Hodina 12. januára 2024

Program:

1. Domáca úloha (z minula)
2. Niekoľko príkladov na zahriatie a pozdvihnutie mysli: matice
3. Poznámky k maticiam: row reduction, násobenie maticou, lineárna regresia
4. Domáca úloha (nová)
5. Program na budúci týždeň

0. Úvod

Tento text a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári https://github.com/PKvasnick/Erik. Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

Videohovor Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť.*

---

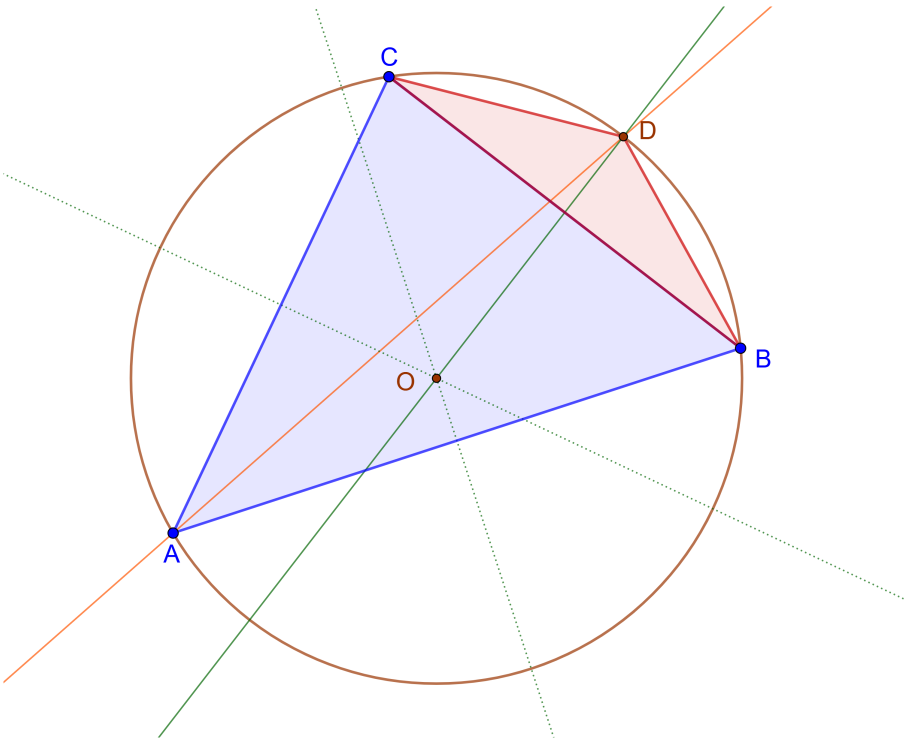
1. Domáca úloha

Príklad 1

Dokážte, že v trojuholníku ABC leží priesečník osi uhla β (pri vrchole B) a osi strany b (oproti vrcholu B) na kružnici opísanej trojuholníku.

Riešenie

Tento bod sa v českej a slovenskej matematickej literatúre označuje ako Švrčkov bod, a pravdaže každý trojuholník má tri takéto body.



Poďme si najskôr ozrejmiť, ako môžeme dokázať, že dva body sú totožné. V našom prípade vieme, že ľubovoľný body X ležiaci na osi strany BC tvorí s bodmi BC rovnoramenný trojuholník. Preto na dôkaz tvrdenia potrebujeme dokázať, že priesečník osi uhla $\alpha = \angle BAC$ s opísanou kružnicou vytvára rovnoramenný trojuholník BCD. Potom musí bodom D prechádzať aj os strany BC.

