# Hodina 3. novembra 2023

Program:

1. Domáca úloha (z minula)
2. Niekoľko príkladov na zahriatie a pozdvihnutie mysli: Projektívna geometria a Apolóniove úlohy
3. Geometria: už nebude
4. Domáca úloha (nová)
5. Program na budúci týždeň

## 0. Úvod

**Tento text** a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári [https://github.com/PKvasnick/Erik](https://github.com/PKvasnick/Erik). Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

**Videohovor** Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť*.

## 1. Domáca úloha

### Domáce úlohy v texte

#### Príklad 1

... Dokážte, že rovnaké tvrdenie platí aj o opačnej kompozícii posunutia a rotácie.

To tvrdenie je, že príslušné zobrazenie je rotácia.

#### Riešenie

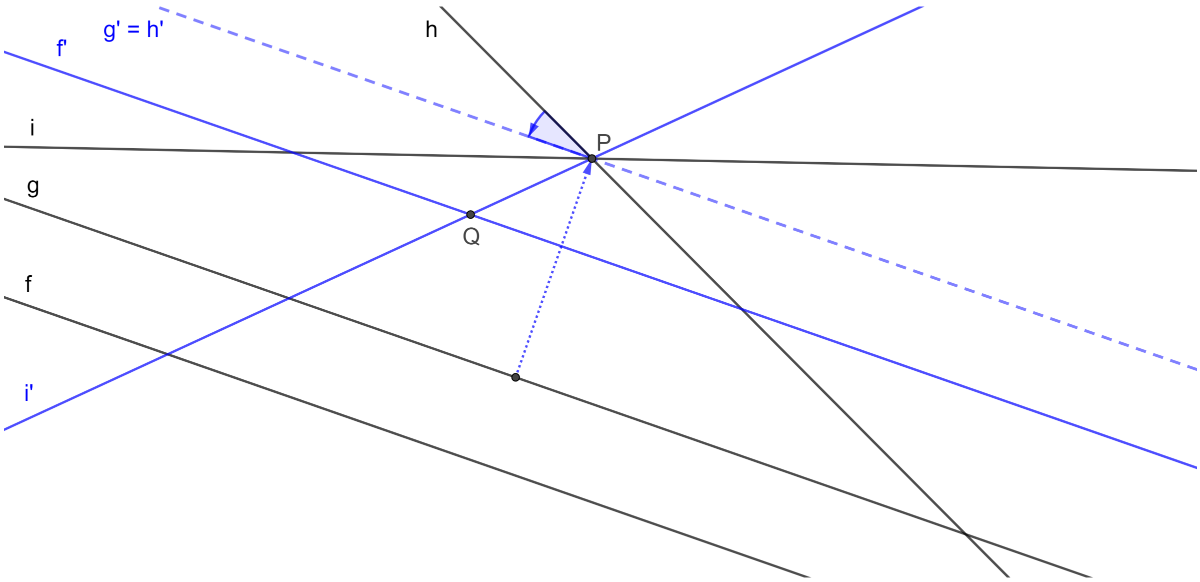
Máme zrkadlenia okolo štyroch priamok f, g, h, i. Priamky f, g sú rovnobežné a zobrazenie $\sigma_g \circ \sigma_f$ je posunutie. Priamky h, i sú rôznobežné a zobrazenie $\sigma_i \circ \sigma_h$ je rotácia.

- Posunieme priamky f, g  tak, aby priesečník priamok h, i ležal na g.
- Otočíme priamky h, i okolo ich priesečníka P tak, aby sa priamka h stotožnila s g.

Potom

$$Z = \sigma_i \circ \underbrace{\sigma_h \circ \sigma_g}_{id} \circ \sigma_f = \sigma_i \circ \sigma_f$$

je rotácia okolo priesečníka (posunutej) priamky f  a (otočenej priamky) i - bodu Q.

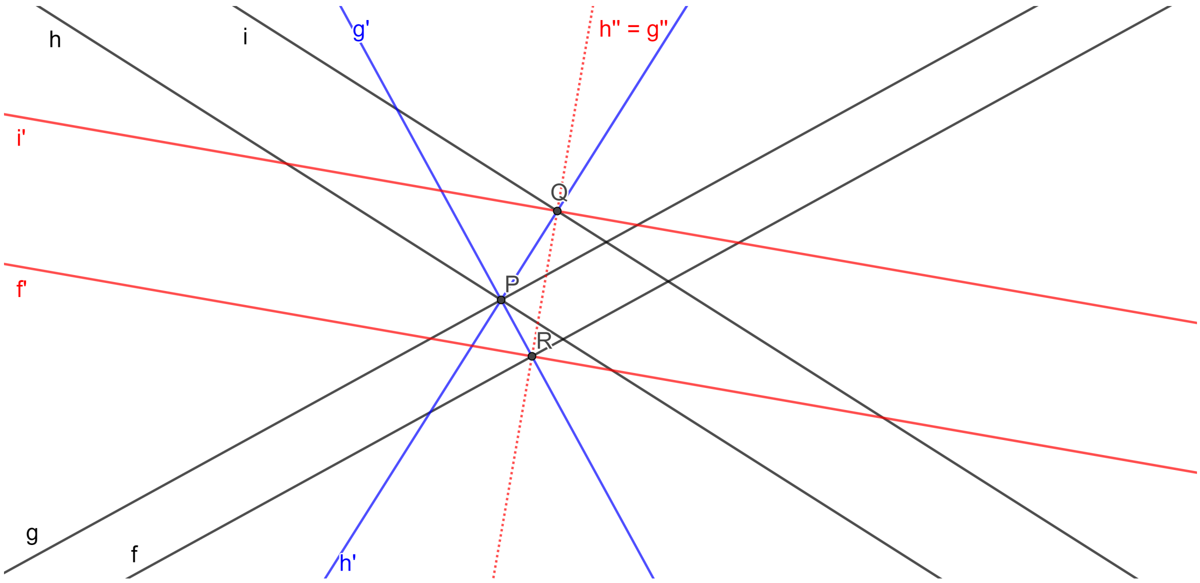



Je poučné všimnúť si, že bod Q je skutočne pevným bodom zobrazenia - v ňom rotácia okolo P kompenzuje posunutie.

**Príklad 2**

Ukážte, že kompozícia dvoch posunutí je tiež posunutie.

**Riešenie**




Máme dve posunutia, definované zrkadleniami okolo čiernych priamok f, g, h, i. Aby sme mohli zostavu dvoch párov rovnobežiek "rozhýbať", začneme prostrednou dvojicou g a h a otočíme ju okolo priesečníka P o 90°, tak aby h bolo kolmé na i a g na f (modré čiary).

Dve dvojice kolmíc f, g´ a h´, i otočíme okolo ich priesečníkov Q, resp. R tak, aby priamky g´´ a h ´´ splynuli - teda tak, aby každá prechádzala oboma bodmi Q a R. Zo štyroch zrkadlení tak ostanú iba dve, okolo červených rovnobežiek f´ a i´, ktoré teraz definujú výsledné posunutie.

Z obrázku je tiež vidno, že výsledné posunutie je vektorovým súčtom pôvodných posunutí.

