Hodina 7. júla 2023

Program:

1. Domáca úloha: zostávajúci príklad z prijímačkového testu a príklady z 1. lekcie
2. Rôzne postupnosti a číselné rady

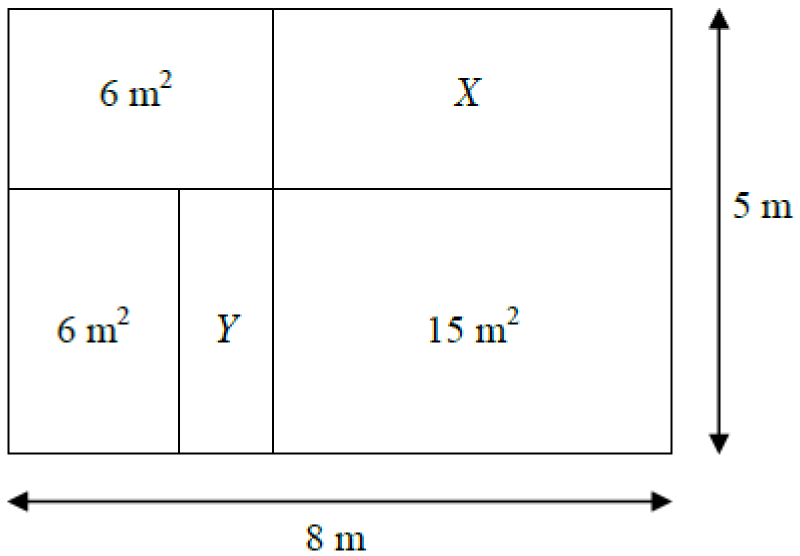
0. Úvod

Tento text a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári https://github.com/PKvasnick/Erik. Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

Telekonferencia Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť*.

1. Domáca úloha

Zostávajúci prijímačkový príklad



Vieme, že jedno riešenie je X=10, Y=3. Treba nájsť iné riešenie. Jedno riešenie uvádzam na konci.

Druhá časť domácej úlohy boli ešte stále tieto príklady:

Príklad 1

Postupnosť začína číslami 1, 3, 6, 10. Doplň ďalšie členy.

Ako u väčšiny príkladov, ktoré budeme riešiť, nezaujíma nás až tak veľmi konkrétny príklad, ale stratégie a postupy, ktoré sa dajú použiť.

Príklad 2

Platí

$$
\begin{aligned}
\sqrt{25} &= 2+5-2 \quad (\text{odčítame dvojku, pretože máme druhú odmocninu}) \\
&= 5
\end{aligned}
$$

$$\sqrt{64} = 6+4-2 = 8$$

$$\sqrt{196} = 1+9+6-2 = 14$$

$$\sqrt{289} = 2+8+9-2 = 17$$

Je toto nová fantastická finta na odmocňovanie? Ako to funguje? Pre aké najväčšie číslo to môže platiť?

Príklad 3

Majme postupnosť $x_{n+1} = a \cdot x_n(1-x_n)$. Ako sa správa pre rôzne a?

2. Príklady

1. Príklad na deliteľnosť

Tvrdenie Všetky čísla tvaru ABABAB sú deliteľné 37.

Vysvetlivka: A, B sú prirodzené čísla také, že 0 < A ≤ 9, 0 ≤ B ≤ 9.

Dôkaz?

- Ako to vlastne budeme dokazovať?
- Čo znamená, že tvrdenie dokážeme?

2. Exponenciálna rovnica

Nájdi všetky x, ktoré sú riešeniami rovnice

$$2^{5x} = 3^{2-x}$$

3. Kvadratická rovnica

Nech M, N sú korene kvadratickej rovnice

$$x^2 + 6x + 4 = 0.$$

Vypočítajte $M^2 + N^2$.

