

Bases formelles du TAL

Pierre-Léo Bégay

20 mars 2020

La théorie des automates est l'algèbre linéaire de l'informatique [...], connaissance de base, fondamentale, connue de tous et utilisée par tous, qui fait partie du paysage intellectuel depuis si longtemps qu'on ne l'y remarquerait plus.

Jacques Sakarovitch, dans l'avant-propos de *Éléments de théorie des automates*

Table des matières

1	Langages	4
1.1	Mots	4
1.2	Langage	8
2	Expressions régulières	10
2.1	Lexique et idée générale	10
2.1.1	Les lettres et ϵ , la base	10
2.1.2	\cdot , la concaténation	10
2.1.3	$*$, l'itération	11
2.1.4	$+$, la disjonction	12
2.2	Syntaxe	13
2.3	Sémantique	15
2.3.1	Les cas de base	15
2.3.2	Sémantique de la concaténation	16
2.3.3	Sémantique de la disjonction	16
2.3.4	Sémantique de l'itération	17
2.4	Mise en application	17
2.4.1	Quelques astuces	18
2.4.2	Syntaxe en pratique	18
2.4.3	Calcul de l'appartenance	19
3	Automates finis	20
3.1	Automates finis déterministes	20
3.1.1	Principe général	20
3.1.2	Formalisation et implémentation	23
3.2	Automates finis non-déterministes	25
3.2.1	Principe général	25
3.2.2	Formalisation et implémentation	27
3.3	Transformation d'automates	28
3.3.1	Complétion	29
3.3.2	Déterminisation	29
3.3.3	Minimisation	31
3.4	Limite de la reconnaissance par automates finis	34
3.5	Propriétés de clôture des langages reconnus par automates	36
3.5.1	Union	36
3.5.2	Concaténation	36
3.5.3	Itération	38

3.5.4	Intersection	39
3.5.5	Complémentaire	41
3.5.6	Conséquences pour les langages non-reconnus	42
4	Théorème de Kleene	44
4.1	Des expressions rationnelles aux automates	44
4.1.1	Traduction récursive	44
4.1.2	Traduction linéaire	45
5	Grammaires formelles et hiérarchie de Chomsky	50
5.1	Principe général	50
5.2	Formalisation	53
5.3	Hierarchie de Chomsky	55
5.3.1	Grammaires de type 3, ou régulières	55
5.3.2	Grammaires de type 2, ou non contextuelles	57
5.3.3	Grammaires de type 1, ou contextuelles	58
6	Introduction à la calculabilité	60
A	Rappels mathématiques	62
A.1	Logique	62
A.1.1	Raisonnement par l'absurde	62
A.2	Ensembles	63
A.2.1	Opérations entre ensembles	63
A.2.2	Ensemble des parties	64
A.3	Algorithmique	65
A.3.1	Itératif vs. récursif, le cas des parcours d'arbre	65

Chapitre 1

Langages

On définit d'abord la notion de mot, nécessaire à celle de langage. On verra ensuite comment décrire des langages à l'aide de notations ensemblistes, révisant ces dernières par la même occasion.

1.1 Mots

Définition 1.1.1: Mot

Un **mot** est une suite de lettres tirées d'un alphabet donné. L'ensemble des mots sur un alphabet Σ est noté Σ^* .

Exemple 1.1.1. Etant donné l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, on peut construire une infinité de mots parmi lesquels

- abc
- aab
- cc
- $abcabcbacbacbacbabcbcabcbcabcbcabcb$
- a

Remarque On va s'intéresser ici à des langages et mots complètement abstraits, en général composés uniquement de a , b et c .

Définition 1.1.2: Mot vide

Une suite de lettres peut être de longueur zéro, formant alors le **mot vide**. Quel que soit l'alphabet, ce dernier sera noté ϵ .

Définition 1.1.3: Concaténation

L'opération de **concaténation**, notée $.$, consiste tout simplement à "coller" deux mots.

Exemple 1.1.2. Quelques concaténations :

- $ab.c = abc$
- $ab.ba = abba$

De plus, pour tout mot w ,

$$w.\epsilon = \epsilon.w = w$$

Remarque Les algébristes enthousiastes remarqueront que $(\Sigma^*, ., \epsilon)$ forme un monoïde libre de base Σ

Définition 1.1.4: Longueur d'un mot

Etant donné un mot w , on note sa **longueur** $|w|$.

