Hodina 22. septembra 2023

Program:

1. Domáca úloha (z minula)
2. Niekoľko príkladov na zahriatie a pozdvihnutie mysli.
3. Geometria: Izometrie roviny - rýchle opakovanie
4. Domáca úloha (nová)
5. Program na budúci týždeň

0. Úvod

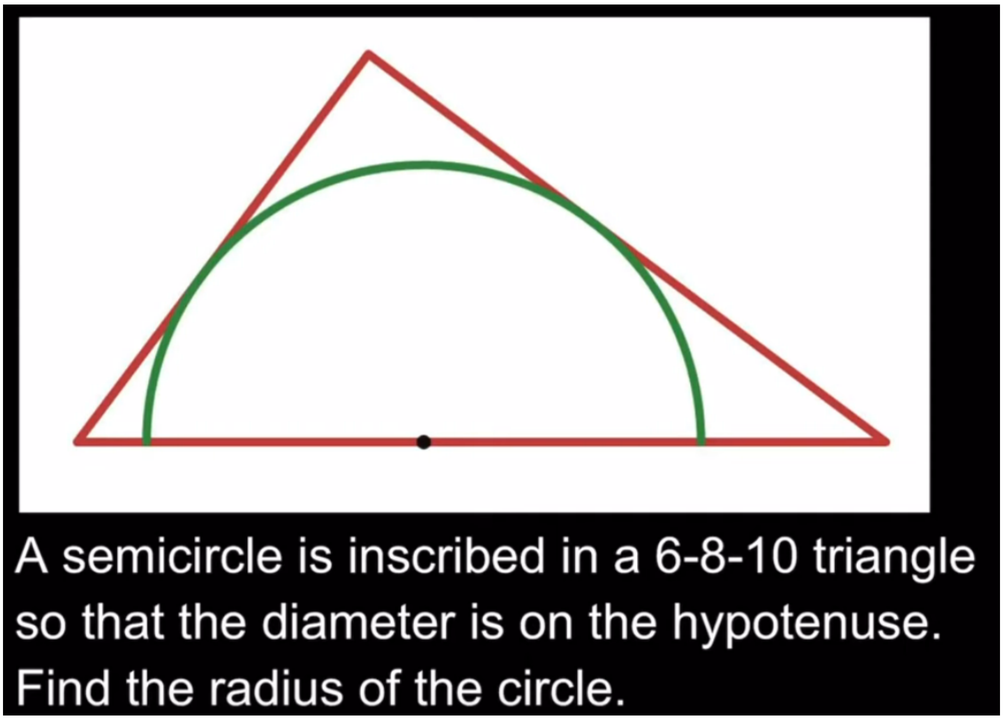
Tento text a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári https://github.com/PKvasnick/Erik. Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

Videohovor Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť.*

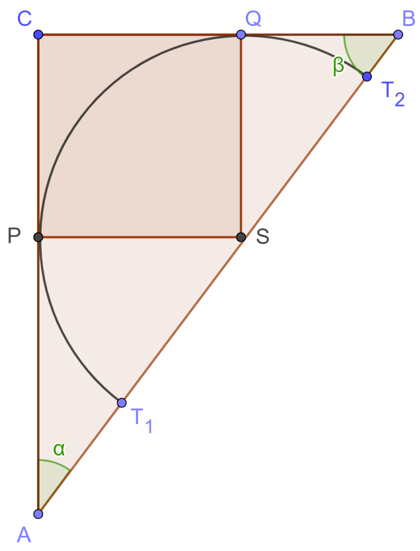
1. Domáca úloha

Príklad 1

1. Vyriešte.



Riešenie



Vidíme dva trojuholníky, podobné trojuholníku ABC: ASP a SBQ. Ktorýkoľvek z nich umožňuje vyjadriť polomer polkruhu:

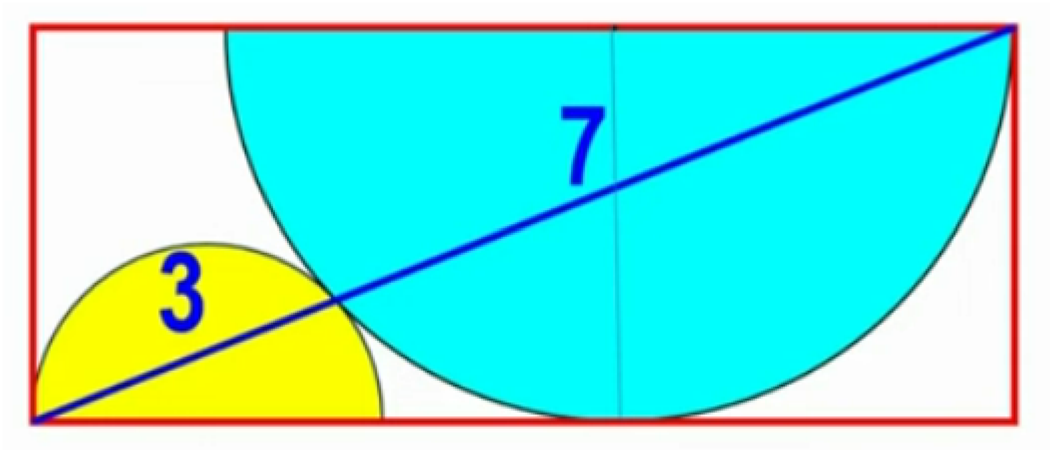
$$\frac{PS}{AP} \equiv \frac{r}{b-r} = \frac{a}{b}$$

odkiaľ

$$rb = a(b-r)$$
$$r(a+b) = ab$$
$$r = \frac{ab}{a+b} = \frac{6 \cdot 8}{6+8} = \frac{24}{7}$$

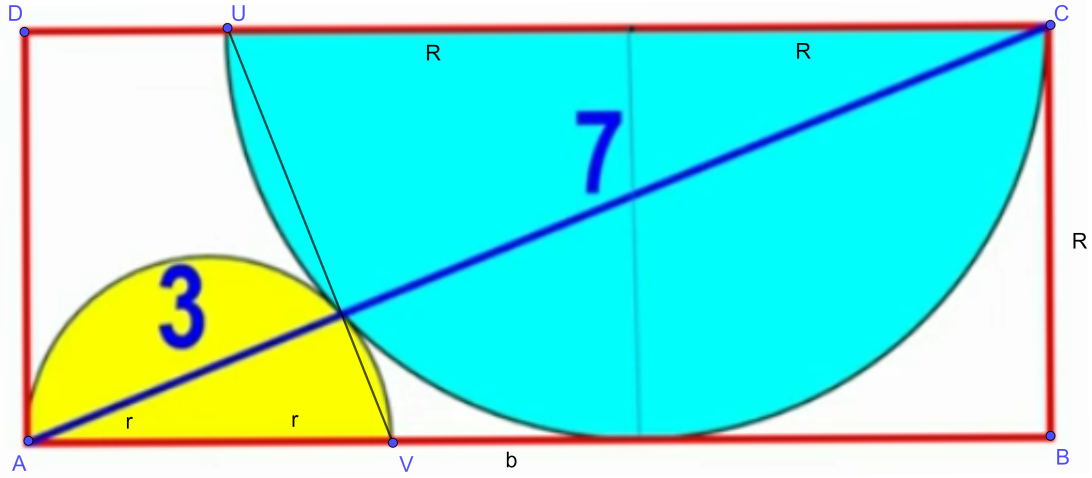
Príklad 2

2. Vypočítajte obsah obdĺžnika.



Riešenie

Pomenovali sme v obrázku niektoré body a vzdialenosti, aby sa nám ľahšie riešilo.



Začneme trojuholníkmi AVP a CUP. Oba tieto trojuholníky sú podobné trojuholníku ABC. Ak dlhú stranu trojuholníka označíme b, dostaneme

$$\frac{2R}{7} = \frac{10}{b} \implies R = \frac{35}{b}$$

Odtiaľ plocha obdĺžnika $Rb = 35$.

