Hodina 7. júla 2023

Program:

1. Domáca úloha: zostávajúci príklad z prijímačkového testu a príklady z 1. lekcie
2. Niekoľko príkladov na zahriatie a pozdvihnutie mysli.
3. Rôzne postupnosti a číselné rady
4. Domáca úloha (nová)

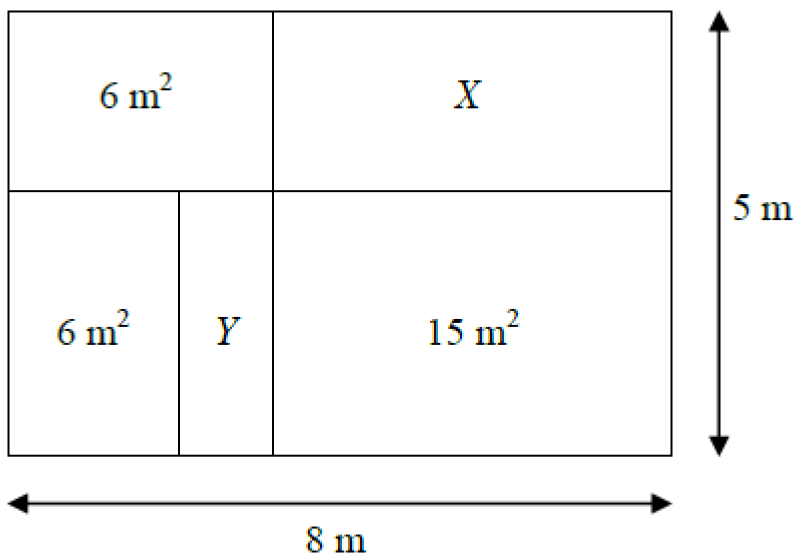
0. Úvod

Tento text a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári https://github.com/PKvasnick/Erik. Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

Telekonferencia Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť.*

1. Domáca úloha

Zostávajúci prijímačkový príklad



Vieme, že jedno riešenie je X=10, Y=3. Treba nájsť iné riešenie. Jedno riešenie uvádzam na konci.

Druhá časť domácej úlohy boli ešte stále tieto príklady:

Príklad 1

Postupnosť začína číslami 1, 3, 6, 10. Doplň ďalšie členy.

Ako u väčšiny príkladov, ktoré budeme riešiť, nezaujíma nás až tak veľmi konkrétny príklad, ale stratégie a postupy, ktoré sa dajú použiť.

Príklad 2

Platí

$$\sqrt{25} = 2 + 5 - 2 \quad (\text{odčítame dvojku, pretože máme druhú odmocninu})$$
$$= 5$$
$$\sqrt{64} = 6 + 4 - 2 = 8$$
$$\sqrt{196} = 1 + 9 + 6 - 2 = 14$$
$$\sqrt{289} = 2 + 8 + 9 - 2 = 17$$

Je toto nová fantastická finta na odmocňovanie? Ako to funguje? Pre aké najväčšie číslo to môže platiť?

Príklad 3

Majme postupnosť $x_{n+1} = a \cdot x_n(1 - x_n)$. Ako sa správa pre rôzne a?

2. Príklady

Toto sú sondovacie príklady, ktoré slúžia pre všeobecné osvietenie a chcem tiež pomocou nich zistiť, čomu ešte sa treba venovať.

1. Príklad na deliteľnosť

Tvrdenie Všetky čísla tvaru ABABAB sú deliteľné 37.

Vysvetlivka: A, B sú prirodzené čísla také, že 0 < A ≤ 9, 0 ≤ B ≤ 9.

Dôkaz?

- Ako to vlastne budeme dokazovať?
- Čo znamená, že tvrdenie dokážeme?

