# Hodina 8. septembra 2023

Program:

1. Domáca úloha (z minula)
2. Niekoľko príkladov na zahriatie a pozdvihnutie mysli.
3. Geometria: Izometrie roviny, posunutia a rotácie
4. Domáca úloha (nová)
5. Program na budúci týždeň

## 0. Úvod

**Tento text** a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári [https://github.com/PKvasnick/Erik](https://github.com/PKvasnick/Erik). Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

**Videohovor** Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť.*

## 1. Domáca úloha

#### Príklad 1

Koľko číslic (čitateľ + menovateľ) potrebujeme v racionálnej aproximácii $\sqrt[3]{5}$, aby sme dosiahli presnosť $10^{-k}$?

#### Riešenie

Ospravedlňujem sa za pôvodne chybné uvedenie metódy, správne rekurzia funguje takto:

Definujme $x_n = a_n/b_n$, kde $a_n, b_n,\ n = 1, 2, \ldots$ sú celé čísla. Ďalej definujme

$$x_n = \frac{x_{n-1}^2 + x_{n-1} + p}{x_{n-1}^2 + x_{n-1} + 1}$$

Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{p}$$

Dôkaz konvergencie: vypočítame pevný bod iterácie:

$$x = \frac{x^2 + x + p}{x^2 + x + 1}$$
$$x^3 + x^2 + x = x^2 + x + p$$
$$x^3 = p$$

Ak chceme racionálne aproximácie, jednoducho vyjadrujeme $x_n$ v tvare zlomku. Tu je niekoľko prvých iterácií, štartujúcich z $a_0 = 2,\ b_0 = 1$:

| n | [illegible] | počet číslic | [illegible] |
|---|---|---|---|
| 0 | 2.000000 | 1 | 0.290024 |
| 1 | 1.571429 | 3 | -0.138547 |

| n | $x_n$ | počet číslic | $x_n - \sqrt[3]{5}$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 1.793522 | 6 | 0.083546 |
| 3 | 1.665530 | 12 | -0.044446 |
| 4 | 1.735359 | 25 | 0.025383 |
| 5 | 1.696036 | 50 | -0.013940 |
| 6 | 1.717801 | 100 | 0.007825 |
| 7 | 1.705636 | 202 | -0.004340 |
| 8 | 1.712399 | 404 | 0.002423 |
| 9 | 1.708628 | 808 | -0.001348 |

Vidíme, že zatiaľ čo presnosť aproximácie sa zlepšuje len veľmi pozvoľna, počet číslic v čitateli + menovateli zlomku rastie exponenciálne - zdvojnásobuje sa s každou iteráciou. Takáto iteračná schéma je úplne neužitočná, či už ako spôsob výpočtu tretej odmocniny alebo ako spôsob produkcie racionálnych aproximácií.

Vzhľadom na rýchlo rastúcu dĺžku čitateľov a menovateľov racionálnych aproximácií nejde takúto tabuľku spočítať v Exceli. Ide to ale ľahko v Pythone, ktorý vie počítať s celými číslami s neobmedzenou veľkosťou. Tu je ukážka kódu:

```
# Rational approximation of cube root
# The theorem is:
# Define
#       a_{n-1}^2 + a_{n-1} + b
# a_n = -----------------------
#       a_{n-1}^2 + a_{n-1} + 1
# then a_n converges to cube root of b.

from fractions import Fraction
from math import pow, log10, ceil


def iteration(x:Fraction, b:int) -> Fraction:
    return (x**2 + x + b)/(x**2 + x + 1)


def get_num_digits(x: Fraction) -> int:
    return ceil(log10(x.numerator)) + ceil(log10(x.denominator))


def main() -> None:
    b = 5
    sqrt_b = pow(b, 1/3)
    x = Fraction(2,1)
    print(f"0 {float(x):.6f} {get_num_digits(x)} {x-sqrt_b:.6f}")
    for i in range(1,10):
        x = iteration(x, b)
        print(f"{i} {float(x):.6f} {get_num_digits(x)} {x - sqrt_b:.6f}")

```

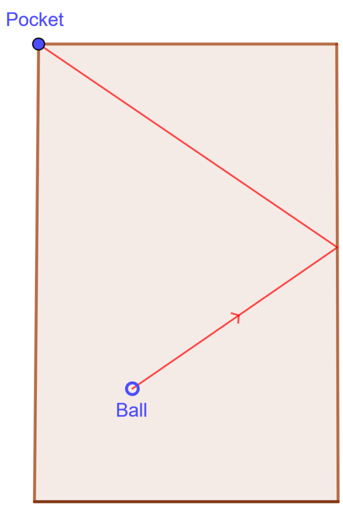
```python

if __name__ == "__main__":
    main()

```

Kód používa typ `Fraction`, čo je racionálne číslo reprezentované ako dvojica celých čísel s neobmedzenou dĺžkou, a podporuje bežné aritmetické operácie so zlomkami.

