数据结构和算法

(Python描述)

郭 炜

微信公众号

微博：http://weibo.com/guoweiofpku

学会程序和算法，走遍天下都不怕!

讲义照片均为郭炜拍摄

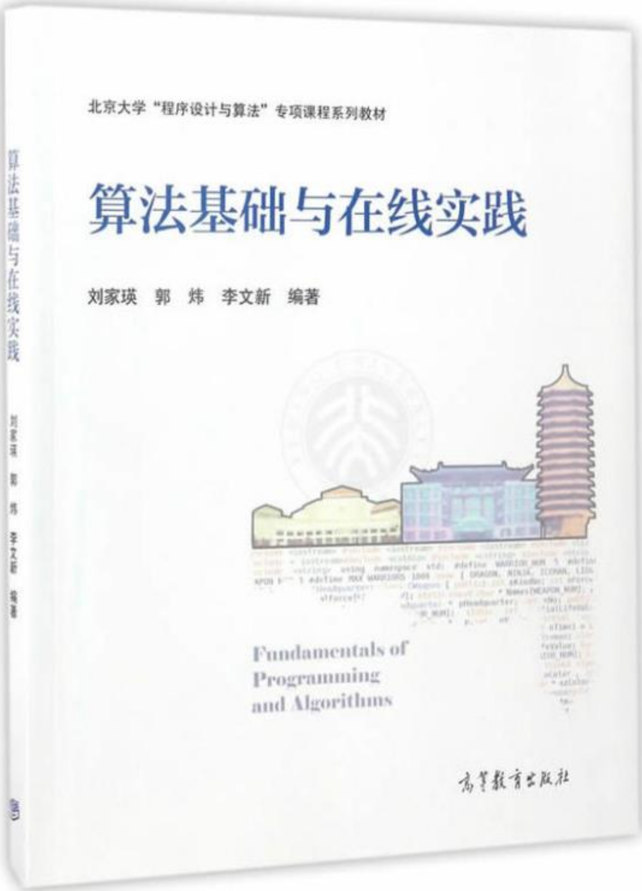
配套教材：

高等教育出版社

《算法基础与在线实践》

刘家瑛 郭炜 李文新 编著

本讲义中所有例题，根据题目名称在
http://openjudge.cn
“百练”组进行搜索即可提交



最短路

最短路
Dijkstra 算法

美国加州太浩湖

基本思想

- 解决无负权边的带权有向图或无向图的单源最短路问题
- 贪心思想，若离源点s前k-1近的点已经被确定，构成点集P，那么从s到离s第k近的点t的最短路径，$\{s,p_1,p_2...p_i,t\}$满足$s,p_1,p_2...p_i \in P$。
- 否则假设$pi \notin P$，则因为边权非负，pi到t的路径≥0，则$d[pi] \le d[t]$，pi才是第k近。将pi看作t，重复上面过程，最终一定会有找不到pi的情况
- $d[i]=min(d[p_i]+cost(p_i,i)), i \notin P, p_i \in P$

