

# 计算物理 HW2 Problem3

付大为

学 号: 18000111105

邮 箱: fudw@pku.edu.cn

2021 年 12 月 1 日

**题目 3: Runge 效应** 考虑 Runge 函数  $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$  在区间  $[-1, +1]$  上的行为。本题中将分别利用等间距的多项式内插、Chebyshev 内插以及三次样条函数来近似  $f(x)$  的数值。

**解答:** (a) 数据表如下表 1

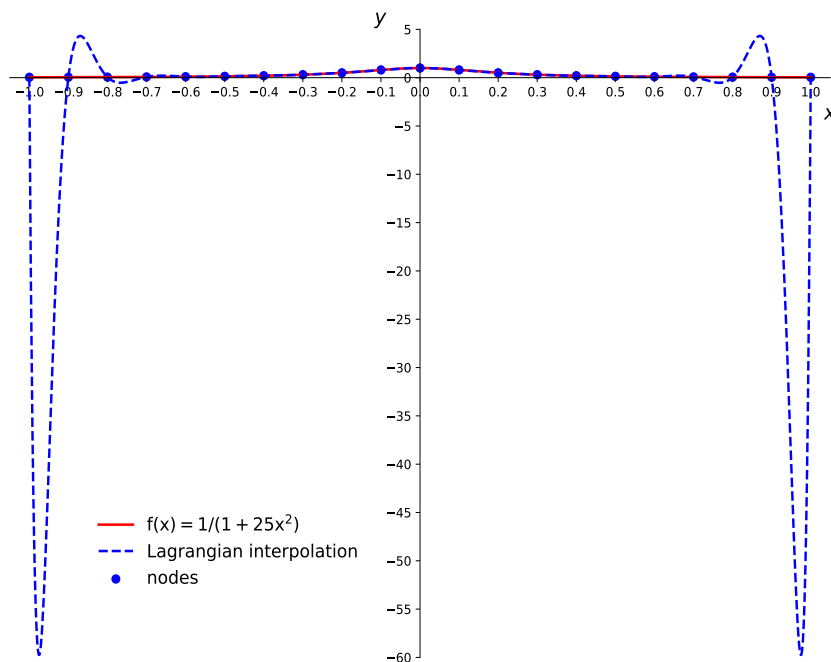
表 1: 拉格朗日多项式内插与原函数的比较

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$P_{20}(x_i)$	$ P_{20}(x_i) - f(x_i) $
0	-1.00	0.038462	0.038462	0.000000
1	-0.95	0.042440	-39.952449	39.994889
2	-0.90	0.047059	0.047059	0.000000
3	-0.85	0.052459	3.454958	3.402499
4	-0.80	0.058824	0.058824	0.000000
5	-0.75	0.066390	-0.447052	0.513442
6	-0.70	0.075472	0.075472	0.000000
7	-0.65	0.086486	0.202423	0.115936
8	-0.60	0.100000	0.100000	0.000000
9	-0.55	0.116788	0.080660	0.036128
10	-0.50	0.137931	0.137931	0.000000
11	-0.45	0.164948	0.179763	0.014814

