Hodina 14. júla 2023

Program:

1. Domáca úloha (z minula)
2. Niekoľko príkladov na zahriatie a pozdvihnutie mysli.
3. Dôkazy. Matematická indukcia
4. Domáca úloha (nová)

0. Úvod

Tento text a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári https://github.com/PKvasnick/Erik. Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

Telekonferencia Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť.*

1. Domáca úloha

1. > Jozef si z banky požičal 500 000 eur na hypotéku s úrokom 2.4% na tridsať rokov. Vypočítaj mesačnú splátku.

Riešenie

Označme q mesačný úrok, teda 2.4% p.a./12 = 0,2% mesačne. Označme A_n nesplatenú istinu v n-tom mesiaci, a_n istinu splatenú v n-tej mesačnej splátke, u_n úroky splatné v n-tej mesačnej splátke, Označme mesačnú splátku m, splátka je fixná a platí $m = a_n + u_n$, teda $a_n = m - u_n$. Úroky sa počítajú z nesplatenej istiny, $u_n = qA_n$. V nasledujúcom mesiaci bude istina $A_{n+1} = A_n - a_n = A_n - m + u_n = A_n(1+q) - m$, a pre úroky a istinu, zaplatenú v n+1-vej splátke platia rovnaké vzťahy. Vzťah

$$A_0 = A, \quad A_{n+1} = A_n(1+q) - m, \; n = 1, 2, \ldots N$$

kde A je 500 000 euro, N = 24 x 30 = 720 je počet mesačných splátok, je hlavný vzťah pre výpočet mesačnej splátky m. Potrebujeme vypočítať m tak, aby A_{270} bolo 0.

Čo vieme povedať o m? Aby riešenie existovalo, musí platiť $m > qA \approx 1000$ eur, teda mesačná splátka musí byť väčšia ako úroky za prvý mesiac - inak by nesplatená čiastka rástla a nie klesala.

Existuje stará perzská metóda pre odhad mesačnej splátky, ktorá funguje takto (toto je originálny článok: https://www.maa.org/sites/default/files/Peyman_Milanfar45123.pdf):

$$(\text{Mesačná splátka}) \approx \frac{(\text{Istina} + \text{Úrok})}{(\text{počet mesiacov})}$$

$$(\text{Úrok}) = \frac{1}{2}(\text{Istina}) \times (\text{počet rokov}) \times (\text{ročný úrok})$$

Dosadením vypočítame $\text{Úrok} \approx 360000$ eur, $\text{Mesačná splátka} \approx 1194,44$ eur.

Presné riešenie sa samozrejme ľahko nájde v ktorejkoľvek finančnej príručke:

$$m = \frac{q(1+q)^N}{(1+q)^N - 1} A$$

Toto po dosadení dáva mesačnú splátku 1311.08 eur.

Samozrejme nás bude najviac zaujímať, ako nájsť výraz pre n-tý člen postupnosti A_n. Z rekurentného vzťahu vidíme, že ide o geometricko-aritmetický rad. Skúsme sa pozrieť na niekoľko prvých členov postupnosti:

$$\begin{gathered}A_0 = A \\ A_1 = A(1+q) - m \\ A_2 = A(1+q)^2 - m(1+q) - m \\ A_3 = A(1+q)^3 - m(1+q)^2 - m(1+q) - m \\ \vdots \\ A_n = A(1+q)^n - m(1 + (1+q) + (1+q)^2 + \cdots + (1+q)^{n-1})\end{gathered}$$

Úpravou dostaneme

$$A_n = A(1+q)^n - m\frac{1-(1+q)^n}{1-1-q} = A(1+q)^n - m\frac{(1+q)^n - 1}{q}$$

Nesplatená istina po n-tej splátke musí byť 0, a odtiaľ môžeme vyjadriť mesačnú splátku:

$$\begin{gathered}0 = A(1+q)^N - m\frac{(1+q)^N - 1}{q} \\ m = \frac{q(1+q)^N A}{(1+q)^N - 1}\end{gathered}$$

čo je presne známy vzťah.

2. > Zenón naháňa korytnačku. Keď sa rozbehol, bola 100 m pred ním. Tých 100 metrov prebehol Zenón za 12.5 sekundy, ale Keď dobehol, bola 20 m pred ním. Keď prebehol týchto 20 m, bola 4 m pred ním, keď prebehol tieto 4 metre, bola ešte stále 80 cm pred ním. Zenón si začal zúfať, že korytnačku nikdy nedobehne, pretože kým dobehne tam, kde bola pred chvíľou, vždy o kúsok popolezie ďalej. Dohoní Zenón korytnačku alebo nie, a kedy?

