

Hodina 29. septembra 2023

Program:

1. Domáca úloha (z minula)
2. Niekoľko príkladov na zahriatie a pozdvihnutie mysli.
3. Geometria: Izometrie roviny - rýchle opakovanie
4. Domáca úloha (nová)
5. Program na budúci týždeň

0. Úvod

Tento text a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári <https://github.com/PKvasnick/Erik>. Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

Videohovor Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť*.

1. Domáca úloha

Príklad 1

Trojuholník má strany 4 m, 11 m a 8 m. Vypočítajte jeho vnútorné uhly.

Riešenie

Označme $a = 4\text{ m}$, $b = 11\text{ m}$, $c = 8\text{ m}$.

Použijeme kosínovú vetu

$$\begin{aligned}\cos \gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ \cos \gamma &= \frac{16 + 121 - 64}{2 \cdot 4 \cdot 11} = \frac{73}{88} = 33,95^\circ \\ \cos \beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos \beta &= \frac{16 + 64 - 121}{2 \cdot 4 \cdot 8} = \frac{-41}{64} = 129,84^\circ \\ \cos \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos \alpha &= \frac{121 + 64 - 16}{2 \cdot 11 \cdot 8} = \frac{169}{176} = 16,21^\circ\end{aligned}$$

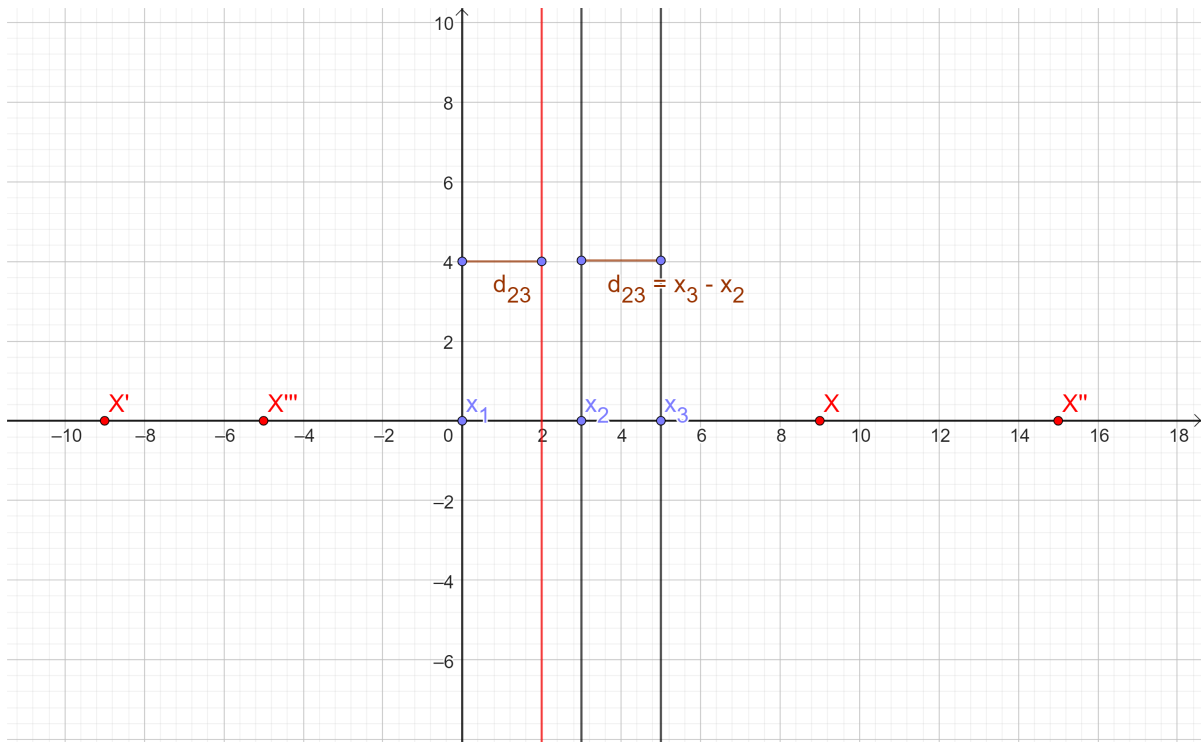
Všetko dokopy 180° , takže to sedí. Mohli sme po prvom použití kosínovej vety použiť sínusovú vetu, ale je to iba trocha jednoduchšie na počítanie.

Príklad 2

Majme tri rovnobežné priamky f , g , h . Dokážte, že existuje priamka j taká, že pre zrkadlenia okolo priamok f , g , h , j platí $\sigma_h \circ \sigma_g \circ \sigma_f = \sigma_j$ - teda že tri zrkadlenia môžeme nahradiť jedným. Kde leží priamka j ?

