Erik 2024-03-01

Friday, March 1, 2024 4:29 PM

Hodina 1..marca ...

Hodina 1. marca 2024

Program

1. Domáca úloha (z minula)
2. Niekoľko príkladov na zahriatie a pozdvihnutie mysli: všelijaké derivácie
3. Minimá a maximá
4. Domáca úloha (nová)
5. Program na budúci týždeň

0. Úvod

Tento text a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári https://github.com/PKvasnick/Erik. Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

Videohovor Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť*.

---

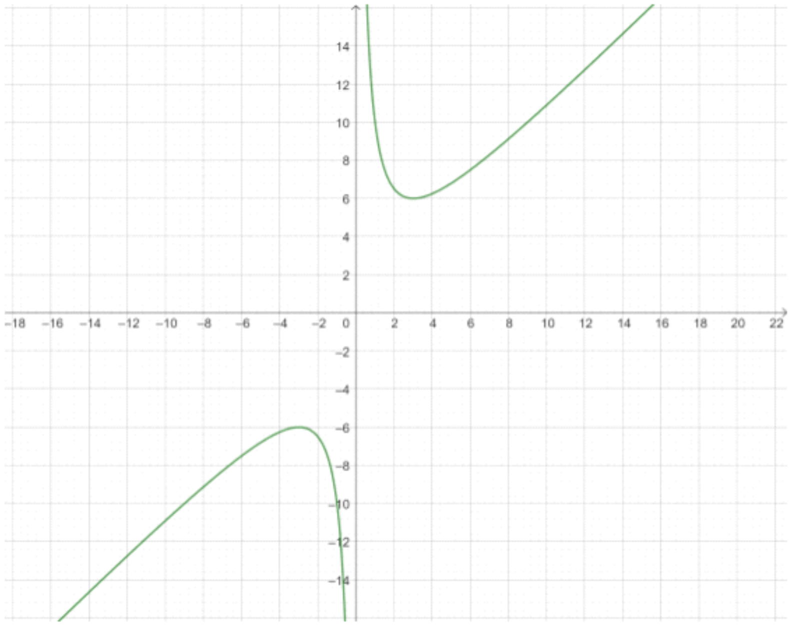
1. Domáca úloha

Príklad 1

Ktorý obdĺžnik má pri konštantnom obsahu najmenší obvod?

Riešenie

Hľadáme maximum $x + y$ za podmienky $xy = S = const.$



Jednoduché riešenie:

$$xy = S \implies y = \frac{S}{x}$$

a teda minimalizujeme funkciu

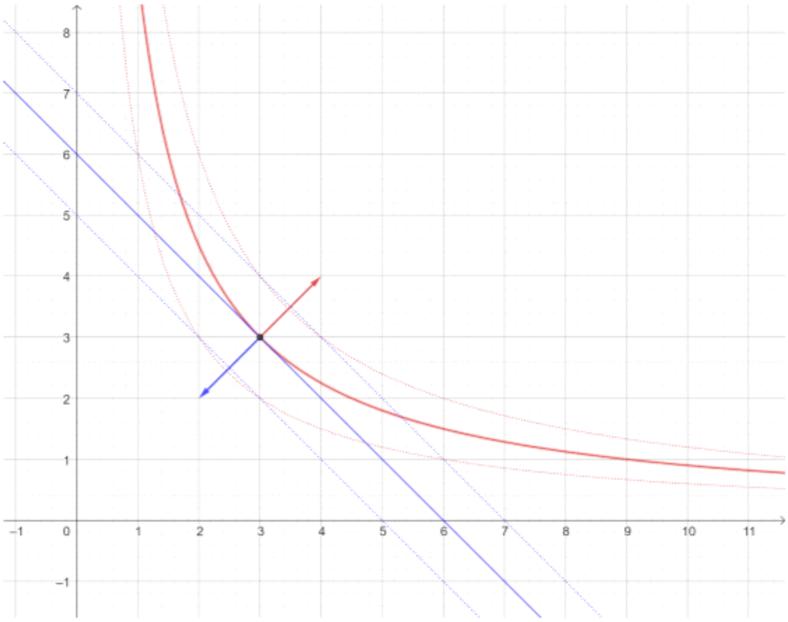
$$o(x) = x + \frac{S}{x}$$

V okolí minima alebo maxima sa funkcia pri malej zmene x prakticky nemení, teda jej dotyčnica v tom mieste má nulovú smernicu, čiže minimum budeme hľadať tam, kde $o'(x) = 0$. Môžeme tak dostať minimum aj maximum, takže sa v riešeniach musíme rozobrať, ktoré je čo.

