Hodina 29. septembra 2023

Program:

1. Domáca úloha (z minula)
2. Niekoľko príkladov na zahriatie a pozdvihnutie mysli.
3. Geometria: Izometrie roviny - rýchle opakovanie
4. Domáca úloha (nová)
5. Program na budúci týždeň

0. Úvod

Tento text a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári https://github.com/PKvasnick/Erik. Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

Videohovor Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť.*

1. Domáca úloha

Príklad 1

Trojuholník má strany 4 m, 11 m a 8 m. Vypočítajte jeho vnútorné uhly.

Riešenie

Označme $a = 4\,m,\ b = 11\,m,\ c = 8\,m$.

Použijeme kosínovú vetu

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$\cos\gamma = \frac{16+121-64}{2\cdot 4\cdot 11} = \frac{73}{88} = 33,95^\circ$$
$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$
$$\cos\beta = \frac{16+64-121}{2\cdot 4\cdot 8} = \frac{-41}{64} = 129,84^\circ$$
$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$\cos\alpha = \frac{121+64-16}{2\cdot 11\cdot 8} = \frac{169}{176} = 16,21^\circ$$

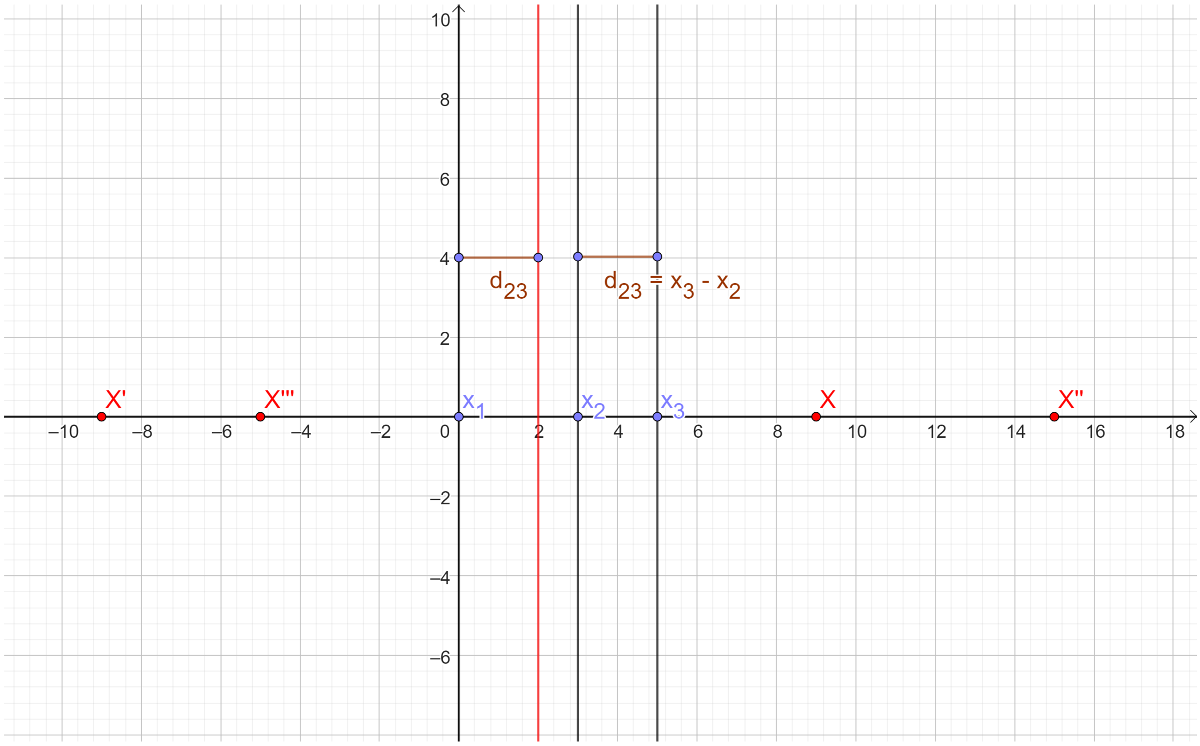
Všetko dokopy 180°, takže to sedí. Mohli sme po prvom použití kosínovej vety použiť sínusovú vetu, ale je to iba trocha jednoduchšie na počítanie.

Príklad 2

Majme tri rovnobežné priamky f, g, h. Dokážte,že existuje priamka j taká, že pre zrkadlenia okolo priamok f, g, h , j platí $\sigma_h \circ \sigma_g \circ \sigma_f = \sigma_j$ - teda že tri zrkadlenia môžeme nahradiť jediným. Kde leží priamka j?

Riešenie

A. Naivné kreslenie a počítanie



Poďme počítať posunutia. Majme bod X v polohe x na súradnicovej osi, a tri priamky f, g, h kolmé na os x v polohách x_1, x_2, x_3. Počítajme postupne transformácie pri zrkadleniach okolo priamok f, g, h:

$$x' = x_1 - (x - x_1) = 2x_1 - x$$
$$x'' = x_2 - (x' - x_2) = 2x_2 - x' = 2x_2 - 2x_1 + x$$
$$x''' = x_3 - (x'' - x_3) = 2x_3 - x'' = 2x_3 - 2x_2 + 2x_1 - x = 2(x_3 - x_2 + x_1) - x$$

a teda výsledok je ekvivalentný zrkadleniu okolo priamky, kolmej na os x a v polohe $x_1 - x_2 + x_3$.

