数据结构和算法
(Python描述)

郭 炜

微信公众号

微博：http://weibo.com/guoweiofpku

学会程序和算法，走遍天下都不怕!

讲义照片均为郭炜拍摄

堆

堆的定义、性质和用途

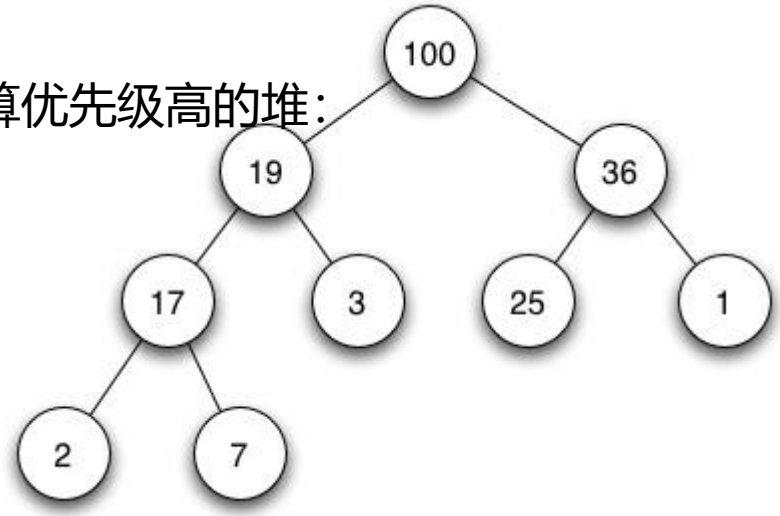
美国鹅颈湾

堆的定义

1) 堆(二叉堆)是一个完全二叉树

2) 堆中任何结点优先级都高于或等于其两个子结点（什么叫优先级高可以自己定义）

一个“大” 就算优先级高的堆：
(即大根堆)



3) 一般将堆顶元素最大的堆称为大根堆（大顶堆），堆顶元素最小的堆称为小根堆（小顶堆）

堆的存储

用列表存放堆。堆顶元素下标是0。下标为i的结点，其左右子结点下标分别为 i*2+1, i*2 + 2。

堆的性质

1) 堆顶元素是优先级最高的(啥叫优先级高可自定义)

2) 堆中的任何一棵子树都是堆

3) 往堆中添加一个元素，并维持堆性质，复杂度O(log(n))

4) 删除堆顶元素，剩余元素依然维持堆性质，复杂度O(log(n))

5) 在无序列表中原地建堆，复杂度O(n)

堆的作用

- 堆用于需要经常从一个集合中取走(即删除)优先级最高元素，而且还要经常往集合中添加元素的场合(堆可以用来实现优先队列)

- 可以用堆进行排序，复杂度O(nlog(n))，且只需要O(1)的额外空间,称为“堆排序”。递归写法需要o(log(n))额外空间，非递归写法需要O(1)额外空间。

