bar{D}=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\right\}$ 上连续，在开圆盘

$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\right\}$内二阶连续可微，且满足微分方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$．若在圆盘边界$\left\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\right\}$上，$u(x,y)\ge 0$，证明：在$\bar{D}$上，有$u(x,y)\ge 0$．

证明：根据连续函数在有界闭区域上可取到最值可知，函数$u(x,y)$在有界闭域上的某点$(x_0,y_0)\in\overline{D}$处必取得最小值。若最小值非负，则结论得证。假设最小值是负的，即$u(x_0,y_0)<0$．由条件知函数$u(x,y)$在边界$\left\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\right\}$上非负，因此点$(x_0,y_0)$位于开区域$D$内，从而是函数$u(x,y)$的驻点，利用函数在驻点处带有皮亚诺余项的二阶泰勒展式知，Hesse 矩阵$H_u(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{yx} & u''_{yy}\end{pmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)}$半正定．由于矩阵的特征值之和等于矩阵的迹，因此$(u''_{xx}+u''_{yy})|_{(x_0,y_0)}\ge 0$．另一方面，由条件知，

$$(u''_{xx}+u''_{yy})|_{(x_0,y_0)}=u(x_0,y_0)<0.$$

这就得到了矛盾。所以$u(x_0,y_0)\ge 0$且对$\forall(x,y)\in\bar{D}$，$u(x,y)\ge u(x_0,y_0)\ge 0.$ 证毕

7. 设$f(x,y)$是定义在$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\right\}$上的可微函数，$\left|f(x,y)\right|\le 1$．试证：在$D$内存在一点$(x_0,y_0)$使得$\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right]^2+\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]^2\le 16$．

证明：令$g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$, 则在单位圆周$\partial D=\{(x,y)\big| x^2+y^2=1\}$上，有$g(x,y)\ge 1.$ 又，$g(0,0)=f(0,0)\le 1,$ 故有界闭区域$D=\{(x,y)\big| x^2+y^2\le 1\}$上连续函数$g(x,y)$的最小值一定在区域$D$的内部取得，因此该最小值点是函数的极小值点．不妨设$g(x,y)$在单位圆内部(x_0,y_0)处取得极小值，则$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)=0,\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)=0$，从而

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|=4|x_0|,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|=4|y_0|.$$

将上述两式平方相加即得$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|^2+\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|^2=16(x_0^2+y_0^2)\le 16.$ 证毕

8. 已知二阶连续可微函数$f(u,v)$在点$(0,0)$处带有皮亚诺余项的二阶 Taylor 展开式为

$$f(u,v)=1+2u-uv+v^2+o(u^2+v^2),\quad (u,v)\to(0,0),$$

令 $w=f(x+y+z,xyz)$. 求 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(1,0,-1)$.

解: $f(u,v)$ 在点 $(0,0)$ 处带有皮亚诺余项的二阶 Taylor 展开式为

$$\begin{aligned} f(u,v)=&\, f(0,0)+f_u'(0,0)u+f_v'(0,0)v\\ &+\frac{1}{2}(f_{uu}''(0,0)u^2+2f_{uv}''(0,0)uv+f_{vv}''(0,0)v^2)+o(u^2+v^2),\quad (u,v)\to(0,0),\end{aligned}$$

又知 $f(u,v)=1+2u-uv+v^2+o(u^2+v^2),\quad (u,v)\to(0,0)$, 因此

$$f_u'(0,0)=2,\ f_v'(0,0)=0,\ f_{uu}''(0,0)=0,\ f_{uv}''(0,0)=-1,\ f_{vv}''(0,0)=2.$$

因为 $\dfrac{\partial w}{\partial x}=f_u'(x+y+z,xyz)+yzf_v'(x+y+z,xyz),$

所以 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(1,0,-1)=f_{uu}''(0,0)-f_{uv}''(0,0)-f_v'(0,0)=1.$

解法二: 因为 $f(u,v)=1+2u-uv+v^2+o(u^2+v^2),\quad (u,v)\to(0,0)$, 因此

$$\begin{aligned} w(x,y,-1)&=f(x+y-1,-xy)\\ &=1+2(x+y-1)-(x+y-1)(-xy)+(-xy)^2+o((x+y-1)^2+(-xy)^2)\\ &=1+2(x-1)+2y+(x-1)y+2y^2+o((x-1)^2+y^2),\quad (x,y)\to(1,0),\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(1,0,-1)=1$.

