

# Hodina 5. januára 2024

---

Program:

1. Domáca úloha (z minula)
2. Niekoľko príkladov na zahriatie a pozdvihnutie mysli: matice
3. Poznámky k maticiam: row reduction, násobenie maticou, lineárna regresia
4. Domáca úloha (nová)
5. Program na budúci týždeň

## 0. Úvod

**Tento text** a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári <https://github.com/PKvasnick/Erik>. Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

**Videohovor** Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť*.

---

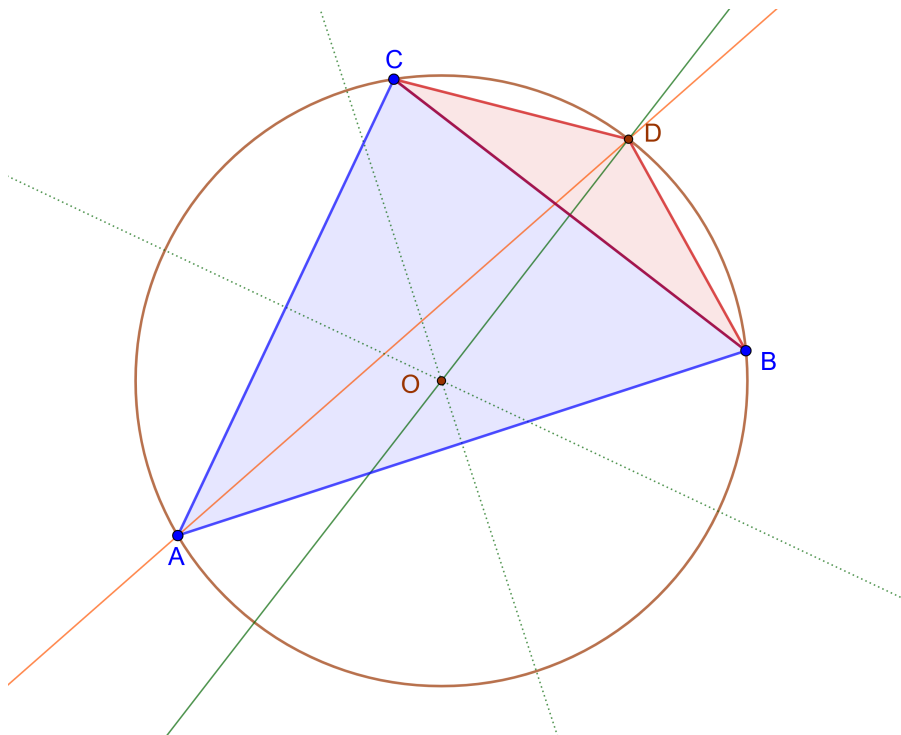
## 1. Domáca úloha

### Príklad 1

Dokážte, že v trojuholníku ABC leží priesečník osi uhla  $\beta$  (pri vrchole B) a osi strany  $b$  (oproti vrcholu B) na kružnici opísanej trojuholníku.

### Riešenie

Tento bod sa v českej a slovenskej matematickej literatúre označuje ako Švrčkov bod, a pravdaže každý trojuholník má tri takéto body.



Podme si najskôr ozrejmiť, ako môžeme dokázať, že dva body sú totožné. V našom prípade vieme, že ľubovoľný bod  $X$  ležiaci na osi strany  $BC$  tvorí s bodmi  $B$  a  $C$  rovnoramenný trojuholník. Preto na dôkaz tvrdenia potrebujeme dokázať, že priesečník osi uhla  $\alpha = \angle BAC$  s opísanou kružnicou vytvára rovnoramenný trojuholník  $BCD$ . Potom musí bodom  $D$  prechádzať aj os strany  $BC$ .

