



# 数据结构和算法

## (Python描述)

郭 炜

微信公众号



微博: <http://weibo.com/guoweiofpku>

**学会程序和算法，走遍天下都不怕!**

讲义照片均为郭炜拍摄



# 拓扑排序和关键路径



北京大学  
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

北京大学信息学院 郭炜

## 拓扑排序



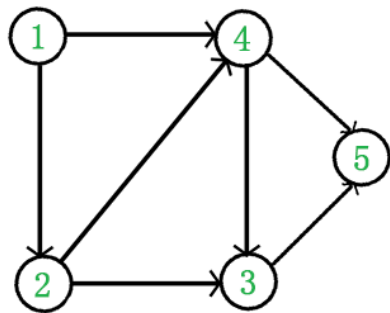
韩国济州岛火山口

# AOV网络

- Activity on Vextext Nextwork
- 将有向图中的顶点看作活动，边看作活动的先后关系， $A \rightarrow B$ 就意味着B活动进行前必须先进行A活动，则有向图可以看作是AOV网络

# 拓扑排序的概念

- 拓扑排序 (Topological Sorting) : 在有向图中求一个顶点的序列, 使其满足以下条件:
  - 1) 每个顶点出现且只出现一次
  - 2) 若存在一条从顶点 A 到顶点 B 的路径, 那么在序列中顶点 A 出现在顶点 B 的前面
- 有向图或AOV网存在拓扑排序的充要条件:  
图中无环, 即图是有向无环图DAG  
( Directed Acyclic Graph)



拓扑序列1,2,4,3,5  
5

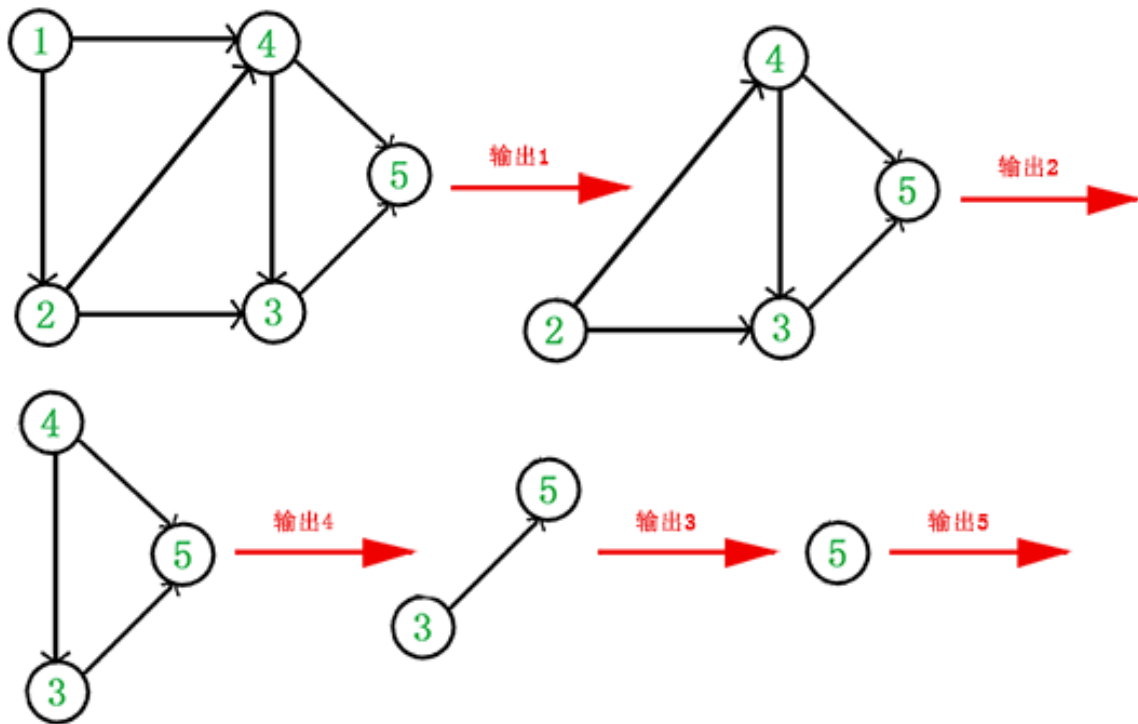
# 拓扑排序算法

1. 从图中任选一个没有前驱（入度为0）的顶点  $x$  输出

2. 从图中删除  $x$  和所有以它为起点的边

重复 1 和 2 直到图为空或当前图中不存在无前驱的顶点为止(后一种情况说明图中有环，无法拓扑排序)