2. Exponenciálna rovnica

Nájdi všetky x, ktoré sú riešeniami rovnice

$$2^{5x} = 3^{2-x}$$

3. Kvadratická rovnica

Nech M, N sú korene kvadratickej rovnice

$$x^2 + 6x + 4 = 0.$$

Vypočítajte $M^2 + N^2$.

---

3. Všelijaké číselné rady

Aritmetický rad

$$a_n = a_0 + nd, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Aký je súčet prvých n členov? inak povedané, čomu sa rovná

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots a_{n-1}$$

Gaussova finta:

$$
\begin{array}{rcccc}
S_n = & a_0 + 0d & +a_0 + 1d & +\dots & +a_0 + (n-1)d \\
S_n = & a_0 + (n-1)d & +a_0 + (n-2)d & +\dots & +a_0 + 0d \\
2S_n = & 2a_0 + (n-1)d & +2a_0 + (n-1)d & +\dots & +2a_0 + (n-1)d
\end{array}
$$

a posledný súčet ide sčítať ľahko, pretože v ňom máme samé rovnaké členy.:

$$
2S_n = n(2a_0 + (n-1)d)
$$
$$
S_n = na_0 + \frac{n(n-1)}{2}d
$$

Príklad

Pre rad $S_N^{(1)} = 1 + 2 + \dots + N$ môžeme položiť $a_0 = 0,\ d = 1,\ N = n+1$, a dostaneme známy vzťah

$$
S_N^{(1)} = \frac{N(N+1)}{2}
$$

Mocninné rady

Na rad $S_n^{(1)} = 1 + 2 + \dots + n$ sa môžeme pozerať aj ako na špeciálny prípad radu

$$
S_n^{(k)} = 1^k + 2^k + \dots + n^k
$$

Vieme, že $S_n^{(1)}$ je $n(n+1)/2$, $S_n^{(0)}$ bude jednoducho n, a ukážeme si recept, ako postupne dopočítať všetky ostatné $S_n^{(k)}$.

Ukážeme si postup pre $S_n^{(2)} = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. Gaussova finta tu nefunguje, tak skúsime niečo iné. Napíšeme

$$
k^3 - (k-1)^3 = k^3 - k^3 + 3k^2 - 3k + 1 = 3k^2 - 3k + 1
$$

a vypíšeme rovnice pre k od 1 do n:

$$
\begin{array}{ccccccc}
1^3 & - & 0^3 & = & 3 \cdot 1^2 & - & 3 \cdot 1 + 1 \\
2^3 & - & 1^3 & = & 3 \cdot 2^2 & - & 3 \cdot 2 + 1 \\
3^3 & - & 2^3 & = & 3 \cdot 3^2 & - & 3 \cdot 3 + 1 \\
\dots & & & & & & \\
n^3 & - & (n-1)^3 & = & 3 \cdot n^2 & - & 3 \cdot n + 1
\end{array}
$$

Teraz tieto rovnice sčítame. Naľavo nám ostane iba n^3, zatiaľ čo napravo dostaneme lineárnu kombináciu súčtov $S_n^{(2)}$, $S_n^{(1)}$ a $S_n^{(0)}$. Z nich súčet $S_n^{(2)}$ je to, čo chceme vypočítať, takže ho zo vzťahu vyjadríme:

$$
n^3 = 3S_n^{(2)} - 3S_n^{(1)} + S_n^{(0)}
$$
$$
S_n^{(2)} = \frac{1}{3}\left(n^3 + 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right)
$$
$$
= \frac{n}{6}\left(2n^2 + 3n + 1\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
$$

Podobne, ak vypíšeme rovnice pre $k^4 - (k-1)^4$ od 1 do n, môžeme odvodiť vzťah pre $S_n^{(4)}$:

$$
S_n^{(3)} = \left(\frac{n(n+1}{2}\right)^2
$$

Harmonický rad

Harmonický rad je prípad mocninného radu pre k = -1:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Tento rad nevieme presne sčítať, ale vieme, že pre veľké n súčet H_n neohraničene rastie. Dôkaz: uvažujme rrad

$$G_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{\lceil \log_2 n \rceil}}$$

ktorý vznikne tak, že každé k v menovateli harmonického radu nahradíme najbližšou väčšou mocninou 2, teda n v menovateli nahradíme $2^{\lceil \log_2 n \rceil}$, kde $\lceil x \rceil$ označuje najmenšie celé číslo väčšie ako x .

