Hodina 16. februára 2024

Program

1. Domáca úloha (z minula)
2. Niekoľko príkladov na zahriatie a pozdvihnutie mysli: všelijaké dotyčnice)
3. Domáca úloha (nová)
4. Program na budúci týždeň

0. Úvod

Tento text a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári https://github.com/PKvasnick/Erik. Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

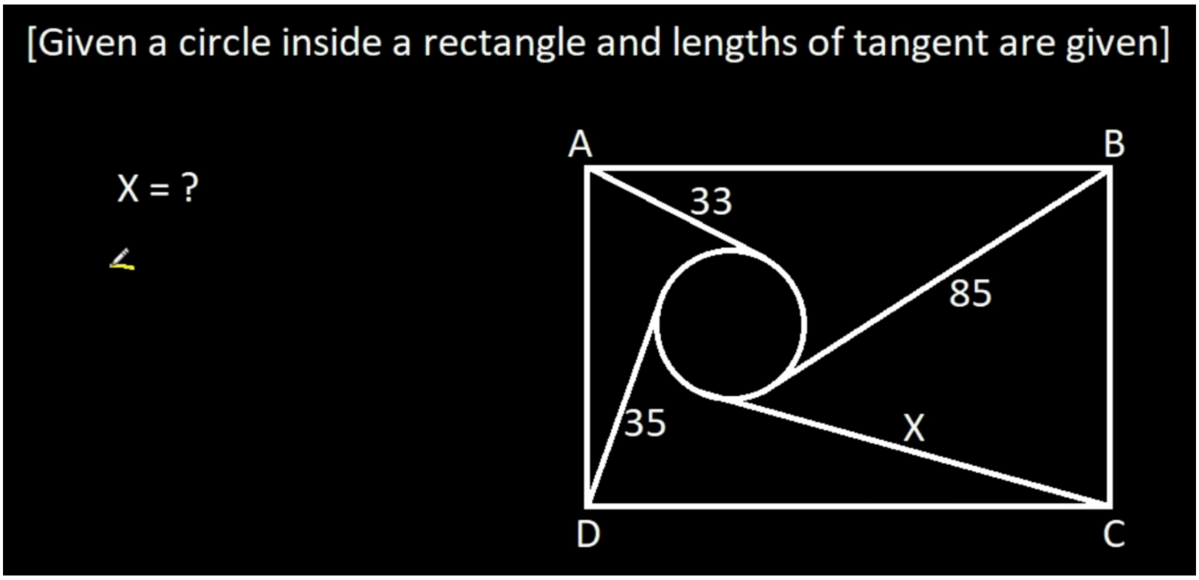
Videohovor Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť*.

---

1. Domáca úloha

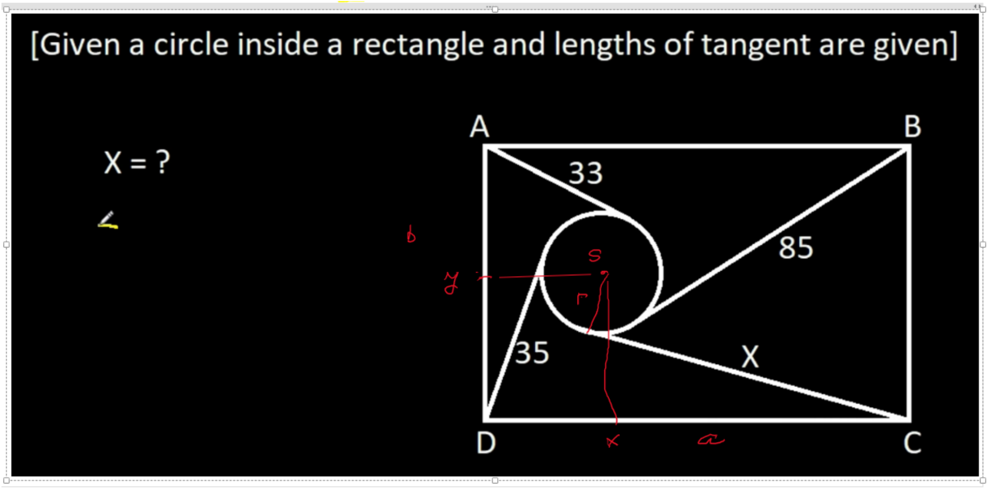
Príklad 1

Vypočtaj x:



To je ľahká úloha, oveľa ťažšie je vypočítať všetko ostatné.

Riešenie



$$35^2 + r^2 = x^2 + y^2 \qquad (1)$$
$$33^2 + r^2 = x^2 + (b-y)^2 \qquad (2)$$
$$85^2 + r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 \qquad (3)$$
$$X^2 + r^2 = (a-x)^2 + y^2 \qquad (4)$$

$(1) - (2)$:

$$35^2 - 33^2 = y^2 - (b-y)^2$$

$(3) - (4)$:

$$X^2 - 85^2 = y^2 - (b-y)^2 = 35^2 - 33^2$$
$$X^2 = 85^2 + 35^2 - 33^2 =$$
$$= 7225 + 1225 - 1089 = 7361$$
$$\boxed{X = 85.8}$$

$$35^2 + r^2 = x^2 + y^2$$
$$33^2 + r^2 = x^2 + b^2 - 2by + y^2$$
$$= 35^2 + r^2 - 2by + b^2$$
$$2by - b^2 = 35^2 - 33^2$$
$$b(2y - b) = 136$$
$$a(2x - a) = 85^2 - 33^2$$

Ostatné veci sa počítajú oveľa ťažšie.