具体实现：用队列存放入度变为0的点。每个顶点出入队列一次，每个顶点连的边都要看一次，复杂度  $O(E+V)$



# 例题：Genealogical tree

给一个有向无环图，输出任一拓扑排序

样例输入

```
5          #5个点
0          #1号点没出边
4 5 1 0    #2号点有边连到 4,5, 1
1 0
5 3 0
3 0
```

样例输出

```
2 4 5 3 1
```

```
class Edge:
    def __init__(self,v,w):
        self.v,self.w = v,w  #v是顶点, w是权值
def topoSort(G): #G是邻接表, 顶点从0开始编号
    #G[i][j]是Edge对象
    n = len(G)
    import queue
    inDegree = [0] * n #inDegree[i]是顶点i的入度
    q = queue.Queue()
    for i in range(n):
        for e in G[i]:
            inDegree[e.v] += 1
    for i in range(n):
        if inDegree[i] == 0:
            q.put(i)
    seq = []
```



```
while not q.empty():
    k = q.get()
    seq.append(k)
    for e in G[k]:
        inDegree[e.v] -= 1  #删除边(k,v)后将v入度减1
        if inDegree[e.v] == 0:
            q.put(e.v)
if len(seq) != n:  #如果拓扑序列长度少于点数，则说明有环
    return None
else:
    return seq
```



北京大学  
PEKING UNIVERSITY

信息科学技术学院

北京大学信息学院 郭炜

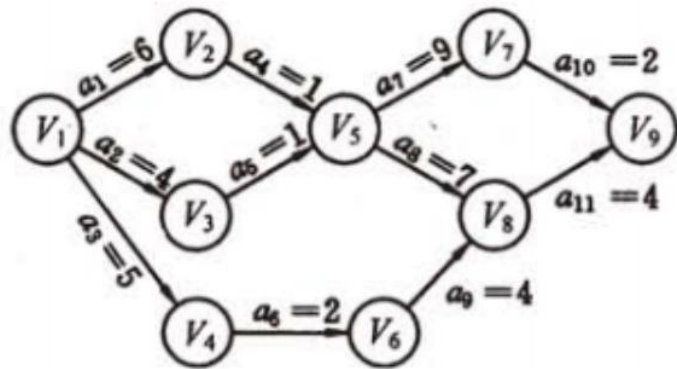
AOE网络



内蒙古阿斯哈图石林

# AOE网络(Activity On Edge network)

- 带权有向无环图
- 顶点表示事件，事件不需要花时间
- 有向边表示活动，边权值表示活动需要花的时间
- 先后顺序无关的活动可以同时进行
- 当且仅当一个顶点的入边代表的活动都已经完成，该顶点表示的事件会发生。顶点代表的事件一旦发生，其出边代表的活动就都可以(不是必须)开始



# AOE网络

## AOE网络上的问题

- 1) 每个事件最早可以在什么时刻发生 (时刻从0开始算) ?
- 2) 所有活动都完成, 最早是什么时刻? 记最早时刻为  $T$

$$T = \max\{\text{事件}i\text{的最早发生时刻} \mid i = 1, 2, 3, \dots\}$$

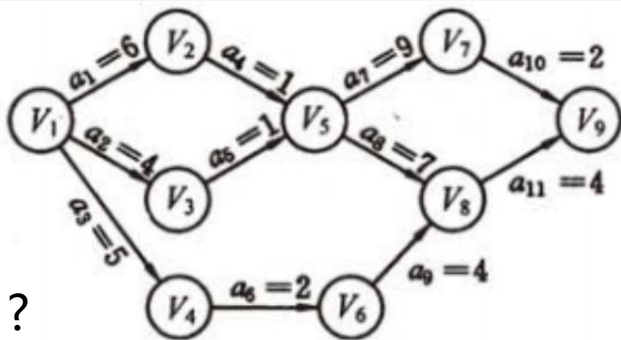
- 3) 每个事件最晚必须什么时候发生, 才不会导致  $T$  增加?

