



数据结构和算法 (Python描述)

郭 炜

微信公众号



微博: <http://weibo.com/guoweiofpku>

学会程序和算法，走遍天下都不怕!

讲义照片均为郭炜拍摄



北京大学
PEKING UNIVERSITY

动态规划

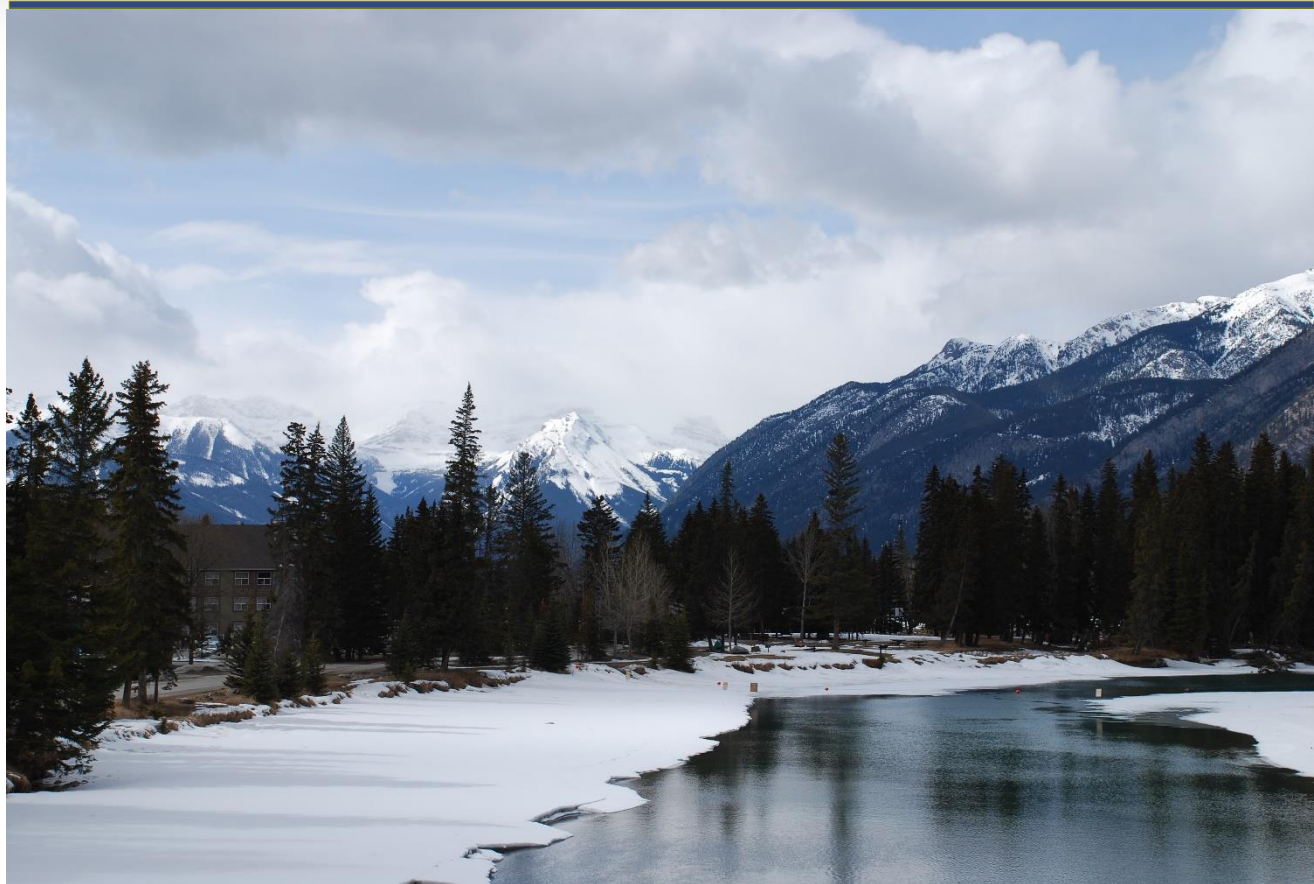


北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

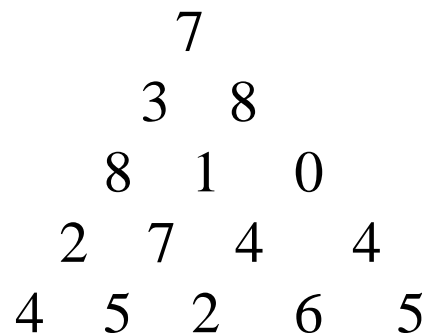
北京大学信息学院 郭炜

例题 数字三角形



加拿大班芙国家公园

例题一、数字三角形(POJ1163)



在上面的数字三角形中寻找一条从顶部到底边的路径，使得路径上所经过的数字之和最大。路径上的每一步都只能往左下或右下走。只需要求出这个最大和即可，不必给出具体路径。

三角形的行数大于1小于等于100，数字为 0 - 99

输入格式:

5 //三角形行数。下面是三角形

7

3 8

8 1 0

2 7 4 4

4 5 2 6 5

要求输出最大和

解题思路:

用二维数组存放数字三角形。

$D(r, j)$: 第 r 行第 j 个数字(r, j 从1开始算)

$MaxSum(r, j)$: 从 $D(r, j)$ 到底边的各条路径中,