---

3. Všelijaké číselné rady

Aritmetický rad

$$a_n = a_0 + nd, \quad n = 0, 1, \dots$$

Aký je súčet prvých n členov? inak povedané, čomu sa rovná

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots a_{n-1}$$

Gaussova finta:

$$
\begin{array}{rcccc}
S_n = & a_0 + 0d & +a_0 + 1d & + \dots & +a_0 + (n-1)d \\
S_n = & a_0 + (n-1)d & +a_0 + (n-2)d & + \dots & +a_0 + 0d \\
2S_n = & 2a_0 + (n-1)d & +2a_0 + (n-1)d & + \dots & +2a_0 + (n-1)d
\end{array}
$$

a posledný súčet ide sčítať ľahko, pretože v ňom máme samé rovnaké členy.:

$$2S_n = n(2a_0 + (n-1)d)$$
$$S_n = na_0 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

Príklad

Pre rad $S_N^{(1)} = 1 + 2 + \cdots + N$ môžeme položiť $a_0 = 0,\ d = 1,\ N = n+1$, a dostaneme známy vzťah

$$S_N^{(1)} = \frac{N(N+1)}{2}$$

Mocninné rady

Na rad $S_n^{(1)} = 1 + 2 + \cdots + n$ sa môžeme pozerať aj ako na špeciálny prípad radu

$$S_n^{(k)} = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

Vieme, že $S_n^{(1)}$ je $n(n+1)/2$, $S_n^{(0)}$ bude jednoducho n, a ukážeme si recept, ako postupne dopočítať všetky ostatné $S_n^{(k)}$.

Ukážeme si postup pre $S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$. Gaussova finta tu nefunguje, tak skúsime niečo iné. Napíšeme

$$k^3 - (k-1)^3 = k^3 - k^3 + 3k^2 - 3k + 1 = 3k^2 - 3k + 1$$

a vypíšeme rovnice pre k od 1 do n:

$$\begin{array}{ccccccc}
1^2 & - & 0^2 & = & 3\cdot 1^2 & - & 3\cdot 1 + 1 \\
2^2 & - & 1^2 & = & 3\cdot 2^2 & - & 3\cdot 2 + 1 \\
3^2 & - & 2^2 & = & 3\cdot 3^2 & - & 3\cdot 3 + 1 \\
\dots & & & & & & \\
n^2 & - & (n-1)^2 & = & 3\cdot n^2 & - & 3\cdot n + 1
\end{array}$$

Teraz tieto rovnice sčítame. Naľavo nám ostane iba n^3, zatiaľ čo napravo dostaneme lineárnu kombináciu súčtov $S_n^{(2)}$, $S_n^{(1)}$ a $S_n^{(0)}$. Z nich súčet $S_n^{(2)}$ je to, čo chceme vypočítať, takže ho zo vzťahu vyjadríme:

$$n^3 = 3S_n^{(2)} - 3S_n^{(1)} + S_n^{(0)}$$
$$S_n^{(2)} = \frac{1}{3}\left(n^3 + 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right)$$
$$= \frac{n}{6}\left(2n^2 + 3n + 1\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Podobne, ak vypíšeme rovnice pre $k^4 - (k-1)^4$ od 1 do n, môžeme odvodiť vzťah pre $S_n^{(4)}$:

$$S_n^{(4)} = \left(\frac{n(n+1}{2}\right)^2$$

Harmonický rad

Harmonický rad je prípad mocninného radu pre k = -1:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Tento rad nevieme presne sčítať, ale vieme, že pre veľké n súčet H_n neohraničene rastie. Dôkaz: uvažujme rrad

$$G_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{\lceil \log_2 n \rceil}}$$

ktorý vznikne tak, že každé k v menovateli harmonického radu nahradíme najbližšou väčšou mocninou 2, teda n v menovateli nahradíme $2^{\lceil \log_2 n \rceil}$, kde $\lceil x \rceil$ označuje najmenšie celé číslo väčšie ako x .

Každý člen radu G je menší alebo rovný príslušnému členu harmonického radu, a teda $G_n \leq H_n$. Rad G ale vieme ľahko sčítať a ukázať, že je je divergentný, teda jeho súčet pre rastúce n neohraničene rastie:

$$\begin{aligned} G_n &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = 1 + \frac{\lceil \log_2 n \rceil}{2} \end{aligned}$$

kde neriešime niekoľko prípadne chýbajúcich členov na konci radu. Zjavne vidíme, že rad G je divergentný a divergentný musí byť aj harmonický rad.