Riešenie

A. Naivné kreslenie a počítanie



Podme počítať posunutia. Majme bod X v polohe x na súradnicovej osi, a tri priamky f, g, h kolmé na os x v polohách x_1, x_2, x_3 . Počítajme postupne transformácie pri zrkadleniach okolo priamok f, g, h :

$$\begin{aligned}x' &= x_1 - (x - x_1) = 2x_1 - x \\x'' &= x_2 - (x' - x_2) = 2x_2 - x' = 2x_2 - 2x_1 + x \\x''' &= x_3 - (x'' - x_3) = 2x_3 - x'' = 2x_3 - 2x_2 + 2x_1 - x = 2(x_3 - x_2 + x_1) - x\end{aligned}$$

a teda výsledok je ekvivalentný zrkadleniu okolo priamky, kolmej na os x a v polohe $x_1 - x_2 + x_3$.

B. Algebra zobrazení

Ale to nie je dosť a hlavne by nám to vôbec nepomohlo pre ďalší príklad, kde priamky zrkadlení nie sú rovnobežné. Ešte jeden prístup, ktorý môžeme použiť, spočíva v tom, že si uvedomíme, že zrkadlenie je involúcia, teda je rovnaké ako jeho inverzné zobrazenie. To tiež znamená, že platí

$$\sigma_g \circ \sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_j = id$$

A teraz sa pozrime na kompozíciu prvých dvoch zrkadlení. Ide o zrkadlenie okolo dvoch rovnobežných priamok a teda sa jedná o posunutie. Aby sme zrušili efekt zobrazenia $\sigma_f \circ \sigma_g$, musíme zo zvyšných dvoch zobrazení skonštruovať rovnaké posunutie, ale v opačnom smere. Inak povedané,

- priamka j sa nachádza od priamky h v rovnakej vzdialenosti ako priamka g od priamky f
- priamka j leží na opačnej strane priamky h než priamka g od priamky f .

Takto sa nám posunutia zrušia.

C. Geometrická konštrukcia

[illegible]

Majme tri priamky f, g, h , pretínajúce sa v jedinom bode. Dokážte, že existuje priamka j taká, že pre zrkadlenia okolo priamok f, g, h, j platí $\sigma_h \circ \sigma_g \circ \sigma_f = \sigma_j$ - teda že tri zrkadlenia môžeme nahradiť jediným. Kde leží priamka j ?

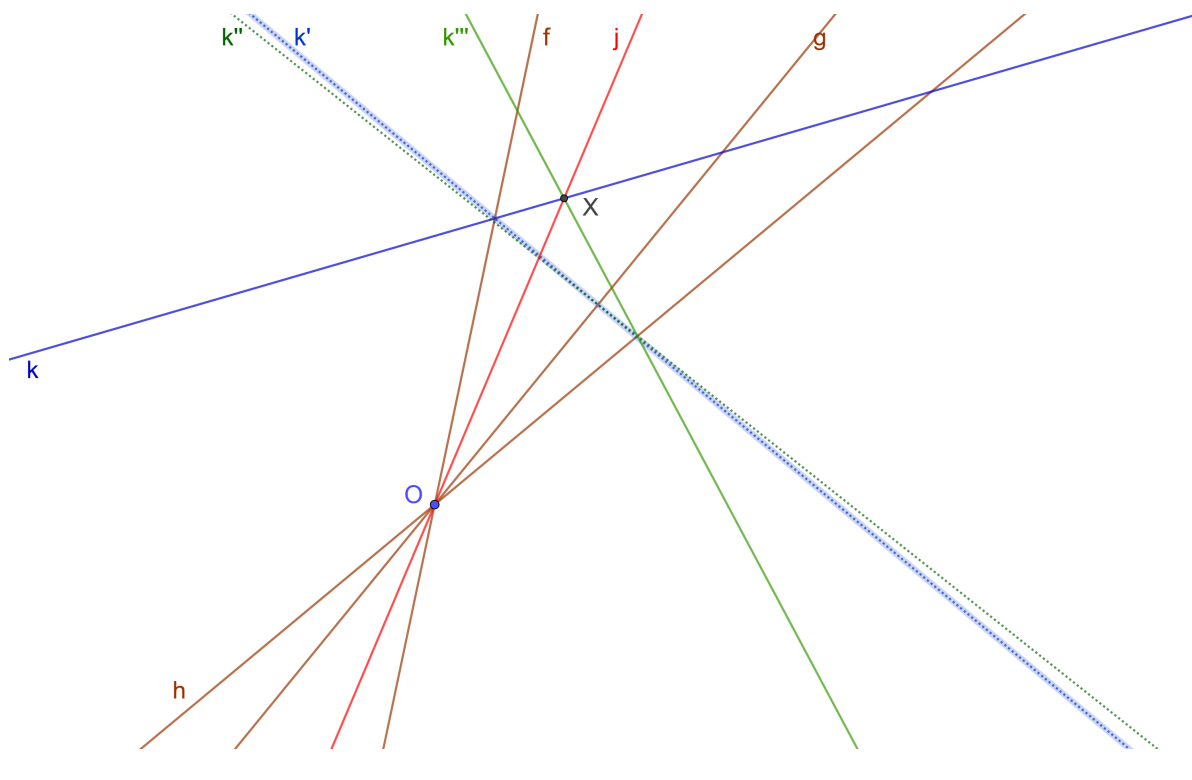
Tu naivné obrázky nepomôžu, a algebra funguje rovnako ako v predchádzajúcom prípade:

