

5. 你在何种程度上同意“所有的模型都是错误的，但有些是有用的”这一说法（认为是出自乔治·博克斯）请参考数学和另外一个知识领域展开你的应答。To what extent do you agree with the claim “all models are wrong, but some are useful” (attributed to George Box)?

Discuss with reference to mathematics and one other area of knowledge.

在数学、自然科学、社会科学等知识领域中，知识通常可以被分为理论知识和应用知识。模型是对于某个实际问题或客观事物、规律进行抽象和简化的一种形式化表达方式。统计学家乔治·博克斯所提出的“所有的模型都是错误的，但有些是有用的”提供了评价模型的思路。题目语境中“有用性”和“正确性”在不同知识领域有着不同的概念。本文将在自然科学和数学两个学科领域探究在评估模型时更应该使用“有用性”还是“正确性”作为评价的主要标准。

数学模型是对用自然语言表达的理论使用数学语言进行系统地概括。在数学的分支统计学中，数据会经过统计分析模型的处理得出特定的关系。在这个领域中，有用指模型可以提供预测，而正确指能提供因果关系。在此界定下，统计学的抽象模型正如乔治·博克斯所提出，不必提供正确性但还可以有用。线性回归（linear regression）分析是用于预测或估计因变量和自变量之间关系的一种常用方法。在线性回归中，假设数据遵循某种分布，当相关性

（correlation）足够高时可以得出因变量与自变量成线性相关的结论。在该模型中，因变量与自变量的相关（correlation）不代表因果（causation）——统计学上的相关可能是基于其他未见的潜伏变量¹（lurking variable）而形成的假型相关（Spurious relationship），让人很容易猜想“两个事件有所联系”，然而这种联系不能通过更加精细的检验。故回归模型不能承诺找到真正的因果关系，也就是正确性有所缺失。然而，有用性，也就是其可以被作为统计分析的工具呈现正确的数据趋势，是确定的。故统计学模型在正确性缺失的情况下也可以有用。

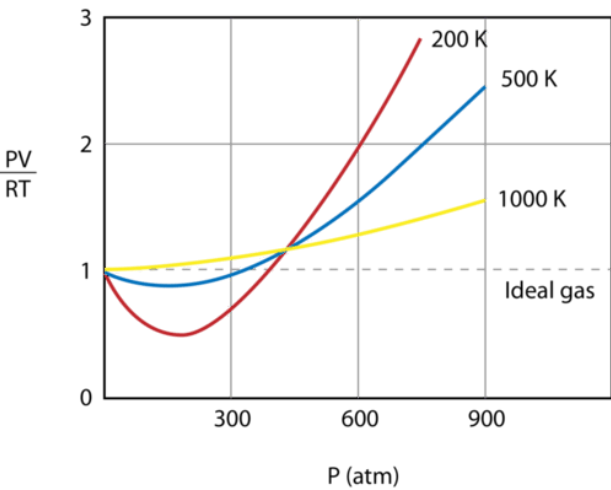
¹ Sternstein, Martin. *Barron's AP statistics*. Simon and Schuster, 2017, pp. 216-220.

然而，在纯数学中，这些模型主要用于描述或解决抽象问题，而不一定直接对应于现实世界的具体实体。理论数学模型的正确性指的是基础条件之间的自洽性，有用性指可以拓展推出更多符合的性质，则正确性是评价模型的主要标准。理论数学中一个常见的模型是群（group）模型，指配备二元运算（operation）的集合（set），并且二元运算需满足结合律（associativity）、单位元（unit）和逆元（inverse）三个公理²。作为理论方面的模型，群模型的三个公理互相自洽，并且可以推出单位元的唯一性（uniqueness of identity element）等性质，故可以被认为是一个好的模型。在纯数学中，衡量模型是从正确性和有用性两方面进行的，但正确性是前提。正如群模型的三个公理是群结构成立的前提一样。如果这些前提相悖，模型本身就不存在。对于这类模型，评价时正确性是首先被强调的。

