Hodina 29. decembra 2023

Program:

1. Domáca úloha (z minula)
2. Niekoľko príkladov na zahriatie a pozdvihnutie mysli: matice
3. Row reduction
4. Domáca úloha (nová)
5. Program na budúci týždeň

0. Úvod

Tento text a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári https://github.com/PKvasnick/Erik. Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

Videohovor Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť.*

---

1. Domáca úloha

Príklad 1

Nájdite všetky $y \in C$, spĺňajúce rovnicu

$$\sqrt{+y} + \sqrt{-y} = 4$$

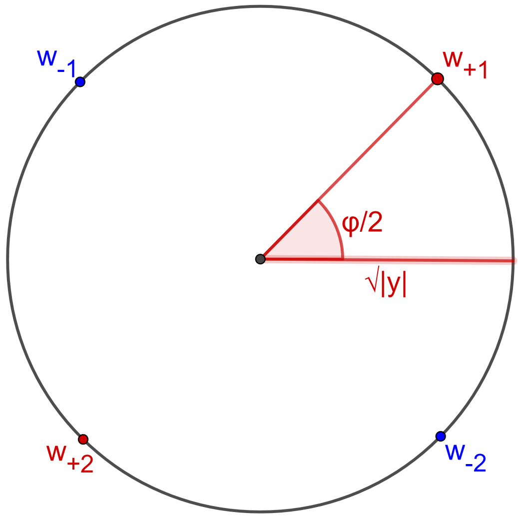
Návod: U reálnej odmocniny berieme ako hodnotu nezáporné riešenie rovnice $w^2 = y, w, y \in R_+$. U V komplexných číslach takúto konvenciu nemáme a odmocnina je viacznačná (preto sa znak odmocniny pre komplexné čísla prakticky nepoužíva).

Riešenie

Píšme $y = |y|e^{i\phi}$, $\sqrt{.} \to (.)^{1/2}$. Najprv vypočítame odmocniny:

$$\begin{aligned} w_+^2 = y = |y|e^{i\phi} \implies w_{+1} = |y|^{1/2}e^{i\phi/2}, \quad w_{+2} = |y|^{1/2}e^{i(\phi/2+\pi)} \\ w_-^2 = -y = |y|e^{i(\phi+\pi)} \implies w_{-1} = |y|^{1/2}e^{i(\phi/2+\pi/2)}, \quad w_{+2} = |y|^{1/2}e^{i(\phi/2+3\pi/2)} \end{aligned}$$

Polohu koreňov v komplexnej rovine zobrazuje nasledujúca schéma:



Potrebujeme skombinovať červený a modrý koreň tak, aby sme dostali reálne číslo 4. Na to musí byť $\phi = \pi/2$ alebo $\phi = -\pi/2$

$$w_{+1} + w_{-2} = |y|^{1/2} e^{i\pi/4} + |y|^{1/2} e^{-i\pi/4} = 2|y|^{1/2} \cos\frac{\pi}{4} = 4$$
$$|y|^{1/2} = 2\sqrt{2} \implies |y| = 8$$