B. Algebra zobrazení

Ale to nie je dosť a hlavne by nám to vôbec nepomohlo pre ďalší príklad, kde priamky zrkadlení nie sú rovnobežné. Ešte jeden prístup, ktorý môžeme použiť, spočíva v tom, že si uvedomíme, že zrkadlenie je involúcia, teda je rovnaké ako jeho inverzné zobrazenie. To tiež znamená, že platí

$$\sigma_g \circ \sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_j = id$$

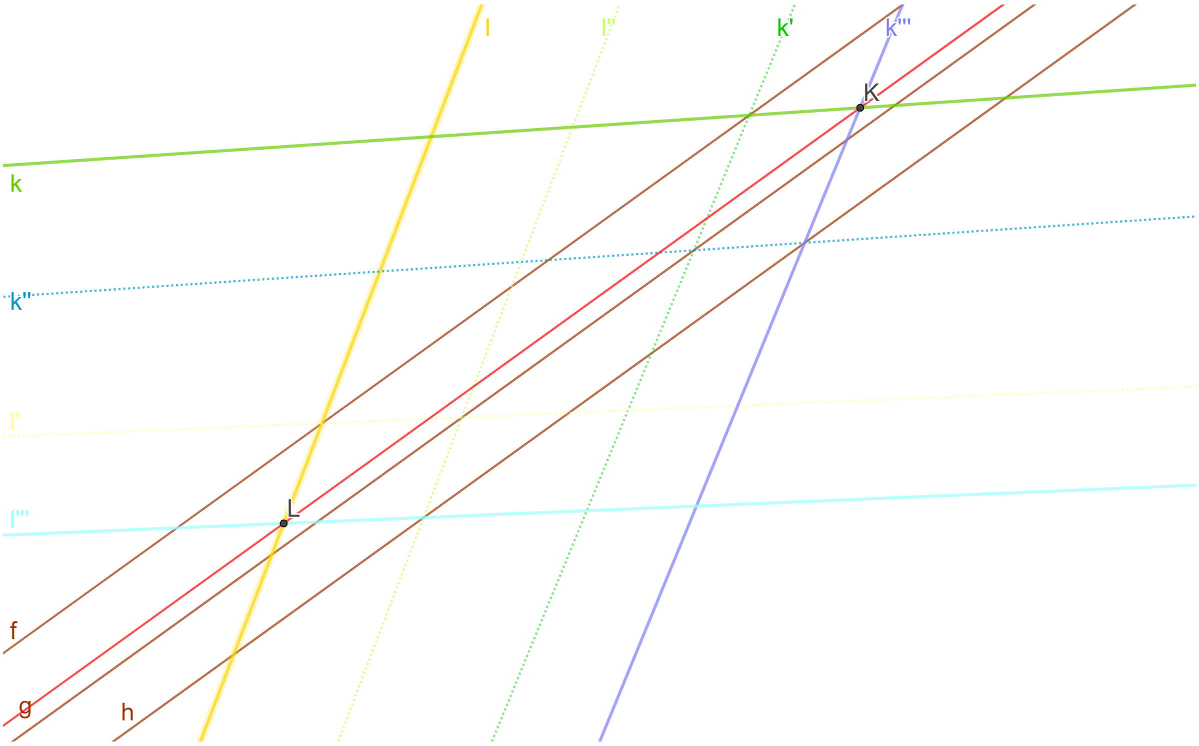
A teraz sa pozrime na kompozíciu prvých dvoch zrkadlení. Ide o zrkadlenie okolo dvoch rovnobežných priamok a teda sa jedná o posunutie. Aby sme zrušili efekt zobrazenia $\sigma_f \circ \sigma_g$, musíme zo zvyšných dvoch zobrazení skonštruovať rovnaké posunutie, ale v opačnom smere. Inak povedané,

- priamka j sa nachádza od priamky h v rovnakej vzdialenosti ako priamka g od priamky f
- priamka j leží na opačnej strane priamky h než priamka g od priamky f.

Takto sa nám posunutia zrušia.

C. Geometrická konštrukcia

Geometricky môžeme zostrojiť priamku výsledného zrkadlenia. Môžeme ale aj dokázať, že sa jedná o jednoduché zrkadlenie okolo priamky (Geradespiegelung), a to tak, že ukážeme, že zobrazenie má dva fixné body a nie je identické. Za tým účelom stačí zostrojiť obraz dvoch priamok, rôznobežných s f, g, h. Priesečníky týchto priamok sú fixné body výsledného zobrazenia, a ak zostrojíme dva, musí byť výsledné zobrazenie zrkadlením okolo priamky.



Príklad 3

Majme tri priamky f, g, h, pretínajúce sa v jedinom bode. Dokážte,že existuje priamka j taká, že pre zrkadlenia okolo priamok f, g, h , j platí $\sigma_h \circ \sigma_g \circ \sigma_f = \sigma_j$ - teda že tri zrkadlenia môžeme nahradiť jediným. Kde leží priamka j?

Riešenie

Tu naivné obrázky nepomôžu, a algebra funguje rovnako ako v predchádzajúcom prípade:

A. Algebra zobrazení

Zrkadlenie je involúcia, teda je rovnaké ako jeho inverzné zobrazenie. To tiež znamená, že platí

$$\sigma_g \circ \sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_j = id$$