---

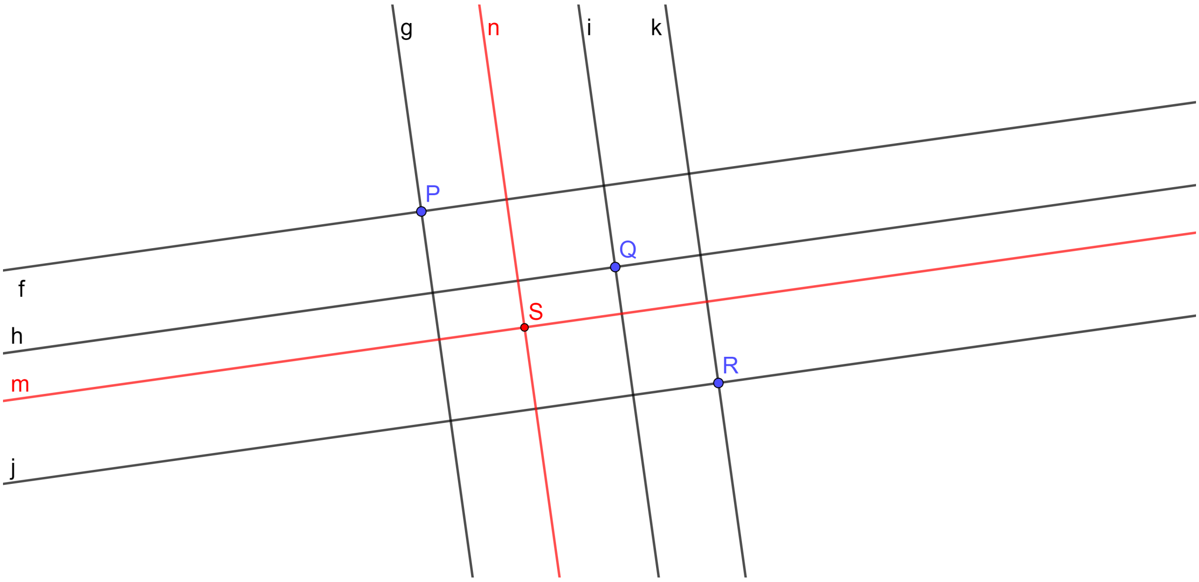
**Príklad 3**

Tri bodové zrkadlenia sú ekvivalentné jednému.

**Riešenie**

Tri bodové zrkadlenia budeme reprezentovať šiestimi zrkadleniami okolo po dvojiciach kolmých priamok f, g, h, i, j, k. Otočením okolo priesečníkov môžeme zariadiť, aby boli priamky f, h, j a priamky g, i, k rovnobežné.

Zrkadlenia okolo dvoch navzájom kolmých priamok komutujú, takže môžeme pokojne separovať tri "vodorovné" a tri "zvislé" zrkadlenia. Tri zrkadlenia okolo rovnobežných priamok sú ekvivalentné jednému, ktoré vieme ľahko zostrojiť, a tak nám zostanú dve zrkadlenia okolo navzájom kolmých priamok, čo je výsledné bodové zrkadlenie.



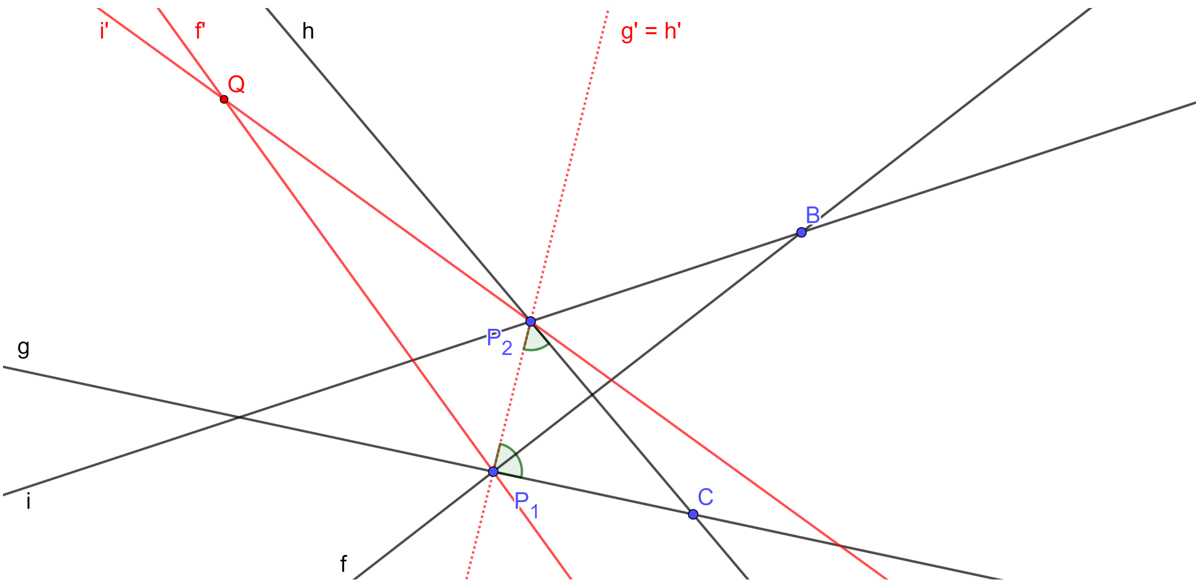

## Regulérna domáca úloha

**Príklad 1**

Dve rotácie okolo bodov $P_1, P_2$ sú ekvivalentné jedinej rotácii. Zostrojte túto rotáciu.

**Riešenie**

Nech sú rotácie definované zrkadleniami okolo priamok f, g, resp. h, i. Otočíme dvojicu f, g okolo $R_1$ tak, aby g prechádzala bodom $P_2$. Otočíme h, i tak, aby h prechádzala bodom $P_1$. Zrkadlenia okolo g´ a h´ sa potom vyrušia a ostane výsledné otočenie okolo f´ a i´.

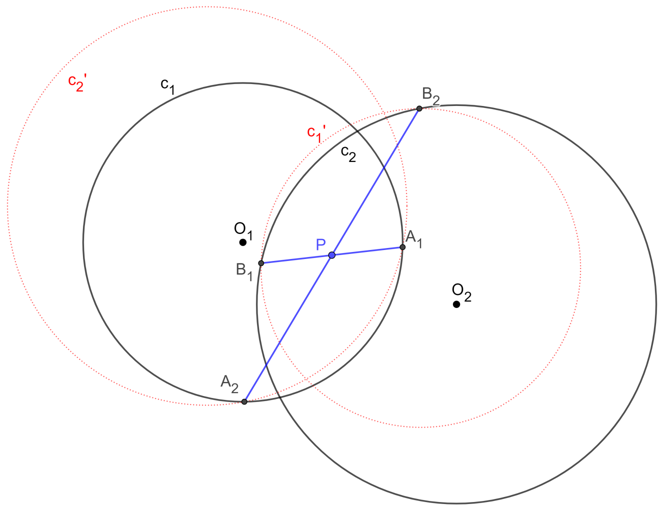



**Príklad 2**

Sú dané dve kružnice $k_1, k_2$ a bod P. Zostrojte dva body $A \in k_1,\ B \in k_2$ tak, aby bol bod P stredom úsečky AB.

**Riešenie**

Situácia je stredovo symetrická vzhľadom na bod P.




Podrobnejšie: Pre stredovú symetriu $S_P$ so stredom P platí

$$A \in c_1 \implies S_P(A) \equiv B \in c_1' \equiv S_P(c_1) \implies B \in c_2 \wedge B \in c_1' = B \in (c_2 \cap c_1')$$