9. 求原点到曲面 $z^2=xy+x-y+4$ 的最短距离 .

分析: 所求问题实际上是当动点落在曲面 $z^2=xy+x-y+4$ 上时, 求函数 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值, 因此是条件极值问题。

解法一、将条件极值问题转化为无条件极值, 即在 $\mathbb{R}^2$ 上求二元函数

$f(x,y)=x^2+y^2+xy+x-y+4$ 的最小值。

解方程组 $\begin{cases} f_x'=0\\ f_y'=0,\end{cases}$ 求得唯一的一组解 $(x,y)=(-1,1)$.

将这组解代入约束条件 $z^2=xy+x-y+4$ 立得 $z=\pm1$.

因此函数 $f(x,y)$ 在整个平面上有且仅有两个驻点 $(-1,1,1)$ 和 $(-1,1,-1)$.

由于函数 $f(x,y)$ 是二次多项式，它的 Hesse 矩阵是常数阵$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，这是正定矩阵，因此

函数 $f(x,y)$ 在这两个驻点处均取得极小值 3. 由此断言，所求的最短距离为 $\sqrt{3}$. 解答完毕。

解法二、利用 Lagrange 乘子法求解.

令 $L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z^2-xy-x+y-4)$. 解方程组

$$\begin{cases} L'_x = 2x-\lambda(y+1)=0 \\ L'_y = 2y+\lambda(-x+1)=0 \\ L'_z = 2z+2\lambda z=0 \\ z^2-xy-x+y-4=0 \end{cases}$$

由上述第三个方程可知 $\lambda=-1$ 或 $z=0$.

情形 (1). $\lambda=-1$. 联立前两个方程得 $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x+2y=1. \end{cases}$

求得唯一的解：$x=-1, y=1$. 将 $x=-1, y=1$ 代入第四个方程得 $z=\pm1$.

这就得到 Lagrange 函数的两个驻点 $(-1,1,1)$ 和 $(-1,1,-1)$.

情形 (2). $z=0$. 联立前两个方程得 $\begin{cases} 2x-\lambda y=\lambda \\ -\lambda x+2y=-\lambda. \end{cases}$

故 $(2-\lambda)(x+y)=0$.

(i) 当 $\lambda=2$ 时，解得 $x=y+1$. 代入方程 $xy+x-y+4=0$，得 $y^2+y+5=0$，无实数解。

(ii) 当 $\lambda\neq2$ 时，则 $y=-x$.

代入方程 $xy+x-y+4=0$，得 $-x^2+2x+4=0$. 其解为 $x=1\pm\sqrt{5}$.

由此得到两个驻点：$(x,y,z)=(1+\sqrt{5},\ \ -1-\sqrt{5},\ \ 0)$ 或 $(1-\sqrt{5},\ \ -1+\sqrt{5},\ \ 0)$.

综上我们得到四个驻点：$(-1,1,1)$，$(-1,1,-1)$，$(1+\sqrt{5},-1-\sqrt{5},0)$，$(1-\sqrt{5},-1+\sqrt{5},0)$.

这四个点与原点的距离分别为 $\sqrt{3}$，$\sqrt{3}$，$2\sqrt{3+\sqrt{5}}$，$2\sqrt{3-\sqrt{5}}$. 其中最小值是 $\sqrt{3}$. 因此，曲面上的两个点 $(-1,1,1)$ 和 $(-1,1,-1)$ 与原点的距离 $\sqrt{3}$ 是所求的最短距离。解答完毕。

10. 求平面 $x+y-z=0$ 与圆柱面 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0$ 相交所成椭圆的面积。

分析：(1)如果求得椭圆的长、短半轴长分别为 a,b，则椭圆的面积 $S=\pi ab$.