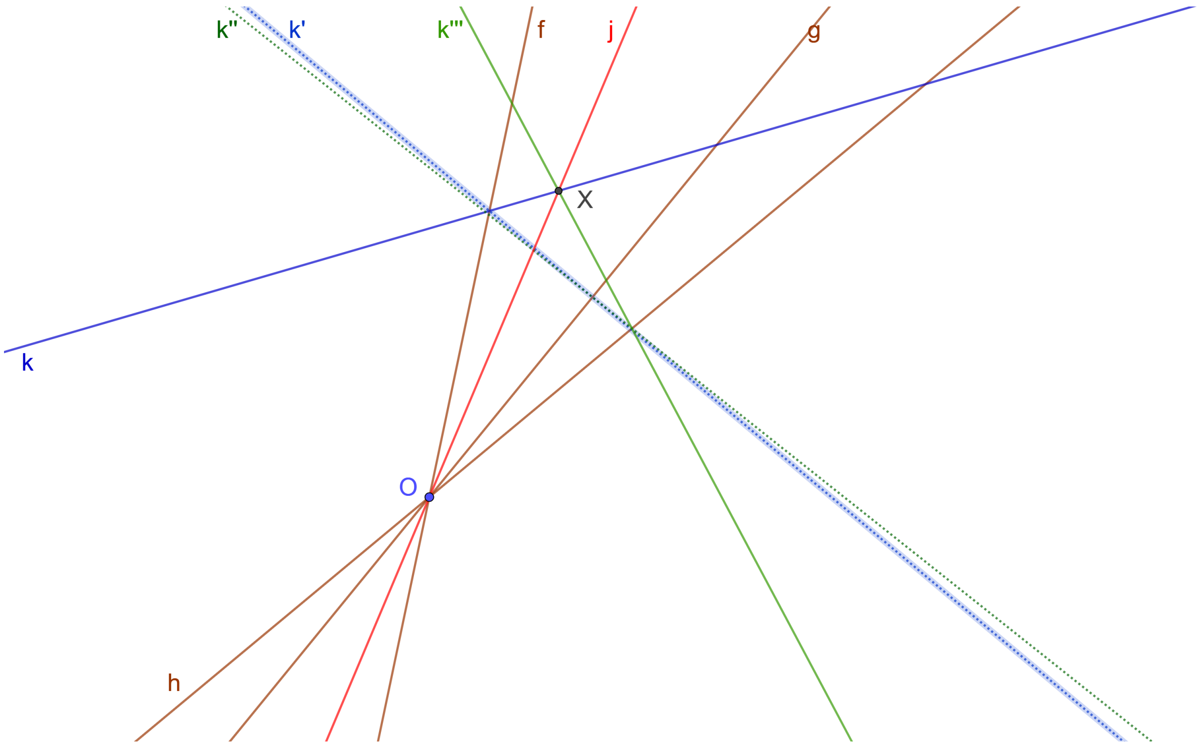
A teraz sa pozrime na kompozíciu prvých dvoch zrkadlení. Ide o zrkadlenie okolo dvoch rôznobežných priamok a teda sa jedná o rotáciu. Aby sme zrušili efekt zobrazenia $\sigma_f \circ \sigma_g$, musíme zo zvyšných dvoch zobrazení skonštruovať rovnakú rotáciu, ale v opačnom smere. Inak povedané,

- priamka j prechádza spoločným priesečníkom priamok f, g, h.
- priamka j zviera s priamkou h opačný uhol ako priamka g s priamkou f (veľkosti uhlov meriame proti smeru hodinových ručičiek)

Takto sa nám otočenia zrušia.

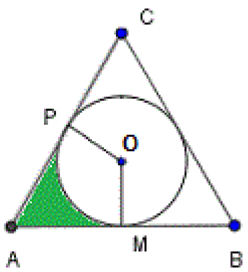
B. Geometrická konštrukcia

Pretože poznáme jeden bod priamky j, stačí zostrojiť ľubovoľný iný bod.



Príklad 4

Strana trojuholníka má dĺžku 1. Nájdite obsah zelenej plochy.



Riešenie

Uvažujem trojuholník AMO. Je pravouhlý, a súčet jeho prepony AO a odvesny MO je rovný výške trojuholníka ABC. Z Pytagorovej vety máme

$$(v-r)^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$v^2 - 2vr + r^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\frac{3a^2}{4} - \sqrt{3}ar = \frac{a^2}{4}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{v}{3}$$

Teraz už stačí odčítať plochu kruhu od plochy trojuholníka a výsledok vydeliť troma.

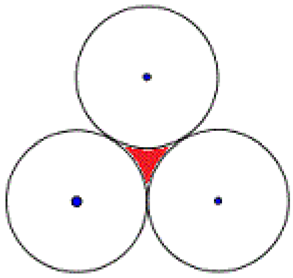
$$S = \frac{S(\Delta) - S(\circ)}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \pi\frac{3}{36}\right)a^2$$

$$\approx 0.2014$$

Príklad 5

Polomer kružníc je 1. Vypočítajte obsah červenej plochy.



Riešenie

Stredy troch kruhov okolo červenej plochy tvoria rovnostranný trojuholník so stranou a = 2r. Tri časti kruhov majú stredový uhol 60°, teda spolu 180°. Plocha červenej oblasti teda je

$$S = S(\Delta) - S(\text{◗}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(2r)^2 - \frac{\pi}{2}r^2 = \frac{4\sqrt{3}-\pi}{2}r^2$$
$$\approx 1.893$$

---

2. Príklady na zahriatie

Príklad 1: cos(1°) je iracionálne číslo

alebo matematická indukcia naopak: pomocou matematickej indukcie ukazujeme, že platnosť base case vedie k logickým rozporom.

