Hodina 1. decembra 2023

Program:

1. Domáca úloha (z minula)
2. Niekoľko príkladov na zahriatie a pozdvihnutie mysli: Ešte bude trocha projektívnej geometrie.
3. Afínna geometria a komplexné čísla.
4. Domáca úloha (nová)
5. Program na budúci týždeň

0. Úvod

Tento text a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári https://github.com/PKvasnick/Erik. Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

Videohovor Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť*.

1. Domáca úloha

Príklad 1

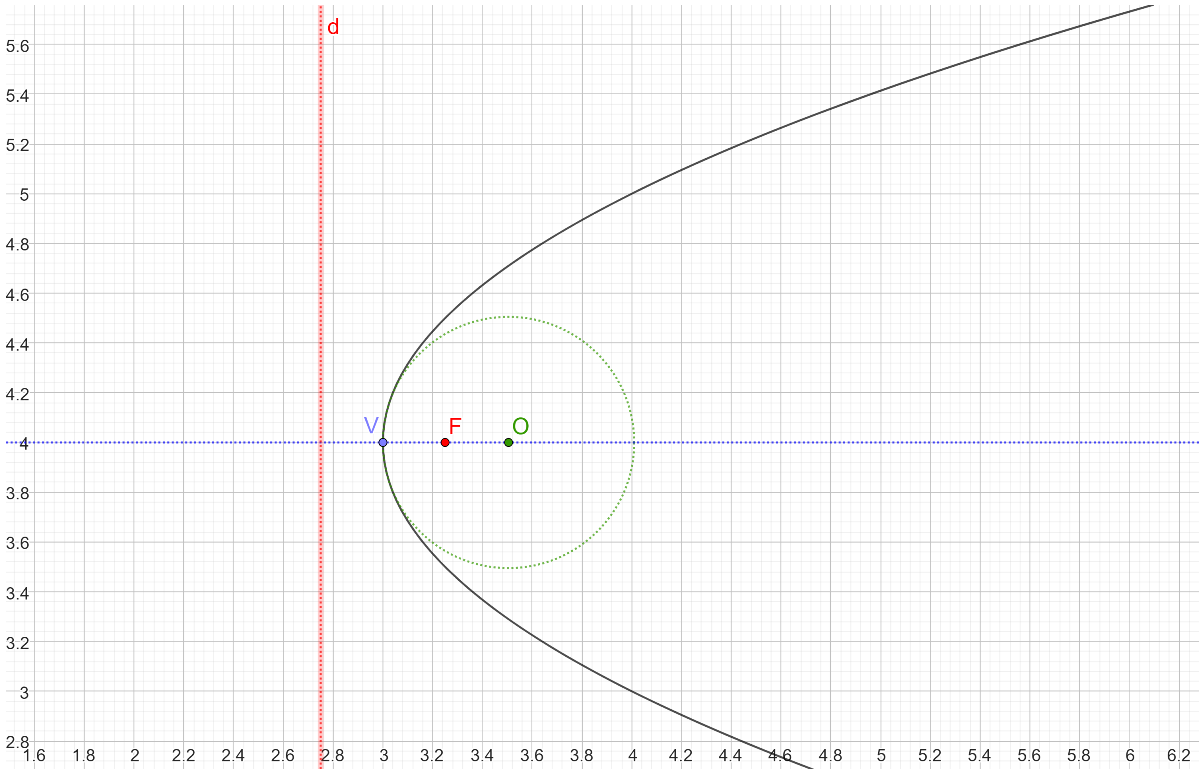
Máme kvadratickú formu $y^2 - 8y - x + 19 = 0$, ktorá popisuje parabolu v rovine. Nájdte vrchol paraboly, ohnisko, smerovú priamku (pre ohnisko a riadiacu priamku platí, že body na parabole majú rovnakú vzdialenosť od ohniska a riadiacej priamky), a os paraboly.

Riešenie

Upravíme výraz na normálny tvar $(y - v_x)^2 - a(x - v_x) = 0$:

$$(y-4)^2 - (x-3) = 0$$

Teda vrchol paraboly leží v bode $V = (3, 4)$, tvarový parameter $a = 1$ a os paraboly je priamka $y = 4$.



Ohnisko a riadiaca priamka (directrix) sú viazané definíciou paraboly: Parabolu tvoria body, ktoré sú rovnako vzdialené od riadiacej priamky a od ohniska.