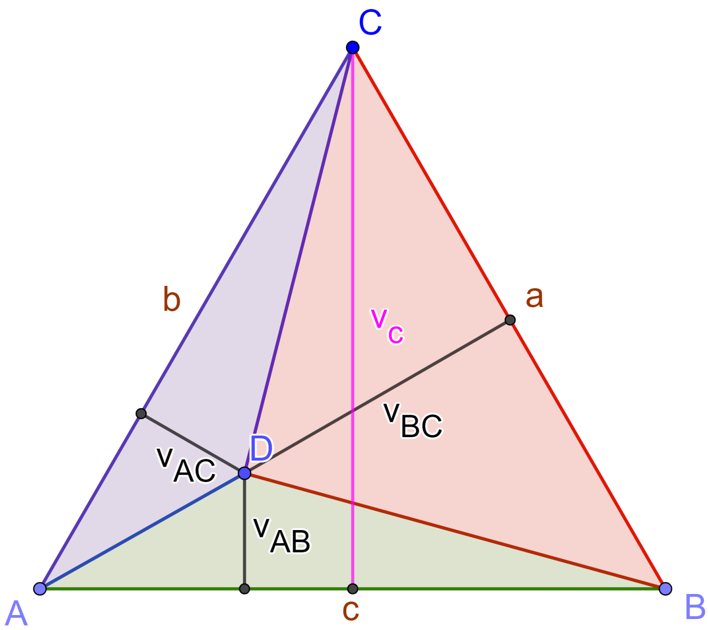
Vlastný dôkaz: Uhol $\angle BAD$ a uhol $\angle BCD$ sú obvodové uhly, prislúchajúce tetive BD a sú teda rovnaké a rovné $\alpha/2$, pretože AD je os uhla $\alpha \equiv \angle BAC$. Podobne platí $\angle DCB = \angle CAD = \alpha/2$. Trojuholník CBD je teda rovnoramenný a os strany BC musí predchádzať vrcholom D. Tým je tvrdenie dokázané.

Príklad 2

Vezmime ľubovoľný bod P vnútri rovnostranného trojuholníka. Dokážte že súčet jeho vzdialeností od strán trojuholníka je rovný výške trojuholníka (teda je pre všetky body vnútri trojuholníka rovnaký).

Riešenie

Toto tvrdenie sa nazýva Vivianiho veta a dôkaz je ľahký:



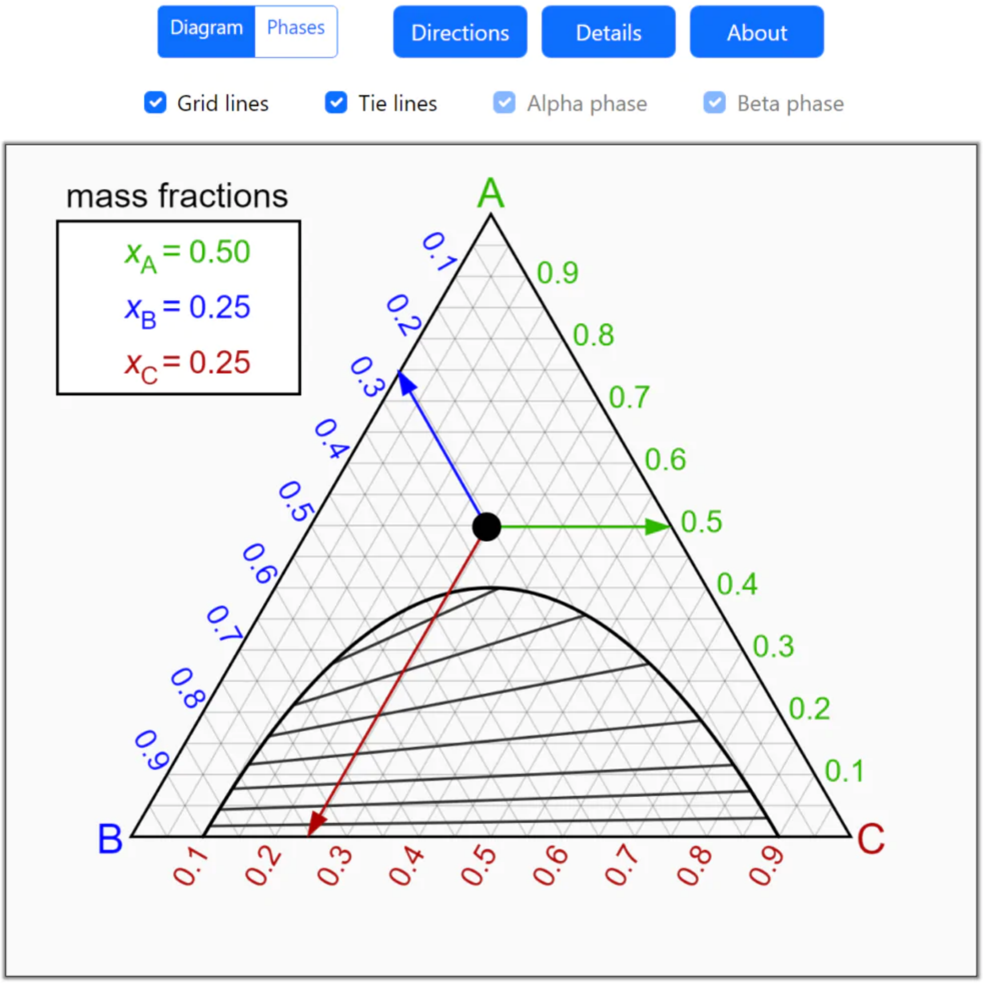
Jediné, čo treba, je vypočítať dvoma spôsobmi obsah trojuholníka:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}cv_c = \frac{1}{2}cv_{AB} + \frac{1}{2}av_{BC} + \frac{1}{2}bv_{AC}$$