Exemple 1.1.3. Tout naturellement,

- $|abc| = 3$
- $|abba| = 4$
- $|c| = 1$
- $|\epsilon| = 0$

Définition 1.1.5: Principe d'induction sur un mot

Etant donnée une propriété P sur les mots. Si on a

1. $P(\epsilon)$ (cad. que P est vraie pour le mot vide)
2. $\forall w, \forall c \in \Sigma, (P(w) \rightarrow P(c.w))$ (cad. que si P est vraie pour un mot, alors elle reste vraie si on rajoute n'importe quelle lettre à gauche du mot)

Alors la propriété P est vraie pour tout mot w .

Remarque Est également valide le principe d'induction où, dans le cas récursif, la lettre est rajoutée à droite du mot plutôt qu'à sa gauche.

On va s'entraîner à utiliser ce principe d'induction en prouvant deux lemmes qui n'en nécessitent sans doute pas tant :

Lemme 1. $\forall w \in \Sigma^*, |w| \geq 0$, cad. que tout mot a une longueur positive.

Démonstration. On procède par induction sur w .

Dans le cas de base, $w = \epsilon$. On a donc $|w| = |\epsilon| = 0 \geq 0$.

Dans le cas récursif, $w = c.w'$ avec $c \in \Sigma$ et on suppose $|w'| \geq 0$. On a $|c.w'| = 1 + |w'| \geq |w'| \geq 0$. \square

Lemme 2. Etant donnés deux mots w_1 et w_2 , $|w_1.w_2| = |w_1| + |w_2|$.

Démonstration. On procède par induction sur w_1 .

Dans le cas de base, $w_1 = \epsilon$. On a donc $|w_1.w_2| = |\epsilon.w_2| = |w_2| = 0 + |w_2| = |w_1| + |w_2|$.

Dans le cas récursif, $w_1 = c.w'_1$ avec $c \in \Sigma$ et on suppose $|w'_1.w_2| = |w'_1| + |w_2|$. On a

$$\begin{aligned}
& |w_1.w_2| \\
= & |c.w'_1.w_2| && \text{par définition de } w_1 \\
= & 1 + |w'_1.w_2| && \text{par définition de } |.| \\
= & 1 + (|w'_1| + |w_2|) && \text{par hypothèse d'induction} \\
= & (1 + |w'_1|) + |w_2| && \text{par associativité de l'addition} \\
= & |c.w'_1| + |w_2| && \text{par définition de } |.| \\
= & |w_1| + |w_2| && \text{par définition de } w_1
\end{aligned}$$

On a donc bien nos deux conditions pour le raisonnement par induction. \square

Définition 1.1.6: Nombre d'occurrences d'une lettre

Etant donné un mot w et une lettre a , on note $|w|_a$ le nombre de a dans w .

Exemple 1.1.4. On a

- $|abc|_a = 1$
- $|abba|_b = 2$
- $|c|_a = 0$
- $|\epsilon|_a = 0$

Définition 1.1.7: Préfixe

Un mot p est un **préfixe** du mot w ssi $\exists v, w = p.v$, cad. ssi w commence par p .

Définition 1.1.8: Suffixe

Un mot s est un **suffixe** du mot w ssi $\exists v, w = v.s$, cad. ssi w finit par s .

Exemple 1.1.5. Le mot *abba* admet comme préfixes ϵ, a, ab, abb et *abba*. Ses suffixes sont, quant à eux, ϵ, a, ba, bba et *abba*.

Lemme 3. $\forall w \in \Sigma^*, \epsilon$ et w sont des préfixes de w

Démonstration. Pour ϵ , il suffit de prendre $v = w$. A l'inverse, en prenant $v = \epsilon$, on voit que w est son propre préfixe. \square

Lemme 4. $\forall w \in \Sigma^*, \epsilon$ et w sont des suffixes de w

Démonstration. Analogie au lemme précédent. \square

Exercice 1.1.1. Combien de préfixes et suffixes admet un mot w quelconque ?

Définition 1.1.9: Facteur

Un mot f est un **facteur** du mot w ssi $\exists v_1 v_2, w = v_1.f.v_2$, cad. ssi f apparaît dans w .

Exemple 1.1.6. Les facteurs du mot *abba* sont ϵ , a , b , ab , ba , abb , bba et *abba*.

Lemme 5. $\forall w \in \Sigma^*$, ϵ et w sont des facteurs de w .

Démonstration. Pour ϵ , il suffit de prendre $v_1 = w$ et $v_2 = \epsilon$ (ou l'inverse) et la condition est trivialement vérifiée. Pour w , on prend $v_1 = v_2 = \epsilon$. \square

Exercice 1.1.2. Donner l'ensemble des facteurs du mot *abbba*.