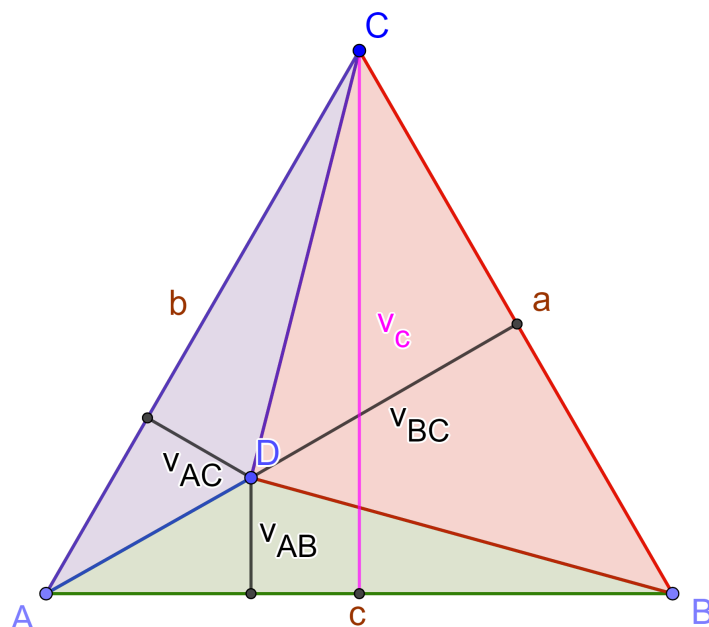
Vlastný dôkaz: Uhol  $\angle BAD$  a uhol  $\angle BCD$  sú obvodové uhly, prislúchajúce tetive  $BD$  a sú teda rovnaké a rovné  $\alpha/2$ , pretože  $AD$  je os uhla  $\alpha \equiv \angle BAC$ . Podobne platí  $\angle DCB = \angle CAD = \alpha/2$ . Trojuholník  $CBD$  je teda rovnoramenný a os strany  $BC$  musí prechádzať vrcholom  $D$ . Tým je tvrdenie dokázané.

## Príklad 2

Vezmime ľubovoľný bod  $P$  vnútri rovnostranného trojuholníka. Dokážte že súčet jeho vzdialeností od strán trojuholníka je rovný výške trojuholníka (teda je pre všetky body vnútri trojuholníka rovnaký).

### Riešenie

Toto tvrdenie sa nazýva Vivianiho veta a dôkaz je ľahký:



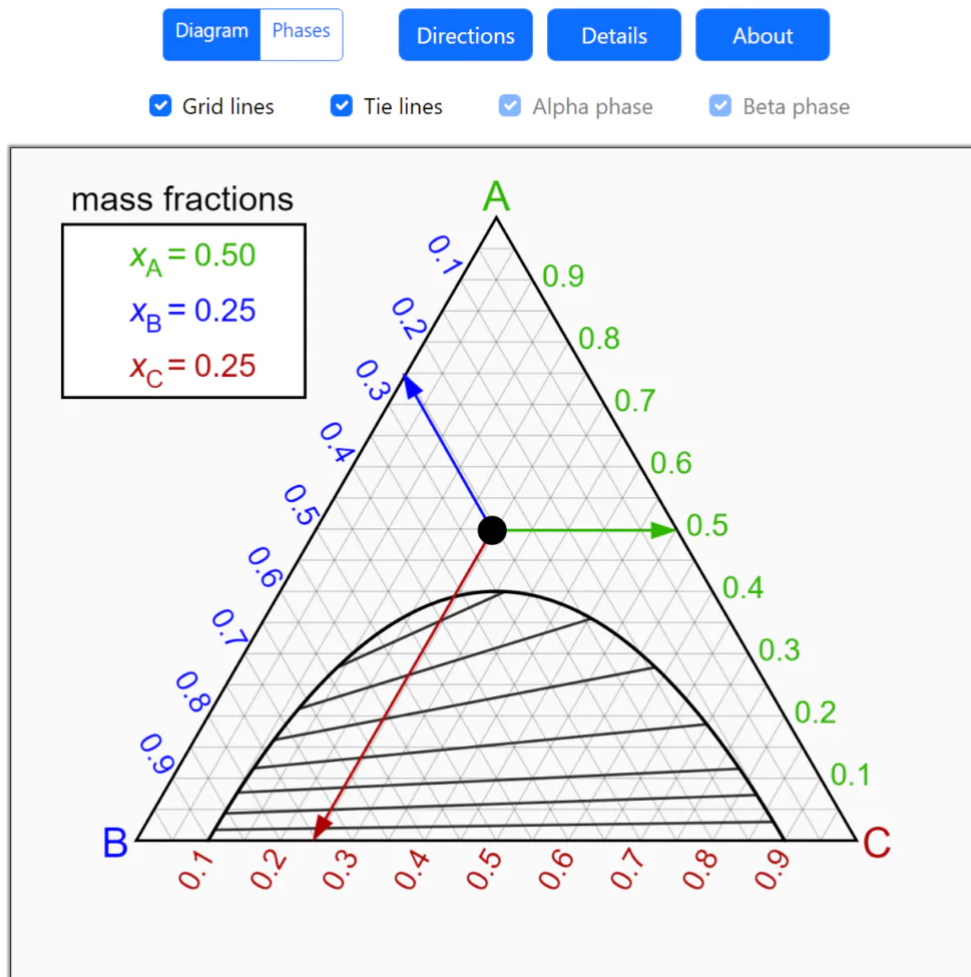
Jediné, čo treba, je vypočítať dvoma spôsobmi obsah trojuholníka:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}cv_c = \frac{1}{2}cv_{AB} + \frac{1}{2}av_{BC} + \frac{1}{2}bv_{AC}$$