  $d[t]=min(d[i])\ , i \notin P$

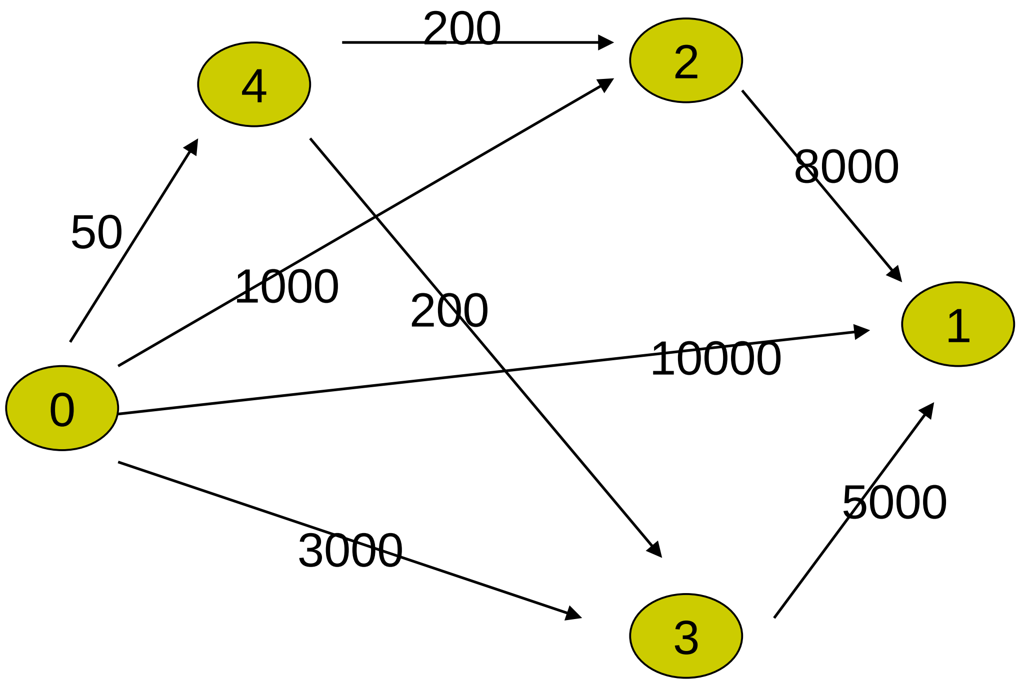
Dijkstra's Algorithm

- d[i]表示i点到起点s的距离
- 初始令d[s]=0，d[i]=+∞，P=∅
- 找到点i∉P，且d[i]最小
- 把i添入P，对于任意j∉P，若d[i]+cost(i,j)<d[j]，则更新d[j]=d[i]+cost(i,j)。

Dijkstra's Algorithm

- 用邻接表，不优化，时间复杂度O(V^2+E)
- Dijkstra+堆的时间复杂度 o(ElgV)
- 用斐波那契堆可以做到O(VlogV+E)

- 若要输出路径，则设置prev数组记录每个节点的前趋点，在d[i]更新时更新prev[i]



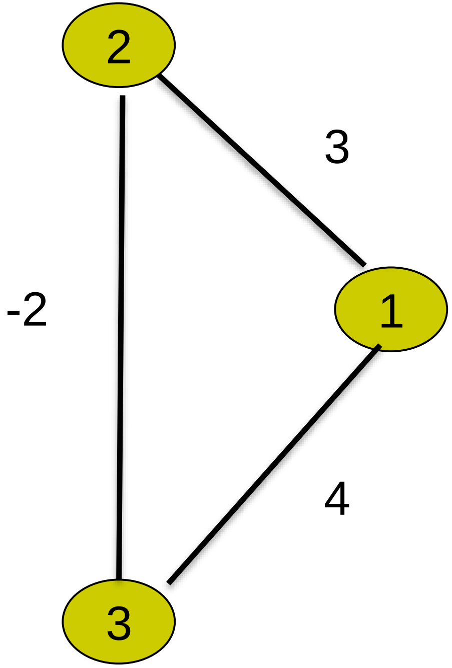
v	Dist[v]
0	0
1	[illegible]
2	[illegible]
3	[illegible]
4	50

Dijkstra's Algorithm

Dijkstra算法也适用于无向图。但不适用于有负权边的图。

d[1,2] = 2

但用Dijkstra算法求得 d[1,2] = 3



Dijkstra算法实现

- 已经求出到V0点的最短路的点的集合为T
- 维护Dist数组，Dist[i]表示目前Vi到V0的“距离”
- 开始Dist[0] = 0, 其他Dist[i] = 无穷大, T为空集
- 1) 若|T| = N，算法完成，Dist数组就是解。否则取Dist[i]最小的不在T中的点Vi, 将其加入T，Dist[i]就是Vi到V0的最短路长度。
- 2) 更新所有与Vi有边相连且不在T中的点Vj的Dist值：
- Dist[j] = min(Dist[j],Dist[i]+W(Vi,Vj))
- 3) 转到1)

