Hodina 27. októbra 2023

Program:

1. Domáca úloha (z minula)
2. Niekoľko príkladov na zahriatie a pozdvihnutie mysli: Projektívna geometria a Apolóniove úlohy
3. Geometria: už nebude
4. Domáca úloha (nová)
5. Program na budúci týždeň

0. Úvod

Tento text a texty k nasledujúcim cvičeniam budú vyložené - ako pdf - v Github repozitári https://github.com/PKvasnick/Erik. Odporúčam Github Desktop (na Windows) pre uloženie a synchronizáciu repozitára.

Videohovor Používame SpeakApp, link postnem vždy pred hodinou, *je možné, že sa bude týždeň od týždňa líšiť*.

1. Domáca úloha

Domáce úlohy v texte

Príklad 1

... Dokážte, že rovnaké tvrdenie platí aj o opačnej kompozícii posunutia a rotácie.

To tvrdenie je, že príslušné zobrazenie je rotácia.

Riešenie

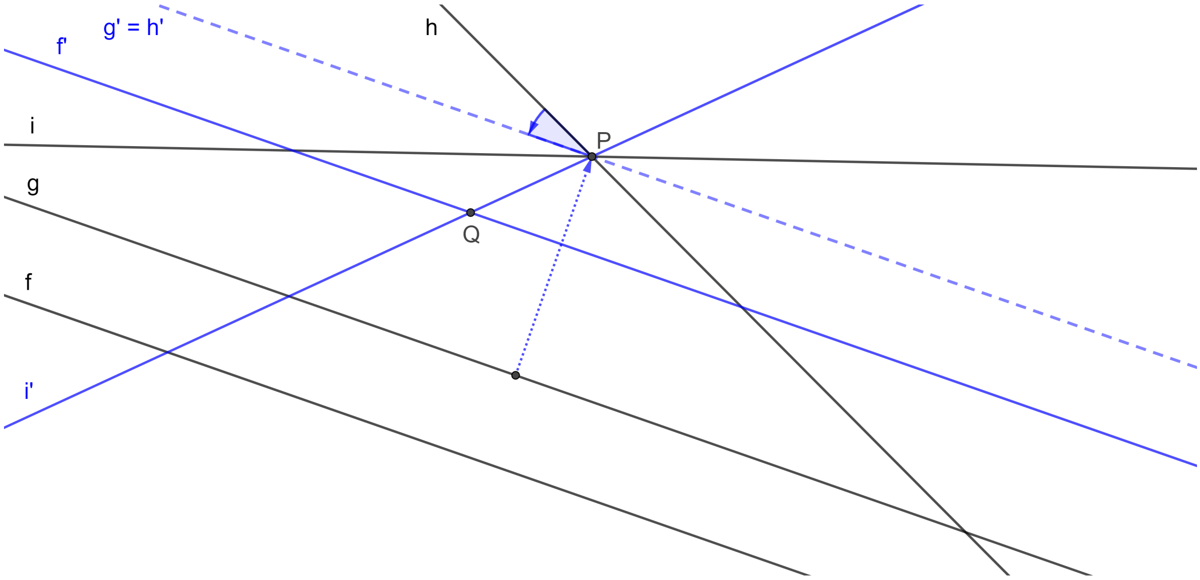
Máme zrkadlenia okolo štyroch priamok f, g, h, i. Priamky f, g sú rovnobežné a zobrazenie $\sigma_g \circ \sigma_f$ je posunutie. Priamky h, i sú rôznobežné a zobrazenie $\sigma_i \circ \sigma_h$ je rotácia.

- Posunieme priamky f, g tak, aby priesečník priamok h, i ležal na g.
- Otočíme priamky h, i okolo ich priesečníka P tak, aby sa priamka h stotožnila s g.

Potom

$$Z = \sigma_i \circ \underbrace{\sigma_h \circ \sigma_g}_{id} \circ \sigma_f = \sigma_i \circ \sigma_f$$

je rotácia okolo priesečníka (posunutej) priamky f a (otočenej priamky) i - bodu Q.

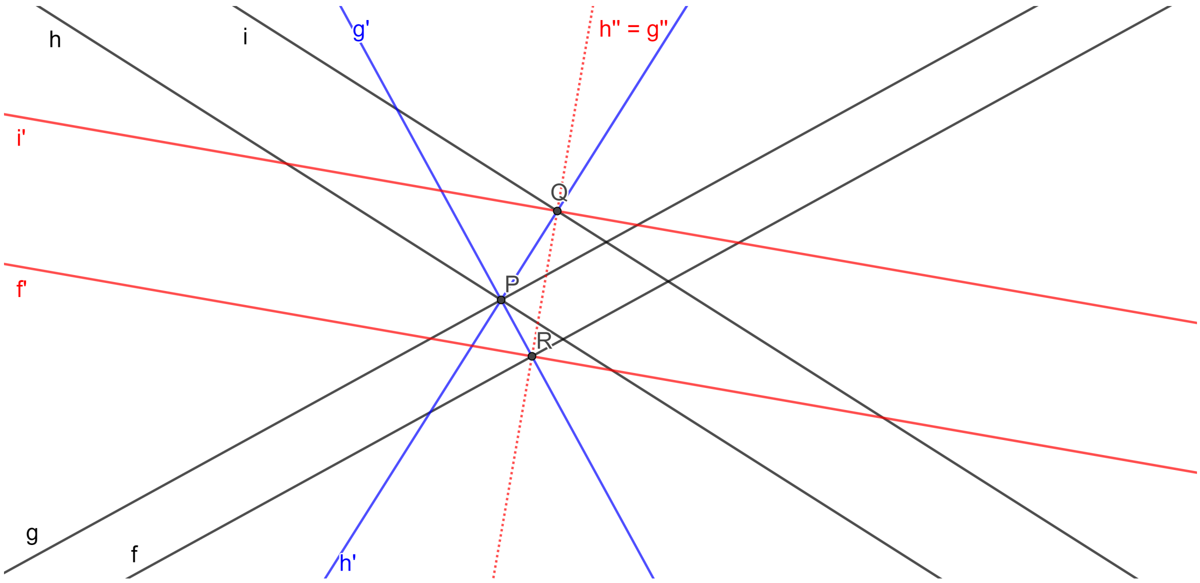


Je poučné všimnúť si, že bod Q je skutočne pevným bodom zobrazenia - v ňom rotácia okolo P kompenzuje posunutie.

Príklad 2

Ukážte, že kompozícia dvoch posunutí je tiež posunutie.

Riešenie



Máme dve posunutia, definované zrkadleniami okolo čiernych priamok f, g, h, i. Aby sme mohli zostavu dvoch párov rovnobežiek "rozhýbať", začneme prostrednou dvojicou g a h a otočíme ju okolo priesečníka P o 90°, tak aby h bolo kolmé na i a g na f (modré čiary).

Dve dvojice kolmíc f, g´ a h´, i otočíme okolo ich priesečníkov Q, resp. R tak, aby priamky g´´ a h ´´ splynuli - teda tak, aby každá prechádzala oboma bodmi Q a R. Zo štyroch zrkadlení tak ostanú iba dve, okolo červených rovnobežiek f´ a i´, ktoré teraz definujú výsledné posunutie.

Z obrázku je tiež vidno, že výsledné posunutie je vektorovým súčtom pôvodných posunutí.