a pretože máme rovnostranný trojuholník a  $a = b = c$ , musí platiť

$$v_c = v_{AB} + v_{BC} + v_{AC}$$

Takto možno kresliť grafy vlastností ternárnych zmesí, pre ktoré molárne zlomky zložiek dávajú spolu 1 a takto vieme prirodzene nakresliť závislosť od 3 viazaných parametrov nakresliť do trojuholníka.



Hoa, hoa, ale tu sa vzdialenosti merajú inak! Ako vieme, že aj pre takéto vzdialenosti platí Vivianiho veta?

Odpoveď: vzdialenosti sa líšia od kolmych vzdialeností o konštantný faktor  $1/\cos 60^\circ$ . Ich obrovská výhoda je, že ich vieme jednoducho zostrojiť.

## Niekoľko príkladov na zahriatie a povznesenie mysle

### Matice: Redukcia po riadkoch (row reduction)

Pokračujeme z minula:

#### Problém 3

Továrň vyrába osobné autá, nákladné autá a autobusy. Tri hlavné suroviny, ktoré používa, sú oceľ, sklo a plasty. Nasledujúca tabuľka obsahuje množstvo surovín, potrebných na jednotlivé výrobky, vo vhodných jednotkách:

	Osobné auto	Nákladné auto	Autobus
Oceľ	1	4	6
Sklo	2	3	20

	Osobné auto	Nákladné auto	Autobus
Plast	3	5	15

Denne sa v priemere spotrebuje 48 jednotiek ocele, 113 jednotiek skla a 111 jednotiek plastov. Koľko osobných áut, nákladných áut a autobusov sa priemerne denne vyrobí?

**Riešenie** Označme  $c$ ,  $t$ ,  $b$  priemerný počet denne vyrobených osobných áut, nákladných áut a autobusov (cars, trucks, busses). Tabuľka spotreby materiálov pre jednotlivé výrobky nám dáva sústavu lineárnych rovníc pre  $c$ ,  $t$ ,  $b$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 20 \\ 3 & 5 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ t \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 113 \\ 111 \end{pmatrix}$$

a riešime zase zostrojením augmentovanej matice a jej uvedením do RREF tvaru:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 2 & 3 & 20 & 113 \\ 3 & 5 & 15 & 111 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 0 & -5 & 8 & 17 \\ 3 & 5 & 15 & 111 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 0 & -5 & 8 & 17 \\ 0 & -7 & -3 & -33 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{R_3 = 5R_3 - 7R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 0 & -5 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -71 & -284 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 / -71} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 0 & -5 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{R_2 = -8R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 0 & -5 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 / -5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = -4R_2 + 6R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \end{aligned}$$

V priemere sa teda vyrobí 12 osobných, 3 nákladné automobily a 4 autobusy.

*Poznámka* V tomto prípade sme mali šťastie a vyhli sme sa zásadnému problému takýchto úloh: ako zabezpečiť, aby sme dostali  $c, t, b \geq 0$ ? Typicky sa takáto úloha rieši tak, že hľadáme projekciu riešenia lineárneho systému do podpriestoru  $c, t, b \geq 0$  - najbližší vektor k vektoru riešenia, ktorý už leží v požadovanom podpriestore.

## Matice et al.

### 1. Prečo funguje redukcia po riadkoch?

Ekvivalentné úpravy: ľubovoľný riadok alebo stĺpec matice môžeme nahradiť lineárnou kombináciou všetkých riadkov či stĺpcov.