PROOF THAT COS (1°) IS IRRATIONAL

SINCE

$$\cos(N^\circ + 1^\circ) + \cos(N^\circ - 1^\circ) = 2\cos(1^\circ)\cos(N^\circ)$$

WE GET THAT

$$\cos(2^\circ) = 2\cos^2(1^\circ) - 1$$

IF WE ASSUME $\cos(1^\circ)$ IS RATIONAL, IT MEANS $\cos(2^\circ)$ WILL ALSO BE RATIONAL AND BY INDUCTION ALL $\cos(N^\circ)$ $N \geq 1$ ARE GOING TO BE RATIONAL AS WELL. NOW SINCE, FOR INSTANCE,

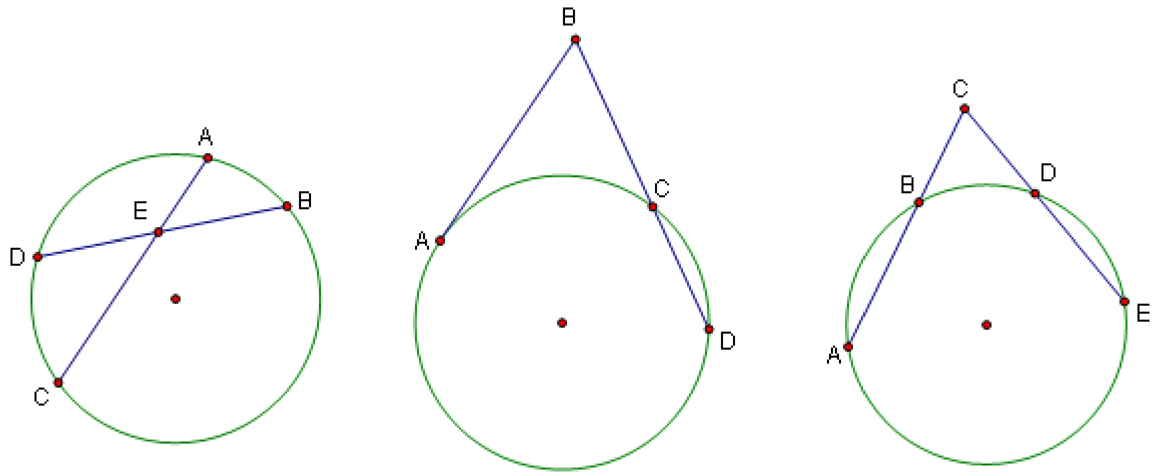
$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ WHICH IS CLEARLY IRRATIONAL

WE HAVE REACHED A CONTRADICTION!

@FERMATSLIBRARY

"Sila" bodu - Power of a point

Poďme zovšeobecniť tvrdenie, ktorého špeciálny prípad sme už mali:



- Pre pretínajúce sa tetivy platí $AE.CE = DE.BE$
- Pre dotyčnicu a tetivu platí $AB^2 = BC.BD$
- Pre tetivy pretínajúce sa mimo kruhu platí $CB.CA = CD.CE$.

Prvé tvrdenie sme dokazovali pomocou podobnosti trojuholníkov AED a BEC.

Tretie tvrdenie: trojuholníky CDA a CBE sú si podobné, pretože zdieľajú uhol BCD a uhly CBE a ADE sú rovnaké (rovnaké sú uhly ABE a ADE, pretože sú to obvodové uhly zodpovedajúce tetive AB).

Druhé tvrdenie je limitným prípadom tretieho pre B → A.

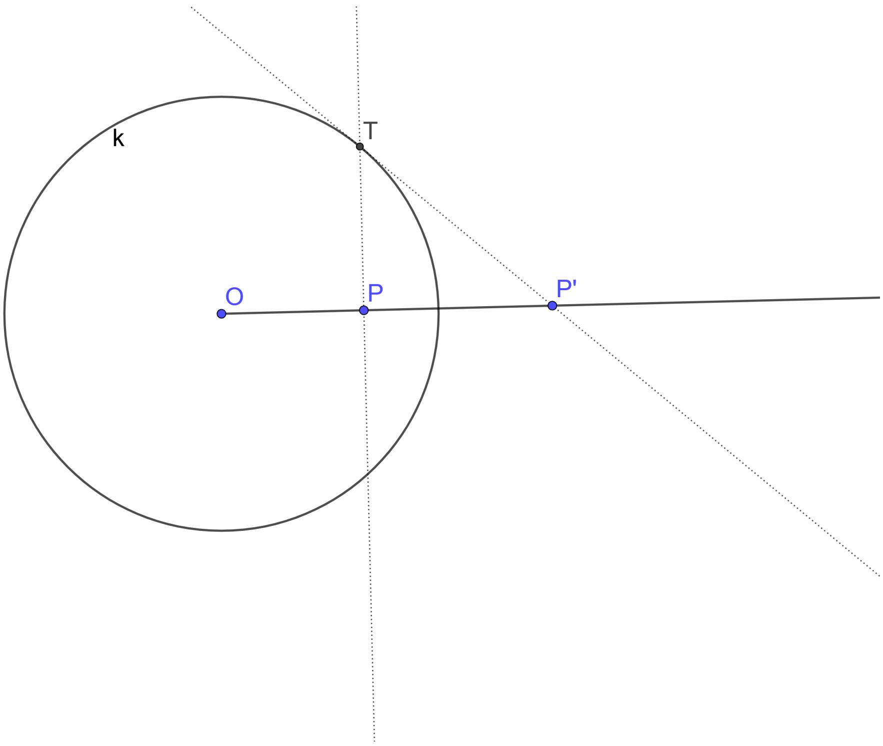
Kruhová inverzia

Doteraz sme sa zaoberali izometriami - teda zobrazeniami, ktoré zachovávajú vzdialenosti bodov. Dnes sa krátko pozrieme na zobrazenie, ktoré nie je izometriou: kruhovú inverziu.

Majme kruh so stredom O, ohraničený kružnicou k o polomere r. Kruhová inverzia zobrazí body vnútri kružnice k na doplnok kruhu v rovine a body mimo kruhu dovnútra kruhu.