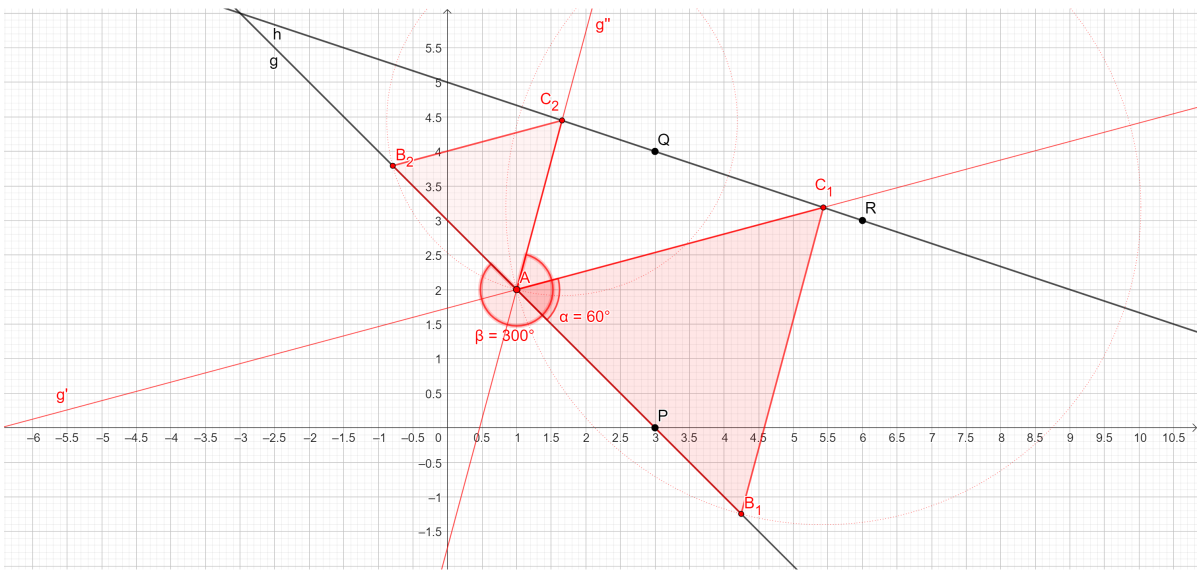
a tým je daná konštrukcia. Zaujímavé rozšírenie je zostrojiť pre dané kružnice množinu bodov P, pre ktoré má úloha riešenie.

**Príklad 3**

Priamka g prechádza bodmi $A[1, 2]$ a $P[3, 0]$ a priamka h cez $Q[2, 4]$ a $R[6, 3]$. Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC tak, aby bod B ležal na g a bod C na h.

**Riešenie**

Potrebujeme zrotovať priamku g okolo bodu A o 60° a (360 - 60)°:

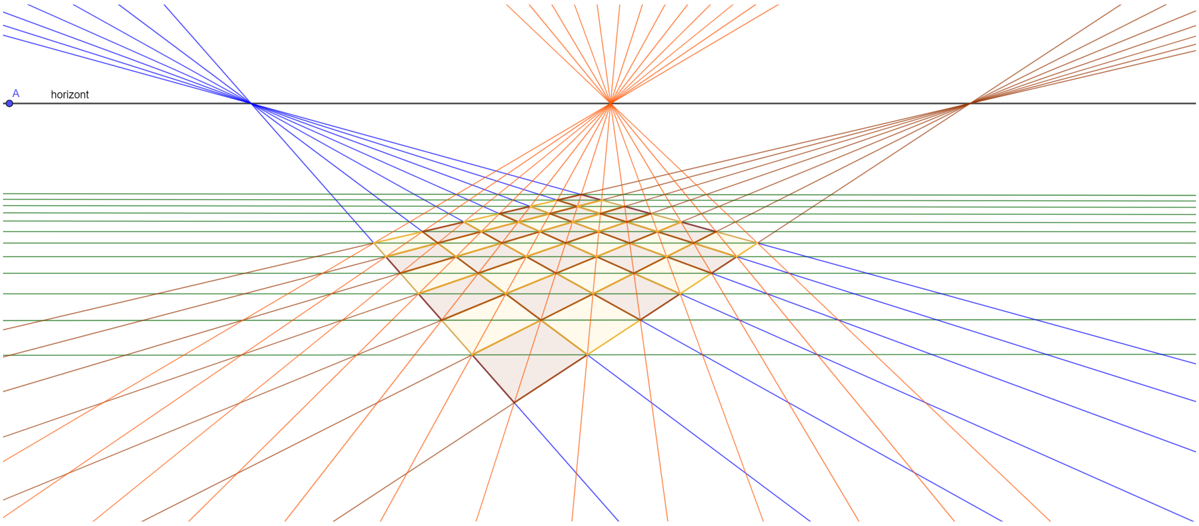


# 2. Príklady na zahriatie

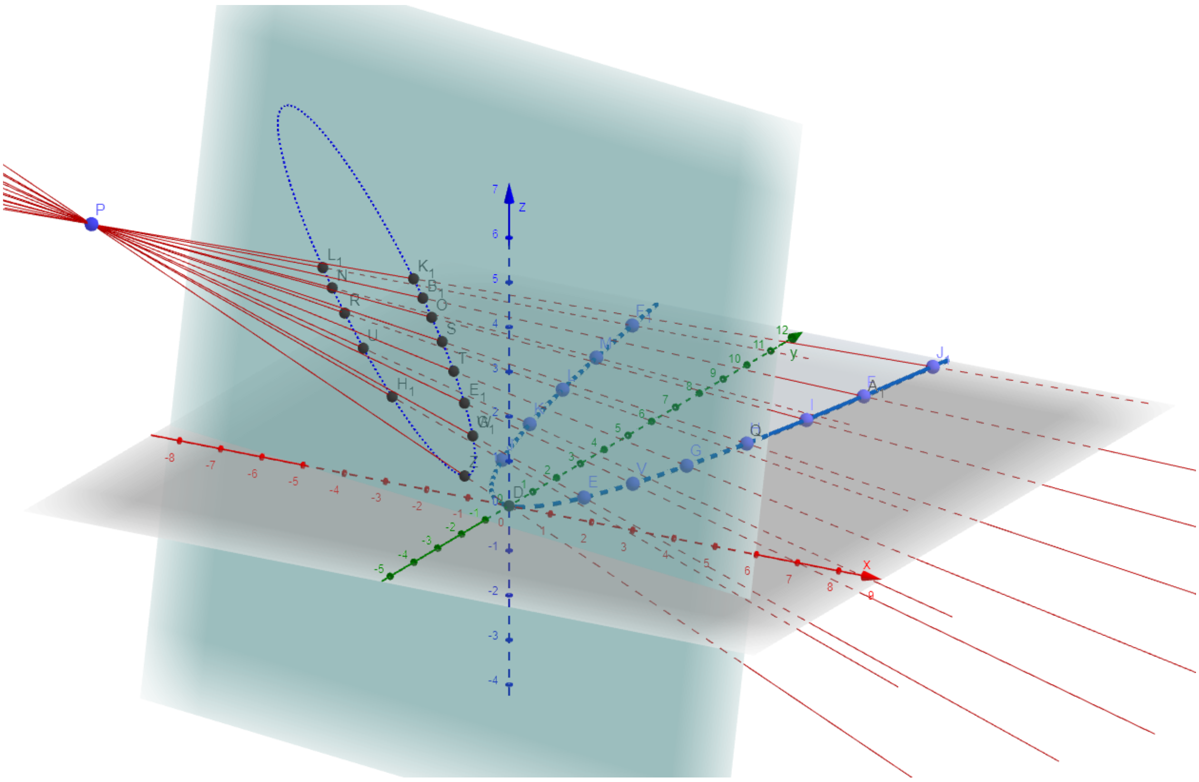
## Perspektíva a projektívna geometria

### Dlaždice v perspektíve

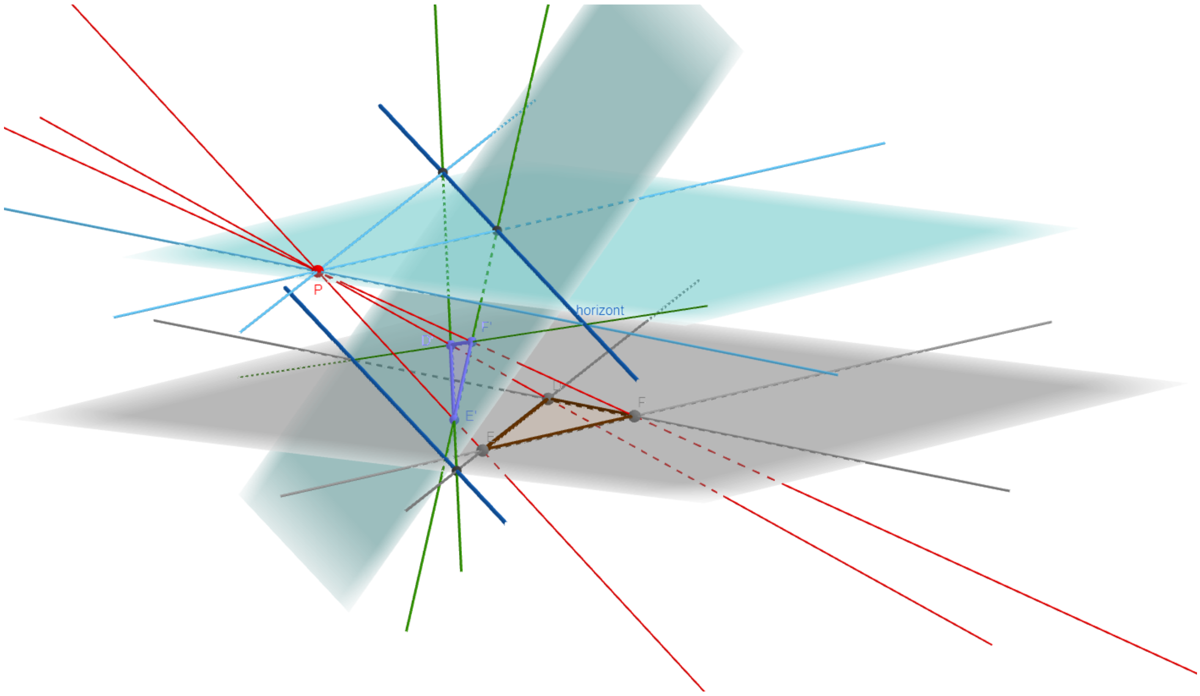
V zásade robíme to, že všetky zväzky rovnobežných priamok chytíme ako špagety a necháme ich stretnúť sa v jedinom bode na horizonte.




Projekcie možno robiť aj zo zábavnejších vecí ako sú dlaždice. Napríklad kužeľosečky sa premiietajú na kužeľosečky, ibaže občas iné.



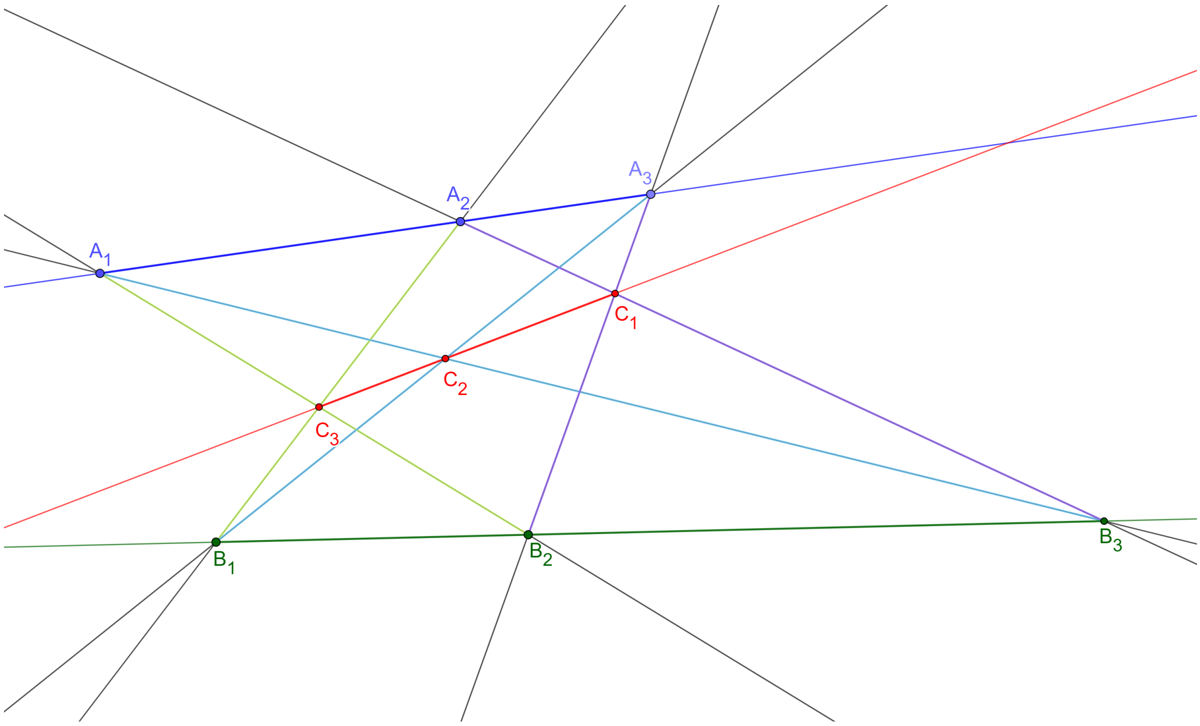
Setup pre projekciu vyzerá asi takto:




Máme spodnú šedú rovinu, kde sa rozprestiera reálny svet. Ten zobrazujeme na šikmú modrošedú rovinu tak, že sa dívame z bodu P a šikmá (obrazová) rovina je naše maliarske plátno. Hormá vodorovná rovina je projektívna rovina, sú tam veci, ktoré v reálnom svete ležia v nekonečne. Plocha nášho zobrazenia je prirodzene ohraničená horizontom - priesečníkom zobrazovacej a projektívnej roviny, a faktom, že sa dívame pred seba - veci, ktoré sú za nami a zobrazovali by sa nad horizont, ignorujeme.

**Projektívna geometria** je oveľa staršia ako perspektíva renesančných maliarov. Tuto je jedno z najdôležitejších tvrdení, ktoré pochádza od Pappusa z Alexandrie, 300 n.l.:

**Pappusova veta (o šesťuholníku)**




Majme na tri body $A_1, A_2, A_3$, ležiace na spoločnej priamke, a tri body $B_1, B_2, B_3$, ležiace na inej spoločnej priamke. Označme $C_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1, \quad C_2 = A_1B_3 \cap A_3B_1, \quad C_1 = A_2B_3 \cap A_3B_2$. Potom body $C_1, C_2, C_3$ ležia tiež na spoločnej priamke.

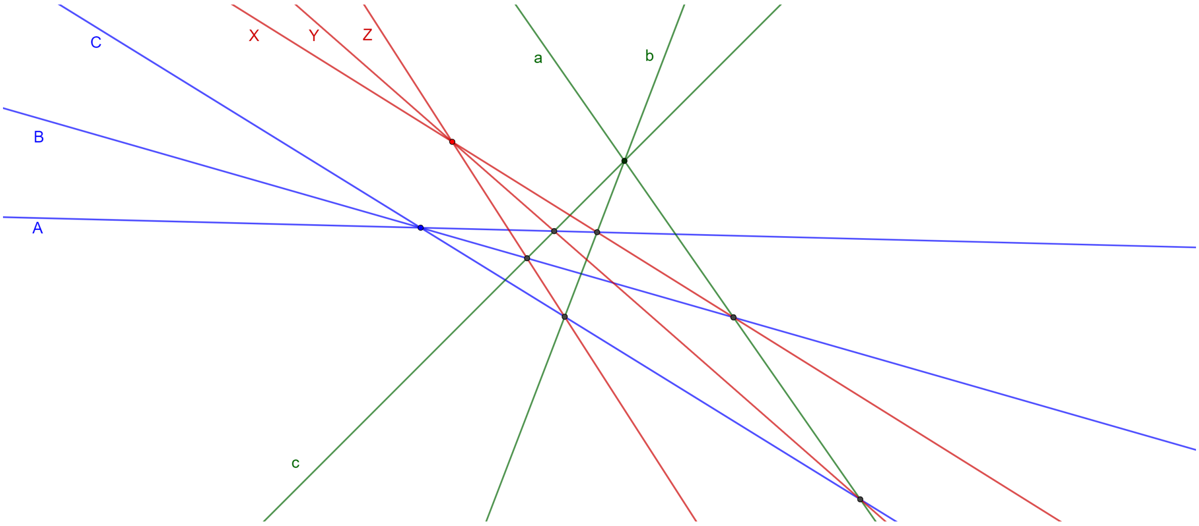
Táto veta má zvláštne čaro, pretože vyzerá úplne fundamentálne (iba body a priamky, žiadne kruhy, vzdialenosti či uhly).

