Hodina 11. augusta 2023

Program:

1. Domáca úloha (z minula)
2. Niekoľko príkladov na zahriatie a pozdvihnutie mysli.
3. Geometria. Pytagorova veta.
4. Domáca úloha (nová)

0. Úvod

Tento text a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári https://github.com/PKvasnick/Erik. Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

Videohovor Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť.*

1. Domáca úloha

Príklad 1

Nájdite všetky reálne riešenia rovnice

$$(x^2 - 10x - 12)^{x^2+5x+2} = 1$$

> Návod: Metodicky preskúmať, pre aké a, b je $a^b = 1$.

Riešenie

Začneme skúmaním, pre aké a, b je $a^b = 1$. Platí to v troch prípadoch:

- a = 1, b je ľubovoľné
- $b = 0$, a je ľubovoľné
- $a = -1$, b je celé párne.

***1. prípad:* $a = 1$*, ľubovoľné* b**

Riešenia v tomto prípade budú korene rovnice

$$x^2 - 10x - 12 = 1$$

teda

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{148}}{2} = 5 \pm \sqrt{37}$$

Pre tieto hodnoty je exponent $x^2 + 5x + 2$ rovný

$$x^2 + 5x + 2 = \underbrace{x^2 - 10x - 13}_{0} + 15x + 15 = 90 \pm 15\sqrt{37}$$

a výraz na ľavej strane rovnice je dobre definovaný.

2. prípad:* $b = 0$*,* a *ľubovoľné

Korene exponenta sú

$$x^2+5x+2=0$$
$$x_{3,4}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$$

V týchto hodnotách má základ hodnoty

$$x^2-10x-12=\underbrace{x^2+5x+2}_{0}-15x-14=-15\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}-14$$
$$=\frac{61\mp15\sqrt{17}}{2}$$

Tieto hodnoty základu sú v poriadku a máme ďalšie dve platné riešenia.

3. prípad: $a=-1$**,** $b=2k$

Základ je -1 pre hodnoty

$$x^2-10x-12=-1$$

teda $x_5=-1, x_6=11,$ a pre tieto hodnoty je exponent rovný

$$x^2+5x+2=\underbrace{x^2-10x-11}_{0}+15x+13=15(5\pm6)+13=88\pm6$$

a obe tieto hodnoty sú párne, takže x_5, x_6 sú riešeniami rovnice.

Záver: Našli sme 6 riešení rovnice.

Príklad 2

Dokážte, že pre prirodzené n platí

$$n+\frac{1}{n+\frac{1}{n+\frac{1}{n+\dots}}}=\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$$

Poznámka. Pre n=1 dostávame zlatý rez, pre ostatné n sa tieto čísla nazývajú "metalické čísla".

Riešenie

Aby sme dali nekonečnému reťazovému zlomku presný zmysel, vyjadríme reťazový zlomok ako limitu postupnosti:

$$A_{k+1}^{(n)}=n+\frac{1}{A_k^{(n)}}$$

a stanovíme počiatočné podmienky:

$$A_0^{(n)}=n\implies A_1^{(n)}=n+\frac{1}{n},\,A_2^{(n)}=n+\frac{1}{n+\frac{1}{n}},\dots$$

Mohli by sme položiť tiež $A_0=1$ a dostali by sme mierne odlišnú postupnosť

$$A_0^{(n)}=1\implies A_1^{(n)}=n+1,\,A_2^{(n)}=n+\frac{1}{n+1},\dots$$

Limita postupnosti spĺňa rovnicu

$$A^{(n)} = n + \frac{1}{A^{(n)}}$$
$$\left(A^{(n)}\right)^2 - nA^{(n)} - 1 = 0$$
$$A^{(n)}_{1,2} = \frac{n \pm \sqrt{n^2+4}}{2}$$

Z definície postupnosti jednoznačne vyplýva $A^{(n)} \geq 1 > 0$, takže prípustné je iba kladné riešenie

$$A^{(n)} = \frac{n + \sqrt{n^2+4}}{2}$$

a tento výraz je dobre definovaný pre každé prirodzené n. Tým je tvrdenie dokázané.

Príklad 3

Pomocou princípu dobrého usporiadania dokážte, že rovnica

$$4a^3 + 2b^3 = c^3$$

nemá riešenie v množine prirodzených čísel.

Riešenie

Vyriešme niekoľko okrajových prípadov, aby sme mali poriadok pre malé čísla a, b, c.

$4a^3+2b^3$	**b**	**0**	**1**	**2**
a				
0		0	2	16
1		4	6	20
2		32	34	48

Ani jedno číslo v tabuľke nie je treťou mocninou, takže bezpečne vieme, že tvrdenie neplatí pre $a, b \leq 2,\ c \leq 48$. Pre ostatné a, b, c dokážeme tvrdenie sporom s použitím princípu dobrého usporiadania. Označme C množinu hodnôt c, pre ktoré existuje nejaká dvojica prirodzených čísel a, b tak, že a, b, c je riešením rovnice. Pre dôkaz sporom predpokladáme, že množina C je neprázdna a teda podľa princípu dobrého usporiadania má minimálny prvok c_0. Podľa predpokladu existujú čísla a_0, b_0 tak, že $4a_0^3 + 2b_0^3 = c_0^3$. Pretože ľavá strana rovnice je párna, musí byť párne c_0^3 a teda aj samotné c_0, $c_0 = 2c_1$, pričom c_1 je nejaké prirodzené číslo. Z prípravy vieme, že $c_0 > 48$, a teda $c_1 \geq 25$. Dosadíme:

$$4a_0^3 + 2b_0^3 = (2c_1)^3 = 8c_1^3 \implies 2a_0^3 + b_0^3 = 4c_1^3$$

a teda musí aj b_0 musí byť párne, $b_0 = 2b_1$. Aj tu vieme, že $b_0 > 2$ a teda $b_1 \geq 2$. Opäť dosadíme:

$$2a_0^3 + (2b_1)^3 = 4c_1^3 \implies a_0^3 + 4b_1^3 = 2c_1^3$$

a teda aj a_0 musí byť párne, $a_0 = 2a_1$. Opäť vieme, že $a_0 > 2$ a teda $a_1 \geq 2$. Dosadíme

$$(2a_1)^3 + 4b_1^3 = 2c_1^3 \implies 4a_1^3 + 2b_1^3 = c_1^3$$

a teda trojica (a_1, b_1, c_1) je riešením rovnice a c_1 podľa práva patrí do C. Lenže spoľahlivo vieme, že $c_0 > c_1 > 0$, pretože obe čísla sú zaručene väčšie ako 0, a teda minimálnym prvkom C nie je c_0 , ale c_1. To je rozpor s predpokladom, že množina C má minimálny prvok: pre každý minimálny prvok vieme zostrojiť menší prvok, ktorý takisto patrí do C. Lenže minimálny prvok množiny C musí byť > 48, a teda dostávame rozpor: množina C nemôže mať minimálny prvok. Jediný prípad, kedy tento rozpor nenastane je, keď je množina C prázdna a teda keď platí dokazované tvrdenie: rovnica nemá riešenie v množine prirodzených čísel.

Príklad 4

Pomocou princípu dobrého usporiadania ukážte, že každé celé číslo rovné alebo väčšie ako 8 možno vyjadriť ako súčet celočíselných násobkov 3 a 5.

Riešenie

Skúmajme, ako toto môže fungovať:

Vezmime prirodzené číslo m, a nech $m = 5p + r$. p je prirodzené číslo alebo 0, $r = 0, 1, 2, 3, 4$. Rozdeľme dôkaz podľa hodnôt r a zo začiatku nebudeme príliš riešiť okrajové prípady:

Pre $r = 0$ tvrdenie platí.

Pre $r = 1$ je $m = 5(p-1) + 5 + 1 = 5(p-1) + 2 \cdot 3$ a teda tvrdenie opäť platí.

Pre $r = 2$ je $m = 5(p-2) + 10 + 2 = 5(p-2) + 4 \cdot 3$ a opäť vidíme, že tvrdenie platí.

Pre $r = 3$ tvrdenie platí triviálne.

Pre $r = 4$ je $m = 5(p-1) + 5 + 4 = 5(p-1) + 3 \cdot 3$ a aj v tomto prípade tvrdenie platí.

Teraz tiež vidíme, prečo tvrdenie platí až pre $m \geq 8$: V niektorých prípadoch si potrebujeme "vypožičať " jednu alebo dve päťky, ale ak je n malé, nie je z čoho. 7=5+2, takže by sme potrebovali požičať dve päťky, ale máme iba jednu. 8=5+3, takže tvrdenie platí triviálne, pre 9 máme zvyšok 4, takže si vypožičiavame jedinú päťku, a pre 10 opäť tvrdenie platí triviálne. Pre vyššie čísla si už potom môžeme podľa potreby bezpečne vypožičať jednu i dve päťky.

S rovnakým výsledkom sme mohli namiesto zvyškov po delení 5 analyzovať zvyšky po delení 3. Aby takéto "požičiavanie" fungovalo, je treba, aby obe čísla p, q (v našom prípade 3 a 5) boli vzájomne nesúdeliteľné ("coprime"), teda ich najväčší spoločný deliteľ sa musí rovnať 1. To, čo robíme je, že pre daný zvyšok r hľadáme celé čísla a, b tak, aby $ap + bq = r$, kde $gcd(p, q) = 1$. Takúto úlohu vieme výrazne zjednodušiť tak, že nájdeme riešenie rovnice $a_1 p + b_1 q = 1$, a riešenia rovnice s pravou stranou r sú potom jednoducho $a = ra_1, b = rb_1$. Pre čísla 3, 5 riešime rovnicu $3a_1 + 5b_1 = 1$, a riešenie vidíme ľahko $a_1 = 2, b_1 = -1$. Keď máme jedno riešenie, vieme skonštruovať celú rodinu riešení $(a_1 + 5k, b_1 - 3k)$ kde k je celé číslo. Skutočne,

$$3(a_1 + 5k) + 5(b_1 - 3k) = 3a_1 + 15k + 5b_1 - 15k = 3a_1 + 5b_1$$

a riešenia pre jednotlivé zvyšky napríklad po delení 5 budú:

- $r = 0$: triviálne
- $r = 1$: $a = a_1 = 2, b = b_1 = -1$
- $r = 2$: $a = 2a_1 = 4, b = 2b_1 = -2$
- $r = 3$ triviálne
- $r = 4$: $a = 4a_1 - 5 = 3, b = 4b_1 + 3 = -1$