Je známe, že pre veľké n dobre platí priblížný vzťah

$$H_n = \ln n + \gamma + O/1/n)$$

kde $\gamma = 0.577\ldots$ je Eulerova-Mascheroniho konštanta a O(1/n) znamená, že ďalšie opravné členy budú rádu 1/n a vyššieho, teda pre veľké n zanedbateľné.

Čo tento výraz znamená? Znamená, že H_n s rastúcim n neohraničene rastie do nekonečna, ale rastie nesmierne pomaly.

Alternujúci harmonický rad

Rad

$$A_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

sa od harmonického radu líši striedajúcimi sa znamienkami. Tento rad konverguje a pre rastúce n sa hodnota súčtu blíži k $\ln 2$.

Geometrický rad:

$$a_n = a_0 q^n$$

Súčet:

$$S_n = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \cdots + a_0 q^{n-1}$$

ľahko nájdeme, ak si všimneme, že rad čiastočne obsahuje sám seba:

$$
\begin{aligned}
S_n &= a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \cdots + a_0 q^{n-1} \\
&= a_0 + q(a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \cdots + a_0 q^{n-2}) = a_0 + qS_{n-1}
\end{aligned}
$$

a pretože zároveň platí $S_n = S_{n-1} + a_0 q^{n-1}$, môžeme ľahko vyjadriť S_n:

$$
\begin{gathered}
S_n = a_0 + q(S_n - a_0 q^{n-1}) \\
S_n = a_0 + qS_n - a_0 q^n \\
S_n(1-q) = a_0(1-q^n) \\
S_n = a_0 \frac{1-q^n}{1-q}
\end{gathered}
$$

Pre n rastúce do nekonečna má rad súčet pre $|q| < 1$, a tento súčet je

$$
S = \frac{1}{1-q}
$$

Príklad: Pre $a_0 = 1,\ q = 1/2$ máme

$$
S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2
$$

Príklad: Pre $q = -1/2$ máme

$$
S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}
$$

Domáca úloha

1. Jozef si z banky požičal 500 000 eur na hypotéku s úrokom 2% na tridsať rokov. Vypočítaj mesačnú splátku.
2. Zenón naháňa korytnačku. Keď sa rozbehol, bola 100 m pred ním. Tých 100 metrov prebehol Zenón za 12.5 sekundy, ale Keď dobehol, bola 20 m pred ním. Keď prebehol týchto 20 m, bola 4 m pred ním, keď prebehol tieto 4 metre, bola ešte stále 80 cm pred ním. Zenón si začal zúfať, že korytnačku nikdy nedobehne, pretože kým dobehne tam, kde bola pred chvíľou, vždy o kúsok popolezie ďalej. Dohoní Zenón korytnačku alebo nie, a kedy?
3. Pán Brown prišiel z krčmy k domovým dverám, našiel vo vrecku kľúče, a chce si odomknúť. Na zväzku má 10 kľúčov, ale v tej tme vyzerajú všetky rovnako. Skúsi jeden kľúč, a keď to nie je správny, vráti ho do zväzku a zasa náhodne vyberie kľúč, a takto postupuje ďalej, kým nenájde správny kľúč.
   - Pri koľkom pokuse má pán Brown najväčšiu šancu nájsť správny kľúč?
   - Koľko kľúčov v priemere musí vyskúšať, kým nájde ten správny?

Riešenie domácej úlohy

Začali sme tým, že sme si označili úseky a, b, c, d, e, a vieme pre ne získať hromadu rovníc z údajov v obrázku. Treba skúsiť vyjadriť X, Y a získať nejaký vzťah medzi nimi.

Skúsme rýchlejšie riešenie:

Predpokladáme, že riešenie X=10, Y=3 pochádza z nejakého jednoduchého tvaru oblastí X, Y - konkrétne, že budú mať celočíselné rozmery. Potom - v označení a, b, atd, môžeme predpokladať a=2, c=5, b=3, d=1, e=2, teda náš predpoklad dáva zmysel.

Slušné riešenie by mohlo vzniknúť, keby sme vzali X=12 a nechali a=2. Potom c=6, b=2.5, d+e=3, e=2.4, takže d=0.6 a Y=0,6 x 2.5 = 1.5.