Navyše teraz ľahko vypočítame R, r i b pomocou podobnosti trojuholníkov a vzťahu o úplnom štvorci súčtu a rozdielu:

$$R^2 + b^2 = 100 \quad Rb = 35$$
$$(R+b)^2 = R^2 + r^2 + 2Rb = 170$$
$$(R-b)^2 = R^2 + r^2 - 2Rb = 30$$
$$b = \frac{\sqrt{170} + \sqrt{30}}{2} \approx 9.26$$
$$R = \frac{\sqrt{170} - \sqrt{30}}{2} \approx 3.78$$
$$r = \frac{3}{7}R \approx 1.62$$

---

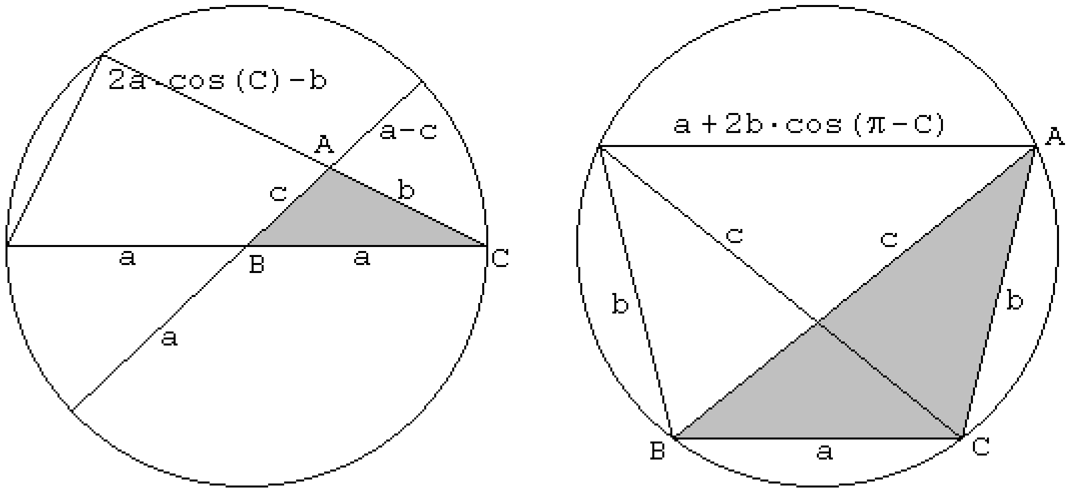
2. Príklady na zahriatie

Príklad 1: Kosínová veta

Sínusovú vetu sme už mali: Majme trojuholník ABC s vnútornými uhlami α, β, γ po rade pri vrcholoch A, B, C, a stranami a, b, c protiľahlým vrcholom A, B, C. Nech r je polomer kružnice, opísanej trojuholníku ABC. Potom platí

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

Patrí sa doplniť aj kosínovú vetu, ale tu dám iba dva obrázky, z ktorých sú dôkazy jasné.



$$(2a\cdot\cos(C) - b)b = (a - c)(a + c)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos(C)$$

$$c\cdot c = b\cdot b + (a + 2b\cdot\cos(\pi - c))\cdot a$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos(C)$$

Príklad 2: Pigeonhole principle

Majme 100 čísel $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{100} \leq 400$. Dokážte, že sa medzi rozdielmi $d_i = a_i - a_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots 100$ vyskytuje niektorá hodnota viac ako desaťkrát.

Riešenie

Budeme pracovať so súčtom 99 rozdielov $d_i = a_i - a_{i-1}$:

$$D \equiv \sum_{i=2}^{100} d_i = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{100} - a_{99})$$
$$= a_{100} - a_1$$

Pretože $a_{100} \leq 400, a_1 \geq 1$, musí byť $D \leq 399$.

Vedieme dôkaz sporom: predpokladajme, že sa žiaden rozdiel nevyskytuje medzi 99 rozdielmi d_i viac ako desaťkrát. Potom, aby sme urobili D čo najmenšie, musíme mať práve 10 nulových rozdielov, 10 rozdielov 1, atď:

$$D_{min} = 10 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + \cdots + 10 \cdot 8 + 9 \cdot 9$$

pričom deviatku sme započítali iba deväťkrát, aby sme mali práve 99 rozdielov. Počítajme:

$$D_{min} = 10(0 + 1 + \cdots + 9) - 9 = 10 \cdot \frac{9 \cdot (9+1)}{2} - 9 = 10 \cdot 45 - 9 = 441$$

a to je vytúžený spor: naša minimálna konfigurácia dáva D väčšie ako 399. Teda nemôžeme skonštruovať 99 rozdielov z číslic 0-9 bez toho, aby sa niektorý rozdiel nevyskytoval viac ako desaťkrát.: aby sme dodržali maximálny súčet 399, musíme použiť viac menších rozdielov.

Iterácia funkcií

Už sme mali viac rekurentných vzťahov typu $x_n = f(x_{n-1})$. Členy takejto postupnosti môžeme symbolicky vyjadriť ako

$$x_1 = f(x_0) \quad x_2 = f(f(x_0)) \quad x_3 = f(f(f(x_0))) \quad \ldots$$

čo nás nabáda skúsiť naštudovať, ako sa správajú takéto iterácie funkcií a za akých okolností k niečomu konvergujú.

Príklad

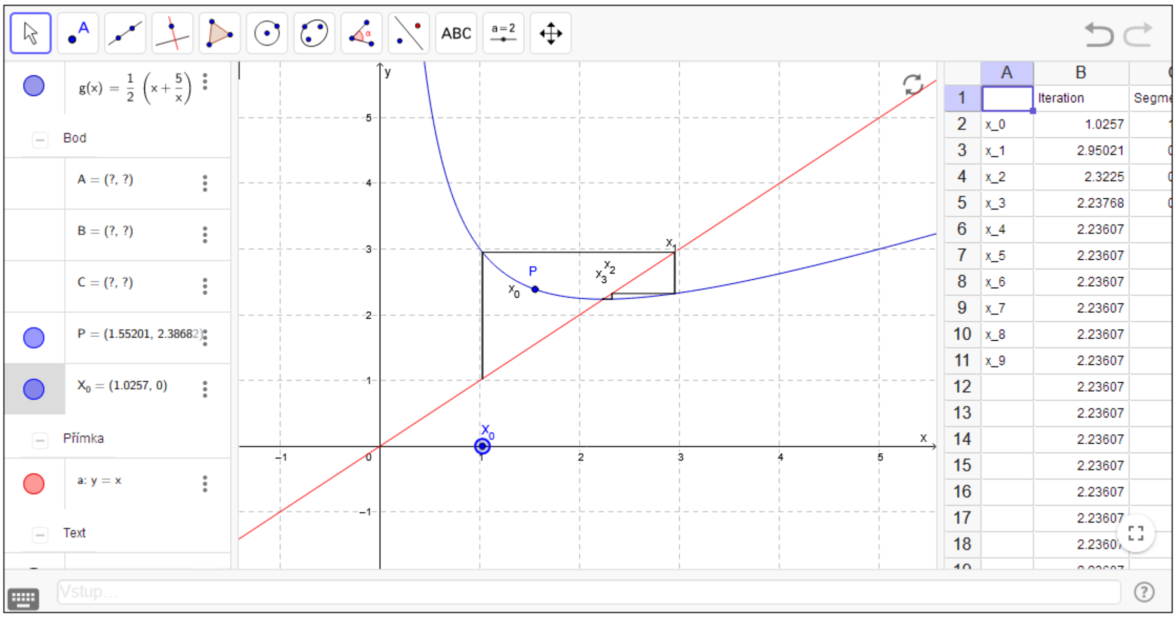
Vezmime si známy vzťah pre numerický výpočet druhej odmocniny:

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)$$

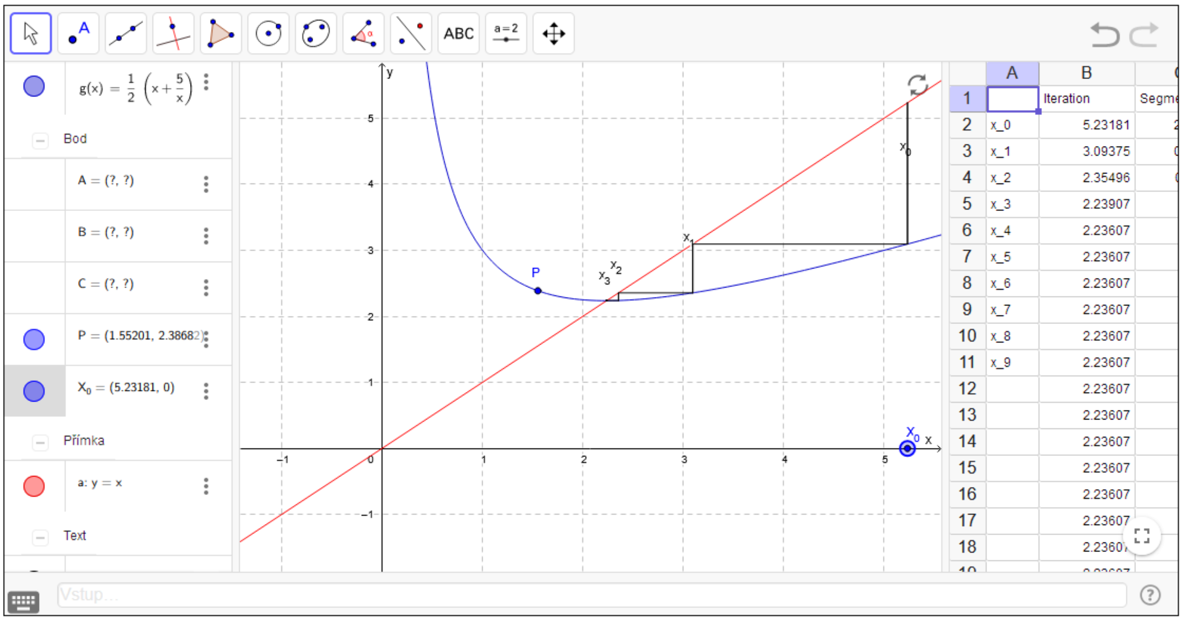
Vieme, že postupnosť $\{x_n\}$ konverguje k $\sqrt{a}$, a to rýchlo. Označme