a pretože máme rovnostranný trojuholník a $a = b = c$, musí platiť

$$v_c = v_{AB} + v_{BC} + v_{AC}$$

Takto možno kresliť grafy vlastností ternárnych zmesí, pre ktoré molárne zlomky zložiek dávajú spolu 1 a takto vieme prirodzene nakresliť závislosť od 3 viazaných parametrov nakresliť do trojuholníka.



Hoa, hoa, ale tu sa vzdialenosti merajú inak! Ako vieme, že aj pre takéto vzdialenosti platí Vivianiho veta?

Odpoveď: vzidalenosti sa líšia od kolmých vzdialeností o konštantný faktor $1/\cos 60^\circ$. Ich obrovská výhoda je, že ich vieme jednoducho zostrojiť.

Zovšeobecnenie Platí niečo podobné pre všeobecný trojuholník?

Niekoľko príkladov na zahriatie a povznesenie mysle

Matice: Redukcia po riadkoch (row reduction)

Pokračujeme z minula:

Problém 3

Továreň vyrába osobné autá, nákladné autá a autobusy. Tri hlavné suroviny, ktoré používa, sú oceľ, sklo a plasty. Nasledujúca tabuľka obsahuje množstvo surovín, potrebných na jednotlivé výrobky, vo vhodných jednotkách:

	Osobné auto	Nákladné auto	Autobus
Oceľ	1	4	6

	Osobné auto	Nákladné auto	Autobus
Sklo	2	3	20
Plast	3	5	15

Denne sa v priemere spotrebuje 48 jednotiek ocele, 113 jednotiek skla a 111 jednotiek plastov. Koľko osobných áut, nákladných áut a autobusov sa priemerne denne vyrobí?

Riešenie Označme c, t, b priemerný počet denne vyrobených osobných áut, nákladných áut a autobusov (*c*ars, *t*rucks, *b*usses). Tabuľka spotreby materiálov pre jednotlivé výrobky nám dáva sústavu lineárnych rovníc pre c, t, b:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 20 \\ 3 & 5 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ t \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 113 \\ 111 \end{pmatrix}$$

a riešime zase zostrojením augmentovanej matice a jej uvedením do RREF tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 2 & 3 & 20 & 113 \\ 3 & 5 & 15 & 111 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 -= 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 0 & -5 & 8 & 17 \\ 3 & 5 & 15 & 111 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 -= 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 0 & -5 & 8 & 17 \\ 0 & -7 & -3 & -33 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_3 = 5R_3 - 7R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 0 & -5 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -71 & -284 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 /= -71} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 0 & -5 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_2 -= 8R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 0 & -5 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 /= -5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 48 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 -= 4R_2 + 6R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

V priemere sa teda vyrobí 12 osobných, 3 nákladné automobily a 4 autobusy.

Poznámka V tomto prípade sme mali šťastie a vyhli sme sa zásadnému problému takýchto úloh: ako zabezpečiť, aby sme dostali $c, t, b \geq 0$? Typicky sa takáto úloha rieši tak, že hľadáme projekciu riešenia lineárneho systému do podpriestoru $c, t, b \geq 0$ - najbližší vektor k vektoru riešenia, ktorý už leží v požadovanom podpriestore.

Matice et al.

1. Prečo funguje redukcia po riadkoch?

Ekvivalentné úpravy: ľubovoľný riadok alebo stĺpec matice môžeme nahradiť lineárnou kombináciou všetkých riadkov či stĺpcov.

Čo robíme, keď robíme ekvivalentné úpravy matice?

