Hodina 5. januára 2024

Program:

1. Domáca úloha (z minula)
2. Niekoľko príkladov na zahriatie a pozdvihnutie mysli: matice
3. Poznámky k maticiam: row reduction, násobenie maticou, lineárna regresia
4. Domáca úloha (nová)
5. Program na budúci týždeň

0. Úvod

Tento text a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári https://github.com/PKvasnick/Erik. Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

Videohovor Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť*.

---

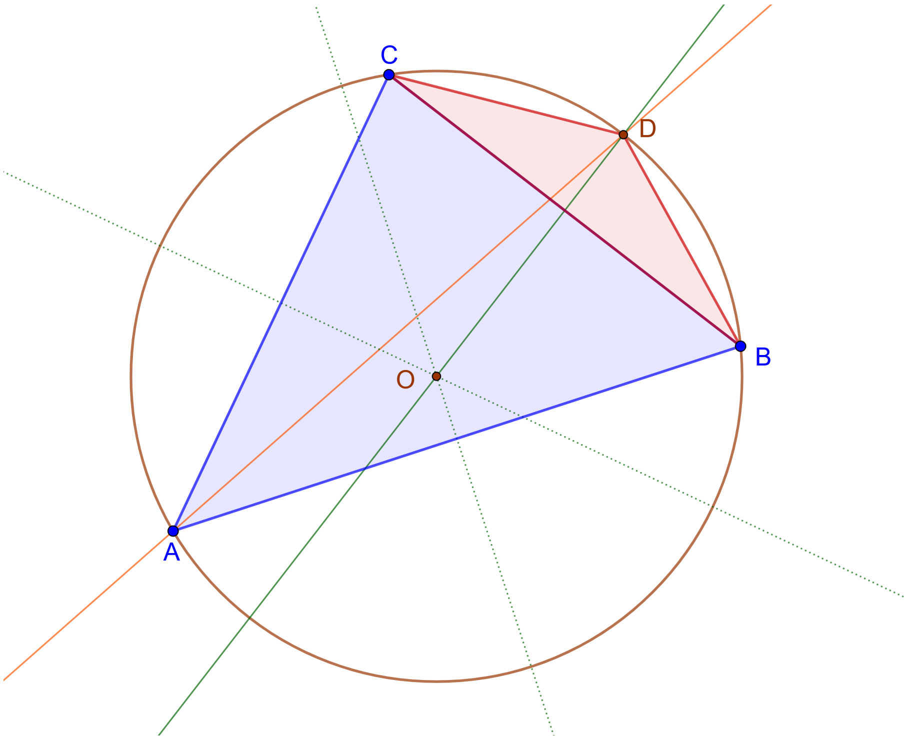
1. Domáca úloha

Príklad 1

Dokážte, že v trojuholníku ABC leží priesečník osi uhla β (pri vrchole B) a osi strany b (oproti vrcholu B) na kružnici opísanej trojuholníku.

Riešenie

Tento bod sa v českej a slovenskej matematickej literatúre označuje ako Švrčkov bod, a pravdaže každý trojuholník má tri takéto body.



Poďme si najskôr ozrejmiť, ako môžeme dokázať, že dva body sú totožné. V našom prípade vieme, že ľubovoľný body X ležiaci na osi strany BC tvorí s bodmi BC rovnoramenný trojuholník. Preto na dôkaz tvrdenia potrebujeme dokázať, že priesečník osi uhla $\alpha = \angle BAC$ s opísanou kružnicou vytvára rovnoramenný trojuholník BCD. Potom musí bodom D prechádzať aj os strany BC.