POJ3159 Candies

有N个孩子（N<=3000)分糖果。
有M个关系(M<=150,000)。每个关系形如：

A B C　　　　　　(A,B是孩子编号)

表示A比B少的糖果数目，不能超过C

求第N个学生最多比第1个学生能多分几个糖果

POJ3159 Candies

思路：30000点，150000边的稀疏图求单源最短路

读入 “A B C”，就添加A->B的有向边，权值为C

然后求1到N的最短路

用heap实现 dijkstra + 堆的 POJ 3159 Candies

```
import heapq
class Edge:
    def __init__(self,k=0,w=0):
        self.k ,self.w = k,w  #有向边的终点和边权值，或当前k到源点的距离
    def __lt__(self,other):
        return self.w < other.w

bUsed = [0 for i in range(30010)]# bUsed[i]为1表示源到i的最短路已经求出
INF = 100000000
N,M = map(int,input().split())
G = [[] for i in range(N+1)]
for i in range(M):
    s,e,w = map(int,input().split())
    G[s].append(Edge(e,w))
pq = []
heapq.heapify(pq)
heapq.heappush(pq,Edge(1,0))  #源点是1号点,1号点到自己的距离是0
```

```
while pq != []:
    p = pq[0]
    heapq.heappop(pq)
    if bUsed[p.k]: #已经求出了最短路
        continue
    bUsed[p.k] = 1
    if p.k == N:  #因只要求1-N的最短路，所以要break
        break
    L = len(G[p.k])
    for i in range(L):
        q = Edge()
        q.k = G[p.k][i].k
        if bUsed[q.k]:
            continue
        q.w = p.w + G[p.k][i].w
        heapq.heappush(pq,q) #队列里面已经有q.k点也没关系
print( p.w )
```

floyd算法

美国加州1号公路

弗洛伊德算法

- 用于求每一对顶点之间的最短路径。有向图，无向图均可。有向图可以有负权边，但是不能有负权回路。

弗洛伊德算法

- 用于用于求每一对顶点之间的最短路径。有向图，无向图均可。有向图可以有负权边，但是不能有负权回路。
- 假设求从顶点v_i到v_j的最短路径。如果从v_i到v_j有边，则从v_i到v_j存在一条长度为cost[i,j]的路径，该路径不一定是最短路径，尚需进行n次试探。

弗洛伊德算法

- 用于用于求每一对顶点之间的最短路径。有向图，无向图均可。有向图可以有负权边，但是不能有负权回路。
- 假设求从顶点v_i到v_j的最短路径。如果从v_i到v_j有边，则从v_i到v_j存在一条长度为cost[i,j]的路径，该路径不一定是最短路径，尚需进行n次试探。
- 考虑路径（ v_i， v_1 ， v_j）是否存在（即判别弧（ v_i， v_1 ）和（ v_1 ， v_j ）是否存在）。如果存在，则比较cost[i,j]和（ v_i， v_1 ， v_j）的路径长度，取长度较短者为从v_i到v_j的中间顶点的序号不大于1的最短路径，记为新的cost[i,j] 。

弗洛伊德算法

- 用于用于求每一对顶点之间的最短路径。有向图，无向图均可。有向图可以有负权边，但是不能有负权回路。
- 假设求从顶点v_i到v_j的最短路径。如果从v_i到v_j有边，则从v_i到v_j存在一条长度为cost[i,j]的路径，该路径不一定是最短路径，尚需进行n次试探。
- 考虑路径（v_i，v_1，v_j）是否存在（即判别弧（v_i，v_1）和（v_1，v_j）是否存在）。如果存在，则比较cost[i,j]和（v_i，v_1，v_j）的路径长度，取长度较短者为从v_i到v_j的中间顶点的序号不大于1的最短路径，记为新的cost[i,j]。
- 假如在路径上再增加一个顶点v_2，如果（v_i，…，v_2）和（v_2，…，v_j）分别是当前找到的中间顶点的序号不大于2的最短路径，那么（v_i，…，v_2，…，v_j）就有可能是从v_i到v_j的中间顶点的序号不大于2的最短路径。将它和已经得到的从v_i到v_j的中间顶点的序号不大于1的最短路径相比较，从中选出中间顶点的序号不大于2的最短路径之后，再增加一个顶点v_3，继续进行试探。依次类推。