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

a poďme študovať iterácie tejto funkcie:



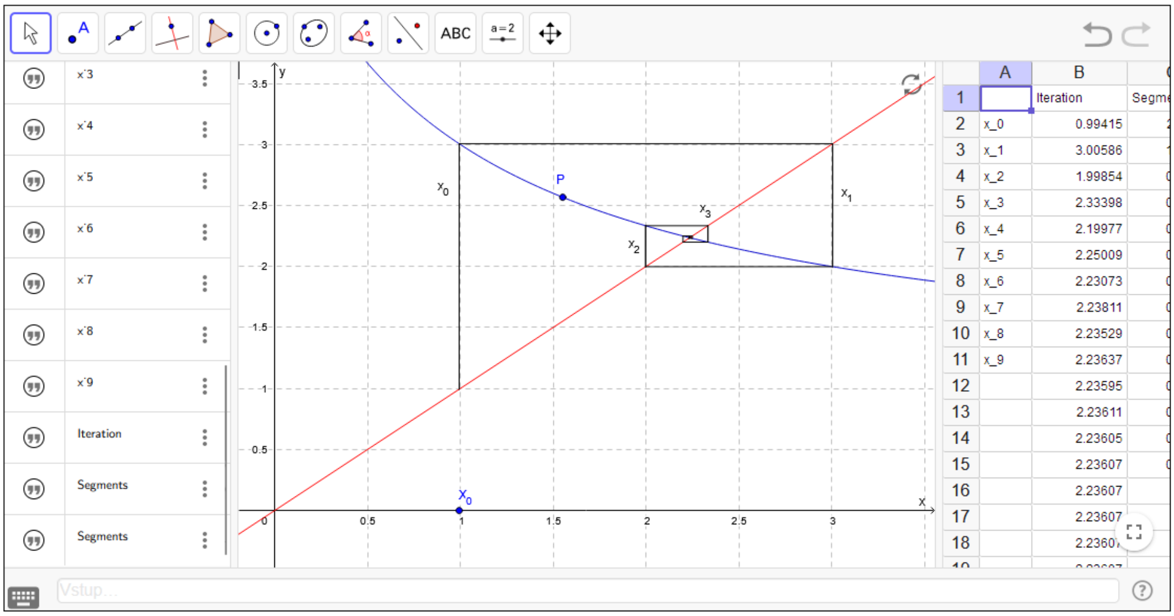
Originálny GeoGebra notebook nájdeš tu: https://www.geogebra.org/m/rRewsAds. Vidno, že iterácie konvergujú pre ľubovoľnú počiatočnú hodnotu x_0 a konvergujú vždy veľmi rýchlo.



Poďme sa pozrieť na niečo, čo konverguje pomaly - na náš generátor racionálnych aproximácií druhej odmocniny. V tomto prípade

$$f(x) = \frac{x+a}{x+1}$$

a pozrime sa, ako vyzerajú iterácie v tomto prípade:

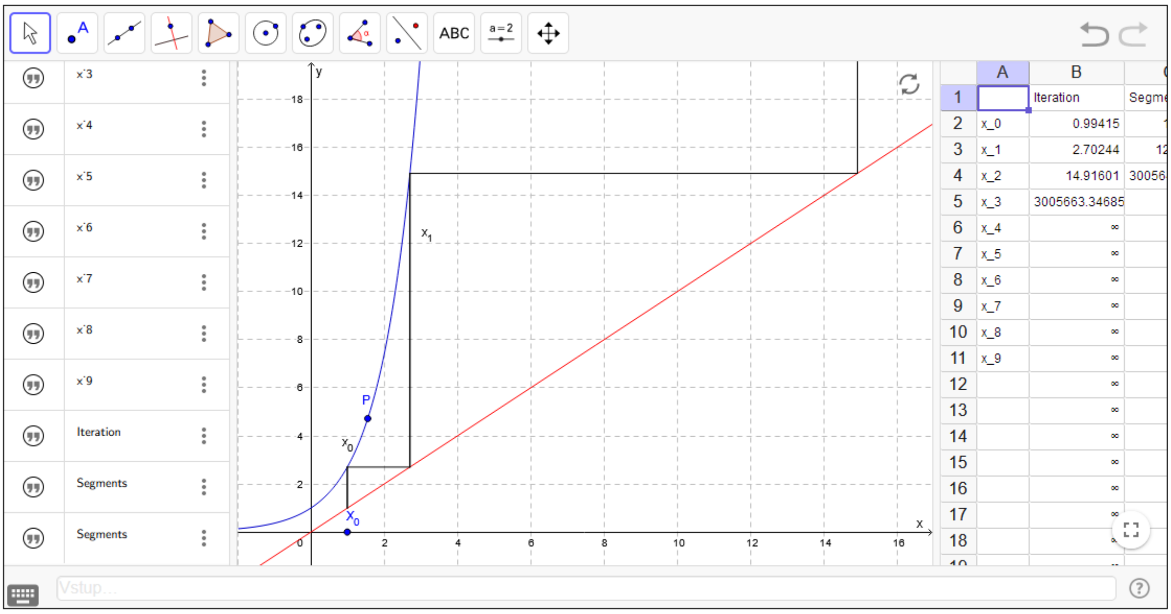


Vidíme, že toto konverguje pomalšie.

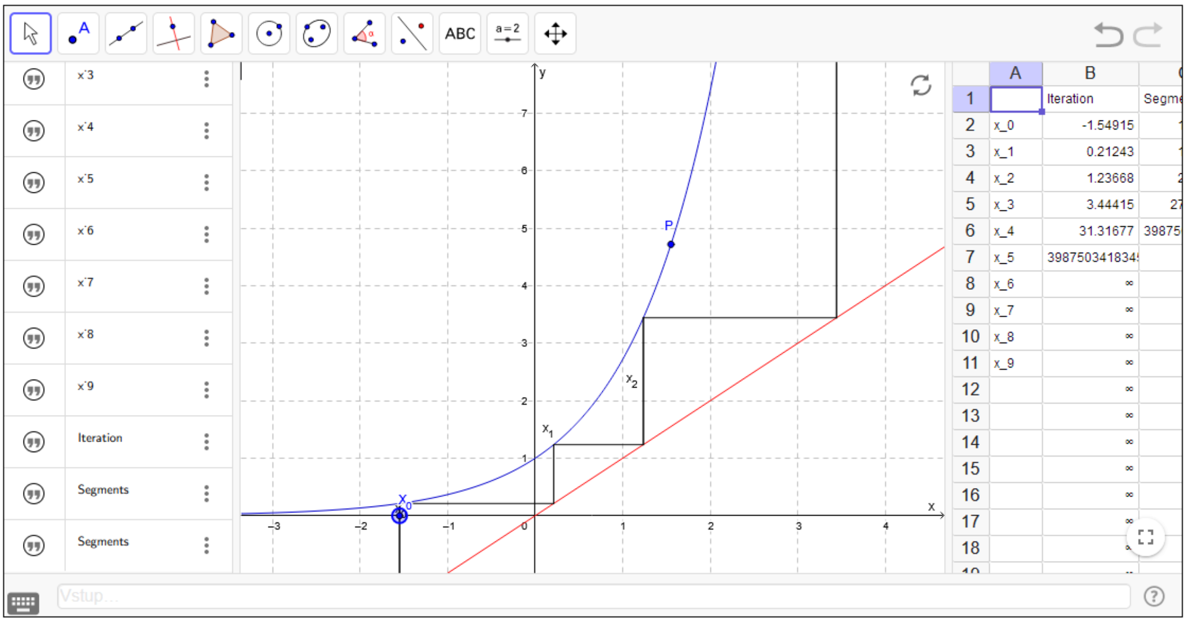
(koniec príkladu)

