

第十三章作业

作业对应第三版教材题号

P276——2、3(4)(6)、4(2)、5

补充练习 1、2

P276—2. 计算积分 $\int_{-1}^1 (1+x)^k P_l(x) dx$. 注意分别讨论 $k \geq l$ 和 $k < l$ 两种情形.

P276—3. 计算下列积分:

(4) $\int_{-1}^1 x P_k(x) P_{k+1}(x) dx$;

(6) $\int_{-1}^1 [x P_l(x)]^2 dx$.

P276—4. 将下列定义在 $[-1,1]$ 上的函数按 Legendre 多项式展开:

(2) $f(x) = \sqrt{1 - 2xt + t^2}$.

P276—5. 求解空心球壳内的定解问题:

$$\nabla^2 u = 0, \quad a < r < b,$$

$$u|_{r=a} = u_0,$$

$$u|_{r=b} = u_0 \cos^2 \theta.$$

补充练习 1. 已知 Legendre 方程

$$\frac{d}{dz}[(1-z^2)\frac{dw}{dz}] + v(v+1)w = 0$$

在正则奇点 $z = 1$ 邻域内, 求方程的第一解 $P_v(z)$.

补充练习 2. 已知 Legendre 方程在 $z = 0$ 邻域的第一解为

$$w_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} \frac{\Gamma(n - \frac{v}{2})\Gamma(n + \frac{v+1}{2})}{\Gamma(-\frac{v}{2})\Gamma(\frac{v+1}{2})} z^{2n}$$

利用 Γ 函数的渐进展开公式

$$\Gamma(z) \sim z^{z-1/2} e^{-z} \sqrt{2\pi} (1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \dots)$$

证明当 n 足够大时, z^{2n} 项系数 $c_{2n} \sim \frac{A}{n}$, 其中 A 为常数.