Erik 2024-03-01

Friday, March 1, 2024 4:29 PM

Hodina 1..marca ...

Hodina 1. marca 2024

Program

1. Domáca úloha (z minula)
2. Niekoľko príkladov na zahriatie a pozdvihnutie mysli: všelijaké derivácie
3. Minimá a maximá
4. Domáca úloha (nová)
5. Program na budúci týždeň

0. Úvod

Tento text a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári https://github.com/PKvasnick/Erik. Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

Videohovor Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť*.

---

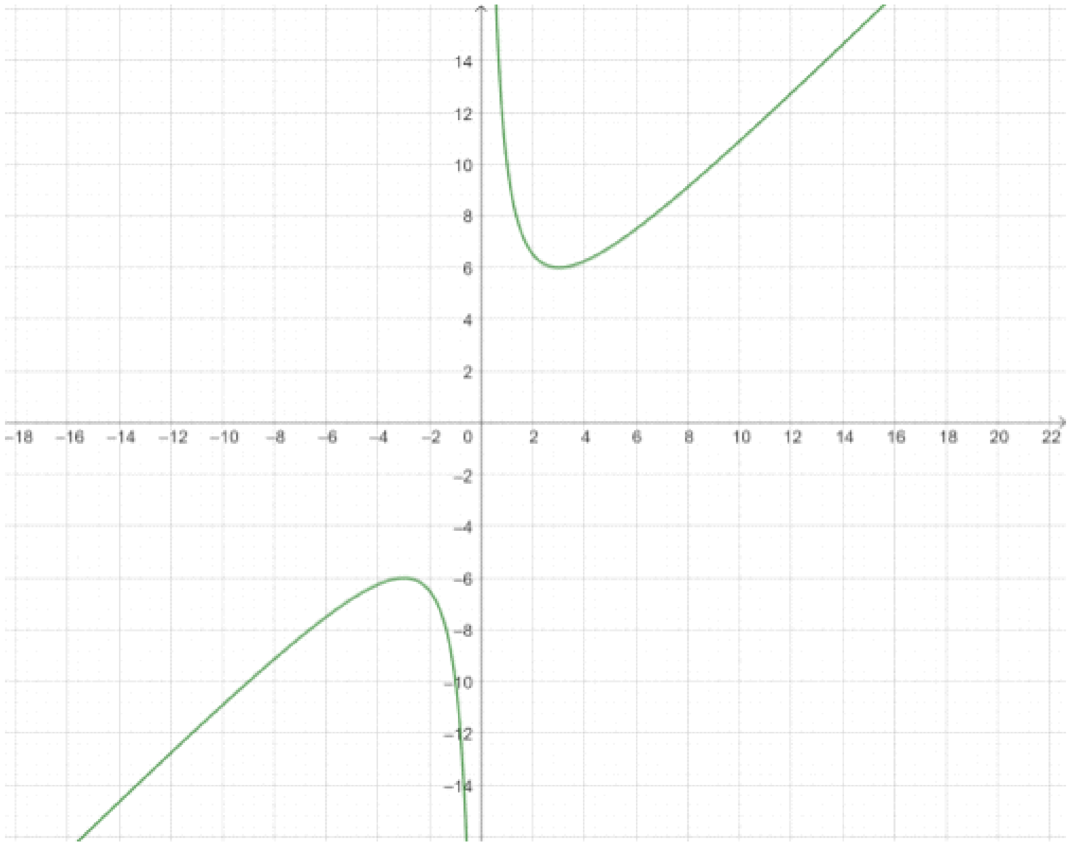
1. Domáca úloha

Príklad 1

Ktorý obdĺžnik má pri konštantnom obsahu najmenší obvod?