Teraz tvrdenie dokážeme sporom a využijeme princíp dobrého usporiadania. Ešte predtým ukážeme, že tvrdenie platí pre niekoľko hodnôt $m \geq 8$:

8	9	10	11	12	13	14	15	16
5 + 3	3×3	2×5	5 + 2×3	4×3	2×5 + 3	5 + 3×3	3×5	2×5 + 2×3

Označme C množinu prirodzených čísel m, ktoré nemožno vyjadriť ako súčet násobkov 3 a 5. Pre dôkaz sporom budeme predpokladať, že množina C je neprázdna. Podľa princípu dobrého usporiadania musí mať množina c najmenší prvok c. Zjavne $c > 16$. Uvažujme číslo $c-5$, ktoré je určite menšie ako c a väčšie ako 8. Toto číslo tiež nie je vyjadriteľné ako súčet násobkov 3 a 5 a patrí do množiny C. V opačnom prípade, ak by existovali dve celé čísla a, b také, že $c-5 = 3a+5b$, bolo by $c = 3a+5(b+1)$ a teda aj c by bolo vyjadriteľné ako súčet násobkov 3 a 5. Čo sme dosiahli: pre minimálny prvok množiny C vieme zostrojiť menší prvok, ktorý tiež patrí do C, aj keď množina prirodzených čísel, ktoré potenciálne môžu patriť do C, je zdola ohraničená. Jediný prípad, kedy toto nevedie k logickému rozporu je, keď je množina C prázdna a teda platí pôvodné tvrdenie.

---

2. Príklady na zahriatie

Iný dôkaz AGM

Minulý týždeň sme dokazovali, že pre všetky kladné čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

(nerovnosť AGM).

Ukážem ešte jeden priamy dôkaz. Aj keď je myšlienkovo veľmi pdobný tomu, ktorý sme robili, ukazuje iný postup ako urobiť takýto dôkaz: vziať jednu stranu a dopracovať sa ku kompletnému tvrdeniu.

$$\sqrt{ab} = \frac{\sqrt{4ab}}{2} \leq \frac{\sqrt{4ab+(a-b)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4ab+a^2-2ab+b^2}}{2} = \frac{\sqrt{(a+b)^2}}{2} = \frac{a+b}{2}$$

V odvodení máme jedinú nerovnosť - v 2. kroku - keď sme pridali pod odmocninu člen, ktorý je určite väčší alebo rovný nule, pričom rovnosť nastáva iba v prípade $a = b$. Odmocninu sme mohli legálne odstrániť, pretože $a, b \geq 0$.

Príklad

Máme ešte jednu podobnú nerovnosť, a to medzi geometrickým a harmonickým priemerom:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}, \quad a, b > 0$$

Ako toto dokázať?

Riešenie

Keď upraceme všetky členy na ľavú stranu nerovnosti (dávame pozor, či náhodou nenásobíme záporným číslom alebo nebodaj nulou - nie, nenásobíme), dostaneme

$$\frac{1}{a} - 2\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 \geq 0$$

a rovnosť zjavne nastáva pre $a = b$. Táto nerovnosť sa teda dokazuje rovnako, ako AGM nerovnosť.

Príklad

Ukážeme si jedno využitie AGM nerovnosti:

Nájdite minimálnu hodnotu výrazu

$$\frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}, \quad x \in \{0, \pi\}$$

