

## Programování 2

---

### 9. cvičení, 23-4-2024

---

#### Farní oznamy

---

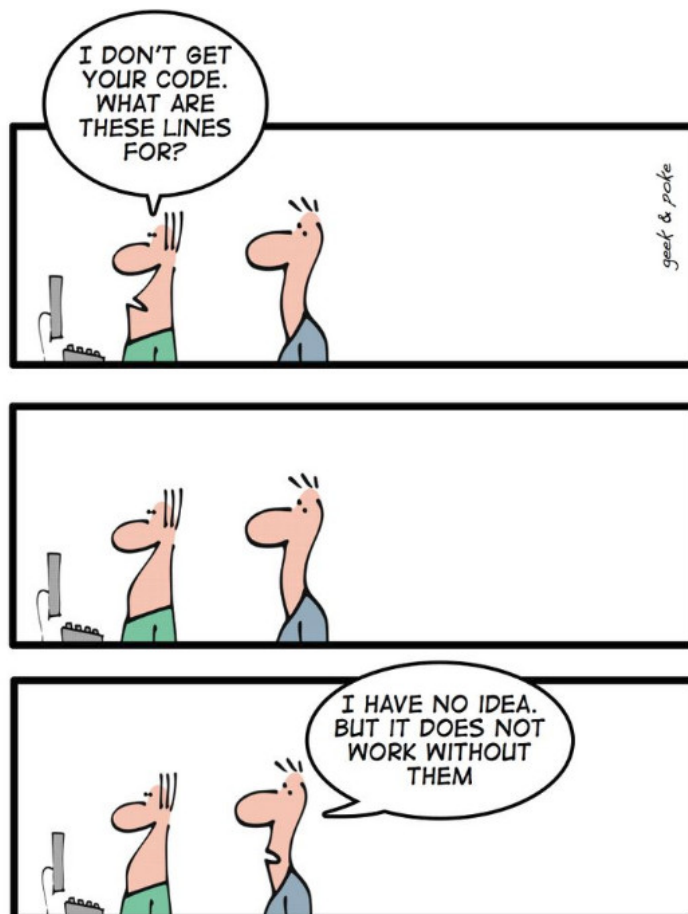
1. Tento text a kódy ke cvičení najdete v repozitáři cvičení na <https://github.com/PKvasnick/Programovani-2>.
  2. **Domácí úkoly** Tento týden těžší a ještě nám zůstaly nějaké resty, ale celkem jsem spokojený.
  3. **Zápočtový program:** Duben se chýlí ke konci a zatím mám téma zápočtového programu domluvené asi se třetinou z vás. Prosím, neodkládejte to a pokud si neumíte poradit, napište.
- 

#### Dnešní program:

- Kvíz
  - Pythonské okénko
  - Poznámka k domácím úkolům
  - Rekurze: sudoku
  - Binární stromy - opakování a pokračování
- 

#### Na zahřátí

---



V komentářích si můžete zapamatovat důležité podrobnosti o kódu.

- Nevýhoda komentářů je, že se neaktualizují, když změníte kód - musí se aktualizovat ručně. Matoucí komentář dělá přesný opak toho, co by měl.
- Ani zakomentovaný kód se sám nekontroluje, jestli je funkční po změnách v ostatním kódu. Proto v kódu nikdy nenechávejte zakomentované bloky.
- Používejte docstringy u funkcí a tříd.

```
def my_fun(x: float) - float:
    """Funkce spočte druhou mocninu vstupího parametru"""
    return x * x

>> help(fun)
Help on function fun in module __main__:
my_fun(x: float) -> float
    Funkce spočte druhou mocninu vstupího parametru
```

## Co dělá tento kód

```
x = True
y = False
x == not y
???
```

Pokud chceme narušit pořadí operací, potřebujeme závorky.

## Poznámky k domácím úkolům

Ještě máte týden, takže většinou nebudu dávat úplná řešení, spíš návody.