Riešenie

Hľadáme maximum $x + y$ za podmienky $xy = S = const.$



Jednoduché riešenie:

$$xy = S \implies y = \frac{S}{x}$$

a teda minimalizujeme funkciu

$$o(x) = x + \frac{S}{x}$$

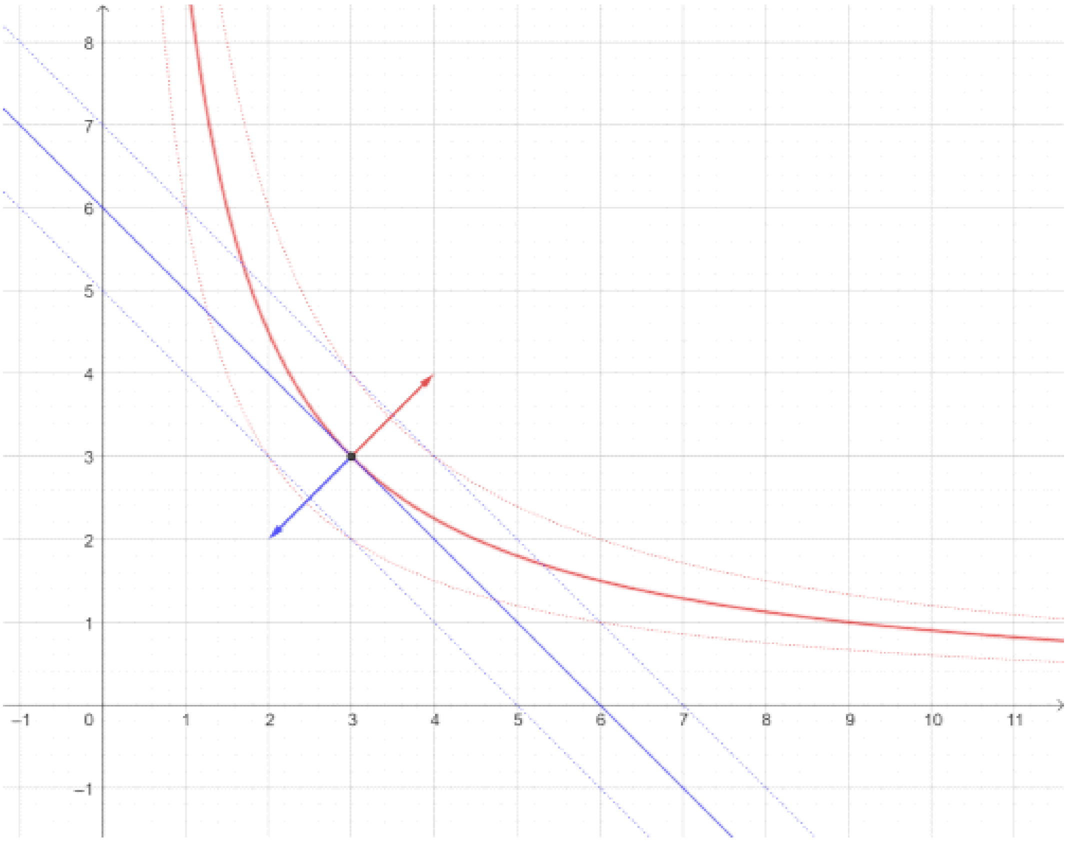
V okolí minima alebo maxima sa funkcia pri malej zmene x prakticky nemení, teda jej dotyčnica v tom mieste má nulovú smernicu, čiže minimum budeme hľadať tam, kde $o'(x) = 0$. Môžeme tak dostať minimum aj maximum, takže sa v riešeniach musíme rozobrať, ktoré je čo.

$$o'(x) = (x + \frac{S}{x})' = 1 + S(x^{-1})' = 1 + S(-1)x^{-2} = 1 - \frac{S}{x^2} = 0$$

$$x = \pm\sqrt{S}$$

Záporné riešenie zahadzujeme (v skutočnosti zodpovedá maximu, ale nespadá do prípustných hodnôt), kladné znamená, že $y = S/x = \sqrt{S} = x$ a teda obdĺžnik s namenším obvodom je štvorec. Kladné riešenie zodpovedá minimu, ako vidieť z grafu. Pretože derivácia $o'(x) = 1 - S/x^2$ je pre $x < \sqrt{S}$ záporná a na opačnej strane kladná, znamená to, že máme minimum.