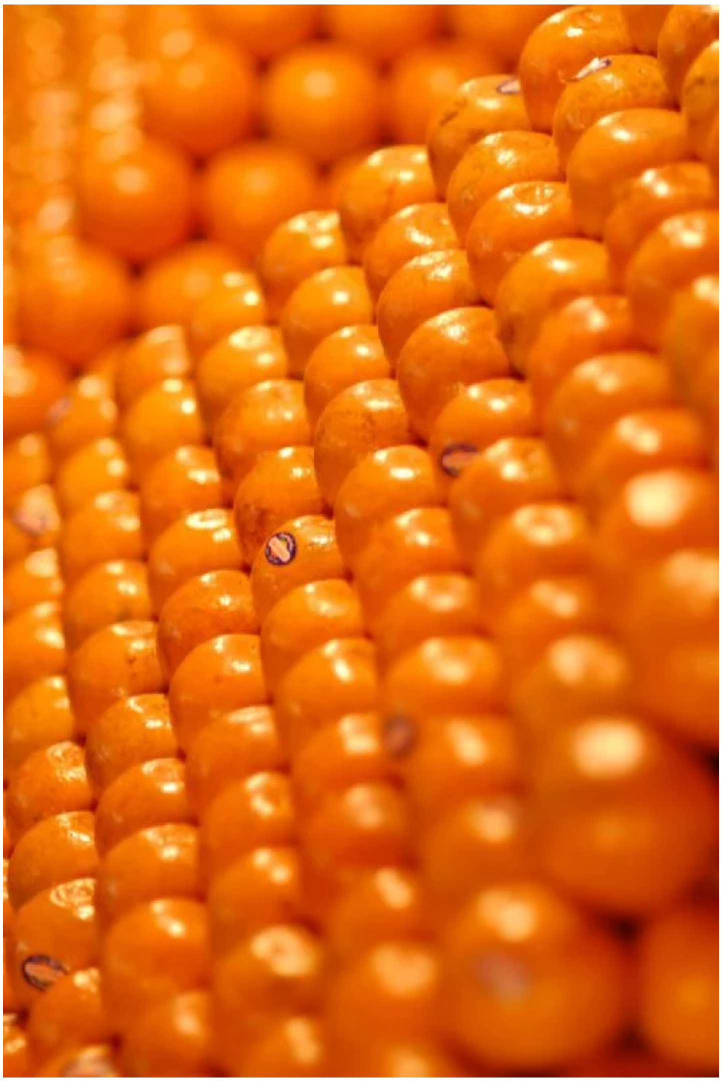
Teda iné riešenie je X=12, Y=1.5.

Podobne môžeme skúsiť X=12, a=3. Potom c=4, b=3.75. Ďalej d+e=2, e=6/3.75=1.6, d=0.4, Y=0.4 x 3.75 = 1.5. Toto dáva rovnaké riešenie.

Ešte skúsme riešenie s iným X, napr. X=9. Položme a=3, potom c=3, b=15/3=5, d+e = 6/3 = 2, e=6/5=1.2, d= 0.8, Y=0.8 x 5 = 4.

Teda ešte ďalšie riešenie je X=9, Y=4.