Riešili sme minulý týždeň takéto veci:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 -= 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -13 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \dots$$

Aká matica by previedla pôvodnú maticu vľavo na maticu vpravo? Nechávame prvý a tretí riadok nezmenený, teda tá matica bude mať na diagonále v pozíciách 1 a 3 jednotky, a v 1. a 3. riadku budú okrem toho samé nuly. Na druhom riadku chceme $(-4)\cdot$ prvý riadok + $1\cdot$ druhý riadok, takže výsledok bude vyzerať nejako takto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -13 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Úplne podobne to je s ostatnými úpravami: všetky ekvivalentné úpravy môžeme chápať ako násobenie nejakou maticou.

Čo je augmentovaná matica?

Môžeme si predstaviť, že maticovú rovnicu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ rozpíšeme po stĺpcoch ako

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \end{pmatrix} x_3 - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Ak rovnosť vpravo násobíme maticou s nenulovým determinantom, jej platnosť sa nezmení: bude platiť práve vtedy, ako $\mathbf{x}$ je riešením sústavy.

Čo všetky tie operácie, ktoré robíme pri uvádzaní matice do RREF?

Pri uvádzaní matice do diagonálneho tvaru násobíme obe strany sústavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ postupne maticami $\mathbf{T_1, T_2, \ldots}$, ktoré zodpovedajú jednotlivým operáciám s riadkami:

$$\mathbf{T_1 T_2} \cdot \cdots \cdot \mathbf{Ax} = \mathbf{T_1 T_2} \cdot \cdots \cdot \mathbf{b}$$

Cieľom je uviesť $\mathbf{A}$ do diagonálneho tvaru. Teda $\mathbf{T_1 T_2} \cdot \cdots \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$ a to znamená, že $\mathbf{T_1 T_2} \cdots = \mathbf{A^{-1}}$ a teda dostávame $\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1} b}$. Inak povedané, riadkovými úpravami vlastne vytvárame inverznú maticu.

Na tomto princípe je založené počítanie inverznej matice pomocou riadkových úprav, kedy augmentovaná matica obsahuje naľavo $\mathbf{A}$ a vpravo jednotkovú maticu, a riadkovými úpravami sa snažíme dosiahnuť naľavo jednotkovú maticu, ako pri riešení sústavy rovníc. Potom matica vpravo je i$\mathbf{A^{-1}}$.

Príklad:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to aR_2 - cR_1} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1 \to (ad-bc)aR_1 - bR_2} \left(\begin{array}{cc|cc} (ad-bc)a & 0 & ad & -ba \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1 \to R_1/a(ad-bc), R_2 \to R_2/(ad-bc)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

a teda

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad D = ad - bc$$

2. Determinanty

Príklad

Máme v rovine 3 body $A = [x_1, y_1], B = [x_2, y_2], C = [x_3, y_3]$. Obsah trojuholníka ABC je

$$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

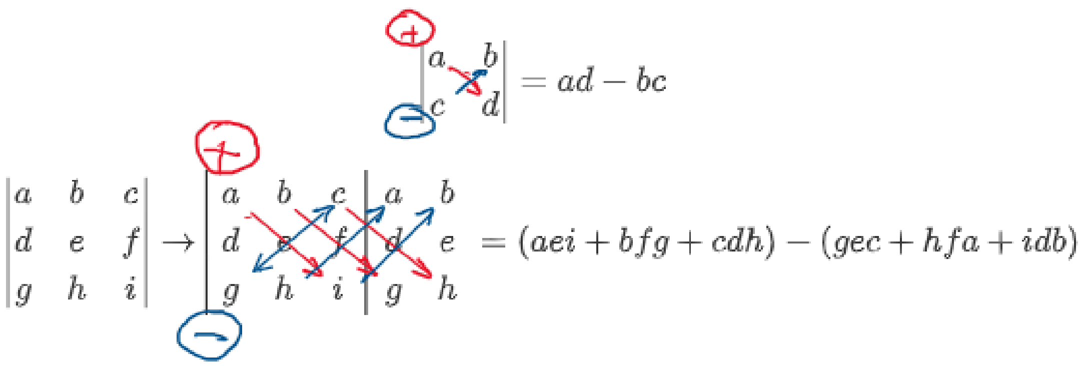
kde $\pm$ vyjadruje neistotu ohľadne znamienka, ktoré závisí od toho, ako si označíme body trojuholníka.

To vyzerá ako nejaká projektívna geometria, máme tam afínne súradnice bodov. Z 3D predstavy ľahko pochopíme aj to, ako tento vzťah funguje.