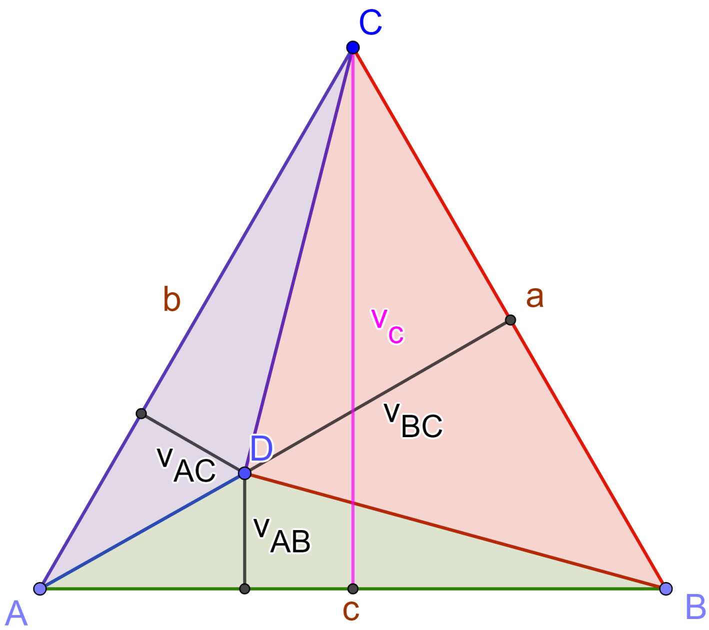
Vlastný dôkaz: Uhol $\angle BAD$ a uhol $\angle BCD$ sú obvodové uhly, prislúchajúce tetive BD a sú teda rovnaké a rovné $\alpha/2$, pretože AD je os uhla $\alpha \equiv \angle BAC$. Podobne platí $\angle DCB = \angle CAD = \alpha/2$. Trojuholník CBD je teda rovnoramenný a os strany BC musí predchádzať vrcholom D. Tým je tvrdenie dokázané.

Príklad 2

Vezmime ľubovoľný bod P vnútri rovnostranného trojuholníka. Dokážte že súčet jeho vzdialeností od strán trojuholníka je rovný výške trojuholníka (teda je pre všetky body vnútri trojuholníka rovnaký).

Riešenie

Toto tvrdenie sa nazýva Vivianiho veta a dôkaz je ľahký:



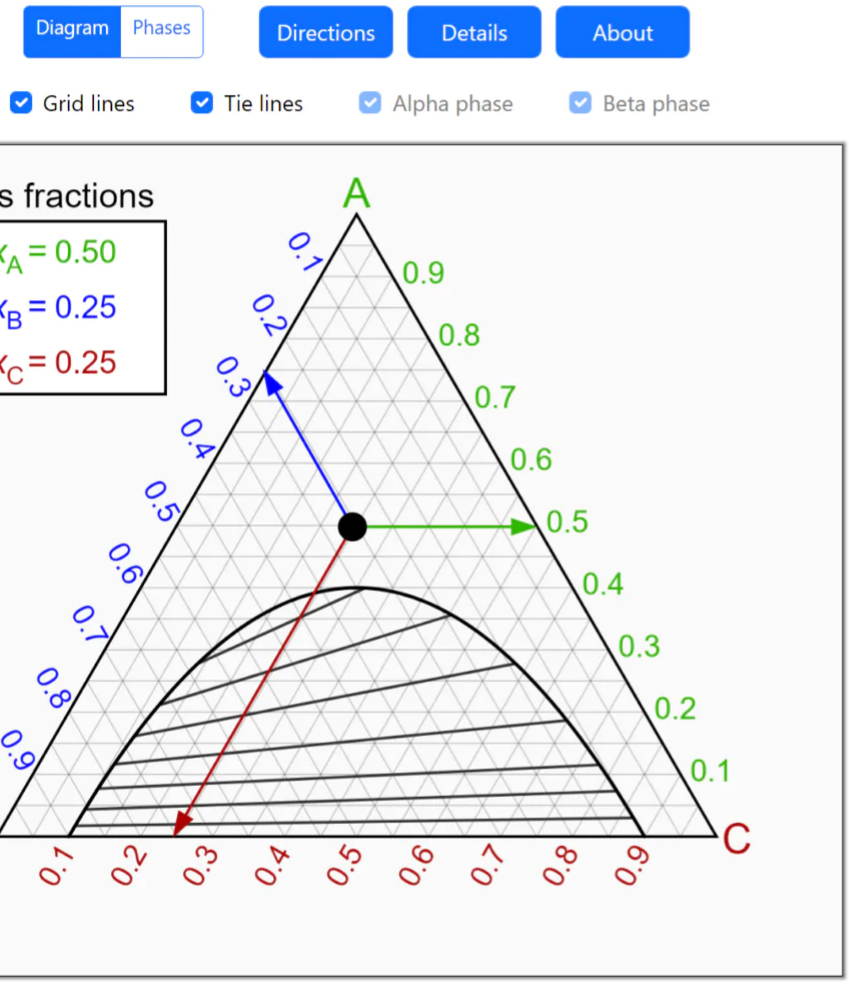
Jediné, čo treba, je vypočítať dvoma spôsobmi obsah trojuholníka:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}cv_c = \frac{1}{2}cv_{AB} + \frac{1}{2}av_{BC} + \frac{1}{2}bv_{AC}$$