Exercice 1.1.3. (*) Donner la borne la plus basse possible du nombre de facteurs d'un mot w . Donner un mot d'au moins 3 lettres dont le nombre de facteurs est exactement la borne donnée.

Définition 1.1.10: Sous-mot

Un mot s est un **sous-mot** du mot w ssi $w = v_0 s_0 v_1 s_1 v_2 \dots s_n v_n$ et $s = s_0 s_1 \dots s_n$, cad. ssi w est "s avec (potentiellement) des lettres en plus".

Exemple 1.1.7. On souligne les lettres originellement présentes dans le sous-mot :

- ab est un sous-mot de baab, qu'on pourrait aussi voir comme baab
- *abba* est un sous-mot de baabaabba.
- ba n'est pas un sous-mot de aaabbb (l'ordre du sous-mot doit être préservé dans le mot)

Lemme 6. $\forall w \in \Sigma^*$, ϵ et w sont des sous-mots de w .

Démonstration. Pour ϵ , il suffit de prendre $n = 0$, $s_0 = \epsilon$, $v_0 = w$ et $v_1 = \epsilon$ (ou l'inverse) et la condition est trivialement vérifiée. Pour w , on prend $n = 0$, $s_0 = w$ et $v_0 = v_1 = \epsilon$. \square

Exercice 1.1.4. Montrer que tout facteur d'un mot en est également un sous-mot. A l'inverse, montrer qu'un sous-mot n'est pas forcément un facteur.

Exercice 1.1.5. Donner toutes les façons de voir *abba* comme sous-mot de *baaabaabbaa* (cf. exemple 1.1.7).

Exercice 1.1.6. Donner l'ensemble des sous-mots de *abba*

Exercice 1.1.7. (*) Donner la borne la plus basse possible du nombre de sous-mots d'un mot w . Donner un mot dont le nombre de sous-mots est exactement la borne donnée.

Exercice 1.1.8. (*) Dans l'exercice 1.1.1, on demande le nombre exact de préfixes et suffixes d'un mot, alors que dans les exercices 1.1.3 et 1.1.7, on demande une borne, pourquoi ?

1.2 Langage

Définition 1.2.1: Langage

Un langage, c'est un ensemble de mots.

On distingue donc d'entrée les deux langages extrêmes : Σ^* , l'ensemble (infini) de tous les mots formés à partir de Σ , et \emptyset , le langage / ensemble vide, qui se caractérise comme ne contenant aucun élément.

Remarque Ne surtout pas confondre \emptyset et $\{\epsilon\}$. Le premier est un ensemble vide, contenant donc 0 élément, tandis que le second contient 1 élément, le mot *ide*.

Définition 1.2.2: Produit de langages

Le produit de deux langages L_1 et L_2 , noté $L_1.L_2$, renvoie l'ensemble des mots composés d'un mot de L_1 puis d'un de L_2 :

$$L_1.L_2 = \{w_1.w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$$

Il s'agit d'un cas particulier de produit d'ensembles (cf. définition A.2.1).

Exemple 1.2.1. Soit $L_1 = \{ab, b, \epsilon\}$ et $L_2 = \{a, b, aa\}$, on a

$$\begin{aligned} & L_1.L_2 \\ = & \{ab.a, ab.b, ab.aa, b.a, b.b, b.aa, \epsilon.a, \epsilon.b, \epsilon.aa\} \\ = & \{aba, abb, abaa, ba, bb, baa, a, b, aa\} \end{aligned}$$

Le produit de langage peut être itéré¹ :

$$\begin{aligned} L^0 &= \{\epsilon\} \\ L^{n+1} &= L^n.L \end{aligned}$$

Les langages disposent en plus d'un opérateur spécial :

Définition 1.2.3: Etoile de Kleene

Soit L un langage. On note L^* la concaténation de n'importe quel nombre de mots apparaissant dans L , cad.

$$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \dots$$

1. Concrètement, les puissances sur les langages ont le même sens que sur les nombres, avec la multiplication remplacée par la concaténation

Exemple 1.2.2. Soit $L = \{aa, b\}$, on a

$$\begin{aligned} L^* = & \{\epsilon\} \\ & \cup \{aa, b\} \\ & \cup \{aaaa, aab, baa, bb\} \\ & \cup \{aaaaaa, aaaab, aabaa, aabb, baaaa, baab, bbaa, bbb\} \\ & \cup \dots \end{aligned}$$

La question maintenant est maintenant de savoir comment on définit et parle de langages précis et plus "intermédiaires" que les deux précédents. En tout généralité, les ensembles peuvent être définis de façon **extensionnelle** ou **intensionnelle**.