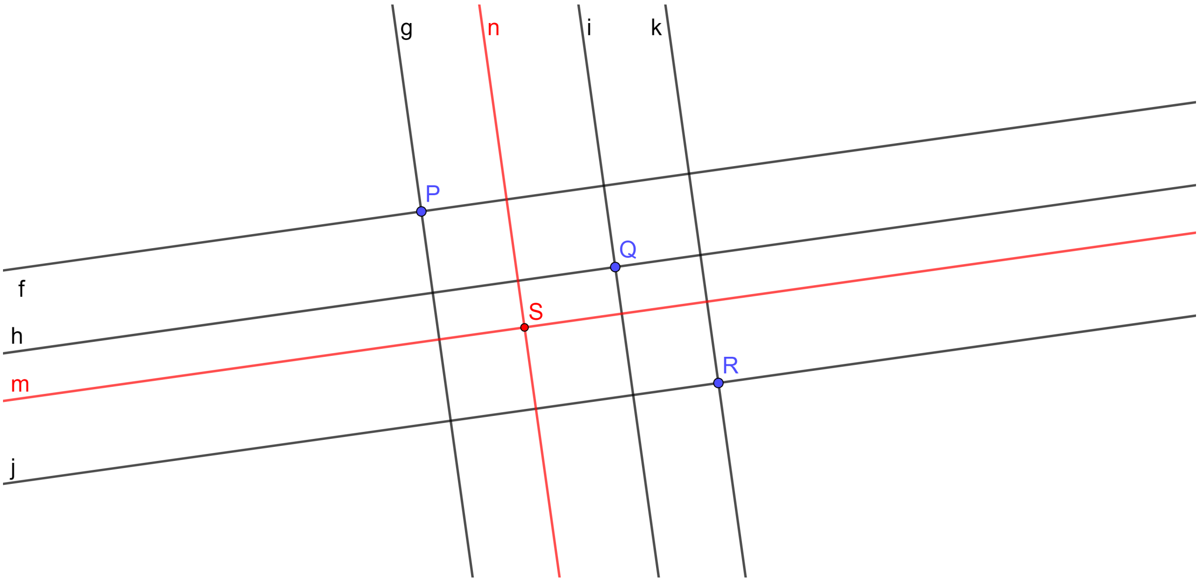
Príklad 3

Tri bodové zrkadlenia sú ekvivalentné jednému.

Riešenie

Tri bodové zrkadlenia budeme reprezentovať šiestimi zrkadleniami okolo po dvojiciach kolmých priamok f, g, h, i, j, k. Otočením okolo priesečníkov môžeme zariadiť, aby boli priamky f, h, j a priamky g, i, k rovnobežné.

Zrkadlenia okolo dvoch navzájom kolmých priamok komutujú, takže môžeme pokojne separovať tri "vodorovné" a tri "zvislé" zrkadlenia. Tri zrkadlenia okolo rovnobežných priamok sú ekvivalentné jednému, ktoré vieme ľahko zostrojiť, a tak nám zostanú dve zrkadlenia okolo navzájom kolmých priamok, čo je výsledné bodové zrkadlenie.



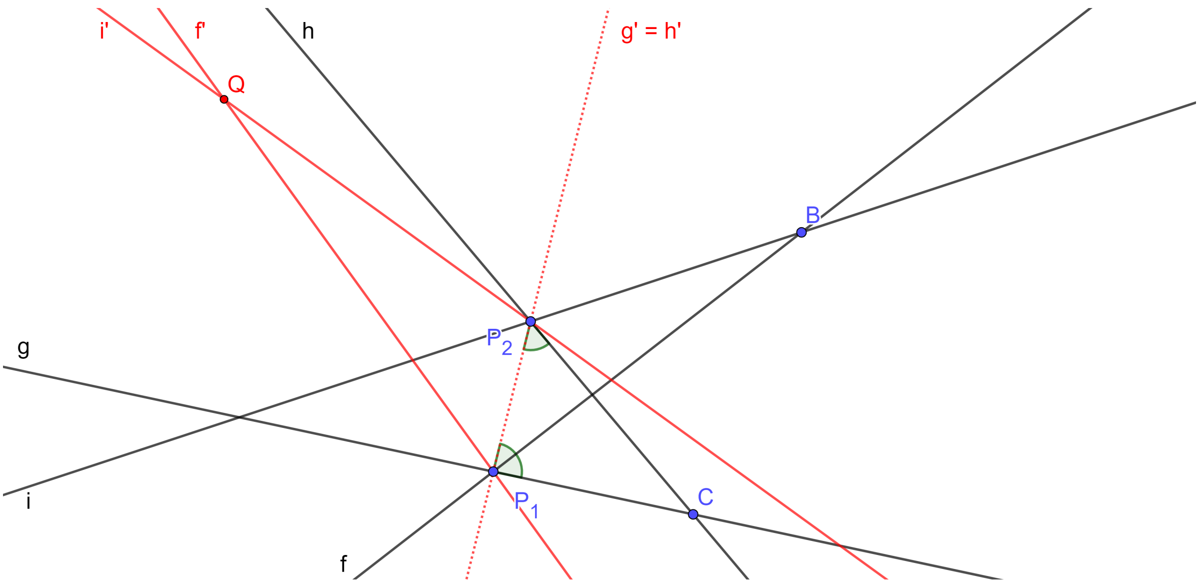
Regulérna domáca úloha

Príklad 1

Dve rotácie okolo bodov P_1, P_2 sú ekvivalentné jedinej rotácii. Zostrojte túto rotáciu.

Riešenie

Nech sú rotácie definované zrkadleniami okolo priamok f, g, resp. h, i. Otočíme dvojicu f, g okolo R_1 tak, aby g prechádzala bodom P_2. Otočíme h, i tak, aby h prechádzala bodom P_1. Zrkadlenia okolo g´ a h´ sa potom vyrušia a ostane výsledné otočenie okolo f´ a i´.

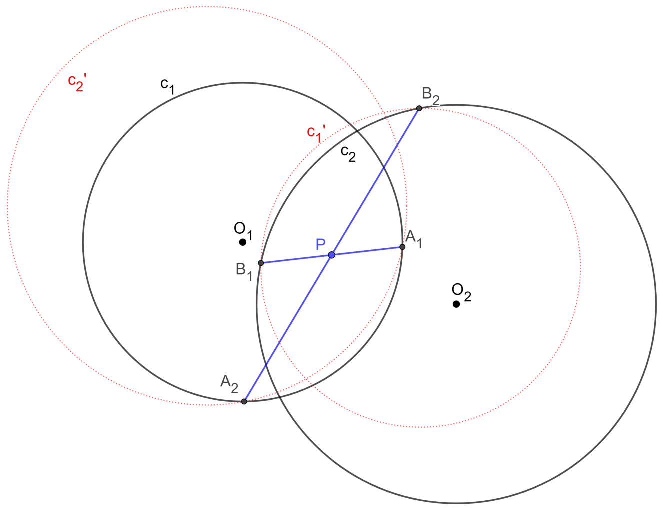


Príklad 2

Sú dané dve kružnice k_1, k_2 a bod P. Zostrojte dva body $A \in k_1,\ B \in k_2$ tak, aby bol bod P stredom úsečky AB.

Riešenie

Situácia je stredovo symetrická vzhľadom na bod P.



Podrobnejšie: Pre stredovú symetriu S_P so stredom P platí

$$A \in c_1 \implies S_P(A) \equiv B \in c_1' \equiv S_P(c_1) \implies B \in c_2 \wedge B \in c_1' = B \in (c_2 \cap c_1')$$