Zrkadlenie je involúcia, teda je rovnaké ako jeho inverzné zobrazenie. To tiež znamená, že platí

A teraz sa pozrime na kompozíciu prvých dvoch zrkadlení. Ide o zrkadlenie okolo dvoch rôznobežných priamok a teda sa jedná o rotáciu. Aby sme zrušili efekt zobrazenia $\sigma_f \circ \sigma_g$, musíme zo zvyšných dvoch zobrazení skonštruovať rovnakú rotáciu, ale v opačnom smere. Inak povedané,

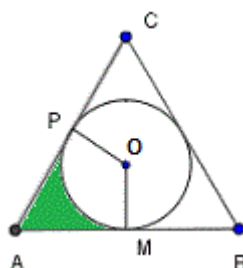
- Takto sa nám otočenia zrušia.

Pretože poznáme jeden bod priamky j , stačí zostrojiť ľubovoľný iný bod.



Príklad 4

Strana trojuholníka má dĺžku 1. Nájdite obsah zelenej plochy.



Riešenie

Uvažujem trojuholník AMO. Je pravouhlý, a súčet jeho prepony AO a odvesny MO je rovný výške trojuholníka ABC. Z Pytagorovej vety máme

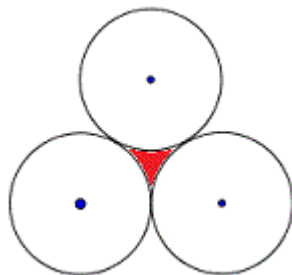
$$\begin{aligned}(v-r)^2 &= r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ v^2 - 2vr + r^2 &= r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ \frac{3a^2}{4} - \sqrt{3}ar &= \frac{a^2}{4} \\ r &= \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{v}{3}\end{aligned}$$

Teraz už stačí odčítať plochu kruhu od plochy trojuholníka a výsledok vydeliť tromi.

$$\begin{aligned}S &= \frac{S(\Delta) - S(\circ)}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \pi \frac{3}{36} \right) a^2 \\ &\approx 0.2014\end{aligned}$$

Príklad 5

Polomer kružníc je 1. Vypočítajte obsah červenej plochy.



Riešenie

Stredy troch kruhov okolo červenej plochy tvoria rovnostranný trojuholník so stranou $a = 2r$. Tri časti kruhov majú stredový uhol 60° , teda spolu 180° . Plocha červenej oblasti teda je

$$S = S(\Delta) - S(\text{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2 - \frac{\pi}{6}(2r)^2 = \frac{4\sqrt{3} - \pi}{4}r^2 \approx 1.893$$

2. Príklady na zahriatie

Príklad 1: $\cos(1^\circ)$ je iracionálne číslo

alebo matematická indukcia naopak: pomocou matematickej indukcie ukazujeme, že platnosť base case vedie k logickým rozporom.

PROOF THAT $\cos(1^\circ)$ IS IRRATIONAL

SINCE

$$\cos(N^\circ + 1^\circ) + \cos(N^\circ - 1^\circ) = 2\cos(1^\circ)\cos(N^\circ)$$

WE GET THAT

$$\cos(2^\circ) = 2\cos^2(1^\circ) - 1$$

IF WE ASSUME $\cos(1^\circ)$ IS RATIONAL, IT MEANS
 $\cos(2^\circ)$ WILL ALSO BE RATIONAL AND BY INDUCTION
ALL $\cos(N^\circ)$ $N \geq 1$ ARE GOING TO BE RATIONAL
AS WELL. NOW SINCE, FOR INSTANCE,

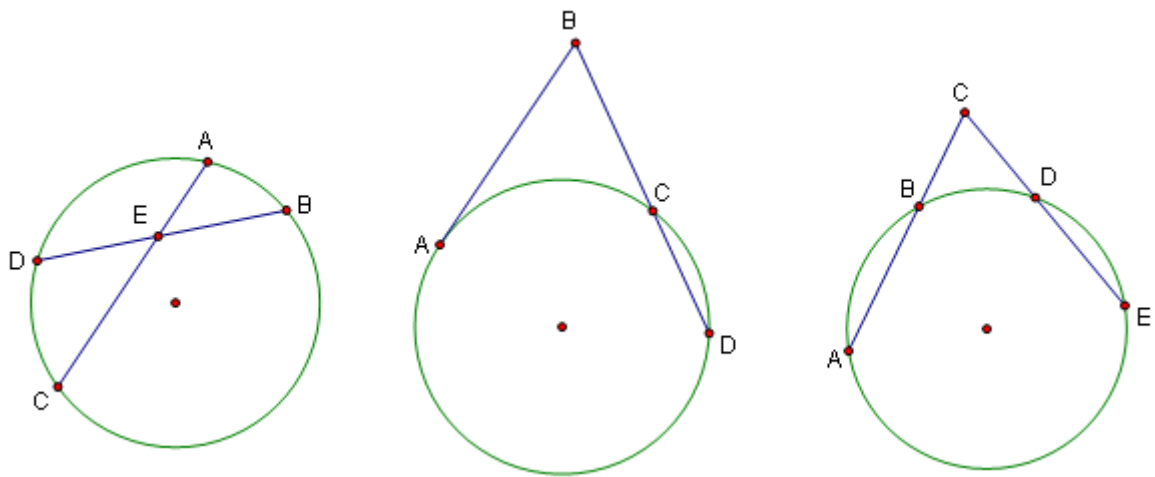
$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ WHICH IS CLEARLY IRRATIONAL}$$