最佳路径的数字之和。

问题: 求 $MaxSum(1, 1)$

典型的递归问题。

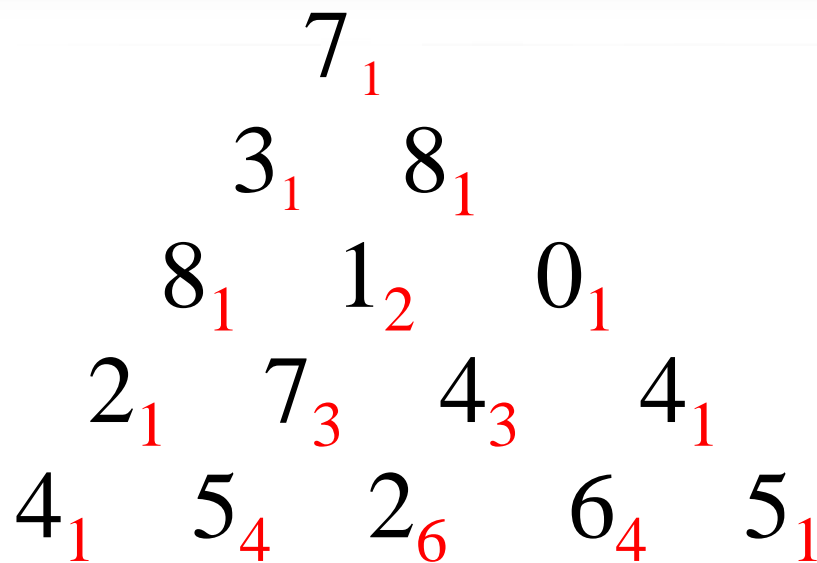
$D(r, j)$ 出发, 下一步只能走 $D(r+1, j)$ 或者 $D(r+1, j+1)$ 。故对于 N 行的三角形:

```
if ( r == N)
    MaxSum(r, j) = D(r, j)
else
    MaxSum( r, j) = Max{ MaxSum(r+1, j), MaxSum(r+1, j+1) }
                    + D(r, j)
```

数字三角形的递归程序:

```
n = int(input())
D = []
def MaxSum(i, j):
    if i == n-1:
        return D[i][j]
    x = MaxSum(i+1, j)
    y = MaxSum(i+1, j+1)
    return max(x, y) + D[i][j]
def main():
    for i in range(n):
        lst = list(map(int, input().split()))
        D.append(lst)
    print(MaxSum(0, 0))
main()
```