Balenie pomarančov v osemrozmernom priestore

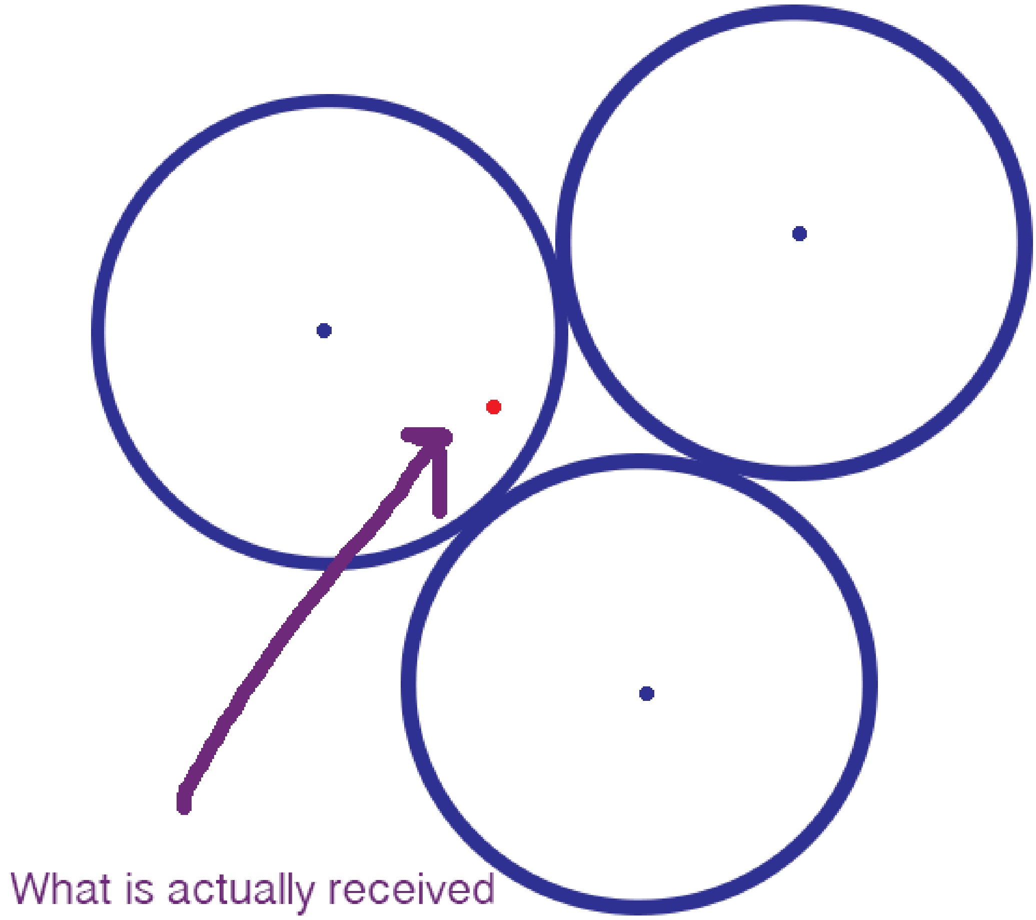


Tento rok Maryna Viazovska ukázala, ako najefektívnejšie usporiadať gule v osemrozmernom priestore. Môže sa zdať, že to je abstraktná záležitosť, ale v skutočnosti má veľmi praktické použitie.

- Jednorozmernú priamku môžeme úplne pokryť jednorozmernými guľami (úsečkami jednotkovej dĺžky)
- rovinu môžeme pokryť kruhmi tak, že ostane 9% voľnej plochy
- priestor môžeme pokryť guľami tak, že otstane 26% voľného priestoru
- vo vyšších rozmeroch objem, ktorý zaberajú najefektívnejšie usporiadané gule, rýchlo klesá.

Praktický význam: algoritmy najbližšieho suseda (nearest neighbour

Veľa úloh strjového učenia (machine learning) spočíva v tomto: Máme nejakú množnu známych hodnôt X pre niekoľko kombinácií parametrov $\{p_1, p_2, ..., p_n\} \in P$. Úloha je nájsť hodnotu pre inú kombináciu parametrov. Najjednoduchší spôsob je nájsť najbližší bod v n-rozmernom priestore parametrov P a použiť hodnotu X z tohto bodu. Iný spôsob je použiť n najbližších známych bodov v priestore P a vypočítať vážený priemer pre nový bod. V oboch týchto prípadoch vidíme, že s rastom dimenzie priestoru P budú takéto metódy fungovať stále horšie - budeme potrebovať nerealisticky veľké počty "známych" bodov, aby sme vedeli odhadnúť hodnotu X v ľubovoľnom inom bode - teda aby sme okolo náhodne vybraného bodu v priestore P vedeli nájsť dostatočne blízky dátový bod, pre ktorý poznáme X.



Tento obrázok dobre ilustruje, čo som písal vyššie, ale v skutočnosti má ilustrovať ďalšie dôležité použitie poznatkov o najefektívnejšom pokrytí priestoru guľami.

Viac v https://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/why-you-should-care-about-high-dimensional-sphere-packing/