Définition 1.2.4: Définition extensionnelle d'un ensemble

On **définit extensionnellement un ensemble** en en donnant la liste des éléments. L'ensemble vide se note quant à lui \emptyset .

Exemple 1.2.3. On définit par exemple l'ensemble (sans intérêt) suivant :

$$A = \{b, aca, abba\}$$

Les définitions extensionnelles ont le mérite d'être pour le moins simples, mais pas super pratiques quand il s'agit de définir des ensembles avec un nombre infini d'éléments, comme l'ensemble des mots de longueur pair.

Définition 1.2.5: Définition intensionnelle d'un ensemble

On **définit intensionnellement un ensemble** à l'aide d'une propriété que tous ses éléments satisfont. Étant donné une propriété $Q(x)$ (typiquement représentée sous la forme d'une formule logique) et un ensemble A , on note $\{x \in A \mid Q(x)\}$ l'ensemble des éléments de A qui satisfont P . Si l'ensemble A est évident dans le contexte, on s'abstiendra de le préciser.

Exemple 1.2.4. On peut définir l'ensemble des mots de longueur paire $\{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ pair}\}$.

Si les définitions intensionnelles permettent, contrairement aux extensionnelles, de dénoter des ensembles contenant une infinité de mots, elles sont avant tout un outil théorique. En effet, une propriété comme " $|w|$ paire" ne dit rien à un ordinateur en soi, et doit donc être définie formellement. Se pose alors la question d'un langage pour les propriétés.

Plusieurs logiques équipées des bonnes primitives peuvent être utilisées, mais les traductions sont rarement très agréables. Certaines propriétés nécessitent en effet de ruser contre le langage, voire sont impossibles à formaliser dans certaines logiques. Il existe heureusement un outil qui va nous aider, avec le premier problème du moins.

Chapitre 2

Expressions régulières

Les expressions régulières permettent définir de façon finie - et relativement intuitive - "la forme" des mots d'un langage, potentiellement infini. On en présentera d'abord le lexique et l'idée générale à l'aide d'exemples, puis on en définira formellement la syntaxe et la sémantique.

2.1 Lexique et idée générale

Une expression rationnelle (ou *regex*, pour *regular expression*¹) est, en gros, une *forme de mot*, écrite à l'aide de lettres et des symboles $.$, $*$ et $+$.

2.1.1 Les lettres et ϵ , la base

Les regex sont construites récursivement, en partant bien sûr des cas de base. Étant donné un alphabet Σ , ces derniers sont les différentes lettres de Σ , ainsi que ϵ . Ces regex dénotent chacune un seul mot, la lettre utilisée dans le premier cas, et le mot vide dans le second.

Exemple 2.1.1. La regex a dénote le langage $\{a\}$.

2.1.2 $.$, la concaténation

On peut heureusement concaténer des regex en utilisant à nouveau le symbole $.$. La concaténation de deux expressions rationnelles e_1 et e_2 , notée $e_1.e_2$ donc, dénote l'ensemble des mots qui peuvent se décomposer en une première partie "de e_1 " et une deuxième "de e_2 ".

Remarque En pratique, on ne notera pas les $.$ dans les regex, mais quelque chose comme $abbc$ devrait en théorie être lu comme $a.b.b.c$

Exemple 2.1.2. La regex $abca$ dénote l'ensemble $\{abca\}$.

1. On se trompera sans doute souvent en parlant d'"expression régulière"

2.1.3 *, l'itération

Le symbole * permet de dire qu'une regex peut être répétée autant de fois que voulu (y compris 0).

Exemple 2.1.3. La regex ab^*c dénote l'ensemble des mots de la forme "un a , puis une série (éventuellement vide) de b , puis un c ", c'est-à-dire $\{ac, abc, abbc, abbbc, \dots\}$

En utilisant des parenthèses, on peut appliquer * à des facteurs entiers :

Exemple 2.1.4. La regex $(aa)^*$ dénote l'ensemble des mots de la forme "une série (éventuellement vide) de deux a ", c'est-à-dire $\{\epsilon, aa, aaaa, aaaaaa, \dots\}$, ou encore les mots composés uniquement de a et de longueur paire.

On peut bien sûr utiliser plusieurs * dans une même expression. Dans ce cas, les nombres de "copies" des facteurs concernés ne sont pas liés, comme l'illustrent les exemples suivant :

Exemple 2.1.5. La regex a^*b^* dénote l'ensemble des mots de la forme "Une série (éventuellement vide) de a , puis une série (éventuellement vide) de b ", contenant notamment $\epsilon, a, b, aaab, abbbb, bb, aaa, ab, aabb$ et $aaabb$

Exemple 2.1.6. La regex $ab(bab)^*b(ca)^*b$ dénote l'ensemble des mots de la forme "ab, puis une série (éventuellement vide) de bab, puis un b , puis une série (éventuellement vide) de ca, puis un b ", contenant notamment $abbb, abbabb, abbcab$ ou $abbabbabbcab$.