Každý člen radu G je menší alebo rovný príslušnému členu harmonického radu, a teda $G_n \leq H_n$. Rad G ale vieme ľahko sčítať a ukázať, že je je divergentný, teda jeho súčet pre rastúce n neohraničene rastie:

$$\begin{aligned} G_n &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = 1 + \frac{\lceil \log_2 n \rceil}{2} \end{aligned}$$

kde neriešime niekoľko prípadne chýbajúcich členov na konci radu. Zjavne vidíme, že rad G je divergentný a divergentný musí byť aj harmonický rad.

Je známe, že pre veľké n dobre platí približný vzťah

$$H_n = \ln n + \gamma + O/1/n)$$

kde $\gamma = 0.577\ldots$ je Eulerova-Mascheroniho konštanta a O(1/n) znamená, že ďalšie opravné členy budú rádu 1/n a vyššieho, teda pre veľké n zanedbateľné.

Čo tento výraz znamená? Znamená, že H_n s rastúcim n neohraničene rastie do nekonečna, ale rastie nesmierne pomaly.

Alternujúci harmonický rad

Rad

$$A_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

sa od harmonického radu líši striedajúcimi sa znamienkami. Tento rad konverguje a pre rastúce n sa hodnota súčtu blíži k $\ln 2$.

Ďalšie mocninné rady so záporným k

Nekonečný rad

$$S_\infty^{-2} \equiv 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

má súčet $\pi^2/6$. Tento výsledok pochádza od Leonarda Eulera, a je prekvapujúci tým, že v ňom figuruje π. Okrem toho nie je úplne ľahké ho získať.

Čo môžeme ukázať ľahko je, že súčet radu existuje a nachádza sa medzi 1 a 2.

Uvažujme "teleskopický" rad

$$S_T \equiv \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Tento rad sa dá prekvapujúco ľahko sčítať. Stačí použiť jednoduchú fintu, ktorá sa normálne vyučuje až na vysokej škole v kurze matematickej analýzy - rozklad na parciálne zlomky:

Pokúsme sa výraz $\frac{1}{n(n+1)}$ vyjadriť v tvare $\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \quad | \cdot n(n+1)$$
$$1 = A(n+1) + Bn$$

Toto vyzerá ako jedna rovnica pre dve neznáme A a B. Pretože ale táto rovnosť má platiť pre všetky n=1, 2, .., sú to v skutočnosti dve rovnice - pre členy obsahujúce n a pre konštantné členy:

$$1 = A(n+1) + Bn = (A+B)n + A$$

Člen pri n musí byť nula a konštantný člen musí byť 1, teda $A = 1, B = -1$ a

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

čo možno ľahko overiť úpravou pravej strany. Použitím tohto vzťahu možno nekonečný rad S_T prepísať do tvaru, v ktorom sa dá triviálne sčítať:

$$S_T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdots = 1$$

Tento rad sa vyskytuje celkom často. Teraz pomocou neho ukážeme, že rad S_∞^{-2} konverguje k hodnote medzi 1 a 2:

$$\frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{1\cdot 2},$$
$$\frac{1}{3^2} \leq \frac{1}{2\cdot 3},$$
$$\frac{1}{4^2} \leq \frac{1}{3\cdot 4},$$
$$\vdots$$

a teda

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \cdots \leq 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = 2$$

čo sme si predsavzali ukázať.