Kedy ale iterácie konvergujú a kedy nie? Poďme sa pozrieť na prípad, kedy nefungujú:

$$x_n = e^{x_{n-1}}$$



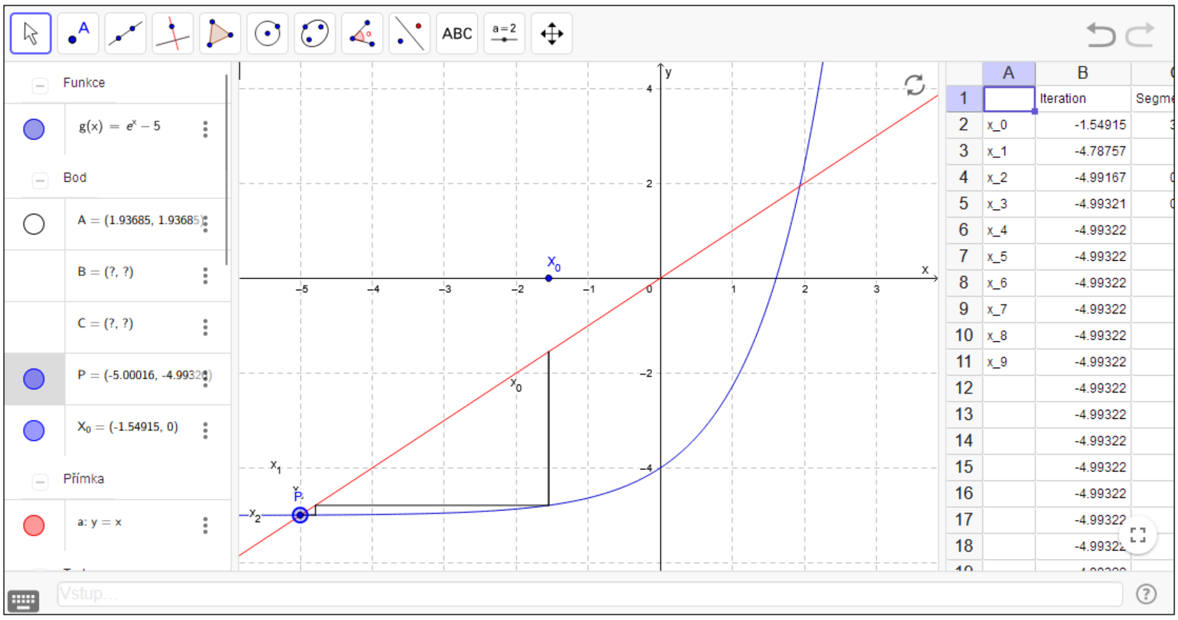
Ako vidno, toto veľmi rýchlo diverguje bez ohľadu na počiatočnú hodnotu:



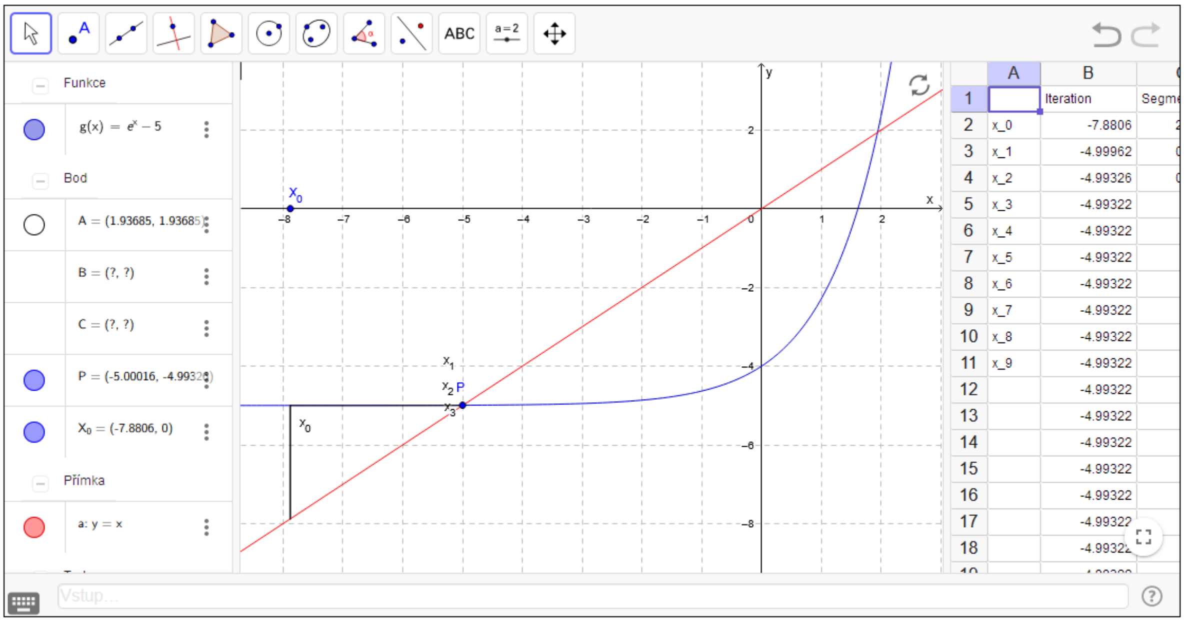
Ak sa pozrieme na predchádzajúce obrázky, vidíme rozdiel: teraz sa nám graf funkcie nepretína s krivkou $y = x$. Skúsme funkciu

$$f(x) = e^x - 5$$

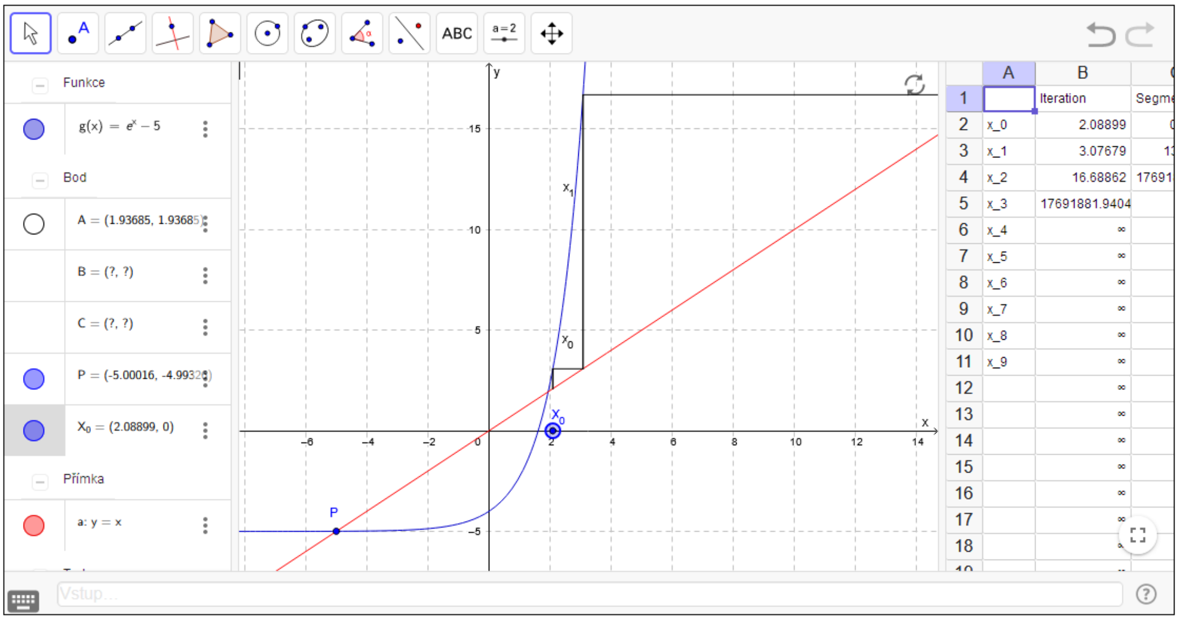
Táto funkcia má dva priesečníky s priamkou $y = x$, tak sa pozrime, čo sa bude diať.