---

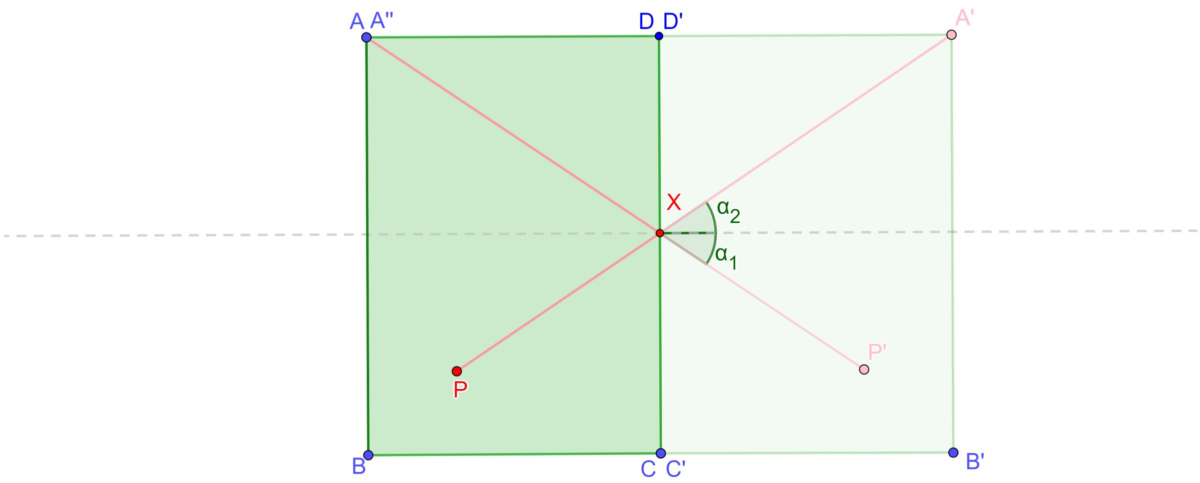
### Príklad 2

Ako poslať biliardovú guľu do ľavého zadného vrecka odrazom od pravého mantinelu?




### Riešenie

Pretože uhol odrazu je rovný uhlu dopadu (na obrázku sú uhly označené iba v zrkadlovom obraze), je situácia symetrická okolo pravej hrany stola AD. V  zrkadlovom svete smeruje dráha gule z bodu P cez bod odrazu X priamo do bodu A´. Podobne dráha zrkadlovej gule z bodu P´ smeruje cez bod X priamo do bodu A´.

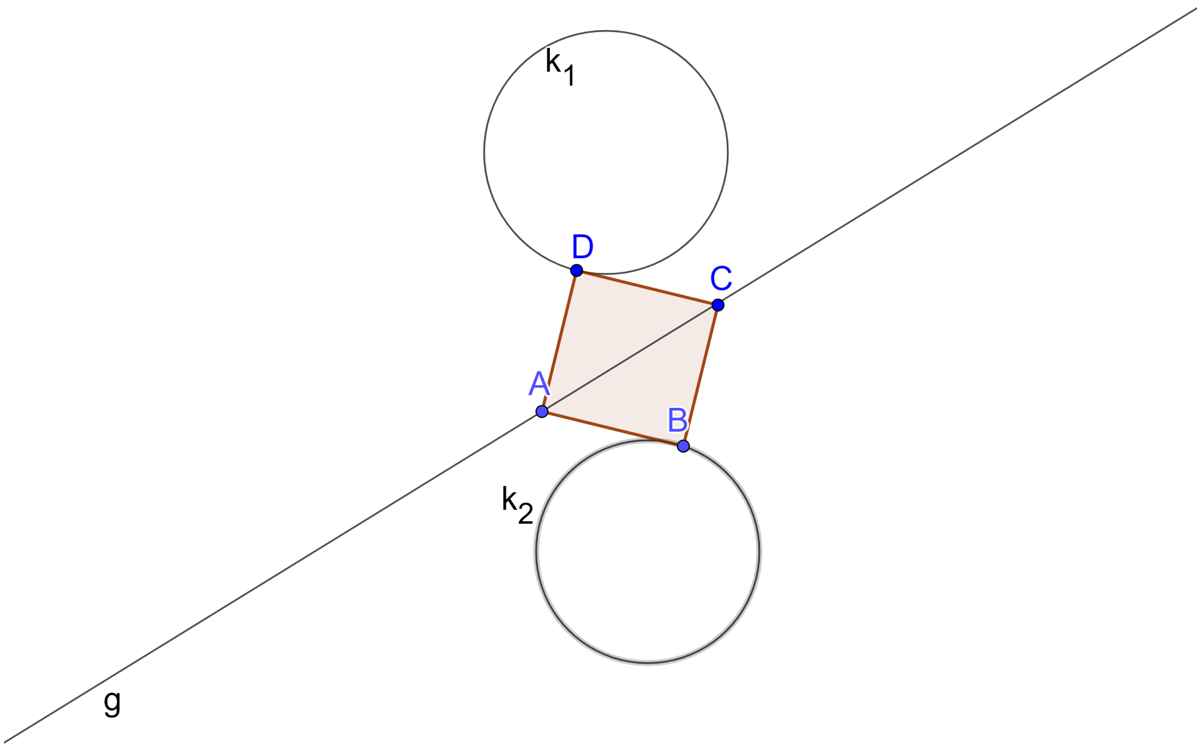



Pre praktickú konštrukciu potrebujeme zostrojiť bod X ako priesečník priamky PA´ s hranou CD.