(2) 由圆柱面方程看到，此圆柱关于坐标原点是对称的，故此圆柱的中心轴为通过坐标原点的某一直线.

(3) 因为平面 $x+y-z=0$ 通过坐标原点, 所以此平面上的椭圆截线以坐标原点为其中心点。

据此分析，椭圆上任意一点到坐标原点距离的最大、最小值即为所求。

解：令 $L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\lambda(x+y-z)-\mu(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1)$，

解方程组 $\begin{cases} L'_x=2x-\lambda-2\mu x+\mu y+\mu z=0 \\ L'_y=2y-\lambda-2\mu y+\mu x+\mu z=0 \\ L'_z=2z+\lambda-2\mu z+\mu y+\mu x=0 \\ x+y-z=0 \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0 \end{cases}$

整理得 $\begin{cases} (2-2\mu)x-\lambda+\mu y+\mu z=0 & (1) \\ (2-2\mu)y-\lambda+\mu x+\mu z=0 & (2) \\ (2-2\mu)z+\lambda+\mu y+\mu x=0 & (3) \\ x+y-z=0 & (4) \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1=0 & (5) \end{cases}$

将 $(1)x+(2)y+(3)z$，得

$$2(x^2+y^2+z^2)-\lambda(x+y-z)-2\mu(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0,$$

将 $(4),(5)$ 带入上式，得 $x^2+y^2+z^2=\mu$，故 μ 是 $x^2+y^2+z^2$ 的极值，问题转而去求 μ，

为此，从方程 $(1)-(4)$ 中消去 λ，(2)+(3), (1)+(3)与(4)联立，得

$$\begin{cases} 2\mu x+(2-\mu)y+(2-\mu)z=0 \\ (2-\mu)x+2\mu y+(2-\mu)z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

上述方程组有非零解的充要条件是系数矩阵行列数为零，故

$$\begin{vmatrix} 2\mu & 2-\mu & 2-\mu \\ 2-\mu & 2\mu & 2-\mu \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

所以 $\mu^2-\dfrac{20}{3}\mu+4=0$，从而该方程的两个根就是 $x^2+y^2+z^2$ 的极大、极小值，而两根之积为 4，所以椭圆的面积是 2π .

解法二、在上述解法中求得 $x^2+y^2+z^2=\mu$ 之后，为求 μ，将上述方程(1)-(4)看成是关于变量 (x,y,z,λ) 的方程，由于方程(5)表明 $(x,y,z)\neq(0,0,0)$，因此方程(1)-(4)构成的齐次线

性方程组有非零解，故

$$\begin{vmatrix} 2-2\mu & \mu & \mu & -1 \\ \mu & 2-2\mu & \mu & -1 \\ \mu & \mu & 2-2\mu & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

解得 $\mu_1 = 6,\ \mu_2 = \frac{2}{3}$，所以椭圆的面积是 2π.

11. 已知曲线 $C:\begin{cases} x^2+2y^2-z=6, \\ 4x+2y+z=30, \end{cases}$ 求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值.

解: 令 $L(x,y,z)=z+\lambda\left(x^2+2y^2-z-6\right)+\mu\left(4x+2y+z-30\right)$. 解方程组

$$\begin{cases} L_x' = 2\lambda x + 4\mu = 0 \\ L_y' = 4\lambda y + 2\mu = 0 \\ L_z' = 1-\lambda+\mu = 0 \\ x^2+2y^2-z-6=0 \\ 4x+2y+z-30=0 \end{cases}$$

解得 $\mu = -\frac{\lambda x}{2} = -2\lambda y$， $1=\lambda-\mu=\lambda(1+2y)$，所以 $\lambda \neq 0$，从而 $x=4y$.

由 $\begin{cases} x-4y=0 \\ x^2+2y^2-z-6=0 \\ 4x+2y+z-30=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x-4y=0 \\ 18y^2-z-6=0, \\ 18y+z-30=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x-4y=0 \\ y^2+y-2=0 \\ 18y+z-30=0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=12 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-8, \\ y=-2, \\ z=66. \end{cases}$ 因此 z 的最大值为 66.