WE HAVE REACHED A CONTRADICTION!

@FERMATSLIBRARY

"Sila" bodu - Power of a point

Podme zovšeobecniť tvrdenie, ktorého špeciálny prípad sme už mali:



- Pre pretínajúce sa tetivy platí $AE \cdot CE = DE \cdot BE$
- Pre dotyčnicu a tetivu platí $AB^2 = BC \cdot BD$
- Pre tetivy pretínajúce sa mimo kruhu platí $CB \cdot CA = CD \cdot CE$.

Prvé tvrdenie sme dokazovali pomocou podobnosti trojuholníkov AED a BEC.

Tretie tvrdenie: trojuholníky CDA a CBE sú si podobné, pretože zdieľajú uhol BCD a uhly CBE a ADE sú rovnaké (rovnaké sú uhly ABE a ADE, pretože sú to obvodové uhly zodpovedajúce tetive AB).

Druhé tvrdenie je limitným prípadom tretieho pre $B \rightarrow A$.

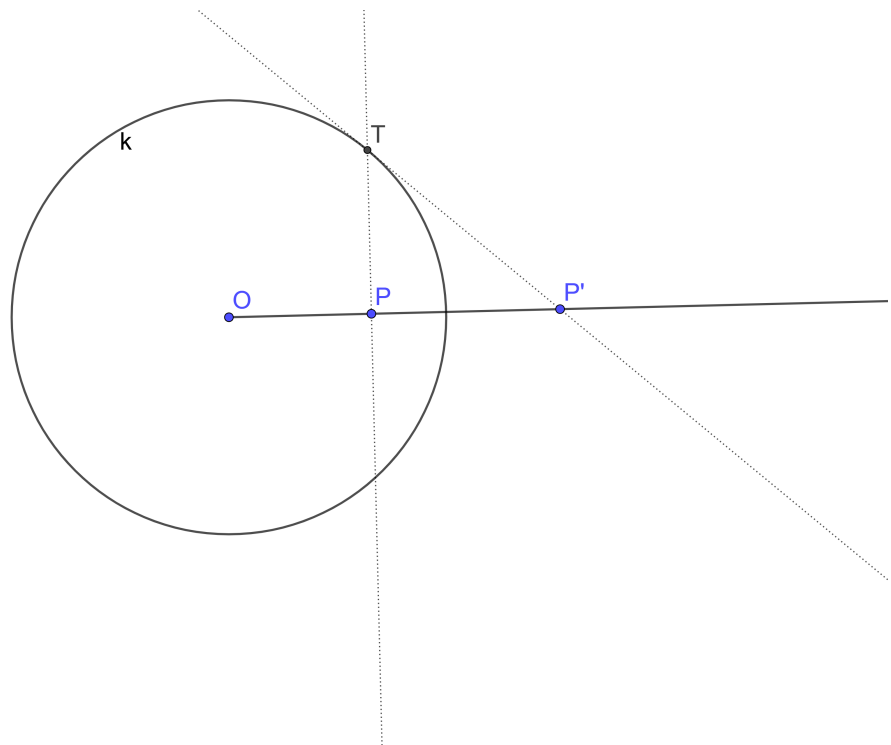
Kruhovú inverziu

Doteraz sme sa zaoberali izometriami - teda zobrazeniami, ktoré zachovávajú vzdialenosti bodov. Dnes sa krátko pozrieme na zobrazenie, ktoré nie je izometriou: kruhovú inverziu.

Majme kruh so stredom O, ohraničený kružnicou k o polomere r . Kruhovú inverziu zobrazí body vnútri kružnice k na doplnok kruhu v rovine a body mimo kruhu dovnútra kruhu.