Exercice 2.1.1. Donner 5 autres mots appartenant au langage dénotée par l'expression de l'exemple 2.1.6.

Exercice 2.1.2. Pourquoi le changement de formulation dans les exemples 2.1.5 et 2.1.6 par rapport aux exemples précédents ("c'est à dire $\{x, y, z\}$ " qui devient "contenant notamment x, y ou z ") ?

On peut même faire encore plus rigolo, en enchâssant les étoiles :

Exemple 2.1.7. La regex $(a^*b^*)^*$ dénote l'ensemble des mots de la forme "une série (éventuellement vide) de [(une série (éventuellement vide) de a] puis [une série (éventuellement vide) de b]", contenant notamment $\epsilon, abba; baba$ ou $abbbabba$.

Remarque Certaines regex peuvent générer des mêmes mots de plusieurs façons. Si on prend l'expression de l'exemple 2.1.7 et le mot $abbbabba$, on peut la voir comme

$$\begin{array}{c}
 \text{---} \quad \underbrace{a}_{a^1} \underbrace{bbb}_{b^3} \underbrace{a}_{a^1} \underbrace{bb}_{b^2} \underbrace{a}_{a^1} \underbrace{}_{b^0} \\
 \underbrace{\quad \quad \quad}_{a^1 b^3} \quad \underbrace{\quad \quad}_{a^1 b^2} \quad \underbrace{\quad \quad}_{a^1 b^0} \\
 \underbrace{\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad}_{(a^* b^*)^3}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{---} \quad \underbrace{\overbrace{a}^{a^1} \overbrace{b}^{b^1} \overbrace{bb}^{a^0 b^2} \overbrace{a}^{a^1} \overbrace{b}^{b^1} \overbrace{b}^{a^0 b^1} \overbrace{a}^{a^1} \overbrace{b^0}^{a^1 b^0}}_{(a^* b^*)^5} \\
\text{---} \quad \underbrace{\overbrace{a}^{a^1} \overbrace{b}^{b^1} \overbrace{a^0 b^0}^{a^0 b^1} \overbrace{b}^{a^0 b^1} \overbrace{b}^{a^0 b^1} \overbrace{a}^{a^1 b^1} \overbrace{b}^{a^0 b^1} \overbrace{b}^{a^1 b^1} \overbrace{a}^{a^1 b^0}}_{(a^* b^*)^7}
\end{array}$$

Le premier déroulement (on parlera de **dérivation**) semble bien sûr plus "naturel" et optimal que les deux autres. Ils sont pourtant tout aussi valides, et il sera utile en pratique d'éviter des expressions fortement ambiguës comme celle-ci.

2.1.4 +, la disjonction

Le symbole + permet quant à lui de signifier qu'on a le choix entre plusieurs sous-regex.

Exemple 2.1.8. La regex $aa + bb$ dénote l'ensemble $\{aa, bb\}$

Si on a par exemple $\Sigma = \{a, b, c\}$, alors $(a + b + c)$ correspond à "n'importe quelle lettre de l'alphabet". On écrira cette expression plus simplement Σ .

Exemple 2.1.9. L'expression $\Sigma\Sigma\Sigma$, ou Σ^3 , correspond à n'importe quel mot de longueur 3.

La disjonction peut bien sûr se combiner avec $*$:

Exemple 2.1.10. La regex $(aa)^* + (bb)^*$ dénote l'ensemble des mots composés uniquement de a et de longueur paire, ou uniquement de b et de longueur également paire, par exemple ϵ , aa , bb , $aaaa$ ou $bbbbbb$. La dérivation du dernier mot serait alors de la forme

$$\begin{array}{c}
\underbrace{bb \ bb \ bb \ bb}_{(bb)^4} \\
\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{(bb)^*} \\
\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{(aa)^* + (bb)^*}
\end{array}$$

Exemple 2.1.11. La regex $(aa + bb)^*$ dénote l'ensemble des mots de la forme "une série (éventuellement vide) de aa et bb ", par exemple $aabb$, $aaaaaaaaaaaa$ ou $bbaabbbbbbaa$. La dérivation du dernier mot ressemblerait alors à

$$\underbrace{\overbrace{aa+bb}^{bb} \ \overbrace{aa+bb}^{aa} \ \overbrace{aa+bb}^{bb} \ \overbrace{aa+bb}^{bb} \ \overbrace{aa+bb}^{bb} \ \overbrace{aa+bb}^{aa}}_{(aa+bb)^6}$$

Exercice 2.1.3. Donner un mot acceptant deux dérivations avec la regex de l'exemple 2.1.10 (justifier en donnant les dérivations). Existe-t-il un autre mot admettant plusieurs dérivations ?