### 1. Mrkev a petržel

Toto **není** v pravém smyslu slova úloha na rekurzi, spíš na průběžnou aktualizaci stavu. Pro větvení, tedy kolik možností existuje pro přidání dalšího záhonu, je důležité vědět, zda je poslední záhon osazen mrkví  $m$  nebo petrželí  $p$ . Pokud paralelně sledujeme všechny možná osetí, potřebujeme rozlišit, která končí mrkví a která petrželí. Celkový počet osetí je součtem obou počtů.

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_n + p_n \\ m_n \end{pmatrix} \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

K osetím, končícím mrkví, můžeme přidat mrkev i petržel. K osetím, končícím petrželí, můžeme přidat pouze mrkev.

Stačí si spočítat několik prvních členů, a dobře se podívat na rekurentní vztah, abychom přišli na to, že tato čísla jsou vlastně Fibonacciovy čísla

$$\begin{pmatrix} m_n \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

a tedy celkový počet řešení pro  $n$  záhonů je  $m_n + p_n \equiv F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ .

**Jiné řešení**

Hezké řešení je rozesadit petržel mezi záhony s mrkví, tedy použít součet počtů kombinací s opakováním přes dostupné počty záhonů s petrželí. Toto vyžaduje podstatně víc počítání, ale je to hezký nápad.

## Prefixová notace

Tady asi nejrozměnější řešení je číst symboly zprava doleva a ukládat čísla a výsledky operací na zásobník, ze kterého pak vybíráme operandy, když narazíme na symbol operace.

Existuje i pomalé řešení: sestavit strom a ten pak vypočítat. To je docela lehké a přímočaré, i když ne tak elegantní.

## K-ciferná čísla

Obvyklé řešení je prohledávat strom možností, tedy začít s číslicemi 1-9, a pak přidávat číslice 0-9, dokud nedosáhnete požadované délky.

Tato úloha je těžší díky tomu, že vaše řešení se testuje na extrémních případech - velký počet číslic a velký součet, který lze dosáhnout pouze pomocí devítek, resp. devítek a jedné osmičky.

Proto se tady musíte dívat dopředu a zahazovat větve stromu, které v žádném případě nemůžou vést k řešení, jinak se utopíte v rekurzích. Dobré je také okamžitě doplnit potřebný počet nul, když dosáhnete požadovaného součtu a nenechávat to na rekurzi.

Úlohu můžete řešit rekurzivně nebo pomocí zásobníku.

---

## Rekurze: Sudoku

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

- V každém řádku, sloupci a čtverci 3x3 chceme všechny číslice 1-9.

Sudoku dokáže být velice těžké, napsat program na řešení ale těžké není. Musíme jenom do hloubky prohledat prostor řešení a pokud to urobíme rekurzivně, nebude program složitý.

### Ingredience:

- Reprezentace mřížky

```

grid = [[5, 3, 0, 0, 7, 0, 0, 0, 0],
        [6, 0, 0, 1, 9, 5, 0, 0, 0],
        [0, 9, 8, 0, 0, 0, 0, 6, 0],
        [8, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 3],
        [4, 0, 0, 8, 0, 3, 0, 0, 1],
        [7, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 6],
        [0, 6, 0, 0, 0, 0, 2, 8, 0],
        [0, 0, 0, 4, 1, 9, 0, 0, 5],
        [0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 7, 9]
]

```

- Metoda pro kontrolu, zda je daná číslice přípustná v daném místě mřížky

```

def possible(x, y, n):
    """Is digit n admissible at position x, y in the grid?"""
    global grid
    # row
    for col in range(9):
        if grid[x][col] == n:
            return False
    # column
    for row in range(9):
        if grid[row][y] == n:
            return False
    # block
    row0 = (x // 3) * 3
    col0 = (y // 3) * 3
    for row in range(3):
        for col in range(3):
            if grid[row0+row][col0+col] == n:
                return False
    return True

```

- Algoritmus

Najdeme nevyplněné místo a vyzkoušíme všechny přípustné číslice. Rekurzivně pokračujeme, dokud je co vyplňovat nebo dokud nenajdeme spor.

```

def solve():
    global grid
    for row in range(9):
        for col in range(9):
            if grid[row][col] == 0:
                for n in range(1, 10):
                    if possible(row, col, n):
                        grid[row][col] = n
                        solve()
                        grid[row][col] = 0
                return
    print_grid()
    s = input("Continue?")