Riešenie

Keď vo výraze oamostatníme jednotlivé členy,

$$9x \sin x + \frac{4}{x \sin x}$$

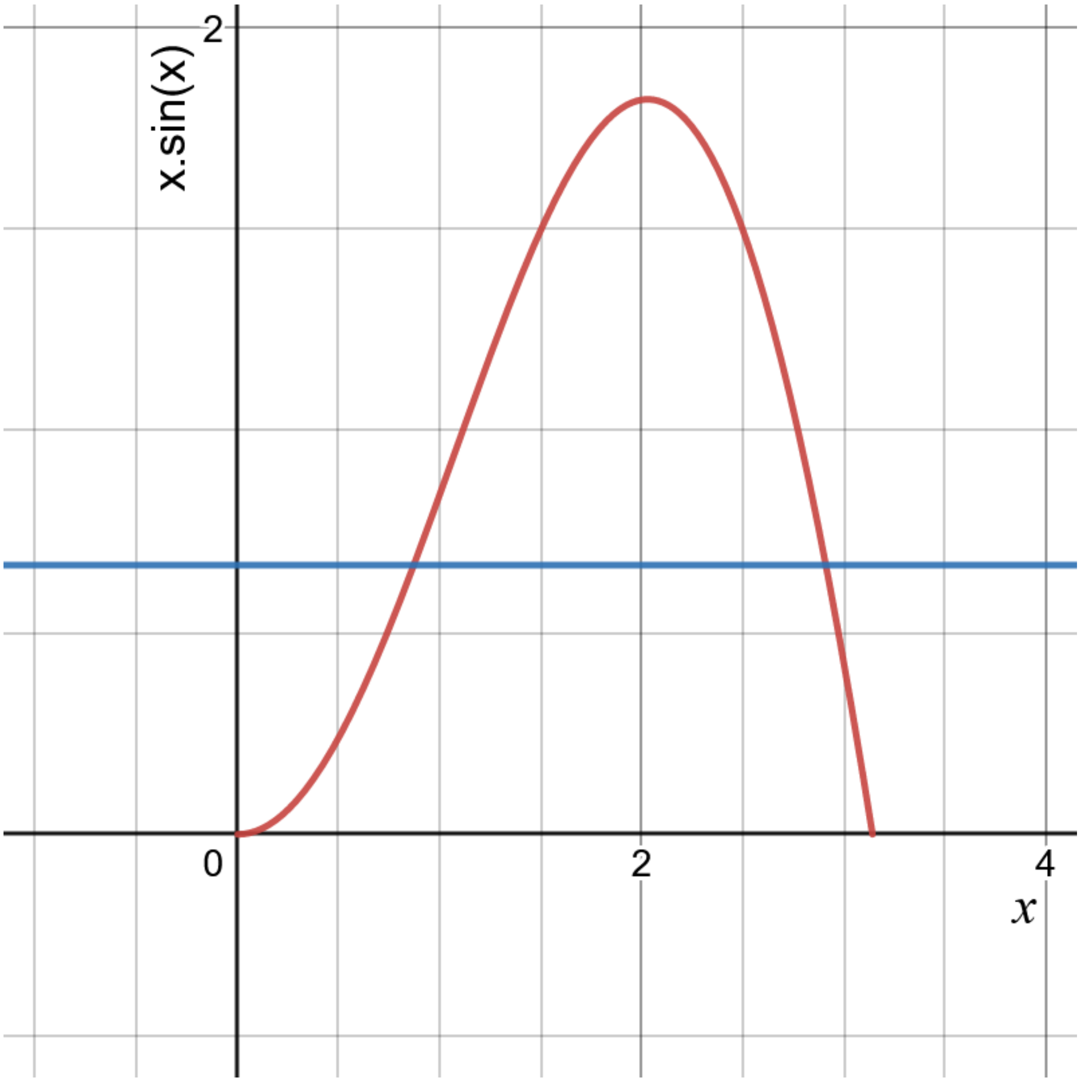
vidíme, že súčin členov je konštanta. Podľa AGM nerovnosti platí

$$9x \sin x + \frac{4}{x \sin x} \geq 2\sqrt{9 \cdot 4} = 12$$

Minimálna hodnota výrazu je teda 12, a túto hodnotu výraz dosiahne práve vtedy, keď sú si oba členy rovné, teda

$$9x^2 \sin^2 x = 4$$
$$x \sin x = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

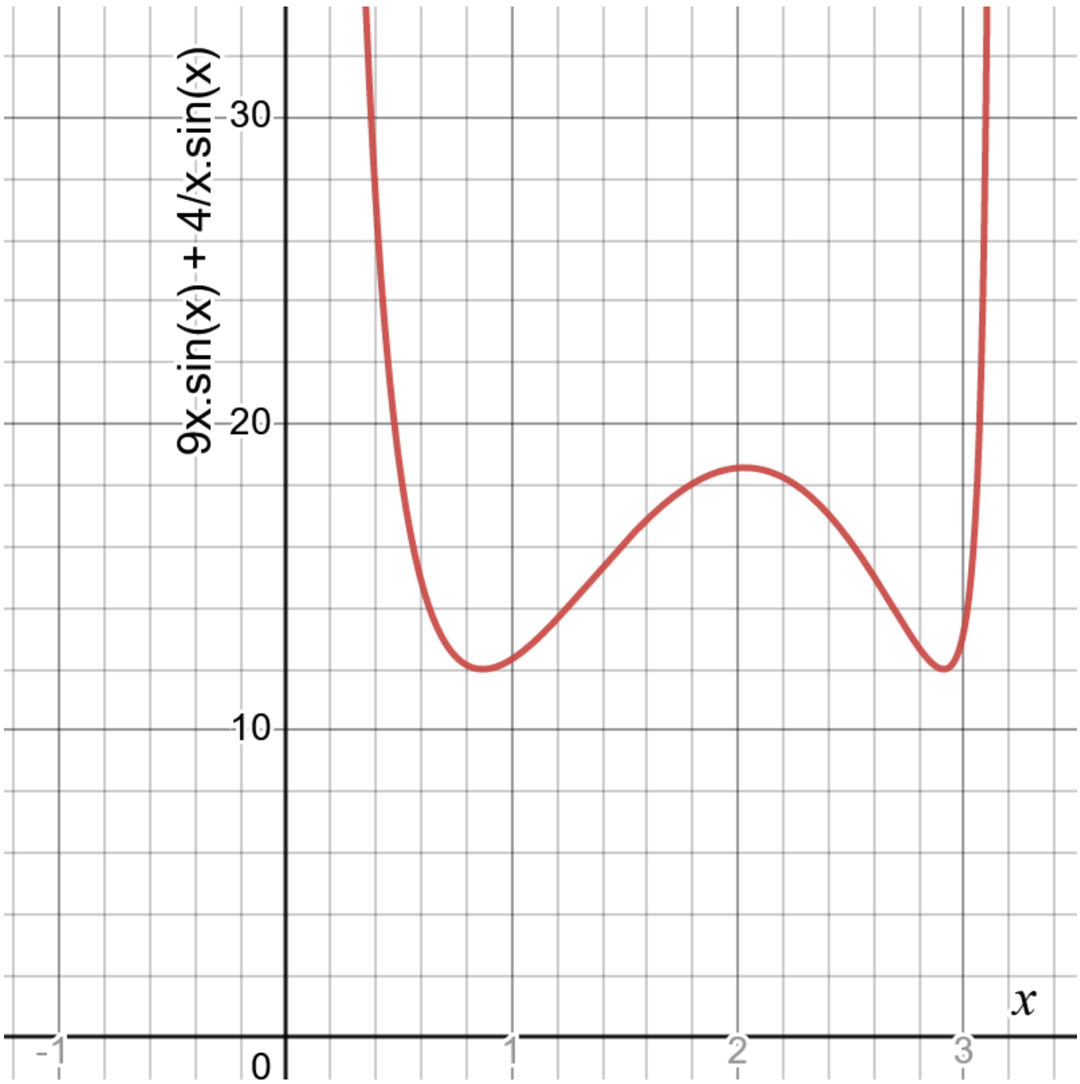
a uvažujeme iba nezáporné riešenie, pretože funkcia $x \sin x$ je na intervale $(0, \pi)$ nezáporná (nezáporný je sínus aj x).



