数据结构和算法
(Python描述)

郭 炜

微信公众号

微博：http://weibo.com/guoweiofpku

学会程序和算法，走遍天下都不怕!

讲义照片均为郭炜拍摄

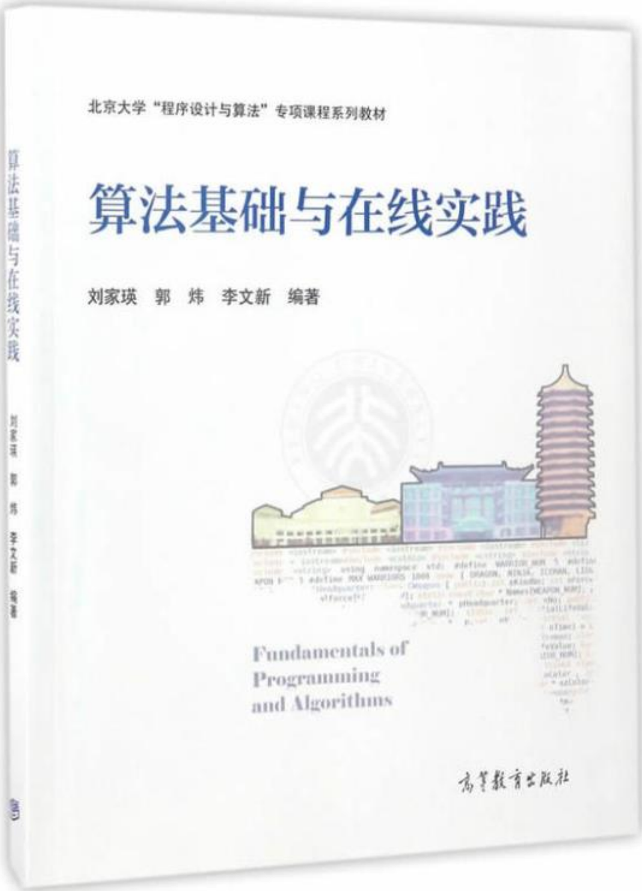
配套教材：

高等教育出版社

《算法基础与在线实践》

刘家瑛 郭炜 李文新 编著

本讲义中所有例题，根据题目名称在
http://openjudge.cn
“百练”组进行搜索即可提交



最小生成树

图的生成树

河南云台山红石峡

图的生成树

- 在一个无向连通图G中，如果取它的全部顶点和一部分边构成一个子图G′ ，即：

  $$V(G') = V(G); E(G') \subseteq E(G)$$

  若边集E(G′)中的边既将图中的所有顶点连通又不形成回路，则称子图G′是原图G的一棵生成树。

- 一棵含有n个点的生成树，必含有n-1条边。

- 无向图的极小连通子图(去掉一条边就不连通的子图)就是生成树

用深度优先遍求图的生成树

- 深度优先遍历一个图，记录每个顶点的父节点（即前驱节点，也即深度优先搜索树中的父节点），遍历结束后，将每个顶点及其父节点之间的边输出，即得到生成树。

用深度优先遍求图的生成树

```
def dfsMst(G):  #G连通无向图邻接表。求dfs生成树,顶点从0编号
    #G[s]就是s的邻点集合
    n = len(G)
    father = [-1 for i in range(n)]
    def dfs(v,f):
        father[v] = f
        for u in G[v]:
            if father[u] == -1:  #没访问过
                dfs(u,v)    #u的father是v
    dfs(0,0)  #搜索树根节点父亲就是它自己
    result = []  #存放生成树的边
    for i in range(n):
        if father[i] != i:
            result.append((father[i],i))
    return result
```

