|  |
| --- |
| **清华大学本科生考试试题专用纸**  考试课程 **微积分A（1）** 2099年12月31日  **系名 班级 姓名 学号**   1. **填空题**（每个空3分，共10题）**（请将答案写在横线上，严禁写在答卷纸上！）** 2. 常微分方程的通解为 。   解答:   1. 常微分方程的通解为 。   解答: 通解为 .   1. 。   解答: .   1. 。   解答:   1. 设，则 。   解答:   1. 。   解答:   1. 。   解答:   1. 常微分方程满足的解的拐点的横坐标为 。   解答: 拐点的横坐标为.  9.曲线段的弧长为 。  解答:  10.设当时，函数为阶无穷小，则 。  答案：2   1. **解答题**（共8题）**（请写出详细的计算过程和必要的根据！）**   11.（10分）讨论取何值时, 广义积分收敛。  解: 记，，，则广义积分收敛当且仅当都收敛。  当时，，所以收敛当且仅当。  当时，，所以收敛当且仅当。  综上可知，收敛当且仅当。  12. （10分）求数列（）的最大项的值。  解: ，记，  则 。  所以在内严格单调增，在内严格单调减。  故，。  因为，  所以数列（）的最大项的值为。  13. （13分）设，讨论函数的连续性, 并求的单调区间、极值点与极值、凸性区间、拐点和渐近线。  解: 函数有唯一间断点。  ，  所以：  （1）函数在和内单调减；  函数仅在点处取极值，为极小值，相应值为0。  （2）函数在内上凸，在和内下凸。  函数有唯一的拐点。  （3）函数有两条渐近线：，。    14.（12分）设曲线段为圆心在点的单位圆周位于正方形  的部分，平面区域为由，轴以及直线  围成的有界区域。  （I）求区域绕轴旋转一周所产生的旋转体体积；  （II）求曲线段绕轴旋转一周所产生的旋转面面积。  解: （I）曲线段：。  区域绕轴旋转一周所产生的旋转体体积    。  （II）曲线段绕轴旋转一周所产生的旋转面面积        15. （10分）求常微分方程的初值问题的解。  解:令，则    分离变量得，  。  由得，所以  ，  ，  相减得：。  由得  16.（5分）设，并且，都有积分值与无关，求证：存在常数,使得，。  证明：因为积分值与无关，所以，即  。  记，当时，。  当时，取，，则。  当时，取，，则。  本题得证。  17.（5分）设在上非负连续，且满足，证明：。  证明: 当时，记，则。  所以，  即，  故。  18.（5分）设为实系数次多项式。若，，证明：。  这里表示的一阶, 二阶, 以及阶导数。  证明：记，  则 ，  。  所以 。  即在单调减。  为多项式，所以，故，得证。  **三. 附加题（本题全对才给分，其分数不计入总评，仅用于评判A+）**  设，为闭区间上的无穷可导函数，且，以及任意的非负整数，都有。记，求证：，均有。  证明: 注意 是函数在点 处 阶Taylor 展式的积分余项, 即  对积分 作变量代换 , 则  上式可写作  根据假设函数 的各阶导数非负, 可知 . 因此  再由展式(\*)可知 . 于是对于任意  命题得证. |