```

Toto celkem dobře funguje a hned máme (jediné) řešení:

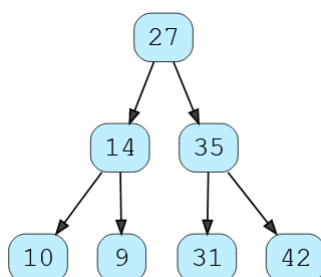
```
5 3 4 6 7 8 9 1 2
6 7 2 1 9 5 3 4 8
1 9 8 3 4 2 5 6 7
8 5 9 7 6 1 4 2 3
4 2 6 8 5 3 7 9 1
7 1 3 9 2 4 8 5 6
9 6 1 5 3 7 2 8 4
2 8 7 4 1 9 6 3 5
3 4 5 2 8 6 1 7 9
Continue?
```

Pokud ubereme některé číslice, můžeme samozřejmě dostat víc řešení.

## Binární stromy

### Opakování z minula

Každý uzel má nejvíc dvě větve:



(Kód v `code/Ex8/binary_tree1.py`)

```
class Node:
    def __init__(self, value, left=None, right=None):
        self.value = value
        self.left = left
        self.right = right
```

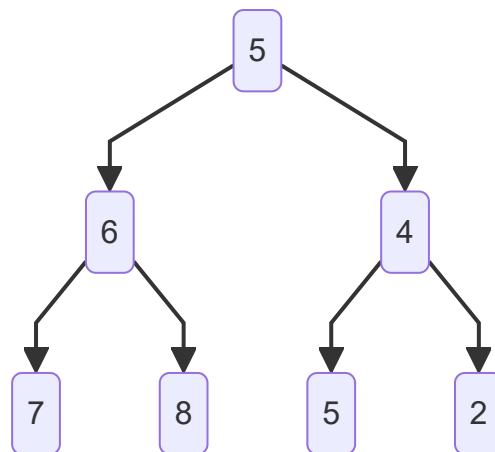
Jak s takovýmto objektem vytvářet binární stromy a pracovat s nimi?

Vytváření stromů je lehké díky tomu, že v konstruktoru můžeme zadat dceřinné uzly:

```

tree = Node(
    5,
    Node(
        6,
        Node(7),
        Node(8)
    ),
    Node(
        4,
        Node(5),
        Node(2)
    )
)

```

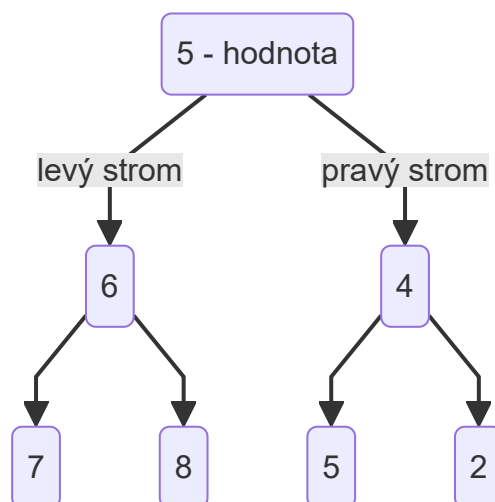


Takže umíme vytvořit strom, ale také potřebujeme vypsat hodnoty ze stromu nebo dokonce strom zobrazit.