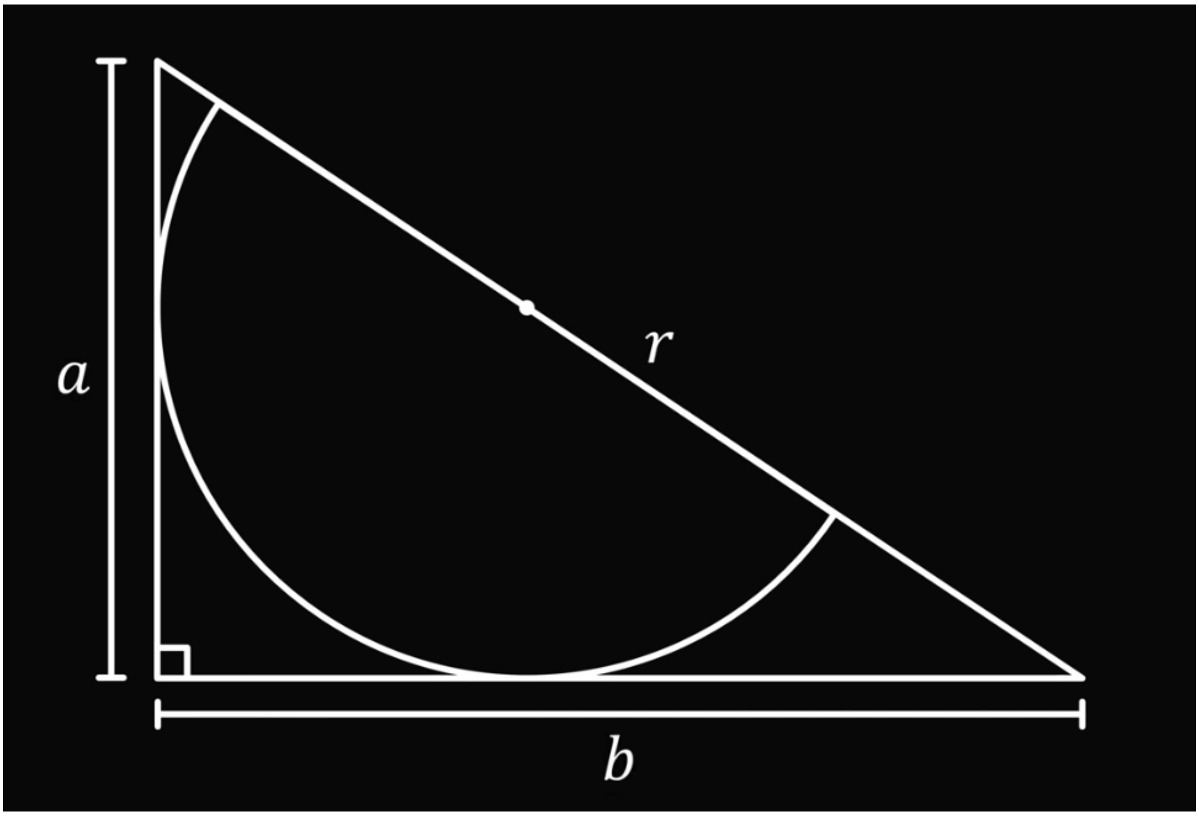
a teda máme riešenie $y = 8i$, zatiaľ čo druhá možnosť dáva riešenie $y = -8i$. Skúška správnosti:

$$y = +8i: \quad \sqrt{+8i} + \sqrt{-8i} = 2\sqrt{2}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) + 2\sqrt{2}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = 4$$
$$y = -8i: \quad \sqrt{-8i} + \sqrt{+8i} = 2\sqrt{2}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) + 2\sqrt{2}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = 4$$

To sme ale využili iba jednu dvojicu odmocnín, pomocou tej druhej vieme skonštruovať riešenie rovnice s -4 na pravej strane.

Príklad 2

Nájdite r



Riešenie

Body dotyku na odvesnách delia pravouhlý trojuholník na štvorec o polomere r a dva menšie pravouhlé trojuholníky, podobné pôvodnému. Z podobnosti trojuholníkov vyplýva

$$\frac{a-r}{r}=\frac{r}{b-r} \implies ab-ar-br=0 \implies r=\frac{ab}{a+b}$$

Ľahké.

Príklad 3

Nájdite $\tan(\alpha+\beta)$ v termínoch $\tan\alpha, \tan\beta$.

Riešenie

Použijeme súčtové výrazy pre sínus a kosínus, a vydelíme čitateľ i menovateľ výrazom $\cos\alpha\cos\beta$, aby sme dostali výraz v termínoch $\tan\alpha,\ \tan\beta$:

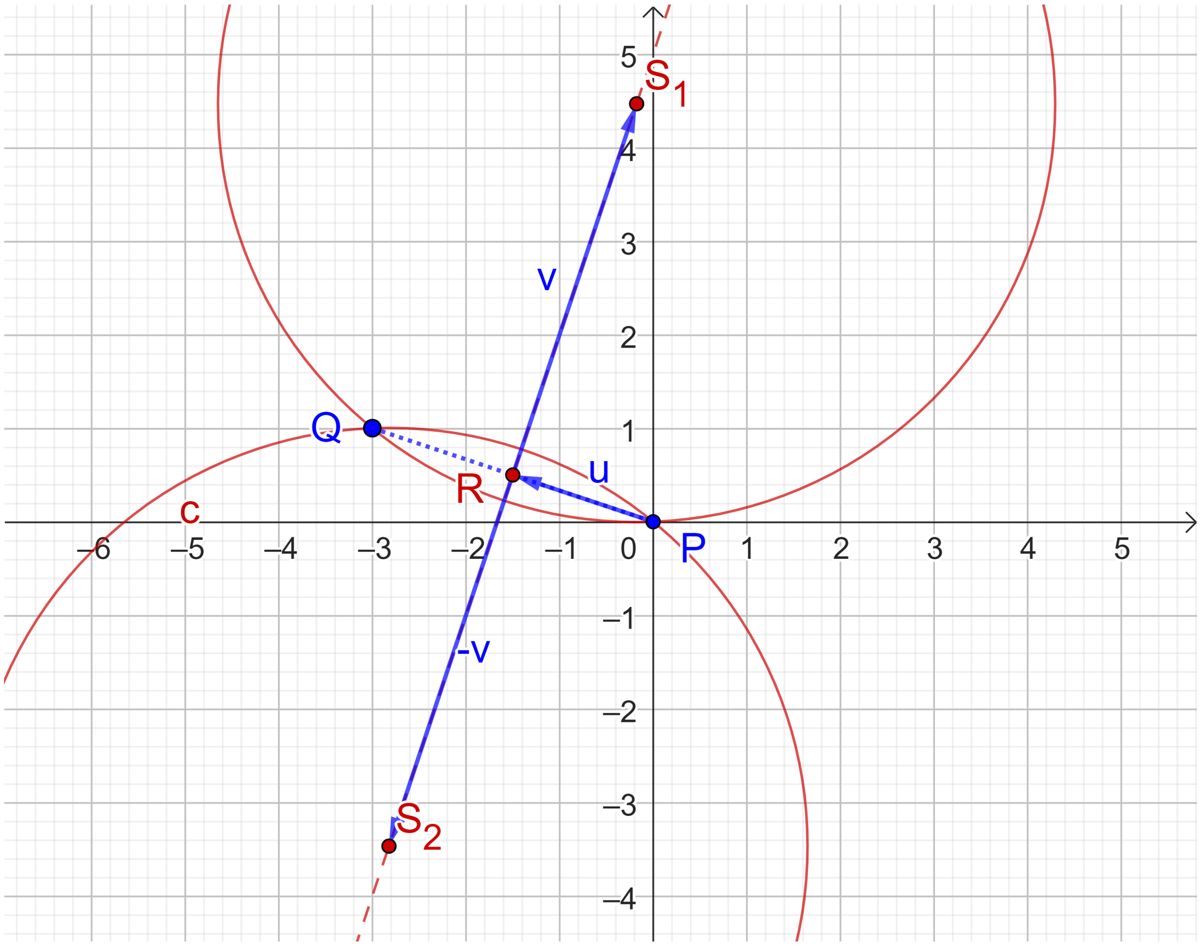
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Príklad 3

Je daný bod $Q=[-3,1]$. Vypočítajte polohy stredov všetkých kružníc o polomere $r=\sqrt{20}$, ktoré prechádzajú počiatkom $O=[0,0]$ a bodom Q.

Riešenie

Máme samé stredy a pravé uhly, takže to je ľahučké:



Vykročme od počiatku súradníc do pol cesty smerom k bodu Q: Príslušný vektor je $\vec{u} = (-3/2, 1/2)$ a jeho dĺžka je $\sqrt{10}/2$. Smerom ku stredu kružnice musíme teraz vykročiť v kolmom smere k $\vec{u}$, teda v smere $\vec{u}_\perp = (1/2, 3/2)$. Aby sme dostali polomer kružnice $\sqrt{20}$, ľahko uvidíme že potrebujeme $\sqrt{7}$-násobok vektora $\vec{u}_\perp$ v jednom i druhom smere. Takto dostaneme dva stredy, $S_1 = (-3/2 + \sqrt{7}/2, 1/2 + 3\sqrt{7}/2)$ a $S_1 = (-3/2 - \sqrt{7}/2, 1/2 - 3\sqrt{7}/2)$. Pre skúšku správnosti stačí skontrolovať vzdialenosť S_1, S_2 od počiatku - bodu P.