$$o'(x) = (x + \frac{S}{x})' = 1 + S(x^{-1})' = 1 + S(-1)x^{-2} = 1 - \frac{S}{x^2} = 0$$
$$x = \pm\sqrt{S}$$

Záporné riešenie zahadzujeme (v skutočnosti zodpovedá maximu, ale nespadá do prípustných hodnôt), kladné znamená, že $y = S/x = \sqrt{S} = x$ a teda obdĺžnik s namenším obvodom je štvorec. Kladné riešenie zodpovedá minimu, ako vidieť z grafu. Pretože derivácia $o'(x) = 1 - S/x^2$ je pre $x < \sqrt{S}$ záporná a na opačnej strane kladná, znamená to, že máme minimum.

Systematickejšie riešenie:



Minimum bude tam, kde sa modrá čiara $x + y = const$ dotkne červenej $xy = S$. Inak povedané, v optime musí byť normálový vektor na obmedzenie kolineárny s prírastkom cieľovej funkcie. Ešte inak, dotyčnice k obmedzeniu a k cieľovej funkcii v optime musia mať rovnaký smer. Preto namiesto $o(x, y) = x + y$ optimalizujeme funkciu $L(x, y) = o(x, y) - \lambda(xy - S)$. Derivácie tejto funkcie podľa x, y, λ musia byť nulové:

$$L = x + y - \lambda(xy - S)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \implies 1 - \lambda y = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \implies 1 - \lambda x = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \implies xy = S$$

takže máme $x = y = 1/\lambda$ a z tretej rovnice máme $\lambda^2 = 1/S \implies \lambda = 1/\sqrt{S}$. Odtiaľ $x = y = \sqrt{S}$ a máme predchádzajúce riešenie.

Príklad 2

Aký najväčší obdĺžnik (v zmysle plochy) vieme vpísať do polkruhu?

Príklad 3

Aký najväčší kužeľ môžeme vpísať do gule? (v zmysle podielu obsahu kužeľa a gule)

Príklad 4

Adam a Barbora 2: Adam s Barborou sa prechádzajú po cestičke pri pláži. Cestička vedie rovnobežne s brehom mora vo vzdialenosti 50 m. Zrazu vietor zhodí Barbore klobúk a odnesie ho presne do bodu K 200 m nižšie na rozhraní pláže a mora. Adam ho chce zachrániť, kým ho spláchne vlna . Po cestičke beží rýchlosťou 8 km/h, ale v piesku len rýchlosťou 3 km/h. Ako dlho má

Adam bežať po cestičke, kým vbehne do piesku, aby sa ku klobúku dostal čo najrýchlejšie?

Niekoľko príkladov na zahriatie a povznesenie mysle

1. Všelijaké derivácie: súčin

Majme funkciu $f(x) \times g(x)$, napríklad $y = x \ln x$. Ako spočítam deriváciu?

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x(g(x) + f(x)g'(x)$$

$g(x)$ g'

Ešte raz::

$$(f(x)g(x))' = f'(x(g(x) + f(x)g'(x)$$

Príklad

$$(x \ln x)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Vložka: derivácia $\ln x$

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h \, 1/x} = \ln\left(e^{1/x}\right) = \frac{1}{x}$$

2. Všelijaké derivácie: zložené funkcie

Majme funkciu $g \circ f(x) \equiv g(f(x))$. Aká je jej derivácia?

$$(g(f(x))))' = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}$$

Príklad

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(\sqrt{1+x^2})' = \frac{\partial \sqrt{u}}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} = (u^{1/2})' \cdot (2x) =$$

$u = 1 + x^2$

$$= \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}$$

3. Všelijaké derivácie: derivácia inverznej funkcie

Majme funkciu $y = f(x)$ a nech je $x = f^{-1}(y)$ je inverzná funkcia. Formálne:

$$dy = f'(x)dx \quad \therefore \quad dx = \frac{1}{f'(x)}dy$$

takže

$$\underbrace{(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)}\Big|_{y=f^{-1}(x)}}$$

Najprv píšeme deriváciu v termínoch y, aby bolo jasné, čo sa má derivovať a čo iba dosadiť. Je to trocha jemná argumentácia, treba si osvojiť.

