数据结构和算法
（Python描述）

郭 炜

微信公众号

微博：http://weibo.com/guoweiofpku

学会程序和算法，走遍天下都不怕!

讲义照片均为郭炜拍摄

贪心算法

例题:
Santa Clau’ s Gifts

奥地利萨尔茨堡

圣诞老人的礼物-Santa Clau’s Gifts(百练4110)

圣诞节来临了，圣诞老人准备分发糖果，现在有多箱不同的糖果，每箱糖果有自己的价值和重量，每箱糖果都可以拆分成任意散装组合带走。圣诞老人的驯鹿雪橇最多只能装下重量W的糖果，请问圣诞老人最多能带走多大价值的糖果。

输入

第一行由两个部分组成，分别为糖果箱数正整数n(1 <= n <= 100)，驯鹿能承受的最大重量正整数w（0 < w < 10000），两个数用空格隔开。其余n行每行对应一箱糖果，由两部分组成，分别为一箱糖果的价值正整数v和重量正整数w，中间用空格隔开。

输出

输出圣诞老人能带走的糖果的最大总价值，保留1位小数。输出为一行，以换行符结束。

样例输入

4 15

100 4

412 8

266 7

591 2

样例输出

1193.0

圣诞老人的礼物-Santa Clau’s Gifts(百练4110)

解法：

按礼物的价值/重量比从大到小依次选取礼物，对选取的礼物尽可能多地装，直到达到总重量w

复杂度： O(nlogn)

圣诞老人的礼物-Santa Clau’s Gifts(百练4110)

```
eps = 1e-6
class Candy:
    def __init__(self, v=0, w=0 ):
        self.v = v
        self.w = w
    def __lt__(self, other):
        return (self.v / self.w - other.v / other.w) > eps

n, w = list( map( int, input().split() ) )
candies = [ Candy() for i in range(n) ]
for i in range(n):
    candies[i].v, candies[i].w = list( map( float, input().split() ) )
candies.sort()
totalW = 0
totalV = 0
```

圣诞老人的礼物-Santa Clau’s Gifts(百练4110)

```
for i in range(n):
    if (totalW + candies[i].w) <= w:
        totalW += candies[i].w
        totalV += candies[i].v
    else:
        totalV += candies[i].v * float(w-totalW)/candies[i].w
        break
print('%.1f'%totalV)
```

圣诞老人的礼物-Santa Clau’s Gifts(百练4110)

证明:

替换法。对于用非此法选取的最大价值糖果箱序列，

可以将其按价值/重量比从大到小排序后得到:

序列1：a_1, a_2 ....

用序列1和按上述解法选取的序列2依次进行比较:

序列2：b_1, b_2 ....

价值/重量比相同的若干箱糖果，可以合并成一箱，所以两个序列中元素都不重复

对于发现的第一个 a_i != b_i ,则必有：$a_i < b_i$

则在序列1中，用 b_i 这种糖果,替代若干重量的 a_i 这种糖果，则会使得序列1的总价值增加，这和序列1是价值最大的取法矛盾

所以：序列1 = 序列2 （序列2不可能是序列1的一个前缀且比序列1短）

贪心算法

每一步行动总是按某种指标选取最优的操作来进行，该指标只看眼前，并不考虑以后可能造成的影响。

贪心算法需要证明其正确性。

“圣诞老人礼物”题，若糖果只能整箱拿，则贪心法错误。

贪心算法

每一步行动总是按某种指标选取最优的操作来进行，该指标只看眼前，并不考虑以后可能造成的影响。

贪心算法需要证明其正确性。

“圣诞老人礼物”题，若糖果只能整箱拿，则贪心法错误。

考虑下面例子:

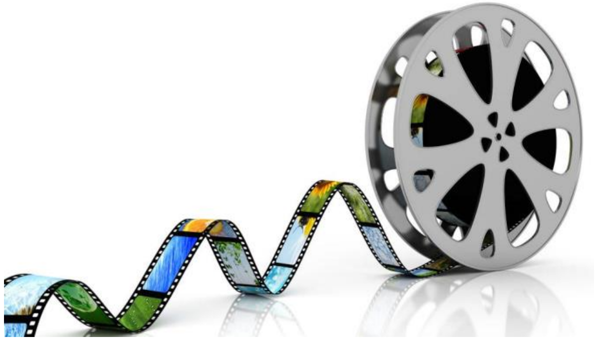
3个箱子(8,6) (5,5) (5,5)，雪橇总容量10

例题:电影节

维也纳美泉宫

例题：电影节 (百练4151)

大学生电影节在北大举办! 这天，在北大各地放了多部电影，给定每部电影的放映时间区间，区间重叠的电影不可能同时看（端点可以重合），问李雷最多可以看多少部电影。



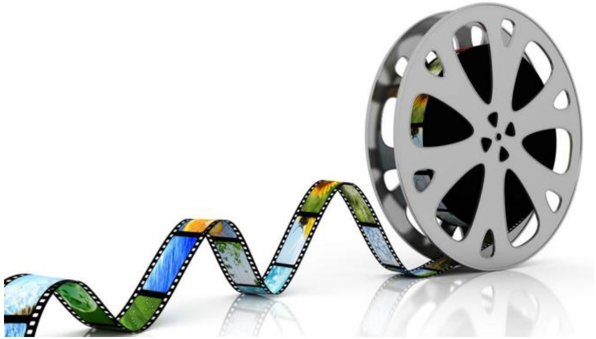
例题：电影节(百练4151)

输入

多组数据。每组数据开头是n(n<=100)，表示共n场电影。
接下来n行，每行两个整数(均小于1000），表示一场电影的放映区间
n=0则数据结束

输出

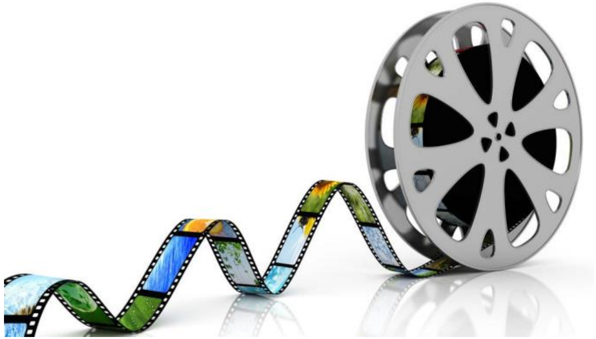
对每组数据输出最多能看几部电影



例题：电影节(百练4151)

Sample Input

12
1 3
3 4
0 7
3 8
15 19
15 20
10 15
8 18
6 12
5 10
4 14
2 9
0



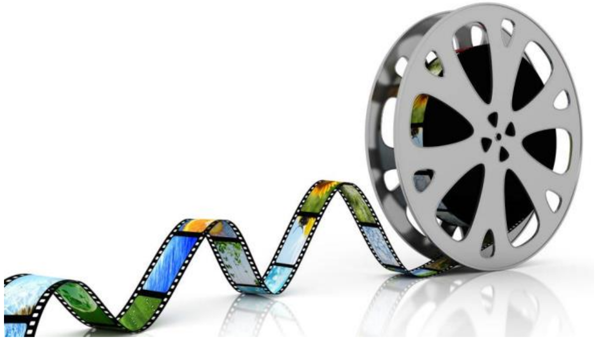
Sample Output

5

例题：电影节(百练4151)

贪心解法

将所有电影按结束时间从小到大排序，第一步选结束时间最早的那部电影。 然后，每步都选和上一部选中的电影不冲突且结束时间最早的电影。



复杂度： O(nlogn)

例题：电影节(百练4151)

证明：

替换法。假设用贪心法挑选的电影序列为:
$a_1,a_2....$

不用此法挑选的最长的电影序列为：

$b_1,b_2...$

现可证明，对任意i, b_i均可以替换成a_i

例题：电影节(百练4151)