Niekoľko príkladov na zahriatie a povznesenie mysle

Lineárna nezávislosť a ortogonálne bázy vektorov

Negatívna definícia

Vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nazývame *lineárne závislými*, ak existuje ich nulová lineárna kombinácia, teda čísla $d_1, d_2, d_3 \in R$ také, že $d_1\vec{a} + d_2\vec{b} + d_3\vec{c} = 0$. Znamená to, že priestor, tvorený lineárnymi kombináciami vektorov má nižšiu dimenziu než 3.

Trojice vektorov, ktoré sú lineárne závislé, môžeme použiť ako súradnice vektorového priestoru: každý bod-vektor $\vec{x}$ vieme jednoznačne vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Diagnostika

Ako zistím, či je nejaká trojica vektorov $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lineárne nezávislá?

1. Geometrická metóda: Vypočítam objem hranola s hranami $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Ten je

$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

(vektorový súčin mi dá plochu podstavy, a skalárny priemet tretieho vektora do normály na podstavu, čiže výšku). Keď si vyjadríme vektorový súčin ako determinant a urobíme skalárny súčin, zistíme, že úloha sa redukuje na zistenie, či je determinant matice, vytvorenej vektormi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nulový:

$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Že to takto funguje sa dá najlepšie uvidieť tak, že rozložíme determinant vektorového súčinu podľa horného riadku, urobíme skalárny súčin, a poskladáme ho naspäť.

2. Algebraická metóda: Riešim sústavu $d_1\vec{a} + d_2\vec{b} + d_3\vec{c} = 0$ niektorou z dostupných metód, resp. robím diagnostiku matice sústavy, či nie je singulárna - teda či jej hodnosť = počet lineárne nezávislých riadkov/stĺpcov nie je menšia ako rozmer. Táto metóda sa dá ľahko previesť na test nulovosti determinantu ako v predchádzajúcom prípade, ale môžeme sa tiež pokúsť previesť maticku na hornú trojuholníkovú pomocou ekvivalentných úprav a zistiť, ako to dopadne.

Matice: Redukcia po riadkoch (row reduction)

Ekvivalentné úpravy: ľubovoľný riadok alebo stĺpec matice môžeme nahradiť lineárnou kombináciou všetkých riadkov či stĺpcov.

Problém 1 : Nachádza sa vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

v priestore pokrytom vektormi

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

Riešenie Priestorom pokrytým vektormi $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ myslíme vektorový priestor, tvorený všetkými lineárnymi kombináciami týchto vektorov; tento priestor sa označuje ako *span*, čiže rozpätie:

$$\mathrm{Span}(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}) = \{\vec{x} : \exists c_1, c_2, c_3 \in R \text{ také že } \vec{x} = c_1\vec{a_1} + c_2\vec{a_2} + c_3\vec{a_3}\}$$

Otázku teda môžeme preformulovať takto: Existujú tri reálne čísla c_1, c_2, c_3 také, že platí

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

Rozpísaním po zložkách dostaneme sústavu troch lineárnych rovníc

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 & & & - & c_3 & = & 2 \\ -2c_1 & + & 3c_2 & - & c_3 & = & 1 \\ 3c_1 & - & 3c_2 & & & = & -1 \end{array}$$

Aj keď nás tu riešenie zvlášť nezaujíma a potrebujeme iba vedieť, či existuje. Štandardným spôsobom zostavíme rozšírenú (augmentovanú) maticu a Gaussovou metódou vyriešime sústavu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

a dostali sme na treťom riadku výraz $0 = -2$, čo znamená, že sústava nemá riešenie a vektor teda neleží v priestore, tvorenom danými troma vektormi.