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$P_{20}(x_i)$	$ P_{20}(x_i) - f(x_i) $
12	-0.40	0.200000	0.200000	0.000000
13	-0.35	0.246154	0.238446	0.007708
14	-0.30	0.307692	0.307692	0.000000
15	-0.25	0.390244	0.395093	0.004849
16	-0.20	0.500000	0.500000	0.000000
17	-0.15	0.640000	0.636755	0.003245
18	-0.10	0.800000	0.800000	0.000000
19	-0.05	0.941176	0.942490	0.001314
20	0.00	1.000000	1.000000	0.000000
21	0.05	0.941176	0.942490	0.001314
22	0.10	0.800000	0.800000	0.000000
23	0.15	0.640000	0.636755	0.003245
24	0.20	0.500000	0.500000	0.000000
25	0.25	0.390244	0.395093	0.004849
26	0.30	0.307692	0.307692	0.000000
27	0.35	0.246154	0.238446	0.007708
28	0.40	0.200000	0.200000	0.000000
29	0.45	0.164948	0.179763	0.014814
30	0.50	0.137931	0.137931	0.000000
31	0.55	0.116788	0.080660	0.036128
32	0.60	0.100000	0.100000	0.000000
33	0.65	0.086486	0.202423	0.115936
34	0.70	0.075472	0.075472	0.000000
35	0.75	0.066390	-0.447052	0.513442
36	0.80	0.058824	0.058824	0.000000
37	0.85	0.052459	3.454958	3.402499
38	0.90	0.047059	0.047059	0.000000
39	0.95	0.042440	-39.952449	39.994889
40	1.00	0.038462	0.038462	0.000000

内插作图如下图1

图 1: 拉格朗日多项式内插与原函数的比较



(b) 数据表如下表 2

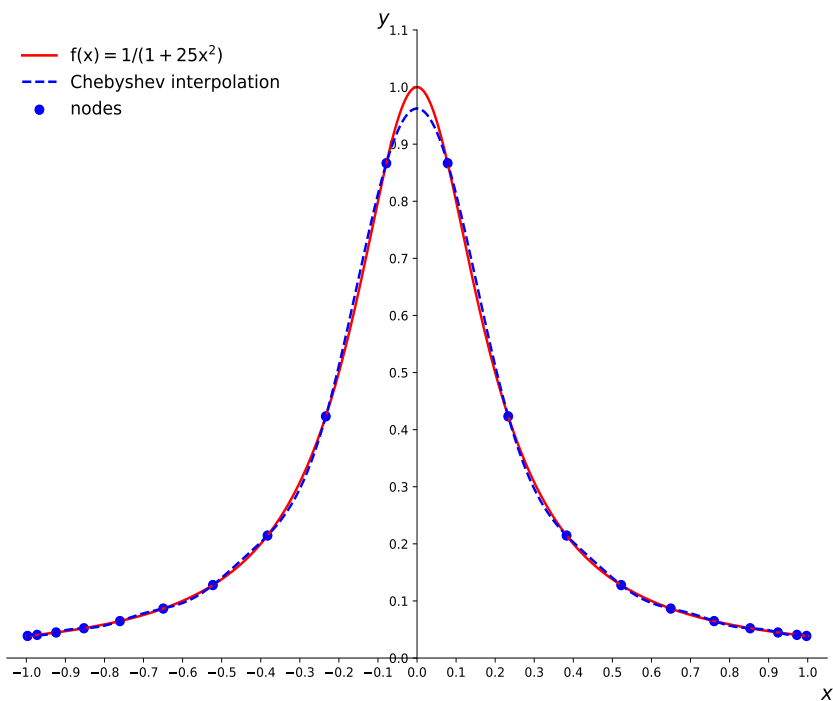
表 2: Chebyshev 多项式内插与原函数的比较

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$S(x_i)$	$ S(x_i) - f(x_i) $
0	1.00	0.038691	0.038691	0.000000
1	0.98	0.039623	0.041012	0.001390
2	0.97	0.040588	0.040588	0.000000
3	0.95	0.042601	0.041028	0.001573
4	0.92	0.044765	0.044765	0.000000
5	0.89	0.048251	0.050051	0.001801
6	0.85	0.052152	0.052152	0.000000
7	0.81	0.057931	0.055761	0.002170

