**组合数学2018年秋期末考试**

**请在试卷和答题纸上写上姓名，学号以及email 和手机号码**

**请详细写出解答过程，复杂数值不需要计算出来，列出计算式子即可**

院系： 姓名： 学号： 手机：

**1、绝地求生。**一局绝地求生游戏中有100位玩家，共分为25组，每组4人进行游戏。当一位玩家阵亡后，他的其他队友还可以继续战斗，当一队四位玩家全部阵亡之后这支队伍就遭到了淘汰。个人排序和队伍排序均按照遭到淘汰的顺序逆序产生。存活到最后的队伍获胜，会在屏幕上显示“组合数学，期末满分！”，获胜队伍仍存活玩家的个人排序随机产生。

（1）将100位玩家随机分成25组的分组方式有多少种？25组之间不排序。（5分）

（2）一局比赛完成后得到一个队伍排序，请问符合条件的可能的个人排序有多少种？（5分）

（3）如果按照每组4人共消灭的玩家人数计分，请证明必然存在有三组分数一样。（5分）

**解答：**（1）

（2）100位玩家的全排列有100!种，产生每种队伍排序的阵亡顺序数量相同，共有25!种队伍排序方式，所以可能的玩家阵亡顺序有种

（3）x1+x2+x3+…+x25 = 99

如果没有三组分数一样，则最极端的情况是0 0 1 1 2 2 3 3 4 4……11 11 12 和值为144超过99。

**2、铺砖。**用 1\*1 的方砖，2\*2 的方砖，两个直角边都为 2 的直角三角形砖，给 3\*n 的路铺路面。

（1）求所有铺路的方案数。（16 分）

（2）求 2\*2 的方砖为偶数的方案数。（12 分）

1) An=an-1+6an-2 （5-8 分）

X1=-2,x2=3 （2 分）

An=s\*(-2)^n+t\*(3)^n （2 分）

A1=1,a2=7 A0=1 （3 分）

S+t = 1 -2s+3t=1 T=3/5, s=2/5 （2 分）

An=2/5\*(-2)^n+3/5\*(3)^n （2 分）

2) Bn 为偶数的方案数，cn 为奇数的方案数 Bn=bn-1+4bn-2+2cn-2

Bn+cn=an Bn-bn-1-2bn-2=2An-2 或者 bn-2bn-1-7bn-2+8bn-3+12bn-4 = 0 （5 分）

bn=l\*(2) ^n +k\*(-1) ^n +s\*(-2)^n+t\*(3)^n （2 分）

b1= 1,b2=5,b3=9,b0=1 （2 分）

l=1/3,k=1/6,s=1/5,t=3/10 (2 分)

列出一元四次方程组给 1 分，未求解出来扣 2-3 分

Bn= 1/3\*(2) ^n +1/6\*(-1) ^n +1/5\*(-2)^n+3/10\*(3)^n (1 分)

**3、千人考试**

（1）个学生参加考试，考试有A、B和C共道题，考试结果如下：个学生道题都做对了，个学生做对A和B，个学生做对A和C，个学生做对B和C，做对A的有个学生，做对B 的有个学生，有个学生一道也没有做对。试求做对了C的学生有多少个？请算出具体数值。（8分）

1. ，  
   ，  
   所以，做对C题的学生为人。

（2）如果把所有学生放在正1000边形的1000个顶点，1000个顶点之间的构造完全图，巡考教师按Hamilton回路进行巡考，请证明任意的一条Hamilton回路都存在两条平行的边。(解释：Hamilton回路是经过所有顶点且每个顶点只经过一次的闭合回路。) （8分）

**解答：**（2）分别将各个顶点按照顺时针顺序标号为1,2,...,2n，总共有2n条边，两条边平行当且仅当两端标号和模2n同余。将所有边的两端标号和求和等于，模2n余0。但若每条边模2n的余数均不相同，则所有边的两端标号和之和，模2n余n，矛盾。

**4、平面展开。**一个正N面体的平面展开图由如下条件定义：

（i）平面展开图由相连的N个面构成，面的形状与多面体相同

（ii）每个面都与其他的面通过边相连接

（iii）能够在空间中恰好拼接成正N面体，平面图的上侧面为多面体的外侧面

**注：经过旋转完全重合的平面展开图等价，但镜像后平面图上下侧面翻转，不再等价。**

（1）请找出正四面体的全部三种平面展开图。（5分）

（2）请以棱为对象写出正四面体的转动群。（4分）

（3）请通过Polya定理验证正四面体的平面展开图确实只有三种。（6分）

（4）请通过Ploya定理计算正六面体的平面展开图的数量。（8分）

**解答：**（1）

（2）

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 群类型 | 棱 | 数量 |
| 不动置换 | （1）^6 | 1 |
| 顶点对面心旋转±120度 | （3）^2 | 8 |
| 棱中对棱中旋转180度 | （1）^2（2）^2 | 3 |

（3）相当于从正四面体中保留3条棱，并剪断其他3条棱，然后展开。需要排除不成平面的情况。当一个顶点对应的全部棱均得到保留或一个面的全部棱均被剪断时不成平面。正四面体棱的置换群大小为12。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 群类型 | 棱 | 数量 | 全部数量 | 不成平面 |
| 不动置换 | （1）^6 | 1 | C(6,3) | 4 |
| 顶点对面心旋转±120度 | （3）^2 | 8 | 2 | 1 |
| 棱中对棱中旋转180度 | （1）^2（2）^2 | 3 | 4 | 0 |

合计共(16+8\*1+3\*4)/12=3。

（4）相当于从正六面体中保留5条棱，并剪掉其他7条棱，然后展开。需要排除不成平面的情况。当一个顶点对应的全部棱均得到保留或一个面的全部棱均被剪断时不成平面。正六面体棱的置换群大小为24。**需要使用容斥原理。**通过减掉棱之后除了可能6个面形成整体外，还有可能形成5+1,4+1+1,4+1以及3+3的组合。

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 群类型 | 棱 | 数量 | 全部数量 | 5+1 | 4+1+1 | 4+2 | 3+3 |
| 不动置换 | （1）^12 | 1 | C(12,7) | 6\*C(8,3) | 12 | 12\*5 | 8\*3 |
| 面心对面心旋转±90度 | （4）^3 | 6 | 无不动图像 | - | - |  |  |
| 面心对面心旋转180度 | （2）^6 | 3 | 无不动图像 | - | - |  |  |
| 棱中对棱中旋转180度 | （1）^2（2）^5 | 6 | 2\*C(5,3) | - | 2 | 2 |  |
| 顶点对顶点旋转±120度 | （3）^4 | 8 | 无不动图像 | - | - |  |  |

合计共(792-336+12-60-24+16\*6)/24=20。

**第三部分线性规划共18分**



**x1=10,x2=-3,x3=2 Z=15**