12. 求函数 $z=xy(4-x-y)$ 在由三条直线 $x=1$， $y=0$ 和 $x+y=6$ 所围有界闭区域上的最值。

解：记由三条直线 $x=1, y=0$ 和 $x+y=6$ 所围的有界开区域为 D，有界闭区域为 $\overline{D}$.

(I) 求函数 $z(x,y)$ 在区域 D 内的极值．令

$$\begin{cases} z_x' = 4y-2xy-y^2 = 0 \\ z_y' = 4x-x^2-2xy = 0 \end{cases}$$

求得驻点是 $(0,0),\ \left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right),\ (0,4),\ (4,0)$，在开区域 D 内的驻点为 $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

(II) 求函数 $z(x,y)$ 在边界上的最值。区域 D 的边界由三条直线段构成。这对应着如下

的三个条件极值问题：

(1) 求函数 $xy(4-x-y)$ 在约束条件 $x=1, 0\le y\le 5$ 下的极值；

(2) 求函数 $xy(4-x-y)$ 在约束条件 $y=0, 1\le x\le 6$ 下的极值；

(3) 求函数 $xy(4-x-y)$ 在约束条件 $x+y=6, 1\le x\le 6$ 下的极值。

问题(1). 将 $x=1$ 代入 $z=xy(4-x-y)$ 得一元函数 $z=y(3-y)$．令 $z'=3-2y=0$，解得驻点 $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$．对应函数值为 $z=\dfrac{9}{4}$．

问题(2). 将 $y=0$ 代入 $z=xy(4-x-y)$，得 $z=0$．

问题(3). 作 Lagrange 函数 $L=xy(4-x-y)+\lambda(x+y-6)$．令

$$\begin{cases} L_x'=4y-2xy-y^2+\lambda=0 \\ L_y'=4x-x^2-2xy+\lambda=0 \\ x+y-6=0 \end{cases}$$

解这个方程组求得函数在边界 $x+y=6$ 上有驻点 $(3,3)$．于是我们得到函数在闭区域 $\overline{D}$ 上有驻点 $(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3})$， $(1,\dfrac{3}{2})$ 和 $(3,\ 3)$．函数也可能在三个角点 $(1,0),(6,0),(1,5)$ 上取得最值。

由于函数 $z=xy(4-x-y)$ 在有界闭区域 $\overline{D}$ 上连续，故函数在 $\overline{D}$ 上的最大值和最小值在这六个点上取得。计算函数在这六个点上的函数值可知，函数 $z(x,y)$ 在点 $(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3})$ 处取得最大值 $z\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{64}{27}$．在点 $(3,\ 3)$ 处取得最小值 $z(3,3)=-18$ ．解答完毕。

13. 设 $S:F(x,y,z)=0$ 是光滑曲面， $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面 S 外一点。证明：若 $Q\in S$ 使得线段 $\overline{P_0Q}$ 是 P_0 与曲面 S 上任意一点的连线中最短线段，则向量 $\overrightarrow{P_0Q}$ 必与曲面在该点的切平面垂直。

证明：所求问题就是在曲面上求一点 $Q(x,y,z)\in S$ 使得 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ 的值最小。令

$$L(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-\lambda F(x,y,z),$$

解方程组$\begin{cases} L'_x = 2(x-x_0) - \lambda F'_x = 0 \\ L'_y = 2(y-y_0) - \lambda F'_y = 0 \\ L'_z = 2(z-z_0) - \lambda F'_z = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases}$

得 $\overrightarrow{P_0Q} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = \dfrac{\lambda}{2}\operatorname{grad} F(x,y,z)$，即向量 $\overrightarrow{P_0Q}$ 与曲面 S 在点 $Q(x,y,z)$ 处的法向量平行，所以向量 $\overrightarrow{P_0Q}$ 与曲面 S 在点 $Q(x,y,z)$ 处的切平面垂直。证毕

14. 求椭圆$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ lx + my + nz = 0 \end{cases}$ 的面积，其中 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