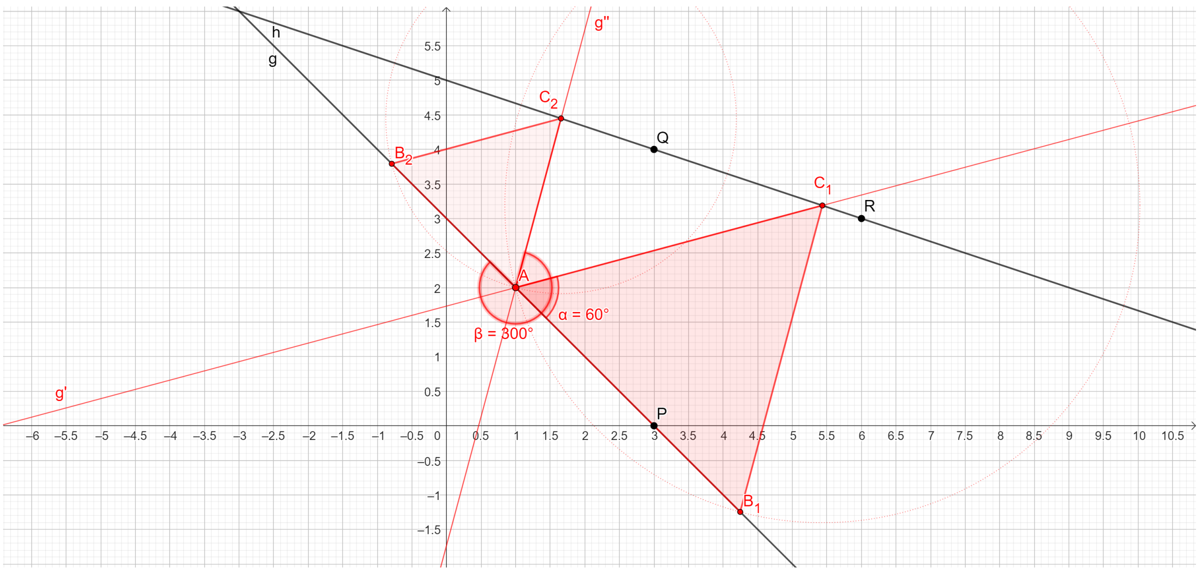
a tým je daná konštrukcia. Zaujímavé rozšírenie je zostrojiť pre dané kružnice množinu bodov P, pre ktoré má úloha riešenie.

Príklad 3

Priamka g prechádza bodmi $A[1,2]$ a $P[3,0]$ a priamka h cez $Q[2,4]$ a $R[6,3]$. Zostrojte rovnostranný trojuholník ABC tak, aby bod B ležal na g a bod C na h.

Riešenie

Potrebujeme zrotovať priamku g okolo bodu A o 60° a (360 - 60)°:

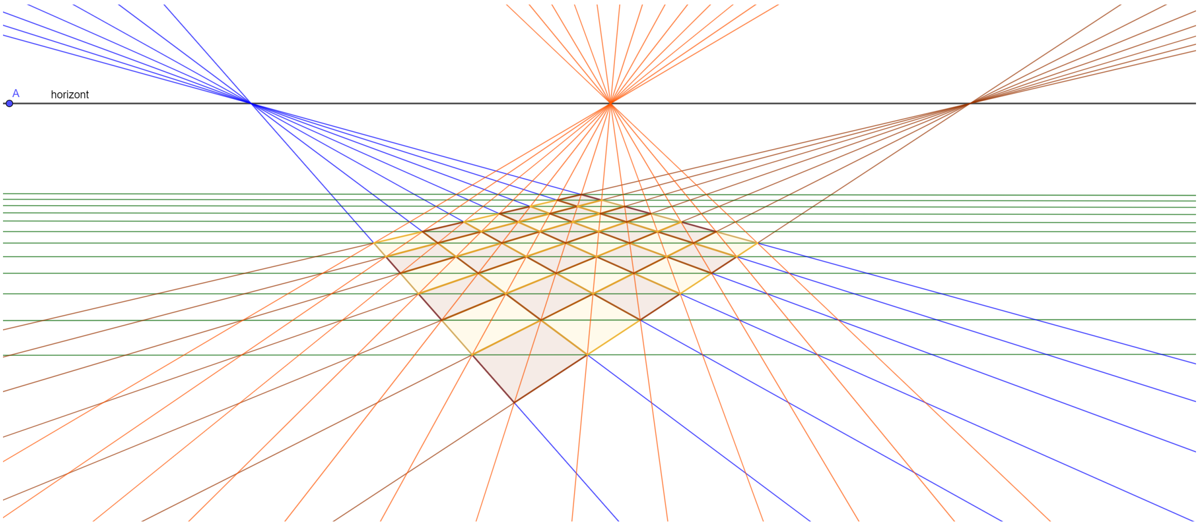


2. Príklady na zahriatie

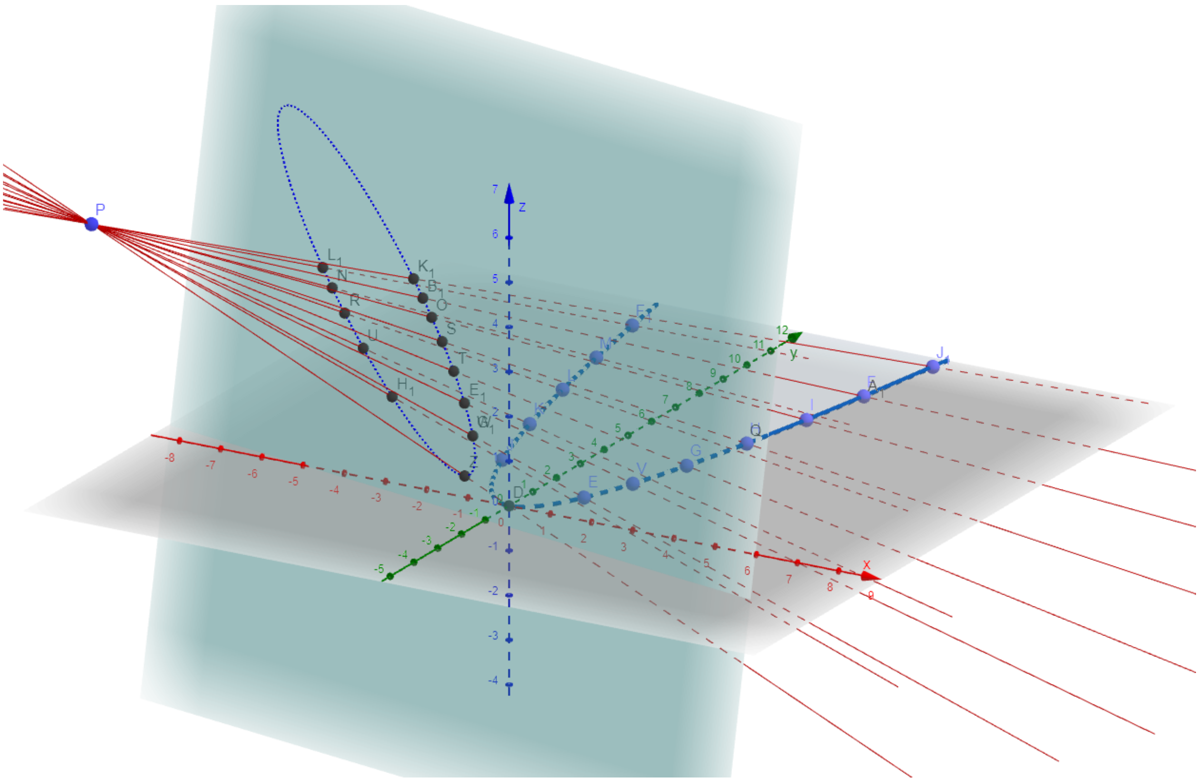
Perspektíva a projektívna geometria

Dlaždice v perspektíve

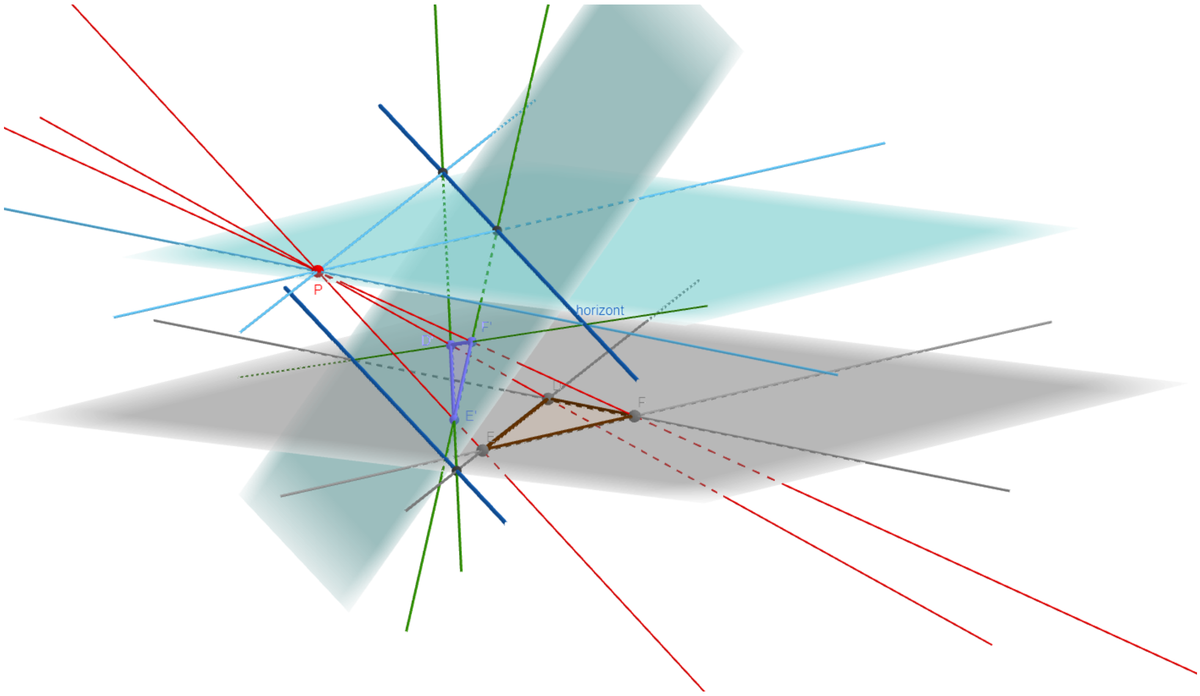
V zásade robíme to, že všetky zväzky rovnobežných priamok chytíme ako špagety a necháme ich stretnúť sa v jedinom bode na horizonte.



Projekcie možno robiť aj zo zábavnejších vecí ako sú dlaždice. Napríklad kužeľosečky sa premiietajú na kužeľosečky, ibaže občas iné.



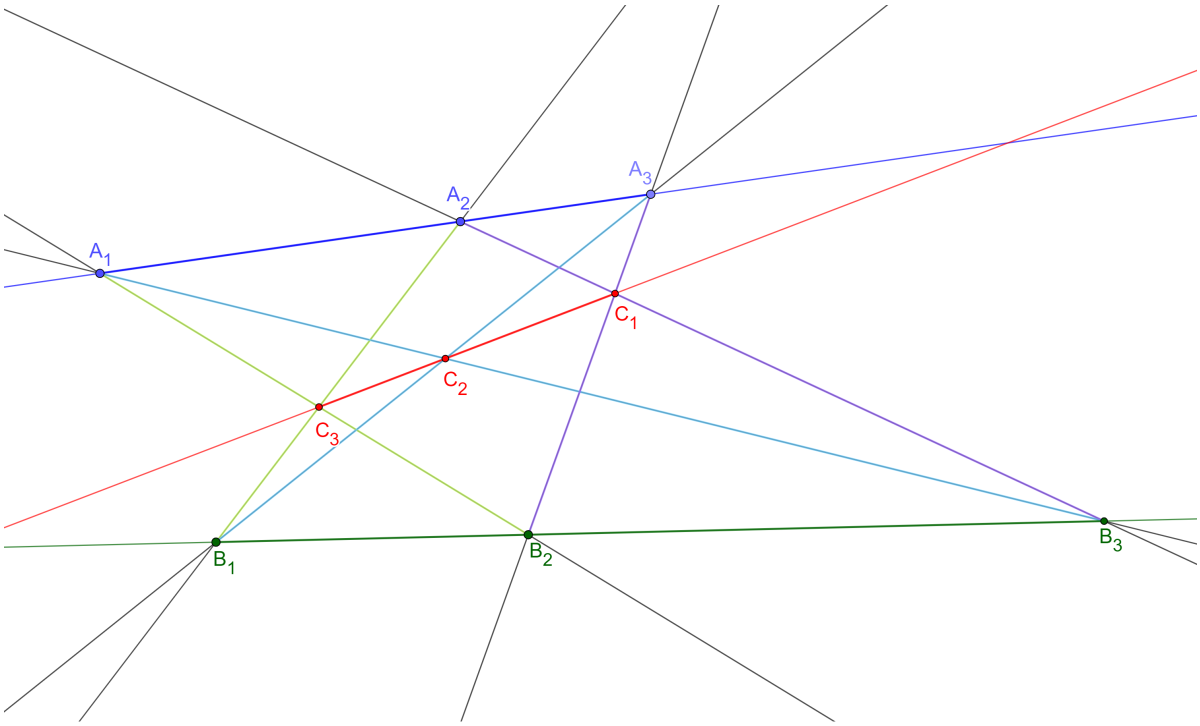
Setup pre projekciu vyzerá asi takto:



Máme spodnú šedú rovinu, kde sa rozprestiera reálny svet. Ten zobrazujeme na šikmú modrošedú rovinu tak, že sa dívame z bodu P a šikmá (obrazová) rovina je naše maliarske plátno. Hormá vodorovná rovina je projektívna rovina, sú tam veci, ktoré v reálnom svete ležia v nekonečne. Plocha nášho zobrazenia je prirodzene ohraničená horizontom - priesečníkom zobrazovacej a projektívnej roviny, a faktom, že sa dívame pred seba - veci, ktoré sú za nami a zobrazovali by sa nad horizont, ignorujeme.

Projektívna geometria je oveľa staršia ako perspektíva renesančných maliarov. Tuto je jedno z najdôležitejších tvrdení, ktoré pochádza od Pappusa z Alexandrie, 300 n.l.:

Pappusova veta (o šesťuholníku)



Majme na tri body A_1, A_2, A_3, ležiace na spoločnej priamke, a tri body B_1, B_2, B_3, ležiace na inej spoločnej priamke. Označme
$C_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1, \quad C_2 = A_1B_3 \cap A_3B_1, \quad C_1 = A_2B_3 \cap A_3B_2$. Potom body C_1, C_2, C_3 ležia tiež na spoločnej priamke.

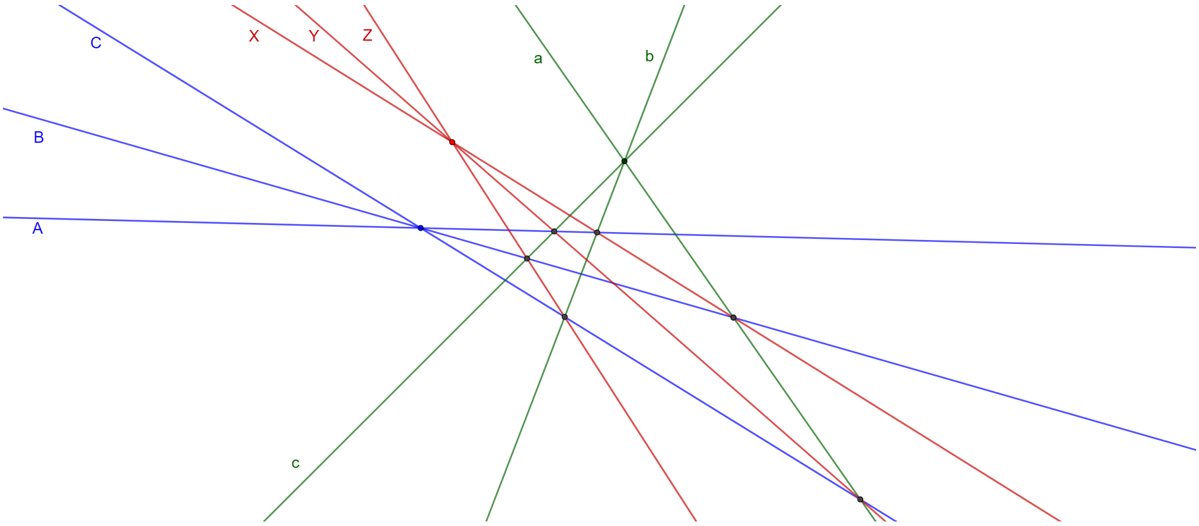
Táto veta má zvláštne čaro, pretože vyzerá úplne fundamentálne (iba body a priamky, žiadne kruhy, vzdialenosti či uhly).