Vidíme, že z oblasti vľavo od ľavého priesečníka a medzi priesečníkmi konvergujú iterácie rýchlo k ľavému priesečníku.



Naopak, iterácie vpravo od pravého priesečníka divergujú.

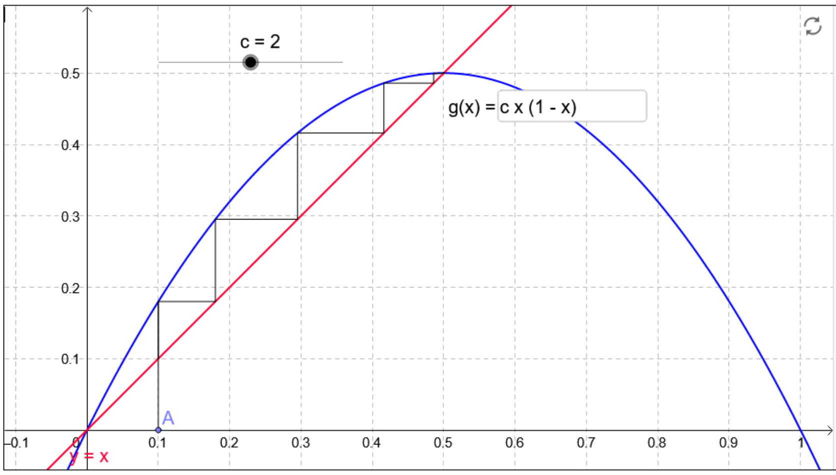


Takže už trocha tušíme, ako to funguje:

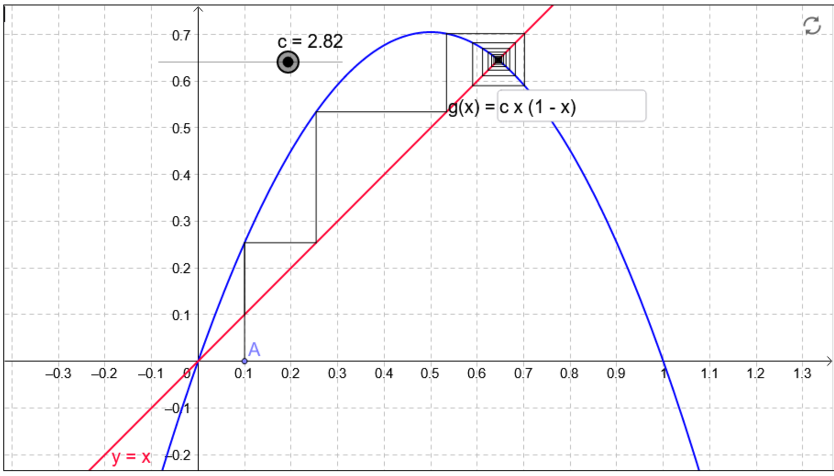
Označme ako stacionárny bod iterácie $x_n = f(x_{n-1})$ bod, pre ktorý platí $x = f(x)$. Iterácie vychádzajúce z okolia stacionárneho bodu konvergujú, keď je smernica funkcie v stacionárnom bode menšia ako 1 (teda ako smernica priamky $y = x$), inak divergujú. Ako okolie stacionárneho bodu označujeme otvorený interval, v ktorom sa nenachádza iný stacionárny bod.

Rôzne typy správania

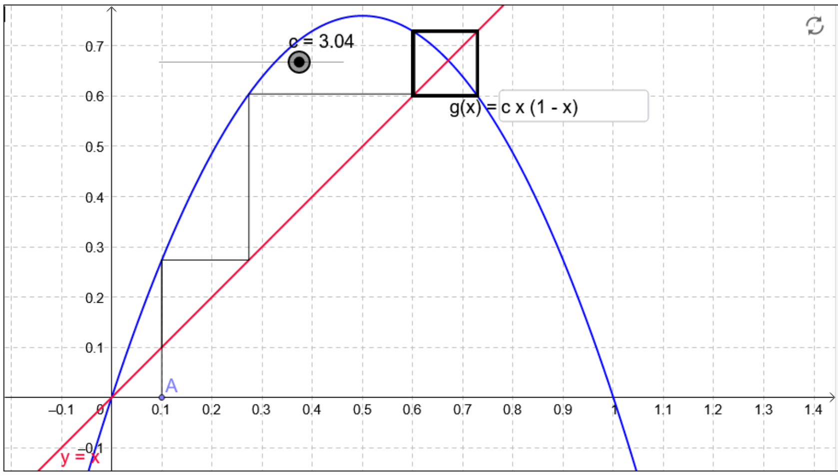
Klasický príklad funkcionálnej iterácie je funkcia $f(x) = cx(1 - x)$. Poďme preskúmať chovanie pre jednotlivé hodnoty c:



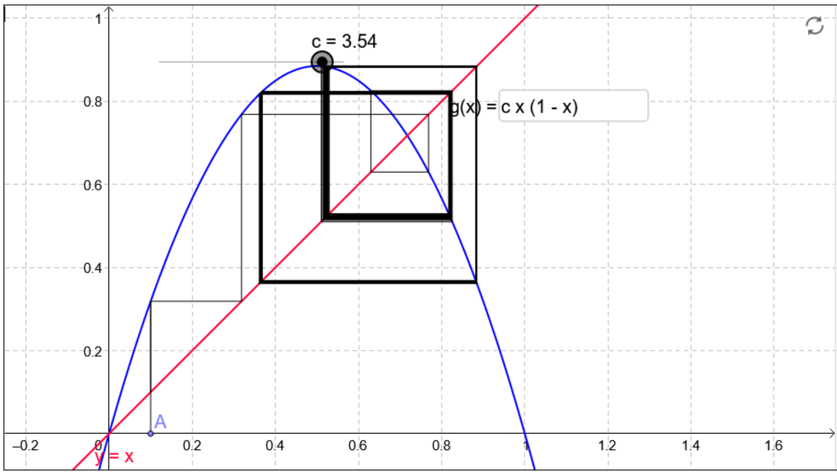
	A	B	C	D
1	0.1	0.08	0.08	
2	0.18	0.1152	0.1152	
3	0.2952	0.12091	0.1209	
4	0.41611	0.06981	0.0698	
5	0.48593	0.01368	0.0136	
6	0.4996	0.0004	0.0004	
7	0.5	0	0	
8	0.5	0	0	
9	0.5	0	0	
10	0.5	0	0	
11	0.5	0	0	
12	0.5	0	0	
13	0.5	0	0	
14	0.5	0	0	
15	0.5	0	0	



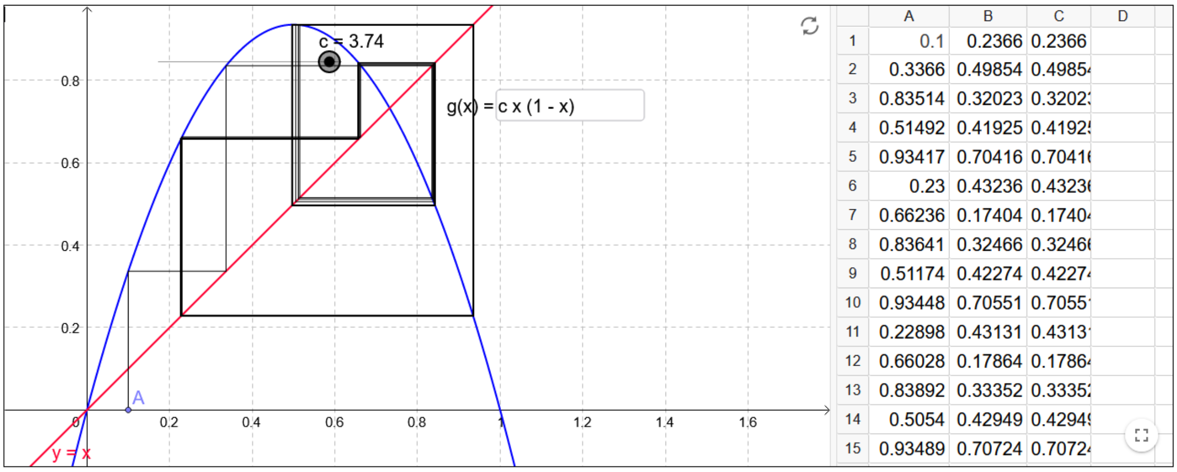
	A	B	C	D
1	0.1	0.1538	0.1538	
2	0.2538	0.28027	0.2802	
3	0.53407	0.16766	0.1676	
4	0.70173	0.11148	0.1114	
5	0.59024	0.09179	0.0917	
6	0.68203	0.07048	0.0704	
7	0.61156	0.05835	0.0583	
8	0.66991	0.04631	0.0463	
9	0.62359	0.03833	0.0383	
10	0.66192	0.03086	0.0308	
11	0.63106	0.0255	0.0255	
12	0.65656	0.02068	0.0206	
13	0.63588	0.01706	0.0170	
14	0.65293	0.01389	0.0138	
15	0.63904	0.01144	0.0114	



