第五次习题课参考解答 含参积分

1. 求解下列各题:

(1) 求极限 $I=\lim\limits_{y\to 0^+}\int_0^1 \dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}dx.$

解: 令 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}, & 0\le x\le 1,\ 0<y\le 1,\\ \dfrac{1}{1+e^x}, & 0\le x\le 1,\ y=0.\end{cases}$

则 $f(x,y)\in C(D)$，其中 $D=[0,1]\times[0,1]$. 故

$$I=\lim_{y\to 0^+}\int_0^1 \frac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}dx=\int_0^1 \lim_{y\to 0^+}\frac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}dx=\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx=-\int_0^1\frac{de^{-x}}{1+e^{-x}}=\ln\frac{2e}{1+e}.$$

(2) 设 $f(x)=\int_0^x\left[\int_t^x e^{-s^2}ds\right]dt$，求 $f'(x)$ 与 $f(x)$.

解: 在闭矩形区域 $|x|\le R, |t|\le R\quad (R>0)$ 中，$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\int_t^x e^{-s^2}ds\right]=e^{-x^2}$ 连续，故

$f'(x)=\int_0^x\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\int_t^x e^{-s^2}ds\right]dt+\int_x^x e^{-s^2}ds=\int_0^x e^{-x^2}dt=xe^{-x^2}$，又 $f(0)=0$，

因此 $f(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt=\dfrac{1}{2}(1-e^{-x^2})$.

(3) 求 $f'(x)$，其中 $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}e^{x\sqrt{1-y^2}}dy$.

解:
$$f'(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{x\sqrt{1-y^2}}\right]dy+e^{x\sqrt{1-\cos^2 x}}(-\sin x)-e^{x\sqrt{1-\sin^2 x}}(\cos x)$$
$$=\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-y^2}e^{x\sqrt{1-y^2}}dy-\sin xe^{x|\sin x|}-\cos xe^{x|\cos x|}.$$

2. 试求 a，b 之值，使积分 $\int_1^3(a+bx-x^2)^2dx$ 达到最小值。

解: 记 $F(a,b)=\int_1^3(a+bx-x^2)^2dx.$ 积分号下求导，得

$$\begin{cases}F_a'(a,b)=2\int_1^3(a+bx-x^2)dx=0,\\ F_b'(a,b)=2\int_1^3 x(a+bx-x^2)dx=0.\end{cases}$$

解方程组得 $\begin{cases}a=-\dfrac{11}{3},\\ b=4.\end{cases}$ 注意到 $F(a,b)$ 是二次函数，且

$$d^2F(a,b)=4da^2+16dadb+\frac{52}{3}db^2=4(da+2db)^2+\frac{4}{3}db^2>0,$$

故 $F(a,b)$ 在极小值点 $a=-\frac{11}{3}$，$b=4$ 处取得最小值。

3. 计算下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-x^2}}{x}dx\ (a>0)$.

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin xdx\quad(a>0,b>0).$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(bx)-\arctan(ax)}{x}\mathrm{d}x$，其中 $b>a>0$.

(1) 解：令 $I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-x^2}}{x}dx$，对任意的 $a>0$，$\exists[\alpha,\beta]\subset(0,+\infty)\ s.t.\ a\in[\alpha,\beta]$.

因为 $\left|-xe^{-ax^2}\right|\le xe^{-\alpha x^2}$，而 $\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x^2}dx^2=\frac{1}{2\alpha}$ 收敛，

故 M-判别法知 $\int_0^{+\infty}-xe^{-ax^2}dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛。

因为 $\frac{e^{-ax^2}-e^{-x^2}}{x}$ 与 $\frac{\partial\left(\frac{e^{-ax^2}-e^{-x^2}}{x}\right)}{\partial a}=-xe^{-ax^2}$ 在 $[0,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 连续，

因此积分运算与求导运算可交换顺序，故 $I'(a)=\int_0^{+\infty}-xe^{-ax^2}dx=-\frac{1}{2a}$，

从而 $I(a)=-\frac{1}{2}\ln a+c$．因为 $I(1)=0$，所以 $c=0$ 且 $I(a)=-\frac{1}{2}\ln a.$

(2) 因为 $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}dy$，由 M-判别法知，$\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin xdx$ 关于 $y\in[a,b]$ 一致收敛，