## Rekurze

Mnoho věcí umíme lehce definovat, pokud si uvědomíme rekurzivní podstatu binárního stromu:

U každého uzlu máme hodnotu, levý strom a pravý strom:



Rekurzivní procházení stromem:

```

def to_list_preorder(self):

```

```

flat_list = []
flat_list.append(self.value)
if self.left is not None:
    flat_list.extend(self.left.to_list_preorder())
if self.right is not None:
    flat_list.extend(self.right.to_list_preorder())
return flat_list

def to_list_inorder(self):
    flat_list = []
    if self.left is not None:
        flat_list.extend(self.left.to_list_inorder())
    flat_list.append(self.value)
    if self.right is not None:
        flat_list.extend(self.right.to_list_inorder())
    return flat_list

def to_list_postorder(self):
    flat_list = []
    if self.left is not None:
        flat_list.extend(self.left.to_list_postorder())
    if self.right is not None:
        flat_list.extend(self.right.to_list_postorder())
    flat_list.append(self.value)
    return flat_list

```

```

[5, 6, 7, 8, 4, 5, 2]
[6, 7, 8, 5, 4, 5, 2]
[6, 7, 8, 4, 5, 2, 5]

```

Pořadí	Použití
Pre-order	Výpis od kořene k listům, kopírování, výrazy s prefixovou notací
In-order	Ve vyhledávacích stromech dává inorder hodnoty v uzlech v neklesajícím pořadí.
Post-order	Vymazání stromu

Zobrazení stromu:

```

def to_string(self, level = 0):
    strings = []
    if self.left is not None:
        strings.append(self.left.to_string(level + 1))
    strings.append(' ' * 4 * level + '-> ' + str(self.value))
    if self.right is not None:
        strings.append(self.right.to_string(level + 1))
    return "\n".join(strings)

def __str__(self):
    return self.to_string()

-> 7

```

```
-> 6
    -> 8
-> 5
    -> 5
    -> 4
        -> 2
```

Výsledek sice neoslní, ale jakž-takž vyhoví.

`to_string` musí být oddělená od `__str__`, protože potřebujeme jinou signaturu.

## Nerekurzivní průchod stromem

**Rekurze** je sice elegantní způsob, jak implementovat metody procházení binárními stromy, ale víme, že bychom brzo narazili na meze hloubky rekurze. Proto je zajímavé zkusit implementovat nerekurzivní verze těchto metod.

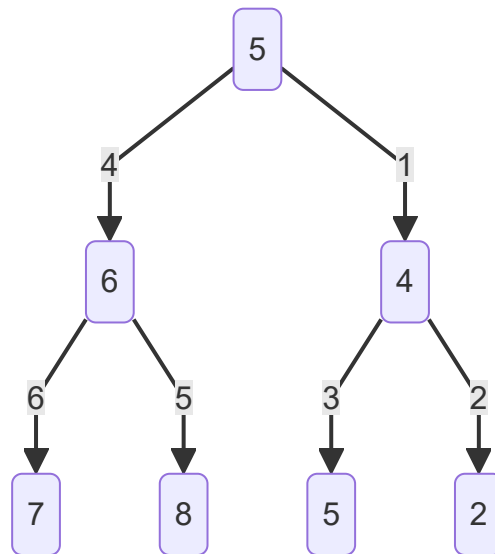
1. Použít zásobník: FIFO pro prohledávání do hloubky (depth-first):
  - Jako zásobník by nám stačil obyčejný seznam (list), tady používáme `collections.deque`
  - cestou tiskneme stav zásobníku, abychom viděli, co se děje

```
from collections import deque
...

def to_list_depth_first(self):
    stack = deque()
    df_list = []
    stack.append(self)
    print(stack)
    while len(stack)>0:
        node = stack.pop()
        df_list.append(node.value)
        if node.left:
            stack.append(node.left)
        if node.right:
            stack.append(node.right)
    print(stack)
    return df_list

deque([5])
deque([6, 4])
deque([6, 5, 2])
deque([6, 5])
deque([6])
deque([7, 8])
deque([7])
deque([])
[5, 4, 2, 5, 6, 8, 7]
```



