Hodina 17. novembra 2023

Program:

1. Domáca úloha (z minula)
2. Niekoľko príkladov na zahriatie a pozdvihnutie mysli: Ešte bude trocha projektívnej geometrie.
3. Afínna geometria a komplexné čísla.
4. Domáca úloha (nová)
5. Program na budúci týždeň

0. Úvod

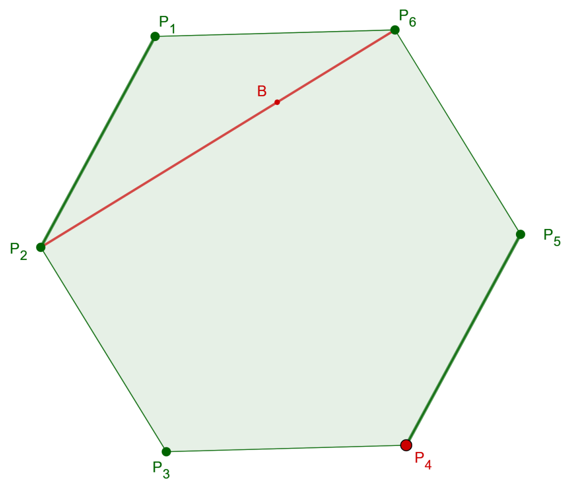
Tento text a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári https://github.com/PKvasnick/Erik. Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

Videohovor Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť*.

1. Domáca úloha

Príklad 1

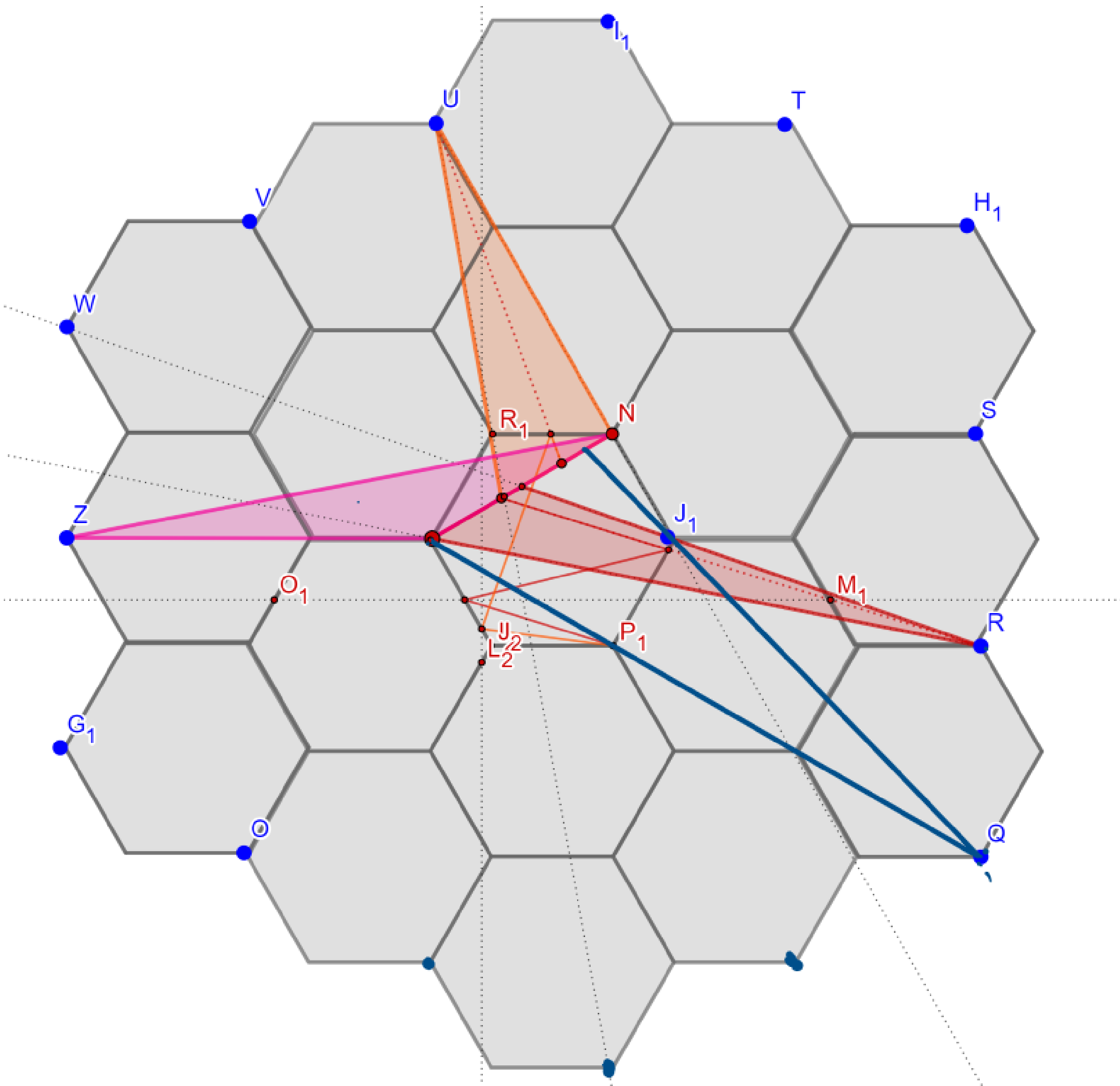
Majme šesťuholníkový biliardový stôl.