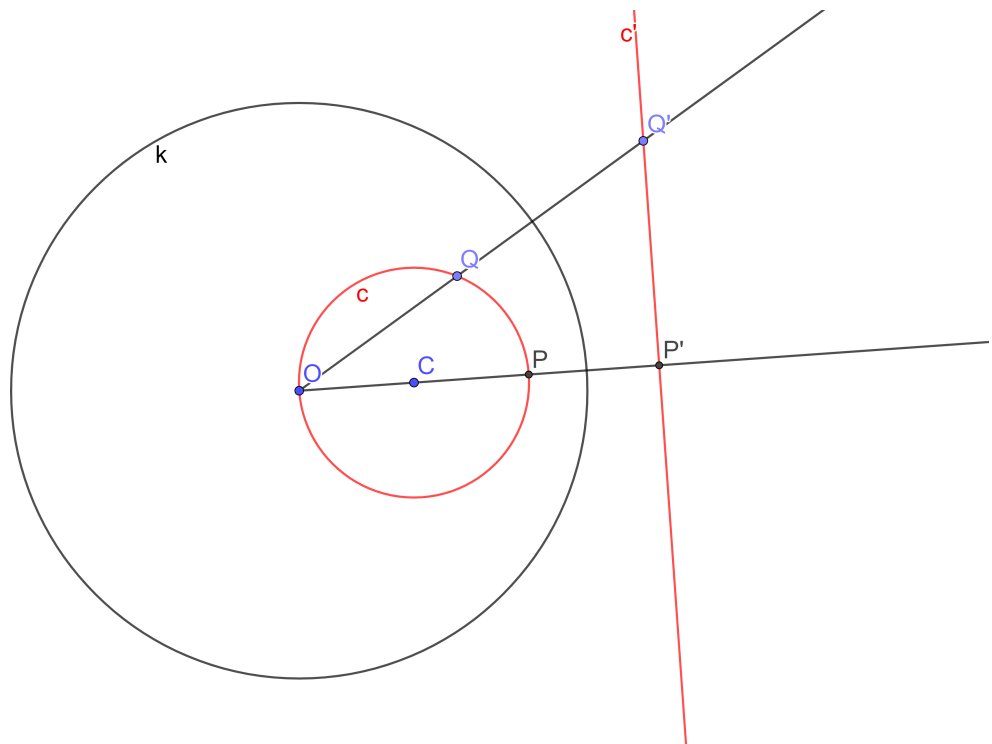
Konkrétne, bod P sa zobrazí do bodu P' na priamke OP tak, že $OP \cdot OP' = r^2$

- Body vnútri kruhu sa zobrazia do bodov mimo kruhu
- Body mimo kruhu sa zobrazia dovnútra kruhu
- Body na kružnici sa zobrazujú samy na seba .



Ako z obrázka vyplýva, že $OP \cdot OP'$?

Inverzia kružnice, prechádzajúcej stredom



Stred invertujúcej kružnice sa zobrazuje do nekonečne vzdialeného bodu. Preto kružnica prechádzajúca stredom sa zobrazuje na kružnicu s nekonečným polomerom - priamku.