解：由于椭圆的中心在坐标原点，在椭圆上任取一点 (x,y,z)，则其到椭圆中心的距离 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值与最小值分别是椭圆的长、短半轴长. 构造拉格朗日函数，令

$$L(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 - \lambda(lx+my+nz) - \mu\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right).$$

解方程组$\begin{cases} L'_x = 2x - \lambda l - \dfrac{2\mu x}{a^2} = 0 & (1) \\ L'_y = 2y - \lambda m - \dfrac{2\mu y}{b^2} = 0 & (2) \\ L'_z = 2z - \lambda n - \dfrac{2\mu z}{c^2} = 0 & (3) \\ lx + my + nz = 0 & (4) \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, & (5) \end{cases}$

将（1），（2），（3）式分别乘以 x, y, z，再相加得

$$2(x^2+y^2+z^2) - \lambda(lx+my+nz) - 2\mu\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) = 0.$$

再由（4）式和（5）式，得 $\mu = r^2$. 将其带入（1），（2），（3）式中，解得

$$x = \frac{a^2\lambda l}{2(a^2-r^2)},\ y = \frac{b^2\lambda m}{2(b^2-r^2)},\ z = \frac{c^2\lambda n}{2(c^2-r^2)},$$

将上式分别乘以 l, m, n 再相加，再由（4）式，得

$$0 = lx+my+nz = \frac{a^2\lambda l^2}{2(a^2-r^2)} + \frac{b^2\lambda m^2}{2(b^2-r^2)} + \frac{c^2\lambda n^2}{2(c^2-r^2)},$$

所以$\dfrac{a^2l^2}{(a^2-r^2)}+\dfrac{b^2m^2}{(b^2-r^2)}+\dfrac{c^2n^2}{(c^2-r^2)}=0.$ 通分整理得r^2的二次三项式

$$\begin{aligned}&(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2)r^4-\left[a^2l^2(b^2+c^2)+b^2m^2(a^2+c^2)+c^2n^2(b^2+a^2)\right]r^2\\&+a^2b^2c^2(l^2+m^2+n^2)=0.\end{aligned}$$

因为r^2存在最大值与最小值，因此r^2的二次三项式必有两个不同的实根r_1^2与r_2^2，其中一个是最大值，一个是最小值，且$r_1^2\cdot r_2^2=\dfrac{a^2b^2c^2(l^2+m^2+n^2)}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}$，所以椭圆长、短半轴长度的乘积$r_1r_2=\dfrac{abc\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}}$且椭圆的面积$S=\pi r_1r_2=\dfrac{\pi abc\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2}}$.

15. 若n元函数f满足$f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^kf(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中$t>0$，称$f$是$k$次齐次函数。设三元函数$f(x,y,z)$可微,证明：函数$f(x,y,z)$是$k$次齐次函数当且仅当$xf_x'+yf_y'+zf_z'=kf(x,y,z)$.

证明：设函数$f(x,y,z)$是k次齐次函数，则对任意的$t>0$，$f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$，两边对t求导，有$xf_1'(tx,ty,tz)+yf_2'(tx,ty,tz)+zf_3'(tx,ty,tz)=kt^{k-1}f(x,y,z)$，取$t=1$，得$xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)=kf(x,y,z)$. 必要性得证.

下证充分性. 假设$xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)=kf(x,y,z)$，将上式中的$x,y,z$分别用$tx,ty,tz$代替，得$txf_1'(tx,ty,tz)+tyf_2'(tx,ty,tz)+tzf_3'(tx,ty,tz)=kf(tx,ty,tz)$，从而

$$\frac{d\left(\dfrac{f(tx,ty,tz)}{t^k}\right)}{dt}=\frac{txf_1'(tx,ty,tz)+tyf_2'(tx,ty,tz)+tzf_3'(tx,ty,tz)-kf(tx,ty,tz)}{t^{k+1}}=0,$$

故$\dfrac{f(tx,ty,tz)}{t^k}$与t无关，所以$\dfrac{f(tx,ty,tz)}{t^k}=f(x,y,z)$，即$f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$. 证毕

====

以下供学有余力的同学选做.