Guľa sa nachádza na spojnici P_2P_6. Máte guľu postrčiť tak, aby sa prvýkrát odrazila od strany P_1P_2 alebo P_4P_5 a druhý odraz ju poslal do vrecka P_4. Kde všade na červenej spojnici sa môže guľa nachádzať, aby bol takýto strk možný?

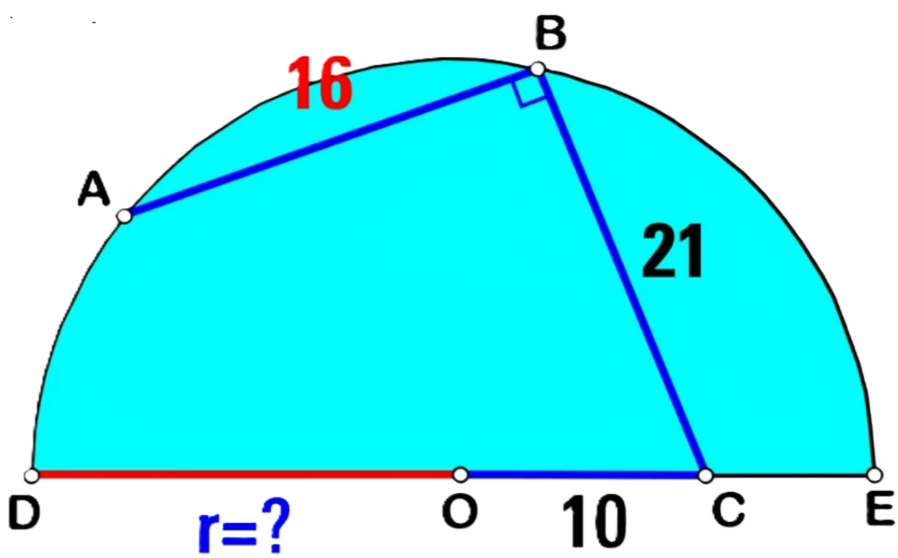
Riešenie

Toto nie je presné riešenie, ale takto sa na to treba pozerať:



Príklad 2

Nájdite polomer kruhu.



Riešenie

Veta o skrížených tetivách a neutopiť sa v číslach.

Označme x dĺžku úsečky od bodu C po X, priesečník s kružnicou pod DE. Potom

$$(r+10)\cdot(2r-r-10) = 21\cdot x$$
$$r^2 = 100 + 21x$$

Potom z pravouhlého trojuholníka ABX máme

$$16^2 + (21+x)^2 = (2r)^2$$

Dosadenie za x vedie ku škaredým číslam, ľahšie je dosadiť za r:

$$256 + 441 + 42x + x^2 = 400 + 84x$$
$$x^2 - 42x + 297 = 0$$
$$(x-9)(x-33) = 0$$

Druhý koreň je nereálny, takže x = 9 a

$$r^2 = \frac{16^2 + 30^2}{4} = 289$$

a teda r = 17.