**Dualita**

V projektívnej geometrii sú priamky a body rovnocenné. Tak, ako sú body priesečníkmi priamok, sú priamky "priiesečníkmi" bodov. Preto sa často používa aj úplne mätúce označenie vecí, ktoré nerozlišujem medzi priamkami a bodmi.

Napríklad duálna Pappusova veta je úplne rovnoprávne tvrdenie, ktoré sa dokonca dokazuje častejšie ako "priama" verzia:

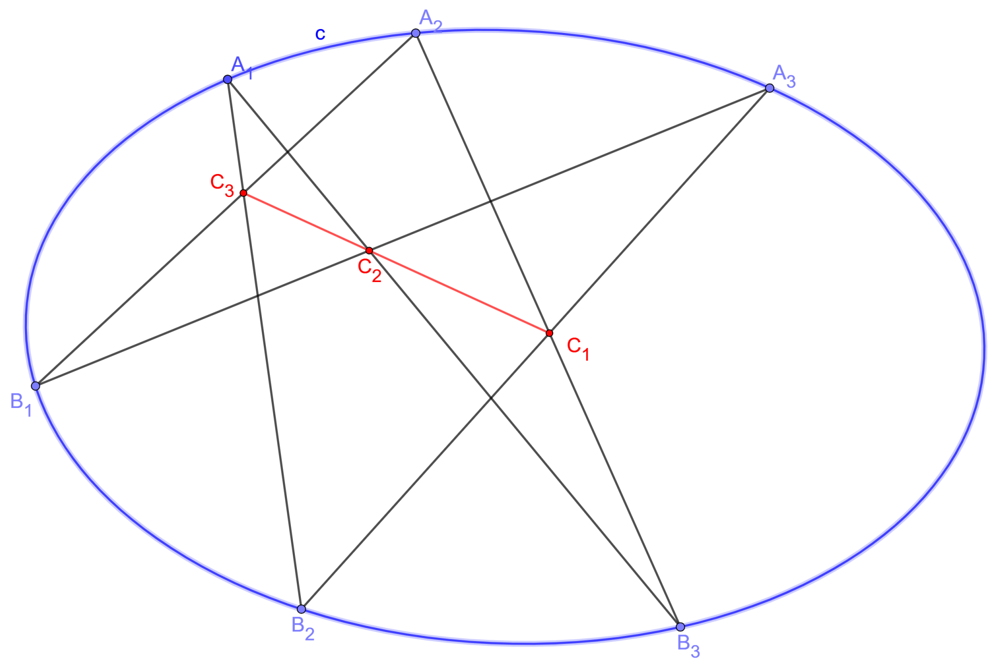
**Duálna Pappusova vetta** Nech majú priamky A, B, C spoločný bod, a nech aj priamky a, b, c majú spoločný bod. Potom priamky X, Y, Z predchádzajúce po rade priesečníkmi Ab a Ba, Ac a Ca, bC a Cb majú tiež spoločný bod.




Samotná projektívna geometria sa rozvíjala od rokov 1600 + (C. Desargues, B. Pascal) v tieni Descartovej geometrie.

**Zovšeobecnenie Pappusovej vety (B. Pascal, 1608):**

Nech c je ľubovoľná kužeľosečka, na ktorej leží 6 bodov $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$. Označme $C_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1, \quad C_2 = A_1B_3 \cap A_3B_1, \quad C_1 = A_2B_3 \cap A_3B_2$. Potom body $C_1, C_2, C_3$ ležia tiež na spoločnej priamke.

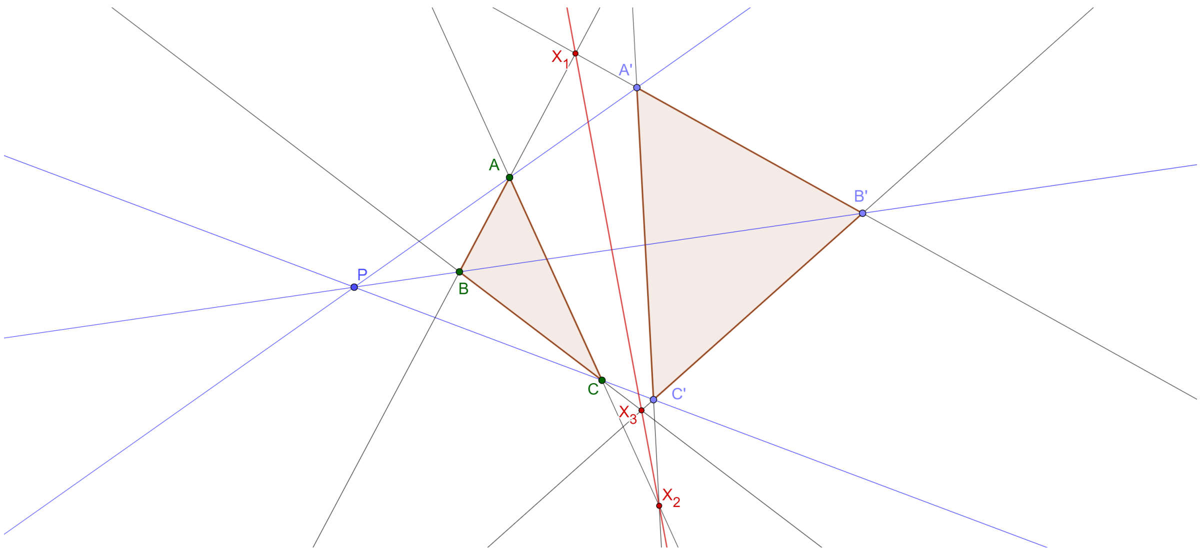



**Desarguesova veta**

*Definícia* Majme dva trojuholníky ABC, DEF a bod P. Hovoríme, že trojuholníky ABC, DEF sú v perspektíve vzhľadom k bodu P, ak sú trojice bodov PAD, PBE, PCF kolineárne.

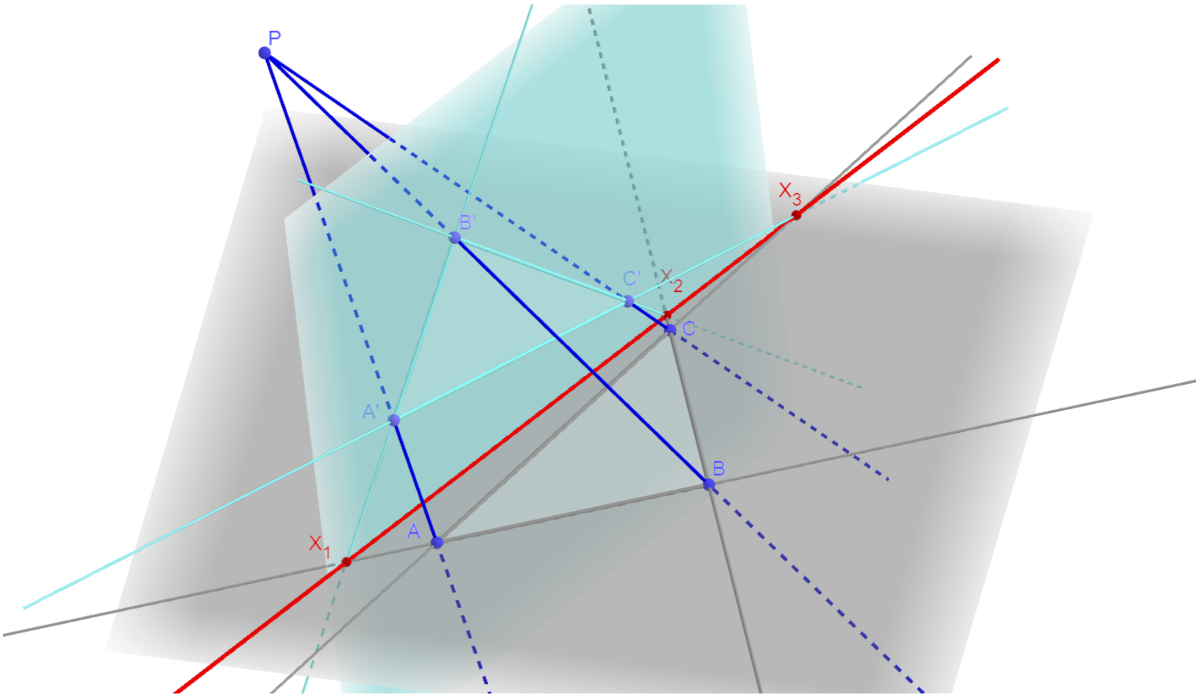
*Definícia* Majme dva trojuholníky ABC, DEF a priamku p. Hovoríme, že trojuholníky ABC, DEF sú v perspektíve vzhľadom k priamke p, ak priesečníky strán AB a DE, AC a DF, a BC a EF ležia na priamke p.