a pretože máme rovnostranný trojuholník a $a = b = c$, musí platiť

$$v_c = v_{AB} + v_{BC} + v_{AC}$$

Takto možno kresliť grafy vlastností ternárnych zmesí, pre ktoré molárne zlomky zložiek dávajú spolu 1 a takto vieme prirodzene nakresliť závislosť od 3 viazaných parametrov nakresliť do trojuholníka.



Hoa, hoa, ale tu sa vzdialenosti merajú inak! Ako vieme, že aj pre takéto vzdialenosti platí Vivianiho veta?

Odpoveď: vzidalenosti sa líšia od kolmých vzdialeností o konštantný faktor $1/\cos 60^\circ$. Ich obrovská výhoda je, že ich vieme jednoducho zostrojiť.

Niekoľko príkladov na zahriatie a povznesenie mysle

Matice: Redukcia po riadkoch (row reduction)

Pokračujeme z minula:

Problém 3

Továreň vyrába osobné autá, nákladné autá a autobusy. Tri hlavné suroviny, ktoré používa, sú oceľ, sklo a plasty. Nasledujúca tabuľka obsahuje množstvo surovín, potrebných na jednotlivé výrobky, vo vhodných jednotkách:

	Osobné auto	Nákladné auto	Autobus
Oceľ	1	4	6
Sklo	2	3	20

	Osobné auto	Nákladné auto	Autobus
Plast	3	5	15

Denne sa v priemere spotrebuje 48 jednotiek ocele, 113 jednotiek skla a 111 jednotiek plastov. Koľko osobných áut, nákladných áut a autobusov sa priemerne denne vyrobí?

Riešenie Označme c, t, b priemerný počet denne vyrobených osobných áut, nákladných áut a autobusov (*c*ars, *t*rucks, *b*usses). Tabuľka spotreby materiálov pre jednotlivé výrobky nám dáva sústavu lineárnych rovníc pre c, t, b:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 20 \\ 3 & 5 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ t \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 113 \\ 111 \end{pmatrix}$$

a riešime zase zostrojením augmentovanej matice a jej uvedením do RREF tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 2 & 3 & 20 & 113 \\ 3 & 5 & 15 & 111 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 -= 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 0 & -5 & 8 & 17 \\ 3 & 5 & 15 & 111 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 -= 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 0 & -5 & 8 & 17 \\ 0 & -7 & -3 & -33 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 = 5R_3 - 7R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 0 & -5 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -71 & -284 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 /= -71} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 0 & -5 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 -= 8R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 0 & -5 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 /= -5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 -= 4R_2 + 6R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

V priemere sa teda vyrobí 12 osobných, 3 nákladné automobily a 4 autobusy.

Poznámka V tomto prípade sme mali šťastie a vyhli sme sa zásadnému problému takýchto úloh: ako zabezpečiť, aby sme dostali $c, t, b \geq 0$? Typicky sa takáto úloha rieši tak, že hľadáme projekciu riešenia lineárneho systému do podpriestoru $c, t, b \geq 0$ - najbližší vektor k vektoru riešenia, ktorý už leží v požadovanom podpriestore.

Matice et al.

1. Prečo funguje redukcia po riadkoch?

Ekvivalentné úpravy: ľubovoľný riadok alebo stĺpec matice môžeme nahradiť lineárnou kombináciou všetkých riadkov či stĺpcov.

Čo robíme, keď robíme ekvivalentné úpravy matice?

Riešili sme minulý týždeň takéto veci:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 -= 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -13 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \dots$$

Aká matica by previedla pôvodnú maticu vľavo na maticu vpravo? Nechávame prvý a tretí riadok nezmenený, teda tá matica bude mať na diagonále v pozíciách 1 a 3 jednotky, a v 1. a 3. riadku budú okrem toho samé nuly. Na druhom riadku chceme $(-4)\cdot$ prvý riadok + $1\cdot$ druhý riadok, takže výsledok bude vyzerať nejako takto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -13 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Úplne podobne to je s ostatnými úpravami: všetky ekvivalentné úpravy môžeme chápať ako násobenie nejakou maticou. Takže vlastne celú redukciu po riadkoch až do RREF môžeme chápať ako

Čo je augmentovaná matica?