Ako zistíme ohnisko? Zvolíme si vrchol paraboly a bod $X = (3 + 1, 4 - 1)$. Rovnica riadiacej priamky bude $x = 3 - f$ a ohnisko bude mať súradnice $F = (3 + f, 4)$. Pretože je os paraboly rovnobežná s osou x, počítajú sa všetky vzdialenosti ľahko. Pre vrchol paraboly automaticky platí, že je rovnako vzdialený od ohniska ako od riadiacej priamky (cez definíciu). Takže potrebujeme iba vypočítať f z rovnosti vzdialeností pre dodatočný bod X:

$$d^2(X, F) = (1 - f)^2 + 1 \quad d^2(X, d) = (1 + f)^2$$

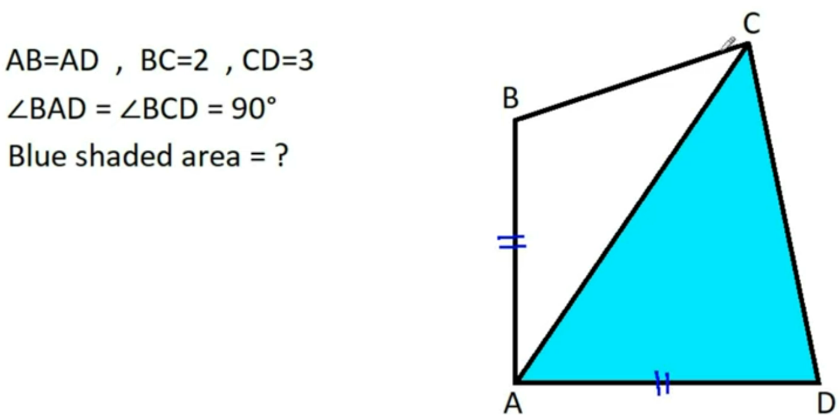
$$1 - 2f + f^2 + 1 = 1 + 2f + f^2 \implies 4f = 1, \quad f = \frac{1}{4}$$

Teda riadiaca priamka je $d : x = 11/4$ a ohnisko $F = (13/4, 4)$.

Polomer krivosti a stred oskulačnej kružnice vo vrchole paraboly nájdeme tak, že zvolíme dva body symetricky okolo vrcholu, a cez ne a vrchol paraboly zostrojíme kružnicu. Keď body približujeme k vrcholu, blíži sa polomer a stred kružnice hľadaným hodnotám.

Príklad 2

Vyriešte.



Riešenie

Začneme Ptolemaiom (dva protiľahlé pravé uhly znamenajú, že DB je priemer opísanej kružnice ergo že taká existuje):

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$
$$AB \cdot 5 = AC \cdot BD$$

BD je spoločná prepona, teda

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = BC^2 + CD^2 = 13$$
$$AB = AD = \sqrt{\frac{13}{2}}$$
$$BD = \sqrt{13}$$
$$R = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

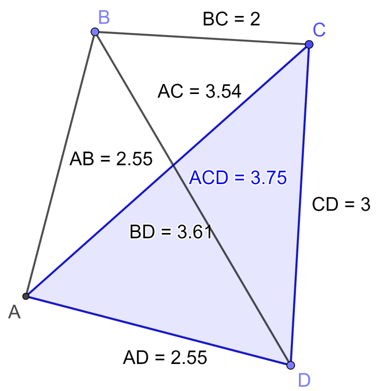
kde R je polomer opísanej kružnice. Z prvej rovnice nakoniec máme

$$AC = \frac{5 \cdot AB}{BD} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Poznáme strany a polomer opísanej kružnice, takže použijeme vzťah:

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{\sqrt{\frac{13}{2}} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot 3}{2\sqrt{13}} = \frac{15}{4}$$