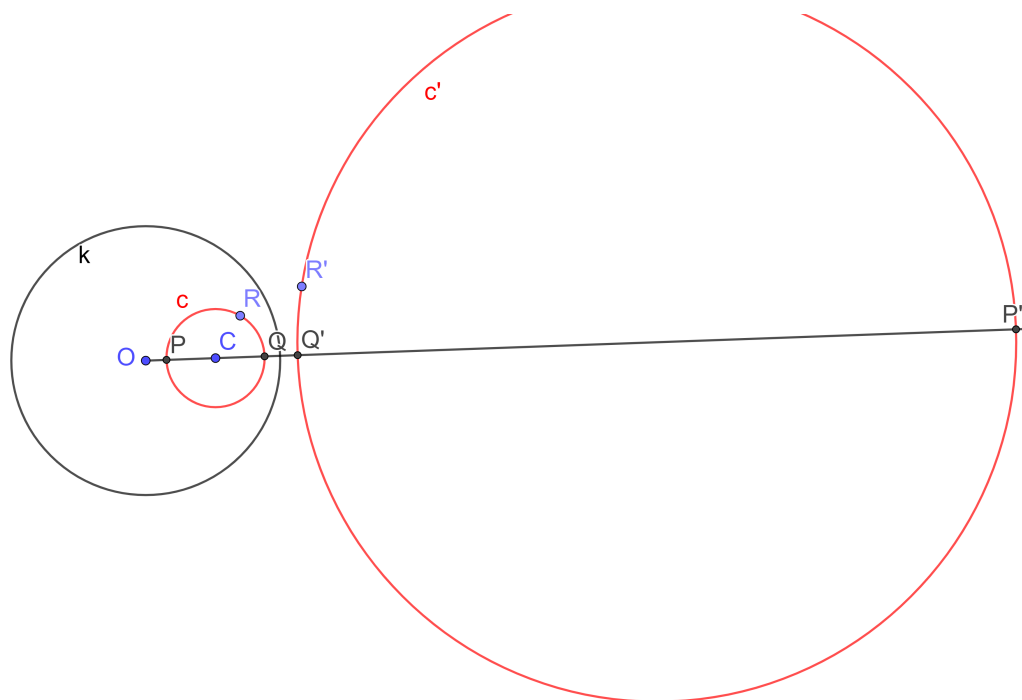
Pretože

$$OP \cdot OP' = r^2$$

$$OQ \cdot OQ' = r^2$$

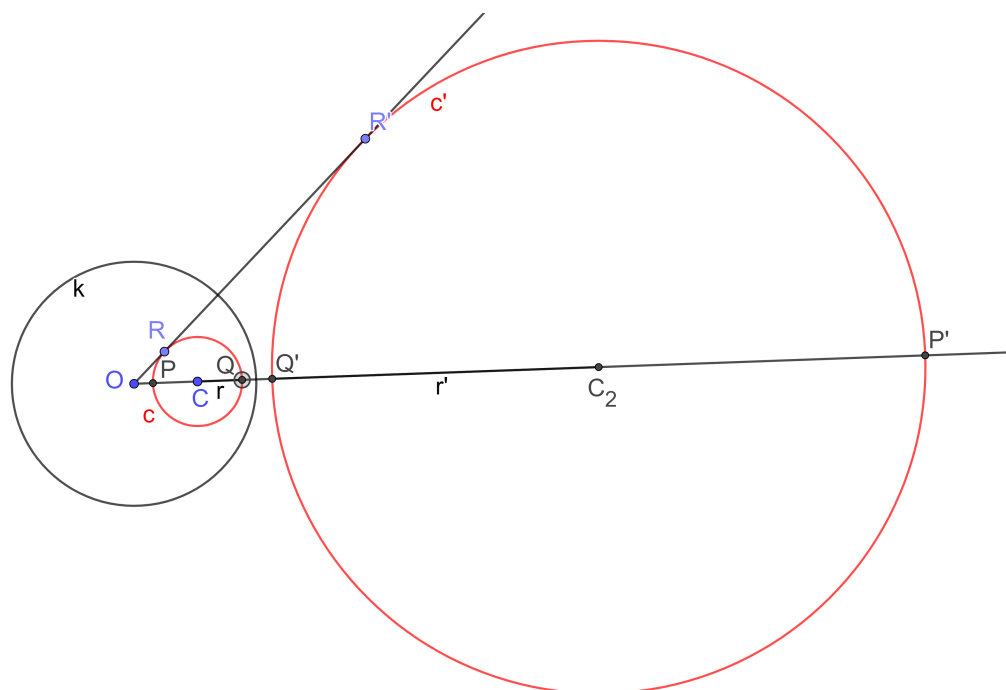
$$\frac{OQ}{OP} = \frac{OQ'}{OP'}$$

Inverzia ľubovoľnej kružnice



Výraz pre polomery kružnice a jej obrazu

mer obrazu kružnice c:)



$$\frac{r}{r'} = \frac{OP' - OQ'}{OQ - OP}$$

$$= \frac{\frac{R^2}{OP} - \frac{R^2}{OQ}}{OQ - OP} = \frac{R^2}{OQ \cdot OP}$$

Pretože podľa vety o sile bodu $OQ \cdot OP = OR^2 = OC_2^2 - r'^2$, máme konečne