#### Čo robíme, keď robíme ekvivalentné úpravy matice?

Riešili sme minulý týždeň takúto veci:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 = -4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -13 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \dots$$

Áká matica by previedla pôvodnú maticu vľavo na maticu vpravo? Nechávame prvý a tretí riadok nezmenený, teda tá matica bude mať na diagonále v pozíciách 1 a 3 jednotky, a v 1. a 3. riadku budú okrem toho samé nuly. Na druhom riadku chceme  $(-4) \cdot \text{prvý riadok} + 1 \cdot \text{druhý riadok}$ , takže výsledok bude vyzeráť nejako takto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 4 & 2 & 1 & | & -1 \\ 9 & 3 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -2 & -3 & | & -13 \\ 9 & 3 & 1 & | & 5 \end{pmatrix}$$

Úplne podobne to je s ostatnými úpravami: všetky ekvivalentné úpravy môžeme chápať ako násobenie nejakou maticou. Takže vlastne celú redukciu po riadkoch až do RREF môžeme chápať ako

### Čo je augmentovaná matica?

Môžeme si predstaviť, že maticovú rovnicu  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  rozpíšeme po stĺpcoch ako

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \end{pmatrix} x_3 - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Ak rovnosť vpravo násobíme maticou s nenulovým determinantom, jej platnosť sa nezmení: bude platiť práve vtedy, ako  $\mathbf{x}$  je riešením sústavy.

### Čo všetky tie operácie, ktoré robíme pri uvádzaní matice do RREF?

Pri uvádzaní matice do diagonálneho tvaru násobíme obe strany sústavy  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  postupne maticami  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots$ , ktoré zodpovedajú jednotlivým operáciám s riadkami:

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \cdots \mathbf{Ax} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \cdots \mathbf{b}$$

Cieľom je uviesť  $\mathbf{A}$  do diagonálneho tvaru. Teda  $\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \cdots \mathbf{A} = \mathbf{I}$  a to znamená, že  $\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \cdots = \mathbf{A}^{-1}$  a teda dostávame  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$ . Inak povedané, riadkovými úpravami vlastne vytvárame inverznú maticu.

Na tomto princípe je založené počítanie inverznej matice pomocou riadkových úprav, kedy augmentovaná matica obsahuje naľavo  $\mathbf{A}$  a vpravo jednotkovú maticu, a riadkovými úpravami sa snažíme dosiahnuť naľavo jednotkovú maticu, ako pri riešení sústavy rovníc. Potom matica vpravo je  $i\mathbf{A}^{-1}$ .

Príklad:

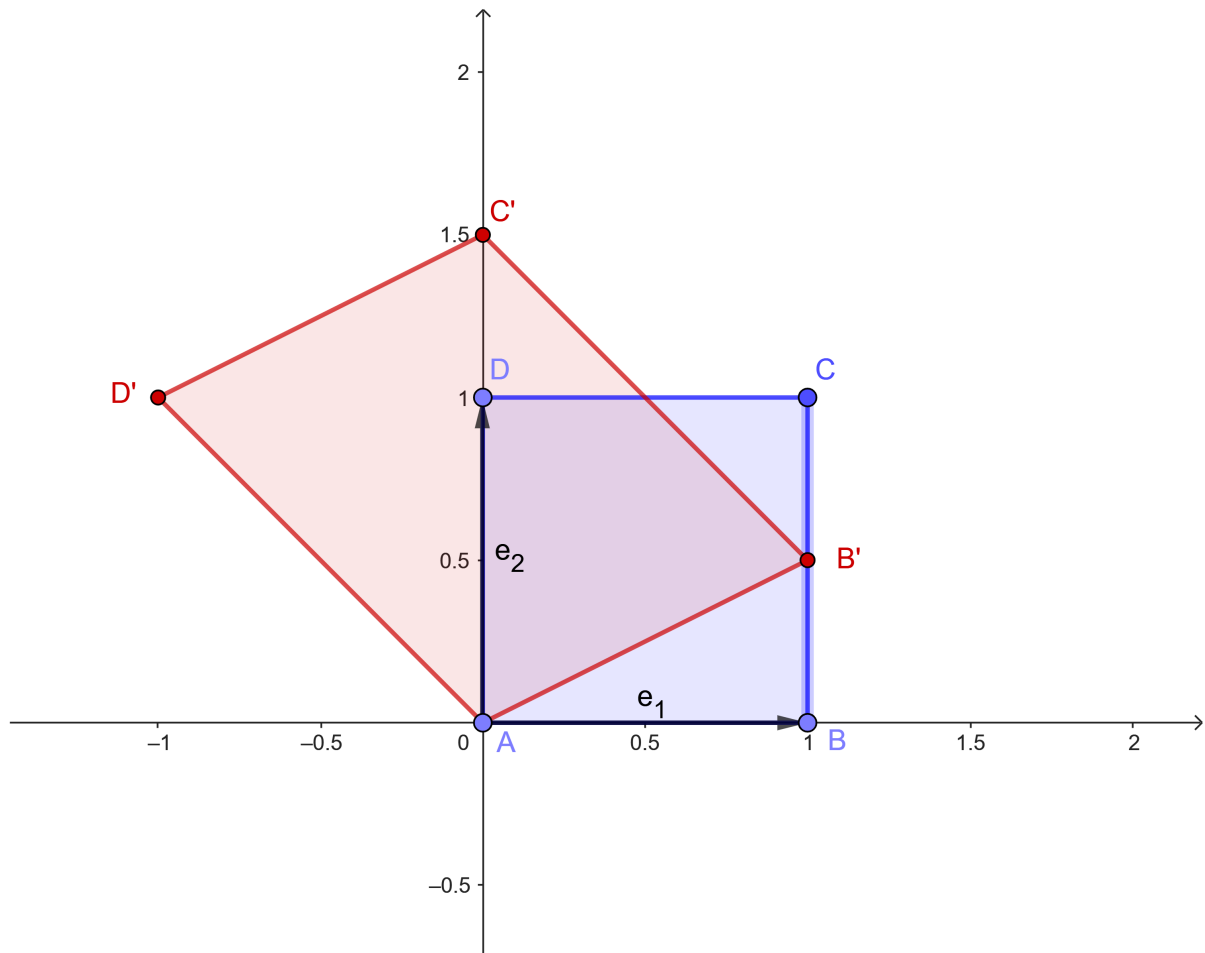
$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a & b & | & 1 & 0 \\ c & d & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow aR_2 - cR_1} \begin{pmatrix} a & b & | & 1 & 0 \\ 0 & ad - bc & | & -c & a \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow (ad - bc)aR_1 - bR_2} \begin{pmatrix} (ad - bc)a & 0 & | & ad & -ba \\ 0 & ad - bc & | & -c & a \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 / a(ad - bc), R_2 \rightarrow R_2 / (ad - bc)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ 0 & 1 & | & \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Čo robí násobenie maticou?