Môžeme si predstaviť, že maticovú rovnicu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rozpíšeme po stĺpcoch ako

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \end{pmatrix} x_3 - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Ak rovnosť vpravo násobíme maticou s nenulovým determinantom, jej platnosť sa nezmení: bude platiť práve vtedy, ako $\mathbf{x}$ je riešením sústavy.

Čo všetky tie operácie, ktoré robíme pri uvádzaní matice do RREF?

Pri uvádzaní matice do diagonálneho tvaru násobíme obe strany sústavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ postupne maticami $\mathbf{T_1}, \mathbf{T_2}, \ldots$, ktoré zodpovedajú jednotlivým operáciám s riadkami:

$$\mathbf{T_1}\mathbf{T_2}\cdots\cdot\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{T_1}\mathbf{T_2}\cdots\cdot\mathbf{b}$$

Cieľom je uviesť $\mathbf{A}$ do diagonálneho tvaru. Teda $\mathbf{T_1}\mathbf{T_2}\cdots\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$ a to znamená, že $\mathbf{T_1}\mathbf{T_2}\cdots = \mathbf{A^{-1}}$ a teda dostávame $\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}}\mathbf{b}$. Inak povedané, riadkovými úpravami vlastne vytvárame inverznú maticu.

Na tomto princípe je založené počítanie inverznej matice pomocou riadkových úprav, kedy augmentovaná matica obsahuje naľavo $\mathbf{A}$ a vpravo jednotkovú maticu, a riadkovými úpravami sa snažíme dosiahnuť naľavo jednotkovú maticu, ako pri riešení sústavy rovníc. Potom matica vpravo je i$\mathbf{A^{-1}}$.

Príklad:

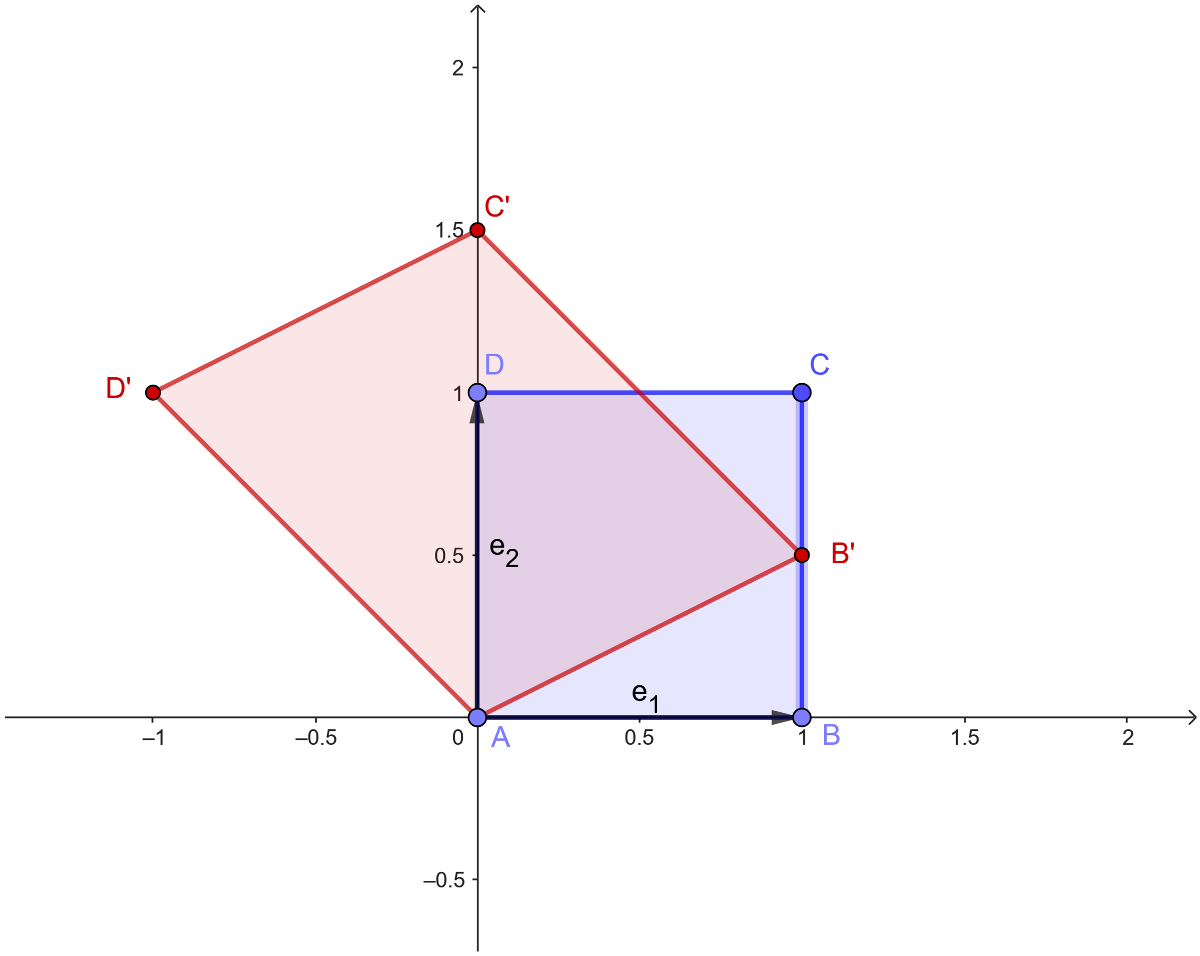
$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to aR_2 - cR_1} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1 \to (ad-bc)aR_1 - bR_2} \left(\begin{array}{cc|cc} (ad-bc)a & 0 & ad & -ba \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1 \to R_1/a(ad-bc), R_2 \to R_2/(ad-bc)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