Tento vzťah je zároveň aj dobrý test kolinearity bodov A, B, C.

Výpočet 1

Zhora doprava -zdola doprava



Príklad

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 5 & -1 \\ 7 & 2 \\ 6 & 0 \end{matrix}$$

$$\to \quad [5\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot 4\cdot 6 + 3\cdot 7\cdot 0] - [6\cdot 2\cdot 3 + 0\cdot 4\cdot 5 + 1\cdot 7\cdot (-1)] = (10-24) - (36-7) = -14 - 29 = -43$$

Príklad

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \quad (52)$$

Výpočet 2

Rozvoj podľa riadku alebo stlpca:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \cdot 2 + 1. \cdot (-17) + 3 \cdot (-12) = -43$$

Formálne:

$$\det A = \sum_j a_{i,j} C_{i,j} = \sum_j a_{i,j} (-1)^{i+j} M_{i,j}$$

kde $M_{i,j}$ je minor pre prvok $a_{i,j}$, teda determinant matice s vynechaným i-tym riadkom a j-tym stĺpcom.

Výpočet 3

Predchádzajúce spôsoby sa hodia pre malé matice (pre veľké nemáme ani skratku z 1. výpočtu) a okrem toho takto počítať determinanty je numericky veľmi neefektívne -je tam fakt veľa násobení a odčítajú sa tam hlava-nehlava potenciálne veľké čísla, a to je pre počítanie v plávajúcej čiarke zhubné.

Metóda rozvoja podľa kofaktorov či minorov by bola zvlášť atraktívna, ak by sme mali v matici veľa núl. Napríklad ak by matica bola dolná trojuholníková, potrebovali by sme iba vynásobiť diagonálne prvky, a podobne to je aj pri hornej trojuholníkovej matici:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & j \end{vmatrix} = acfj, \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{vmatrix} == aehj$$

Niečo také sme už robilii, a stálo by za to mať takú možnosť pri výpočte determinantov. Musíme sa preto pozrieť, aký vplyv majú riadkové a stĺpcové operácie na determinant matice.

Základné tvrdenie

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

Príklad

Majme maticu

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Operácia výmeny riadkov:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a tak máme

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 = \frac{1}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot 2$$

Vo všeobecnosti výmena riadkov matice vedie k determinantu s hodnotou

$$(-1)^{celkový\ počet\ výmien\ susedných\ riadkov}$$

Tu máme jednu výmenu susedných riadkov, takže násobíme (-1).

Podobne operácia zámeny riadka lineárnou kombináciou ostatných:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a teda

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \cdot (-2) = -2$$

Môže to vyzerať ako zložité - zjednodušujeme počítanie determinantu tak, že počítame hromadu ďalších determinantov. Už sme si ale ukázali, ako upraviť znamienko pri výmene riadkov, a ak odčítame násobky riadkov zhora nadol alebo zhora nadol, budú všetky takéto operácie dávať determinanty dolných (resp. horných) trojuholníkových matíc a budú mať hodnotu 1.

Príklad

Vypočítajte determinant

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 10 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Riešenie

Budem písať aj príslušné determinanty, zodpovedajúce riadkovým operáciám.

1. Štvrtý riadok má na začiatku 1, tak ho presunieme nahor. Sú to tri výmeny susedných riadkov, takže

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 10 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

pretože príslušný determinant matice, posúvajúcej štvrtý riadok nahor, je

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

2. Odčítame trojnásobok prvého riadku matice od 2. riadku:

$$D=-\begin{vmatrix}1&0&1&5\\0&1&1&-5\\2&-1&6&3\\0&5&3&-2\end{vmatrix}$$

Nemáme žiadny korekčný faktor, pretože determinant matice príslušnej operácie je

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\-3&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$$

3. Odpočítame dvojnásobok prvého riadku od tretieho riadku:

$$D=-\begin{vmatrix}1&0&1&5\\0&1&1&-5\\0&-1&4&-7\\0&5&3&-2\end{vmatrix}$$

Opäť nemáme žiadny korekčný faktor, pretože determinant matice príslušnej operácie je