Príklady

$$\frac{1}{e^y}\Big|_{y=\ln x}$$

$$(e^x)' = e^x \quad \therefore \quad (\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} \equiv \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad \therefore \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}$$

4. Všelijaké derivácie: viac premenných

Majme funkciu $z = f(x, y)$. Táto funkcia sa zjavne mení pri zmene x i y, preto má dva druhy derivácií:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Tieto derivácie teda berieme podľa jednej premennej, pričom ostatné premenné držíme na konštantnej hodnote.

Príklad

$$S = -\sum_i p_i \ln p_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial p_i} = -\ln p_i - 1$$

---

5. Všelijaké derivácie: implicitné funkcie

Niekedy máme funkciu, definovanú vzťahom $F(x, y) = 0$ a nie je úplne ľahké vyjadriť y v termínoch x, aby sme mohli derivovať obvyklým spôsobom.

Vtedy postupujeme takto: $F(x, y) = 0$ je konštantná funkcia, takže

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0 \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Príklad

$$F(x,y) = x^2 + y^2 = r^2 \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$2x$ $2x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad d\left(\tfrac{1}{2}y^2\right) \quad d\left(\tfrac{1}{2}x^2\right) \quad d(C)$$

$$y\,dy + x\,dx = 0$$

$$d\left(\tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}x^2 - C\right) = 0$$

$$f'(kx) = \lim_{h\to 0}\frac{f(k(x+h)) - f(kx)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(kx+kh) - f(kx)}{kh}$$

6. Všelijaké derivácie: rôzne funkcie

$$= k f'(u)\big|_{u=kx}$$

$$\underbrace{\frac{df}{\partial kx}} \cdot \underbrace{\frac{dkx}{dx}}_{k}$$

$y = f(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)$
k, any constant	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n, any constant n	nx^{n-1}
e^x	e^x
e^{kx}	ke^{kx}
$\ln x = \log_e x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\sin kx$	$k\cos kx$
$\cos x$	$-\sin x$

$\ln x = \log_e x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\sin kx$	$k \cos kx$
$\cos x$	$-\sin x$
$\cos kx$	$-k \sin kx$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\sec^2 x$
$\tan kx$	$k \sec^2 kx$
$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$	$-\operatorname{cosec} x \cot x$
$\sec x = \frac{1}{\cos x}$	$\sec x \tan x$
$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$-\operatorname{cosec}^2 x$
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\tanh x$	$\operatorname{sech}^2 x$
$\operatorname{sech} x$	$-\operatorname{sech} x \tanh x$
$\operatorname{cosech} x$	$-\operatorname{cosech} x \coth x$
$\coth x$	$-\operatorname{cosech}^2 x$
$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Príklad: Tangens

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = (\sin x)' \frac{1}{\cos x} + \sin x \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = 1 + \sin x \frac{-1}{\cos^2 x}(-\sin x) = \frac{1}{cos^2 x}$$

Príklad: Arkustangens

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'}\Big|_{y=\arctan x} = \cos^2(\arctan x) = \frac{\cos^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x) + \sin^2(\arctan x)}$$
$$= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Minimá a maximá

Domáca úloha (nová)

Nájdi prvú deriváciu funkcií (netreba všetko, ale treba prepočítať čo najviac typov a použiť rôzne metódy na kontrolu, kde sa dá.

a) $y = x^2 + 2x + 1$	**j)** $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$	**s)** $y = \sin x + \cos x + \tan x$
b) $y = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$	**k)** $y = \sqrt[3]{x^8} - \sqrt[4]{x^7} + \sqrt[5]{x^6}$	**t)** $y = \log x - \ln x + \log_5 x$
c) $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$	**l)** $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x^4}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2x^3}}$	**u)** $y = 3\arcsin x - 2\arctan x$ $\quad \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1+x^2}$
d) $y = -\frac{5x^8}{9} - \frac{8x^7}{13} - \frac{9x^6}{16}$	**m)** $y = \frac{\sqrt[5]{4x}}{5} + \sqrt[4]{\frac{1}{x^3}}$	**v)** $y = 5\cot x + 8\arccos x$
e) $y = (3x-5)^3$	**n)** $y = \sqrt{x^5} - \sqrt[4]{x^9}$	**w)** $y = \operatorname{arccot} x - 2\cot x$
f) $y = (\sqrt{x} - 1)^2 - (x^2+1)^4$	**o)** $y = \sqrt{x\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}$	**x)** $y = x - \ln x + 1$ $\quad y' = 1 - \frac{1}{x}$ $1 \;\; \frac{1}{x}$
g) $y = x^{11} - x^9 + x^7 - x^5$	**p)** $y = \sqrt{x^3\sqrt{x^5\sqrt{x^7}}}$	**y)** $y = 2^x - 3e^x - 4^x$
h) $y = x^{-5} + x^{-7} + x^{-9} - 11$	**q)** $y = \frac{5x^{-3} . \sqrt{x^4} . \sqrt[3]{x^5}}{8x^9 . \sqrt[5]{x^{-8}} . \sqrt[7]{x^{11}} . \sqrt[9]{x}}$	**z)** $y = 5 \times 9^x - 4 \times 5^x + \frac{7^x}{\ln 7}$
i) $y = \frac{8}{x^8} - \frac{6}{x^6} + \frac{4}{x^4} - \frac{2}{x^2}$	**r)** $y = \sqrt{\frac{\sqrt[5]{x^7}}{6x^3} + \frac{\sqrt[3]{x^{-8} . \sqrt{x^9}}}{\sqrt{4x\sqrt{x^5}}}}$	**Z)** $y = -6e^x + 5^x - 5x + \frac{x}{5}$