Prim算法
求最小生成树

河南郭亮村

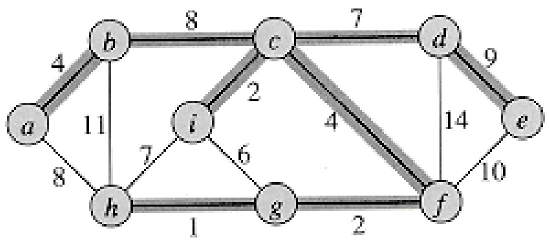
最小生成树

- ✓ 对于一个无向连通带权图，每棵树的权（即树中所有边的权值总和）也可能不同

- ✓ 具有最小权值的生成树称为最小生成树。

最小生成树

- 生成树
  - 无向连通图的边的集合
  - 无回路
  - 连接所有的点
- 最小
  - 所有边的权值之和最小



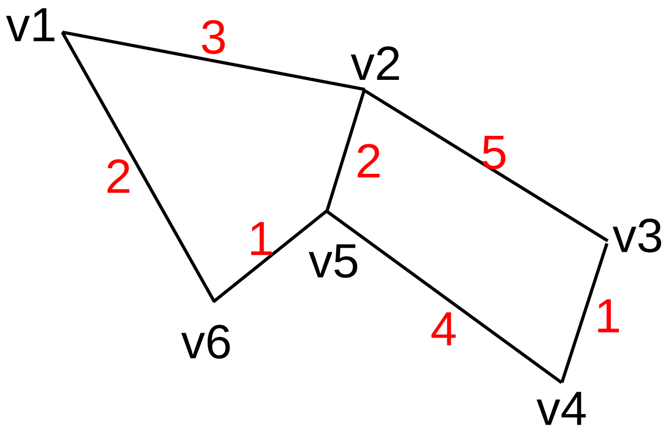
Prim算法求最小生成树

- 假设G=(V,E)是有n个顶点的带权连通图，T=(U,TE)是G的最小生成树，U,TE初值均为空集。

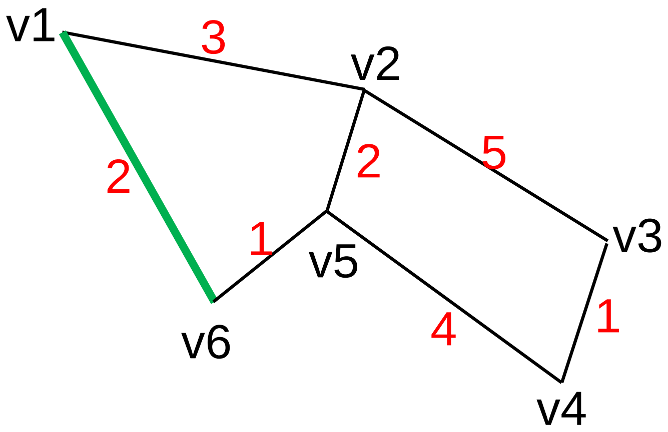
- 从V中任取一个顶点将它并入U中

- 每次从一个端点已在T中，另一个端点仍在T外的所有边中，找一条权值最小的，并把该边及端点并入T。做n-1次，T中就有n个点，n-1条边，T就是最小生成树

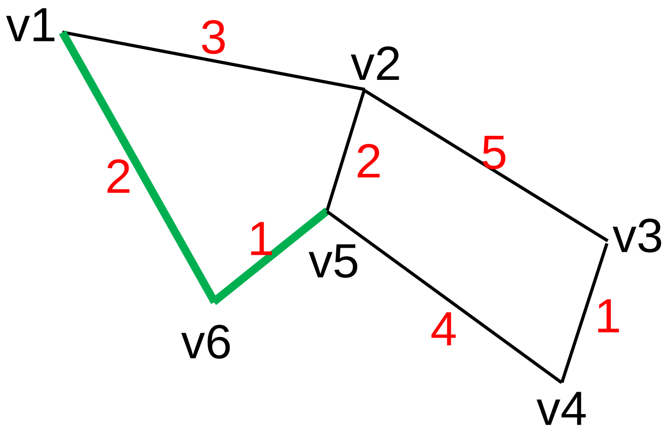
Prim算法



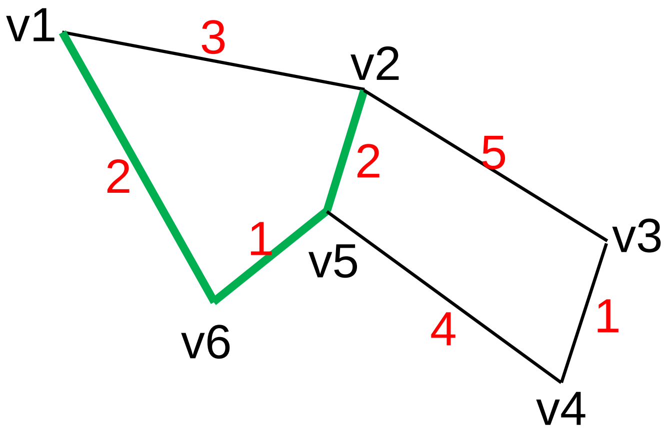
Prim算法



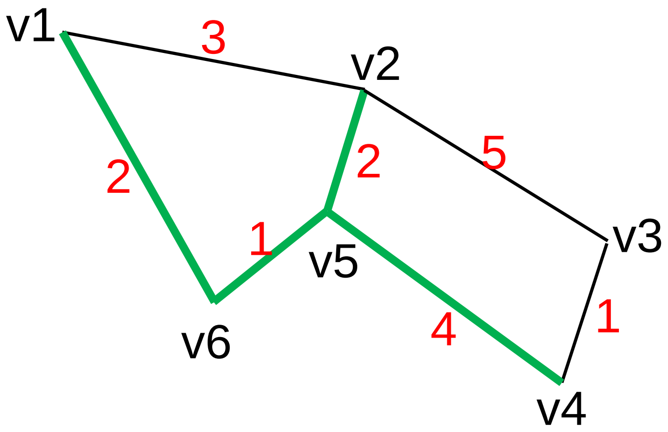
Prim算法



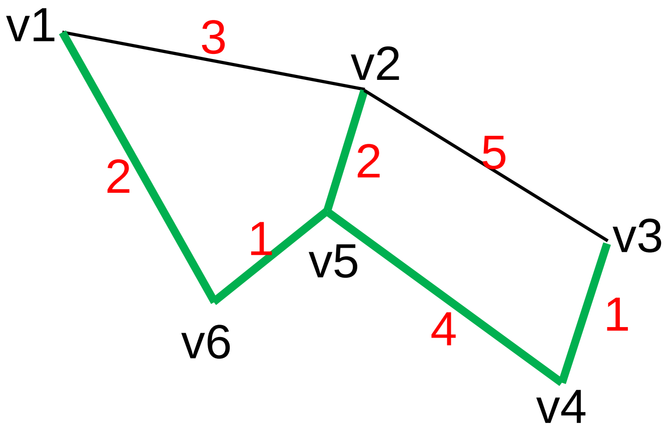
