计算物理 HW1 Problem2

付大为

学 号: 1800011105

邮 箱: fudw@pku.edu.cn

2021 年 10 月 16 日

题目. 矩阵的模和条件数 考虑一个具体的上三角矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，其所有对角元都为 1，而所有上三角部分都为 -1。

解答: (a) 已知 $|A| = \sum_{\pi\in P} sign(\pi) a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{n\pi_n}$, 而上三角矩阵 A 满足 $\forall i > j, a_{ij} = 0$, 则行列式展开项中唯一不为 0 的项为 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = 1$, 则 $|A| = 1$, A 的确不是奇异矩阵

(b) 我们将 $\Big(A, E\Big)$ 同时进行初等行变换将 A 变为单位矩阵 E, 则由 A 的特殊形式

可以很容易得到 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & \cdots & 2^{n-3} & 2^{n-2} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-4} & 2^{n-3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 2^{n-5} & 2^{n-4} \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) 令 $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 则:

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} x \right\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \left\| \begin{pmatrix} a_1 x \\ a_2 x \\ \cdots \\ a_n x \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty = 1} \Big(\max_i |a_i x| \Big) =$$

$\max\limits_{\|x\|_\infty=1}\max\limits_i\left|\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \le \max\limits_{\|x\|_\infty=1}\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}x_j| = \max\limits_{\|x\|_\infty=1}\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^n\left(|a_{ij}|\cdot\max\limits_l|x_l|\right) \le \max\limits_{\|x\|_\infty=1}\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^n (|a_{i}$

$\max\limits_i\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}| = \max\limits_i\|a_i\|_1 = \|a_k\|_1$.

接下来我们取 $y=\begin{pmatrix}\frac{|a_{k1}|}{a_{k1}}\\ \frac{|a_{k2}|}{a_{k2}}\\ \cdots\\ \frac{|a_{kn}|}{a_{kn}}\end{pmatrix}$，则有 $a_k\cdot y=|a_{k1}|+|a_{k2}|+\cdots+|a_{kn}|=\|a_k\|_1$,

这样就有 $\|A\|_\infty=\max\limits_{\|x\|_\infty=1}\|Ax\|_\infty=\max\limits_{\|x\|_\infty=1}\left\|\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{pmatrix}x\right\|_\infty \ge \left\|\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{pmatrix}y\right\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix}a_1y\\a_2y\\\cdots\\a_ny\end{pmatrix}\right\|_\infty \ge$

$|a_ky|=\|a_k\|_1=\max\limits_i\|a_i\|_1$,

综上有 $\|A\|_\infty=\max\limits_i\|a_i\|_1=\max\limits_{i=1,\cdots,n}\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}|$.

(d) 对于幺正矩阵 U, 有 $\|U\|_2=\max\limits_{\|x\|_2=1}\|Ux\|_2=\max\limits_{\|x\|_2=1}\left(x^\dagger U^\dagger Ux\right)^{1/2}=\max\limits_{\|x\|_2=1}\left(x^\dagger x\right)^{1/2}=$ 1 ,

同理对于 $U^\dagger$ 有 $\left\|U^\dagger\right\|_2=\max\limits_{\|x\|_2=1}\left\|U^\dagger x\right\|_2=\max\limits_{\|x\|_2=1}\left(x^\dagger UU^\dagger x\right)^{1/2}=\max\limits_{\|x\|_2=1}\left(x^\dagger x\right)^{1/2}=1$,

则有 $\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 有 $\|UA\|_2=\max\limits_{\|x\|_2=1}\|UAx\|_2=\max\limits_{\|x\|_2=1}\left(x^\dagger A^\dagger U^\dagger UAx\right)^{1/2}=\max\limits_{\|x\|_2=1}\left(x^\dagger A^\dagger Ax\right)^{1/2}=\max\limits_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2=\|A\|_2$,

并且 $\forall B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 有 $\left\|BU^\dagger\right\|_2\le\|B\|_2\cdot\left\|U^\dagger\right\|_2=\|B\|_2$ 而且 $\|B\|_2=\left\|BU^\dagger U\right\|_2\le\left\|BU^\dagger\right\|_2\cdot\|U\|_2=\left\|BU^\dagger\right\|_2$,

所以 $\left\|BU^\dagger\right\|_2=\|B\|_2$ 这样定义的条件数满足 $K_2(UA)=\|UA\|_2\cdot\left\|A^{-1}U^\dagger\right\|_2=\|A\|_2\cdot\left\|A^{-1}\right\|_2=K_2(A)$.

(e) 由 (c) 知, 此处 $\|A\|_\infty=\max\limits_{i=1,\cdots,n}\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}|=n, \left\|A^{-1}\right\|_\infty=\max\limits_{i=1,\cdots,n}\sum\limits_{j=1}^n\left|a'_{ij}\right|=2^{n-1}$,

故 $K_\infty(A)=\|A\|_\infty\cdot\left\|A^{-1}\right\|_\infty=n\cdot2^{n-1}$.