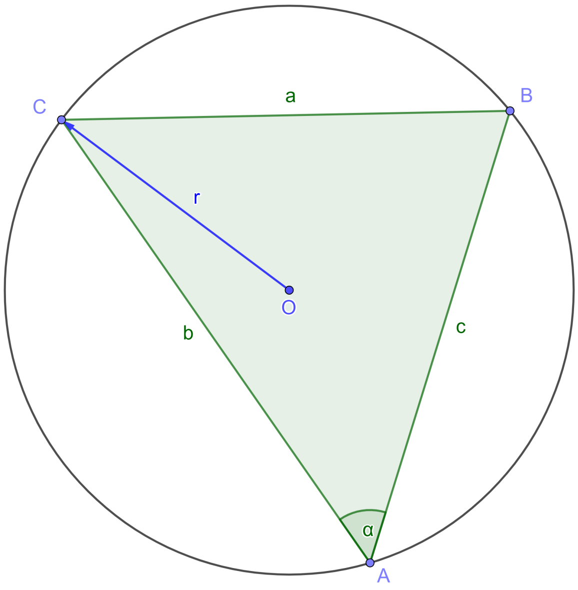
Nakreslíme:



Niekde by tu mal byť dôkaz vzťahu pre výpočet plochy trojuholníka zo strán a polomeru opísanej kružnice.

Tu je:

Majme kružnicu o polomere 2r, opísanú trojuholníku ABC.



Plocha trojuholníka ABC je

$$S = \frac{1}{2} b v_b = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

Pre $\sin \alpha$ máme vyjadrenie zo sínusovej vety:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{1}{2r}$$

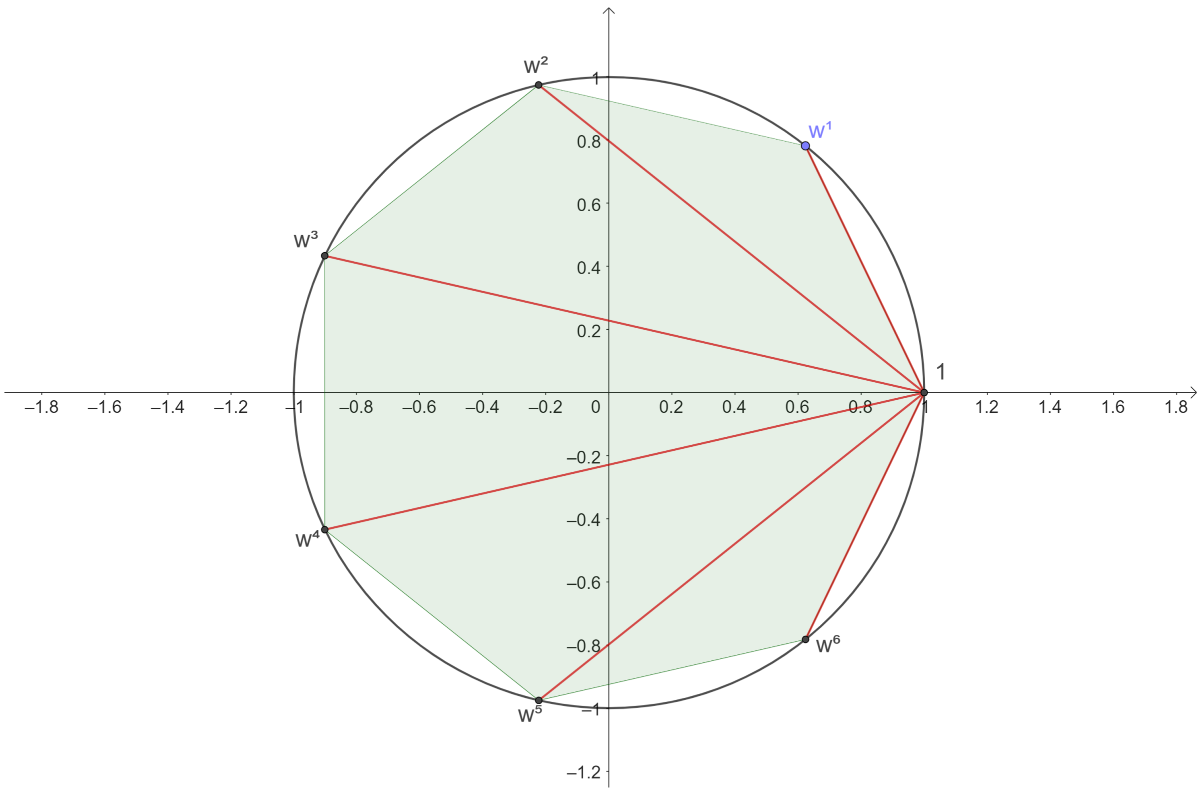
a z toho dostávame výraz pre plochu trojuholníka v termínoch strán a polomeru opísanej kružnice:

$$S = \frac{1}{2} bc \frac{a}{2r} = \frac{abc}{4r}$$

---

2. Príklady na zahriatie

Súčin uhlopriečok pravidelného n-uholníka



Tvrdenie Nakreslime pravidelný n-uholník vpísaný do jednotkového kruhu. Pospájajme jeden jeho vrchol so všetkými ostatnými. Potom súčin dĺžok všetkých týchto úsečiek je n.