16. 假设$f(x,y)\in C^1(\mathbb{R}^2)$在全平面上除原点之外处处满足$xf_x'+yf_y'>0$. 证明：原点是$f(x,y)$的唯一极小值点，并且$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证明:

① 首先证明原点之外任意点(x,y)都不是驻点，从而不是极值点。

假设点$(x_0,y_0)\neq(0,0)$是$f(x,y)$的驻点，即$f_x'(x_0,y_0)=0$，$f_y'(x_0,y_0)=0$. 因此$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处沿着任何方向的方向导数均为零。另一方面，函数$f(x,y)$沿方向$\vec{l}=\dfrac{(x_0,y_0)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0)}=\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\cdot\frac{(x_0,y_0)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\frac{x_0 f_x'(x_0,y_0)+y_0 f_y'(x_0,y_0)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}>0 .$$

矛盾。故原点之外任意点(x,y)都不是$f(x,y)$的驻点。

② 下证原点是驻点。

对于任意的$x>0$, 考察点$(x,0)$. 由题目条件推出$x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0)>0$, 进而得到$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0)>0$.

令$x\to 0^+$，因为偏导数连续，所以由极限保号性得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)\geq 0.$$

由题目条件又可以推出在点$(-x,0)$满足$-x\dfrac{\partial f}{\partial x}(-x,0)>0$，故$\dfrac{\partial f}{\partial x}(-x,0)<0$，从而

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\partial f}{\partial x}(-x,0)\leq 0 .$$

所以$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. 同样的方法可以推出$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. 因此原点是驻点 .

③ 证明$(0,0)$是函数$f(x,y)$的极小值点。

任取$(x,y)\neq(0,0)$，我们证明$f(x,y)>f(0,0)$. 利用二元函数的微分中值公式。对任意的$(x,y)\in\mathbb{R}^2$满足$(x,y)\neq(0,0)$，存在$\theta\in(0,1)$使得

$$f(x,y)-f(0,0)=xf_x'(\theta x,\theta y)+yf_y'(\theta x,\theta y)=\frac{1}{\theta}[\theta xf_x'(\theta x,\theta y)+\theta yf_y'(\theta x,\theta y)]>0,$$

因此$f(x,y)>f(0,0)$. 故$(0,0)$是函数$f(x,y)$的极小值点。

④ 证明$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

注意到 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，所以 $f(x,y)$ 可微。由于 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$， $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$，因此 $\mathrm{d}f(0,0)=0$．故函数值增量与微分之差是 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的高阶无穷小量，即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 .\qquad \text{证毕}$$

17. 设 $f(x,y)\in C^2(\mathbb{R}^2)$ 且 $f(x,y)$ 在任意一点 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 处的 Hesse 矩阵均是正定的，证明： $f(x,y)$ 至多有一个驻点。

证明:（用反证法）假设 $f(x,y)$ 有两个驻点 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$. 则由条件， $f(x,y)$ 在这两个驻点处的 Hesse 矩阵 $H_f(P_1)$ 与 $H_f(P_2)$ 均正定，故 $P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 都是函数 $f(x,y)$ 的极小值点。令

$$F(t)=f(tx_1+(1-t)x_2,ty_1+(1-t)y_2).$$

则 $F(t)$ 在 $t=0,1$ 处达到极小值，所以存在 $t_0\in(0,1)$ 使得可微函数 $F(t)$ 在 $t_0\in(0,1)$ 达到极大值，故 $F''(t_0)\le 0$. 令 $P_0=(t_0x_1+(1-t_0)x_2,t_0y_1+(1-t_0)y_2)$. 注意到

$$\begin{aligned}F''(t_0)&=f''_{xx}(P_0)(x_1-x_2)^2+2f''_{xy}(P_0)(x_1-x_2)(y_1-y_2)+f''_{yy}(P_0)(y_1-y_2)^2\\&=(x_1-x_2\quad y_1-y_2)\begin{pmatrix}f''_{xx}(P_0)&f''_{xy}(P_0)\\f''_{xy}(P_0)&f''_{yy}(P_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}>0,\end{aligned}$$

矛盾。故 $f(x,y)$ 至多有一个驻点。证毕

18. 设 $a_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$，证明:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\cdots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\le\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

且上式等号成立当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$.