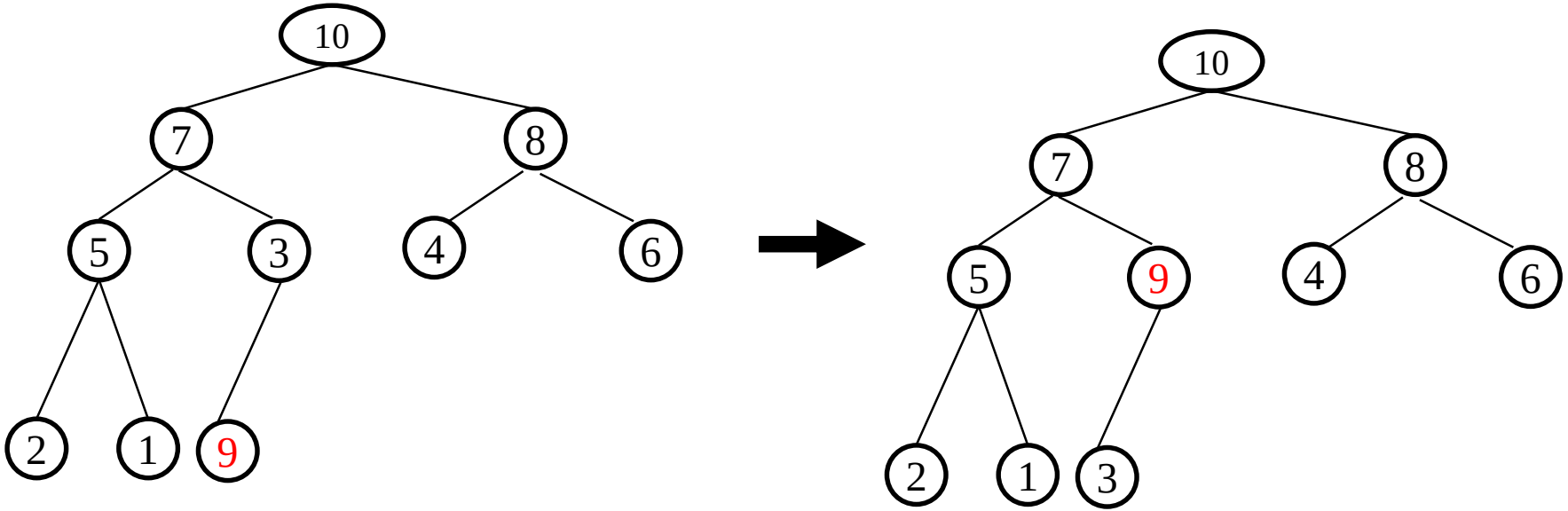
堆的操作

泰国普吉岛最南端

堆的操作：添加一个元素

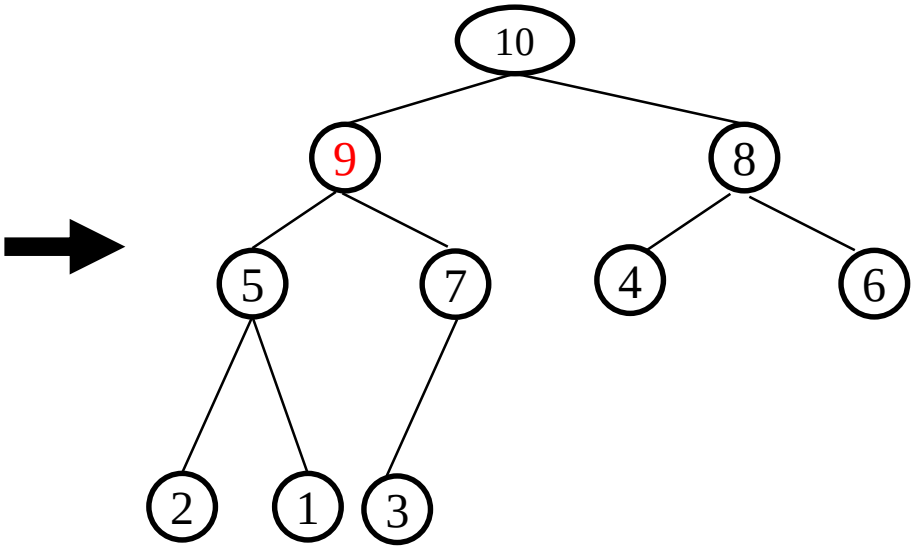
1) 假设堆存放在列表a中，长度为n
2) 添加元素x到列表a尾部，使其成为a[n]
3) 若x优先级高于其父结点，则令其和父结点交换，直到x优先级不高于其父结点，或x被交换到a[0]，变成堆顶为止。此过程称为将x"上移"
4) x停止交换后，新的堆形成，长度为n+1