活动的最早开始时刻 = 起点事件的最早发生时刻

活动的最晚开始时刻 = 终点事件的最晚发生时刻 - 活动时长

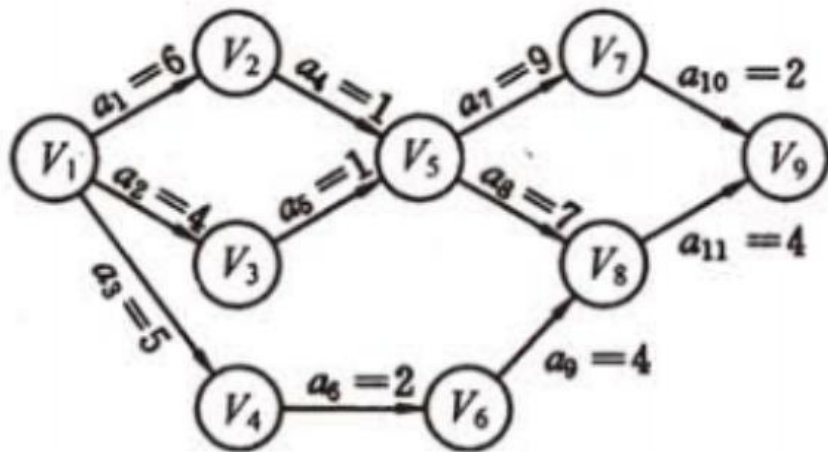
- 4) 求关键活动: 求最早开始时刻和最晚开始时刻一致的活动

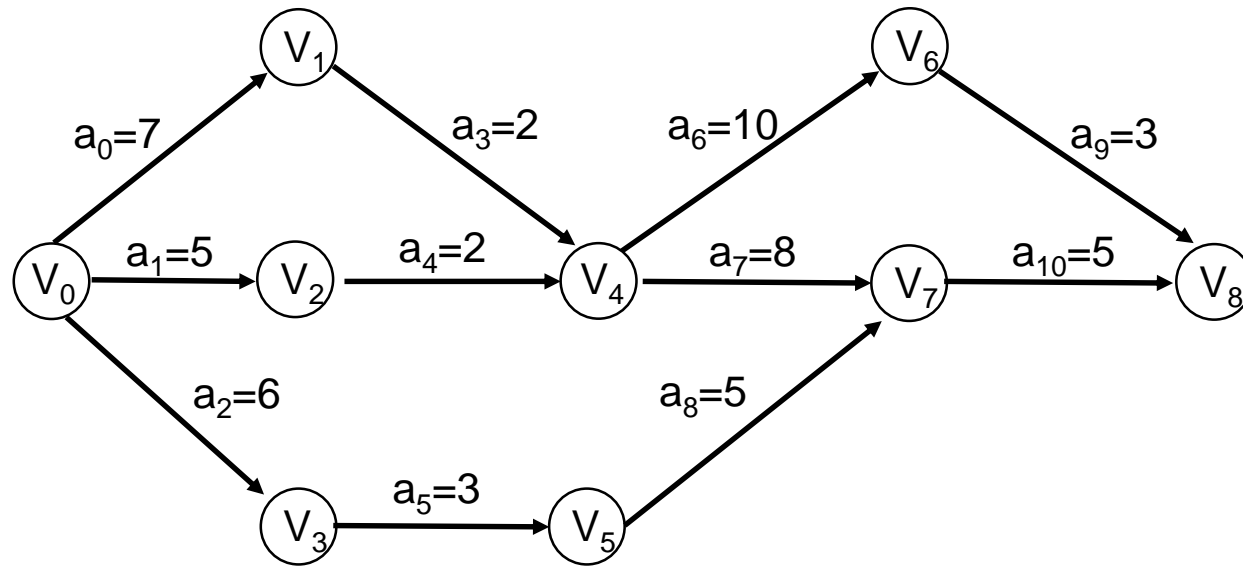
- 5) 求关键路径: AOE网络上权值之和最大的路径(不唯一)。关键路径一定由关键活动构成。  $T$  就是关键路径权值之和