Dôkaz

V komplexnej rovine sú vrcholy pravidelného n-uholníka, vpísaného do jednotkovej kružnice, riešeniami rovnice $z^n - 1 = 0$. Korene rovnice sú

$$w_0 = 1 \quad w \equiv w_1 = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right) \quad w_k = \exp\left(\frac{2\pi k i}{n}\right) = w^k,\ k = 0, 1, \dots n-1$$

Súčin diagonál potom bude

$$|1-w||1-w^2|\dots|1-w^{n-1}|$$

Pomocné tvrdenie 1: $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Dôkaz:

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Pomocné tvrdenie 2: $|z_1||z_2| = |z_1 z_2|$. Dôkaz:

$$|z_1||z_2| = \sqrt{z_1\bar{z}_1}\sqrt{z_2\bar{z}_2} = \sqrt{z_1\bar{z}_1 z_2\bar{z}_2} = \sqrt{z_1 z_2 \bar{z}_1\bar{z}_2} = |z_1 z_2|$$

Teda súčin diagonál je

$$|(1-w)(1-w^2)\dots(1-w^{n-1})|$$

Teraz napíšeme $z^n - 1$ dvoma spôsobmi:

1. Poznáme korene, takže môžeme faktorizovať:

$$z^n - 1 = (z-1)(z-w)(z-w^2)\dots(z-w^{n-1})$$

2. Použijeme všeobecný vzťah

$$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + 1)$$

Teda platí:

$$(z-w)(z-w^2)\dots(z-w^{n-1}) = z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+1$$

Požadované tvrdenie odtiaľ dostaneme dosadením $z=1$:

$$|(1-w)(1-w^2)\dots(1-w^{n-1})| = |1^{n-1}+1^{n-2}+\dots+1| = n$$

Domáca úloha z textu: Transformácie v rovine

Osová súmernosť

Vieme ľahko napísať zrkadlenie okolo súradnicových osí: Obraz bodu $A=[x,y]$ v zrkadlení okolo osi x je $A'=[x,-y]$ a v zrkadlení okolo osi y $A''=[-x,y]$.

Normálová rovnica priamky

Už sme mali parametrickú rovnicu priamky, prechádzajúcej bodmi A, B: $\mathbf{X} = \mathbf{A}+t(\mathbf{B}-\mathbf{A})$. Iný tvar rovnice priamky získame, ak máme normálový vektor $\vec{n} \equiv$ kolmý na priamku) a bod $\mathbf{A}$, ktorým priamka prechádza. Pre ľubovoľný bod $\mathbf{X}$ na priamke platí $\vec{n}\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{A}) = 0$. Odtiaľ

$$n_x(x-a_x)+n_y(y-a_y) = 0 \implies n_x x + n_y y - (a_x n_x + a_y n_y) = 0$$

a teda priamka v rovine má rovnicu $ax+by+c=0.$, kde a, b sú súradnice normálového vektora a

Majme teda v rovince priamku $f: ax+by+c=0$ a zostrojme obraz ľubovoľného bodu $\mathbf{X}$ v zrkadlení σ_f okolo priamky f. Budeme postupovať ako pri geometrickej konštrukcii, teda spustíme kolmicu, nájdeme priesečník $\mathbf{F}$ a zostrojíme obraz v rovnakej vzdialenosti na opačnej strane priamky.