Systematickejšie riešenie:



Minimum bude tam, kde sa modrá čiara $x + y = const$ dotkne červenej $xy = S$. Inak povedané, v optime musí byť normálový vektor na obmedzenie kolineárny s prírastkom cieľovej funkcie. Ešte inak, dotyčnice k obmedzeniu a k cieľovej funkcii v optime musia mať rovnaký smer. Preto namiesto $o(x, y) = x + y$ optimalizujeme funkciu $L(x, y) = o(x, y) - \lambda(xy - S)$. Derivácie tejto funkcie podľa x, y, λ musia byť nulové:

$$L = x + y - \lambda(xy - S)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \implies 1 - \lambda y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \implies 1 - \lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \implies xy = S$$

takže máme $x = y = 1/\lambda$ a z tretej rovnice máme $\lambda^2 = 1/S \implies \lambda = 1/\sqrt{S}$. Odtiaľ $x = y = \sqrt{S}$ a máme predchádzajúce riešenie.

Príklad 2

Aký najväčší obdĺžnik (v zmysle plochy) vieme vpísať do polkruhu?

Príklad 3

Aký najväčší kužeľ môžeme vpísať do gule? (v zmysle podielu obsahu kužeľa a gule)

Príklad 4

Adam a Barbora 2: Adam s Barborou sa prechádzajú po cestičke pri pláži. Cestička vedie rovnobežne s brehom mora vo vzdialenosti 50 m. Zrazu vietor zhodí Barbore klobúk a odnesie ho presne do bodu K 200 m nižšie na rozhraní pláže a mora. Adam ho chce zachrániť, kým ho spláchne vlna . Po cestičke beží rýchlosťou 8 km/h, ale v piesku len rýchlosťou 3 km/h. Ako dlho má

Adam bežať po cestičke, kým vbehne do piesku, aby sa ku klobúku dostal čo najrýchlejšie?

Niekoľko príkladov na zahriatie a povznesenie mysle

1. Všelijaké derivácie: súčin

Majme funkciu $f(x) \times g(x)$, napríklad $y = x \ln x$. Ako spočítam deriváciu?

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - f(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x(g(x) + f(x)g'(x)$$

$g(x)$ g'

Ešte raz::

$$(f(x)g(x))' = f'(x(g(x) + f(x)g'(x)$$

Príklad

$$(x \ln x)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Vložka: derivácia $\ln x$

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h \, 1/x} = \ln\left(e^{1/x}\right) = \frac{1}{x}$$

2. Všelijaké derivácie: zložené funkcie

Majme funkciu $g \circ f(x) \equiv g(f(x))$. Aká je jej derivácia?

$$(g(f(x)))' = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}$$

Príklad

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(\sqrt{1+x^2})' = \frac{\partial \sqrt{u}}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} = (u^{1/2})' \cdot (2x) =$$

$u = 1 + x^2$

$$= \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}$$

3. Všelijaké derivácie: derivácia inverznej funkcie

Majme funkciu $y = f(x)$ a nech je $x = f^{-1}(y)$ je inverzná funkcia. Formálne:

$$dy = f'(x)dx \quad \therefore \quad dx = \frac{1}{f'(x)}dy$$

takže

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(y)}\Big|_{y=f^{-1}(x)}$$

Najprv píšeme deriváciu v termínoch y, aby bolo jasné, čo sa má derivovať a čo iba dosadiť. Je to trocha jemná argumentácia, treba si osvojiť.

Príklady

$$\frac{1}{e^y}\Big|_{y=\ln x}$$

$$(e^x)' = e^x \quad \therefore \quad (\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} \equiv \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad \therefore \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}$$

4. Všelijaké derivácie: viac premenných

Majme funkciu $z = f(x, y)$. Táto funkcia sa zjavne mení pri zmene x i y, preto má dva druhy derivácií:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Tieto derivácie teda berieme podľa jednej premennej, pričom ostatné premenné držíme na konštantnej hodnote.

Príklad

$$S = -\sum_i p_i \ln p_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial p_i} = -\ln p_i - 1$$

---

5. Všelijaké derivácie: implicitné funkcie

Niekedy máme funkciu, definovanú vzťahom $F(x, y) = 0$ a nie je úplne ľahké vyjadriť y v termínoch x, aby sme mohli derivovať obvyklým spôsobom.