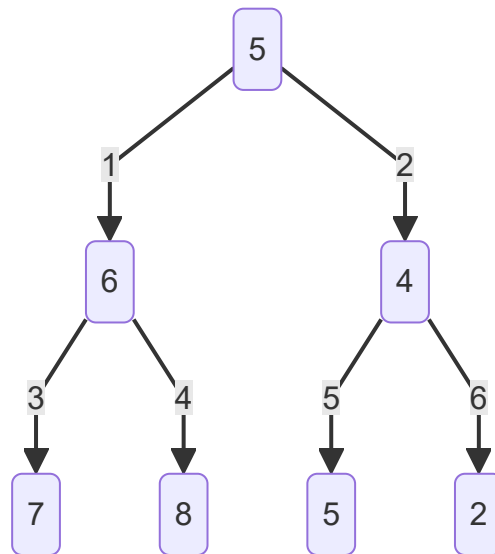


Pořadí dáme do pořádku přehozením levé a pravé větve.

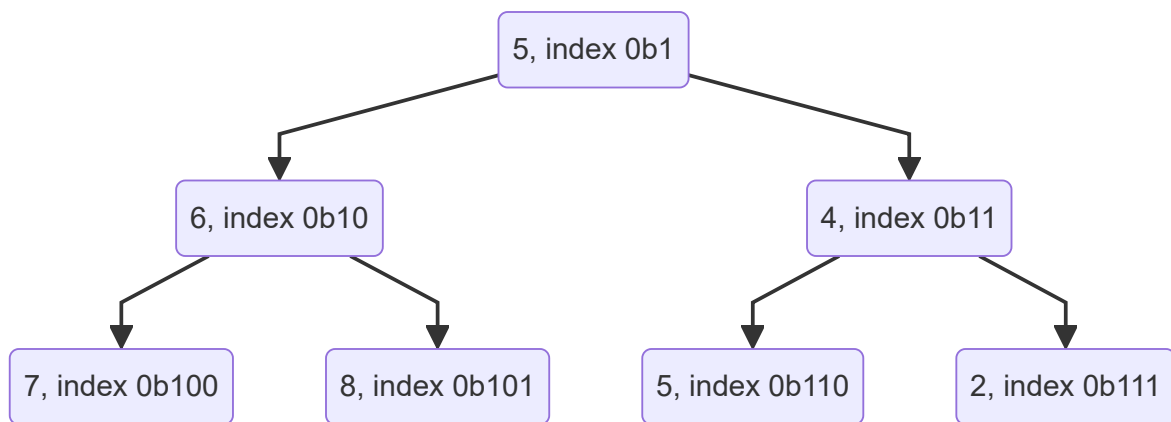
2. Použít frontu LIFO pro prohledávání do šířky (breadth-first)

```
def to_list_breadth_first(self):  
    queue = deque()  
    bf_list = []  
    queue.append(self)  
    print(queue)  
    while len(queue)>0:  
        node = queue.popleft()  
        bf_list.append(node.value)  
        if node.left:  
            queue.append(node.left)  
        if node.right:  
            queue.append(node.right)  
    print(queue)  
    return bf_list
```

```
deque([5])  
deque([6, 4])  
deque([4, 7, 8])  
deque([7, 8, 5, 2])  
deque([8, 5, 2])  
deque([5, 2])  
deque([2])  
deque([])  
[5, 6, 4, 7, 8, 5, 2]
```



Tato poslední metoda je zvlášť důležitá, protože umožňuje jednoduché mapování binárního stromu do pole (už jsme viděli u hromady, že je praktické nepoužít nultý prvek pole).