Riešenie

Matematicky je toto ľahké, pretože máme za sebou dvetisíc rokov západného myslenia a predstava, ktorá veľmi znepokojovala starovekých mudrcov, nám nepríde znepokojivé, že súčet nekonečného počtu vzdialeností môže byť konečný, a že tento nekonečný počet vzdialeností možno prejsť za konečný čas.

Je to také ľahké, že dokonca ani nemusíme mobilizovať nejaké vedomosti o nekonečných radoch, stačí vypočítať dve rýchlosti a nájsť miesto a čas, kde sa Zenón a korytnačka stretnú.

$$\begin{gathered}v_Z = 100\,m/12.5\,s = 8\,m/s \\ v_K = 20\,m/12.5\,s = 1.6\,m/s \\ s_Z(t) = v_Z \cdot t \\ s_K(t) = 100\,m + v_K \cdot t \\ t_x = \frac{100}{v_Z - v_K} = 15.625\,s \\ s_Z = v_Z \cdot t_x = 100 \cdot \frac{v_Z}{v_Z - v_K} = 125\,m\end{gathered}$$

Teda Zenón dohoní korytnačku za 15.625 s a prebehne celkom 125 m.

> 3. Pán Brown prišiel z krčmy k domovým dverám, našiel vo vrecku kľúče, a chce si odomknúť. Na zväzku má 10 kľúčov, ale v tej tme vyzerajú všetky rovnako. Skúsi jeden kľúč, a keď to nie je správny, vráti ho do zväzku a zasa náhodne vyberie kľúč, a takto postupuje ďalej, kým nenájde správny kľúč.
>
>   - Pri koľkom pokuse má pán Brown najväčšiu šancu nájsť správny kľúč?
>   - Koľko kľúčov v priemere musí vyskúšať, kým nájde ten správny?

Riešenie

Nech N je počet kľúčov, p = 1/N pravdepodobnosť, že náhodný kľúč bude správny.

Pokus	P((úspechu))	P(neúspechu)
1	p	$1-p$
2	$(1-p)p$	$(1-p)^2$
3	$(1-p)^2p$	$(1-p)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$(1-p)^{n-1}p$	$(1-p)^n$

Teda najväčšiu pravdepodobnosť úspechu máme prekvapujúco pri prvom pokuse. Môže nás zaujímať, aký je stredný počet kľúčov, ktoré pán Brown potrebuje vyskúšať, aby sa dostal domov.

$$\langle n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p(1-p)^{n-1}$$

Pre výpočet strednej hodnoty sa bežne používa postup, ktorý je za rámcom toho, čo chceme na tomto doučovaní robiť. Preto použijeme fintu: Čo vieme povedať o $\langle n \rangle$ pred prvým pokusom? V prípade úspechu bude $\langle n \rangle = 1$ (s pravdepodobnosťou p), a prípade neúspechu (s pravdepodobnosťou 1-p) sme tam, kde sme začali, očakávaný počet pokusov bude stále $\langle n \rangle$, ale už sme jeden pokus vyčerpali:

$$\langle n \rangle = p \cdot 1 + (1-p) \cdot (\langle n \rangle + 1)$$

odkiaľ plynie $\langle n \rangle = 1/p$, čo je neprekvapivý výsledok.

2. Príklady na zahriatie

Príklad 1

Nájdite všetky celé čísla n, pre ktoré platí

$$9^n - 6^n = 4^n$$

Poznámka. Pre riešenie takýchto rovníc máme 3 stratégie:

- snažiť sa uviesť veci na spoločný základ,
- snažiť sa uviesť veci na spoločný exponent
- urobiť vhodnú substitúciu.

Príklad 2

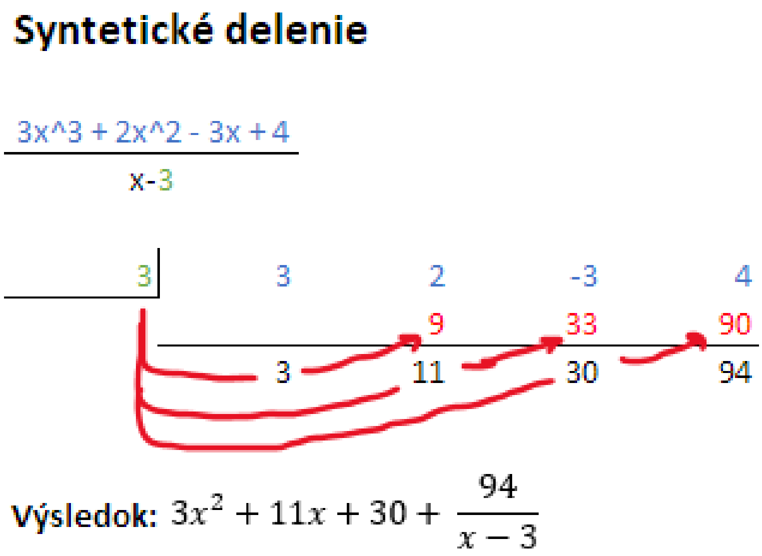
Ktoré číslo je väčšie? 2^{100} alebo 3^{75}?