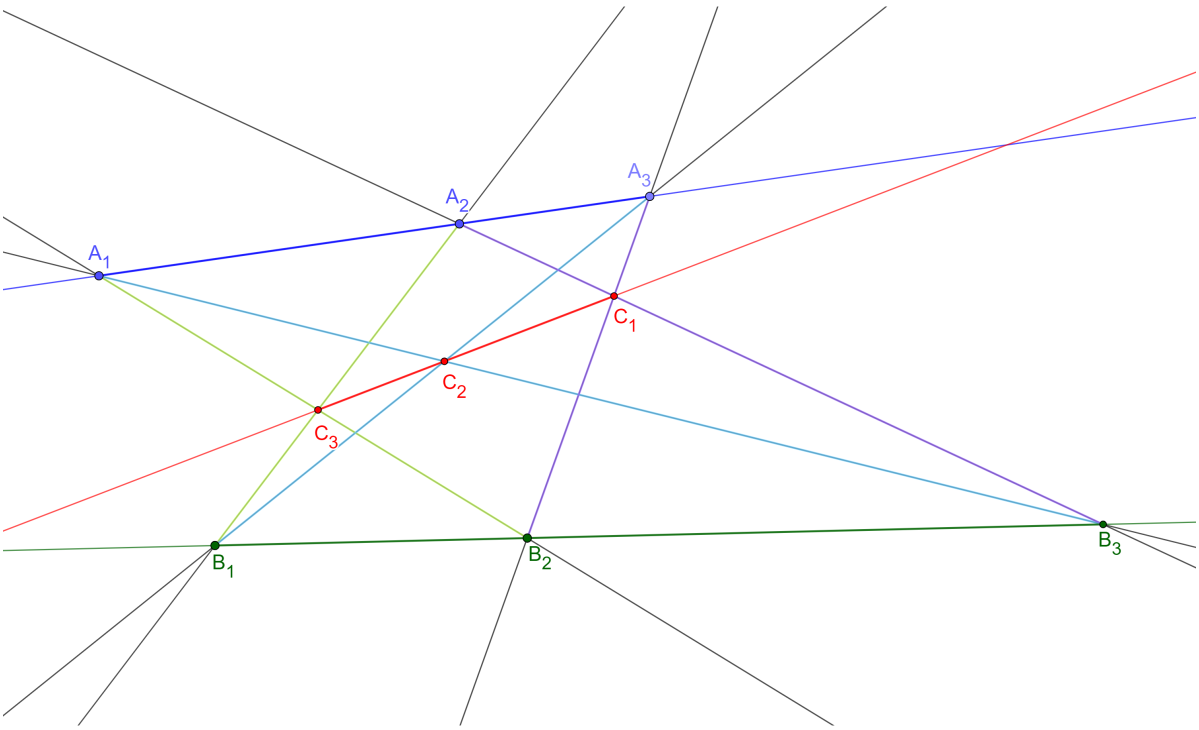
---

2. Príklady na zahriatie

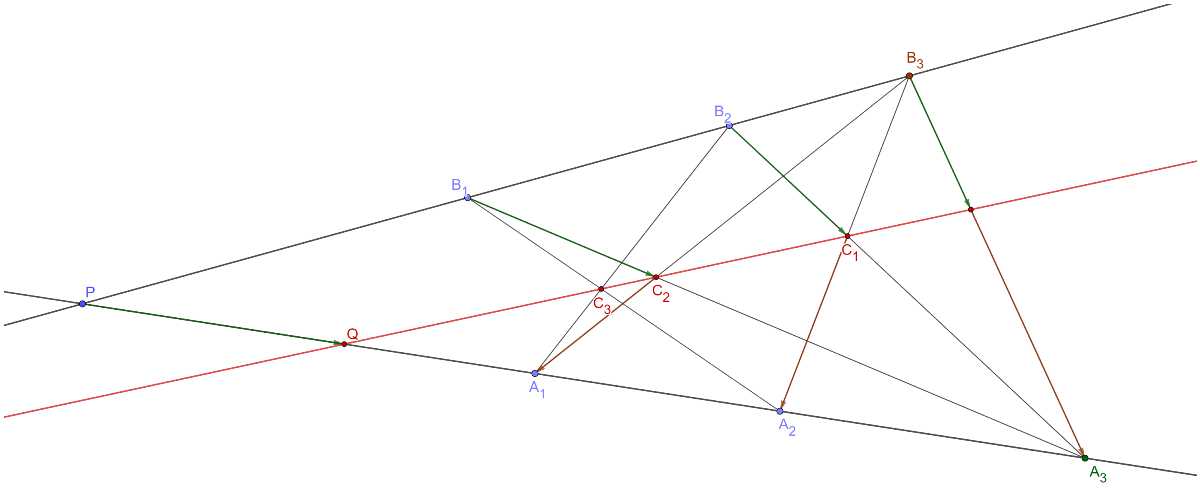
Ešte trocha projektívnej geometrie

Pappusova veta

Sľúbil som dôkaz, a síce nebude s vektormi, ale bude pekne projektívny a nebudeme prechádzať do afínnej roviny.