- 回答: 重复计算



如果采用递归的方法, 深度遍历每条路径, 存在大量重复计算。则时间复杂度为 2^n , 对于 $n = 100$ 行, 肯定超时。

改进

如果每算出一个 $\text{MaxSum}(r,j)$ 就保存起来，下次用到其值的时候直接取用，则可免去重复计算。那么可以用 $O(n^2)$ 时间完成计算。因为三角形的数字总数是 $n(n+1)/2$

```
n = int(input())
D = []
maxSum = [[-1 for j in range(i+1)] for i in range(n)]
def MaxSum(i,j):
    if i == n-1:
        return D[i][j]
    if maxSum[i][j] != -1:
        return maxSum[i][j]
    x = MaxSum(i+1,j)
    y = MaxSum(i+1,j+1)
    maxSum[i][j] = max(x,y) + D[i][j]
    return maxSum[i][j]
for i in range(n):
    lst = list(map(int,input().split()))
    D.append(lst)
print(MaxSum(0,0))
```

递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

4	5	2	6	5

递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

7				
4	5	2	6	5

递归转成递推

7

3 8

8 1 0

2 7 4 4

4 5 2 6 5

7	12			
4	5	2	6	5

递归转成递推

7

3 8

8 1 0

2 7 4 4

4 5 2 6 5

7	12	10		
4	5	2	6	5

递归转成递推

7

3 8

8 1 0

2 7 4 4

4 5 2 6 5

7	12	10	10	
4	5	2	6	5

递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

20				
7	12	10	10	
4	5	2	6	5

递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

20	13			
7	12	10	10	
4	5	2	6	5

递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

20	13	10		
7	12	10	10	
4	5	2	6	5

递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

30				
23	21			
20	13	10		
7	12	10	10	
4	5	2	6	5

递推程序

```
n = int(input())
D = []
maxSum = [[-1 for j in range(i+1)] for i in range(n)]
def main():
    for i in range(n):
        lst = list(map(int,input().split()))
        D.append(lst)
    for i in range(n):
        maxSum[n-1][i] = D[n-1][i]
    for i in range(n-2,-1,-1):
        for j in range(0,i+1):
            maxSum[i][j] =
                max(maxSum[i+1][j],maxSum[i+1][j+1]) + D[i][j]
    print(maxSum[0][0])
```

```
main()
```

空间优化

7

3 8

8 1 0

2 7 4 4

4 5 2 6 5

4	5	2	6	5
---	---	---	---	---

没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(r,j),只要从底层一行行向上递推,那么只要一维数组maxSum[100]即可,即只要存储一行的MaxSum值就可以。

空间优化

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

7	5	2	6	5
---	---	---	---	---

没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(r,j),只要从底层一行行向上递推,那么只要一维数组maxSum[100]即可,即只要存储一行的MaxSum值就可以。

空间优化

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

7	12	2	6	5
---	----	---	---	---

没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(r,j),只要从底层一行行向上递推,那么只要一维数组maxSum[100]即可,即只要存储一行的MaxSum值就可以。

空间优化

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

7	12	10	6	5
---	----	----	---	---

没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(r,j),只要从底层一行行向上递推,那么只要一维数组maxSum[100]即可,即只要存储一行的MaxSum值就可以。

空间优化

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

7	12	10	10	5
---	----	----	----	---

没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(r,j),只要从底层一行行向上递推,那么只要一维数组maxSum[100]即可,即只要存储一行的MaxSum值就可以。

空间优化

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

20	12	10	10	5
----	----	----	----	---

没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(r,j),只要从底层一行行向上递推,那么只要一维数组maxSum[100]即可,即只要存储一行的MaxSum值就可以。

空间优化

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

20	13	10	10	5
----	----	----	----	---

没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(r,j),只要从底层一行行向上递推,那么只要一维数组maxSum[100]即可,即只要存储一行的MaxSum值就可以。

空间优化

进一步考虑，连maxSum数组都可以不要，直接用D的第n行替代maxSum即可。

节省空间，时间复杂度不变

空间优化后的程序

```
n = int(input())
D = []
def main():
    for i in range(n):
        lst = list(map(int, input().split()))
        D.append(lst)
    maxSum = D[n-1]
    for i in range(n-2, -1, -1):
        for j in range(0, i+1):
            maxSum[j] = max(maxSum[j], maxSum[j+1]) + D[i][j]
    print(maxSum[0])

main()
```