证明：先证第二个不等式 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

设 $a_i>0,\ i=1,2,\cdots,n.$ 下面求 $a_1a_2\cdots a_n$ 在 $a_1+\cdots+a_n=c\ \ (c>0)$ 下的最值。构造拉格朗日函数，令 $L(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a_1\cdots a_n-\lambda(a_1+\cdots+a_n-c)$，则

$$L'_{a_i}=a_1\cdots\hat{a}_i\cdots a_n-\lambda,\ \hat{a}_i=1,\ i=1,2,\cdots,n.$$

令 $L'_{a_i}=0$，有 $a_1=\cdots=a_n=\dfrac{c}{n}$. 又 $L''_{a_ia_i}=0,\ i=1,2,\cdots,n,$ 且

$$L''_{a_ia_j}=a_1\cdots\hat{a}_i\cdots\hat{a}_j\cdots a_n,\ \hat{a}_i=\hat{a}_j=1,\ i\neq j$$

故

$$\begin{aligned}d^2L(\frac{c}{n},\cdots,\frac{c}{n})&=(da_1,da_2,\cdots,da_n)H_L(\frac{c}{n},\cdots,\frac{c}{n})(da_1,da_2,\cdots,da_n)^T\\&=\frac{c^{n-2}}{n^{n-2}}(2da_1da_2+2da_1da_3+\cdots+2da_1da_n+2da_2da_3+\cdots+2da_{n-1}da_n)\\&=\frac{c^{n-2}}{n^{n-2}}[(da_1+da_2+da_3+\cdots+da_n)^2-d^2a_1-\cdots-d^2a_n]\\&=-\frac{c^{n-2}}{n^{n-2}}(d^2a_1+\cdots+d^2a_n)<0,\end{aligned}$$

从而当 $a_1=\cdots=a_n=\dfrac{c}{n}$ 时，$a_1a_2\cdots a_n$ 取到最大值，且最大值为 $\dfrac{c^n}{n^n}$，即

$$a_1a_2\cdots a_n\le\frac{c^n}{n^n}=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^n}{n^n},$$

故 $\sqrt{a_1a_2\cdots a_n}\le\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，且等号成立当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$. 第二个不等式得证.

在不等式 $\sqrt{a_1a_2\cdots a_n}\le\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 中，令 $b_i=\dfrac{1}{a_i}$，则得到第一个不等式 $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\cdots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

下证第三个不等式 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\le\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$. 设 $a_i>0$. 下求 $a_1+\cdots+a_n$ 在 $a_1^2+\cdots+a_n^2=c$ 下的最值. 构造拉格朗日函数，令

$$L(a_1,\cdots,a_n)=a_1+\cdots+a_n-\lambda(a_1^2+\cdots+a_n^2-c),$$

则 $L'_{a_i}=1-2\lambda a_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 表明 $a_1=\ldots=a_n=\dfrac{1}{2\lambda}=\sqrt{\dfrac{c}{n}}$. 由于

$$L''_{a_i a_i} = -2\lambda = -\sqrt{\frac{n}{c}} \quad 且 \quad L''_{a_i a_j} = 0 \ (i \neq j),$$

因此

$$d^2L(\sqrt{\frac{c}{n}},\cdots,\sqrt{\frac{c}{n}}) = (da_1, da_2, \cdots, da_n)H_L(\sqrt{\frac{c}{n}},\cdots,\sqrt{\frac{c}{n}})(da_1, da_2, \cdots, da_n)^T$$

$$= -\sqrt{\frac{n}{c}}(d^2a_1 + \cdots + d^2a_n) < 0,$$

所以 $a_1 + \cdots + a_n$ 在 $a_1 = \ldots = a_n = \sqrt{\frac{c}{n}}$ 时取到最大值，且最大值为 $n\sqrt{\frac{c}{n}}$，故

$a_1 + \cdots + a_n \le n\sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$，即 $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$，且等号成立当且仅当 $a_1 = \cdots = a_n$. 这就证明了第三个不等式. 证毕