Pre nájdenie priesečníka môžeme použiť parametrickú rovnicu priamky:

$$\mathbf{F}\in f \implies \vec{n}\cdot(\mathbf{F}-\mathbf{A}) = 0, \quad \mathbf{F} = \mathbf{X}-t\vec{n}$$
$$\vec{n}\cdot(\mathbf{X}-t\vec{n}-\mathbf{A}) = 0 \implies t = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{A}) = \frac{ax+by+c}{a^2+b^2}$$

Teraz už ľahko vpočítame súradnice bodu $\mathbf{F}$ a $\mathbf{X}'$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{X}-\frac{\vec{n}\vec{n}\cdot}{|\vec{n}|^2}(\mathbf{X}-\mathbf{A}) = \mathbf{X}-\mathbf{P_n}(\mathbf{X}-\mathbf{A})$$
$$\mathbf{X}' = \mathbf{X}-2\frac{\vec{n}\vec{n}\cdot}{|\vec{n}|^2}(\mathbf{X}-\mathbf{A}) = \mathbf{X}-2\mathbf{P_n}(\mathbf{X}-\mathbf{A})$$

kde $\mathbf{P_n}$ je projektor do smeru $\vec{n}$ - je to teda matica, projektujúca vektor do smeru vektora $\vec{n}$. Notácia je tu trocha nešikovná, pretože potrebujeme rozlišovať riadkové a stĺpcové vektory, čím navyše získame možnosť používať maticové násobenie namiesto skalárneho súčinu:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \equiv \begin{pmatrix} a_x & a_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y\end{pmatrix} = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$$

V tejto notácii je jasnejší aj výraz pre projektor $\mathbf{P_n}$:

$$\mathbf{P_n} = \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}{|\mathbf{n}|^2}$$

teda v čitateli nemáme skalárny súčin, ale prvý vektor násobí číslo, ktorým je skalárny súčin druhého vektora s tým, čo nasleduje. V maticovom tvare

$$\mathbf{P_n} = \frac{1}{|\mathbf{n}|^2}\begin{pmatrix} n_x \\ m_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_x & n_y \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{n}|^2}\begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y \\ m_y n_x & n_y^2 \end{pmatrix}$$

Z definície projektora je zrejmé, že projekcia je skutočne vektor v smere $\vec{n}$. Skutočne,

$$\mathbf{P_{\vec{n}} n} = \frac{\mathbf{n n}^T \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} = \mathbf{n}$$

Môžeme zostrojiť aj projektor do kolmého smeru:

$$\mathbf{P_{\vec{n}\perp}} = \mathbf{1} - \mathbf{P_{\vec{n}}} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{n n}^T}{|\mathbf{n}|^2}$$

Skutočne,

$$(\mathbf{1} - \mathbf{P_{\vec{n}}})\mathbf{n} = \mathbf{n} - \frac{\mathbf{n n}^T \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} = \mathbf{n} - \mathbf{n} = 0$$

Riešenie pre priamkové zrkadlenie máme, a ostáva nám iba urobiť skúšku správnosti:

$\mathbf{X} - \mathbf{F} = \mathbf{F} - \mathbf{X}' = \mathbf{P_n}(\mathbf{X} - \mathbf{A})$ a oba vektory sú kolmé na priamku (vyplýva z definície projektora).

Takéto riešenie ale nie je úplne uspokojivé: radi by sme mali niečo ako operátor zrkadlenia, niečo ako $\mathbf{X}' = \mathbf{\Sigma X}$. To ale v tejto reprezentácii nejde, pretože nevieme reprezentovať vektorový súčet, resp. posunutie, ako maticovú operáciu.