堆的操作：添加一个元素



在堆中添加新元素9

堆的操作：添加一个元素



堆的操作：添加一个元素

显然，交换过程中，以x为根的子树，一直都是个堆

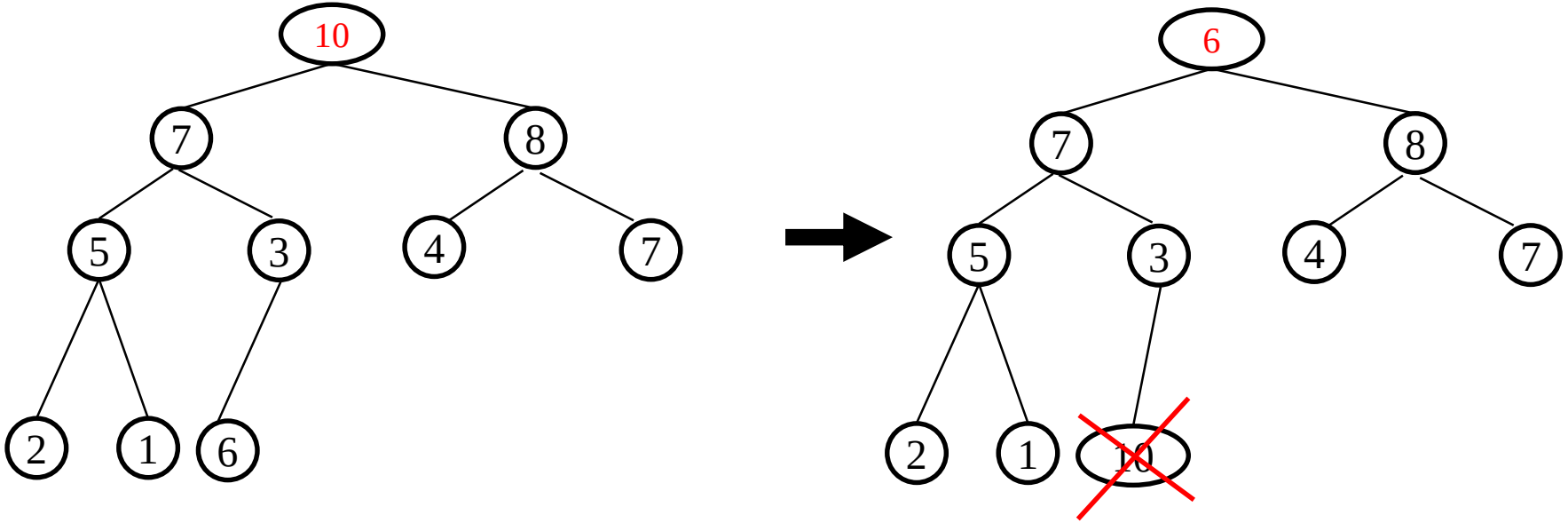
由于n个元素的完全二叉树高度为$\log_2(n+1)$向上取整，每交换一次x就上升一层，因此上移操作复杂度O(log(n))，即添加元素复杂度O(log(n))

堆的操作：删除堆顶元素

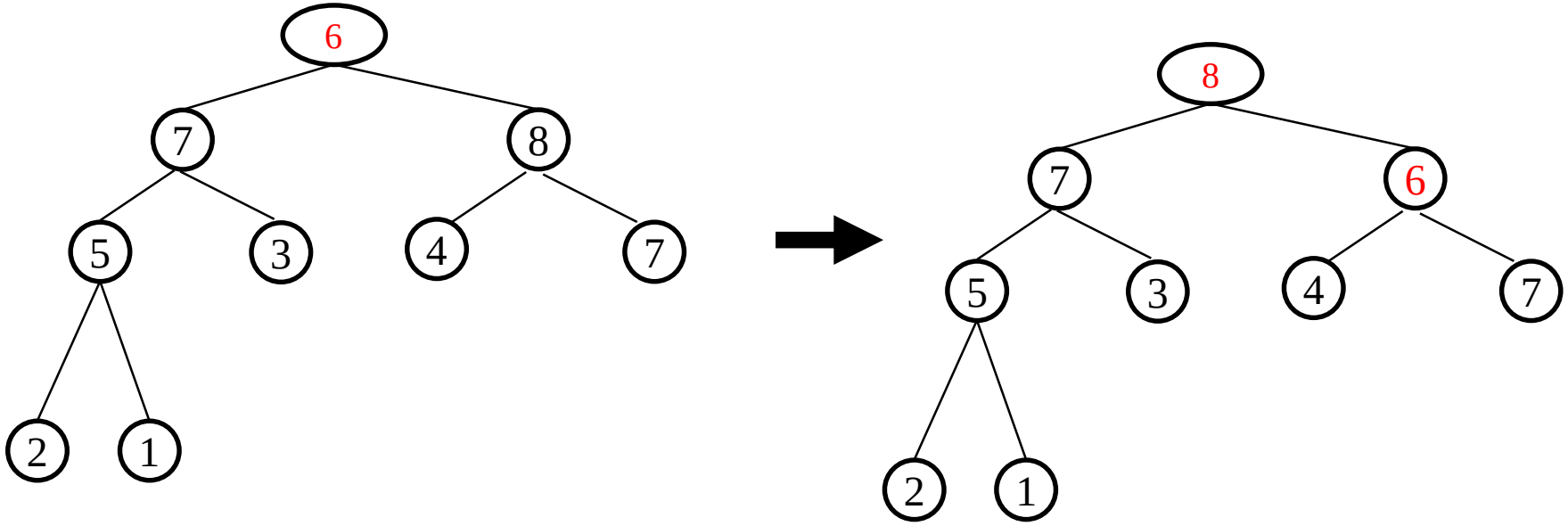
1) 假设堆存放在列表a中，长度为n
2) 将a[0]和a[n-1]交换
3) 将a[n-1]删除(pop)
4) 记此时的a[0]为x，则将x和它两个儿子中优先级较高的，且优先级高于x的那个交换，直到x变成叶子结点，或者x的儿子优先级都不高于x为止。将此整个过程称为将x"下移"
5) x停止交换后，新的堆形成，长度为n-1