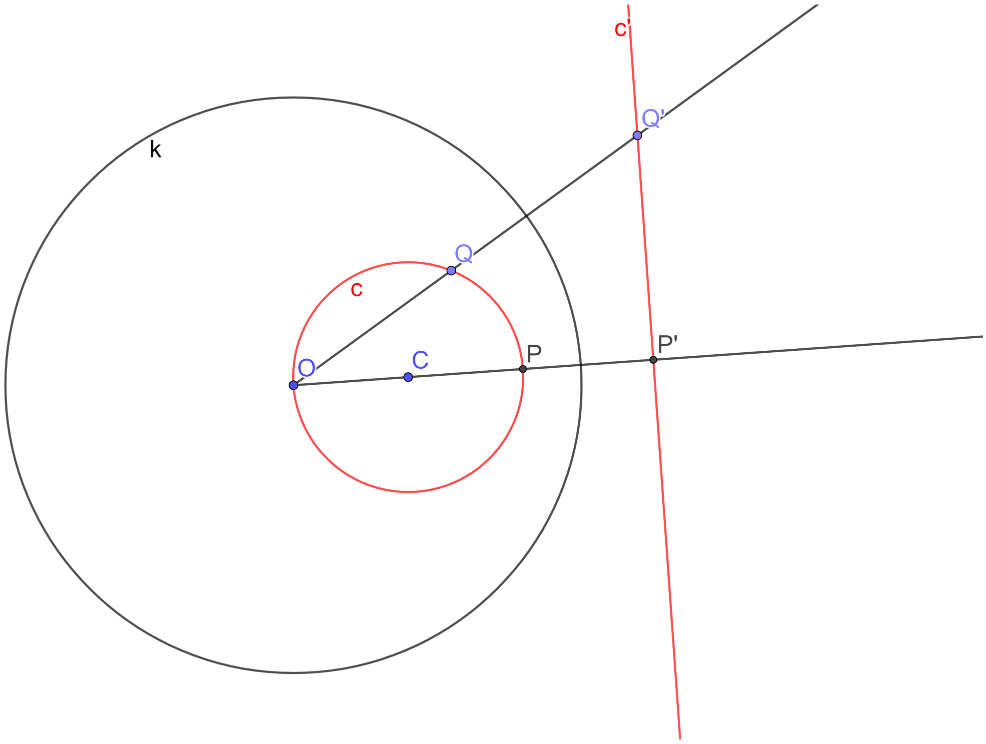
Konkrétne, bod P sa zobrazí do bodu P' na priamke OP tak, že $OP.OP' = r^2$

- Body vnútri kruhu sa zobrazia do bodov mimo kruhu
- Body mimo kruhu sa zobrazia dovnútra kruhu
- Body na kružnici sa zobrazujú samy na seba .



Ako z obrázka vyplýva, že $OP.OP'$?

Inverzia kružnice, prechádzajúcej stredom



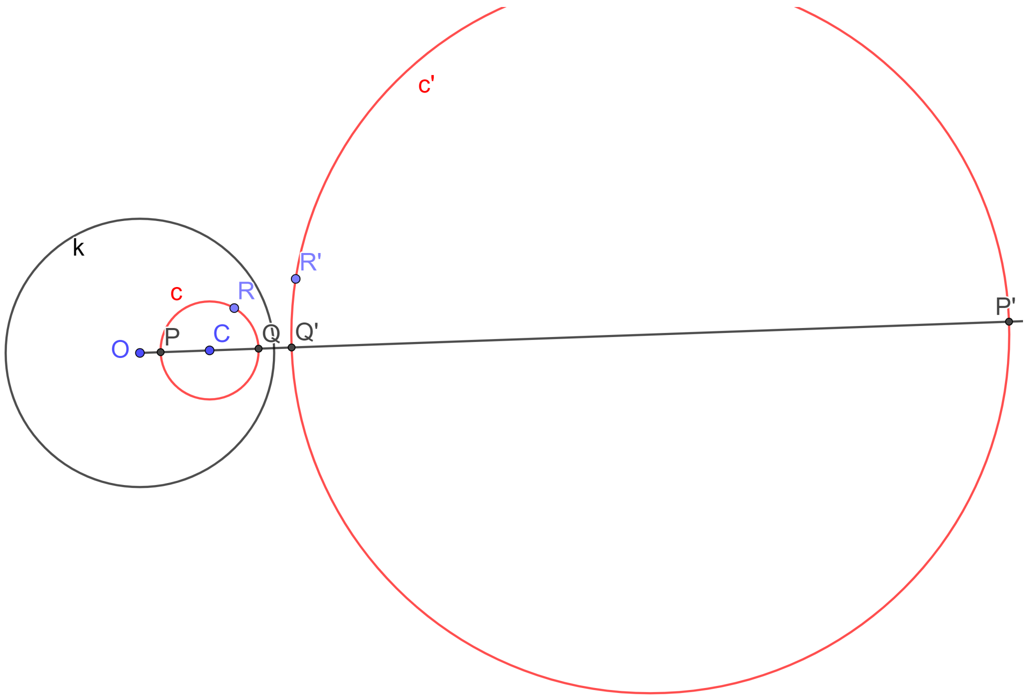
Stred invertujúcej kružnice sa zobrazuje do nekonečne vzdialeného bodu. Preto kružnica prechádzajúca stredom sa zobrazuje na kružnicu s nekončným polomerom - priamku.

Pretože

$$OP \cdot OP' = r^2$$
$$OQ \cdot OQ' = r^2$$
$$\frac{OQ}{OP} = \frac{OQ'}{OP'}$$

a uhol pri O majú trojuholníky OPQ a $OQ'P'$ spoločný, sú si tieto trojuholníky podobné. Pretože OPQ je pravouhlý trojuholník, musí byť pravouhlý aj trojuholník $OQ'P'$. Teda kružnica c sa zobrazuje na priamku, kolmú na OP a prechádzajúcu bodom P'.