Príklad 3

Minule sme tu riešili parciálne zlomky, tak dnes bude komplementárna operácia: delenie polynómov. Zjednodušte výraz

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x - 2}$$

Návod:



Príklad 4

Nech $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x + 1$. Pomocou delenia polynómov nájdite $P(5)$.

Návod:

Veta o zvyšku (Remainder theorem): Nech P(x(je polynóm stupňa ≥ 1. Potom zvyšok po delení

$$\frac{P(x)}{x - a}$$

sa rovná P(a). Dôkaz: Nech výsledok delenia P(x() lineárnym polynómom (x-a) je polynóm Q(x) a zvyšok R. Z definície platí $P(x) = (x - a)Q(x) + R$, a pre $x = a$ dostaneme $P(a) = (a - a)Q(x) + R = R$.

3. Dôkazy. Matematická indukcia

Čo je dôkaz

Dôkaz je metóda určenia pravdy. V rôznych oblastiach sa toto dosahuje rôznymi spôsobmi:

- Súdny výrok
- Božie slovo
- Experimentálna veda
- Štatistické zisťovanie
- Vnútorné presvedčenie
- "Neviem, prečo by to nemala byť pravda..."
- Zastrašovanie

V matematike znamená dôkaz výroku reťazec logických dedukcií, ktoré dokazujú pravdivosť výroku vychádzajúc z množiny axióm.

Logický výrok je tvrdenie, ktoré je pravdivé alebo nepravdivé. Ne-výroky: "Umy si nohy!", "A teda čo je to dôkaz?"

- Výrok: 2+3 = 5. Tento výrok je pravdivý, aj keď nie je úplne jednoduché ukázať to, pretože toto tvrdenie spočíva na úplných základoch aritmetiky.
- Výrok. Pre prirodzené číslo n je $n^2 + n + 41$ prvočíslo.

Toto je iný výrok ako predchádzajúci. Máme tu dve nové veci: **Predikát** - teda parametrizovaný výrok (logickú funkciu), ktorý je pravdivý alebo nepravdivý podľa toho, čo doň dosadíme. A máme dokázať, že tvrdenie platí pre nekonečnú množinu čísel 1, 2, ...

Pri takýchto tvrdeniach väčšinou postupujeme tak, že vykonáme priekum bojom: overíme platnosť tvrdena na niekoľkých hodnotách, a snažíme sa zistiť, ako tvrdenie "funguje". Toto tvrdenie má tú zvláštnu vlastnosť, že platí pre všetky n menšie ako 40, ale pre 40 dostaneme $40^2 + 40 + 41 = 40 * 41 + 41$ a teda sa nejedná o prvočíslo.

- Výrok. Neexistujú prirodzené čísla a, b, c, d spĺňajúce rovnosť $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$. Toto tvrdenie pochádza od Leonard Eulera z roku 1769, a až o 218 rokov neskôr Noam Elkies ukázal, že neplatí: a = 95800, b = 217519, c = 414560, d = 422481 sú riešením rovnice.

Axiómy sú tvrdenia, ktoré považujeme za pravdivé.

4. Domáca úloha (nová)

Príklad 1

Označme gcd(m, n) najväčší spoločný deliteľ celých čísel m,n (*greatest common divisor*), teda najväčšie číslo, ktoré je deliteľom m i n. Nech m>n. Dokážte, že

a. gcd(m-n, n) = gcd(m,n)

b. gcd(m % n) = gcd(m, n)

kde znak % označuje zvyšok po celočíselnom delení m a n.

Príklad 2

Dokážte, že $\sqrt{2}$ nie je racionálne číslo.

Príklad 3.n

Riešte:

$$x^2 - y^2 = 24$$
$$xy = 35$$
$$x + y = ?$$

Príklad 4

Nájdite reálne riešenia rovnice

$$x^6 = (x-1)^6$$