Môžeme vziať nejakú plochu v rovine, vziať niekoľko vektorov, ktoré v nej končia, transformovať ich pomocou matice a pozrieť sa, v akej oblasti sa nachádzajú. Napríklad si môžeme vziať maticu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

a pozrieť sa, čo sa stane s jednotkovým štvorcom:



Zväčšenie plochy je dané determinantom matice, teda červený rovnobežník má plochu 1.5-krát väčšiu ako modrý.

## Lineárna regresia

V prípade lineárnej regresie máme preurčenú sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{F}\beta = \mathbf{Y}$$

Používame štandardné označenie  $\mathbf{F}$  pre maticu faktorov, ktorej členy závisia od hodnôt  $x_i$ , a maticu parametrov  $\beta$ . Rovnica dáva zmysel, iba ak nadbytočné dáta sú zbytočné a hovoria to isté. Ak hovoria niečo iné, úloha nemá riešenie. Môžeme sa ale pozrieť na úlohu tak, že chceme nájsť takú krivku, definovanú parametrami  $a_i$ , pre ktorú je súčet štvorcov odchýlok hodnôt  $y$  najmenší, teda

$$\hat{\beta} = \operatorname{argmin} [(\mathbf{Y} - \mathbf{F}\beta)^T(\mathbf{Y} - \mathbf{F}\beta)]$$

Riešenie si vyžaduje trochu zložitejšie derivovanie, ale vyzerá takto:

$$(\mathbf{F}^T\mathbf{F})\beta = \mathbf{F}^T\mathbf{Y} \quad \therefore \quad \beta = (\mathbf{F}^T\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{Y}$$

V skutočnosti ale neformulejeme problém ako minimalizáciu skalárneho súčinu, ale ako minimalizáciu stopy:

$$\hat{\beta} = \operatorname{argmin} \operatorname{Tr} [(\mathbf{Y} - \mathbf{F}\beta)(\mathbf{Y} - \mathbf{F}\beta)^T]$$

Stopa matice  $\operatorname{Tr}$  je súčet jej diagonálnych prvkov. Toto je všeobecnejší výraz, ktorý funguje v širšej škále prípadov, a jeho minimalizácia podľa  $\beta$  je určitým spôsobom ľahšia.

---

## Domáca úloha (nová)

1. Dokážte, že v ľubovoľnom trojuholníku platí  $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma$ .
2. Máme v rovine bod  $S$ , kružnicu  $k$  a priamku  $p$ . Zostrojte štvorec  $ABCD$  tak, že  $S$  je priesečník jeho uhlopriečok,  $A$  leží na  $k$  a  $B$  leží na  $p$ .

---

## 5. Program na budúci týždeň

- Ešte lineárna algebra

$\bar{a}$