Riešenia rovnice $x \sin x = c$ musíme nájsť numericky (napríklad pomocou algoritmov z minulého týždňa), ale úloha vlastne predpisuje iba nájdenie minimálnej hodnoty - o nej sme zistili, že sa rovná 12.

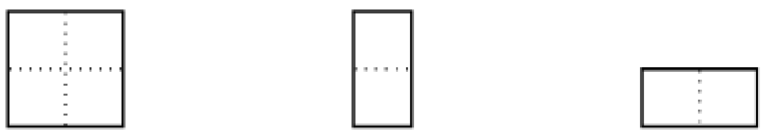
Odkiaľ vieme, že toto je správne minimum? Podstatné je, že geometrický priemer je konštantný, a teda nám dáva dolnú hranicu pre hodnoty funkcie na *celom* intervale $\langle 0, \pi \rangle$.

Úlohu o nájdení minima funkcie štandardne riešime hľadaním bodov, kde sa derivácia funkcie rovná 0 (stacionárnych bodov). Niektoré z nich môžu byť minimá a iné maximá. Pre funkciu v tomto prípade by to najskôr išlo spraviť, ale výraz pre deriváciu by bol dosť nepríjemný. Aj keď AGM je viac-menej náhodná finta, ako úlohu vyriešiť lacno, vyskytuje sa takýto postup prekvapivo často.

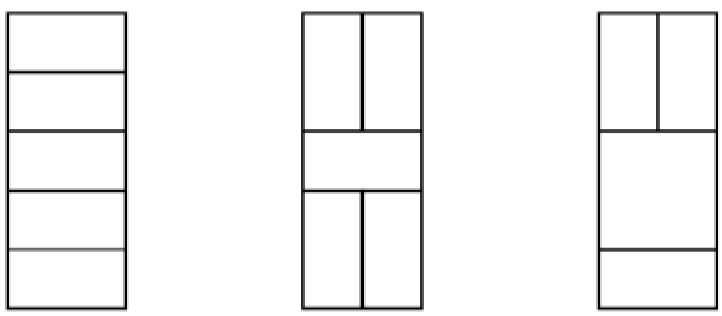


Príklad - Mini-tetris

Vyhrávajúcou konfiguráciou v mini-tetrise je úplné pokrytie hracej plochy o rozmere $2 \times n$ kombináciou troch dlaždíc:



Toto sú tri platné konfigurácie pre hraciu plochu 2×5:



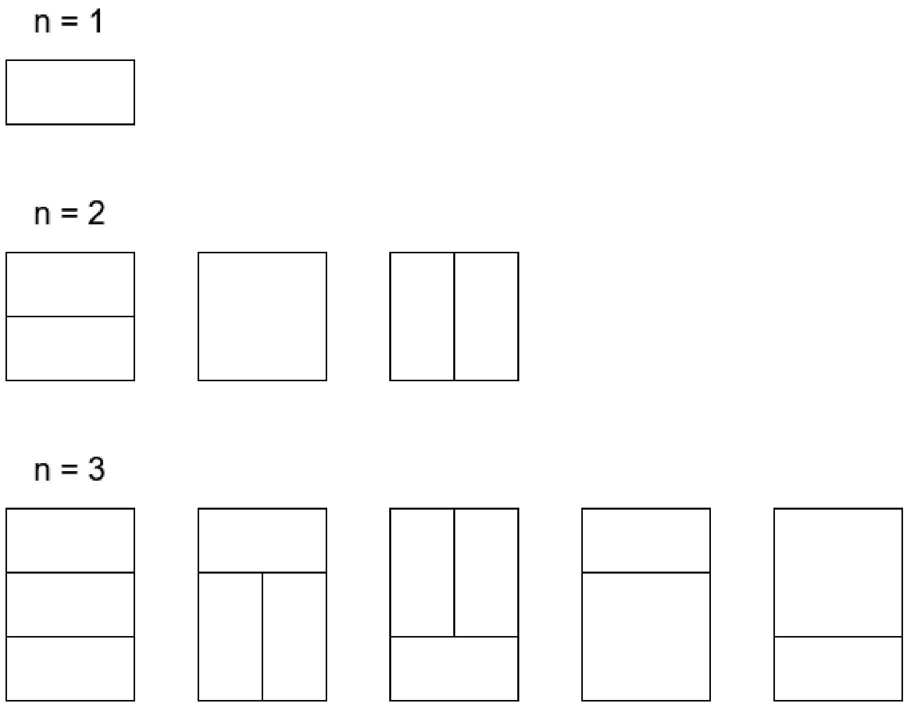
Označme T_n počet vyhrávajúcich konfigurácií pre hraciu dosku o rozmeroch $2 \times n$. Vypočítajte T_n pre prirodzené $n \geq 1$.