Príklad

Fibonacciho čísla môžeme vyjadriť v tvare

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ako sa správajú veľké Fibonacciho čísla? (Toto je príklad na vlastné hodnoty)

Riešenie

Toto sme už robili kedysi v lete.

Označme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rovnica pre vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(1-\lambda)\lambda - 1 = 0 \implies \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \Phi \\ -\frac{1}{\Phi} \end{cases}$$

Vlastné vektory vypočítame z definície:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Pre jednotlivé vlastné hodnoty dostávame:

$$\lambda = \Phi :$$
$$u_1 - \Phi u_2 = 0 \implies u_1 = \Phi u_2$$
$$u_1^2 + u_2^2 = 1 \implies (\Phi^2 + 1)u_2^2 = 1 \implies u = \begin{pmatrix} \frac{\Phi}{\sqrt{1+\Phi^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\Phi^2}} \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -\frac{1}{\Phi} :$$
$$v_1 + \frac{1}{\Phi} v_2 \implies v_1 = -\frac{1}{\Phi} v_2$$
$$v_1^2 + v_2^2 = 1 \implies \left(\frac{1}{\Phi^2} + 1\right) v_2^2 = 1 \implies v = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{1+\Phi^2}} \\ \frac{\Phi}{\sqrt{1+\Phi^2}} \end{pmatrix}$$

Definujme

$$\mathbf{V} = (\vec{u} \quad \vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{1+\Phi^2}} \begin{pmatrix} \Phi & -1 \\ 1 & \Phi \end{pmatrix}$$

Matica $\mathbf{V}$ je ortogonálna, teda jej inverzná matica je $\mathbf{V}^T$.

Ďalej nech

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Phi} \end{pmatrix}$$

Platí

$$\mathbf{AV} = \mathbf{\Lambda V} \implies \mathbf{A} = \mathbf{\Lambda V V^T} = \lambda_1 \mathbf{u u^T} + \lambda_2 \mathbf{v v^T}$$

Teraz nie je problém vyjadriť akúkoľvek mocninu matice $\mathbf{A}$, pretože vektory $\mathbf{u, v}$ sú normalizované a ortogonálne, teda $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1, \mathbf{u^T v} = \mathbf{v^T u} = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{A^2} &= (\lambda_1 \mathbf{u u^T} + \lambda_2 \mathbf{v v^T})(\lambda_1 \mathbf{u u^T} + \lambda_2 \mathbf{v v^T}) \\ &= \lambda_1^2 \mathbf{u u^T} + \lambda_2^2 \mathbf{v v^T} \end{aligned}$$

Platí $\lambda_1 \equiv \Phi > 1, |\lambda_2| = 1/\Phi < 1$ a teda s rastúcim n bude vo výraze pre n-tú mocninu $\mathbf{A}$ dominovať člen s $\lambda_1 \equiv \Phi$:

$$n \to \infty : \quad \mathbf{A^n} \to \Phi^n \mathbf{u u^T}$$

a teda veľké Fibonacciho čísla sa budú chovať ako Φ^n. Tento výraz je pozoruhodne presný.

Niekoľko príkladov na zahriatie a povznesenie mysle

1. Všelijaké dotyčnice

Aká je rovnica dotyčnice k funkcii $f : y = x^2$ v bode $[2, 4]$

2. Stopa

Stopa matice (alebo iného operátora) $\mathbf{A}$ je lineárny člen rozvoja determinantu $|1 + \epsilon\mathbf{A}|$ podľa ϵ.

Príklad:

$$|1 + \epsilon\mathbf{A}| \equiv \begin{vmatrix} 1+\epsilon & -\epsilon \\ 1/2 \cdot \epsilon & 1+\epsilon \end{vmatrix} = 1 + 2\epsilon + O(\epsilon^2)$$

takže stopa matice A je 2, a ľahko vidno, že to je súčet diagonálnych prvkov. Napriek tomu, že vyzerá triviálne, stopa je veľmi dôležitá veličina: je to *divergencia* vektorového poľa matice A, teda sila "zdroja" vektorového poľa.

Riešenie si vyžaduje zložitejšie maticové derivovanie, ale vyzerá takto:

$$(\mathbf{F^T F})\beta = \mathbf{F^T Y} \quad \therefore \quad \beta = (\mathbf{F^T F})^{-1}\mathbf{F^T Y}$$

teda vidíme, že koeficienty lineárneho regresného modelu nájdeme pomocou pseudoinverznej matice (aj keď v praxi to spravidla robíme pomocou QR rozkladu a nie explicitným vytvorením pseudoinverznej matice.)

Domáca úloha (nová)

1. Už sme mali takúto maticcu:

   $$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Aké sú vlastné čísla a vlastné vektory tejto matice?

2. Aby sme nazabudli, čo sme kedysi robili: Dokážte, že pre žiadne celé n nie je číslo n(n+1)(n+2)(n+3) úplný štvorec.

   Návod: treba ukázať, že číslo sa nachádza medzi dvoma nasledujúcimi úplnými štvorcami, teda existuje m také, že $m^2 < n(n+1)(n+2)(n+3) < (m+1)^2$. Natrénovať pre jednoduchšiu úlohu: dokázať, že n(n+1) nie je nikdy úplný štvorec.

3. Na lúke stojí Adam a Barbora. Inde na lúke je kruhové jazero. Adam chce doniesť Barbore vodu z jazera. Aká je najkratšia trasa Adam - jazero - Barbora? (stačí geometrická úvaha, počítať budeme nabudúce).

---

5. Program na budúci týždeň

- Ešte trocha derivácií a trocha integrálov.