在自然科学中，侧重于应用的模型的正确性由是否忽略部分影响因素衡量，有用性指模型可以用于预测实际现象，则模型也可能在不完全正确的情况下满足有用性。物理学使用的模型会因为一些因素对结果影响较小或过于复杂而有无意的对其忽略和简化，故可能会导致正确性的缺失。理想气体模型是一个用于描述气体行为的经典模型。在现实中，气体分子之间的相互作用力和分子体积会对气体分子的运动产生影响，而在通常情况下这些因素的影响较小，故被忽略不计。由于并没有考虑所有因素，该模型可以被称为是缺乏正确性的。在高压、低温的情况下，气体会因为半径和分子间作用力的存在和理想气体相差较远。但在其他条件下，这些未列入考虑的因素对模型影响不大，理想气体模型 $PV=nRT$ 提供的预测结果足够精确，能够帮助工程师和科学家在大多

² Dummit, David Steven, and Richard M. Foote. *Abstract algebra*. Vol. 3. Hoboken: Wiley, 2004, pp. 30-32.

数情况下进行有效的计算和设计。故在自然科学中，虽然用于应用的模型省略了部分需要考虑的因素导致了正确性的缺失，含有有用性的模型也会被使用，所以有用性是更重要的衡量标准。



图一 理想气体（如图 $PV/RT=1$ 虚线所示）与实际在不同温度和压强下 1 莫尔气体 PV/RT 值的比较³。由该图可见对于每条等温气体线来说高压都会导致实际气体与理想气体间有较大的偏差，而气温为 200K 情况下偏差最明显。

在理论物理中，理论模型的正确性是理论的自洽性，有用性是模型结论可以有效地反映实际现象。则与理论数学类似，正确性是首要的评价标准。在运动学中，亚里士多德最初提出的“物体下落速度与质量成正比⁴”被推翻的原因并不是因为与实际现象不符。相反，亚里士多德正是在观察羽毛下落比铁块慢而得出该结论。然而即使在与实际相符的情况下，该模型还是被推翻的原因就是理论的不自洽——如果将大球与小球相连，整体质量更大，则速度应该是最大的；但考虑到小球应该落得更慢，会拉住大球导致速度小于大球的速度，产生矛盾，所以被推翻。亚里士多德的运动学说中与实际现象的“相符”是凑巧

³ Ideal Gases | CK-12 Foundation, <https://www.ck12.org/section/ideal-gases-of-the-behavior-of-gases/>, 2024-12-17 访问

⁴ What did Aristotle say about free falling objects? – WistomShort.com, <https://wisdomshort.com/philosophers/aristotle/on-free-falling-objects>, 2024-10-20 访问

的，没有揭示其原理——羽毛由于其结构组成阻力的作用更明显，所以速度更慢。之所以模型被淘汰，是因为思想实验揭示出理论的不自洽，所以在评判理论物理模型时，相比于甚至可能有误导性的有用性，正确性是更加被强调的。

综上，模型可以根据其动机不同而被分为服务于理论和应用的两种类别。理论模型的正确性由是否自洽判断，且正确性是评判的主要标准；应用数学模型和应用或理论自然科学模型中，有用性都是是否可以用作实际现象的推断。对于用于应用的模型来说，有用性则是首要评价标准。统计学家乔治·博克斯所提出的“所有的模型都是错误的，但有些是有用的”这一观点值得商榷，因为模型不仅包括应用模型，也有强调正确性的理论模型，对于这些模型来说正确性是可以保证的。故在数学和自然科学领域中，“正确性”和“有用性”这两个评判标准需要根据模型的适用领域而定。而不管是在数学还是自然科学知识领域中，模型都是用于抽象和简化的一种形式化表达方式，帮助了人们对于未知事物的理解。

字数：1993 字

参考文献

- [1] Sternstein, Martin. Barron's AP statistics. Simon and Schuster, 2017, pp. 216-220.
- [2] Dummit, David Steven, and Richard M. Foote. Abstract algebra. Vol. 3. Hoboken: Wiley, 2004, pp. 30-32.
- [3] Ideal Gases | CK-12 Foundation, <https://www.ck12.org/section/ideal-gases-of-the-behavior-of-gases/>, 2024-12-17 访问

[4] What did Aristotle say about free falling objects? – WistomShort.com,

<https://wisdomshort.com/philosophers/aristotle/on-free-falling-objects>,

2024-10-20 访问