北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

北京大学信息学院 郭炜

动规解题的一般思路



加拿大班芙国家公园

递归到动规的一般转化方法

- 递归函数有 n 个参数，就定义一个 n 维的数组，数组的下标是递归函数参数的取值范围，数组元素的值是递归函数的返回值，这样就可以从边界值开始，逐步填充数组，相当于计算递归函数值的逆过程。

动规解题的一般思路

1. 将原问题分解为子问题

- 把原问题分解为若干个子问题，子问题和原问题形式相同或类似，只不过规模变小了。子问题都解决，原问题即解决(数字三角形例)。
- 子问题的解一旦求出就会被保存，所以每个子问题只需求解一次。

动规解题的一般思路

2. 确定状态

- 在用动态规划解题时，我们往往将和子问题相关的各个变量的一组取值，称之为一个“状态”。一个“状态”对应于一个或多个子问题，所谓某个“状态”下的“值”，就是这个“状态”所对应的子问题的解。

动规解题的一般思路

2. 确定状态

所有“状态”的集合，构成问题的“状态空间”。“状态空间”的大小，与用动态规划解决问题的时间复杂度直接相关。在数字三角形的例子里，一共有 $N \times (N+1)/2$ 个数字，所以这个问题的状态空间里一共就有 $N \times (N+1)/2$ 个状态。

整个问题的时间复杂度是状态数目乘以计算每个状态所需时间。

在数字三角形里每个“状态”只需要经过一次，且在每个状态上作计算所花的时间都是和 N 无关的常数。

动规解题的一般思路

2. 确定状态

用动态规划解题，经常碰到的情况是， K 个整型变量能构成一个状态（如数字三角形中的行号和列号这两个变量构成“状态”）。如果这 K 个整型变量的取值范围分别是 N_1, N_2, \dots, N_k ，那么，我们就可以用一个 K 维的数组 `array[N1][N2].....[Nk]` 来存储各个状态的“值”。这个“值”未必就是一个整数或浮点数，可能是需要一个结构才能表示的，那么array就可以是一个结构数组。一个“状态”下的“值”通常会是一个或多个子问题的解。

动规解题的一般思路

3. 确定一些初始状态（边界状态）的值

以“数字三角形”为例，初始状态就是底边数字，值就是底边数字值。

动规解题的一般思路

4. 确定状态转移方程

定义出什么是“状态”，以及在该“状态”下的“值”后，就要找出不同的状态之间如何迁移——即如何从一个或多个“值”已知的“状态”，求出另一个“状态”的“值”（“**人人为我**”递推型）。状态的迁移可以用递推公式表示，此递推公式也可被称作“状态转移方程”。

数字三角形的状态转移方程：

$$\text{MaxSum}[r][j] = \begin{cases} D[r][j] & r = N \\ \text{Max}\{ \text{MaxSum}[r+1][j], \text{MaxSum}[r+1][j+1] \} + D[r][j] & \text{其他情况} \end{cases}$$

能用动规解决的问题的特点

- 1) **问题具有最优子结构性质。** 如果问题的最优解所包含的子问题的解也是最优的，我们就称该问题具有最优子结构性质。
- 2) **无后效性。** 当前的若干个状态值一旦确定，则此后过程的演变就只和这若干个状态的值有关，和之前是采取哪种手段或经过哪条路径演变到当前的这若干个状态，没有关系。



北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

北京大学信息学院 郭炜

例题 最长上升子序列



加拿大班芙国家公园

例题二：最长上升子序列(百练2757)

问题描述

一个数的序列 a_i ，当 $a_1 < a_2 < \dots < a_s$ 的时候，我们称这个序列是上升的。对于给定的一个序列 (a_1, a_2, \dots, a_N) ，我们可以得到一些上升的子序列 $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_K})$ ，这里 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_K \leq N$ 。比如，对于序列 $(1, 7, 3, 5, 9, 4, 8)$ ，有它的一些上升子序列，如 $(1, 7)$, $(3, 4, 8)$ 等等。这些子序列中最长的长度是4，比如子序列 $(1, 3, 5, 8)$ 。