Inverzia ľubovoľnej kružnice

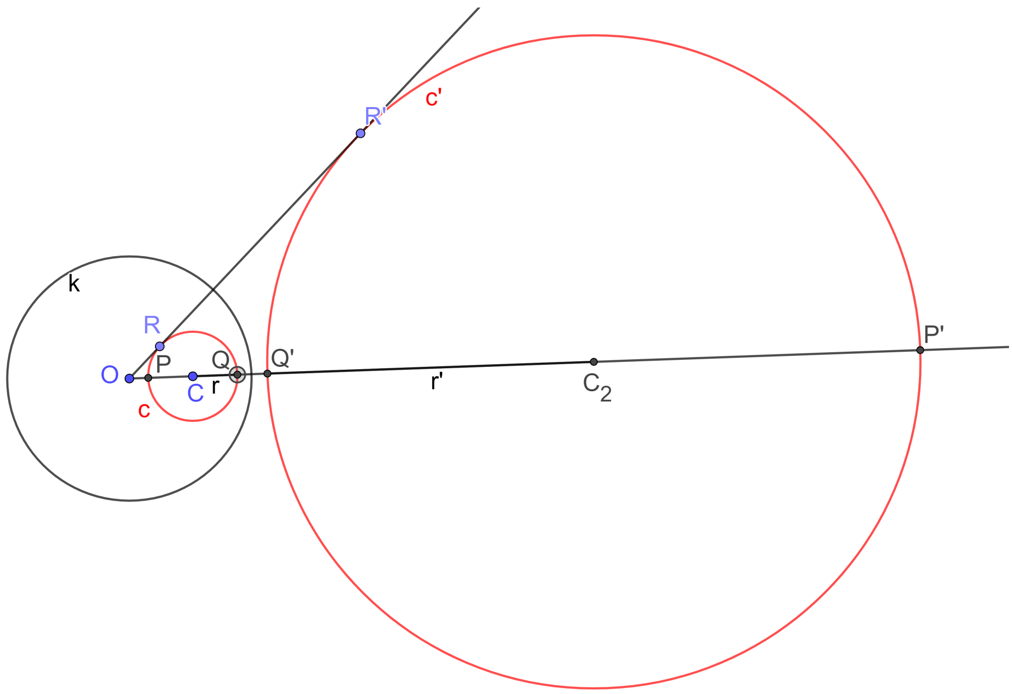


Pre dôkaz, že obrazy všetkých bodov kružnice c ležia na kružnici c' stačí dokázať, že trojuholník P'Q'R' je pravouhlý. (**domáca úloha**)

Výraz pre polomery kružnice a jej obrazu

Nech R je polomer kružnice k (teda tej, okolo ktorej robíme inverziu, r polomer kružnice c vnútri k a r' polo

mer obrazu kružnice c:)



$$\frac{r}{r'} = \frac{OP' - OQ'}{OQ - OP}$$

$$= \frac{\frac{R^2}{OP} - \frac{R^2}{OQ}}{OQ - OP} = \frac{R^2}{OQ \cdot OP}$$

Pretože podľa vety o sile bodu $OQ \cdot OP = OR^2 = OC_2^2 - r'^2$, máme konečne

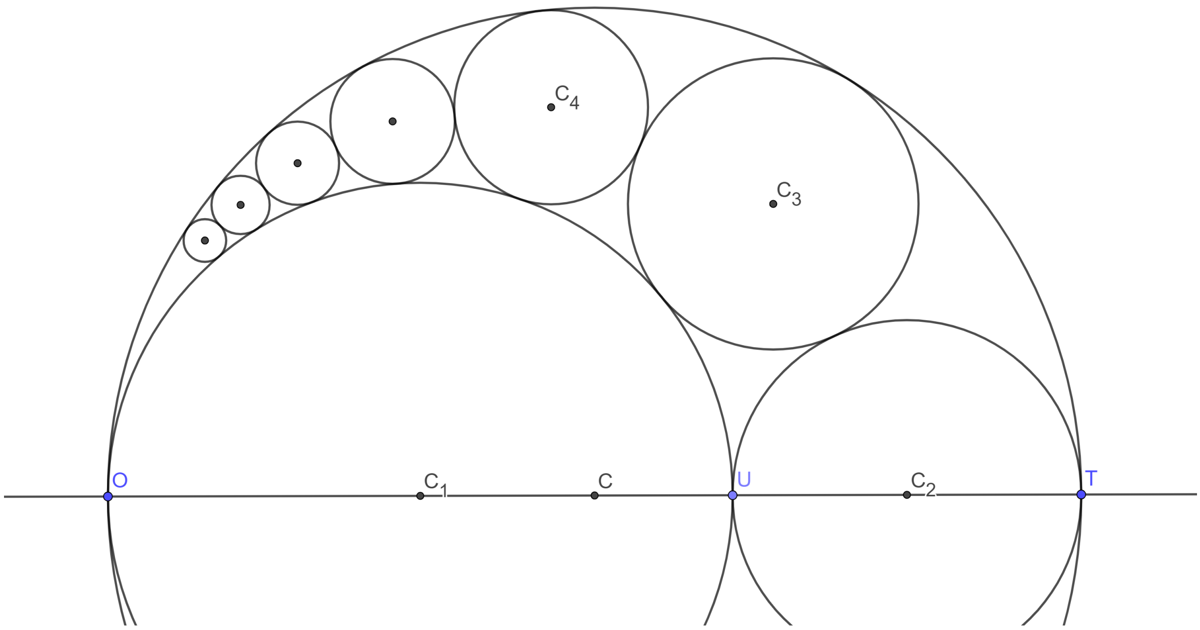
$$r = \frac{R^2 r'}{OC_2^2 - r'^2}$$

Upozorňujem, že vlastnosť "byt stredom kružnice" sa pri kruhovej inverzii nezachováva. Teda obraz bodu C nie je stredom obrazu kružnice c, preto aj má íné označenie.