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$S(x_i)$	$ S(x_i) - f(x_i) $
8	0.76	0.064702	0.064702	0.000000
9	0.70	0.074499	0.077294	0.002795
10	0.65	0.086621	0.086621	0.000000
11	0.59	0.104339	0.100421	0.003918
12	0.52	0.127794	0.127794	0.000000
13	0.45	0.163373	0.169511	0.006138
14	0.38	0.214539	0.214539	0.000000
15	0.31	0.296508	0.285364	0.011144
16	0.23	0.423295	0.423295	0.000000
17	0.16	0.621880	0.645255	0.023376
18	0.08	0.866629	0.866629	0.000000
19	0.00	1.000000	0.962410	0.037590
20	-0.08	0.866629	0.866629	0.000000
21	-0.16	0.621880	0.645255	0.023376
22	-0.23	0.423295	0.423295	0.000000
23	-0.31	0.296508	0.285364	0.011144
24	-0.38	0.214539	0.214539	0.000000
25	-0.45	0.163373	0.169511	0.006138
26	-0.52	0.127794	0.127794	0.000000
27	-0.59	0.104339	0.100421	0.003918
28	-0.65	0.086621	0.086621	0.000000
29	-0.70	0.074499	0.077294	0.002795
30	-0.76	0.064702	0.064702	0.000000
31	-0.81	0.057931	0.055761	0.002170
32	-0.85	0.052152	0.052152	0.000000
33	-0.89	0.048251	0.050051	0.001801
34	-0.92	0.044765	0.044765	0.000000
35	-0.95	0.042601	0.041028	0.001573
36	-0.97	0.040588	0.040588	0.000000
37	-0.98	0.039623	0.041012	0.001390
38	-1.00	0.038691	0.038691	0.000000

内插作图如下图2

图 2: Chebyshev 多项式内插与原函数的比较



(c) 数据表如下表 3

表 3: 三次样条函数内插与原函数的比较

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$S(x_i)$	$ S(x_i) - f(x_i) $
0	-1.00	0.038462	0.038462	0.000000
1	-0.95	0.042440	0.042534	0.000094
2	-0.90	0.047059	0.047059	0.000000
3	-0.85	0.052459	0.052431	0.000028
4	-0.80	0.058824	0.058824	0.000000
5	-0.75	0.066390	0.066394	0.000004
6	-0.70	0.075472	0.075472	0.000000
7	-0.65	0.086486	0.086474	0.000013
8	-0.60	0.100000	0.100000	0.000000

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$S(x_i)$	$ S(x_i) - f(x_i) $
9	-0.55	0.116788	0.116787	0.000001
10	-0.50	0.137931	0.137931	0.000000
11	-0.45	0.164948	0.164865	0.000084
12	-0.40	0.200000	0.200000	0.000000
13	-0.35	0.246154	0.246268	0.000114
14	-0.30	0.307692	0.307692	0.000000
15	-0.25	0.390244	0.389420	0.000824
16	-0.20	0.500000	0.500000	0.000000
17	-0.15	0.640000	0.643169	0.003169
18	-0.10	0.800000	0.800000	0.000000
19	-0.05	0.941176	0.938866	0.002310
20	0.00	1.000000	1.000000	0.000000
21	0.05	0.941176	0.938866	0.002310
22	0.10	0.800000	0.800000	0.000000
23	0.15	0.640000	0.643169	0.003169
24	0.20	0.500000	0.500000	0.000000
25	0.25	0.390244	0.389420	0.000824
26	0.30	0.307692	0.307692	0.000000
27	0.35	0.246154	0.246268	0.000114
28	0.40	0.200000	0.200000	0.000000
29	0.45	0.164948	0.164865	0.000084
30	0.50	0.137931	0.137931	0.000000
31	0.55	0.116788	0.116787	0.000001
32	0.60	0.100000	0.100000	0.000000
33	0.65	0.086486	0.086474	0.000013
34	0.70	0.075472	0.075472	0.000000
35	0.75	0.066390	0.066394	0.000004
36	0.80	0.058824	0.058824	0.000000
37	0.85	0.052459	0.052431	0.000028
38	0.90	0.047059	0.047059	0.000000
39	0.95	0.042440	0.042534	0.000094
40	1.00	0.038462	0.038462	0.000000

内插作图如下图3

图 3: 三次样条函数内插与原函数的比较