弗洛伊德算法

- 在一般情况下，若（v_i，…，v_k）和（v_k，…，v_j）分别是从v_i到v_k和从v_k到v_j的中间顶点的序号不大于k-1的最短路径，则将（v_i，…，v_k，…，v_j）和已经得到的从v_i到v_j且中间顶点的序号不大于k-1的最短路径相比较，其长度较短者便是从v_i到v_j的中间顶点的序号不大于k的最短路径。这样，在经过n次比较后，最后求得的必是从v_i到v_j的最短路径。按此方法，可以同时求得各对顶点间的最短路径。
- 复杂度$O(n^3)$。不能处理带负权边的无向图，和有负权回路的有向图

弗洛伊德算法

- 记$dist^k(i,j)$为从Vi到Vj的途经的顶点编号不大于k的最短路长度，则有：

$dist^{-1}(i,j) = W_{i,j}$($W_{i,j}$是边(i,j)权值，边不存在则为无穷大)

$dist^0(i,j) = \min\{dist^{-1}(i,j), dist^{-1}(i,0) + dist^{-1}(0,j)$

$dist^1(i,j) = \min\{dist^0(i,j), dist^0(i,1) + dist^0(1,j)$

……………………………………

$dist^k(i,j) = \min\{ dist^{k-1}(i,j),\ dist^{k-1}(i,k) + dist^{k-1}(k,j)\}$

……………………………………

$dist^{n-1}(i,j) = \min\{ dist^{n-2}(i,j),\ dist^{n-2}(i,n-1) + dist^{n-2}(n-1,j)\}$

其中$dist^{-1}(i,j)$表示从Vi到Vj的不途经任何顶点的最短路径长度。

$dist^{n-1}(i,j)$就是Vi到Vj的最短路的长度

弗洛伊德算法实现

```
def  floyd(G): #G是邻接矩阵，顶点编号从0开始算,无边则边权值为INF
    n = len(G)
    INF = 10**9
    prev = [[None for i in range(n)] for j in range(n)]
    #prev[i][j]表示到目前为止发现的从i到j的最短路上，j的前驱。
    dist = [[INF for i in range(n)] for j in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i == j:
                dist[i][j] = 0
            else:
                if G[i][j] != INF: #i到j的边存在
                    dist[i][j] = G[i][j]
                    prev[i][j] = i
```

弗洛伊德算法实现

```
for k in range(n):
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if dist[i][k] + dist[k][j] < dist[i][j]:
                dist[i][j] = dist[i][k] + dist[k][j]
                prev[i][j] = prev[k][j]
return dist,prev
```

最终：dist[i][j]就是i到j的最短路

prev[i][j]是i到j的最短路上j的前驱， prev[i][prev[i][j]]是j的前驱的前驱......

例题： POJ3660 Cow Contest

N个选手，如果A比B强,B比C强，则A必比C强
告知若干个强弱关系，问有多少人的排名可以确定

- **Sample Input**

5 5

4 3

4 2

3 2

1 2

2 5

- **Sample Output**

2

5个人，5个胜负关系

4 比3强
4 比2强
3 比2强

…..

例题： POJ3660 Cow Contest

如果一个点u, 有x个点能到达此点，从u点出发能到达y个点，若x+y=N-1，则u点的排名是确定的。用floyd算出每两个点之间的距离，最后统计，若dist[a][b] 无穷大且dist[b][a]无穷大，则a和b的排名都不能确定。最后用点个数减去不能确定点的个数即可。

模版例题

POJ1125