- Potomci uzlu na indexu  $k$  jsou  $2k$  a  $2k+1$
- Předek uzlu na indexu  $k$  je  $k // 2$
- Uzel  $k$  je levý potomek svého předka, pokud  $k \% 2 == 0$ , jinak je to pravý potomek.

**Úkol** Zkuste popřemýšlet, jak byste ze seznamu hodnot, který poskytuje metoda `to_list_breadth_first` zrekonstruovali původní strom.

(Kód v `code/Ex9/list_tree.py`)

```

...
def tree_from_list(values: list[int]) -> Node:
    values = [0] + values
    queue = deque()
    index = 1
    tree = Node(values[index])
    index += 1
    queue.append(tree)
    while index < len(values):
        print(queue)
        node = queue.popleft()
        node.left = Node(values[index])
        print(index)

```

```

        index += 1
        queue.append(node.left)
        if index == len(values):
            node.right = None
            break
        node.right = Node(values[index])
        print(index)
        index += 1
        queue.append(node.right)
    return tree

def main() -> None:
    tree = Node(
        5,
        Node(
            6,
            Node(7),
            Node(8)
        ),
        Node(
            4,
            Node(5),
            Node(2)
        )
    )

    print(tree.to_string())
    values = tree.to_list_breadth_first()
    tree2 = construct_from_list(values)
    print(tree2.to_string())

if __name__ == '__main__':
    main()

```

Tato metoda funguje jenom pro úplné binární stromy, tedy v případě, že chybějí jenom několik listů na pravé straně poslední vrstvy. Jinak bychom museli dodat do seznamu doplňující informaci - buď "uzávorkování" potomků každého uzlu, anebo u každého uzlu uvést počet potomků.

## Nerekurzivní inorder a postorder průchody binárním stromem

Metoda pro nerekurzivní průchod stromem s využitím zásobníku, kterou jsme ukazovali výše, je pre-order metodou, protože vypisuje hodnotu uzlu před hodnotami uzlů v podstromech.

```

def to_list_depth_first(self):
    stack = deque()
    df_list = []
    stack.append(self)
    print(stack)
    while len(stack)>0:
        node = stack.pop()

```

```

df_list.append(node.value)
if node.right:
    stack.append(node.right)
if node.left:
    stack.append(node.left)
print(stack)
return df_list

```

Je logické se ptát, zdali můžeme implementovat i nerekurzivní inorder a postorder průchody.

**Můžeme**, i když implementace je mírně odlišná.

## Nerekurzivní in-order průchod binárním stromem:

Uložíme do zásobníku nejdříve celý levý podstrom, pak hodnotu, a pak pravý podstrom.

```

def to_list_df_inorder(self):
    stack = deque()
    df_list = []
    current = self
    while True:
        if current:
            stack.append(current)
            current = current.left
        elif stack:
            current = stack.pop()
            df_list.append(current.value)
            current = current.right
        else:
            break
    return df_list

```

## Nerekurzivní post-order průchod binárním stromem

Toto je komplikovanější případ, potřebujeme dva zásobníky, přičemž do druhého si za pomoci prvního ukládáme uzly ve správném pořadí.

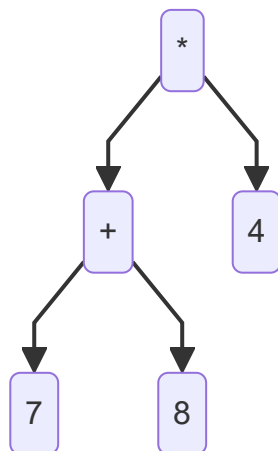
```

def to_list_df_postorder(self):
    s1 = deque()
    s2 = deque()
    df_list = []
    s1.append(self)
    while s1:
        node = s1.pop()
        s2.append(node)
        if node.left:
            s1.append(node.left)
        if node.right:
            s1.append(node.right)
    while s2:
        node = s2.pop()
        df_list.append(node.value)
    return df_list

```

(V našem případě vypadá poslední cyklus poněkud směšně, protože výstupní seznam je prostě stack  $s_2$  v obráceném pořadí; z pedagogických důvodů je ale vhodnější odlišit výstupní seznam od  $s_2$ .)