因此 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin xdx=\int_0^{+\infty}\sin x\int_a^b e^{-xy}dydx=\int_a^b\left(\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin xdx\right)dy$，其中

$$\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin xdx=-\frac{1}{y}\int_0^{+\infty}\sin xde^{-xy}=\frac{1}{y}\int_0^{+\infty}e^{-xy}\cos xdx=\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y^2}\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin xdx,$$

故 $\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin xdx=\frac{1}{1+y^2}$，所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin xdx=\int_a^b\frac{1}{1+y^2}dy=\arctan b-\arctan a.$$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(bx)-\arctan(ax)}{x}\mathrm{d}x$，其中 $b>a>0$.

解：注意到 $\frac{\arctan(bx)-\arctan(ax)}{x}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2}$.

因为 $f(t,x)=\frac{1}{1+t^2x^2}$ 二元连续，且广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+t^2x^2}$ 对 $t\ge a$ 一致收敛，所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(bx)-\arctan(ax)}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2}=\int_a^b\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+t^2x^2}=\int_a^b\frac{\pi\mathrm{d}t}{2t}=\frac{\pi}{2}(\ln b-\ln a).$$

解法 2：记 $F(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(tx)-\arctan(ax)}{x}\mathrm{d}x$.

由于 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\arctan(tx)-\arctan(ax)}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2x^2}\mathrm{d}x$ 对 $t\ge a>0$ 一致收敛，所以

$$F'(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\arctan(tx)-\arctan(ax)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2t},$$

所以 $F(b)=F(a)+\int_a^b\frac{\pi}{2t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}$.

4. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上一阶偏导数存在。若 $f_y'(x,y),\ f_{yx}''(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$，证明：

$$f_{xy}''(x,y)=f_{yx}''(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

证明：令 $F(x,y)=f_y'(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$. 则 $f_y'(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$ 表明对任意的 $c,\ y\in\mathbb{R}$，

$$f(x,y)-f(x,c)=\int_c^y F(x,t)dt,$$

且 $F_x'(x,y)=f_{yx}''(x,y)\in C(\mathbb{R}^2)$，故上述含参定积分可积分号下求导，所以

$$f_x'(x,y)-f_x'(x,c)=\int_c^y F_x'(x,t)dt.$$

再由变上限积分可知，右边关于 y 可导，从而 $f_{xy}''(x,y)=F_x'(x,y)=f_{yx}''(x,y)$. 证毕

5. 设 $f(t)=\left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2$, $g(t)=\int_0^1\frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}dx$，证明：$f(t)+g(t)=\frac{\pi}{4},\ t\ge 0$. 由此求概率-泊松积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

证明：因为 $f'(t)=2\int_0^t e^{-(t^2+x^2)}dx,\ g'(t)=-\int_0^1 2te^{-(1+x^2)t^2}dx$，令 $xt=y$，则

$g'(t)=-\int_0^1 2te^{-(1+x^2)t^2}dx=-2\int_0^1 e^{-(y^2+t^2)}dy$，故 $f'(t)+g'(t)=0$，所以

$$f(t)+g(t)=f(0)+g(0)=\frac{\pi}{4}.$$

由于 $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^1 \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}dx=0$，在等式 $f(t)+g(t)=\frac{\pi}{4}$ 两端对 $t\to+\infty$ 取极限，得

$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 证毕

6. 设 $f(t)=\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+t^2}\,dx.$

（1） 若 $0\le t\le 1$，求 $f_+'(0)$.