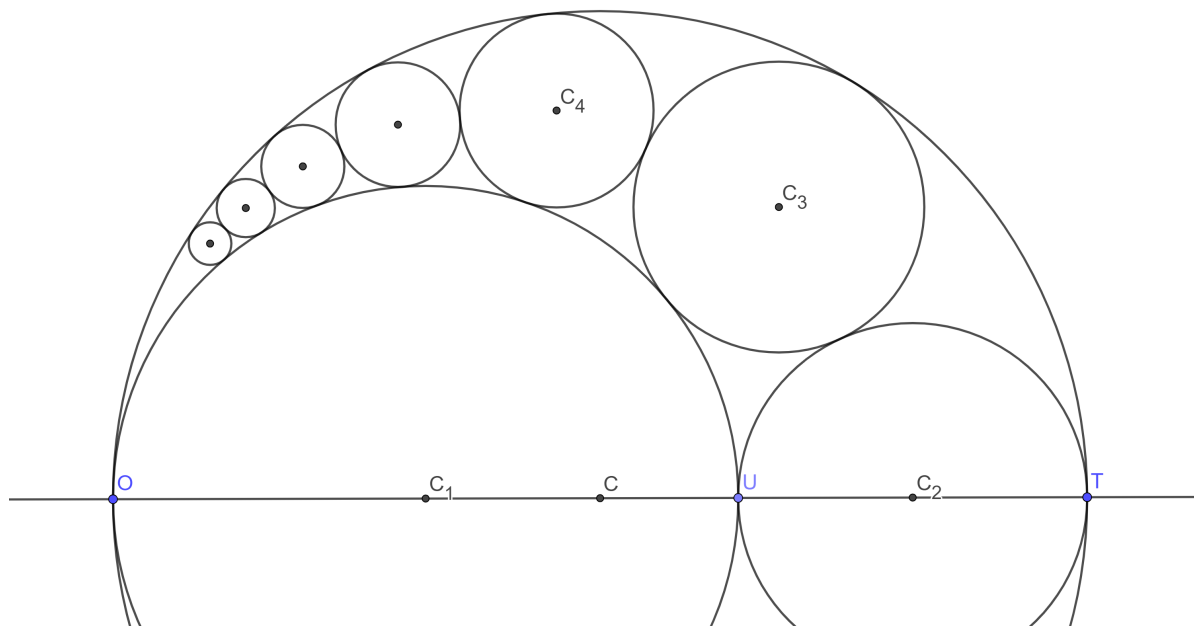
$$r = \frac{R^2 r'}{OC_2^2 - r'^2}$$

Upozorňujem, že vlastnosť "byť stredom kružnice" sa pri kruhovej inverzii nezachováva. Teda obraz bodu C nie je stredom obrazu kružnice c, preto aj má iné označenie.

Načo to je dobré

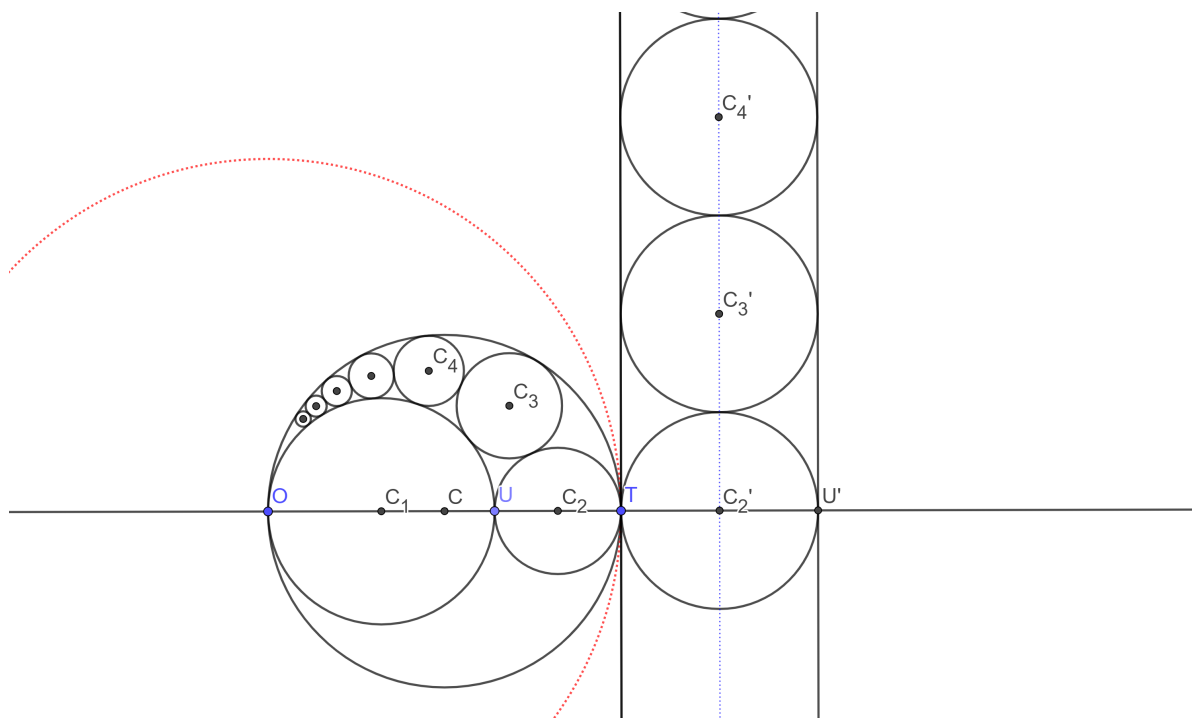
Niekedy je výhodné transformovať kružnice na priamky a kružnice na iné kružnice. Typický príklad je toto:

Aké sú polomery kružníc v postupnosti C_2, C_3, \dots , ak polomer kružnice C je 1 a kružnice C_2 r?



Riešenie

sa opiera o kruhovú inverziu okolo červenej kružnice. Je také estetické, že sa človeku ani nechce počítať.



3. Geometria

Dnes sme najviac urobili na domácu úlohu.

5 izometrií roviny

Každú izometriu roviny (teda zobrazenie, zachovávajúce vzdialenosti) vieme vyjadriť ako jedno z piach základných zobrazení: zrkadlenie, posunutie, rotácia, stredová súmernosť, posunuté zrkadlenie.