a) $y = x \ln x$

b) $y = x^5 e^x$

c) $y = \sin x \cos x$

d) $y = 2^x x^2$

e) $y = x \arcsin x$

f) $y = \ln x \arctan x$

g) $y = \sqrt{x} \arccos x$

h) $y = x^2 \operatorname{arccot} x$

i) $y = x^2 e^x \sin x$

j) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$

k) $y = \dfrac{x}{\tan x}$

l) $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$

m) $y = \dfrac{3^x}{2^x}$

n) $y = \dfrac{e^x}{x^3}$

o) $y = \dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$

p) $y = \dfrac{\tan x}{\arctan x}$

q) $y = \dfrac{x^2+2x}{1-x^2}$

r) $y = \dfrac{2\sin x}{\sin x - \cos x}$

s) $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$

t) $y = \dfrac{x \ln x}{1-x^2}$

u) $y = \dfrac{x^2 \ln x}{1-\arctan x}$

v) $y = \dfrac{x \sin x}{\cos x}$

w) $y = \dfrac{\sin x \cos x}{\sin x - \cos x}$

x) $y = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

y) $y = \dfrac{x-1}{(x^2+2)^2}$

z) $y = \dfrac{x \arcsin x}{\arctan x}$

Z) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

a) $y = (x^3 + 7x^2 - x + 1)^4$

b) $y = \sqrt{1+2x-x^2}$

c) $y = \ln(2x+4)$

d) $y = \sin x^2$

e) $y = 3^{\cos x}$

f) $y = \sqrt{1+e^x}$

g) $y = \arcsin(\ln x)$

h) $y = \cos(2x+3)$

i) $y = \arctan \sqrt{e^x - 1}$

j) $y = \ln(\arccos 2x)$

k) $y = 2\arctan \sqrt{\sin x}$

l) $y = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x^2}$

m) $y = \ln(\ln(\ln x))$

n) $y = \ln^2 x - (\ln(\ln x))$

o) $y = x \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$

p) $y = \sqrt[3]{\ln(\sin x)}$

q) $y = \ln^4(x^2+1)$

r) $y = e^{\sqrt{x}} \sqrt{x^2-1}$

s) $y = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

t) $y = \sqrt{\sin 3x + 5}$

u) $y = 5\sin^2 x - 2\cos x^3$

v) $y = \sin^2 x^2$

w) $y = x^2 \sqrt{1+x^2}$

x) $y = x^{e^x}$

y) $y = (\ln x)^x$

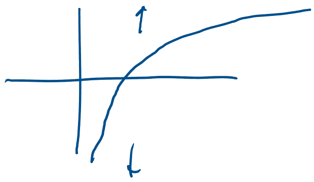
z) $y = (\sin x)^{\cos x}$

Z) $y = (x^x)^x - x^{(x^x)}$

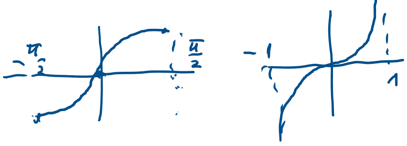
5. Program na budúci týždeň

- Budeme riešiť diferenciálne rovnice a integrovať.