Riešenie

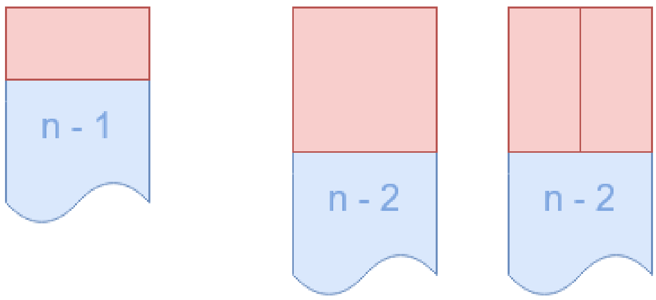
Toto je typická úloha na riešenie rekurzívnych schém. Budeme postupovať v troch krokoch:

1. Vypočítame T_n pre malé $n = 1, 2, 3$.
2. Vyjadríme T_n cez T_{n-1} a T_{n-2}.
3. Vyriešime rekurziu, teda vyjadríme T_n iba v termínoch n.

1. krok: Pre malé n môžeme riešenia ľahko vymenovať:



2. krok: Riešenie pre $k = n$ môžme získať buď z riešenia pre $k = n - 1$ pridaním ležatého obdĺžnika, alebo z riešenia pre $k = n - 2$ pridaním buď veľkého štvorca alebo dvojice zvislých obdĺžnikov:



Z ilustrácie vidno, prečo potrebujeme rekurziu s hĺbkou 2 (teda počet riešení pre dané n vyjadrujeme pomocou riešení pre $n - 1$ a $n - 2$). Teraz už ľahko odvodíme rekurentný vzťah pre T_n:

$$T_m = T_{n-1} + 2T_{n-2}, \quad T_1 = 1, \quad T_2 = 3$$

Z ilustrácie vidno, prečo potrebujeme rekurziu s hĺbkou 2 (teda počet riešení pre dané n vyjadrujeme pomocou riešení pre n-1 a n-2). Vidíme, že tento vzťah funguje pre $n = 3$ a nie je ťažké (iba otravné) ho overiť pre $n = 4$.

3. krok: Máme lineárnu rekurziu s konštantnými koeficientmi (teda koeficienty pri T_k sú konštanty). Štandardný spôsob riešenia pre takéto rovnice je hľadať riešenia v tvare $T_n = q^n$. Dosadením získame

$$q^n = q^{n-1} + 2q^{n-2}$$

Odtiaľ ľahko získame kvadratickú rovnicu pre q:

$$q^2 - q - 2 = 0 \implies q_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} +2 \\ -1 \end{cases}$$

Pretože máme lineárnu rovnicu, všeobecné riešenie bude mať tvar $T_n = C_1 2^n + C_2(-1)^n$, pričom konštanty C_1, C_2 určíme z počiatočných podmienok:

$$\begin{array}{ccc} n = 1 & 2C_1 + (-1)C_2 = 1 & 2C_1 - C_2 = 1 \\ n = 2 & 4C_1 + (-1)^2 C_2 = 3 & 4C_1 + C_2 = 3 \end{array}$$

a ak sčítame obe rovnice, dostaneme $C_1 = 2/3$, a potom napríklad z prvej rovnice $C_2 = 1/3$. Nakoniec teda máme pre T_n nalsedujúce vyjadrenie:

$$T_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$$

Ľahko overíme, že tento vzťah funguje pre $n = 1, 2, 3$ a tiež spĺňa rekurentný vzťah pre T_n.

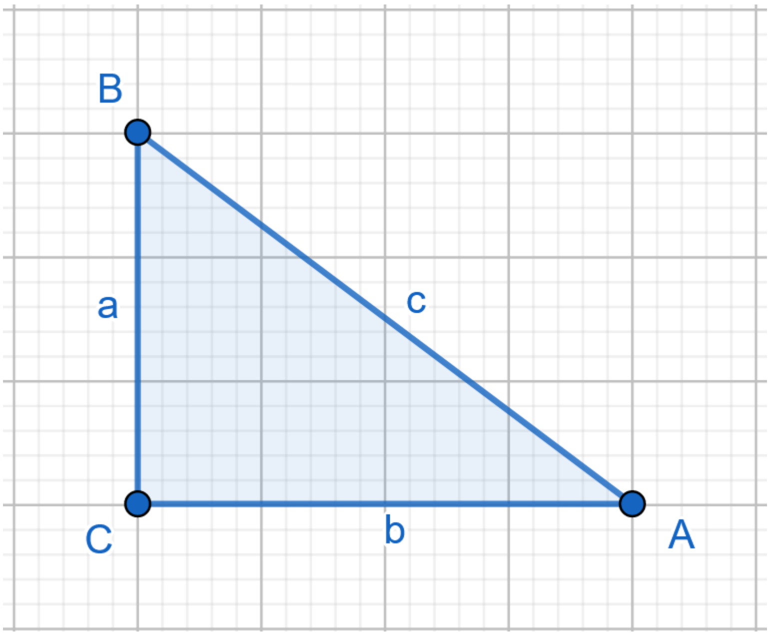
---

3. Geometria

Geometria je veľmi široká oblasť, takže budeme skákať z jednej veci na druhú. Začneme vecou, ktorá je starobylá a notoricky známa, ale nedávno vzbudila dosť široký rozruch:

Pravouhlé trojuholníky a Pytagorova veta

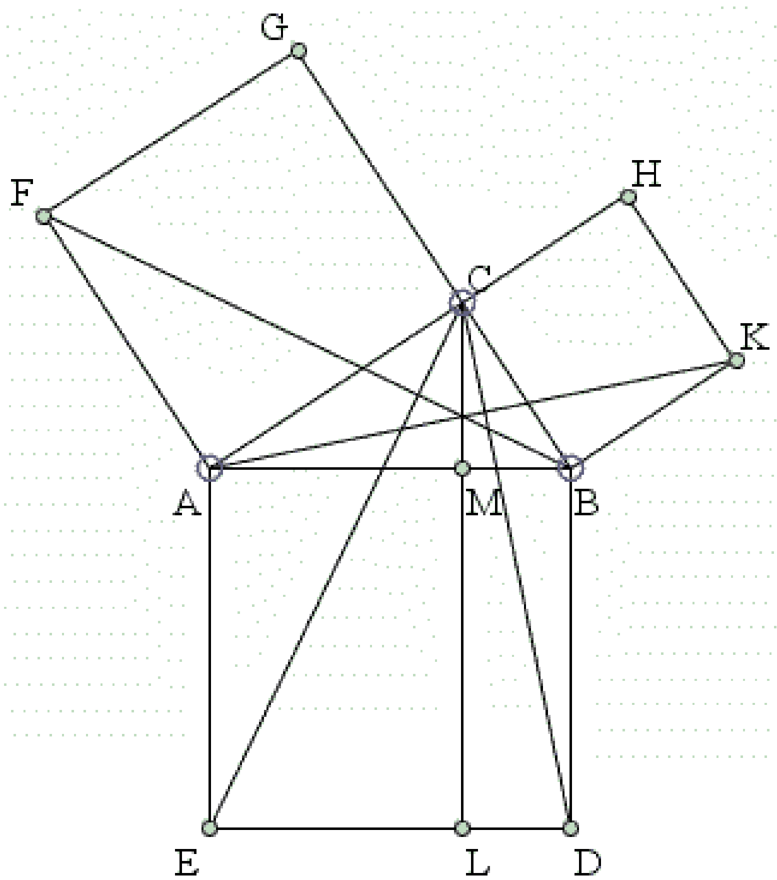
Pre pravouhlý trojuholník s odvesnami a, b a preponou c platí $a^2 + b^2 = c^2$.



Existujú stovky dôkazov Pytagorovej vety, my si pár preberieme, aby sme sa čo-to naučili o pravouhlých trojuholníkoch a iných veciach. Veľa dôkazov sa nájde napríklad na stránke `cut-the-knot.org`.

Dôkaz 1

Toto je pôvodný Euklidov dôkaz, plus mínus malé úpravy.



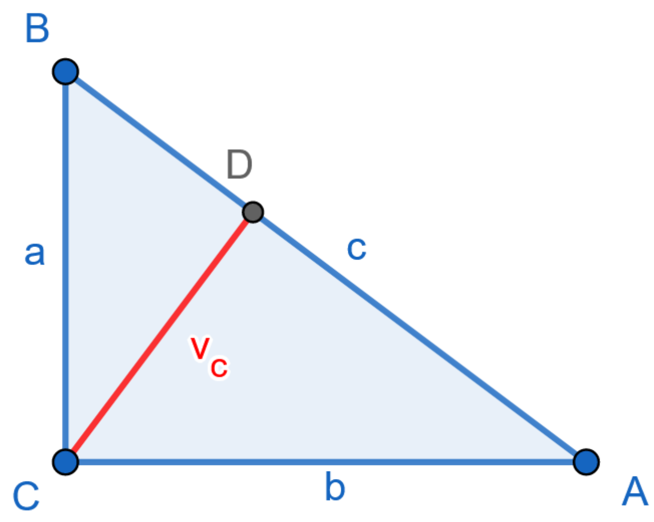
1. krok: △AEC = △ABF podľa princípu "sus": AE = AB, pretože obe sú strany štvorca ABDE; AC=AF, pretože obe sú strany štvorca ACGF, ∠EAC = ∠BAF, pretože oba sú (pravý uhol) + ∠BAC.
2. Plocha △ABF = |AF|v_{AF}/2 = $b^2/2$. Plocha △AEC= |AE|v_{AE}/2 = $c|AM|/2$. Inak povedané, plocha štvorca ACGF $(= b^2)$ je rovnaká ako plocha obdĺžnika AMLE.
3. Úplne rovnako môžeme ukázať, že plocha štvorca BKHC $= a^2$ je rovnaká ako plocha obdĺžnika BMLD.
4. Spojením dostaneme Pytagorovu vetu:

$$c^2 = |\square ABDE| = |\square AMLE| + |\square BMLD| = a^2 + b^2$$

Geometrická schéma ako na obrázku môže pôsobiť odstrašujúco. To, čo si treba predstaviť je, že