Exercice 2.1.4. Existe-t-il un mot acceptant plusieurs dérivations pour la regex de l'exemple 2.1.11 ?

Exercice 2.1.5. Donner un mot accepté par la regex de l'exemple 2.1.11 mais pas celle de l'exemple 2.1.10. Est-il possible de trouver un mot qui, à l'inverse, est accepté par la deuxième mais pas la première ?

Exercice 2.1.6. (*) Exprimer, en langue naturelle et de façon concise, le langage dénoté par la regex de l'exemple 2.1.7. Traduire ensuite ce langage en une regex non-ambiguë, c'est-à-dire où il n'y aura qu'une dérivation pour chaque mot.

Notez que dans l'exemple 2.1.10, on choisit d'abord de composer le mot de a ou de b , puis la longueur. À l'inverse, on choisit dans la regex de l'exemple 2.1.11 la longueur, puis a ou b pour chaque "morceau", et ce, individuellement. Pour mieux comprendre cette différence, il faut s'intéresser formellement à la mécanique des regex, qui se décompose bien évidemment entre syntaxe et sémantique.

2.2 Syntaxe

Les expressions rationnelles ont, comme à peu près tout langage, une structure. Elles sont définies à l'aide de 5 règles, dont 3 récursives, qui correspondent au lexique décrit précédemment :

$$e ::= \begin{array}{l} \epsilon \\ a \in \Sigma \\ e_1.e_2 \\ e_1 + e_2 \\ e_1^* \end{array}$$

FIGURE 2.1 – Syntaxe des expression régulières

La figure 2.1 se lit "une expression rationnelle e est

- soit** le symbole ϵ
- soit** une lettre appartenant à l'alphabet Σ
- soit** une expression rationnelle e_1 (définie à l'aide des mêmes règles), suivie de $.$, puis d'une expression rationnelle e_2
- soit** une expression rationnelle e_1 , suivie de $+$, puis d'une expression rationnelle e_2
- soit** une expression rationnelle e_1 auréolée d'un $*$

et rien d'autre".

Ces règles de dérivation nous permettent de *parser* des expressions rationnelles. En notant $t()$ la fonction qui prend une regex et renvoie son arbre syntaxique, on peut la définir à l'aide des 5 règles de la figure 2.1 :

- $t(\epsilon)$ renvoie une feuille annotée par ϵ .
- $t(a)$ renvoie une feuille annotée par a .
- $t(e_1.e_2)$ renvoie un noeud $.$ dont les descendants sont les arbres de e_1 et e_2 , comme sur la figure 2.2a
- $t(e_1 + e_2)$ renvoie un noeud $+$ dont les descendants sont les arbres de e_1 et e_2 , comme sur la figure 2.2b

— $t(e_1^*)$ renvoie un noeud $*$ avec un seul descendant, l'arbre de e_1 , comme sur la figure 2.2c



FIGURE 2.2 – Analyse syntaxique récursive de *regex*

Les règles décrites ci-avant ne disent pas comment parser une expression comme $a.b + c$. En effet, rien ne dit si elle doit être lue comme $(ab) + c$ ou $a.(b + c)$. Pour éviter d'avoir à mettre des parenthèses absolument partout, on va devoir définir les priorités entre les différentes opérations :

$$+ < . < *$$

FIGURE 2.3 – Priorités pour les opérateurs d'expressions rationnelles

Concrètement, $+ < .$ veut dire qu'une expression comme $a.b + c$ doit être interprétée comme $(a.b) + c$ ². De même, $a.b^*$ se lit $a.(b^*)$, et $a + b^*$ comme $a + (b^*)$.

Maintenant qu'on a les règles de dérivation et les priorités associées, on peut commencer à jouer avec quelques exemples.

Exemple 2.2.1. L'expression rationnelle $(aa)^* + (bb)^*$ peut être parsée comme



FIGURE 2.4 – Analyse syntaxique de $(aa)^* + (bb)^*$

On remarquera bien sûr l'absence habile dans l'exemple 2.2.1 de formes encore problématiques : $a + b + c$ et $a.b.c$. En effet, rien ne nous dit pour l'instant auquel des arbres de la figure 2.5 la première regex correspond.