Dualita

V projektívnej geometrii sú priamky a body rovnocenné. Tak, ako sú body priesečníkmi priamok, sú priamky "priiesečníkmi" bodov. Preto sa často používa aj úplne mätúce označenie vecí, ktoré nerozlišujem medzi priamkami a bodmi.

Napríklad duálna Pappusova veta je úplne rovnoprávne tvrdenie, ktoré sa dokonca dokazuje častejšie ako "priama" verzia:

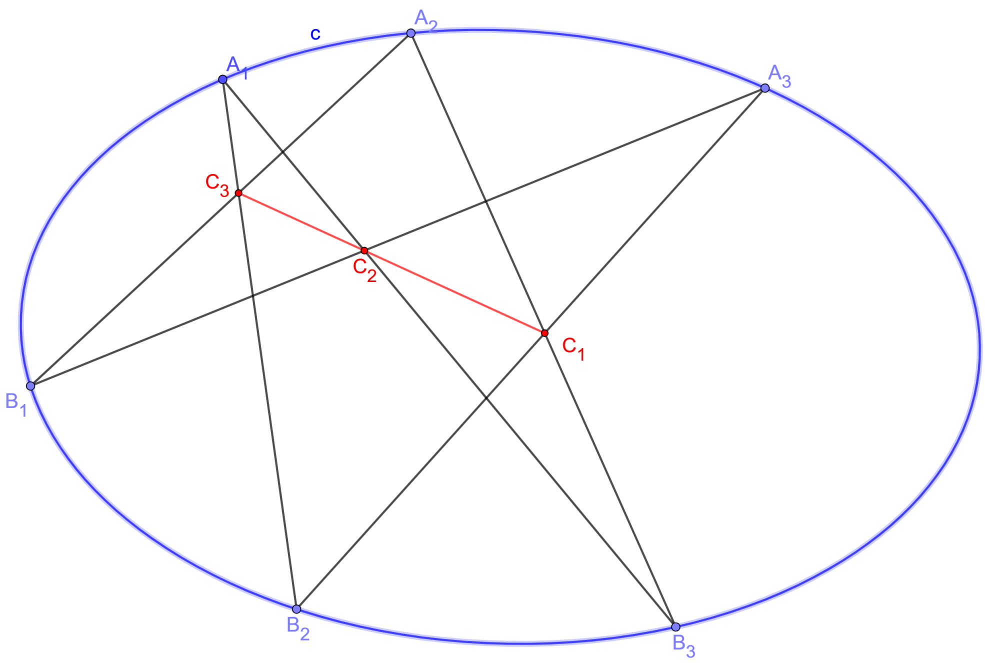
Duálna Pappusova vetta Nech majú priamky A, B, C spoločný bod, a nech aj priamky a, b, c majú spoločný bod. Potom priamky X, Y, Z predchádzajúce po rade priesečníkmi Ab a Ba, Ac a Ca, bC a Cb majú tiež spoločný bod.



Samotná projektívna geometria sa rozvíjala od rokov 1600 + (C. Desargues, B. Pascal) v tieni Descartovej geometrie.

Zovšeobecnenie Pappusovej vety (B. Pascal, 1608):

Nech c je ľubovoľná kužeľosečka, na ktorej leží 6 bodov $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$. Označme $C_3 = A_1B_2 \cap A_2B_1, \quad C_2 = A_1B_3 \cap A_3B_1, \quad C_1 = A_2B_3 \cap A_3B_2$. Potom body C_1, C_2, C_3 ležia tiež na spoločnej priamke.

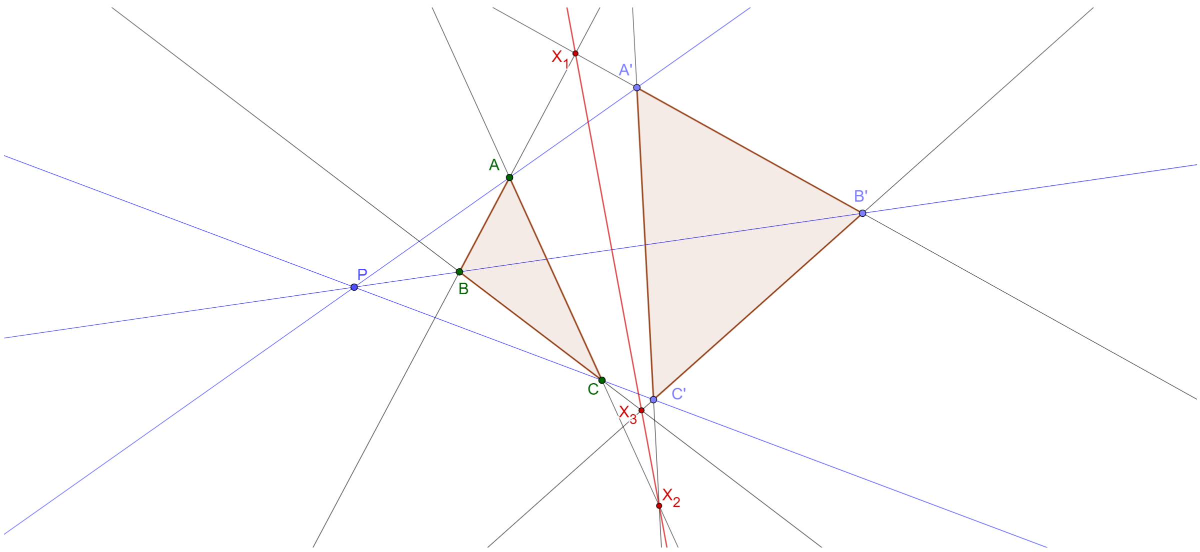


Desarguesova veta

Definícia Majme dva trojuholníky ABC, DEF a bod P. Hovoríme, že trojuholníky ABC, DEF sú v perspektíve vzhľadom k bodu P, ak sú trojice bodov PAD, PBE, PCF kolineárne.

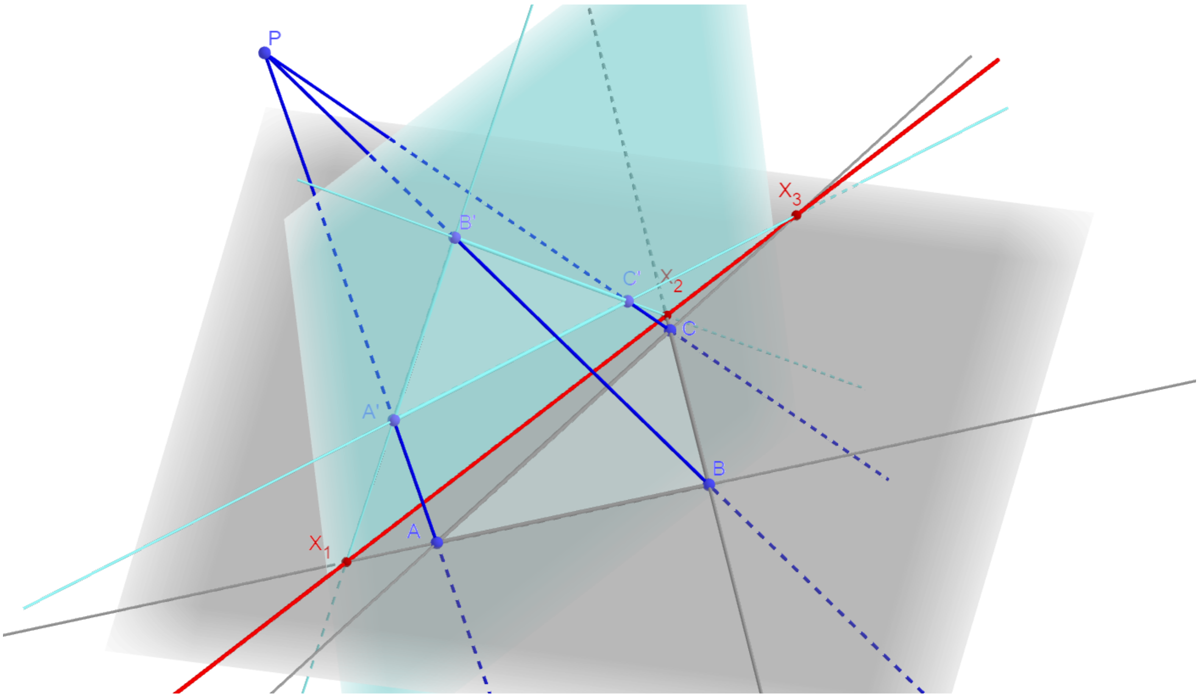
Definícia Majme dva trojuholníky ABC, DEF a priamku p. Hovoríme, že trojuholníky ABC, DEF sú v perspektíve vzhľadom k priamke p, ak priesečníky strán AB a DE, AC a DF, a BC a EF ležia na priamke p.

