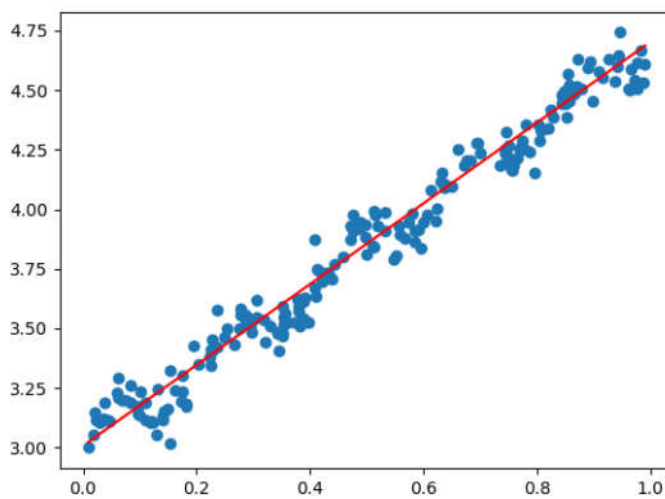
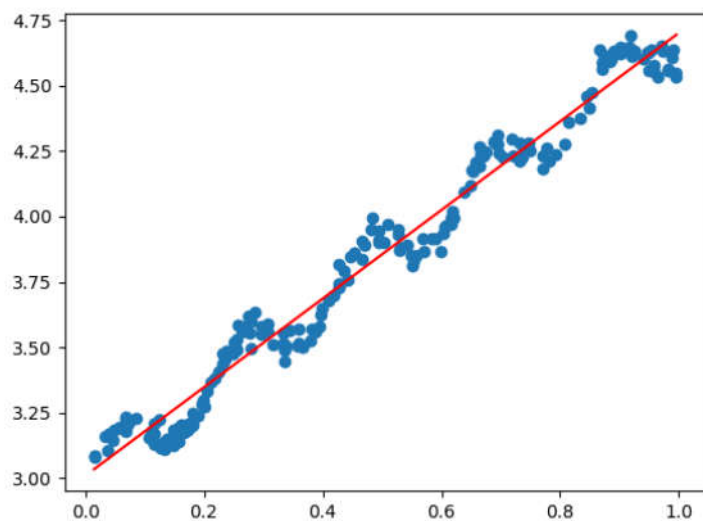


算法篇：线性回归-Linear Regression



回归 (Regress) 问题

- 回归问题也叫预测问题，即用一组测量数据来对目标的**数值**进行预测

例如：已知

x_1	x_2	x_3	x_4	y
0.455	0.365	0.095	0.514	15
0.35	0.265	0.09	0.2255	7
0.53	0.42	0.135	0.677	9
0.44	0.365	0.125	0.516	?

即构建一个函数 $y_i = f(\mathbf{x}_i; \mathbf{w})$ 根据输入的**特征向量** \mathbf{x} 来预测输出**数值** y

线性回归 (Linear Regress)

设已知输入特征矢量 \mathbf{x} 的维度为 D , $\mathbf{x}=\{x_1, x_2, \dots, x_D\}$

共有 N 个训练样本 $\mathbf{X}=\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$

以及其对应的真实输出 $\mathbf{y}=\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$

利用线性回归预测的输出为 $\hat{\mathbf{y}} = \{\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_N\}$ 其中 $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_D\}^T$ 所求的参数

$$\hat{y}_1 = w_1 x_{11} + w_2 x_{12} + \dots + w_D x_{1D}$$

$$\hat{y}_2 = w_1 x_{21} + w_2 x_{22} + \dots + w_D x_{2D}$$

....

$$\hat{y}_N = w_1 x_{N1} + w_2 x_{N2} + \dots + w_D x_{ND}$$

矩阵形式

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\mathbf{w}$$


Diagram illustrating the matrix form of the linear regression equation $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\mathbf{w}$:

- $\hat{\mathbf{y}}$ is a column vector of size $(N, 1)$.
- \mathbf{X} is a matrix of size (N, D) .
- \mathbf{w} is a column vector of size $(D, 1)$.

损失函数

$$\begin{aligned} L_{\text{MSE}} &= \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})^T (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \\ &= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{w})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{w}) \\ &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{X}\mathbf{w} - \mathbf{w}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} + \mathbf{w}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{w} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L_{\text{MSE}}}{\partial \mathbf{w}} = 2\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{w} - 2\mathbf{X}^T \mathbf{y} = 0$$


$$\mathbf{w} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

参数的求解方法