你的任务，就是对于给定的序列，求出最长上升子序列的长度。

输入数据

输入的第一行是序列的长度 N ($1 \leq N \leq 1000$)。第二行给出序列中的 N 个整数，这些整数的取值范围都在0到10000。

输出要求

最长上升子序列的长度。

输入样例

7

1 7 3 5 9 4 8

输出样例

4

解题思路

1.找子问题

“求序列的前 n 个元素的最长上升子序列的长度”是个子问题，但这样分解子问题，不具有“无后效性”

假设 $F(n) = x$,但可能有多个序列满足 $F(n) = x$ 。有的序列的最后一个元素比 a_{n+1} 小，则加上 a_{n+1} 就能形成更长上升子序列；有的序列最后一个元素不比 a_{n+1} 小.....以后的事情受如何达到状态 n 的影响，不符合“无后效性”

解题思路

1.找子问题

“求以 a_k ($k=1, 2, 3...N$) 为终点的最长上升子序列的长度”

一个上升子序列中最右边的那个数，称为该子序列的“终点”。

虽然这个子问题和原问题形式上并不完全一样，但是只要这 N 个子问题都解决了，那么这 N 个子问题的解中，最大的那个就是整个问题的解。

2. 确定状态:

子问题只和一个变量-- 数字的位置相关。因此序列中数的位置 k 就是“状态”，而状态 k 对应的“值”，就是以 a_k 做为“终点”的最长上升子序列的长度。

状态一共有 N 个。

3. 找出状态转移方程：

$\text{maxLen}(k)$ 表示以 a_k 做为“终点”的最长上升子序列的长度那么：

初始状态： $\text{maxLen}(1) = 1$

$\text{maxLen}(k) = \max \{ \text{maxLen}(i) : 1 \leq i < k \text{ 且 } a_i < a_k \text{ 且 } k \neq 1 \} + 1$

若找不到这样的 i ,则 $\text{maxLen}(k) = 1$

$\text{maxLen}(k)$ 的值，就是在 a_k 左边，“终点”数值小于 a_k ，且长度最大的那个上升子序列的长度再加1。因为 a_k 左边任何“终点”小于 a_k 的子序列，加上 a_k 后就能形成一个更长的上升子序列。

最长上升子序列

```
N = int(input())
maxLen = [1 for i in range(N+10)]
a = list(map(int,input().split()))
for i in range(1,N):
    #每次求以第i个数为终点的最长上升子序列的长度
    for j in range(0,i):
        #察看以第j个数为终点的最长上升子序列
        if a[i] > a[j]:
            maxLen[i] = max(maxLen[i],maxLen[j]+1)
print(max(maxLen))
```

#时间复杂度 $O(N^2)$

动归的常用两种形式

1) 递归型

优点：直观，容易编写

缺点：可能会因递归层数太深导致爆栈，函数调用带来额外时间开销。无法使用滚动数组节省空间。总体来说，比递推型慢。

1) 递推型

效率高，有可能使用滚动数组节省空间



北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

北京大学信息学院 郭炜

例题 最长公共子序列



荷兰阿姆斯特丹库肯霍夫公园

例三、公共子序列 (POJ1458)

给出两个字符串，求出这样的一个最长的公共子序列的长度：子序列中的每个字符都能在两个原串中找到，而且每个字符的先后顺序和原串中的先后顺序一致。

最长公共子序列

Sample Input

```
abcfbc abfcab
programming contest
abcd mnp
```

Sample Output

```
4
2
0
```

最长公共子序列

输入两个串s1,s2,

设MaxLen(i,j)表示:

s1的左边i个字符形成的子串, 与s2左边的j个字符形成的子串的最长公共子序列的长度(i,j从0开始算)

MaxLen(i,j) 就是本题的 “状态”

假定 $\text{len1} = \text{strlen}(s1), \text{len2} = \text{strlen}(s2)$

那么题目就是要求 $\text{MaxLen}(\text{len1}, \text{len2})$

最长公共子序列

显然:

$$\text{MaxLen}(n,0) = 0 \quad (n = 0 \dots \text{len1})$$

$$\text{MaxLen}(0,n) = 0 \quad (n = 0 \dots \text{len2})$$

递推公式:

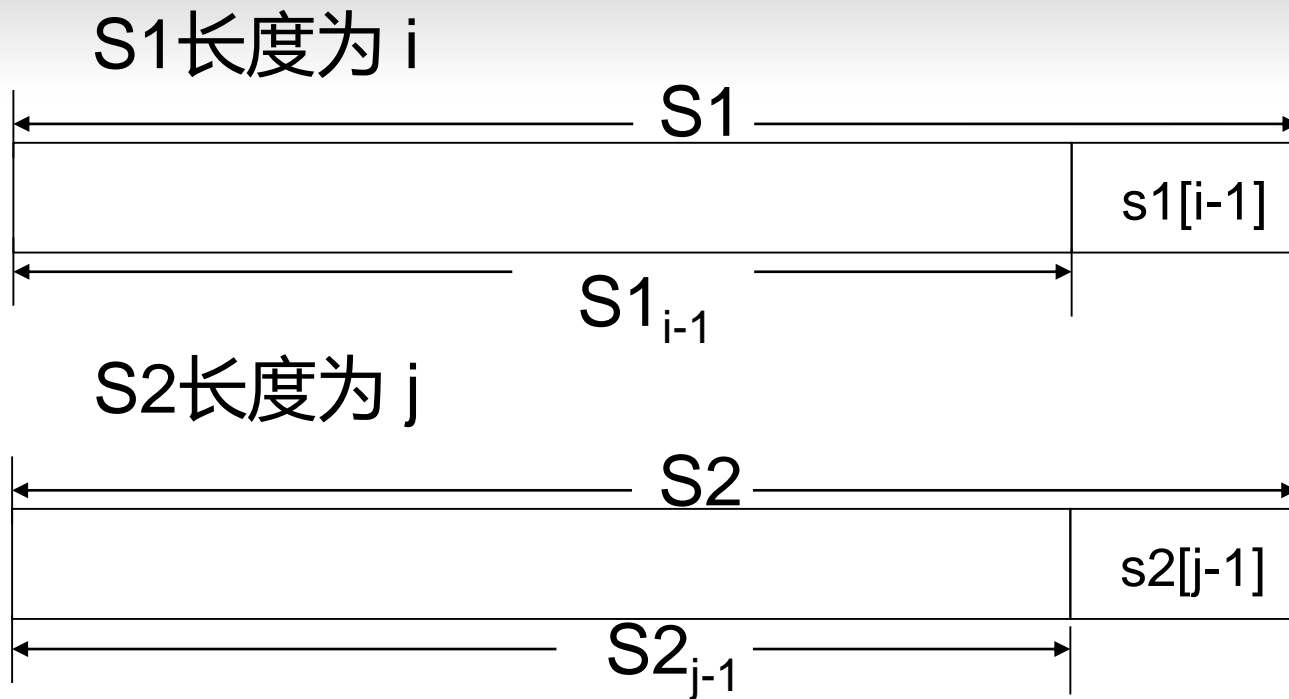
if ($s1[i-1] == s2[j-1]$) //s1的最左边字符是s1[0]