Načo to je dobré

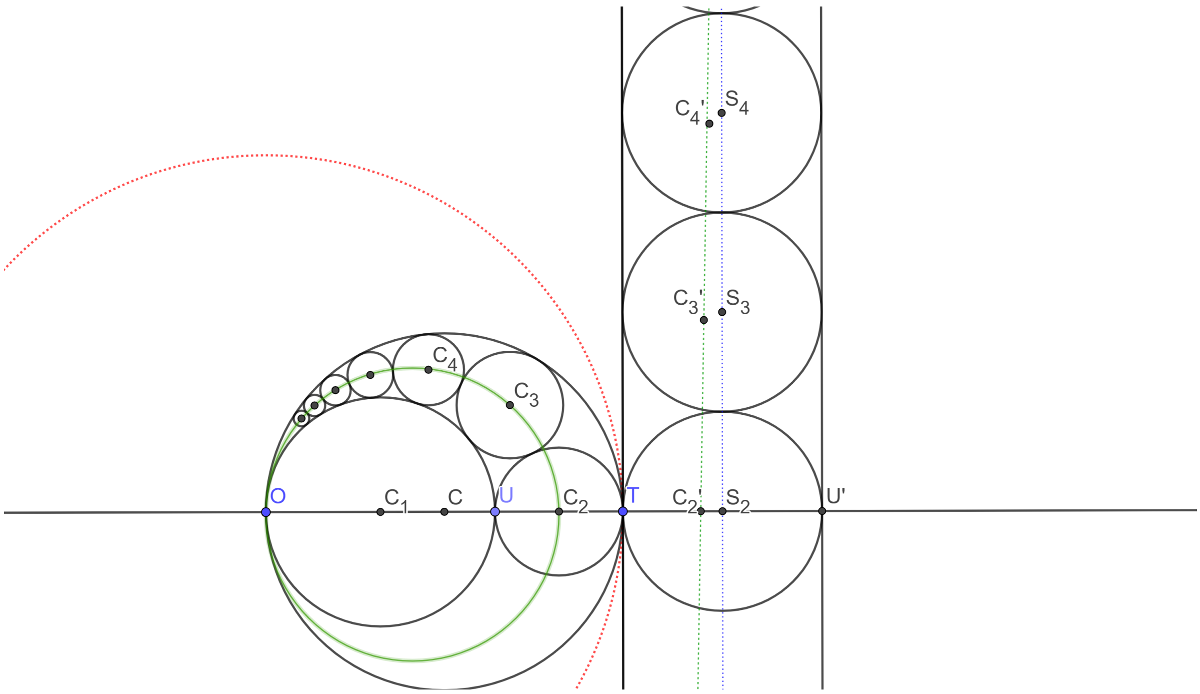
Niekedy je výhodné transformovať kružnce na priamky a kružnice na iné kružnice. Typický príklad je toto:

Aké sú polomery kružníc v postupnosti $C_2, C_3, \ldots$, ak polomer kružnice C je r=1 a kružnice C_1 r_1 ?



Riešenie

sa opiera o kruhovú inverziu okolo červenej kružnice. Je také estetické, že sa človeku ani nechce počítať, pretože to sú samé pravouhlé trojuholníky.



Poďme počítať.

- Polomer projekčnej kružnice (červenej) je $OT \equiv R = 2$.
- Polomer veľkej kružnice (so stredom C) je podľa zadania 1
- a polomer menšej kružnice so stredom C_1 je podľa zadania r.
- Polomer kružnice so stredom C_2 je $UC_1 \equiv r_2 = 1 - r_1$.
- Obraz kružnice so stredom C je dotyčnica prechádzajúca bodom T.
- Obraz kružnice so stredom C_1 je rovnobežka s dotyčnicou prechádzajúca bodom U'. Platí $OU \cdot OU' = R^2 = 4$ a teda

$$OU' = 2 + 2r'_2 = \frac{4}{2r_1}$$
$$r'_2 = \frac{1 - r_1}{r_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

- Ako som už písal, vlastnosť "byť stredom kružnice" sa pri kruhovej inverzii nezachováva, takž obrazy stredov kružníc $C'_2, C'_3, \ldots$ nie sú totožné so stredmi obrazov kružníc $S_2, S_3, \ldots$
- Budeme ešte potrebovať vzdialenosť $OC'_2 = 1 + \frac{1}{r_1}$.
- Stredy kružníc $C_2, C_3, \ldots$ ležia na kružnici o polomere $\rho = r_1 + r_2/2$.

Teraz už môžeme začať počítať:

Začneme s pravouhlým trojuholníkom OS_2S_3. Z Pytagorovej vety máme

$$OS_3 = \sqrt{(2 + r'_2)^2 + (2r'_2)^2}$$

Trojuholník OC_2C_3 je tiež pravouhlý a pretože má spoločný uhol s trojuholníkom OS_2S_3, sú si tieto trojuholníky podobné. Preto

$$\frac{C_2C_3}{OC_2} \equiv \frac{r_2 + r_3}{2 - r_2} = \frac{2r'_2}{OS_3} \equiv \frac{S_2S_3}{OS_3}$$

Prostredná rovnosť nám dáva vzťah, z ktorého môžeme vyjadriť r_3 v termínoch r_1.

Podobne môžeme vyjadriť polomery ďalších kružníc.

3. Geometria

Dnes sme najviac urobili na domácu úlohu.

5 izometrií roviny

Každú izometriu roviny (teda zobrazenie, zachovávajúce vzdialenosti) vieme vyjadriť ako jedno z piaich základných zobrazení: zrkadlenie, posunutie, rotácia, stredová súmernosť, posunuté zrkadlenie.