---

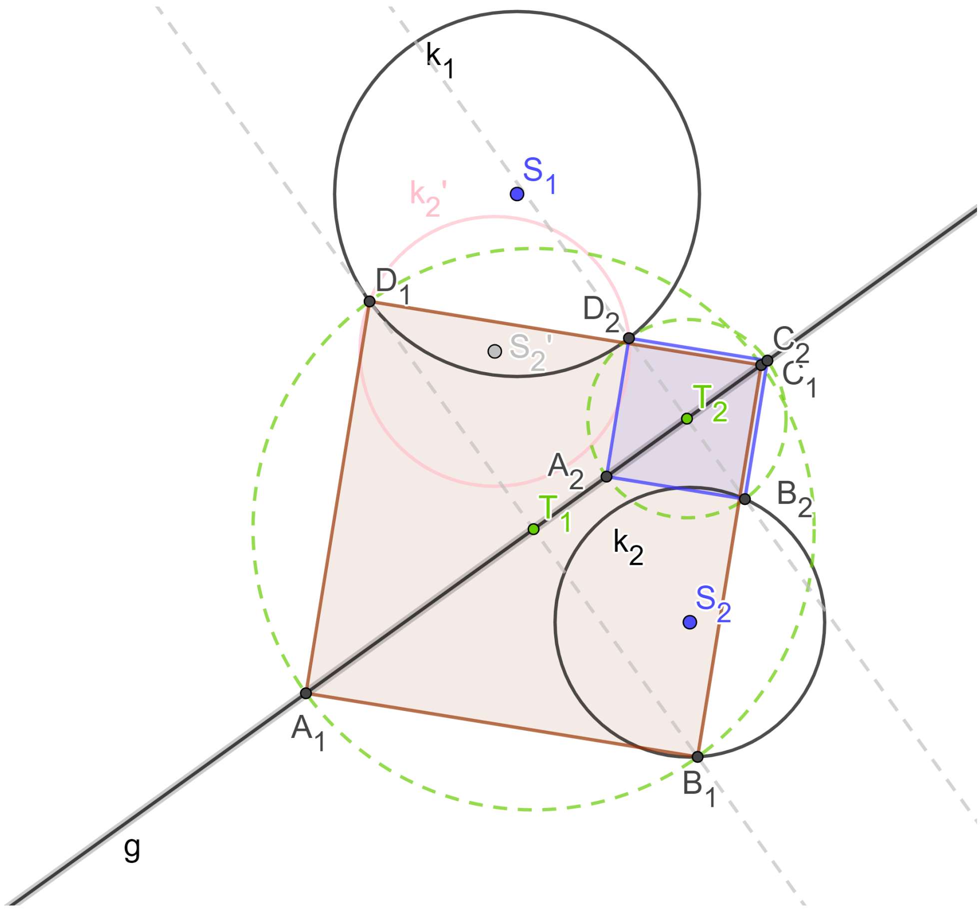
**Príklad 3**

Máme priamku $g$ a dve kružnice $k_1, k_2$. Zostrojte štvorec ABCD tak, že body A, C ležia na priamke $g$, a body B, D po jednom na kružniciach $k_1, k_2$. Koľko riešení má táto úloha v závislosti od vzájomnej polohy priamky a oboch kružníc?




**Riešenie**

Základný riešenia spočíva v zrkadlovej symetrii výsledného štvorca podľa priamky g. Ak zrkadlenie okolo priamky g označíme ako $\sigma_g$, potom platí $D \in k_1, B \in k_2, D = \sigma_g(B) \in \sigma_g(k_2)$. Inak povedané, bod D leží na kružnici $k_1$ i na kružnici $k_2'$. Vieme teda ľahko zostrojiť uhlopriečku štvorca kolmú na priamku g, a zvyšok štvorca skonštruujeme už ľahko.




V konštrukcii na obrázku sme pre konštrukciu štvorca použili kružnicu so stredom v bode T, čo je priesečník BD a priamky g , a priemerom BD. Priesečníky tejto kružnice s priamkou g sú body A, C.

Pretože riešenie hľadáme ako priesečník dvoch kružníc, budeme mať spravidla dve, jedno alebo žiadne riešenie podľa vzájomnej polohy východzích kružníc a priamky g.

## 2. Príklady na zahriatie

**Sínusová veta**

Sínusová veta je ľahko dokázateľný vzťah pre trojuholníky. Majme trojuholník ABC s vnútornými uhlami $\alpha, \beta, \gamma$ po rade pri vrcholoch $A, B, C$, a stranami $a, b, c$ protiľahlým vrcholom $A, B, C$. Nech $r$ je polomer kružnice, opísanej trojuholníku ABC. Potom platí

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

## 3. Geometria

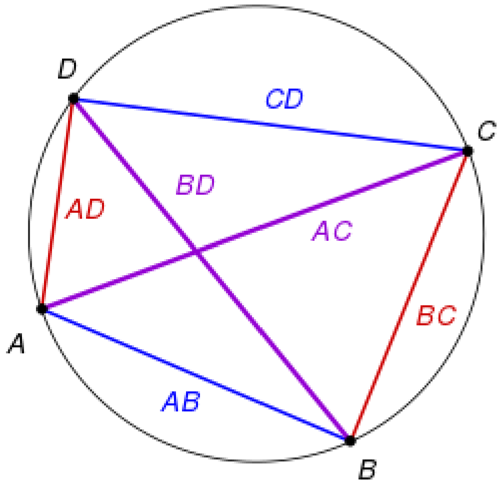
**Sínusová veta**

Sínusová veta je ľahko dokázateľný vzťah pre trojuholníky. Majme trojuholník ABC s vnútornými uhlami $\alpha, \beta, \gamma$ po rade pri vrcholoch $A, B, C$, a stranami $a, b, c$ protiľahlým vrcholom $A, B, C$. Nech $r$ je polomer kružnice, opísanej trojuholníku ABC. Potom platí