$$\text{MaxLen}(i,j) = \text{MaxLen}(i-1,j-1) + 1;$$

else

$$\text{MaxLen}(i,j) = \text{Max}(\text{MaxLen}(i,j-1), \text{MaxLen}(i-1,j));$$

时间复杂度 $O(mn)$ m,n 是两个字符串长度



$S1[i-1] \neq s2[j-1]$ 时, $\text{MaxLen}(S1, S2)$ 不会比 $\text{MaxLen}(S1, S2_{j-1})$ 和 $\text{MaxLen}(S1_{i-1}, S2)$ 两者之中任何一个小, 也不会比两者都大。

```
mx = 1010
```

```
maxLen = [[0 for j in range(mx)] for i in range(mx)]
```

```
while True:
```

```
    try:
```

```
        [s1,s2] = input().split()
```

```
        length1,length2 = len(s1),len(s2)
```

```
        for i in range(length1+1):
```

```
            maxLen[i][0] = 0
```

```
        for j in range(length2+1):
```

```
            maxLen[0][j] = 0
```

```
        for i in range(1,length1+1):
```

```
            for j in range(1,length2+1):
```

```
                if s1[i-1] == s2[j-1]:
```

```
                    maxLen[i][j] = maxLen[i-1][j-1] + 1
```

```
                else:
```

```
                    maxLen[i][j] = max(maxLen[i][j-1],maxLen[i-1][j])
```

```
        print( maxLen[length1][length2])
```

```
    except:
```

```
        break
```

活学活用

- 掌握递归和动态规划的思想，解决问题时灵活应用



北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

北京大学信息学院 郭炜

例题 最佳加法表达式



波兰华沙老城

例四、最佳加法表达式

有一个由1..9组成的数字串.问如果将 m 个加号插入到这个数字串中,在各种可能形成的表达式中, 值最小的那个表达式的值是多少

解题思路

假定数字串长度是 n ，添完加号后，表达式的最后一个加号添加在第 i 个数字后面，那么整个表达式的最小值，就等于在前 i 个数字中插入 $m - 1$ 个加号所能形成的最小值，加上第 $i + 1$ 到第 n 个数字所组成的数的值（ i 从1开始算）。

解题思路

设 $V(m,n)$ 表示在 n 个数字中插入 m 个加号所能形成的表达式最小值，那么：

if $m = 0$

$V(m,n) = n$ 个数字构成的整数

else if $n < m + 1$

$V(m,n) = \infty$

else

$V(m,n) = \text{Min}\{ V(m-1,i) + \text{Num}(i+1,n) \} \ (i = m \dots n-1)$

$\text{Num}(i,j)$ 表示从第 i 个数字到第 j 个数字所组成的数。数字编号从1开始算。此操作复杂度是 $O(j-i+1)$ ，可以预处理后存起来。

总时间复杂度： $O(mn^2)$ 。

解题思路

总时间复杂度: $O(mn^2)$.

若 n 比较大, `long long` 不够存放运算过程中的整数, 则需要使用高精度计算 (用数组存放大整数, 模拟列竖式做加法), 复杂度为 $O(mn^3)$



北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

北京大学信息学院 郭炜

例题 神奇的口袋



圣彼得堡阿芙乐尔号巡洋舰

例五、神奇的口袋(百练2755)

- 有一个神奇的口袋，总的容积是40，用这个口袋可以变出一些物品，这些物品的总体积必须是40。
- John现在有 n ($1 \leq n \leq 20$) 个想要得到的物品，每个物品的体积分别是 a_1, a_2, \dots, a_n 。John可以从这些物品中选择一些，如果选出的物体的总体积是40，那么利用这个神奇的口袋，John就可以得到这些物品。现在的问题是，John有多少种不同的选择物品的方式。

- **输入**

输入的第一行是正整数 n ($1 \leq n \leq 20$), 表示不同的物品的数目。接下来的 n 行, 每行有一个1到40之间的正整数, 分别给出 a_1, a_2, \dots, a_n 的值。

- **输出**

输出不同的选择物品的方式的数目。

- **输入样例**

3

20

20

20

- **输出样例**

3

枚举的解法：

枚举每个物品是选还是不选，共 2^{20} 种情况


```
def Ways( w , k ):    # 从前k种物品中选择一些, 凑成体积w的做法数目
    if w == 0:
        return 1
    if k <= 0:
        return 0
    return Ways(w, k -1 ) + Ways(w - a[k], k -1 )

N = int( input() )
a = [ 0 ]
for i in range(N):
    a.append( int(input()))
print( Ways(40,N) )
```

动 规 解 法

```
N = int( input() )
Ways = [ [ 0 for i in range(40) ] for i in range(50) ]
# Ways[i][j]表示从前j种物品里凑出体积i的方法数
a = [ 0 ]
for i in range( 1, N+1 ):
    a.append( int(input()) )
    Ways[0][i] = 1
Ways[0][0] = 1
for w in range( 1, 41 ):
    for k in range( 1, N+1 ):
        Ways[w][k] = Ways[w][k-1]
        if w-a[k] >= 0:
            Ways[w][k] += Ways[w-a[k]][k-1]
print( Ways[40][N] )
```