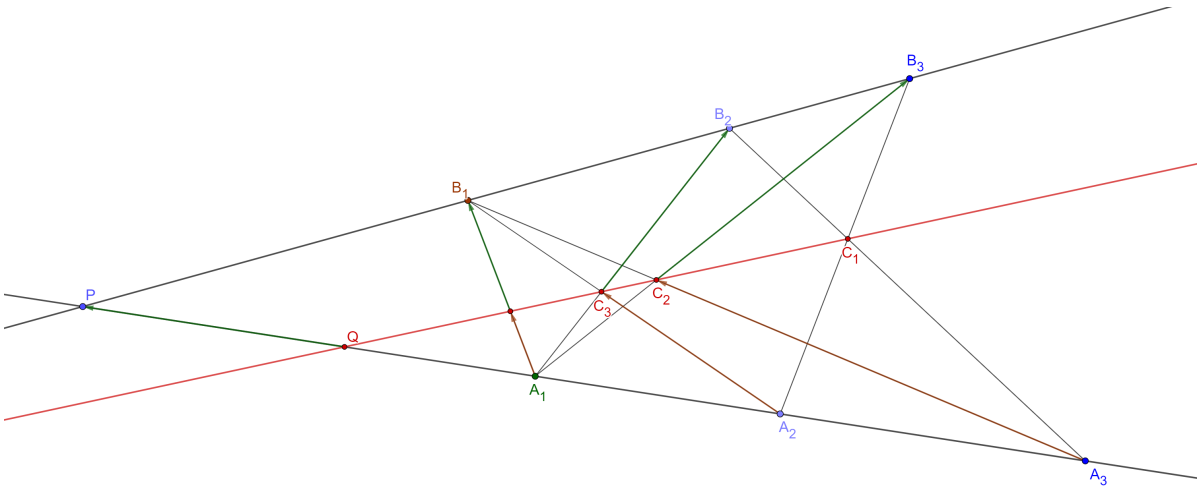
Ppappusovu veta tvrdí, že body C_1, C_2, C_3 sú kolineárne. Prekreslíme si obrázok a pozrieme sa bližšie, ako tu veci fungujú.



Máme tu zobrazenie bodov B_1, B_2, B_3 na body A_1, A_2, A_3 pomocou dvoch perspektívnych projekcií: Prvá projekcia s ohniskom A_3 "stiahne" body B_1, B_2, B_3 na červenú priamku (zelené šípky). Druhá projekcia s ohniskom B_3 pošle body z červenej čiary do bodov A_1, A_2, A_3. Máme tu tri takéto dvojice, ale skúmame iba túto jednu. Nemáme žiadnu záruku, že bod C_3 leží na červenej čiare - to práve potrebujeme dokázať.

Pre náš dôkaz bude podstatné, čo sa udeje s bodmi P a Q, Prvá projekcia stiahne bod P do bodu Q, a druhá ho ponechá na mieste, pretože už leží na priamke A_1A_2. O bode Q pozitívne vieme, že leží na červenej čiare.

Pozrime sa teraz na inverzné zobrazenie:



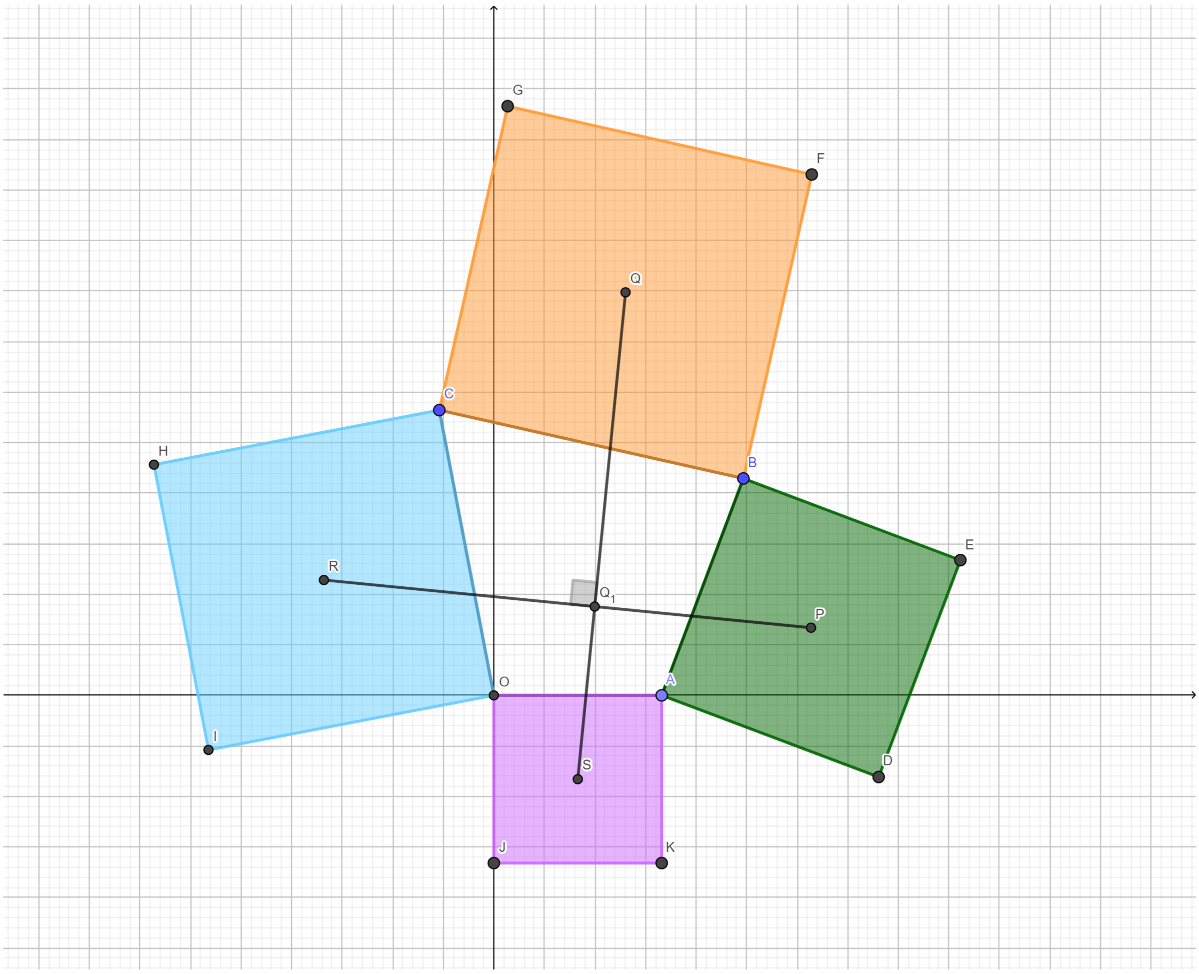
Na tomto obrázku máme dvojicu projekcií, ktoré zobrazjú body A_1, A_2, A_3 na B_1, B_2, B_3. Červená čiara na tomto obrázku nemusí byť nutne totožná s červenou čiarou na predošlom obrázku, konkrétne nevieme povedať, či na nej leží bod C_1.

Čo ale vieme je, že toto zobrazenie je inverzné k projekciám na predošlom obrázku. Pretože kombinácia projekcií na dvoch obrázkoch zobrazuje body B_1, B_2, B_3 na seba, musí toto platiť pre všetky body na priamke B_1B_2, a teda aj pre priessečník P. To ale znamená, že bod Q musí ležať na oboch červených priamkach, a pretože na oboch červených priamkach musí ležať aj bod C_2, musia byť priamky totožné.

3. Vektory a komplexné čísla

Van Aubelova veta

Spojnice štvorcov sú na seba kolmé a majú rovnakú dĺžku.



To som minule pokašľal, ale snáď teraz to už je jasné.

Rovnica priamky

Parametrickú rovnicu sme už mali:

Body, ležiace na priamke, prechádzajúcej bodmi A, B sú $X = A + t(B - A)$.

- Toto nejde ľahko zovšeobecniť na zložitejšie krivky (teda ide, ale užitočné to je iba občas.

Afinny priestor: máme body, vektory, a vzdialenosti medzi nimi.