Comme on le verra dans la partie sémantique, les symboles $+$ et $.$ sont **associatifs**, ce qui veut dire que, pour toutes expressions e_1 , e_2 et e_3 , $(e_1 + e_2) + e_3$ et $e_1 + (e_2 + e_3)$ ont le même sens³, et pareil avec la concaténation. Malgré une méfiance justifiée des arbres ternaires et plus, on se permettra donc d'écrire des expressions ambiguës comme $e_1 + e_2 + e_3$ ou $e_1e_2e_3$, et de les parser comme dans la figure 2.6

2. De la même façon que $a \times b + c$ se comprend comme $(a \times b) + c$
 3. Notez qu'en arithmétique, $+$ et \times sont également associatives



FIGURE 2.5 – Ambiguïté syntaxique de $a + b + c$

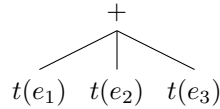


FIGURE 2.6 – Ambiguïté syntaxique assumée de $a + b + c$

Exemple 2.2.2. *L'expression rationnelle $(aa(a + b)^*bb)^*$ s'analyse comme*



On a pour l'instant uniquement défini le lexique et la syntaxe des expressions régulières, mais les beaux arbres qu'on est désormais en mesure de construire n'ont en soi aucun sens, et donc aucun intérêt. Il s'agit donc désormais d'en définir une sémantique.

2.3 Sémantique

Avant de regarder la tuyauterie d'une fonction, il s'agit d'en définir le type. La sémantique des expressions rationnelles, notée $\llbracket e \rrbracket$, prend en argument une expression et renvoie un langage, donc un ensemble de mots. Comme pour le parsing, il suffit de définir la sémantique sur les 5 constructeurs des expressions rationnelles pour pouvoir toutes les traiter :

2.3.1 Les cas de base

Ici, pas de surprise, $\llbracket \epsilon \rrbracket = \{\epsilon\}$ et $\llbracket a \rrbracket = \{a\}$.

2.3.2 Sémantique de la concaténation

La sémantique de la concaténation repose sur un produit d'ensembles avec la concaténation (cf. définition A.2.1). Formellement, on a

$$\left[\begin{array}{c} \cdot \\ \wedge \\ e_1 \quad e_2 \end{array} \right] = \llbracket e_1 \rrbracket \cdot \llbracket e_2 \rrbracket = \{u.v \mid u \in \llbracket e_1 \rrbracket \wedge v \in \llbracket e_2 \rrbracket\} = \bigcup_{\substack{u \in \llbracket e_1 \rrbracket \\ v \in \llbracket e_2 \rrbracket}} u.v$$

Concrètement, ça veut dire que la sémantique de la concaténation de deux regex est la concaténation des sémantiques de e_1 et e_2 , c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons d'un mot de $\llbracket e_1 \rrbracket$ concaténé à un mot de $\llbracket e_2 \rrbracket$. La notation $\bigcup_{\substack{u \in \llbracket e_1 \rrbracket \\ v \in \llbracket e_2 \rrbracket}} u.v$ est analogue une double boucle sur les éléments de $\llbracket e_1 \rrbracket$ et $\llbracket e_2 \rrbracket$, comme dans le pseudocode python suivant :

```
s = set()
for u in e1:
    for v in e2:
        s.add(u.v)
return s
```

Exemple 2.3.1. En appliquant les règles de la concaténation et des lettres vues précédemment, la sémantique de l'expression ab est

$$\left[\begin{array}{c} \cdot \\ \wedge \\ a \quad b \end{array} \right] = \bigcup_{\substack{u \in \llbracket a \rrbracket \\ v \in \llbracket b \rrbracket}} u.v = \bigcup_{\substack{u \in \{a\} \\ v \in \{b\}}} u.v = \{a.b\} = \{ab\}$$

L'exemple n'est pas renversant, mais permet d'illustrer l'aspect purement systémique et récursif de la sémantique. Pour des exemples plus intéressants, on va avoir besoin d'ajouter des constructeurs à la sémantique.

2.3.3 Sémantique de la disjonction

Formellement, on a

$$\left[\begin{array}{c} + \\ \wedge \\ e_1 \quad e_2 \end{array} \right] = \llbracket e_1 \rrbracket \cup \llbracket e_2 \rrbracket$$

Concrètement, ça veut dire que la sémantique de la disjonction de deux regex est l'union des sémantiques de e_1 et e_2 , c'est-à-dire l'ensemble des mots qui apparaissent dans $\llbracket e_1 \rrbracket$ ou (inclusif) $\llbracket e_2 \rrbracket$.