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$$

## Ptolemaiova veta

.Ptolemaiova veta je silnejšie tvrdenie ako Pytagorova veta: Pre štvoruholník ABCD vpísaný v kružnici platí




$$|AB||CD| + |AD||BC| = |AD||BC|$$

V skutočnosti platí ešte silnejšie tvrdenie, nazývané niekedy Ptolemaiova nerovnosť: Pre ľubovoľný konvexný štvoruholník ABCD platí

$$|AB||CD| + |AD||BC| \geq |AD||BC|$$

pričom rovnosť nastáva iba ak je štvoruholník ABCD vpísaný v kružnici alebo keď body A, B, C, D ležia na jednej priamke.

## Dôkaz Ptolemaiovej vety

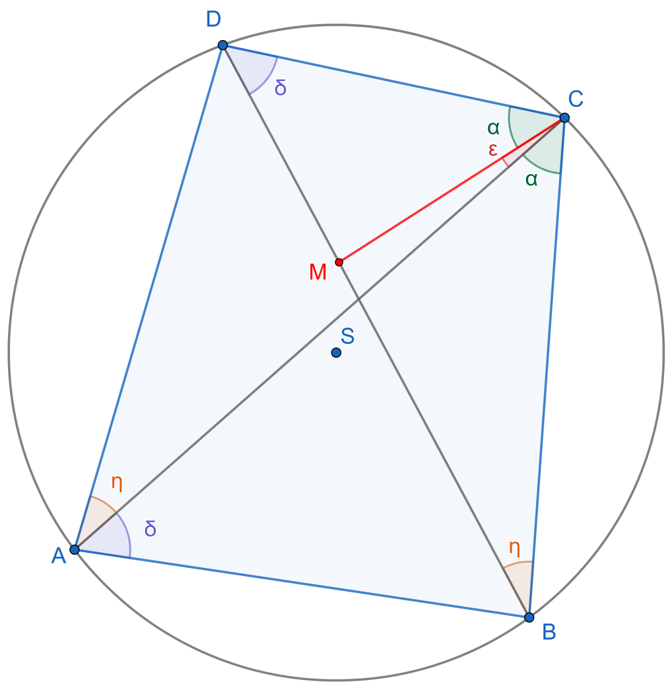
Základný jednoduchý dôkaz: Máme štvoruholník ABCD vpísaný v kružnici. Na uhlopriečke BD nájdeme bod M tak, aby $|\angle ACB| = |\angle MCD|$ (na obrázku označené ako $\alpha$). Uhly $\angle BAC$ a $\angle BDC$ (označené ako $\delta$ sú rovnaké, pretože sú to obvodové uhly zodpovedajúce rovnakej tetive BC.  Pretože trojuholníky ABC a DMC majú rovnaké dva uhly, sú si podobné, a teda platí $CD/MD = AC/AB$, resp.

$$AB \cdot CD = AC \cdot MD$$

Rovnaké sú aj uhly $\angle BCM$ a $\angle ACD$ (oba sú rovné $\alpha + \epsilon$). Ďalej uhly $\angle CAD$ a $\angle CBM$ (označené ako $\eta$ sú rovnaké, pretože sú to obvodové uhly zodpovedajúce rovnakej tetive DC Preto aj trojuholníky BCM a ACD sú si podobné a teda $BC/BM = AC/AD$ čiže

$$AD \cdot BC = AC \cdot BM$$

. Pretože $BM + MD = BD$, dostávame sčítaním oboch vzťahov Ptolemaiovu vetu




$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AD \cdot BC$$

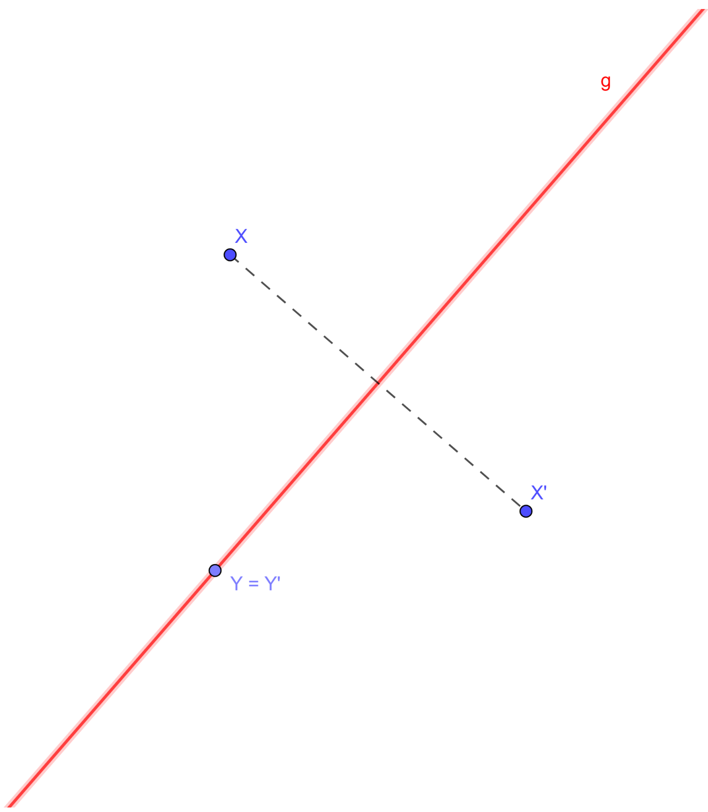
---

## Zrkadlenie

**Definícia**

Majme priamku $g$ a uvažujme takéto zobrazenie $\sigma_g$ Euklidovskej roviny $E_2$ na seba:

- $X \in g: \quad \sigma_g(X) = X$
- $X \notin g: \quad \sigma_g(X) = Y, d(X,g) = d(Y,g) \wedge XY \perp g$




Takéto zobrazenie sa nazýva zrkadlenie okolo osi $g$.

**Tvrdenie 1**

Zrkadlenie je *involúcia*, teda si je samo sebe inverzným zobrazením: $\sigma_g \circ \sigma_g = I$ (identické zobrazenie), resp. $\sigma_g^{-1} = \sigma_g$

**Tvrdenie 2**

Zrkadlenie je *izometria*, teda zachováva vzdialenosti:
$X' = \sigma_g(X), Y' = \sigma_g(Y) \implies d(X,Y) = d(X',Y')$.

Izometrií roviny je 5 (zrkadlenie, posunutie, bodová súmernosť, rotácia, posunutá rotácia) a všetky možno zostrojiť kombináciou niekoľkých zrkadlení.

**Tvrdenie 3**

3a. Všetky body na osi zrkadlenia sú pevnými bodmi zrkadlenia a zrkadlenie nemá žiadne iné pevné body.

3b. Pevné priamky zrkadlenia sú os zrkadlenia a všetky priamky na ňu kolmé.

# Posunutie

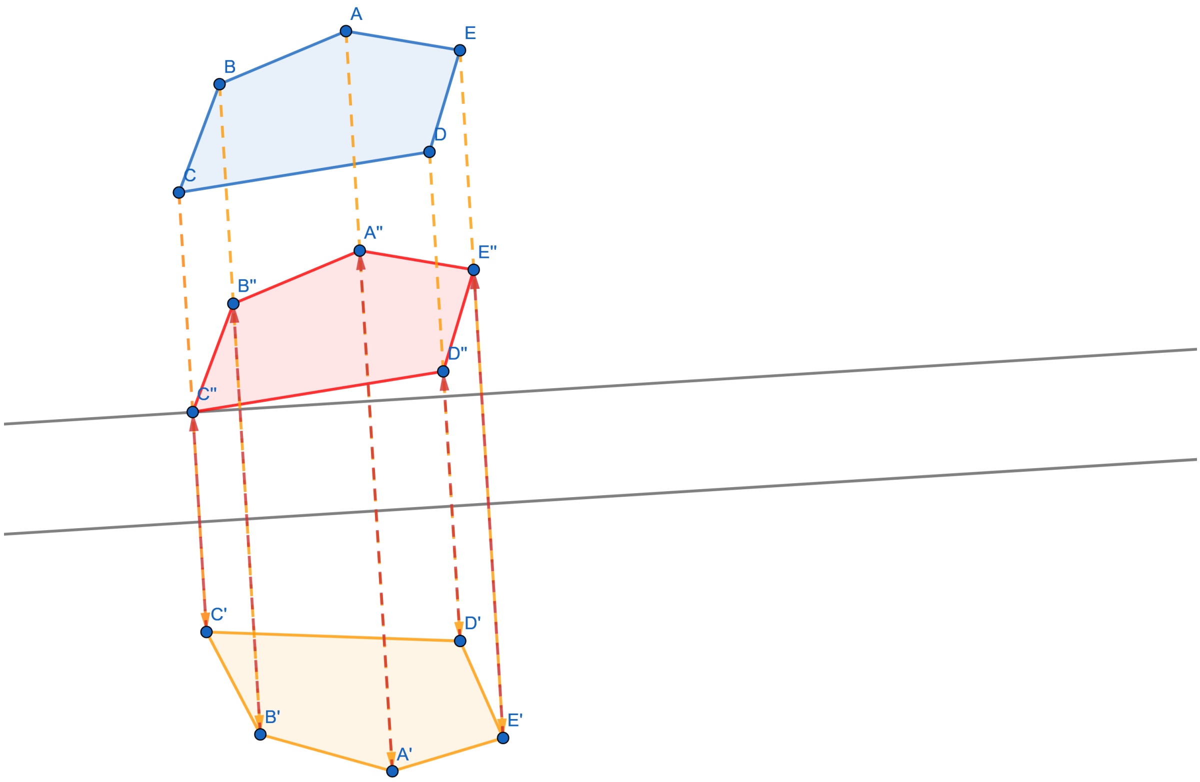
Zložené zobrazenie pozostávajúce z dvoch zrkadlení okolo rovnobežných priamok f a g je posunutie.