下移过程复杂度为O(log(n))，因此删除堆顶元素复杂度O(log(n))

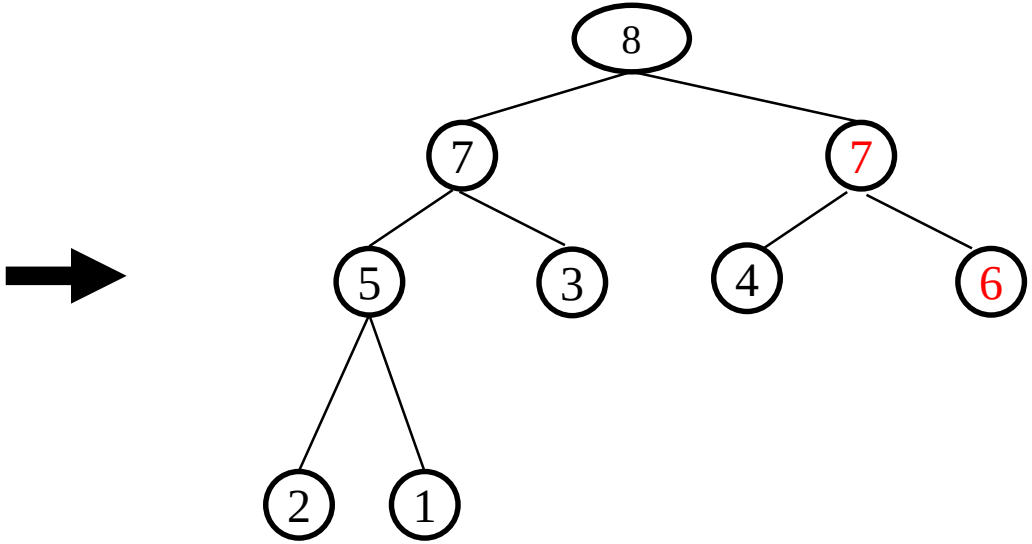
堆的操作：删除堆顶元素



堆的操作：删除堆顶元素



堆的操作：删除堆顶元素



堆的操作：删除堆顶元素

重要结论：

如果a[i]的两棵子树都是堆，则对a[i]的下移操作完成后，以新a[i]为根的子树会形成堆。

堆的操作：建堆

一个长度为n的列表a,要原地将a变成一个堆

方法：

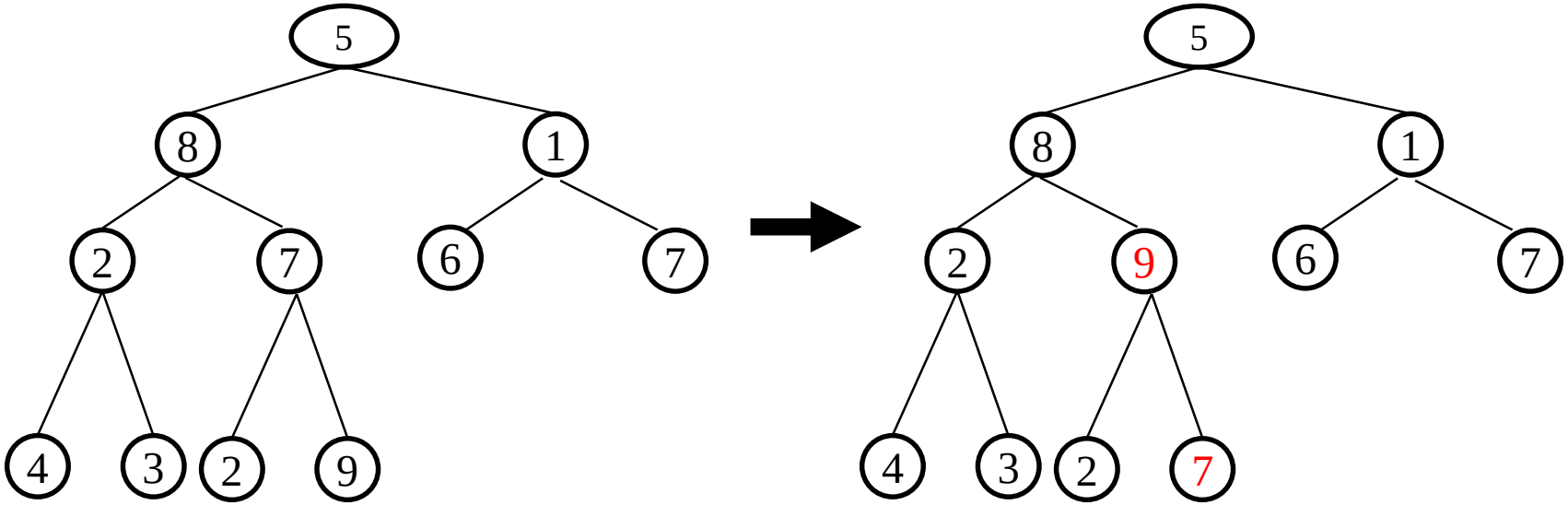
将a看作一个完全二叉树。假设有H层。根在第0层，第H-1层都是叶子

对第H-2层的每个元素执行下移操作
对第H-3层的每个元素执行下移操作
.....
对第0层的元素执行下移操作

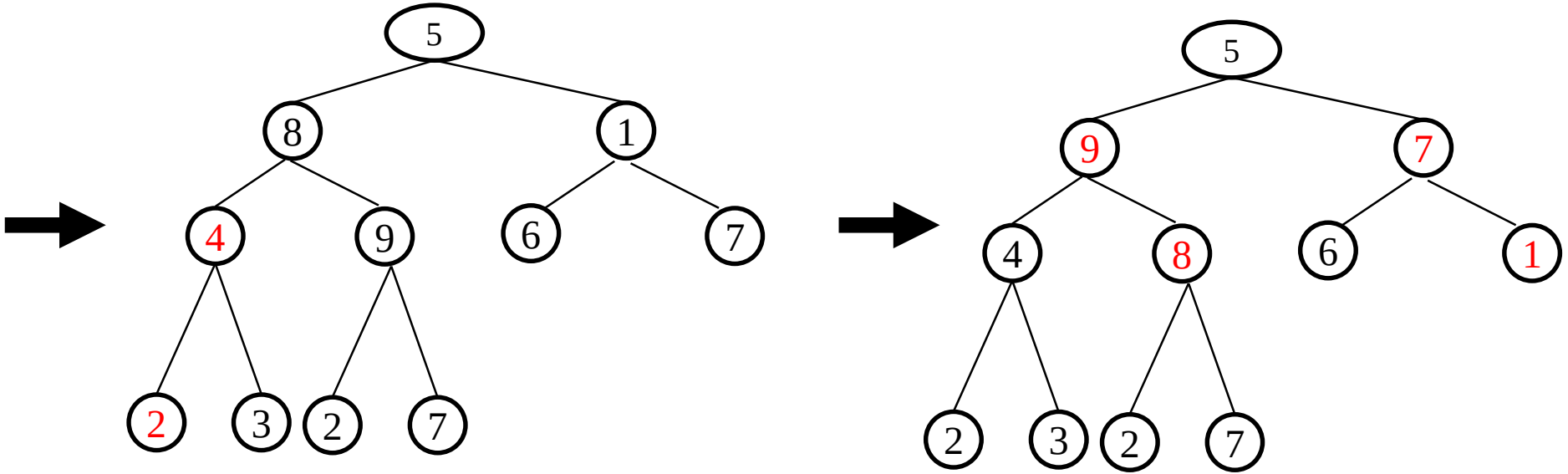
堆即建好。复杂度O(n)。证明较难，略