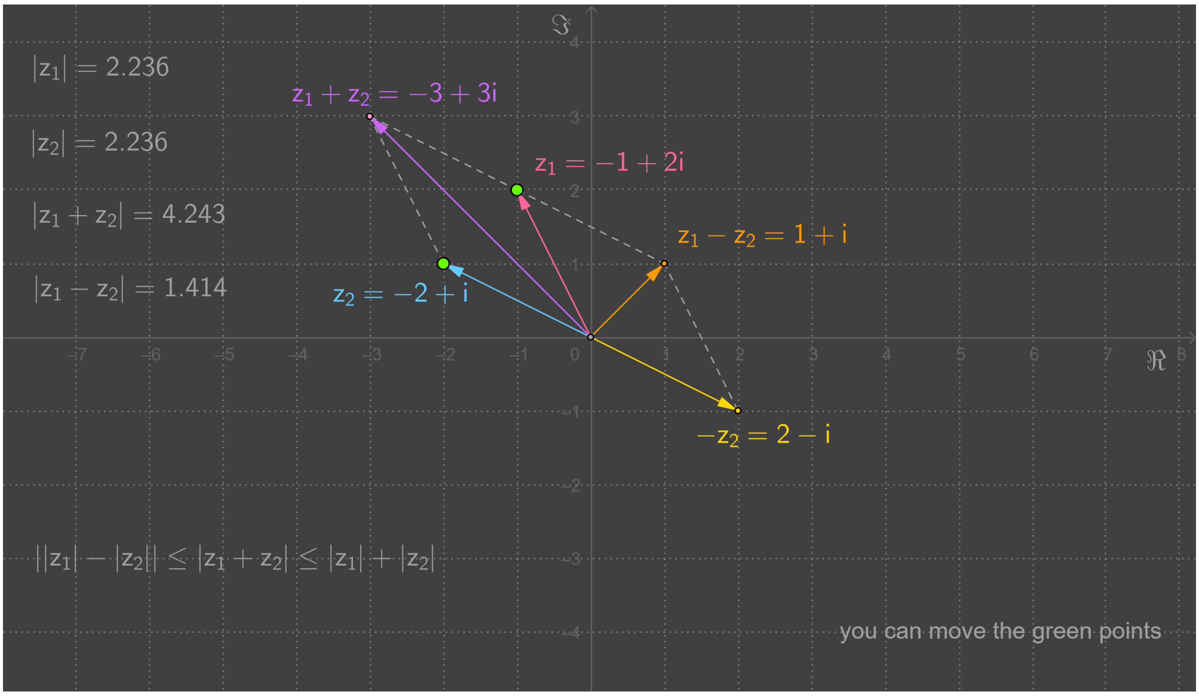
- Vzdialenosť bodov: $|B - A| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - b_x)^2}$
- Vzdialenosť vektorov meria odchýlku ich smerov: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$.

Body nemôžeme sčítať, ale vektory áno. Body ale môžeme odčítať, pričom dostávame vektor.

Normálová rovnica priamky

Priamku, kolmú na vektor $\vec{n}$ a prechádzajúcu bodom A, tvoria body, pre ktoré platí $(X - A) \cdot \vec{n} = 0$, čo vedie k rovnici tvaru $ax + by + c = 0$.

Komplexné čísla



Komplexné čísla sú čisla tvaru $z = x + iy$, kde x, y sú reálne súradnice v rovine a $i^2 = -1$.

Transformácie

Vektor je posunutie, takže posunutia sú ľahké.

Rotácie sú ťažšie, ale sú ľahké v komplexných číslach.

Zamyslenie na domácu úlohu: Čo ostatné izometrie roviny?

Zrkadlenie? Stredová symetria? Posunuté zrkadlenie?

(Porozmýšlať: aké ingrediencie na toto potrebujeme a v akom vyjadrení to je najprirodzenejšie.)

---

4. Domáca úloha (nová)

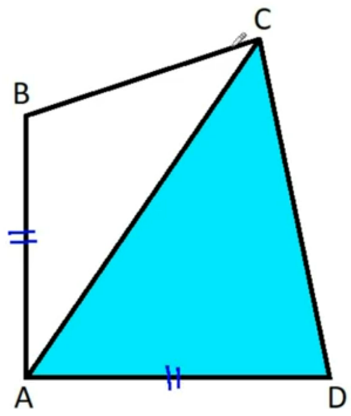
1. Máme kvadratickú formu $y^2 - 8y - x + 19 = 0$, ktorá popisuje parabolu v rovine. Nájdte vrchol paraboly, ohnisko, smerovú priamku (pre ohnisko a riadiacu priamku platí, že body na parabole majú rovnakú vzdialenosť od ohniska a riadiacej priamky), a os paraboly.

2. Vyriešte.

AB=AD , BC=2 , CD=3

∠BAD = ∠BCD = 90°

Blue shaded area = ?



5. Program na budúci týždeň

Grupy symetrií a dlaždice možno dáme nabudúce.

Ale robíme analytickú geometriu a komplexné čísla.