Pozrime sa na tento problém z inej strany: Čo musí platiť pre všeobecný vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, aby ležal v spane vektorov $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$? Napíšme znova našu augmentovanú maticu a riešme:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x_1 \\ -2 & 3 & -1 & x_2 \\ 3 & -3 & 0 & x_3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x_1 \\ 0 & 3 & -3 & 2x_1 + x_2 \\ 0 & -3 & 3 & -3x_1 + x_3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x_1 \\ 0 & 3 & 1 & 2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 + x_2 + x_3 \end{array}\right)$$

teda pre zložky vektora $\vec{x}$ musí platiť $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Kde žijú také vektory? Stačí sa pozrieť na výraz, ktorý sme dostali, ako na rovnicu roviny: je to rovina prechádzajúca počiatkom a má normálový vektor $\vec{n} = (-1, 1, 1)$ - a to nám dáva dobrú predstavu o spane vektorov $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$. Aby to celé dávalo zmysel, musia vektory $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ tiež ležať v tejto rovine!

Problém 2 Nájdite kvadratickú funkciu $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$, ktorá prechádza bodmi $[1, 3], [2, -1], [3, 5]$.

Riešenie: Máme tri neznáme koeficienty a_0, a_1, a_2, a tri body nám dajú tri rovnice pre tieto koeficienty.

$$\begin{aligned} a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 &= y_1 \\ a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 &= y_2 \\ a_2x_3^2 + a_1x_3 + a_0 &= y_3 \end{aligned}$$

V maticovom tvare

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Poznámka Síce hľadáme kvadratickú funkciu a v matici máme druhé mocniny koeficientov, ale nájdenie koeficientov je lineárny problém.

Môžeme dosadiť hodnoty x_i, y_i pre naše tri body, zostaviť augmentovanú maticu a vyriešiť sústavu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 -= 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -13 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 -= 9R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -13 \\ 0 & -6 & -8 & -22 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 -= 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 17 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 += 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 38 \\ 0 & 0 & 1 & 17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 /= -2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 17 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 -= R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 17 \end{array}\right)$$

Nezastavili sme sa, keď sme maticu vľavo previedli na hornú trojuholníkovú (*row echelon form*), ale uviedli sme ju do tvaru jednotkovej matice (*reduced row echelon form*) a vidíme, že hľadaná kvadratická funkcia má tvar $y = 5x^2 - 19x + 17$.

Odbočka 1: Interpolácia: Predchádzajúci problém je problém interpolácie. Ukážeme si iné, priamočiarejšie riešenie: Uvažujme polynómy

$$l_j^{(3)} = \prod_{i \neq j}^{3} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

$$l_1^3 = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$l_2^3 = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$l_3^3 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Sú to kvadratické polynómy, normované tak, aby v príslušnom x_j mali hodnotu 1, a v ostatných $x_i, i \neq j$ sú nulové. Nazývajú sa Lagrangeove polynómy. Lagrangeov interpoland potom skonštruujeme ako lineárnu kombináciu:

$$y_L(x) = \sum_{j=0}^{3} l_j^{(3)} y_j$$

Takto možno zostrojiť interpoland pre ľubovoľný počet bodov.

Odbočka: Lineárna regresia Predchádzajúci problém je problém interpolácie - hľadáme funkciu, prechádzajúcu danými bodmi. Aby mala úloha riešenie, potrebujeme funkciu s toľkými parametrami, koľko máme bodov. Pri vyššom počte bodov nemusí byť riešenie to, čo si predstavujeme - môže divoko oscilovať medzi zadanými bodmi. Preto často preferujeme funkciu s menej parametrami, než máme bodov, aj za cenu, že výsledná funkcia nebude prechádzať všetkými bodmi - dôležité je, že bude hladšia. Ak sú body výsledkom merania a teda súradnice nie sú presné, potom je to veľmi rozumný kompromis. Ale ako to spraviť, keď máme viac bodov ako parametrov? Teda, keď naše rovnice vyzerajú takto:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \\ & \cdots & \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{F}\beta = \mathbf{Y}$$