Prim算法



Prim算法



Prim算法



Prim算法实现

- 图节点数目为N,正在构造的生成树为T,
- 维护Dist数组,Dist[i]表示Vi到T的“距离”，即Vi和T中所有的点的连边的最小权值
- 开始所有Dist[i] = 无穷大, T 为空集

1) 若|T| = N，最小生成树完成。否则取Dist[i]最小的不在T中的点Vi, 将其加入T

2) 松弛操作：更新所有与Vi有边相连且不在T中的点Vj的Dist值：

Dist[j] = min(Dist[j],W(Vi,Vj))

3) 转到1)

Prim算法加快选边速度

每次如何从连接T中和T外顶点的所有边中，找到一条最短的

- 1) 如果用邻接矩阵存放图，而且选取最短边的时候遍历所有点进行选取，则总时间复杂度为$O(V^2)$(一共要选出V个点，选出每个点时，选最小dist[i] O(v)，松弛操作O(v)), V 为顶点个数
- 2)用邻接表存放图,并使用堆来选取最小dist[i]，则总时间复杂度为O(ElogV)
- 不加堆优化的Prim 算法适用于密集图，加堆优化的适用于稀疏图

POJ 1258 Agri-Net 最小生成树模版题

输入图的邻接矩阵，求最小生成树的总权值(多组数据)

输入样例:

4

0 4 9 21

4 0 8 17

9 8 0 16

21 17 16 0

输出样例:

28

Prim + 堆 完成POJ1258 Agri-Net

```
import heapq
INF = 1 << 30

class Edge:
    def __init__(self,v=0,w=INF):
        self.v = v   #边端点，另一端点已知
        self.w = w   #边权值或v到在建最小生成树的距离
    def __lt__(self,other):
        return self.w < other.w
```

```
def HeapPrim(G,n):
    #G是邻接表,n是顶点数目, 返回值是最小生成树权值和
    xDist = Edge(0,0)
    pq = []
    heapq.heapify(pq)  #存放顶点及其到在建生成树的距离
    vDist = [INF for i in range(n)]  #各顶点到已经建好的那部分树的距离
    vUsed = [0 for i in range(n)]  #标记顶点是否已经被加入最小生成树
    doneNum = 0   #已经被加入最小生成树的顶点数目
    totalW = 0  #最小生成树总权值
    heapq.heappush(pq,Edge(0,0))  #开始只有顶点0, 它到最小生成树距离0
```

```
while doneNum < n and pq!= []:
    while True:   #每次从堆里面拿离在建生成树最近的不在生成树里面的点
        xDist = pq[0]
        heapq.heappop(pq)
        if not (vUsed[xDist.v] == 1 and  pq != []):
            break
    if vUsed[xDist.v] == 0: #xDist.v要新加到生成树里面
         totalW += xDist.w
         vUsed[xDist.v] = 1
         doneNum +=1
         for i in range(len(G[xDist.v])): #更新新加入点的邻点
               k = G[xDist.v][i].v
               if vUsed[k] == 0:
                       w = G[xDist.v][i].w
                       if  vDist[k] > w:
                             vDist[k] = w
                             heapq.heappush(pq,(Edge(k,w)))
if doneNum < n:
    return -1; #图不连通
return totalW
```

```
#main

while True:
    try:
        N = int(input())
        G = [[] for i in range(N)]
        for  i in range(N):
            lst = list(map(int,input().split()))
            for j in range(N):
                G[i].append(Edge(j,lst[j]))
        print(HeapPrim(G,N))
    except:
        break
```

考察了所有的边，且考察一条边时可能执行
heapq.heappush(pq,(Edge(k,w))
故复杂度O(ELogV)

Kruskal算法求最小生成树

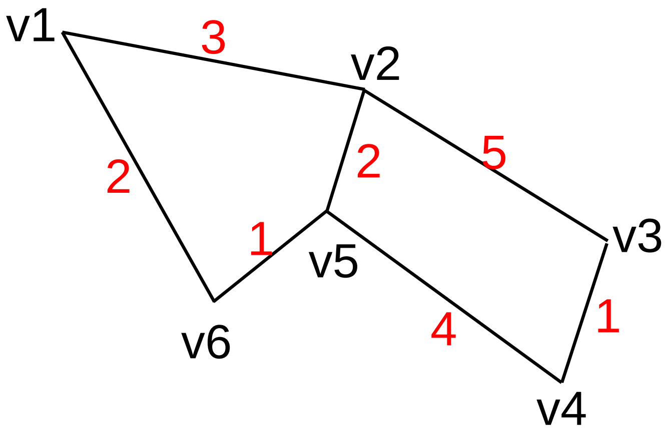

庐山如琴湖

Kruskal算法

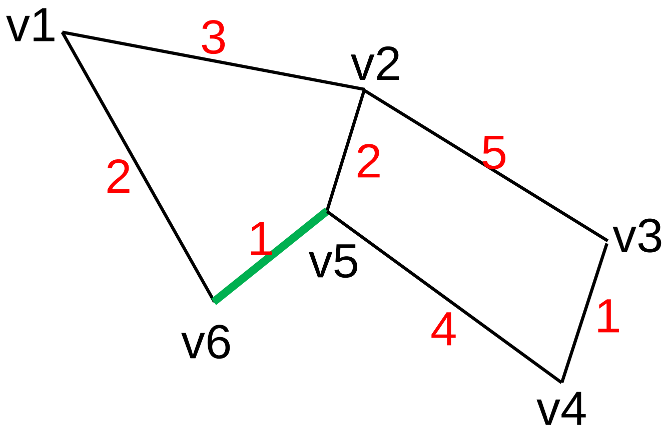
- 假设G=(V,E)是一个具有n个顶点的连通网，T=(U,TE)是G的最小生成树，U=V,TE初值为空。