$y = \arcsin(\ln x)$



$\ln : x > 0 \Rightarrow (-\infty, \infty)$



$-1 \leq \ln x \leq 1$

$\frac{1}{e} \leq x \leq e$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} \cdot \frac{1}{x}$$

$(e^x)' = e^x$

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^y}\bigg|_{y=\ln x} = \frac{1}{x}$$

$x^2 + y^2 = r^2$ $\qquad y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} = -\frac{x}{y}$$

$F(x,y) = 0$

$F(x,y) = x^2 + y^2 - r^2$

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) dy = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$y = \sin x + \cos x + tg\, x$

$y' = \cos x - \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$

$y = \arcsin x + \arccos x + \operatorname{arctg} x$

$(\sin x)' = \cos x$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'}\bigg|_{y=\arcsin x} = \frac{1}{\cos y}\bigg|_{y=\arcsin x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\bigg|_{y=\arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin y}\Big|_{y=\arccos x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}\Big|_{y=\arccos x}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\mathrm{arctg}\, x)' = \cos^2 y\big|_{y=\mathrm{arctg}\, x} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y}\Big|_{y=\mathrm{arctg}\, x} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1}} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}$$

$$\frac{1}{a+bx+cx^2}$$ ak nemá reálne korene

ak má RK

$$(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$

$$(\arcsin x + \arccos x + \mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\cot x)' = \left(\frac{1}{\mathrm{tg}\, x}\right)' = -\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\mathrm{arccot}\, x)' = \frac{1}{(\cot y)'}\Big|_{y=\mathrm{arccot}\, x} = -\sin^2 y\Big|_{y=\mathrm{arccot}\, x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}\Big|_{y=\dots} = -\frac{1}{1+\cot^2 x}\Big|_{y=\mathrm{arccot}} =$$

$$= -\frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \sqrt{x}\arccos x$$

$$y' = (\underbrace{\sqrt{x}}_{x^{1/2}})'\arccos x + \sqrt{x}(\arccos x)' =$$

$$= \frac{1}{2}x^{-1/2}\arccos x - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\arccos x - \dots$$

$$\tanh = \mathrm{tg}(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

$$y' = \frac{(e^x+1)'}{e^x-1} + (e^x+1)\left(\frac{1}{e^x-1}\right)' =$$

$$(y^{-1})' = (-1)y^{-1-1} = -\frac{1}{y^2}$$

$$= \frac{e^x}{e^x-1} - (e^x+1)\cdot\frac{1}{(e^x-1)^2}e^x =$$

y

$$= \frac{e^x}{e^x-1} - (e^x+1)\cdot\frac{1}{(e^x-1)^2}\, e^x =$$

$$= \frac{e^x}{e^x-1}\left[1 - \frac{e^x+1}{e^x-1}\right] =$$

$$= \frac{e^x}{e^x-1}\left[\frac{\cancel{e^x}-1-\cancel{e^x}-1}{e^x-1}\right] = -\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$y = e^{\sqrt{x}}\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\sqrt{x^2-1} + e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(e^{\sqrt{x}})' = e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$(\sqrt{x^2-1})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

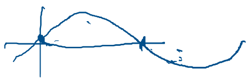
$$y = (\ln x)^x = e^{x\ln(\ln x)}$$

$$y' = (e^{x\ln\ln x})' = e^{x\ln\ln x}\cdot(x\ln\ln x)'$$

$$(x\ln\ln x)' = \ln\ln x + x\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \ln\ln x + \frac{1}{\ln x}$$

$$= (\ln x)^x\cdot\left(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x}\right)$$

$$y = (\sin x)^{\cos x} = e^{\ln\sin x\cdot\cos x}$$



$$y' = e^{\ln\sin x\cdot\cos x}\cdot\left[\underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{}\underbrace{\cos^2 x}_{u'\cos x} + \ln\sin x\,(-\sin x)\right]$$

$$= (\sin x)^{\cos x}\left[\overbrace{\frac{\cos^2 x}{\sin x}}^{(\ln u)'} - \sin x\ln\sin x\right]$$

$$y = (x^x)^x + x^{x^x} = e^{x^2\ln x} + e^{x^x\ln x}$$

$$(x^2\ln x)' = 2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = [2x\ln x + x$$

$$(x^x\ln x)' = (e^{x\ln x}\ln x)' = e^{x\ln x}\left[\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right]\ln x$$

