

计算物理 HW2 Problem2

付大为

学号: 1800011105

邮箱: fudw@pku.edu.cn

2021 年 12 月 1 日

题目 2: 对 $f(x) = \cos(x^2)$, $x_0 = 0, x_1 = 0.6, x_2 = 0.9$, 采用三次样条插值. 分别考虑如下两种边界条件

- (a) 已知 $x_0 = 0$ 和 $x_2 = 0.9$ 端点处的二次导数值为 0;
(b) 利用 $f(x)$ 得到 $x_0 = 0$ 和 $x_2 = 0.9$ 端点处的一次导数值.

解答: 如果我们取 $S''(x) = M_j \left(\frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} \right) + M_{j+1} \left(\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j} \right)$, $x \in [x_j, x_{j+1}]$, 积分得到 $S(x) = -\frac{M_j}{6h_j} (x - x_{j+1})^3 + \frac{M_{j+1}}{6h_j} (x - x_j)^3 + A_j (x - x_j) + B_j$, $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $h_j = x_{j+1} - x_j$ 通过应满足条件得到递推关系如下

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j, \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (1)$$

$$A_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{h_j}{6} (M_{j+1} - M_j), \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (2)$$

$$B_j = y_j - M_j \frac{h_j^2}{6}, \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (3)$$

这里有 $\mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j}$, $\lambda_j = \frac{h_j}{h_{j-1}+h_j}$, $d_j = 6 \left[\frac{y_{j-1}}{h_{j-1}(h_{j-1}+h_j)} + \frac{y_{j+1}}{h_j(h_{j-1}+h_j)} - \frac{y_j}{h_{j-1}h_j} \right]$

对于本题 $x_0 = 0, x_1 = 0.6, x_2 = 0.9$ 的情况, 有 $h_0 = 0.6, h_1 = 0.3$, 上述方程组化为

$$\frac{2}{3}M_0 + 2M_1 + \frac{1}{3}M_2 = \frac{100}{9} + \frac{200}{9} \cos(0.81) - \frac{100}{3} \cos(0.36) \quad (4)$$

$$A_0 = \frac{5}{3}[\cos(0.36) - 1] - 0.1(M_1 - M_0) \quad (5)$$

$$A_1 = \frac{10}{3}[\cos(0.81) - \cos(0.36)] - 0.05(M_2 - M_1) \quad (6)$$

$$B_0 = 1 - 0.06M_0 \quad (7)$$

$$B_1 = \cos(0.36) - 0.015M_1 \quad (8)$$

(a) 已知 $x_0 = 0$ 和 $x_2 = 0.9$ 端点处的二次导数值为 0, 即 $M_0 = 0$, $M_2 = 0$, 由上推出 $M_1 = -2.381631$, $A_0 = 0.1313245$, $A_1 = -0.9404095$, $B_0 = 1.00000$, $B_1 = 0.9716213$. 则内插得到函数为 (系数保留五位有效数字)

$$S(x) = -0.66156x^3 + 0.13132x + 1, \quad x \in [0, 0.6]$$

$$S(x) = 1.3231(x - 0.9)^3 - 0.94041(x - 0.6) + 0.97162, \quad x \in [0.6, 0.9]$$

(b) 可以推出 $f(x)$ 的一次导数为 $f'(x) = -2x \sin(x^2)$, 则 $f'(0) = 0$, $f'(0.9) = -1.8 \sin(0.81)$ 我们要求 $S'(x_0) = f'(x_0)$, $S'(x_2) = f'(x_2)$, 这样额外有方程

$$-0.3M_0 + A_0 = 0 \quad (9)$$

$$-0.15M_2 + A_1 = -1.8 \sin(0.81) \quad (10)$$

把 (9)、(10) 和 (4)、(5)、(6)、(7) 联立解得 $M_0 = 0.3988636549$, $M_1 = -1.866113582$, $M_2 = -3.890832657$, $A_0 = 0.1196590965$, $A_1 = -0.7200920153$, $B_0 = 0.9760682807$, $B_1 = 0.963885274$ 则内插得到函数为 (系数保留五位有效数字)

$$S(x) = -0.11080(x - 0.6)^3 - 0.51836x^3 + 0.11966x + 0.97607, \quad x \in [0, 0.6]$$

$$S(x) = 1.0367(x - 0.9)^3 - 2.1616(x - 0.6)^3 - 0.72009(x - 0.6) + 0.96389, \quad x \in [0.6, 0.9]$$