Čo robí násobenie maticou?

Môžeme vziať nejakú plochu v rovine, vziať niekoľko vektorov, ktoré v nej končia, transformovať ich pomocou matice a pozrieť sa, v akej oblasti sa nachádzajú. Napríklad si môžeme vziať maticu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

a pozrieť sa, čo sa stane s jednotkovým štvorcom:



Zväčšenie plochy je dané determinantom matice, teda červený rovnobežník má plochu 1.5-krát väčšiu ako modrý.

Lineárna regresia

V prípade lineárnej regresie máme preurčenú sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \\ & \cdots & \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{F}\beta = \mathbf{Y}$$

Používame štandardné označenie $\mathbf{F}$ pre maticu faktorov, ktorej členy závisia od hodnôt x_i, a maticu parametrov β. Rovnica dáva zmysel, iba ak nadbytočné dáta sú zbytočné a hovoria to isté. Ak hovoria niečo iné, úloha nemá riešenie. Môžeme sa ale pozrieť na úlohu tak, že chceme nájsť takú krivku, definovanú parametrami a_i, pre ktorú je súčet štvorcov odchýlok hodnôt y najmenší, teda

$$\hat{\beta} = \text{argmin}\left[(\mathbf{Y} - \mathbf{F}\beta)^T(\mathbf{Y} - \mathbf{F}\beta)\right]$$

Riešenie si vyžaduje trošku zložitejšie derivovanie, ale vyzerá takto:

$$(\mathbf{F^T F})\beta = \mathbf{F^T Y} \quad \therefore \quad \beta = (\mathbf{F^T F})^{-1}\mathbf{F^T Y}$$

V skutočnosti ale neformulejeme problém ako minimalizáciu skalárneho súčinu, ale ako minimalizáciu stopy:

$$\hat{\beta} = \text{argmin Tr}\left[(\mathbf{Y} - \mathbf{F}\beta)(\mathbf{Y} - \mathbf{F}\beta)^T\right]$$

Stopa matice Tr je súčet jej diagonálnych prvkov. Toto je všeobecnejší výraz, ktorý funguje v širšej škále prípadov, a jeho minimalizácia podľa β je určitým spôsobom ľahšia.

Domáca úloha (nová)

1. Dokážte, že v ľubovoľnom trojuholníku platí $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma$.
2. Máme v rovine bod S, kružnicu k a priamku p. Zostrojte štvorec ABCD tak, že S je priesečník jeho uhlopriečok, A leží na k a B leží na p.

---

5. Program na budúci týždeň

- Ešte lineárna algebra

$$\bar{a}$$