北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

北京大学信息学院 郭炜

例题

Charm Bracelet



美国圣地亚哥中途岛号航母

例六、 Charm Bracelet 0-1背包问题(POJ3624)

有 N 件物品和一个容积为 M 的背包。第 i 件物品的体积 $w[i]$ ，价值是 $d[i]$ 。求解将哪些物品装入背包可使价值总和最大。每种物品只有一件，可以选择放或者不放 ($N \leq 3500, M \leq 13000$)。

0-1背包问题(POJ3624)

用 $F[i][j]$ 表示取前 i 种物品，使它们总体积不超过 j 的最优取法取得的价值总和。要求 $F[N][M]$

边界：if ($w[1] \leq j$)
 $F[1][j] = d[1];$
 else
 $F[1][j] = 0;$

0-1背包问题(POJ3624)

用 $F[i][j]$ 表示取前 i 种物品，使它们总体积不超过 j 的最优取法取得的价值总和

递推： $F[i][j] = \max(F[i-1][j], F[i-1][j-w[i]] + d[i])$

取或不取第 i 种物品，两者选优
($j-w[i] \geq 0$ 才有第二项)

0-1背包问题(POJ3624)

$$F[i][j] = \max(F[i-1][j], F[i-1][j-w[i]] + d[i])$$

本题如用记忆型递归，需要一个很大的二维数组，会超内存。注意到这个二维数组的下一行的值，只用到了上一行的正上方及左边的值，因此可用滚动数组的思想，只要一行即可。即可以用一维数组递推实现。



北京大学
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

北京大学信息学院 郭炜

例题:滑雪



圣彼得堡炮兵博物馆

例七、滑雪(百练1088)

Michael喜欢滑雪百这并不奇怪， 因为滑雪的确很刺激。

可是为了获得速度，滑的区域必须向下倾斜，而且当你滑到坡底，你不得不再次走上坡或者等待升降机来载你。

Michael想知道载一个区域中最长的滑坡。区域由一个二维数组给出。数组的每个数字代表点的高度。下面是一个例子

```
1 2 3 4 5
16 17 18 19 6
15 24 25 20 7
14 23 22 21 8
13 12 11 10 9
```

一个人可以从某个点滑向上下左右相邻四个点之一，当且仅当高度减小。在上面的例子中，一条可滑行的滑坡为24-17-16-1。当然25-24-23-...-3-2-1更长。事实上，这是最长的一条。输入输入的第一行表示区域的行数R和列数C($1 \leq R, C \leq 100$)。下面是R行，每行有C个整数，代表高度h， $0 \leq h \leq 10000$ 。输出输出最长区域的长度。

输入

输入的第一行表示区域的行数R和列数C
($1 \leq R, C \leq 100$)。下面是R行，每行有C个整数，
代表高度h， $0 \leq h \leq 10000$ 。

输出

输出最长区域的长度。

样例输入

```
5 5
1 2 3 4 5
16 17 18 19 6
15 24 25 20 7
14 23 22 21 8
13 12 11 10 9
```

样例输出

```
25
```

$L(i,j)$ 表示从点 (i,j) 出发的最长滑行长度。

一个点 (i,j) , 如果周围没有比它低的点, $L(i,j) = 1$

否则

递推公式: $L(i,j)$ 等于 (i,j) 周围四个点中,比 (i,j) 低, 且 L 值最大的那个点的 L 值, 再加1

复杂度: $O(n^2)$

解法

$L(i,j)$ 表示从点 (i,j) 出发的最长滑行长度。

一个点 (i,j) , 如果周围没有比它低的点, $L(i,j) = 1$

将所有点按高度从小到大排序。每个点的 L 值都初始化为1

从小到大遍历所有的点。经过一个点 (i,j) 时, 用递推公式求 $L(i,j)$