堆的操作：建堆

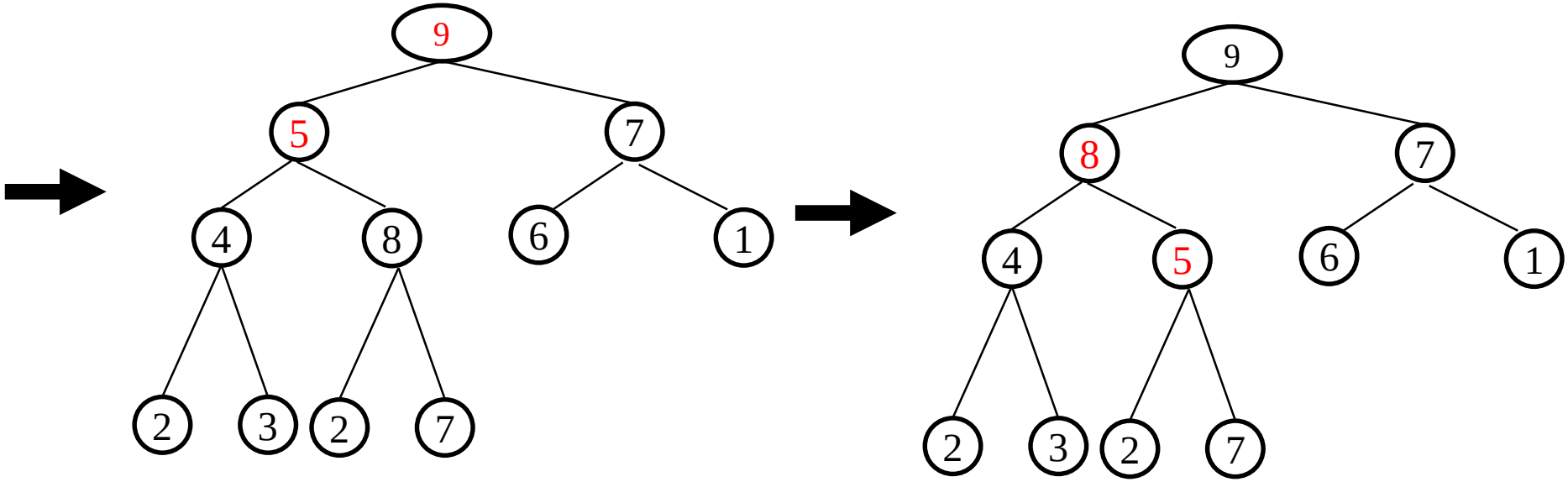
无序列表



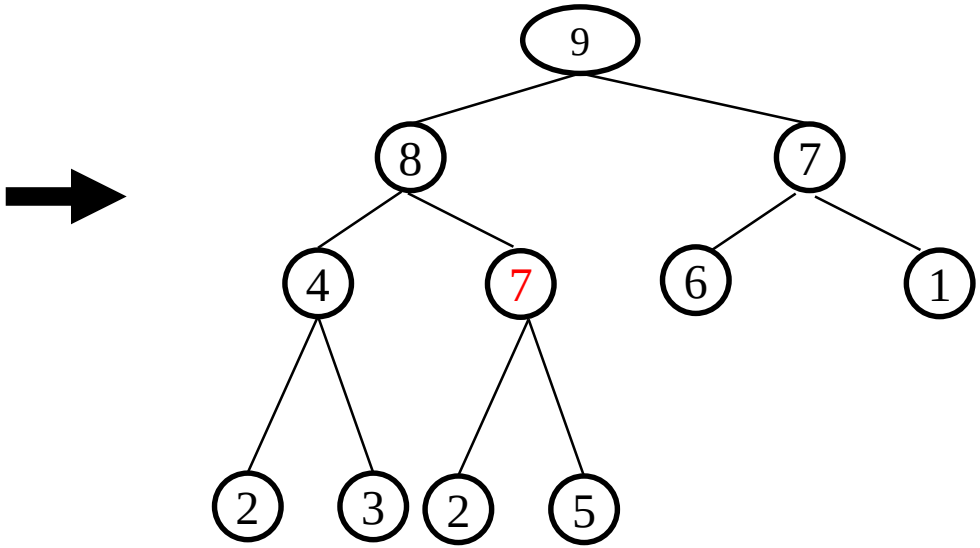
堆的操作：建堆



堆的操作：建堆



堆的操作：建堆



堆的应用

香港维多利亚湾

堆的应用：哈夫曼编码树的构造

```
Initial leaves
{(A 8) (B 3) (C 1) (D 1) (E 1) (F 1) (G 1) (H 1)}Merge
{(A 8) (B 3) ({C D} 2) (E 1) (F 1) (G 1) (H 1)}Merge
{(A 8) (B 3) ({C D} 2) ({E F} 2) (G 1) (H 1)}Merge
{(A 8) (B 3) ({C D} 2) ({E F} 2) ({G H} 2)}Merge
{(A 8) (B 3) ({C D} 2) ({E F G H} 4)}Merge
{(A 8) ({B C D} 5) ({E F G H} 4)} Merge
{(A 8) ({B C D E F G H} 9)}Final merge
{({A B C D E F G H} 17)}
```

哈夫曼编码树不唯一

用"堆"存放结点集合，便于快速取出最小权值的两个结点，以及加入合并后的新结点。

堆的应用：堆排序

1) 将待排序列表a变成一个堆(O(n))
2) 将a[0]和a[n-1]交换，然后对新a[0]做下移，维持前n-1个元素依然是堆。此时优先级最高的元素就是a[n-1]
3) 将a[0]和a[n-2]交换，然后对新a[0]做下移， 维持前n-2个元素依然是堆。此时优先级次高的元素就是a[n-2]

……

直到堆的长度变为1，列表a就按照优先级从低到高排好序了。

整个过程相当不断删除堆顶元素放到a的后部。堆顶元素依次是优先级最高的、次高的….