- Zrkadlenie
- Posunutie
- Rotácia
- Stredová symetria
- Posunuté zrkadlenie

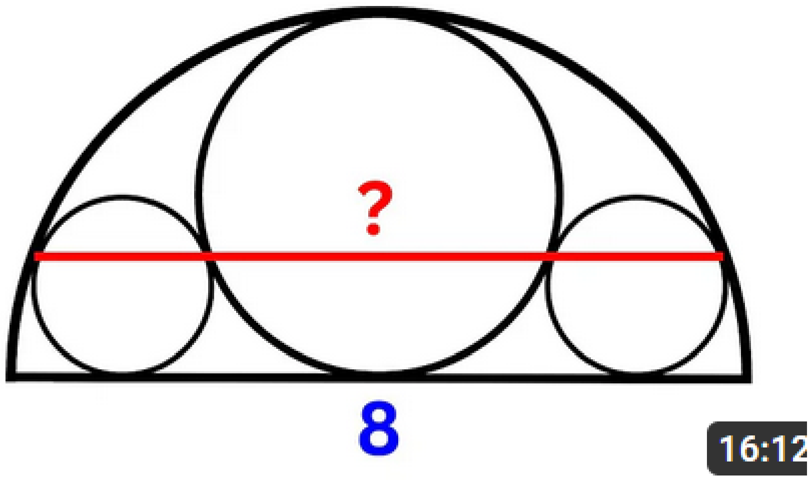
Ďalšie tvrdenia

Toto budeme dokazovať nabudúce:

- Každú izometriu môžeme vyjadriť ako kompozíciu najviac troch zrkadlení.
- Každú izometriu môžeme vyjadriť ako kompozíciu posunutia a izometrie s najmenej jedným pevným bodom.
- Kompozícia rotácie a posunutia je rotácia (má pevný bod!)

4. Domáca úloha (nová)

1. Nájdite dĺžku vyznačenej úsečky.



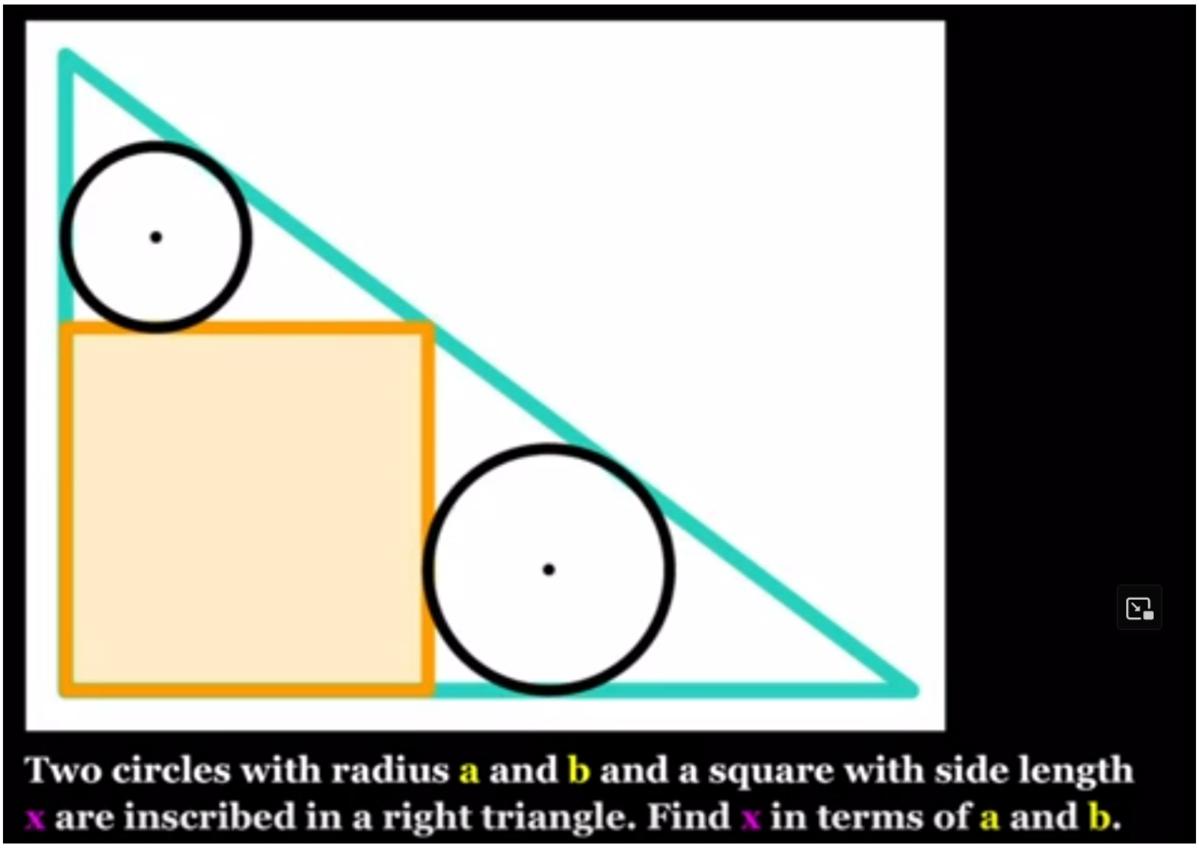
Návod: toto nemusí byť nevyhnutne príklad na kruhovú inverziu, ale môže to byť aj príklad na podobné trojuholníky alebo oboje spolu.

2. Nájdite a, pre ktoré má funkcia

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + x}$$

rovnaký definičný obor ako rozsah hodnôt.

3. Vyriešte



---

5. Program na budúci týždeň

- Dôkaz Ptolemaiovej vety pomocou kruhovej inverzie
- izometrie v rovine: zložitejšie tvrdenia a príklady