Desarguesova veta: Ak sú dva trojuholníky v perspektíve vzhľadom k bodu, sú v perspektíve vzhľadom k priamke.



Inak povedané, ak sú dva trojuholníky v perspektíve, priesčníky ich zodpovedajúcich strán sú kolineárne.

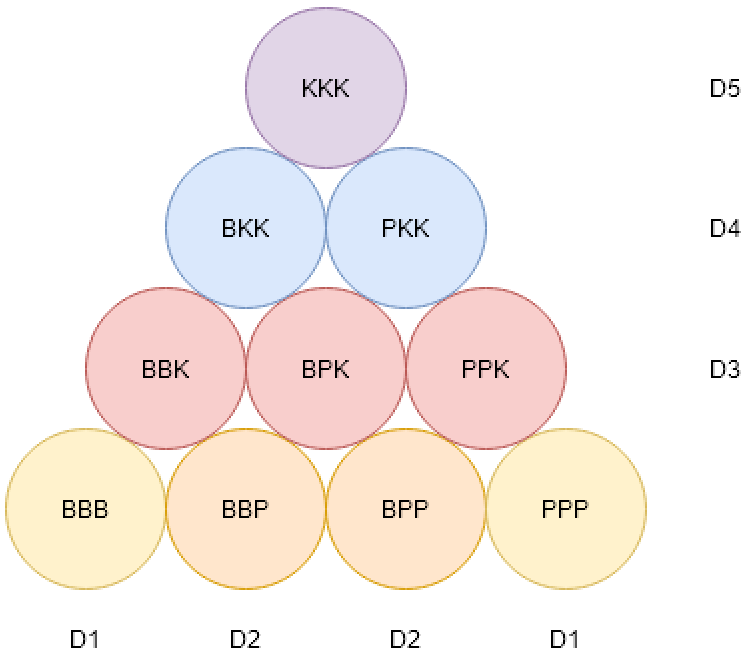
Nedával som nikde dôkazy. Aj toto vyzerá, že by sa dokazovalo ťažko. Ale stačí si celú vec predstaviť v 3D a zrazu to je úplne intuitívne:



Pretože sa v projektívnej geometrii používa iba pravítko, pomocou ktorého sa spájajú body a konštruujú priesečníky (to neznamená, že pomocou pravítka nemožno skonštruovať kužeľosečky), konštrukcie obvykle vyzerajú tak, že sa k existujúcim čiaram a bodom prikreslí tisíc nových bodov a čiar.

Apolóniove úlohy

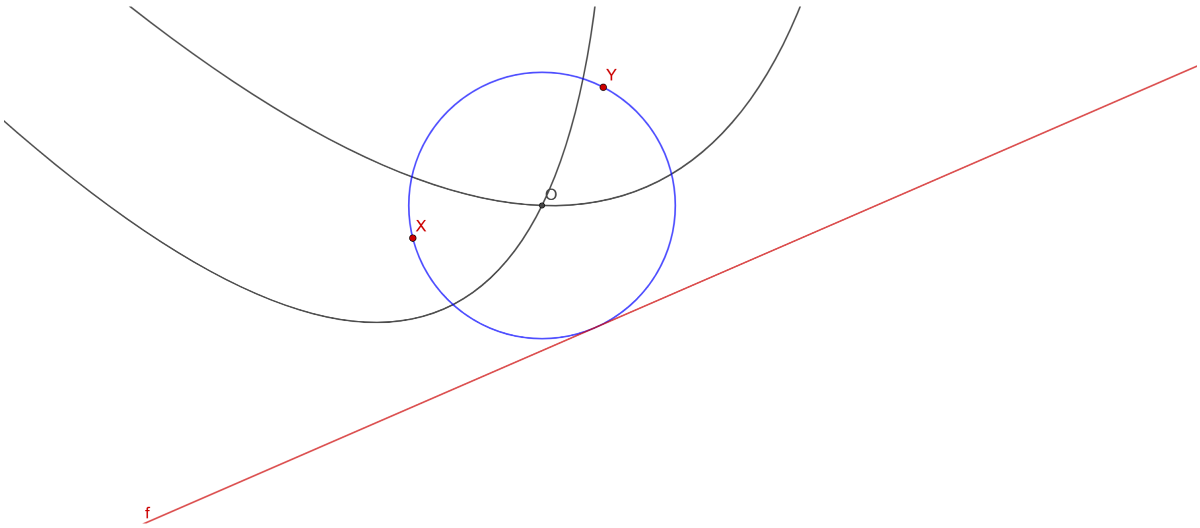
Zostroj kružnicu, ktorá sa dotýka trojice z týchto objektov: bod, priamka, kružnica.



D1 je úloha na pozriem a vidím, D2 na večer, D3 na týždeň, D4 na mesiac a D5 na kus života.

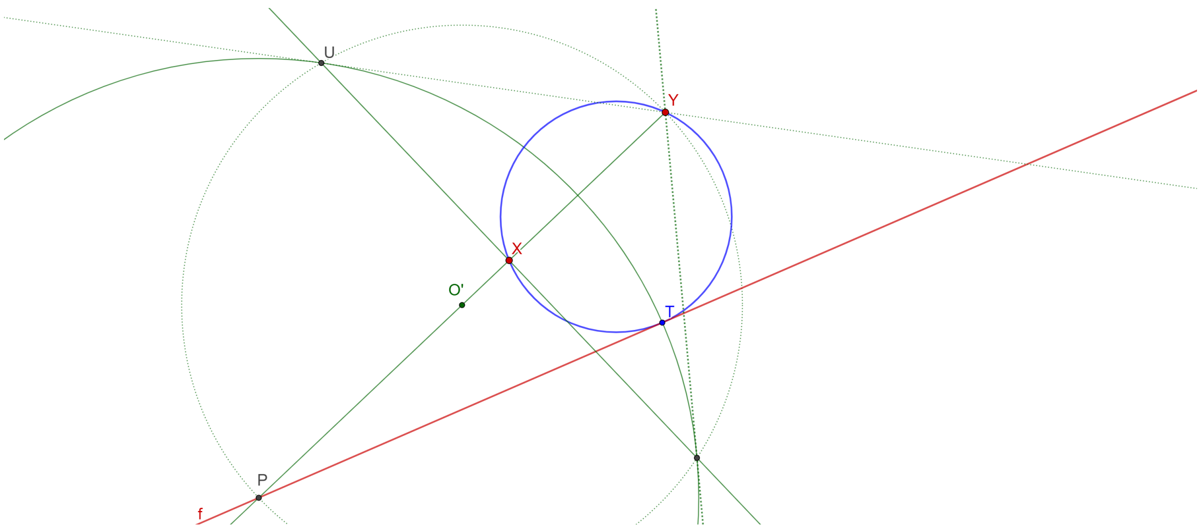
Bod, bod, priamka

Už toto je dosť tažké. "Priamočiare" riešenie je použiť množiny bodov, ktoré sú rovnako vzdialené od bodu a priamky - teda paraboly. Tak sa ťažká úloha premení na ľahučkú.