**Desarguesova veta**: Ak sú dva trojuholníky v perspektíve vzhľadom k bodu, sú v perspektíve vzhľadom k priamke.




Inak povedané, ak sú dva trojuholníky v perspektíve, priesčníky ich zodpovedajúcich strán sú kolineárne.

Nedával som nikde dôkazy. Aj toto vyzerá, že by sa dokazovalo ťažko. Ale stačí si celú vec predstaviť v 3D a zrazu to je úplne intuitívne:

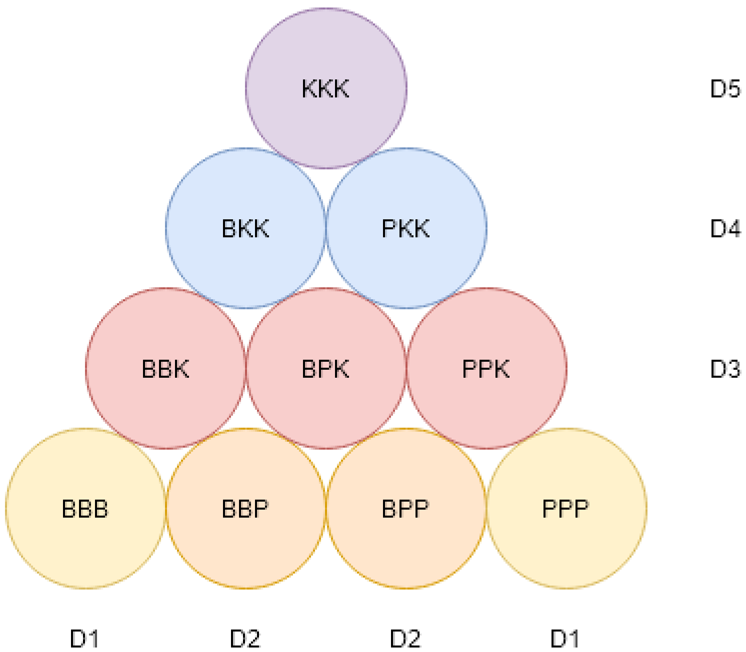



Pretože sa v projektívnej geometrii používa iba pravítko, pomocou ktorého sa spájajú body a konštruujú priesečníky (to neznamená, že pomocou pravítka nemožno skonštruovať kužeľosečky), konštrukcie obvykle vyzerajú tak, že sa k existujúcim čiaram a bodom prikreslí tisíc nových bodov a čiar.

---

## Apolóniove úlohy

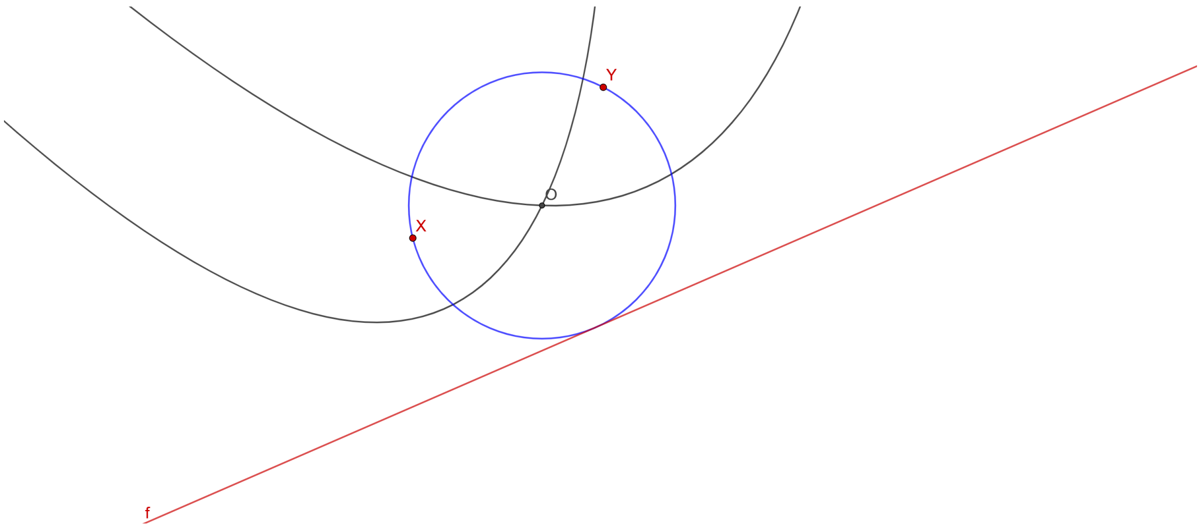
Zostroj kružnicu, ktorá sa dotýka trojice z týchto objektov: bod, priamka, kružnica.




D1 je úloha na pozriem a vidím, D2 na večer, D3 na týždeň, D4 na mesiac a D5 na kus života.

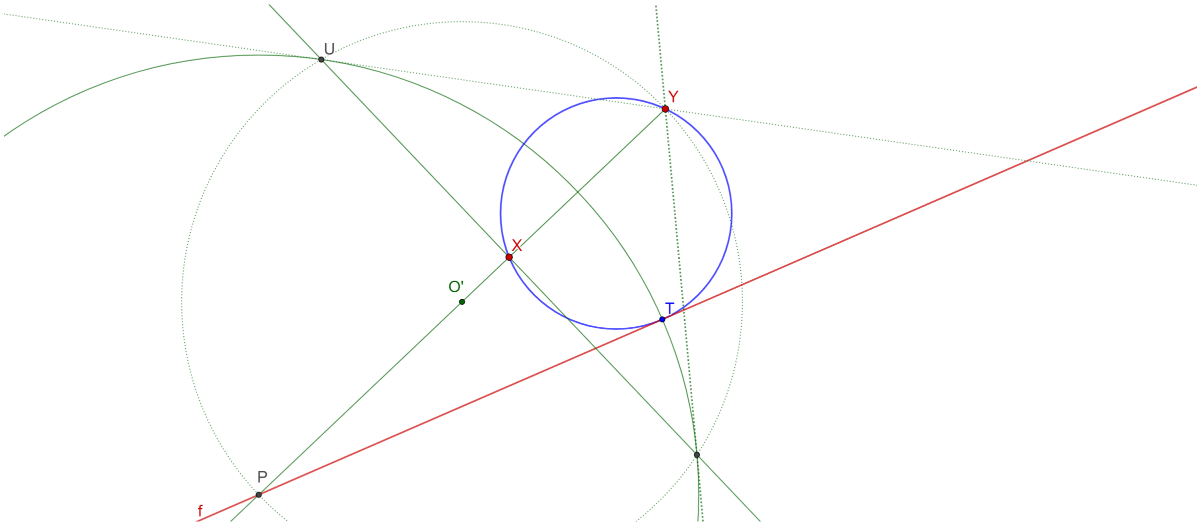
**Bod, bod, priamka**

Už toto je dosť ťažké. "Priamočiare" riešenie je použiť množiny bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od bodu a priamky - teda paraboly. Tak sa ťažká úloha premení na ľahučkú.