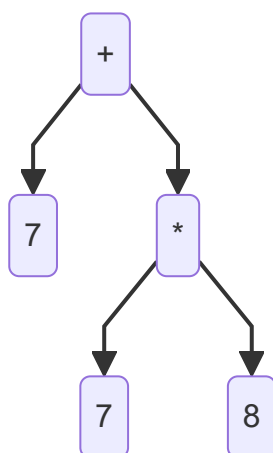
## Operace s výrazy



Výraz ve tvaru binárního stromu je jednoznačný a nepotřebuje závorky. Podle toho, jak výraz ze stromu přečteme, dostáváme různé typy notace:

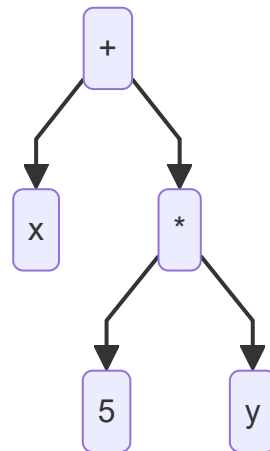
- in-order --> infixová notace (běžná notace, potřebuje závorky)  $(7+8) \times 4$
- Pre-order --> prefixová notace (polská logika, nepotřebuje závorky)  $* 4 + 7 8$
- Post-order --> postfixová notace (reverzní polská logika, nepotřebuje závorky)  $7 8 + 4 *$

Pro binární operátory je binární graf jednoznačným zápisem výrazu a nepotřebuje závorky. Pro výraz  $7 + 8 * 4$  máme úplně jiný strom než pro  $(7 + 8) * 4$ :



**Úkol** Jak vypočítat hodnotu takového stromu?

## Operace s výrazy ve tvaru stromů



```
class Expression:
    ...

class Constant(Expression):
    def __init__(self, value):
        self.value = value

    def __str__(self):
        return str(self.value)

    def eval(self, env):
        return self.value

    def derivative(self, by):
        return Constant(0)

class Variable(Expression):
    def __init__(self, name):
        self.name = name

    def __str__(self):
        return self.name

    def eval(self, env):
        return env[self.name]

    def derivative(self, by):
        if by == self.name:
            return Constant(1)
        else:
            return Constant(0)

class Plus(Expression):
    def __init__(self, left, right):
```

```

        self.left = left
        self.right = right

    def __str__(self):
        return f"({self.left} + {self.right})"

    def eval(self, env):
        return self.left.eval(env) + self.right.eval(env)

    def derivative(self, by):
        return Plus(
            self.left.derivative(by),
            self.right.derivative(by)
        )

class Times(Expression):
    def __init__(self, left, right):
        self.left = left
        self.right = right

    def __str__(self):
        return f"({self.left} * {self.right})"

    def eval(self, env):
        return self.left.eval(env) * self.right.eval(env)

    def derivative(self, by):
        return Plus(
            Times(
                self.left.derivative(by),
                self.right
            ),
            Times(
                self.left,
                self.right.derivative(by)
            )
        )

def main():
    vyraz = Plus(
        Variable("x"),
        Times(
            Constant(5),
            Variable("y")
        )
    )
    print(vyraz)
    print(vyraz.eval({"x": 2, "y": 4}))
    print(vyraz.derivative(by="x"))
    print(vyraz.derivative(by="y"))

if __name__ == '__main__':
    main()

```

```
-----  
(x + (5 * y))  
(1 + ((0 * y) + (5 * 0)))  
(0 + ((0 * y) + (5 * 1)))
```

Sice to funguje, ale dostáváme strom, ve kterém je spousta hlušiny:

- přičítání nuly a násobení nulou
- násobení jedničkou

Můžeme si vytvořit čistící proceduru, která stromy rekurzivně vyčistí, a opět postupujeme tak, že určité uzly či struktury ve stromu rekurzivně nahrazujeme jinými uzly či strukturami.

```
class Expression:  
    ...  
  
class Constant(Expression):  
    def __init__(self, value):  
        self.value = value  
  
    def __str__(self):  
        return str(self.value)  
  
    def eval(self, env):  
        return self.value  
  
    def derivative(self, by):  
        return Constant(0)  
  
    def prune(self):  
        return self  
  
# Testování konstanty, zdali je či není 0 nebo 1 !!  
  
def is_zero_constant(x):  
    return isinstance(x, Constant) and x.value == 0  
  
def is_unit_constant(x):  
    return isinstance(x, Constant) and x.value == 1  
  
class Variable(Expression):  
    def __init__(self, name):  
        self.name = name  
  
    def __str__(self):  
        return self.name  
  
    def eval(self, env):  
        return env[self.name]
```



```

def derivative(self, by):
    if by == self.name:
        return Constant(1)
    else:
        return Constant(0)

def prune(self):
    return self

class Plus(Expression):
    def __init__(self, left, right):
        self.left = left
        self.right = right

    def __str__(self):
        return f"({self.left} + {self.right})"

    def eval(self, env):
        return self.left.eval(env) + self.right.eval(env)

    def derivative(self, by):
        return Plus(
            self.left.derivative(by),
            self.right.derivative(by)
        )

    def prune(self):
        self.left = self.left.prune()
        self.right = self.right.prune()
        if is_zero_constant(self.left):
            if is_zero_constant(self.right):
                return Constant(0)
            else:
                return self.right
        if is_zero_constant(self.right):
            return self.left
        return self

class Times(Expression):
    def __init__(self, left, right):
        self.left = left
        self.right = right

    def __str__(self):
        return f"({self.left} * {self.right})"

    def eval(self, env):
        return self.left.eval(env) * self.right.eval(env)

    def derivative(self, by):
        return Plus(
            Times(
                self.left.derivative(by),
                self.right
            ),
            Times(
                self.left,
                self.right.derivative(by)
            )
        )

```

```

    ),
    Times(
        self.left,
        self.right.derivative(by)
    )
)

def prune(self):
    self.left = self.left.prune()
    self.right = self.right.prune()
    if is_zero_constant(self.left) | is_zero_constant(self.right):
        return Constant(0)
    if is_unit_constant(self.left):
        if is_unit_constant(self.right):
            return Constant(1)
        else:
            return self.right
    if is_unit_constant(self.right):
        return self.left
    return self

def main():
    vyraz = Plus(
        Variable("x"),
        Times(
            Constant(5),
            Variable("y")
        )
    )
    print(vyraz)
    print(vyraz.derivative(by="x"))
    print(vyraz.derivative(by="x").prune())
    print(vyraz.derivative(by="y"))
    print(vyraz.derivative(by="y").prune())

if __name__ == '__main__':
    main()

-----
(x + (5 * y))
(1 + ((0 * y) + (5 * 0)))
1
(0 + ((0 * y) + (5 * 1)))
5

```

- Všimněte si post-order procházení stromu při prořezávání.
- Metodu `prune` definujeme také pro konstanty a proměnné, i když s nimi nedělá nic. Ulehčuje to rekurzivní volání metody.
- Musíme být pozorní při testování, zda je daný uzel/výraz nulová nebo jedničková konstanta. Nestačí operátor rovnosti, musíme nejdřív zjistit, zda se jedná o konstantu a pak otestovat její hodnotu. V principu bychom mohli dvě testovací funkce proměnit v metody třídy `Expression`.

### **Domácí úkol**

Implementujte konstrukci, která ze stromu, kódujícího polynomiální funkci, vytvoří strom, kódující její primitivní funkci (podle některé proměnné).