Geometrický rad:

$$a_n = a_0 q^n$$

Súčet:

$$S_n = a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \cdots + a_0 q^{n-1}$$

ľahko nájdeme, ak si všimneme, že rad čiastočne obsahuje sám seba:

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \cdots + a_0 q^{n-1} \\ &= a_0 + q(a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \cdots + a_0 q^{n-2}) = a_0 + q S_{n-1} \end{aligned}$$

a pretože zároveň platí $S_n = S_{n-1} + a_0 q^{n-1}$, môžeme ľahko vyjadriť S_n:

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 + q(S_n - a_0 q^{n-1}) \\ S_n &= a_0 + qS_n - a_0 q^n \\ S_n(1-q) &= a_0(1-q^n) \\ S_n &= a_0 \frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

Pre n rastúce do nekonečna má rad súčet pre $|q| < 1$, a tento súčet je

$$S = \frac{a_0}{1-q}$$

Príklad: Pre $a_0 = 1,\ q = 1/2$ máme

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Príklad: Pre $q = -1/2$ máme

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Domáca úloha

1. Jozef si z banky požičal 500 000 eur na hypotéku s úrokom 2% na tridsať rokov. Vypočítaj mesačnú splátku.
2. Zenón naháňa korytnačku. Keď sa rozbehol, bola 100 m pred ním. Tých 100 metrov prebehol Zenón za 12.5 sekundy, ale Keď dobehol, bola 20 m pred ním. Keď prebehol týchto 20 m, bola 4 m pred ním, keď prebehol tieto 4 metre, bola ešte stále 80 cm pred ním. Zenón si začal zúfať, že korytnačku nikdy nedobehne, pretože kým dobehne tam, kde bola pred chvíľou, vždy o kúsok popolezie ďalej. Dohoní Zenón korytnačku alebo nie, a kedy?
3. Pán Brown prišiel z krčmy k domovým dverám, našiel vo vrecku kľúče, a chce si odomknúť. Na zväzku má 10 kľúčov, ale v tej tme vyzerajú všetky rovnako. Skúsi jeden kľúč, a keď to nie je správny, vráti ho do zväzku a zasa náhodne vyberie kľúč, a takto postupuje ďalej, kým nenájde správny kľúč.
    - Pri koľkom pokuse má pán Brown najväčšiu šancu nájsť správny kľúč?
    - Koľko kľúčov v priemere musí vyskúšať, kým nájde ten správny?

Riešenie domácej úlohy

Toto riešenie nie je správne!

Toto je iný prístup, ako efektívne riešiť úlohu o plochách X a Y.

Začali sme tým, že sme si označili úseky a, b, c, d, e, a vieme pre ne získať hromadu rovníc z údajov v obrázku. Treba skúsiť vyjadriť X, Y a získať nejaký vzťah medzi nimi.

Skúsme rýchlejšie riešenie:

Predpokladáme, že riešenie X=10, Y=3 pochádza z nejakého jednoduchého tvaru oblastí X, Y - konkrétne, že budú mať celočíselné rozmery. Potom - v označení a, b, atd, môžeme predpokladať a=2, c=5, b=3, d=1, e=2, teda náš predpoklad dáva zmysel.

Slušné riešenie by mohlo vzniknúť, keby sme vzali X=12 a nechali a=2. Potom c=6, b=2.5, d+e=3, e=2.4, takže d=0.6 a Y=0,6 x 2.5 = 1.5.