Ale to nie je správny geometrický telocvik - nevedeli by sme to vyriešiť nejakými elementárnejšími metódami, teda pomocou pravítka a kružidla?

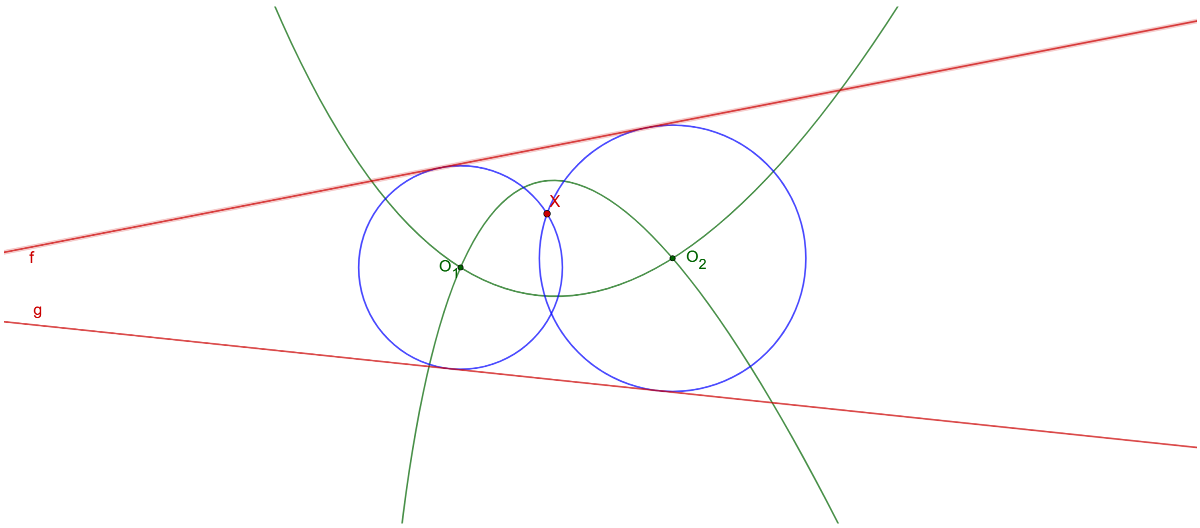
Jednoduchý spôsob riešenia je využiť vetu o sile bodu (Power of a point). Ak je T bod dotyku priamky a kružnice, a bod P priesečníki priamky XY s priamkou f, potom platí $PX \cdot PY = PT^2$ a s tým už ide niečo robiť. V podstate potrebujeme zostrojiť štovrec, ktorý má rovnakú plochu ako obdĺžnik, a to nie je ťažké, hlavne ak si spomenieme na kruhovú inverziu: Ak invertujeme okolo kružnice so stredom P a polomerom PT, potom X bude obrazom Y (a naopak.). A ako sa k sebe majú vzor a obraz pri kruhovej inverzii? Pamätáme? Kolmica, kde sa pretne s kružnicou, k tomu bodu dotyčnica a hľadáme priesečník so spojnicou stredu a vzoru. Inak povedané, potrebujeme pravouhlý trojuholník s odvesnou PY a s pätou výšky X.



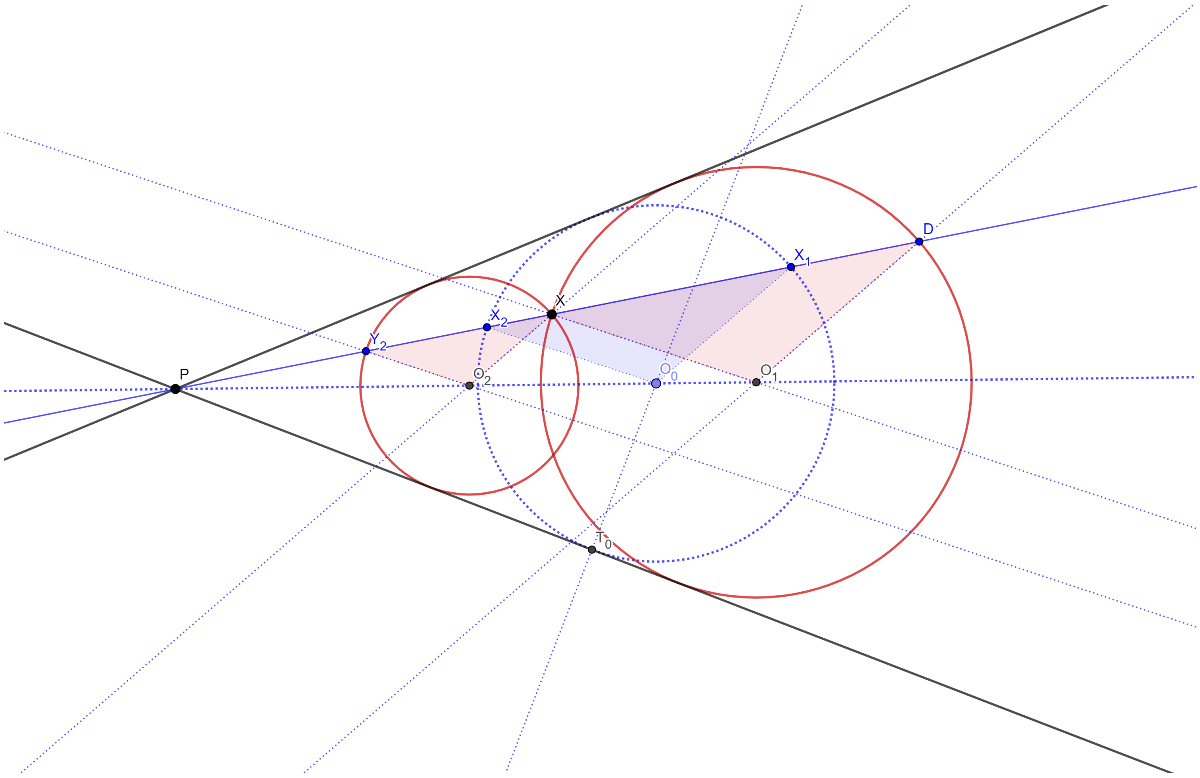

Tak ľahko zostrojíme kružnicu inverzie, a jej priesečník bude bod dotyku hľadanej kružnice s f, pretože to je pevný bod inverzie. Keď už máme tri body hľadanej kružnice, ľahko ju zostrojíme.

**Priamka, bod, priamka**

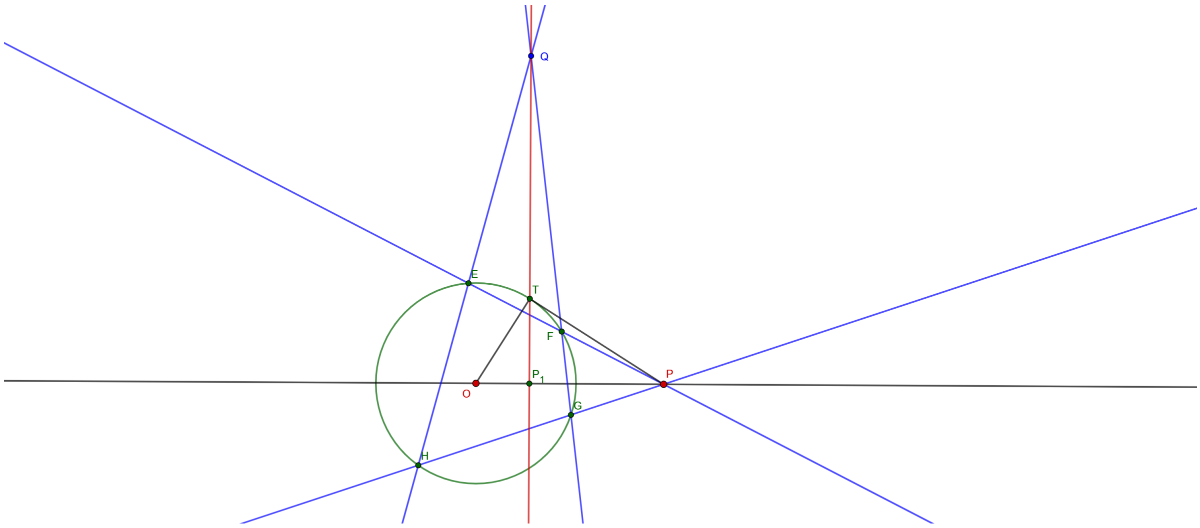
To je zase ľahké pomocou parabol.