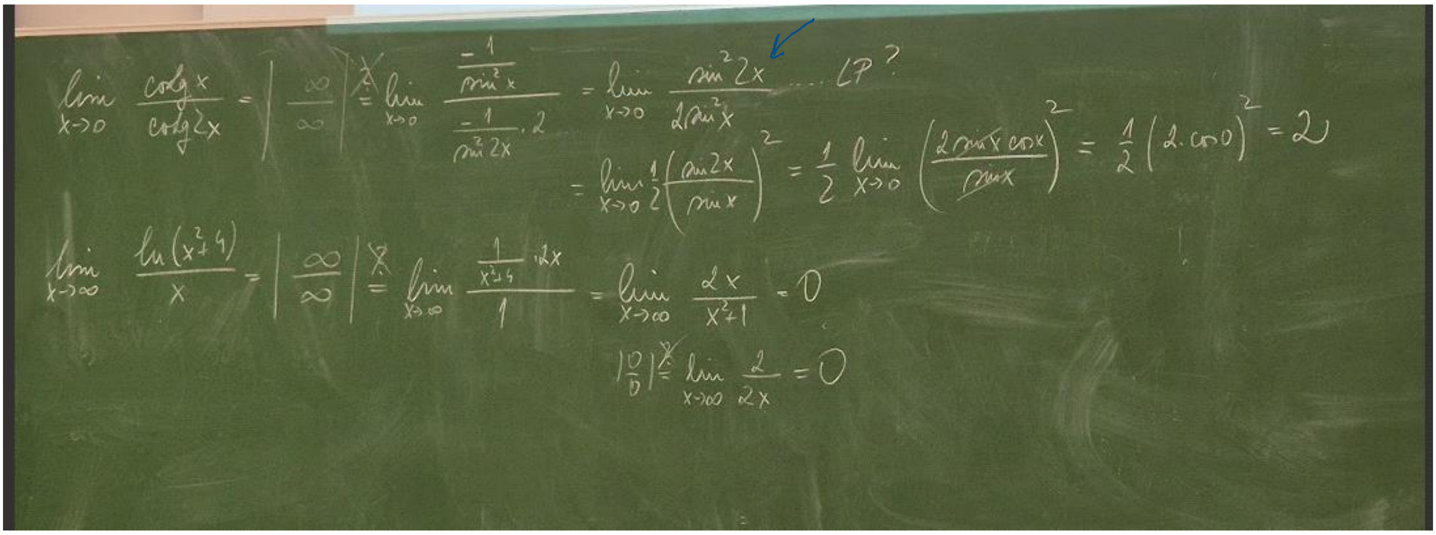
$$+ e^{x\ln x}\cdot\frac{1}{x} = x^x(\ln^2 x + \ln x) + x^x =$$

$$= x^x(\ln^2 x + \ln x + 1)$$

$$= (x^x)^x[2x\ln x + x] + x^{(x^x)}\cdot x^x(\ln^2 x + \ln x + 1)$$

$= (x^x)' \, [2x \ln x + x] + x \cdot x \, (\ln x + \ln x + \dots)$

peter.kvasnicka@matfyz.cuni.cz



$$\lim_{x\to 0} \frac{\cot g\, x}{\cot g\, 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\cos 2x}{\sin 2x}} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\cos x}{\cos 2x}}_{1/1} \cdot \frac{\overset{\sim x}{\sin x}}{\underset{\sim 2x}{\sin 2x}} = \frac{1}{2}$$

$$\cot g\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\sin x = x + O(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0} \underset{0/0}{\frac{\sin x}{\sin 2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+4)}{x} = 0$$

$$\frac{\log(10^{2\cdot 6}+4)}{10^6} \approx \frac{12}{10^6}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+4)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2+4}\cdot 2x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+4} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{2}{x}}_{0} \underbrace{\frac{1}{1+\frac{4}{x^2}}}_{1} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)}_{e}^{\overbrace{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}^{1}} = e$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = e$$

$$\lim \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim e^{\overset{\infty}{x} \ln(1+\overset{0}{\frac{1}{x}})} = e^{\lim_{x\to\infty} \overbrace{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}^{1}} = e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e$$

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\varepsilon}\ln x \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}} =$$

$$= \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\lim_{x\to 0} x^{\cancel{-1}+\varepsilon\cancel{+1}} = -\frac{1}{\varepsilon}\lim_{x\to 0} x^{\varepsilon} \begin{cases} 0, & \varepsilon>0 \\ 1, & \varepsilon=0 \\ \infty, & \varepsilon<0 \end{cases}$$

$$\varepsilon \neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x+2} = e^3$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x+2} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}_{1}\cdot\Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}_{e}\Big]^3$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}} = \lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}}_{1}\Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}_{e}\Big]^{1/4} = 1^{1/4}e^{1/4}$$