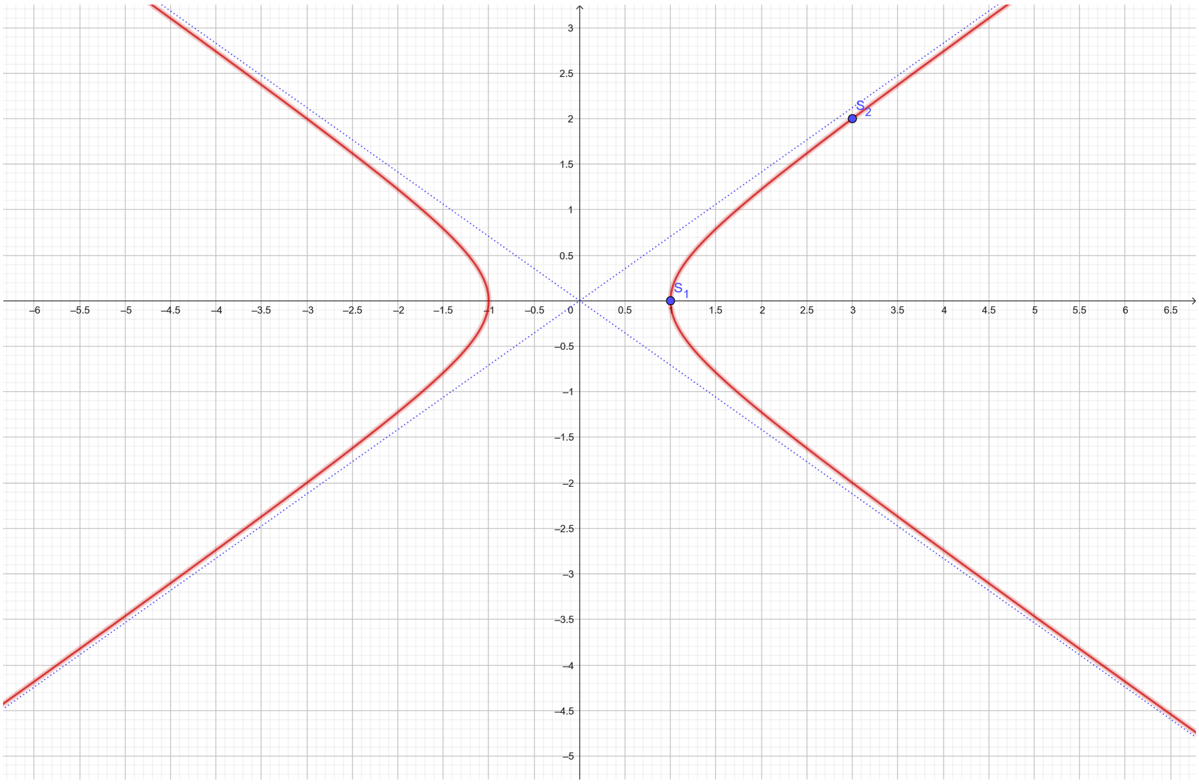
Uvidíme ako na to, keď zavedieme projektívne súradnice.

Pellova rovnica radikálové rozšírenia

Uvažujme takúto rovnicu:

$$x^2 - 2y^2 = 1 \quad x, y \in Z$$

Niekoľko riešení ľahko uvidíme hneď: $[1, 0]$ a $\mathbf{3}, \mathbf{2}$. Ostatné sa nachádzajú tam, kde hyperbola prechádza celočíselnými uzlami karteziánskej mriežky:



Túto rovnicu využijeme na zavedenie radikálového rozšírenia celých čísel: Označme $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ množinu čísel tvaru $x + y\sqrt{2}, x, y \in Z$. Túto množinu nazývame pridruženým (adjoint) rozšírením celých čísel. Sú to poväčšine iracionálne čísla, ale dedia dôležité vlastnosti celých čísel: uzavretosť pre sčítanie, odčítanie a násobenie.

Definícia Normou (veľkosťou) čísla $z = x + y\sqrt{2}$ nazývame číslo $|z| = (z\bar{z})^{1/2} = ((x + \sqrt{2}y)(x - \sqrt{2}y))^{1/2} = (x^2 - 2y^2)^{1/2}$.

Teda riešením Pellovej rovnice sú čísla zo $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ s normou 1. Ľahko ukážeme, že norma je multiplikatívna, teda že $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. Z toho ale vyplýva, že môžeme z jedného riešenia Pellovej rovnice vygenerovať nekonečne veľa ďalších riešení: skutočne, ak $|z| = 1$, potom aj $|z|^n = 1,\ n = 1, 2, \ldots$. Teda ďalšie riešenia sú

$$(3 + 2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2} \to (17, 12)$$
$$(3 + 2\sqrt{2})^3 = 99 + 70\sqrt{2} \to (99, 70)$$

atd. Toto nie je veľmi praktické, ale ľahko si vytvoríme rekurentný vzťah.

---

4. Domáca úloha (nová)

1. Vypočítajte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{n} + \ldots}}$$

2. Dokážte, že riešenia Pellovej rovnice typu $(3 + 2\sqrt{2})^n, n \to \infty$ dávajú racionálne aproximácie $\sqrt{2}$.

---

5. Program na budúci týždeň

Afínne a projektívne súradnice.

Viac komplexných čísel.