Používame štandardné označenie $\mathbf{F}$ pre maticu faktorov, ktorej členy závisia od hodnôt x_i, a maticu parametrov β. Rovnica dáva zmysel, iba ak nadbytočné dáta sú zbytočné a hovoria to isté. Ak hovoria niečo iné, úloha nemá riešenie. Môžeme sa ale pozrieť na úlohu tak, že chceme nájsť takú krivku, definovanú parametrami a_i, pre ktorú je súčet štvorcov odchýlok hodnôt y najmenší, teda

$$\hat{\beta} = \operatorname{argmin} \left[(\mathbf{Y} - \mathbf{F}\beta)^T (\mathbf{Y} - \mathbf{F}\beta) \right]$$

Riešenie si vyžaduje trošku zložitejšie derivovanie, ale vyzerá takto:

$$(\mathbf{F^T F})\beta = \mathbf{F^T Y} \quad \therefore \quad \beta = (\mathbf{F^T F})^{-1} \mathbf{F^T Y}$$

Všeobecne ale rozhodnutie, aký stupeň polynómu je vhodný pre vystihnutie priebehu dát je celkom ťažké a závisí od okolností.

Problém 3

Továreň vyrába osobné autá, nákladné autá a autobusy. Tri hlavné suroviny, ktoré používa, sú oceľ, sklo a plasty. Nasledujúca tabuľka obsahuje množstvo surovín, potrebných na jednotlivé výrobky, vo vhodných jednotkách:

	Osobné auto	Nákladné auto	Autobus
Oceľ	1	4	6
Sklo	2	3	20
Plast	3	5	15

Denne sa v priemere spotrebuje 48 jednotiek ocele, 113 jednotiek skla a 111 jednotiek plastov. Koľko osobných áut, nákladných áut a autobusov sa priemerne denne vyrobí?

Riešenie Označme c, t, b priemerný počet denne vyrobených osobných áut, nákladných áut a autobusov (*c*ars, *t*rucks, *b*usses). Tabuľka spotreby materiálov pre jednotlivé výrobky nám dáva sústavu lineárnych rovníc pre c, t, b:

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 6\\ 2 & 3 & 20\\ 3 & 5 & 15\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c\\ t\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}48\\ 113\\ 111\end{pmatrix}$$

a riešime zase zostrojením augmentovanej matice a jej uvedením do RREF tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 6 & 48\\ 2 & 3 & 20 & 113\\ 3 & 5 & 15 & 111\end{array}\right) \xrightarrow{R_2-=2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 6 & 48\\ 0 & -5 & 8 & 17\\ 3 & 5 & 15 & 111\end{array}\right) \xrightarrow{R_3-=3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 6 & 48\\ 0 & -5 & 8 & 17\\ 0 & -7 & -3 & -33\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3=5R_3-7R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 6 & 48\\ 0 & -5 & 8 & 17\\ 0 & 0 & -71 & -284\end{array}\right) \xrightarrow{R_3/=-71} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 6 & 48\\ 0 & -5 & 8 & 17\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2-=8R_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 6 & 48\\ 0 & -5 & 0 & -15\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right) \xrightarrow{R_2/=-5} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 4 & 6 & 48\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right) \xrightarrow{R_1-=4R_2+6R_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 12\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right)$$

V priemere sa teda vyrobí 12 osobných, 3 nákladné automobily a 4 autobusy.

Poznámka V tomto prípade sme mali šťastie a vyhli sme sa zásadnému problému takýchto úloh: ako zabezpečiť, aby sme dostali $c, t, b \geq 0$? Typicky sa takáto úloha rieši tak, že hľadáme projekciu riešenia lineárneho systému do podpriestoru $c, t, b \geq 0$ - najbližší vektor k vektoru riešenia, ktorý už leží v požadovanom podpriestore.

Domáca úloha (nová)

1. Dokážte, že v trojuholníku ABC leží priesečník osi uhla β (pri vrchole B) a osi strany b (oproti vrcholu B) na kružnici opísanej trojuholníku.

2. Vezmime ľubovoľný bod P vnútri rovnostrannného trojuholníka. Dokážte že súčet jeho vzdialeností od strán trojuholníka je rovný výške trojuholníka (teda je pre všetky body vnútri trojuholníka rovnaký).
3.

5. Program na budúci týždeň

Zmes:

- Viac komplexných čísel a goniometrie
-