- vrchol B trojuholníka ABF môže kĺzať po úsečke BC až k vrcholu C, pričom obsah trojuholníka ostáva rovnaký - teda polovica obsahu štvorca ACGF.
- Podobne vrchol C trojuholníka ACE môže kĺzať po úsečke CM až k bodu M, pri zachovaní plochy trojuholníka, ktorá teda bude rovná polovici plochy obdĺžnika AMLE. Teda štvorec nad stranou $b = AC$ má rovnakú plochu ako obdĺžnik AMLE.
- Rovnako sa dá ukázať, že štvorec nad stranou $a = BC$ má rovnakú plochu ako obdĺžnik BMLD.

Dôkaz 2



Pri tomto dôkaze potrebujeme okrem samotného pravouhlého trojuholníka ABC jediný ďalší konštrukt - výšku na stranu c, $v_c = AD$. Výška delí △ABC na dva podobné trojuholníky DBA a DAC - podobnosť je podľa pravidla "uu" - každý z trojuholníkov je pravouhlý, pretože má pravý uhol pri päte výšky D, a ďalší uhol zdieľa s △ABC.

Z podobnosti trojuholníkov vyplýva

$$\frac{v_c}{a} = \frac{b}{c}, \quad \frac{v_c}{b} = \frac{a}{c} \implies v_c = \frac{ab}{c}$$
$$\frac{v_c}{a} = \frac{|AD|}{b} \quad \frac{v_c}{b} = \frac{|BD|}{a} \implies |AD| + |BD| \equiv c$$
$$= v_c\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) = \frac{ab}{c}\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) = \frac{a^2 + b^2}{c}$$

Z tejto schémy môžeme dostať ešte jeden známy vzťah, takzvanú *inverznú Pytagorovu vetu*:

$$v_c = \frac{ab}{c} \implies \frac{1}{v_c^2} = \frac{c^2}{a^2b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \implies \frac{1}{v_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

K Pytagorovej vete sa vrátime ešte nabudúce, aby sme si trocha šliapli do gonimetrických funkcií a vektorovej algebry.

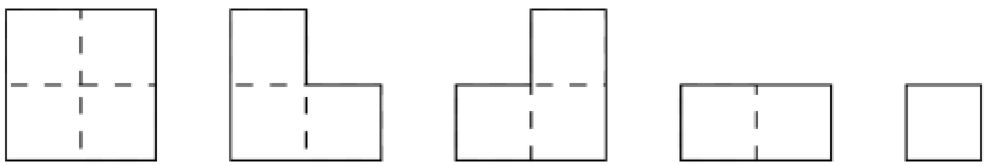
---

4. Domáca úloha (nová)

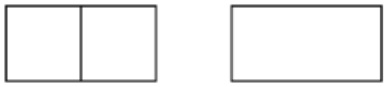
1. Pomocou princípu dobrého usporiadania dokážte, že pre všetky nezáporné celé čísla n platí

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

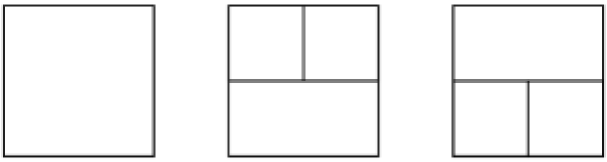
2. Iná verzia mini-tetrisu: Máme stále hraciu dosku o rozmeroch $2 \times n$, a tentoraz máme 5 dielikov::



Teda napríklad pre hraciu plochu 2×1 máme dve riešenia:

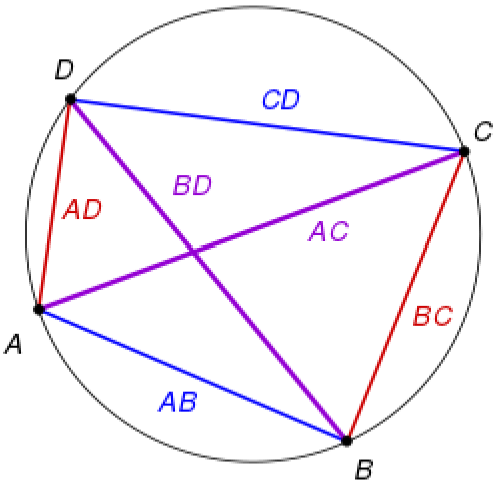


a pre hraciu plochu 2×2 sú platnými riešeniami napríklad tieto:



Vypočítajte počet riešení T_n pre hraciu plochu $2 \times n,\ n = 1, 2, \ldots$.

3. Napíšte kus kódu v Pythone, ktorý vygeneruje všetky riešenia mini-tetrisu (vo verzii, ktorú si vyberiete) pre zadané n.
4. Ptolemaiova veta je silnejšie tvrdenie ako Pytagorova veta: Pre štvoruholník ABCD vpísaný v kružnici platí



$$|AB||CD| + |AD||BC| = |AD||BC|$$

Dôkaz je zaujímavý a niekedy ho urobíme. Zatiaľ je úloha dokázať, že z tohto tvrdenia vyplýva Pytagorova veta.