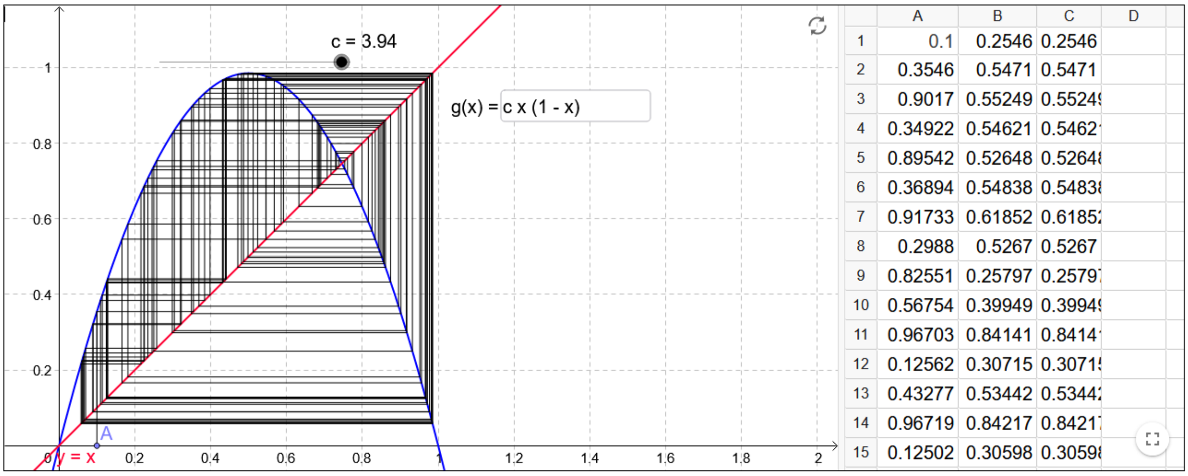
	A	B	C	D
1	0.1	0.1736	0.1736	
2	0.2736	0.33058	0.3305	
3	0.60418	0.12283	0.1228	
4	0.72701	0.12366	0.1236	
5	0.60334	0.12419	0.1241	
6	0.72753	0.12492	0.1249	
7	0.60261	0.12537	0.1253	
8	0.72799	0.12601	0.1260	
9	0.60198	0.1264	0.1264	
10	0.72838	0.12694	0.1269	
11	0.60144	0.12728	0.1272	
12	0.72872	0.12775	0.1277	
13	0.60097	0.12804	0.1280	
14	0.72901	0.12844	0.1284	
15	0.60057	0.12868	0.1286	



	A	B	C	D
1	0.1	0.2186	0.2186	
2	0.3186	0.44991	0.4499	
3	0.76851	0.13874	0.1387	
4	0.62977	0.19562	0.1956	
5	0.82539	0.31519	0.3151	
6	0.5102	0.37443	0.3744	
7	0.88463	0.52335	0.5233	
8	0.36129	0.4556	0.4556	
9	0.81689	0.28736	0.2873	
10	0.52953	0.35239	0.3523	
11	0.88191	0.51325	0.5132	
12	0.36866	0.45527	0.4552	
13	0.82394	0.31041	0.3104	
14	0.51353	0.37082	0.3708	
15	0.88435	0.5223	0.5223	



	A	B	C	D
1	0.1	0.2366	0.2366	
2	0.3366	0.49854	0.4985	
3	0.83514	0.32023	0.3202	
4	0.51492	0.41925	0.4192	
5	0.93417	0.70416	0.7041	
6	0.23	0.43236	0.4323	
7	0.66236	0.17404	0.1740	
8	0.83641	0.32466	0.3246	
9	0.51174	0.42274	0.4227	
10	0.93448	0.70551	0.7055	
11	0.22898	0.43131	0.4313	
12	0.66028	0.17864	0.1786	
13	0.83892	0.33352	0.3335	
14	0.5054	0.42949	0.4294	
15	0.93489	0.70724	0.7072	



	A	B	C	D
1	0.1	0.2546	0.2546	
2	0.3546	0.5471	0.5471	
3	0.9017	0.55249	0.5524	
4	0.34922	0.54621	0.5462	
5	0.89542	0.52648	0.5264	
6	0.36894	0.54838	0.5483	
7	0.91733	0.61852	0.6185	
8	0.2988	0.5267	0.5267	
9	0.82551	0.25797	0.2579	
10	0.56754	0.39949	0.3994	
11	0.96703	0.84141	0.8414	
12	0.12562	0.30715	0.3071	
13	0.43277	0.53442	0.5344	
14	0.96719	0.84217	0.8421	
15	0.12502	0.30598	0.3059	

S rastom c vidíme prechod od monotónnej konvergencie cez tlmené kmity k oscilujúcemu nekonvergentnému chovaniu a potom cez stále komplikovanejšie oscilácie k chaotickému správaniu.

Dolný stacionárny bod je nestabilný.

Horný stacionárny bod je stabilný, ale ako je smernica krvky v tomto bode stále zápornejšia, riešenia stále viac oscilujú.

Dôležitú úlohu hrá aj okolie maxima paraboly - slúži ako mixér, pretože posiela do prakticky rovnakého x rôzne trajektórie. Všimnime si, akú prominentnú úlohu hrá v zložitých trajektóriách.

---

3. Geometria

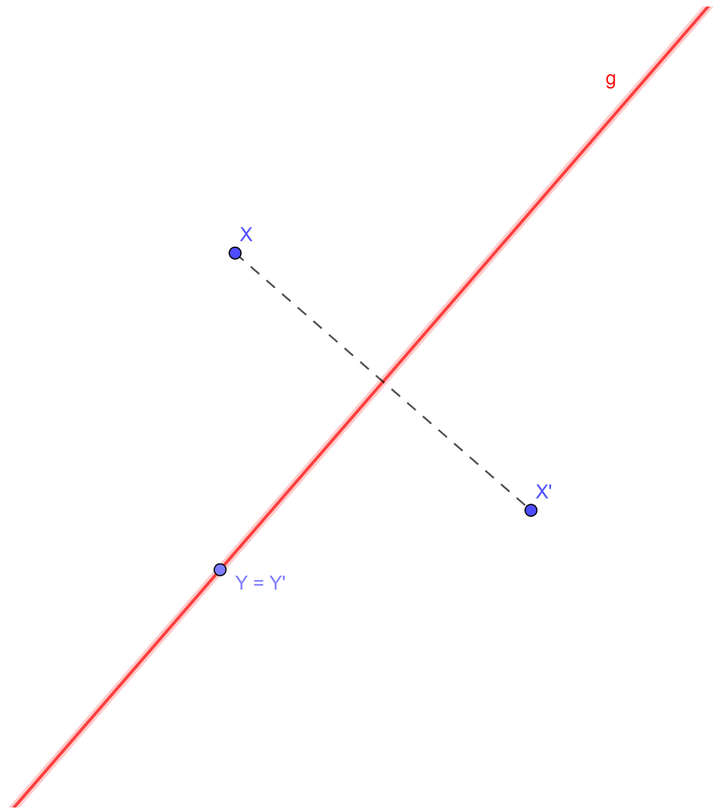
Mali sme posledne, dnes na ňu neostane čas.

Zrkadlenie

Definícia

Majme priamku g a uvažujme takéto zobrazenie σ_g Euklidovskej roviny E_2 na seba:

- $X \in g: \quad \sigma_g(X) = X$
- $X \notin g: \quad \sigma_g(X) = Y, d(X,g) = d(Y,g) \wedge XY \perp g$



Takéto zobrazenie sa nazýva zrkadlenie okolo osi g.

Tvrdenie 1

Zrkadlenie je *involúcia*, teda si je samo sebe inverzným zobrazením: $\sigma_g \circ \sigma_g = I$ (identické zobrazenie), resp. $\sigma_g^{-1} = \sigma_g$

Tvrdenie 2

Zrkadlenie je *izometria*, teda zachováva vzdialenosti:
$X' = \sigma_g(X), Y' = \sigma_g(Y) \implies d(X,Y) = d(X',Y')$.