（2） 若 $-1\le t\le 1$，问：$f'(0)$ 是否存在？并说明理由。

解：（1）函数 $\ln\sqrt{x^2+t^2}$ 和 $\frac{\partial}{\partial t}\ln\sqrt{x^2+t^2}=\frac{t}{x^2+t^2}$ 在 $(0,0)$ 点不连续，

故积分与求导不能交换顺序。下面通过定义求，由于 $f(0)=-1$，且

$$f(t)=\ln\sqrt{1+t^2}-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+t^2}dx=\ln\sqrt{1+t^2}-1+\int_0^1\frac{1}{\left(\frac{x}{t}\right)^2+1}dx$$

$$=\ln\sqrt{1+t^2}-1+t\arctan\frac{1}{t},$$

因此 $\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{1}{t}\ln\sqrt{1+t^2}+\arctan\frac{1}{t}\to\frac{\pi}{2}$, $t\to 0^+$. 故 $f_+'(0)=\frac{\pi}{2}$.

（2）由于 $\lim\limits_{t\to0^+}\arctan\frac{1}{t}=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{t\to0^-}\arctan\frac{1}{t}=-\frac{\pi}{2}$，因此 $\lim\limits_{t\to0}\arctan\frac{1}{t}$ 不存在，从而 $\lim\limits_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t}$ 不存在，故 $f'(0)$ 不存在.

7. 计算积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x}$, $\left(|a|<1\right)$

解：由于 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}-\frac{\ln(1-a\cos x)}{\cos x}\right)=2a$，

因此这是一个定积分。注意到

$$\frac{1}{a\cos x}\ln(1+a\cos x)=\int_0^1\frac{dy}{1+ay\cos x},\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{1}{a\cos x}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}=2\int_0^1\frac{dy}{1-a^2y^2\cos^2 x},\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2}.$$

而 $\frac{1}{1-a^2y^2\cos x}$ 在闭矩形区域 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$，$0\le y\le1$ 上连续，故

$$I=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^1\frac{dy}{1-a^2y^2\cos^2 x}=2a\int_0^1 dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-a^2y^2\cos^2 x}$$

$$=2a\int_0^1 dy\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1-a^2y^2+t^2}\quad (t=\tan x)$$

$$=a\pi\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-a^2y^2}}=\pi\arcsin a.$$

8. 计算积分 $I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$.

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}=a,\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}=0$，故积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx$ 是定积分。显然 $I(0)=0$，且 $I(a)$ 是奇函数。容易验证，对于上述积分，积分号下求导定理的条件满足。于是我们有 $I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}$. 下面求这个积分。

当 $a>0$ 时，令 $u=a\tan x$. 则 $dx=\frac{adu}{a^2+u^2}$. 于是

$I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}=\int_0^{+\infty}\frac{adu}{(1+u^2)(a^2+u^2)}$. 由于

$$\frac{a}{(1+u^2)(a^2+u^2)}=\frac{a}{1-a^2}\left(\frac{1}{a^2+u^2}-\frac{1}{1+u^2}\right).$$

因此不难求出 $I'(a)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+a}$. 注意到 $I(0)=0$. 于是我们得到

$$I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx=\frac{\pi}{2}\ln(1+a).$$

又 $I(a)$ 是奇函数。故

$$I(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(a)\ln(1+|a|),\quad \forall a\in(-\infty,+\infty).$$

9. 计算 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2\beta x dx.$ （注：$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.）

解：令 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2\beta x dx.$ 由 M-判别法知，$\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\sin 2\beta x dx$ 对 $\beta\in(-\infty,+\infty)$ 一致收敛，因此

$$I'(\beta)=-2\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\sin(2\beta x)dx=\int_0^{+\infty}\sin(2\beta x)de^{-x^2}$$

$$=-\int_0^{+\infty}2\beta\cos(2\beta x)e^{-x^2}dx=-2\beta I(\beta),$$

所以$I(\beta)=ce^{-\beta^2}$．因为$I(0)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，因此$c=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$且$I(\beta)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\beta^2}$

======
以下供学有余力的同学选做。

10. 已知$\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}d\theta=1\ (0<r<1).$

求$I(r)=\int_0^{2\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta,\quad (0<r\neq 1).$