Ak zrkadlenia označíme $\sigma_f, \sigma_g$, potom môžeme formálne písať $T = \sigma_g \circ \sigma_f$. Ľahko zistíme, že inverzné zobrazenie je $T^{-1} = \sigma_f \circ \sigma_g$. Skutočne,

$$TT^{-1} = (\sigma_g \circ \sigma_f) \circ (\sigma_f \circ \sigma_g) = \sigma_g \circ (\sigma_f \circ \sigma_f) \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \sigma_g = I$$
$$T^{-1}T = (\sigma_f \circ \sigma_g) \circ (\sigma_g \circ \sigma_f) = \sigma_f \circ (\sigma_g \circ \sigma_g) \circ \sigma_f = \sigma_f \circ \sigma_f = I$$

pretože zrkadlenie je involúcia.

Veľkosť posunutia je dvojnásobok vzdialenosti medzi priamkami a smer je kolmý na obe rovnobežky.




- Posunutie nemá pevný bod
- Pretože je kompozíciou dvoch izometrií, je posunutie tiež izometria.
- Dve priamky rovnobežné s f a g a s rovnakou vzdialenosťou ako medzi f a g realizujú rovnaké posunutie.
- Priamky rovnobežné s posunutím sa zobrazujú na seba.

Posunutie v rovine je vo všetkých bodoch rovnaké, a teda na jeho rekonštrukciu stačí jeden bod a jeho obraz, čo stačí na rekonštrukciu vektora posunutia.

Medzi vektormi a posunutiami je priradenie 1:1, a preto sa niekedy vektor priamo definuje ako posunutie.

## Rotácia

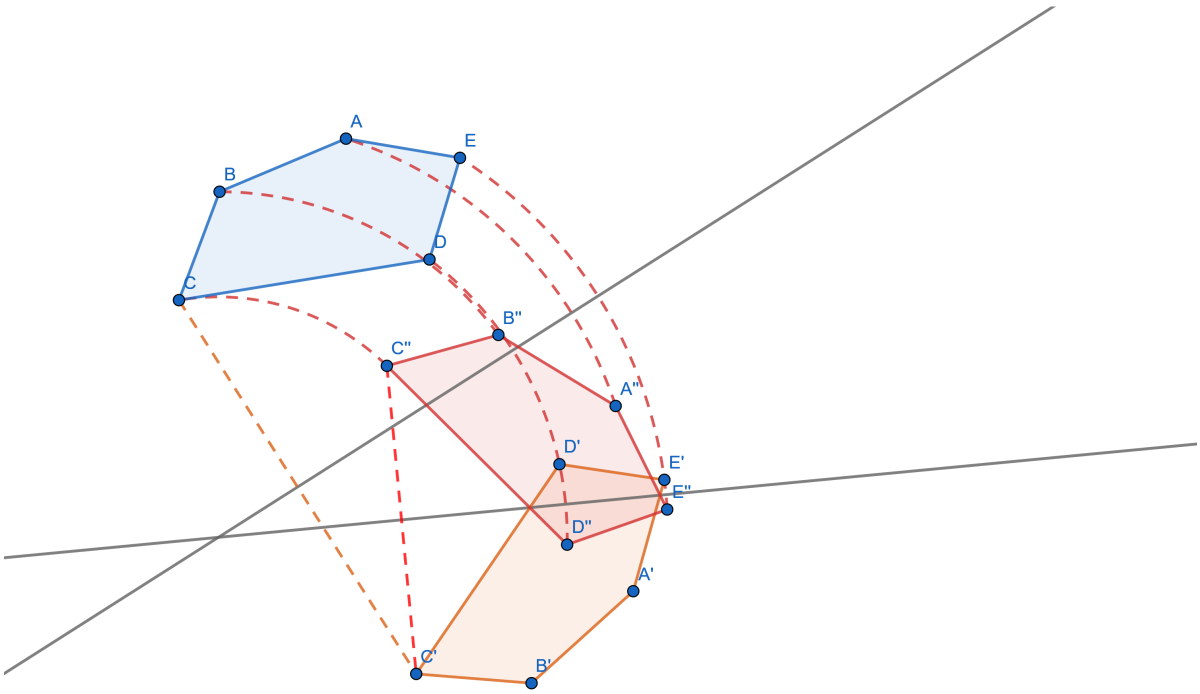
Zložené zobrazenie pozostávajúce z dvoch zrkadlení okolo rôznobežných priamok f a g je rotácia.

Ak zrkadlenia označíme $\sigma_f, \sigma_g$, potom môžeme formálne písať $T = \sigma_g \circ \sigma_f$. Ľahko zistíme, že inverzné zobrazenie je $T^{-1} = \sigma_f \circ \sigma_g$. Skutočne,

$$TT^{-1} = (\sigma_g \circ \sigma_f) \circ (\sigma_f \circ \sigma_g) = \sigma_g \circ (\sigma_f \circ \sigma_f) \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \sigma_g = I$$
$$T^{-1}T = (\sigma_f \circ \sigma_g) \circ (\sigma_g \circ \sigma_f) = \sigma_f \circ (\sigma_g \circ \sigma_g) \circ \sigma_f = \sigma_f \circ \sigma_f = I$$

pretože zrkadlenie je involúcia.

Stred rotácie je priesečník priamok f a g, veľkosť rotácie je dvojnásobok uhla medzi priamkami a smer je daný poradím zrkadlení.




- Rotácia má jediný pevný bod, a to stred otáčania.