Izometrií roviny je 5 (zrkadlenie, posunutie, bodová súmernosť, rotácia, posunutá rotácia) a všetky možno zostrojiť kombináciou niekoľkých zrkadlení.

Tvrdenie 3

3a. Všetky body na osi zrkadlenia sú pevnými bodmi zrkadlenia a zrkadlenie nemá žiadne iné pevné body.

3b. Pevné priamky zrkadlenia sú os zrkadlenia a všetky priamky na ňu kolmé.

Posunutie

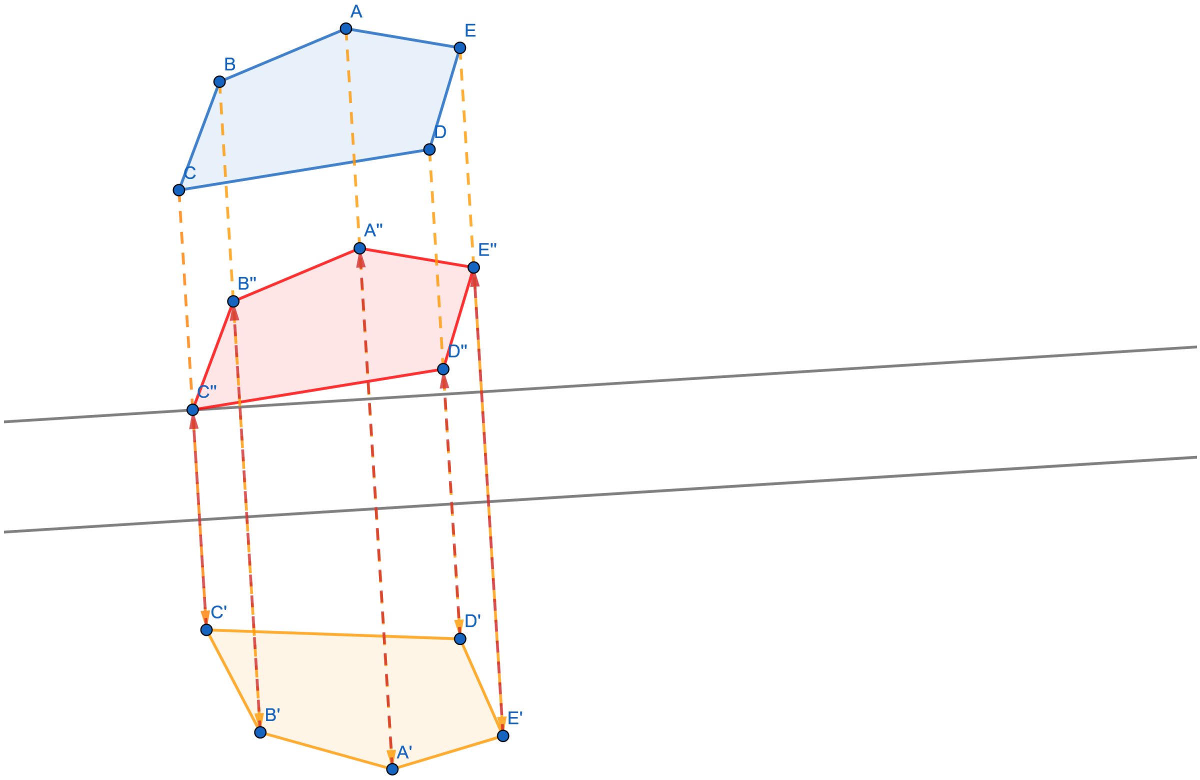
Zložené zobrazenie pozostávajúce z dvoch zrkadlení okolo rovnobežných priamok f a g je posunutie.

Ak zrkadlenia označíme σ_f, σ_g, potom môžeme formálne písať $T = \sigma_g \circ \sigma_f$. Ľahko zistíme, že inverzné zobrazenie je $T^{-1} = \sigma_f \circ \sigma_g$. Skutočne,

$$TT^{-1} = (\sigma_g \circ \sigma_f) \circ (\sigma_f \circ \sigma_g) = \sigma_g \circ (\sigma_f \circ \sigma_f) \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \sigma_g = I$$
$$T^{-1}T = (\sigma_f \circ \sigma_g) \circ (\sigma_g \circ \sigma_f) = \sigma_f \circ (\sigma_g \circ \sigma_g) \circ \sigma_f = \sigma_f \circ \sigma_f = I$$

pretože zrkadlenie je involúcia.

Veľkosť posunutia je dvojnásobok vzdialenosti medzi priamkami a smer je kolmý na obe rovnobežky.



- Posunutie nemá pevný bod
- Pretože je kompozíciou dvoch izometrií, je posunutie tiež izometria.
- Dve priamky rovnobežné s f a g a s rovnakou vzdialenosťou ako medzi f a g realizujú rovnaké posunutie.
- Priamky rovnobežné s posunutím sa zobrazujú na seba.

Posunutie v rovine je vo všetkých bodoch rovnaké, a teda na jeho rekonštrukciu stačí jeden bod a jeho obraz, čo stačí na rekonštrukciu vektora posunutia.

Medzi vektormi a posunutiami je priradenie 1:1, a preto sa niekedy vektor priamo definuje ako posunutie.

Rotácia

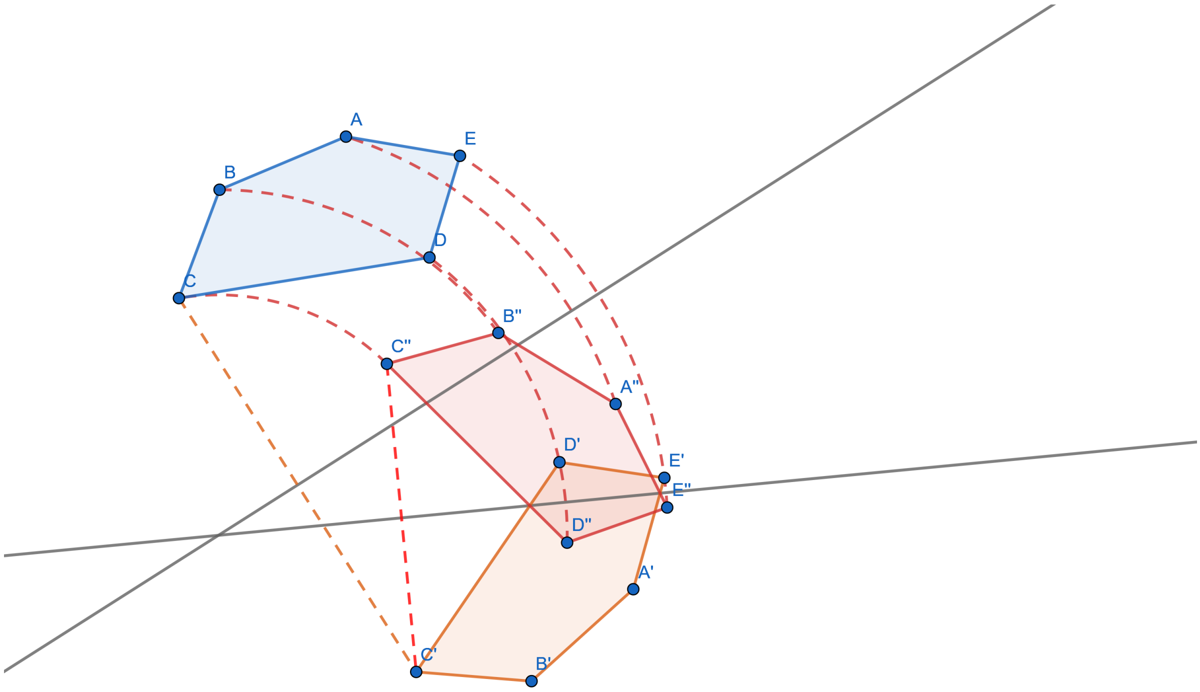
Zložené zobrazenie pozostávajúce z dvoch zrkadlení okolo rôznobežných priamok f a g je rotácia.

Ak zrkadlenia označíme σ_f, σ_g, potom môžeme formálne písať $T = \sigma_g \circ \sigma_f$. Ľahko zistíme, že inverzné zobrazenie je $T^{-1} = \sigma_f \circ \sigma_g$. Skutočne,

$$TT^{-1} = (\sigma_g \circ \sigma_f) \circ (\sigma_f \circ \sigma_g) = \sigma_g \circ (\sigma_f \circ \sigma_f) \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \sigma_g = I$$
$$T^{-1}T = (\sigma_f \circ \sigma_g) \circ (\sigma_g \circ \sigma_f) = \sigma_f \circ (\sigma_g \circ \sigma_g) \circ \sigma_f = \sigma_f \circ \sigma_f = I$$

pretože zrkadlenie je involúcia.