用S(x)表示x开始时间，E(x)表示x结束时间，则:

1) b_1可以替换成a_1，因为$E(a_1)<=E(b_1)$
2) 若可以找到a_i,满足$E(a_i)<= E(b_i)$且a_i可以替换b_i，则 $E(a_{i+1})<=E(b_{i+1})$且a_{i+1}可以替换b_{i+1}

证:
因为 $E(a_i)<= E(b_i)$ 且$E(b_i) <= S(b_{i+1})$
则：$E(a_i) <= S(b_{i+1})$
a_{i+1}是所有$S(x)>=E(a_i)$的x中，$E(x)$最小的
$S(b_{i+1})>=E(b_i)>=E(a_i)$，所以$E(b_{i+1})>= E(a_{i+1})$

因此用a_{i+1}替换b_{i+1}不会对后续造成影响，替换可行

例题
Radar Installation

瑞士卢塞恩

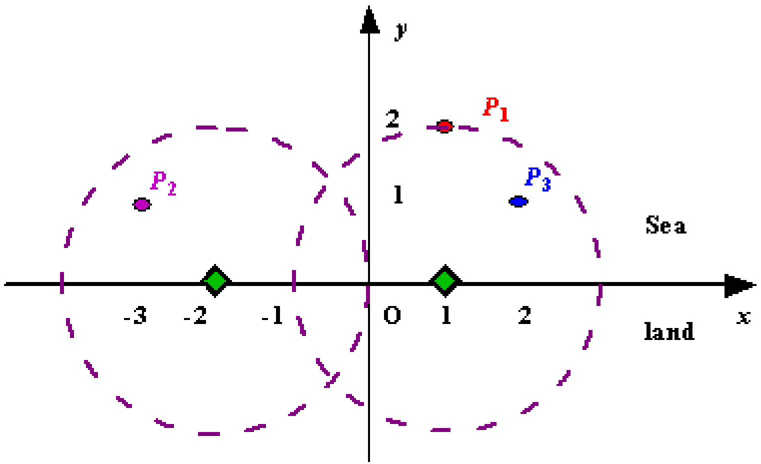
例题： Radar Installation(百练1328)

x轴是海岸线， x轴上方是海洋。海洋中有n（1<=n<=1000）个岛屿，可以看作点。

给定每个岛屿的坐标（x,y），x,y 都是整数。

当一个雷达（可以看作点）到岛屿的距离不超过d(整数)，则认为该雷达覆盖了该岛屿。

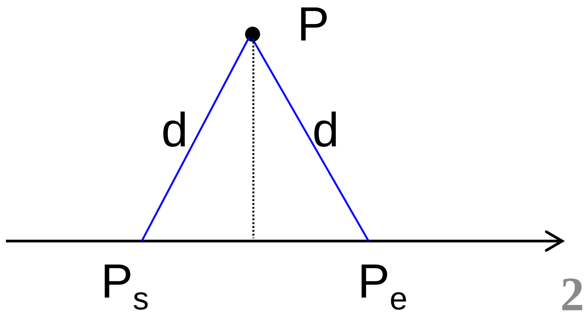
雷达只能放在x轴上。问至少需要多少个雷达才可以覆盖全部岛屿。



例题： Radar Installation(百练1328)

对每个岛屿P，可以算出，覆盖它的雷达，必须位于x轴上的区间$[P_s, P_e]$。

如果有雷达位于某个x轴区间 [a,b]，称该雷达覆盖此区间。问题转换为，至少要在x轴上放几个雷达（点），才能覆盖全部区间$[P1_s, P1_e], [P2_s, P2_e] \ldots [Pn_s, Pn_e]$



例题： Radar Installation(百练1328)