- 将图G中的边按权值从小到大依次选取，若选取的边使生成树不形成回路，则把它并入TE中，若形成回路则将其舍弃，直到TE中包含N-1条边为止，此时T为最小生成树。

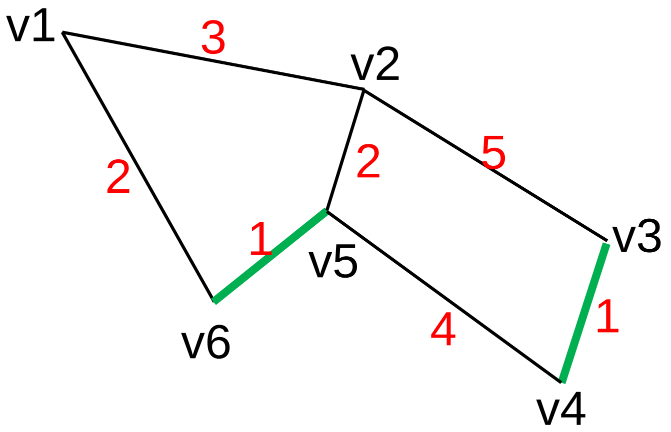
Kruskal算法



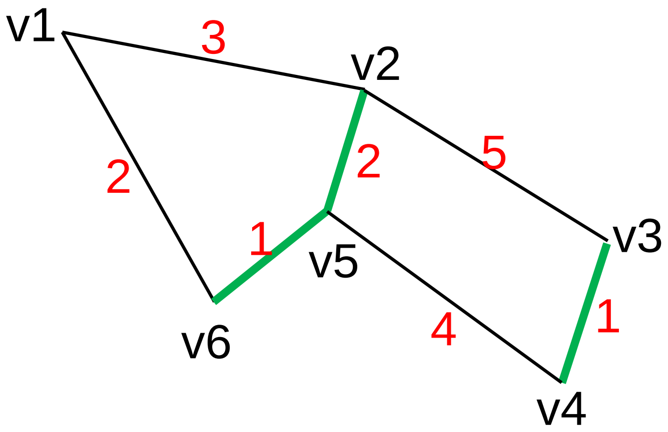
Kruskal算法



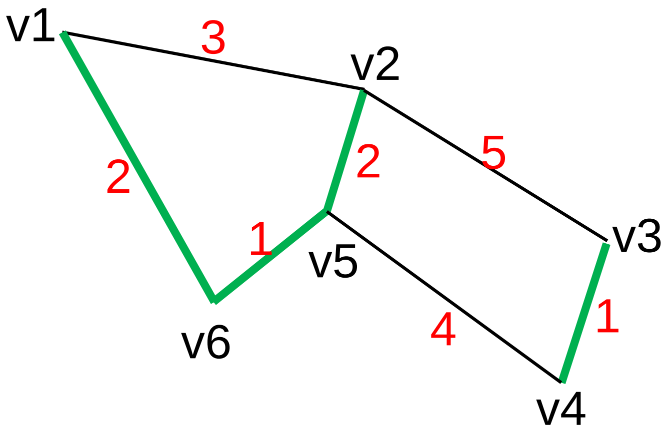
Kruskal算法



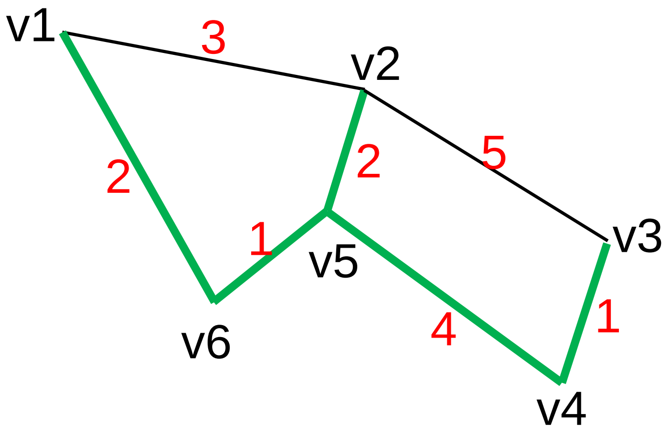
Kruskal算法



Kruskal算法



Kruskal算法



关键问题

- **如何判断欲加入的一条边是否与生成树中边构成回路。**
- 将各顶点划分为所属集合的方法来解决，每个集合的表示一个无回路的子集。开始时边集为空，N个顶点分属N个集合，每个集合只有一个顶点，表示顶点之间互不连通。
- 当从边集中按顺序选取一条边时，若它的两个端点分属于不同的集合，则表明此边连通了两个不同的部分，因每个部分连通无回路，故连通后仍不会产生回路，此边保留，同时把相应两个集合合并
- 要用并查集提高效率

Kruskal算法完成POJ1258 Agri-Net

```
INF = 1 << 30
class Edge:
    def __init__(self,s,e,w):
        self.s ,self.e,self.w = s,e,w   #起点，终点，权值
    def __lt__(self,other):
        return self.w < other.w

def GetRoot(a):
        if parent[a] == a:
                return a
        parent[a] = GetRoot(parent[a])
        return parent[a]
def Merge(a, b):
        p1 = GetRoot(a)
        p2 = GetRoot(b)
        if p1 == p2:
                return
        parent[p2] = p1
```

```
while True:   #main
    try:
        N = int(input())
        parent = [i for i in range(N)]
        edges = []
        for  i in range(N):
            lst = list(map(int,input().split()))
            for j in range(N):
                edges.append(Edge(i,j,lst[j]))
        edges.sort()  #排序复杂度O(ElogE)
        done = totalLen = 0
        for edge in edges:
            if GetRoot(edge.s) != GetRoot(edge.e):
                Merge(edge.s,edge.e)
                done += 1
                totalLen += edge.w
            if done == N - 1:
                break
        print(totalLen)
    except:  break
```