Ale to nie je správny geometrický telocvik - nevedeli by sme to vyriešiť nejakými elementárnejšími metódami, teda pomocou pravítka a kružidla?

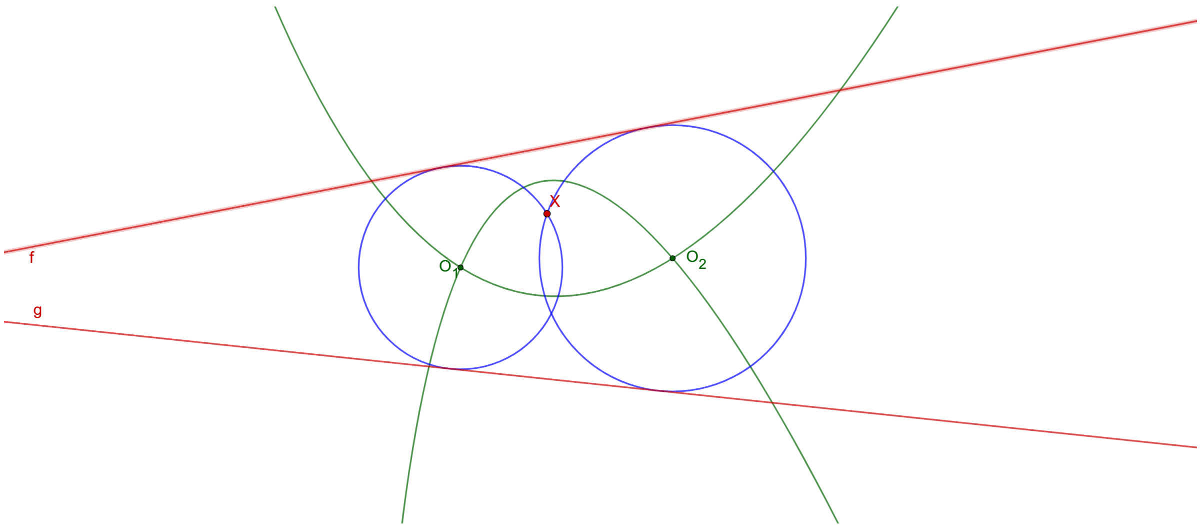
Jednoduchý spôsob riešenia je využiť vetu o sile bodu (Power of a point). Ak je T bod dotyku priamky a kružnice, a bod P priesečníki priamky XY s priamkou f, potom platí $PX \cdot PY = PT^2$ a s tým už ide niečo robiť. V podstate potrebujeme zostrojiť štovrec, ktorý má rovnakú plochu ako obdĺžnik, a to nie je ťažké, hlavne ak si spomenieme na kruhovú inverziu: Ak invertujeme okolo kružnice so stredom P a polomerom PT, potom X bude obrazom Y (a naopak.). A ako sa k sebe majú vzor a obraz pri kruhovej inverzii? Pamätáme? Kolmica, kde sa pretne s kružnicou, k tomu bodu dotyčnica a hľadáme priesečník so spojnicou stredu a vzoru. Inak povedané, potrebujeme pravouhlý trojuholník s odvesnou PY a s pätou výšky X.



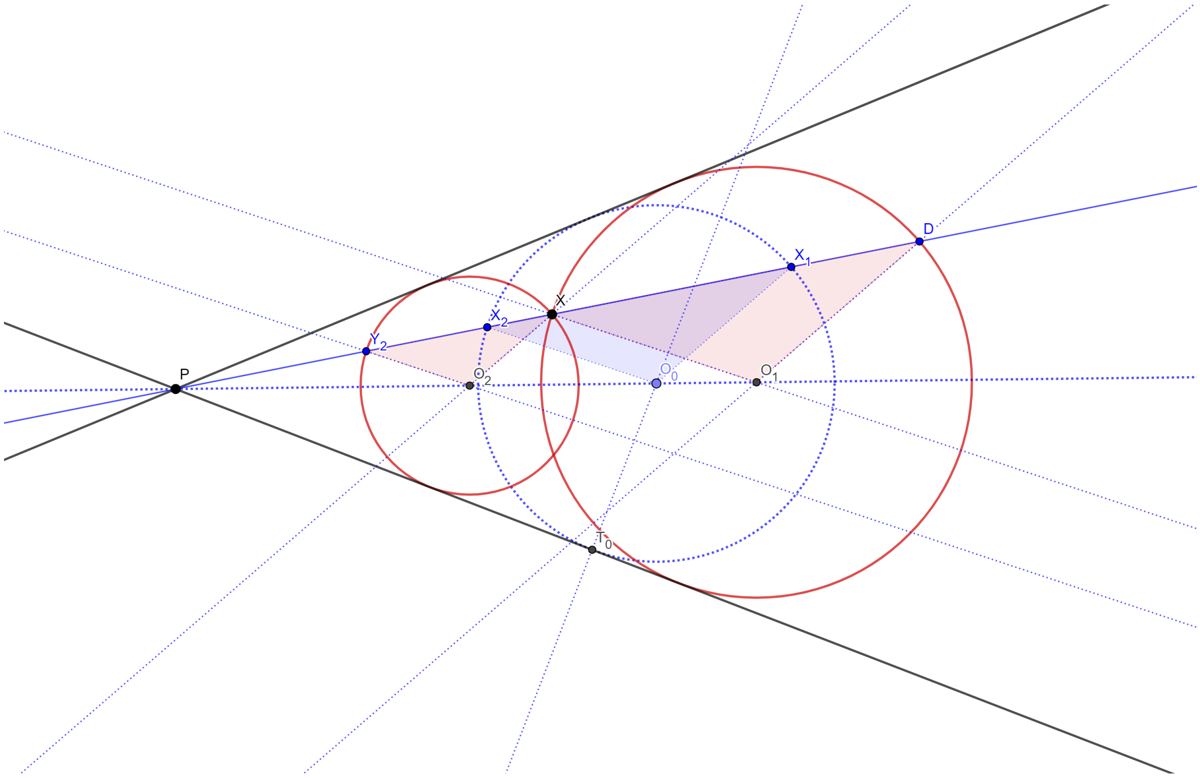
Tak ľahko zostrojíme kružnicu inverzie, a jej priesečník bude bod dotyku hľadanej kružnice s f, pretože to je pevný bod inverzie. Keď už máme tri body hľadanej kružnice, ľahko ju zostrojíme.