重要结论：

如果可以找到一个雷达同时覆盖多个区间，那么把这多个区间按起点坐标从小到大排序 ，则雷达放在最后一个区间（起点最靠右的）**k**的起点，就能覆盖所有区间

证明：如果它不能覆盖某个区间**x**，那么它必然位于 1） **x**起点的左边，或者2） **x**终点的右边。
情况1） 和 **k** 的起点是最靠右的矛盾
情况2） 如果发生，则不可能找到一个点同时覆盖**x**和**k**，也和前提矛盾

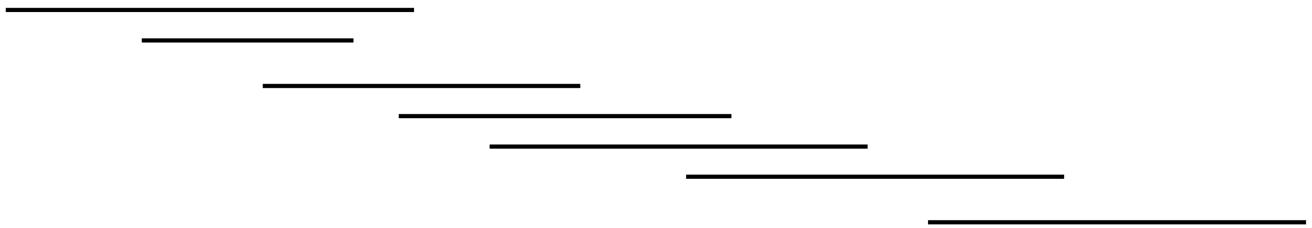
有了这个结论，就可以只挑区间的起点来放置雷达了。

例题： Radar Installation(百练1328)

贪心算法:

1）将所有区间按照起点从小到大排序，并编号segs[0] - segs[n-1]

2）依次考察每个区间的起点，看要不要在那里放雷达。开始，所有区间都没被覆盖，设置目前未被覆盖的区间中右端点的最小坐标 noCoveredMinX2 为0号区间右端点坐标segs[0].x2



例题： Radar Installation(百练1328)

3）考察一个区间segs[i] 的起点segs[i].x1的时候，要看noCoveredMinX2是否小于segs[i].x1。如果不是，则先不急于在segs[i]放雷达，设置

noCoveredMinX2 = min(noCoveredMinX2,segs[i].x2)

接着往下看.

如果是，那么就必须往segs[i-1]放一个雷达了（往后面的区间放雷达，都不可能覆盖noCoveredMinX2 所在区间了）。放好后，segs[i]成为第一个可能未被覆盖的区间，因此设置

noCoveredMinX2 = segs[i].x2

然后再继续。最后一个区间上要放一个雷达。

例题： Radar Installation(百练1328)

证明:

替换法。考虑不用贪心法获得的最佳雷达摆放放案。将其所有雷达按坐标从小到大排序得到 $x_1,x_2....$ 用贪心法得到的雷达坐标从小到大排序则为 $y_1,y_2....$

可证明每个x_i都可以被y_i替换，且y序列不会比x序列长

先证明x_1可以用y_1替换

用S(x)表示贪心法中区间x的起点，假设y_1 = S(i)

a) 若$x_1 < y_1$，则用y_1替换x_1没问题，因y_1覆盖了区间0到i, x_1覆盖的区间更少

b) 若$x_1 > y_1$，则分两种情况讨论：

1) $x_1 < S(i+1)$：因x_1不能覆盖 i+1及以后区间，且i及以前的区间已经都被y_1覆盖，所以将x_1用 y_1替换，不会有损失。

2) $x_1 >= S(i+1)$

贪心法中，在区间i起点放雷达，是因为如果不放而在S(i+1)放雷达，则该雷达不能覆盖i及其前面的某个区间C。

若x_1>=S(i+1),则x_1也不能覆盖C。x_i(i>1)更加不能。因此 $x_1 >= S(i+1)$是不可能的。

类似地证明，假设x_i可以被y_i替换，则 x_{i+1}也可以被y_{i+1}替换。