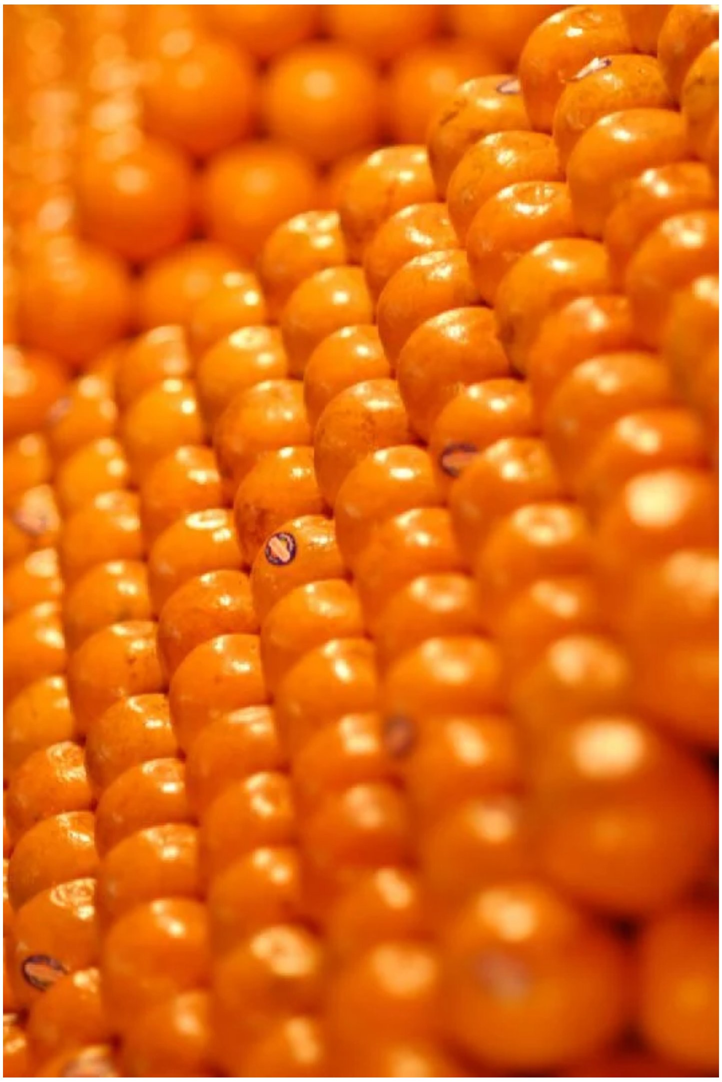
Teda iné riešenie je X=12, Y=1.5.

Podobne môžeme skúsiť X=12, a=3. Potom c=4, b=3.75. Ďalej d+e=2, e=6/3.75=1.6, d=0.4, Y=0.4 x 3.75 = 1.5. Toto dáva rovnaké riešenie.

Ešte skúsme riešenie s iným X, napr. X=9. Položme a=3, potom c=3, b=15/3=5, d+e = 6/3 = 2, e=6/5=1.2, d= 0.8, Y=0.8 x 5 = 4.

Teda ešte ďalšie riešenie je X=9, Y=4.