解：任取$r_0\in(0,1)$． 由于函数$\ln(1-2r\cos\theta+r^2)$及对r的导函数关于r在$[0,r_0]$上连续，故

$$I'(r)=\int_0^{2\pi}\frac{2(r-\cos\theta)}{1-2r\cos\theta+r^2}d\theta=\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}(1-\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2})d\theta=0.$$

所以$I(r)=c,\ r\in[0,r_0]$. 由于

$$\ln(1-2r\cos\theta+r^2)\in C([0,r_0]\times[0,2\pi]),$$

故$I(r)\in C[0,r_0]$，由于r_0的任意性，有$I(r)=c,\ r\in[0,1)$. 又知$I(0)=0$，因此$c=0$且

$I(r)=0,\ r\in[0,1).$

现设$r>1$. 则$\dfrac{1}{r}<1$且

$$\begin{aligned}0=I(\frac{1}{r})&=\int_0^{2\pi}\ln(1-\frac{2}{r}\cos\theta+\frac{1}{r^2})d\theta=\int_0^{2\pi}\ln\frac{1-2r\cos\theta+r^2}{r^2}d\theta\\&=I(r)-4\pi\ln r,\end{aligned}$$

所以$I(r)=4\pi\ln r,\ (r>1)$. 综上，有$I(r)=\begin{cases}0, & 0\le r<1,\\ 4\pi\ln r, & r>1.\end{cases}$ 解答完毕

11. 求定积分$I=\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$

解：由于$\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$的原函数不是初等函数，因此不能通过牛顿莱布尼兹公式直接求出积分值。引入变量α，令$I(\alpha)=\int_0^1\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}dx$. 则$I(1)=I$. 易见$f(x,\alpha)=\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}$在$[0,1]\times[0,1]$上满足积分号下求导的条件，于是

$$I'(\alpha)=\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)}dx=\frac{1}{1+\alpha^2}\int_0^1\left(\frac{\alpha+x}{1+x^2}-\frac{\alpha}{1+\alpha x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\alpha\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\ln(1+\alpha x)\right)\Bigg|_0^1$$
$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{\pi}{4}\alpha+\frac{1}{2}\ln 2-\ln(1+\alpha)\right).$$

由此得出

$$I(1)=I(0)+\int_0^1 I'(\alpha)d\alpha=\int_0^1\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{\pi}{4}\alpha+\frac{1}{2}\ln 2-\ln(1+\alpha)\right)d\alpha$$
$$=(\frac{\pi}{8}\ln(1+\alpha^2)+\frac{1}{2}\ln 2\arctan\alpha)\,|_0^1-I(1),$$

故 $I(1)=\frac{\pi}{8}\ln 2.$

12. 计算两个 Laplace 积分:

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx,\quad J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx,\quad \alpha>0,\ \beta>0.$$

解: 任取 $\delta>0$. 由 Dirichlet 判别法知, $J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx$ 关于 $\beta\in[\delta,+\infty)$ 一致收敛。

因此 $I'(\beta)=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx$ 且

$$I'(\beta)+\frac{\pi}{2}=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx+\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\alpha^2\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x(x^2+\alpha^2)}dx.$$

由于 $I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx$ 关于 $\beta\in[\delta,+\infty)$ 一致收敛, 因此

$$I''(\beta)=\left(I'(\beta)+\frac{\pi}{2}\right)'=\alpha^2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx=\alpha^2 I(\beta),$$

解此微分方程, 求得 $I(\beta)=c_1e^{\alpha\beta}+c_2e^{-\alpha\beta}$. 又

$$|I(\beta)|\le\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+\alpha^2}dx=\frac{\pi}{2\alpha},$$

所以 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}I(\beta)=0$, 故 $c_1=0$ 且 $I(\beta)=c_2e^{-\alpha\beta}$. 又知

$$\lim_{\beta\to0^+}I(\beta)=\lim_{\beta\to0^+}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+\alpha^2}dx=\frac{\pi}{2\alpha},$$

因此 $c_2=\frac{\pi}{2\alpha}$ 且 $I(\beta)=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}$.

当 $\beta>0$ 时, $J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}dx=-I'(\beta)=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}$, 故 $J(\beta)=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}\operatorname{sgn}\beta$.