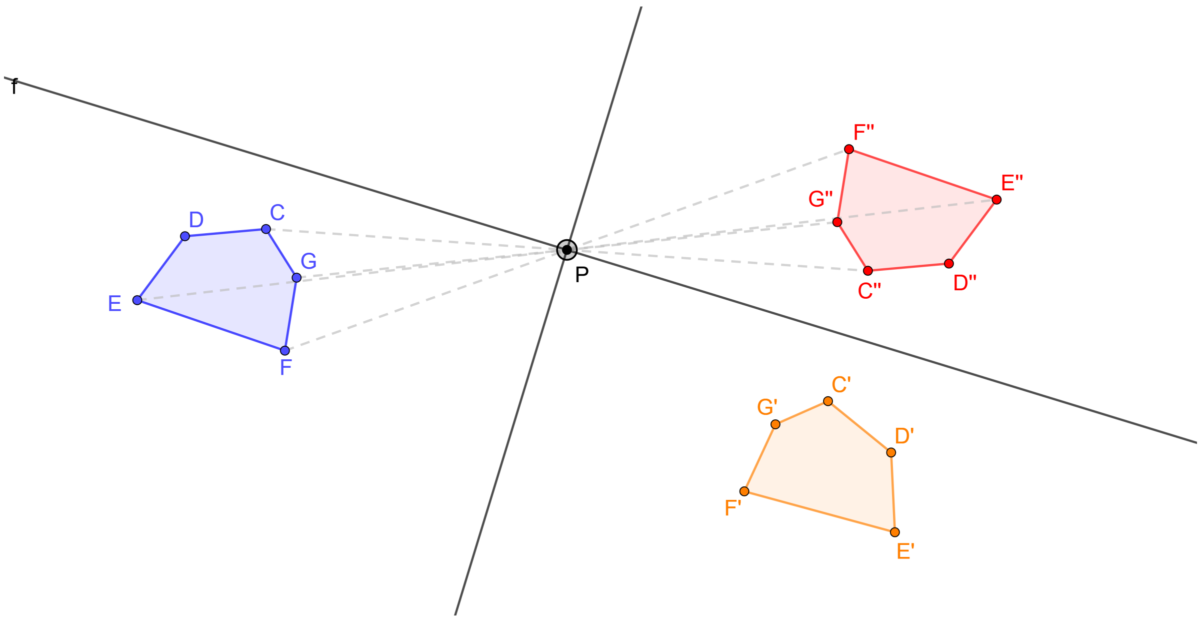
- Pretože je kompozíciou dvoch izometrií, je rotácia tiež izometria.
- Dve priamky prechádzajúce priesečníkom f a g a s rovnakým uhlom ako medzi f a g realizujú rovnakú rotáciu.
- Ak uhol rotácie je $\alpha$, potom rotácia okolo rovnakého stredu o uhol $\alpha + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ je rovnaké zobrazenie.

Na rekonštrukciu rotácie potrebujeme dva body a ich obrazy, pretože musíme zrekonštruovať stred otáčania a jeho uhol.

## Stredová súmernosť

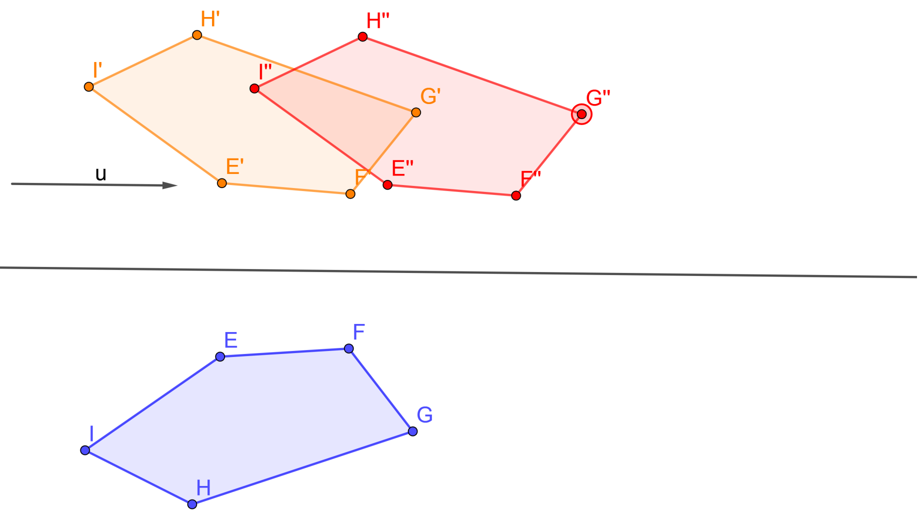
Stredová súmernosť je kompozícia dvoch zrkadlení s navzájom kolmými osami. Ide teda o rotáciu o $2 \times 90^\circ = 180^\circ$.

- Stredová súmernosť je involúcia, teda je rovná svojmu inverznému zobrazeniu.
- Pretože je kompozíciou dvoch izometrií, je stredová súmernosť tiež izometria.
- Stredová súmernosť má pevný bod - stred súmernosti.




## Posunuté zrkadlenie

Posunuté zrkadlenie je kompozícia zrkadlenia a posunutia rovnobežného s osou zrkadlenia, resp. zrkadlenia okolo priamky f a dvoch na ňu kolmých priamok g a h. Ešte v inom vyjadrení je to kompozícia stredovej symetrie a zrkadlenia.