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$$

4. Pripočítame k tretiemu riadku druhý:

$$D=-\begin{vmatrix}1&0&1&5\\0&1&1&-5\\0&0&5&-12\\0&5&3&-2\end{vmatrix}$$

a determinant zodpovedajúci príslušnej operácie je

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$$

5. Odpočítame 5-násobok 2. riadku od 4. riadku:

$$D=-\begin{vmatrix}1&0&1&5\\0&1&1&-5\\0&0&5&-12\\0&0&-2&23\end{vmatrix}$$

a determinant od tejto operácie je zase

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-5&0&1\end{vmatrix}=1$$

6. Vydelíme 3. riadok piatimi:

$$D = -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -12/5 \\ 0 & 0 & -2 & 23 \end{vmatrix}$$

pretože determinant od tejto operácie je

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1/5$$

7. Pripočítame dvojnásobok tretieho riadku ku štvrtému:

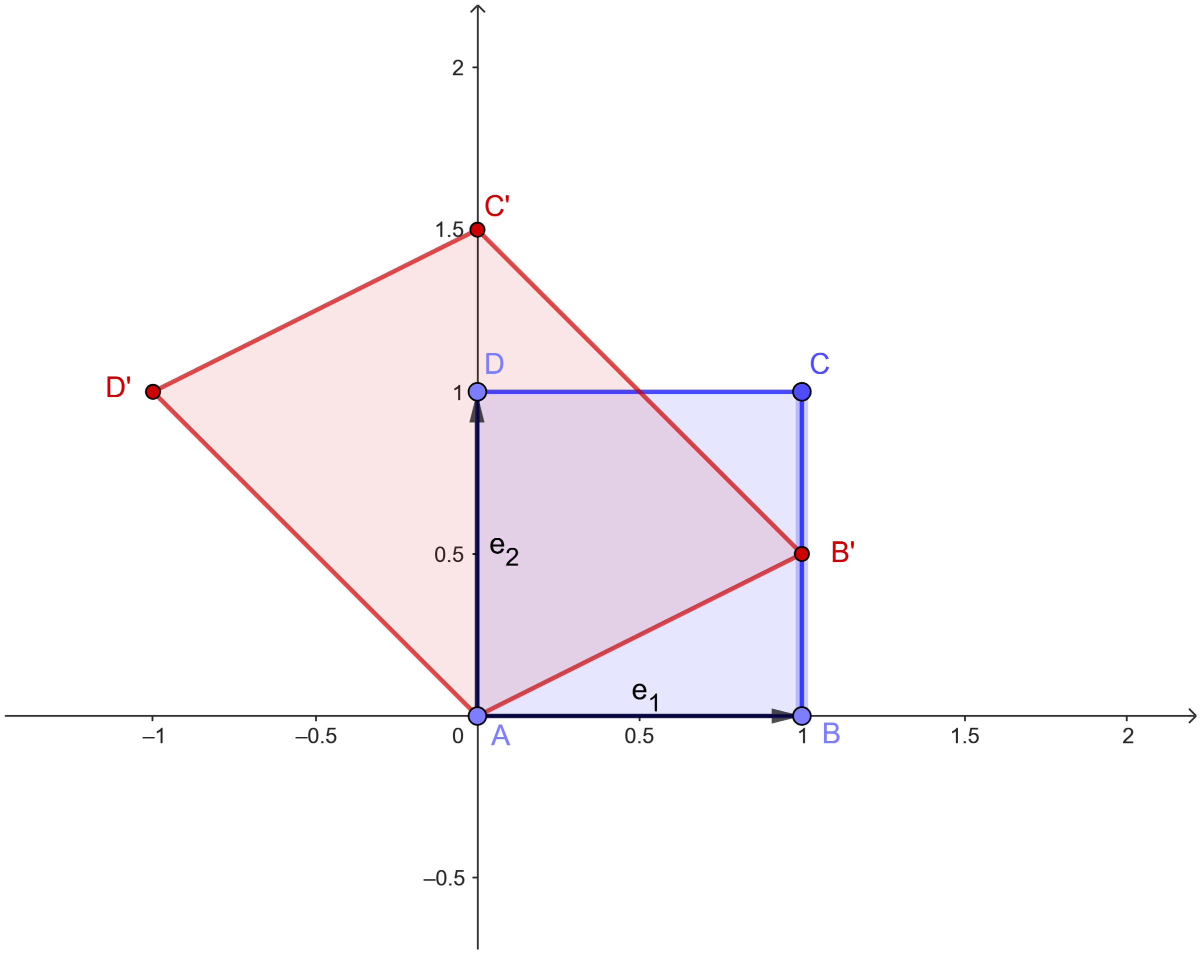
$$D = -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -12/5 \\ 0 & 0 & 0 & 91/5 \end{vmatrix} = -5 \cdot \frac{91}{5} = -91$$

3. Čo robí násobenie maticou?