Kuriozita: Balenie pomarančov v osemrozmernom priestore



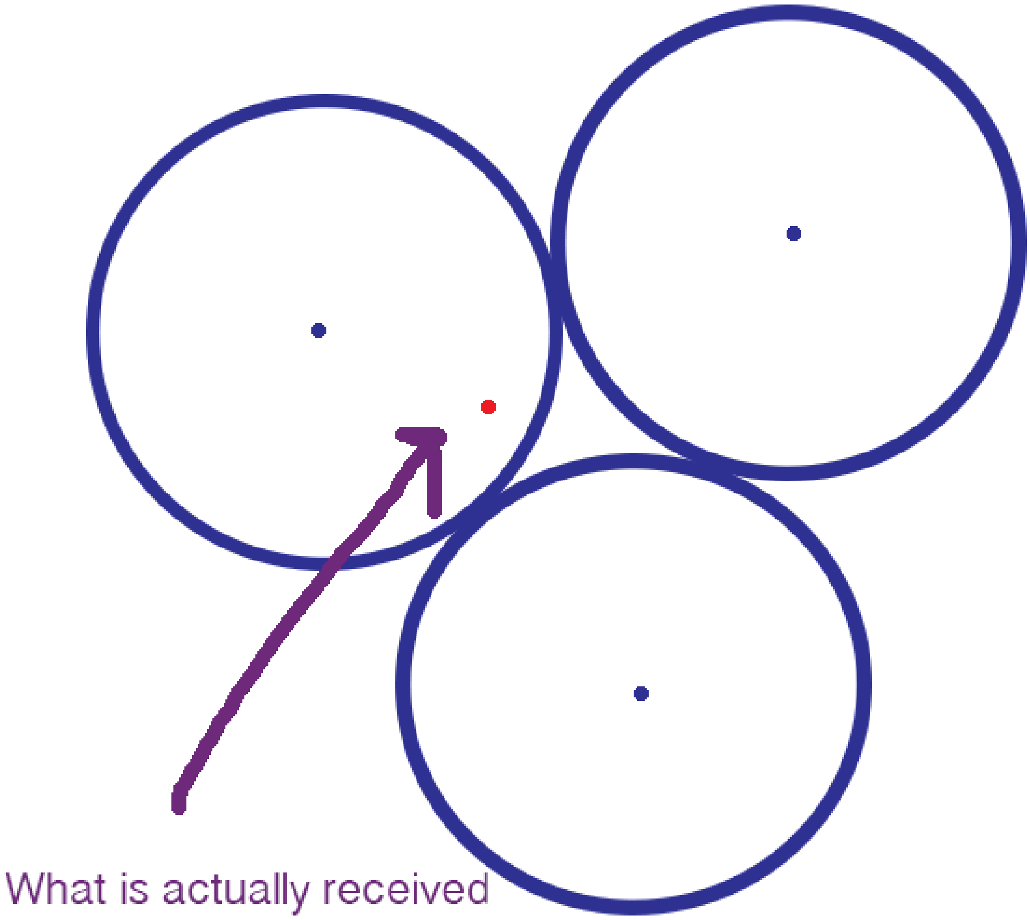
Tento rok Maryna Viazovska ukázala, ako najefektívnejšie usporiadať gule v osemrozmernom priestore. Môže sa zdať, že to je abstraktná záležitosť, ale v skutočnosti má veľmi praktické použitie.

- Jednorozmernú priamku môžeme úplne pokryť jednorozmernými guľami (úsečkami jednotkovej dĺžky)

- rovinu môžeme pokryť kruhmi tak, že ostane 9% voľnej plochy
- priestor môžeme pokryť guľami tak, že otstane 26% voľného priestoru
- vo vyšších rozmeroch objem, ktorý zaberajú najefektívnejšie usporiadané gule, rýchlo klesá.

Praktický význam: algoritmy najbližšieho suseda (nearest neighbour

Veľa úloh strjového učenia (machine learning) spočíva v tomto: Máme nejakú množnu známych hodnôt X pre niekoľko kombinácií parametrov $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \in P$. Úloha je nájsť hodnotu pre inú kombináciu parametrov. Najjednoduchší spôsob je nájsť najbližší bod v n-rozmernom priestore parametrov P a použiť hodnotu X z tohto bodu. Iný spôsob je použiť n najbližších známych bodov v priestore P a vypočítať vážený priemer pre nový bod. V oboch týchto prípadoch vidíme, že s rastom dimenzie priestoru P budú takéto metódy fungovať stále horšie - budeme potrebovať nerealisticky veľké počty "známych" bodov, aby sme vedeli odhadnúť hodnotu X v ľubovoľnom inom bode - teda aby sme okolo náhodne vybraného bodu v priestore P vedeli nájsť dostatočne blízky dátový bod, pre ktorý poznáme X.



Tento obrázok dobre ilustruje, čo som písal vyššie, ale v skutočnosti má ilustrovať ďalšie dôležité použitie poznatkov o najefektívnejšom pokrytí priestoru guľami.

Viac v https://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/why-you-should-care-about-high-dimensional-sphere-packing/