- Posunuté zrkadlenie nemá žiadny pevný bod.
- Pretože je kompozíciou izometrií, je posunuté zrkadlenie tiež izometria.
- Os zrkadlenia je invariantná voči posunutému zrkadleniu (zobrazuje sa sama na seba).

## 5 izometrií roviny

Každú izometriu roviny (teda zobrazenie, zachovávajúce vzdialenosti) vieme vyjadriť ako jedno z piaich základných zobrazení: zrkadlenie, posunutie, rotácia, stredová súmernosť, posunuté zrkadlenie.

- Zrkadlenie
- Posunutie
- Rotácia

- Stredová symetria
- Posunuté zrkadlenie

### Ďalšie tvrdenia

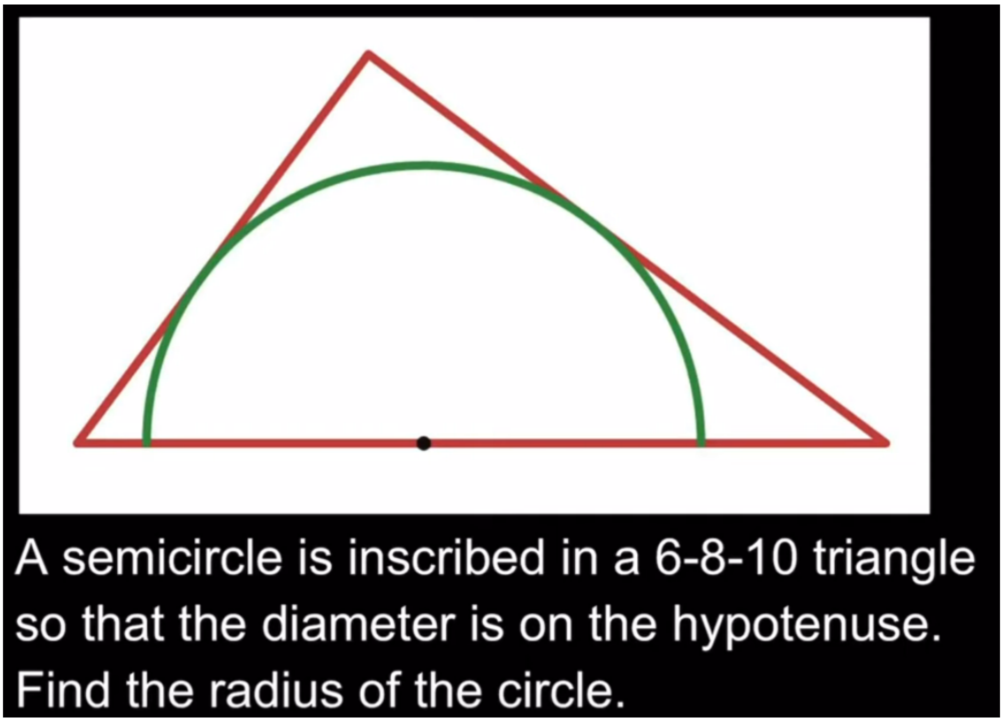
Toto budeme dokazovať nabudúce:

- Každú izometriu môžeme vyjadriť ako kompozíciu najviac troch zrkadlení.
- Každú izometriu môžeme vyjadriť ako kompozíciu posunutia a izometrie s najmenej jedným pevným bodom.
- Kompozícia rotácie a posunutia je rotácia (má pevný bod!)

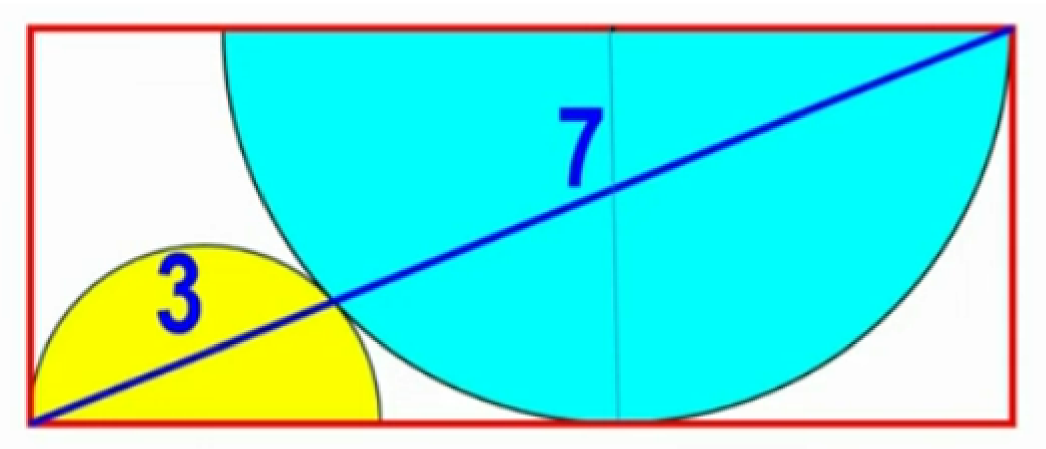
---

## 4. Domáca úloha (nová)

1. Vyriešte.




2. Vypočítajte obsah obdĺžnika.



Návod:

- Hľadáme podobné trojuholníky
- Hľadáme, čo všetko sa rovná priemeru
- Používame Pytagorovu vetu.

# 5. Program na budúci týždeň

- izometrie v rovine: zložitejšie tvrdenia a príklady