Vtedy postupujeme takto: $F(x, y) = 0$ je konštantná funkcia, takže

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Príklad

$$F(x,y) = \underbrace{x^2}_{2x} + \underbrace{y^2}_{2x} = r^2 \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$d\left(\tfrac{1}{2}y^2\right) \quad d\left(\tfrac{1}{2}x^2\right) \quad d(C)$$

$$y\,dy + x\,dx = 0$$

$$d\left(\tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}x^2 - C\right) = 0$$

$$d\left(\underbrace{\tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}x^2 - C}\right) = 0$$

$$f'(kx) = \lim_{h \to 0} \frac{f(k(x+h)) - f(kx)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(kx+kh) - f(kx)}{kh}$$

6. Všelijaké derivácie: rôzne funkcie

$$= k f'(u)\Big|_{u=kx}$$

$$\underbrace{\frac{df}{\partial kx}} \cdot \underbrace{\frac{dkx}{dx}}_{k}$$

$y = f(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)$
k, any constant	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n, any constant n	nx^{n-1}
e^x	e^x
e^{kx}	ke^{kx}
$\ln x = \log_e x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\sin kx$	$k \cos kx$
$\cos x$	$-\sin x$
$\cos kx$	$-k \sin kx$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\sec^2 x$
$\tan kx$	$k \sec^2 kx$
$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$
$\sec x = \frac{1}{\cos x}$	$\sec x \tan x$
$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\tanh x$	$\operatorname{sech}^2 x$
$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{sech} x \tanh x$
$\operatorname{cosech} x$	$-\operatorname{cosech} x \coth x$
$\coth x$	$-\operatorname{cosech}^2 x$
$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Príklad: Tangens

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = (\sin x)' \frac{1}{\cos x} + \sin x \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = 1 + \sin x \frac{-1}{\cos^2 x}(-\sin x) = \frac{1}{cos^2 x}$$

Príklad: Arkustangens

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'}\Big|_{y=\arctan x} = \cos^2(\arctan x) = \frac{\cos^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x) + \sin^2(\arctan x)}$$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Minimá a maximá

Domáca úloha (nová)

Nájdi prvú deriváciu funkcií (netreba všetko, ale treba prepočítať čo najviac typov a použiť rôzne metódy na kontrolu, kde sa dá.

a)	$y = x^2 + 2x + 1$	**j)**	$y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$	**s)**	$y = \sin x + \cos x + \tan x$
b)	$y = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$	**k)**	$y = \sqrt[3]{x^8} - \sqrt[4]{x^7} + \sqrt[5]{x^6}$	**t)**	$y = \log x - \ln x + \log_5 x$
c)	$y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$	**l)**	$y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x^4}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2x^3}}$	**u)**	$y = 3\arcsin x - 2\arctan x$
d)	$y = -\frac{5x^8}{9} - \frac{8x^7}{13} - \frac{9x^6}{16}$	**m)**	$y = \frac{\sqrt[3]{4x}}{5} + \sqrt[4]{\frac{1}{x^3}}$	**v)**	$y = 5\cot x + 8\arccos x$
e)	$y = (3x-5)^3$	**n)**	$y = \sqrt{x^5} - \sqrt[4]{x^9}$	**w)**	$y = \operatorname{arccot} x - 2\cot x$
f)	$y = (\sqrt{x} - 1)^2 - (x^2 + 1)^4$	**o)**	$y = \sqrt{x\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}$	**x)**	$y = x - \ln x + 1$
g)	$y = x^{11} - x^9 + x^7 - x^5$	**p)**	$y = \sqrt{x^3\sqrt{x^5\sqrt{x^7}}}$	**y)**	$y = 2^x - 3e^x - 4^x$
h)	$y = x^{-5} + x^{-7} + x^{-9} - 11$	**q)**	$y = \frac{5x^{-3}.\sqrt{x^4}.\sqrt[3]{x^5}}{8x^9.\sqrt[5]{x^{-8}}.\sqrt[7]{x^{11}}.\sqrt[9]{x}}$	**z)**	$y = 5\times 9^x - 4\times 5^x + \frac{7^x}{\ln 7}$
i)	$y = \frac{8}{x^8} - \frac{6}{x^6} + \frac{4}{x^4} - \frac{2}{x^2}$	**r)**	$y = \sqrt{\frac{\sqrt[5]{x^7}}{6x^3} + \frac{\sqrt[3]{x^{-8}.\sqrt{x^9}}}{\sqrt{4x\sqrt{x^5}}}}$	**Z)**	$y = -6e^x + 5^x - 5x + \frac{x}{5}$