算法：Kruskal 和 Prim 的比较

- Kruskal:将所有边从小到大加入，在此过程中判断是否构成回路
  - 使用数据结构：并查集
  - 时间复杂度：O(ElogE)
  - 适用于稀疏图
- Prim:从任一节点出发，不断扩展
  - 使用数据结构：堆
  - 时间复杂度：O(ElogV) 或 O(VlogV+E)(斐波那契堆)
  - 适用于密集图
  - 若不用堆则时间复杂度为$O(V^2)$

例题

内蒙古阿斯哈图石林

例题： POJ 2349 Arctic Network

- 某地区共有n座村庄，每座村庄的坐标用一对整数(x, y)表示，现在要在村庄之间建立通讯网络。
- 通讯工具有两种，分别是需要铺设的普通线路和无线通讯的卫星设备。
- 只能给k个村庄配备卫星设备，拥有卫星设备的村庄互相间直接通讯。
- 铺设了线路的村庄之间也可以通讯。但是由于技术原因，两个村庄之间线路长度最多不能超过 d, 否则就会由于信号衰减导致通讯不可靠。要想增大 d 值，则会导致要投入更多的设备（成本）

例题： POJ 2349 Arctic Network

- 已知所有村庄的坐标 (x , y)， 卫星设备的数量 k 。

- 问：如何分配卫星设备，才能使各个村庄之间能直接或间接的通讯，并且 d 的值最小？ 求出 d 的最小值。

- 数据规模： 0 <= k <= n<= 500

思 路

- 假设 d 已知，把所有铺设线路的村庄连接起来，构成一个图。需要卫星设备的台数就是图的连通支的个数。
- d越小，连通支就可能越多。
- 那么，只需找到一个最小的d，使得连通支的个数小于等于卫星设备的数目。

答案

把整个问题看做一个完全图，村庄就是点，图上两点之间的边的权值，就是两个村庄的直线距离。

只需在该图上求最小生成树，d 的最小值即为第 K 长边!

因为：最小生成树中的最长k-1条长边都去掉后，正好将原树分成了k 个连通分量，在每个连通分量上摆一个卫星设备即可

那么剩下的各村庄之间的连线，最长不用超过 第 k 长边的长度。

为什么d不可能比第k长边更小？

假设最小生成树T上，第k长边连接的点是a,b，那么将边<a,b>去掉后，树就分成了两个部分T1 和T2

要使T1和T2能够通讯，必须在T1中找一点p和T2中的点q相连，若边<p,q>的长度小于<a,b>，则在T 上用<p,q>替换<a,b>就能得到更小的生成树，矛盾。因此找不到长度小于<a,b>的<p,q>。

对任何比第k长边短的边e，同理也不可能找到替代e的边。

因此 d不可能更小了

最小生成树可能不止一棵，为什么第k长边长度一定相同？因为有以下结论：

- 一个图的两棵最小生成树，边的权值序列排序后结果相同

证明：假设某个最小生成树T1的边权从小到大排序后的序列为:
a1, a2 .... an
某个最小生成树T2的边权从小到大排序后的序列为:
b1,b2…bn
两者若不同，则必然存在一个最小的i,使得 ai > bi

假设T2中有m条边的权为bi，那么，T1中最多只有m-1条边的权和bi相同。

但是对于T2中任何一条不在T1中的权为bi的边，如果将其从T2去掉，则T2被分成A,B两个部分。那么在T1中连接A,B这两个部分的边，必然权值是等于bi的，否则经过替换，要么T1的权值可以变得更小，要么T2的权值可以变得更小，这和T1,T2是最小生成树矛盾。对T2中每个权值为bi的边，都可以在T1中找到一个权值相同且不在T2的边与其对应，而这些边由于是连接不同部分的，所以不可能相同，因此，在T1中也应该有m条权值为bi的边，这和T1中最多m-1条权值为bi的边矛盾。因此，不存在i,使得的ai>bi，即两个边权序列应该相同。