一共要做n次下移，每次下移O(log(n))，因此总复杂度O(nlog(n))

堆排序

如果用递归实现，需要O(log(n))额外栈空间(递归要进行log(n)层)。

如果不用递归实现，需要O(1)额外空间。

堆的实现

美国胡佛水坝

堆的实现

```
class Heap:
    def __init__(self,array = [],less = lambda x,y : x < y):
        #若x为堆顶元素，y为堆中元素，则 less(x,y)为True
        #默认情况下，小的算优先级高 #i的儿子是2*i+1和2*i+2
        self._a = array[:] #array是列表
        self._size = len(array)
        self._less = less     #less是比较函数
        self.makeHeap()
    def top(self):
        return self._a[0]
    def pop(self):#删除堆顶元素
        tmp = self._a[0]
        self._a[0] = self._a[-1]
        self._a.pop()
        self._size -= 1
        self._goDown(0)   #_goDown是下移操作，将a[0]下移
        return tmp
```

堆的实现

```
def append(self,x):     #往堆中添加x
    self._size += 1
    self._a.append(x)
    self._goUp(self._size-1) #_goUp是上移
def _goUp(self,i): #将a[i]上移
    #只在append的时候调用，不能直接调用或在别处调用
    #被调用时，以a[i]为根的子树，已经是个堆
    if i == 0:
        return
    f = ( i -1 )// 2   #父结点下标
    if self._less(self._a[i],self._a[f]):
        self._a[i],self._a[f]  = self._a[f],self._a[i]
        self._goUp(f) #a[f]上移
```

堆的实现

```
def _goDown(self,i): #a[i]下移
    #前提：在a[i]的两个子树都是堆的情况下，下移
    if i * 2 + 1 >= self._size: #a[i]没有儿子
        return
    L,R = i * 2 + 1, i * 2 + 2
    if R >= self._size or self._less(self._a[L],self._a[R]):
        s = L
    else:
        s = R
    #上面选择小的儿子
    if self._less(self._a[s],self._a[i]):
        self._a[i],self._a[s] = self._a[s],self._a[i]
        self._goDown(s)
```

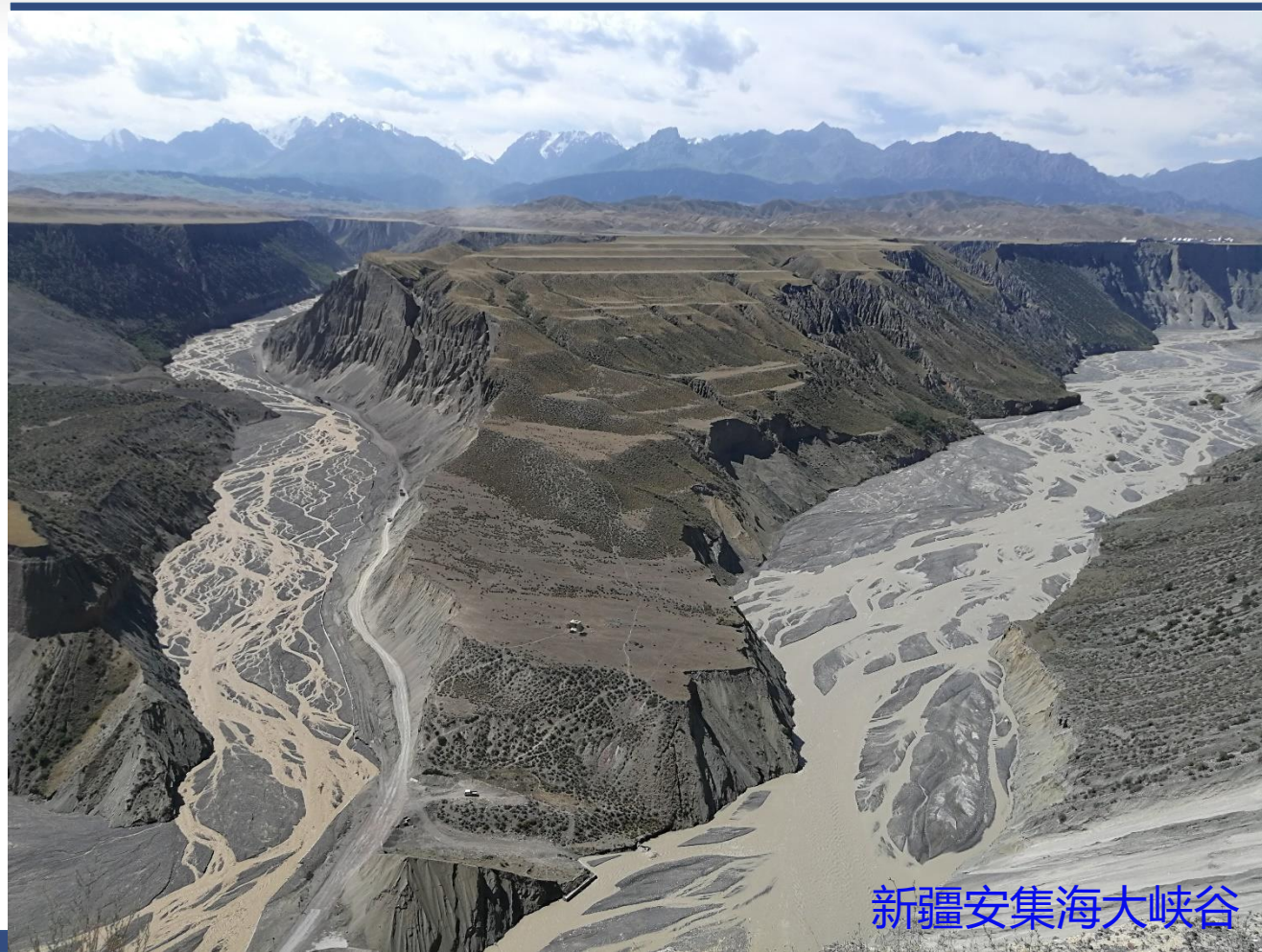
堆的实现

```
def makeHeap(self): #建堆
    i = (self._size - 1 - 1) // 2 #i是最后一个叶子的父亲
    for k in range(i,-1,-1):
        self._goDown(k)

def heapSort(self): #建好堆之后调用，进行堆排序
    for i in range(self._size-1,-1,-1):
        self._a[i],self._a[0] = self._a[0],self._a[i]
        self._size -= 1
        self._goDown(0)
    self._a.reverse()
    return self._a
```