Môžeme vziať nejakú plochu v rovine, vziať niekoľko vektorov, ktoré v nej končia, transformovať ich pomocou matice a pozrieť sa, v akej oblasti sa nachádzajú. Napríklad si môžeme vziať maticu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

a pozrieť sa, čo sa stane s jednotkovým štvorcom:



Zväčšenie plochy je dané *determinantom* matice, teda červený rovnobežník má plochu 1.5-krát väčšiu ako modrý, ako ľahko vidieť z obrázku. Táto vlastnosť je veľmi všeobecná, nezávisí od polohy v priestore ani od tvaru východiskovej oblasti.

Dokážeme pre náš prípad:

Strany štvorca sa transformujú na strany rovnobežníka takto:

$$\vec{a}' \equiv \vec{AB}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$
$$\vec{b}' \equiv \vec{AD}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Plochu červeného rovnobežníka ľahko vypočítame ako vektorový súčin, teda

$$\vec{a}' \times \vec{b}' \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \det \mathbf{A}$$

Determinant je zvláštna funkcia:

- je to lineárna funkcia N vektorových argumentov
- je antisymetrická vo všetkých dvojiciach argumentov - teda vzájomná výmena dvoch argumentov zmení znamienko determinantu.

Dá sa ukázať, že taká funkcie je (až na konštantný faktor) jediná.

Stopa

Stopa matice (alebo iného operátora) $\mathbf{A}$ je lineárny člen rozvoja determinantu $|1 + \epsilon\mathbf{A}|$ podľa ϵ.

Príklad:

$$|1+\epsilon\mathbf{A}| \equiv \begin{vmatrix} 1+\epsilon & -\epsilon \\ 1/2\cdot\epsilon & 1+\epsilon \end{vmatrix} = 1+2\epsilon+O(\epsilon^2)$$

takže stopa matice A je 2, a ľahko vidno, že to je súčet diagonálnych prvkov. Napriek tomu, že vyzerá triviálne, stopa je veľmi dôležitá veličina.

Lineárna regresia

V prípade lineárnej regresie máme preurčenú sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \\ & \dots & \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{F}\beta = \mathbf{Y}$$

Používame štandardné označenie $\mathbf{F}$ pre maticu faktorov, ktorej členy závisia od hodnôt x_i, a maticu parametrov β. Rovnica dáva zmysel, iba ak nadbytočné dáta sú zbytočné a hovoria to isté. Ak hovoria niečo iné, úloha nemá riešenie. Môžeme sa ale pozrieť na úlohu tak, že chceme nájsť takú krivku, definovanú parametrami a_i, pre ktorú je súčet štvorcov odchýlok hodnôt y najmenší, teda

$$\hat{\beta} = \text{argmin}\left[(\mathbf{Y}-\mathbf{F}\beta)^T(\mathbf{Y}-\mathbf{F}\beta)\right]$$

Riešenie si vyžaduje trošku zložitejšie derivovanie, ale vyzerá takto:

$$(\mathbf{F^T F})\beta = \mathbf{F^T Y} \quad \therefore \quad \beta = (\mathbf{F^T F})^{-1}\mathbf{F^T Y}$$

V skutočnosti ale neformulejeme problém ako minimalizáciu skalárneho súčinu, ale ako minimalizáciu stopy:

$$\hat{\beta} = \text{argmin Tr}\left[(\mathbf{Y}-\mathbf{F}\beta)(\mathbf{Y}-\mathbf{F}\beta)^T\right]$$

Stopa matice Tr je súčet jej diagonálnych prvkov. Toto je všeobecnejší výraz, ktorý funguje v širšej škále prípadov, a jeho minimalizácia podľa β je určitým spôsobom ľahšia.

Domáca úloha (nová)

1. Dokážte, že v ľubovoľnom trojuholníku platí $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$.
2. Máme v rovine bod S, kružnicu k a priamku p. Zostrojte štvorec ABCD tak, že S je priesečník jeho uhlopriečok, A leží na k a B leží na p.

---

5. Program na budúci týždeň

- Ešte lineárna algebra: eigen...

$\bar{a}$