ale prekvapivo ľahké to je aj s pravítkom a kružidlom, pretože nám pomôže rovnoľahlosť. Stačí zostrojiť ľubovoľnú kružnicu, dotýkajúcu sa oboch priamok, a potom pomocou podobnosti stred požadovanej kružnice (presnejšie dvoch):




**Pomôcka** v Desarguesovom štýle:



1. Polára. Kruhová inverzia vytvára priradenie bodov mimo kruhu a tetív v kruhu: bodu P mimo kruhu priradzujeme jeho polárnu priamku (poláru), čo je kolmica na spojnicu bodu a stredu kruhu, predchádzajúca obrazom bodu P v kruhovej inverzii.
2. Majme ľubovoľné priamky, prechádzajúce bodom P a vytínajúce dve tetivy na kružnici. Tieto dve tietivy definujú cirkulárny štvoruholník. Dve opačné strany tohoto štvoruholníka sa pretínajú v bode, ležiacom na poláre.

**Kružnica a dva body**

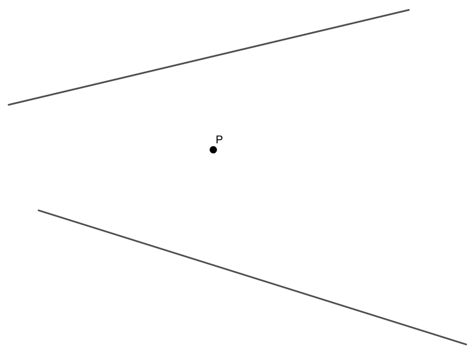
Toto je ľahšie, ako sa zdá, a je to výborné cvičenie na Pascalovo rozšírenie Pappusovej šesťuholníkovej vety, ktorú sme spomínali vyššie (bežne sa dá nájsť iné riešeniel). Toto riešenie má čaro projektívnej goemetrie - že začneme hlava-nehlava kresliť kružnice a spájať rôzne body.
**Domáca úloha**

---

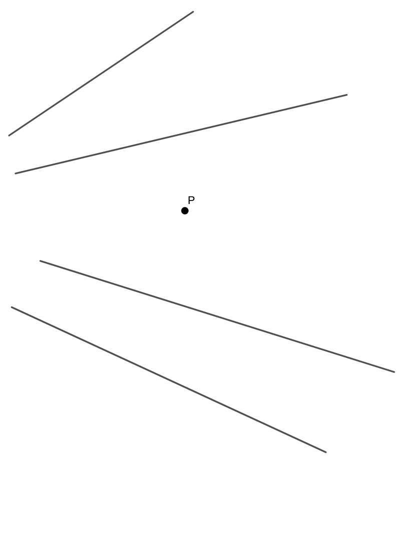
# 4. Domáca úloha (nová)

Začneme pár príkladmi z projektívnej geometrie.

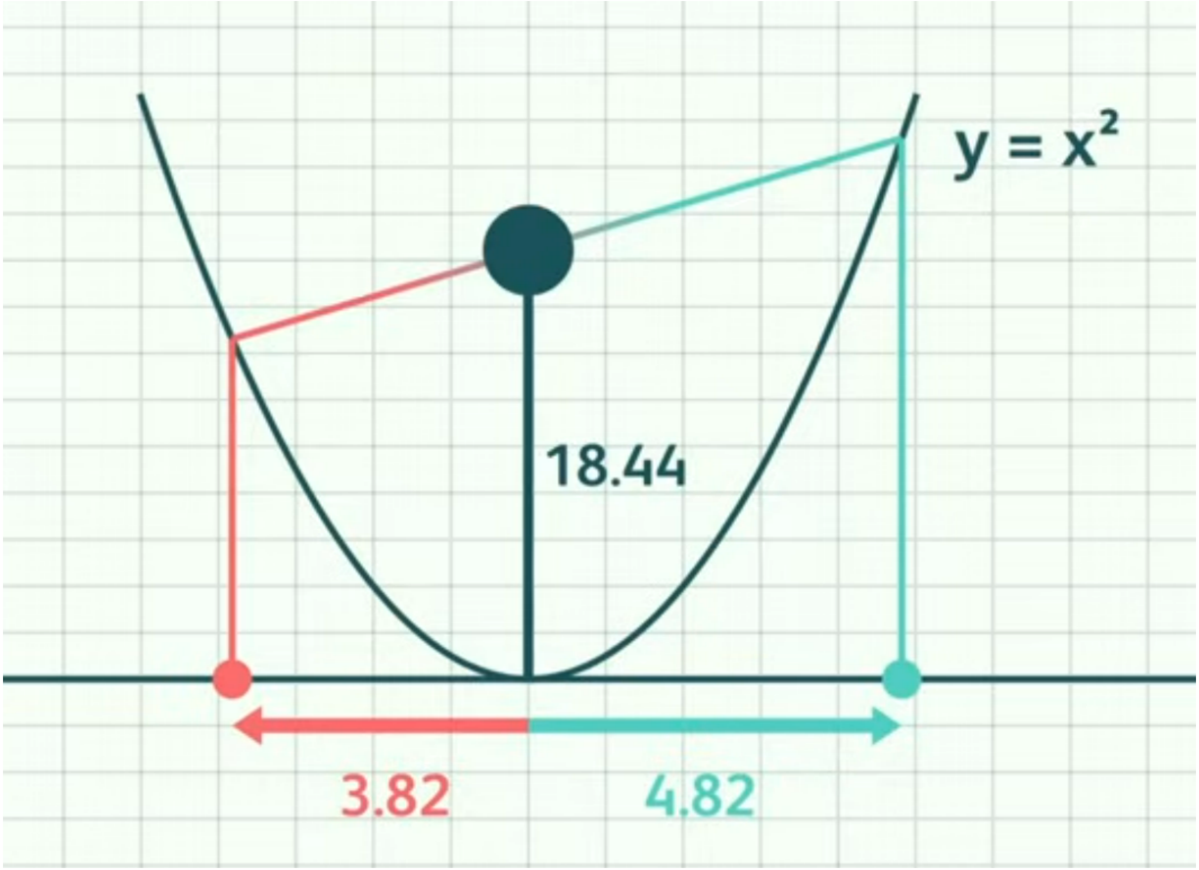
1. Máme dve priamky f, g, ktorých priesečník X sa nachádza mimo výkresu, a bod P. Veďte bodom P priamku, prechádzajúcu priesečníkom X.  (Návod: Desarguesova veta)




2. Máme dve dvojice priamok f, g a h, i, ktorých priesečníky X, resp. Y sa nachádzajú mimo výkresu. Máme bod P a za úlohu viesť bodom P rovnobežku s priamkou XY.



3. Dokážte:, že pomocou paraboly môžeme násobiť čísla.




4. Nájdite všetky komplexné čísla z také, že $z^3 = 1 + i$. (Príprava na budúce: čo vieme o komplexných číslach?)

---

## 5. Program na budúci týždeň

Grupy symetrií a dlaždice.

Ale dosť hrozí, že už ideme na goniometriu a komplexné čísla.