Stred rotácie je priesečník priamok f a g, veľkosť rotácie je dvojnásobok uhla medzi priamkami a smer je daný poradím zrkadlení.



- Rotácia má jediný pevný bod, a to stred otáčania.

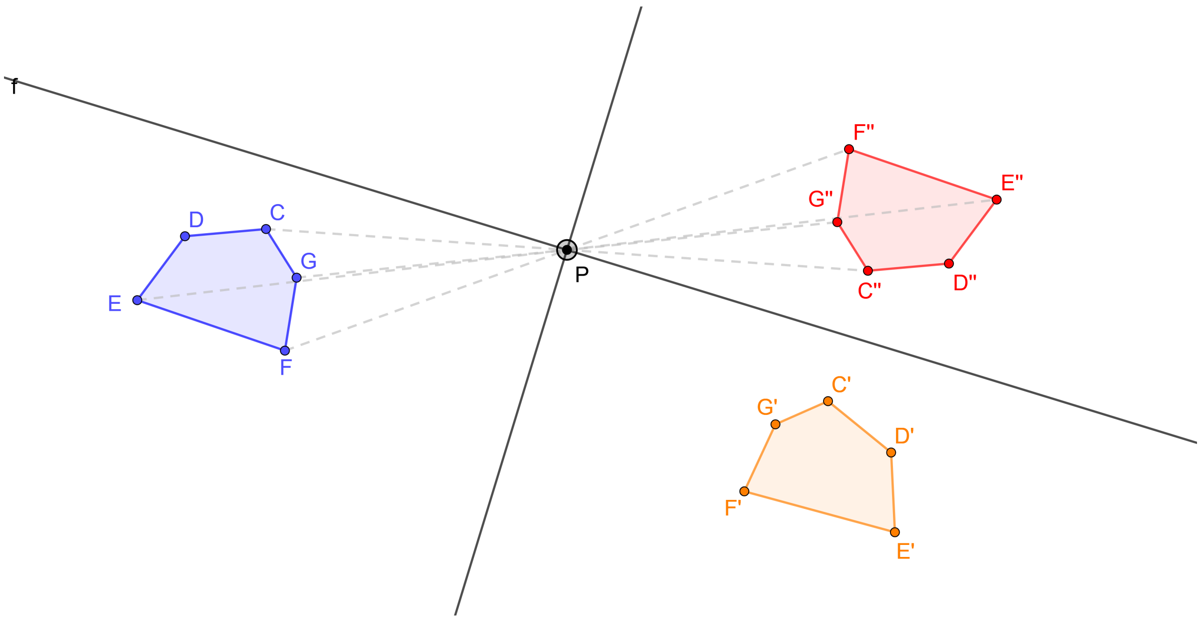
- Pretože je kompozíciou dvoch izometrií, je rotácia tiež izometria.
- Dve priamky prechádzajúce priesečníkom f a g a s rovnakým uhlom ako medzi f a g realizujú rovnakú rotáciu.
- Ak uhol rotácie je α, potom rotácia okolo rovnakého stredu o uhol $\alpha + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ je rovnaké zobrazenie.

Na rekonštrukciu rotácie potrebujeme dva body a ich obrazy, pretože musíme zrekonštruovať stred otáčania a jeho uhol.

Stredová súmernosť

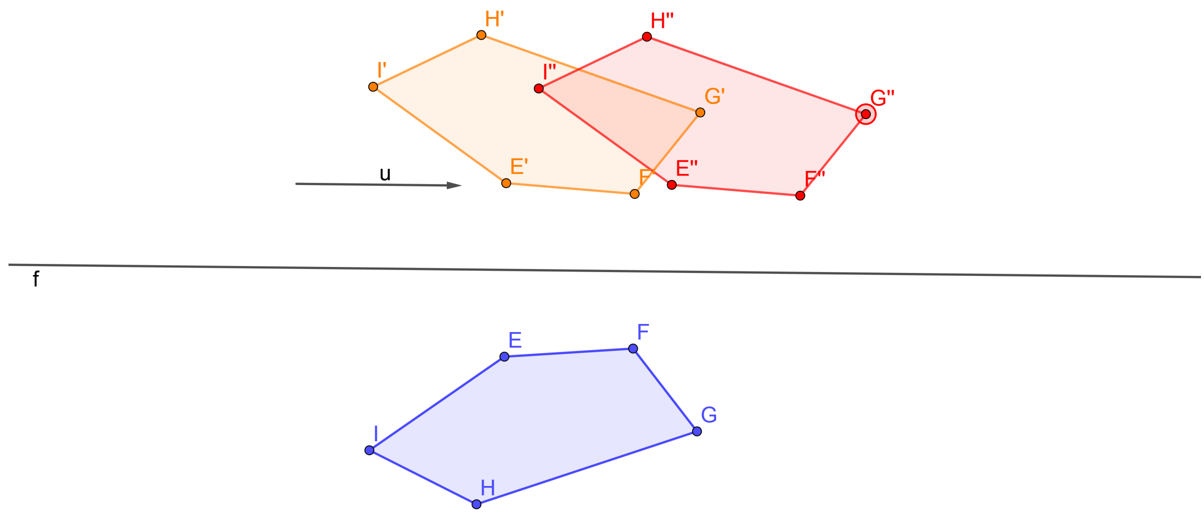
Stredová súmernosť je kompozícia dvoch zrkadlení s navzájom kolmými osami. Ide teda o rotáciu o $2 \times 90^\circ = 180^\circ$.

- Stredová súmernosť je involúcia, teda je rovná svojmu inverznému zobrazeniu.
- Pretože je kompozíciou dvoch izometrií, je stredová súmernosť tiež izometria.
- Stredová súmernosť má pevný bod - stred súmernosti.



Posunuté zrkadlenie

Posunuté zrkadlenie je kompozícia zrkadlenia a posunutia rovnobežného s osou zrkadlenia, resp. zrkadlenia okolo priamky f a dvoch na ňu kolmých priamok g a h. Ešte v inom vyjadrení je to kompozícia stredovej symetrie a zrkadlenia.



- Posunuté zrkadlenie nemá žiadny pevný bod.
- Pretože je kompozíciou izometrií, je posunuté zrkadlenie tiež izometria.
- Os zrkadlenia je invariantná voči posunutému zrkadleniu (zobrazuje sa sama na seba).

5 izometrií roviny

Každú izometriu roviny (teda zobrazenie, zachovávajúce vzdialenosti) vieme vyjadriť ako jedno z piaich základných zobrazení: zrkadlenie, posunutie, rotácia, stredová súmernosť, posunuté zrkadlenie.

- Zrkadlenie
- Posunutie
- Rotácia

- Stredová symetria
- Posunuté zrkadlenie

Ďalšie tvrdenia

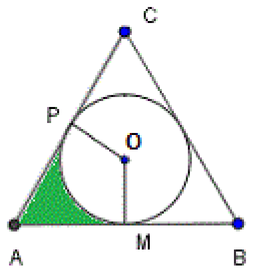
Toto budeme dokazovať nabudúce:

- Každú izometriu môžeme vyjadriť ako kompozíciu najviac troch zrkadlení.
- Každú izometriu môžeme vyjadriť ako kompozíciu posunutia a izometrie s najmenej jedným pevným bodom.
- Kompozícia rotácie a posunutia je rotácia (má pevný bod!)

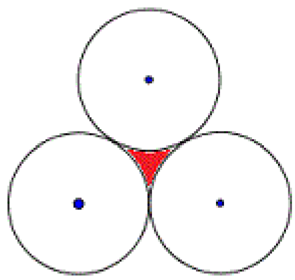
---

4. Domáca úloha (nová)

1. Trojuholník má strany 4 m, 11 m a 8 m. Vypočítajte jeho vnútorné uhly.
2. Loď vyplávala z prístavu o 13:00 smerom na sever rýchlosťou 30 km/h. O 15:00 loď upravila kurz o 20° na východ. Ako ďaleko je loď od prístavu o 16:00.
3. Strana trojuholníka má dĺžku 1. Nájdite obsah zelenej plochy.



4. Polomer kružníc je 1. Vypočítajte obsah červenej plochy.



5. Program na budúci týždeň

- izometrie v rovine: zložitejšie tvrdenia a príklady