- Zrkadlenie
- Posunutie
- Rotácia
- Stredová symetria
- Posunuté zrkadlenie

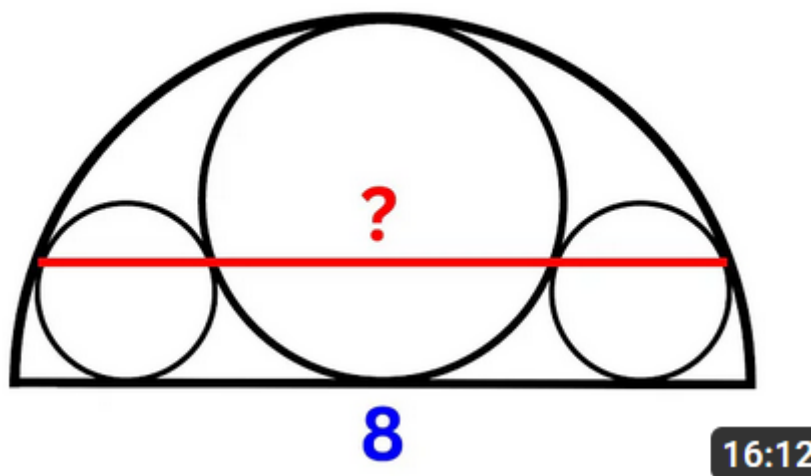
Ďalšie tvrdenia

Toto budeme dokazovať nabadúce:

- Každú izometriu môžeme vyjadriť ako kompozíciu najviac troch zrkadlení.
- Každú izometriu môžeme vyjadriť ako kompozíciu posunutia a izometrie s najmenej jedným pevným bodom.
- Kompozícia rotácie a posunutia je rotácia (má pevný bod!)

4. Domáca úloha (nová)

1. Nájdite dĺžku vyznačenej úsečky.



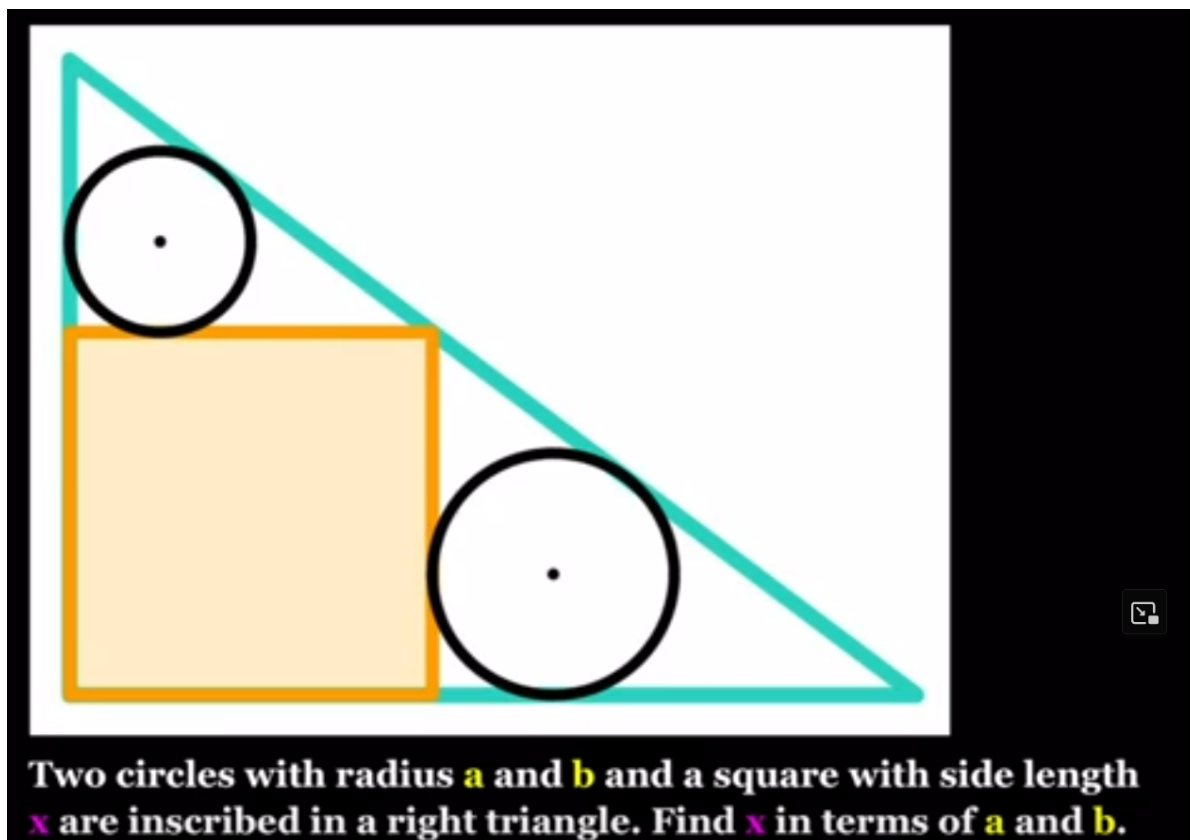
Návod: toto nemusí byť nevyhnutne príklad na kruhovú inverziu, ale môže to byť aj príklad na podobné trojuholníky alebo oboje spolu.

2. Nájdite a , pre ktoré má funkcia

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + x}$$

rovnaký definičný obor ako rozsah hodnôt.

3. Vyriešte



5. Program na budúci týždeň

- Dôkaz Ptolemaiovej vety pomocou kruhovej inverzie
- izometrie v rovine: zložitejšie tvrdenia a príklady