Priamka, bod, priamka

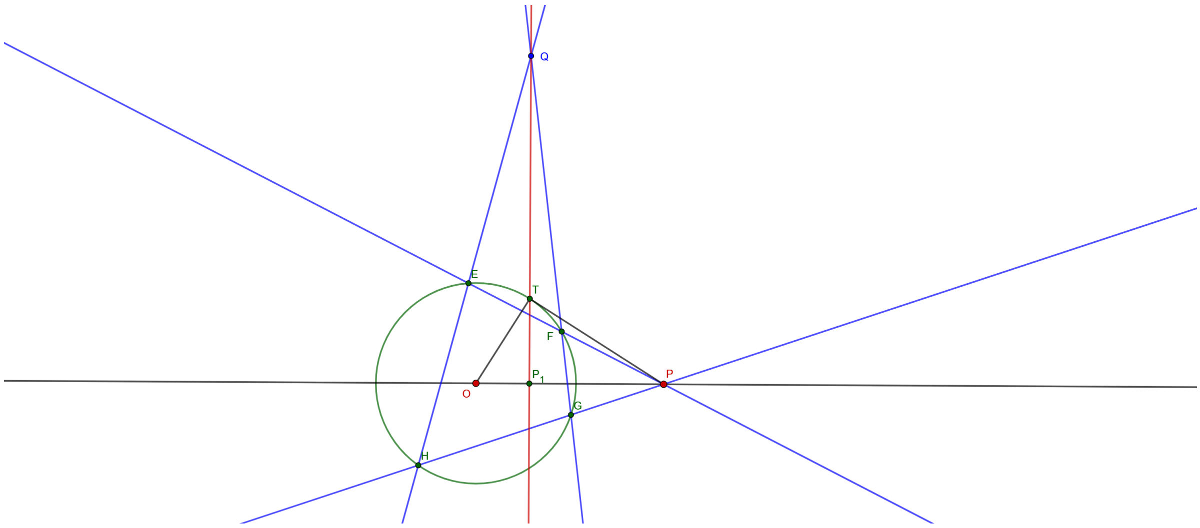
To je zase ľahké pomocou parabol.



ale prekvapivo ľahké to je aj s pravítkom a kružidlom, pretože nám pomôže rovnoľahlosť. Stačí zostrojiť ľubovoľnú kružnicu, dotýkajúcu sa oboch priamok, a potom pomocou podobnosti stred požadovanej kružnice (presnejšie dvoch):



Pomôcka v Desarguesovom štýle:



1. Polára. Kruhová inverzia vytvára priradenie bodov mimo kruhu a tetív v kruhu: bodu P mimo kruhu priradzujeme jeho polárnu priamku (poláru), čo je kolmica na spojnicu bodu a stredu kruhu, predchádzajúca obrazom bodu P v kruhovej inverzii.
2. Majme ľubovoľné priamky, prechádzajúce bodom P a vytínajúce dve tetivy na kružnici. Tieto dve tietivy definujú cirkulárny štvoruholník. Dve opačné strany tohoto štvoruholníka sa pretínajú v bode, ležiacom na poláre.

Kružnica a dva body

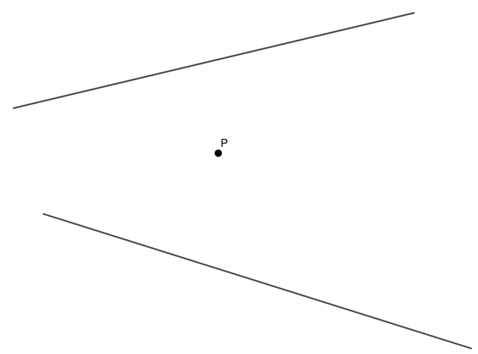
Toto je ľahšie, ako sa zdá, a je to výborné cvičenie na Pascalovo rozšírenie Pappusovej šesťuholníkovej vety, ktorú sme spomínali vyššie (bežne sa dá nájsť iné riešeniel). Toto riešenie má čaro projektívnej goemetrie - že začneme hlava-nehlava kresliť kružnice a spájať rôzne body.
Domáca úloha

---

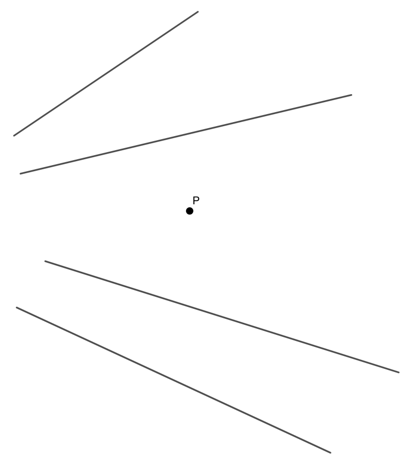
4. Domáca úloha (nová)

Začneme pár príkladmi z projektívnej geometrie.

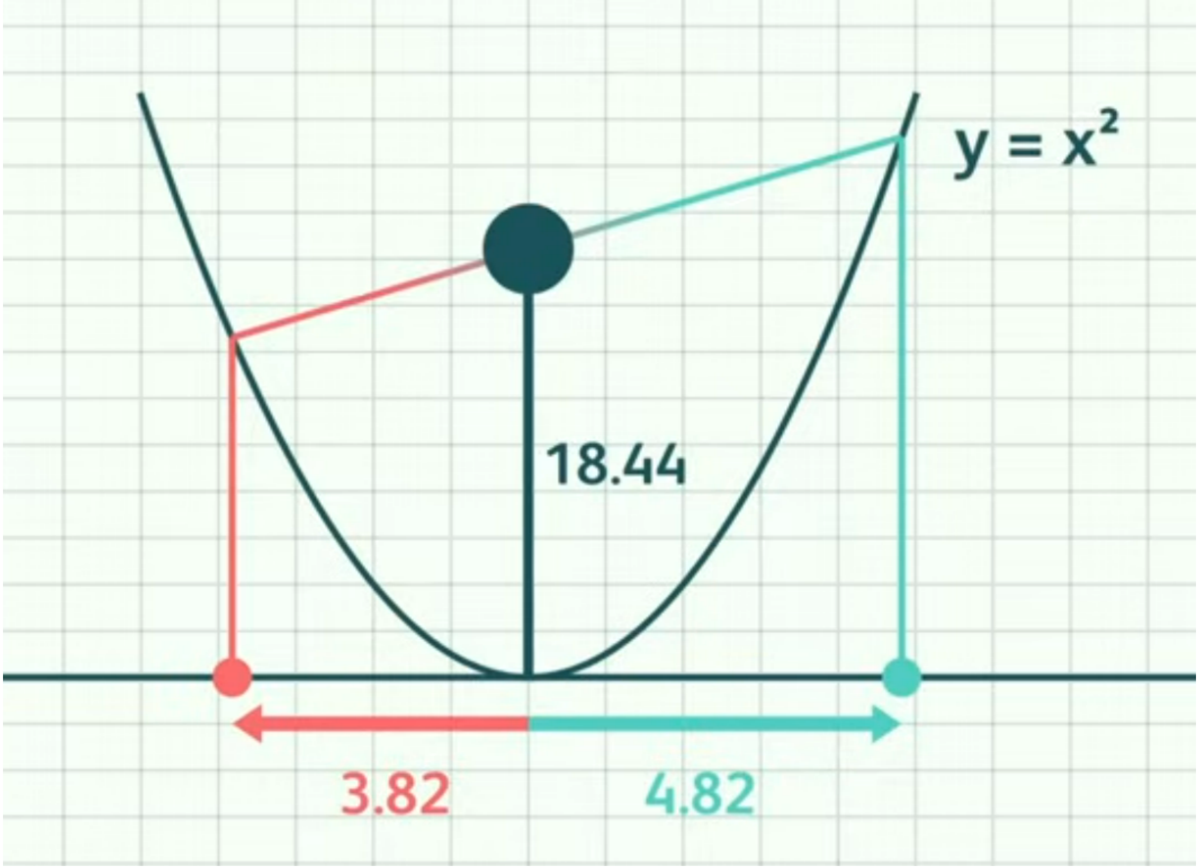
1. Máme dve priamky f, g, ktorých priesečník X sa nachádza mimo výkresu, a bod P. Veďte bodom P priamku, prechádzajúcu priesečníkom X. (Návod: Desarguesova veta)



2. Máme dve dvojice priamok f, g a h, i, ktorých priesečníky X, resp. Y sa nachádzajú mimo výkresu. Máme bod P a za úlohu viesť bodom P rovnobežku s priamkou XY.



3. Dokážte:, že pomocou paraboly môžeme násobiť čísla.



4. Nájdite všetky komplexné čísla z také, že $z^3 = 1 + i$. (Príprava na budúce: čo vieme o komplexných číslach?)

---

5. Program na budúci týždeň

Grupy symetrií a dlaždice.

Ale dosť hrozí, že už ideme na goniometriu a komplexné čísla.