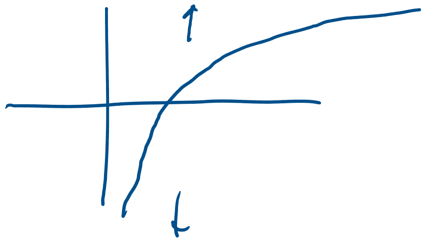
a)	$y = x \ln x$	**j)**	$y = \dfrac{1+x}{1-x}$	**s)**	$y = \dfrac{2x-1}{x+3}$
b)	$y = x^5 e^x$	**k)**	$y = \dfrac{x}{\tan x}$	**t)**	$y = \dfrac{x \ln x}{1-x^2}$
c)	$y = \sin x \cos x$	**l)**	$y = \dfrac{x^2}{\ln x}$	**u)**	$y = \dfrac{x^2 \ln x}{1 - \operatorname{arctan} x}$
d)	$y = 2^x x^2$	**m)**	$y = \dfrac{3^x}{2^x}$	**v)**	$y = \dfrac{x \sin x}{\cos x}$
e)	$y = x \arcsin x$	**n)**	$y = \dfrac{e^x}{x^3}$	**w)**	$y = \dfrac{\sin x \cos x}{\sin x - \cos x}$
f)	$y = \ln x \operatorname{arctan} x$	**o)**	$y = \dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$	**x)**	$y = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$
g)	$y = \sqrt{x} \operatorname{arccos} x$	**p)**	$y = \dfrac{\tan x}{\operatorname{arctan} x}$	**y)**	$y = \dfrac{x-1}{(x^2+2)^2}$
h)	$y = x^2 \operatorname{arccot} x$	**q)**	$y = \dfrac{x^2+2x}{1-x^2}$	**z)**	$y = \dfrac{x \arcsin x}{\operatorname{arctan} x}$
i)	$y = x^2 e^x \sin x$	**r)**	$y = \dfrac{2 \sin x}{\sin x - \cos x}$	**Z)**	$y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

a)	$y = (x^3 + 7x^2 - x + 1)^4$	**j)**	$y = \ln(\arccos 2x)$	**s)**	$y = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$
b)	$y = \sqrt{1+2x-x^2}$	**k)**	$y = 2 \operatorname{arctan} \sqrt{\sin x}$	**t)**	$y = \sqrt{\sin 3x + 5}$
c)	$y = \ln(2x+4)$	**l)**	$y = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x^2}$	**u)**	$y = 5 \sin^2 x - 2 \cos x^3$
d)	$y = \sin x^2$	**m)**	$y = \ln(\ln(\ln x))$	**v)**	$y = \sin^2 x^2$
e)	$y = 3^{\cos x}$	**n)**	$y = \ln^2 x - (\ln(\ln x))$	**w)**	$y = x^2 \sqrt{1+x^2}$
f)	$y = \sqrt{1+e^x}$	**o)**	$y = x \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$	**x)**	$y = x^{e^x}$
g)	$y = \arcsin(\ln x)$	**p)**	$y = \sqrt[3]{\ln(\sin x)}$	**y)**	$y = (\ln x)^x$
h)	$y = \cos(2x+3)$	**q)**	$y = \ln^4(x^2+1)$	**z)**	$y = (\sin x)^{\cos x}$
i)	$y = \operatorname{arctan} \sqrt{e^x - 1}$	**r)**	$y = e^{\sqrt{x}} \sqrt{x^2-1}$	**Z)**	$y = (x^x)^x - x^{(x^x)}$

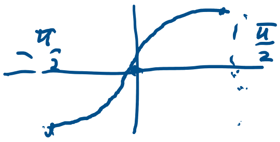
5. Program na budúci týždeň

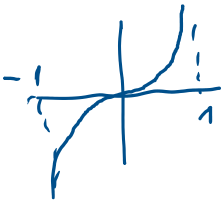
- Budeme riešiť diferenciálne rovnice a integrovať.

$y = \arcsin(\ln x)$



$\ln: \quad x > 0 \Rightarrow (-\infty, \infty)$





$$-1 \leq \ln x \leq 1$$

$$\frac{1}{e} \leq x \leq e$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} \cdot \frac{1}{x}$$