堆的实现

```
#下面是堆的用法，不是堆内部的代码
import random
def heapSort(a,less): #对列表a进行堆排序,哪个less哪个排在前面
    hp = Heap(a,less)
    return hp.heapSort()

s = [i for i in range(17)]
random.shuffle(s)
print(s)
h = heapSort(s,lambda x,y : x < y)
print(h)
```

Python中的堆



python中的堆：heapq

要 import heapq

heapq中的函数：

```
heapq.heapify(s)          将列表s变成一个堆
heapq.heappush(s,item)    往已经是堆的列表s里面添加元素item
heapq.heappop(s)          取出并返回堆顶元素。s必须已经是个堆(注意：会减少s长度)
heapq.heapreplace(s,item) 取出并返回堆顶元素,并将元素item加入堆(s还是个堆,
                          长度不变)
heapq.nlargest(n,s,key)   返回序列s中的最大n个元素构成的列表。key是关键字函数
heapq.nsmallest(n,s,key)  返回序列s中的最小n个元素构成的列表
#key(x) < key(y) x就比y小
```

python中的堆：heapq

```
import heapq

heapq.heapify(s)            将列表s变成一个堆
heapq.heappush(s,item)      往已经是堆的s里面添加元素item
heapq.heappop(s)            弹出堆顶元素(会减少s长度)
......

def heapsort(iterable): #iterable是个序列
#函数返回一个列表，内容是iterable中元素排序的结果
    h = []
    for value in iterable:
        h.append(value)
    heapq.heapify(h)
    return [heapq.heappop(h) for i in range(len(h))]
```

不便之处：没有设定排序规则的机会。如果要形成大元素在顶的整数堆，只能取相反数进堆。出来的时候再取相反数

python中的堆：heapq

```
import heapq
def heapSorted(iterable): #iterable是个序列
#函数返回一个列表，内容是iterable中元素排序的结果，不会改变iterable
    h = []
    for value in iterable:
        h.append(value)
    heapq.heapify(h)
    return [heapq.heappop(h) for i in range(len(h))]

a = (2,13,56,31,5)
print(heapSorted(a)) #>>[2, 5, 13, 31, 56]
print(heapq.nlargest(3,a)) #>>[56, 31, 13]
print(heapq.nlargest(3,a,lambda x:x%10)) #>>[56, 5, 13]
#取个位数最大的三个
print(heapq.nsmallest(3,a,lambda x:x%10))#>>[31, 2, 13]
#取个位数最小的三个
```