# AOE网络

AOE网络并非只有一个入度为0的点，也并非只有一个出度为0的点。也可以为所有入度为0的点添加一个前驱点，为所有出度为0的点都添加一个后继点，边权都为0，则AOE网络变成起点终点唯一





# AOE网络

## ➤ AOE网络上的问题

1) 所有活动都完成的时刻  $T = 18$

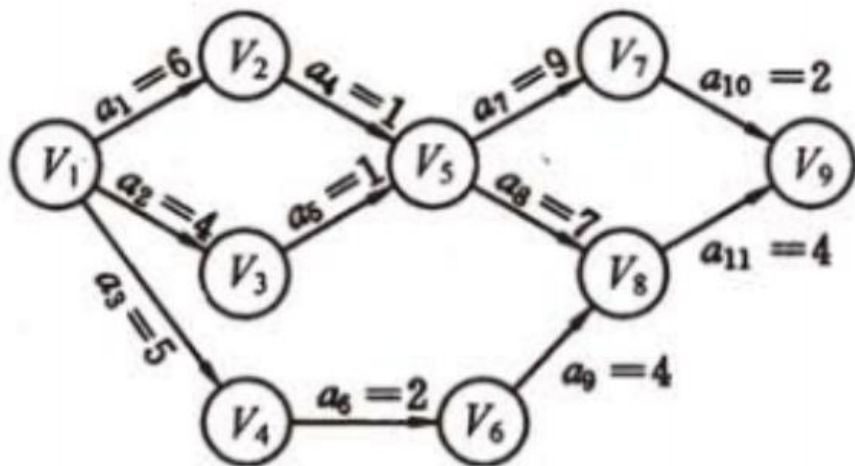
事件	1	2	3	4	5	6	7	8	9
最早时刻	0	6	4	5	7	7	16	14	18
最晚时刻	0	6	6	8	7	10	16	14	18

2) 关键活动:  $a_1, a_4, a_7, a_{10}, a_8, a_{11}$

3) 关键路径:

$a_1 \rightarrow a_4 \rightarrow a_7 \rightarrow a_{10}$

$a_1 \rightarrow a_4 \rightarrow a_8 \rightarrow a_{11}$



# AOE网络算法

- 关键是求每个事件  $i$  的最早发生时间  $\text{earliestTime}[i]$  和最晚发生时间  $\text{latestTime}[i]$



# AOE网络算法

## ➤ 递推求 $\text{earliestTime}[i]$

- 1) 初始条件：对每个入度为0的顶点 $k$ (事件 $k$ ),  
 $\text{earlistTime}[k] = 0$
- 2) 拓扑排序
- 3) 按拓扑序列的顺序递推每个事件的最早开始时间:  
对拓扑序列中的顶点  $i$ ,若边  $\langle i, j \rangle$  存在且权值为  $W_{ij}$  , 则:

$$\text{earliestTime}[j] = \max(\text{earliestTime}[j], \text{earliestTime}[i] + W_{ij})$$

依据：一个活动起点事件为 $i$ ，终点事件为 $j$ ，活动花时间 $W_{ij}$ ，则：  
 $\text{earliestTime}[j] \geq \text{earliestTime}[i] + W_{ij}$

# AOE网络算法

## ➤ 递推求latestTime[i]

- 1) 求出全部活动都完成的最早时刻  $T$
- 2) 初始条件：对每个出度为0的顶点 $k$ (事件 $k$ ),  
 $\text{latestTime}[k] = T$
- 2) 拓扑排序
- 3) 按拓扑序列的逆序递推每个事件的最晚开始时间：  
对拓扑逆序列中的顶点  $j$ , 若边  $\langle i, j \rangle$  存在且权值为  $W_{ij}$ , 则:

$$\text{latestTime}[i] = \min(\text{latestTime}[i], \text{latestTime}[j] - W_{ij})$$

依据：一个活动起点事件为 $i$ , 终点事件为 $j$ , 活动花时间 $W_{ij}$ , 则:  
 $\text{latestTime}[i] \leq \text{latestTime}[j] - W_{ij}$