Remarque A partir d'ici et pour des raisons de mise en page, on ne mettra pas forcément tout sous forme d'arbres dans les exemples, et on comptera sur la capacité du lecteur ou de la lectrice à *parser* automatiquement toute expression rationnelle qu'il ou elle lit. Ne vous y trompez pas cependant : l'analyse sémantique s'opère bien sur un arbre plutôt que sur une expression "plate".

Exemple 2.3.2. En appliquant les règles de la concaténation et des lettres vues précédemment, la sémantique de l'expression $a(b + c)$ est

$$\left[\begin{array}{c} \cdot \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mathbf{a} \quad + \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \end{array} \right] = \bigcup_{\substack{u \in \llbracket \mathbf{a} \rrbracket \\ v \in \llbracket \mathbf{b} + \mathbf{c} \rrbracket}} u.v = \bigcup_{\substack{u \in \{\mathbf{a}\} \\ v \in \llbracket \mathbf{b} \rrbracket \cup \llbracket \mathbf{c} \rrbracket}} u.v = \bigcup_{\substack{u \in \{\mathbf{a}\} \\ v \in \{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}}} u.v = \{\mathbf{a.b}, \mathbf{a.c}\} = \{\mathbf{ab}, \mathbf{ac}\}$$

Exemple 2.3.3. En appliquant les règles de la concaténation et des lettres vues précédemment, la sémantique de l'expression $(a + b)(b + a)$ est

$$\left[\begin{array}{c} \cdot \\ \swarrow \quad \searrow \\ + \quad + \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{a} \end{array} \right] = \bigcup_{\substack{u \in \llbracket \mathbf{a} + \mathbf{b} \rrbracket \\ v \in \llbracket \mathbf{b} + \mathbf{a} \rrbracket}} u.v = \bigcup_{\substack{u \in \llbracket \mathbf{a} \rrbracket \cup \llbracket \mathbf{b} \rrbracket \\ v \in \llbracket \mathbf{b} \rrbracket \cup \llbracket \mathbf{a} \rrbracket}} u.v = \bigcup_{\substack{u \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \\ v \in \{\mathbf{b}, \mathbf{a}\}}} u.v = \{\mathbf{a.b}, \mathbf{a.a}, \mathbf{b.b}, \mathbf{b.a}\} = \{\mathbf{ab}, \mathbf{aa}, \mathbf{bb}, \mathbf{ba}\}$$

Il ne nous manque maintenant que le plus ésotérique des constructeurs.

2.3.4 Sémantique de l'itération

Formellement, on a

$$\llbracket e^* \rrbracket = \llbracket e \rrbracket^* = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \llbracket e \rrbracket^n = \{\llbracket e \rrbracket^0, \llbracket e \rrbracket^1, \llbracket e \rrbracket^2, \llbracket e \rrbracket^3 \dots\}$$

Concrètement, on fait l'union de $\llbracket e \rrbracket^n$ pour tous les entiers n , $\llbracket e \rrbracket^n$ étant n mots de $\llbracket e \rrbracket$ concaténés.

Exemple 2.3.4. La sémantique de l'expression $a(aa + bb)^*a$ est

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \cdot \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \mathbf{a} \quad * \quad \mathbf{a} \\ \downarrow \\ + \\ \swarrow \quad \searrow \\ \cdot \quad \cdot \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \mathbf{a} \quad \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{b} \end{array} \right] &= \llbracket \mathbf{a} \rrbracket . \llbracket (\mathbf{a} \mathbf{a} + \mathbf{b} \mathbf{b})^* \rrbracket . \llbracket \mathbf{a} \rrbracket \\ &= \{\mathbf{a}\} . \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \llbracket \mathbf{a} \mathbf{a} + \mathbf{b} \mathbf{b} \rrbracket^n . \{\mathbf{a}\} \\ &= \{\mathbf{a}\} . \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{\mathbf{a} \mathbf{a}, \mathbf{b} \mathbf{b}\}^n . \{\mathbf{a}\} \\ &= \{\mathbf{a} . \epsilon . \mathbf{a}, \mathbf{a} . \mathbf{a} \mathbf{a} . \mathbf{a}, \mathbf{a} . \mathbf{b} \mathbf{b} . \mathbf{a}, \mathbf{a} . ((\mathbf{a} \mathbf{a}) . (\mathbf{a} \mathbf{a})) . \mathbf{a}, \mathbf{a} . ((\mathbf{a} \mathbf{a}) . (\mathbf{b} \mathbf{b})) . \mathbf{a}, \mathbf{a} . ((\mathbf{b} \mathbf{b}) . (\mathbf{a} \mathbf{a})) . \mathbf{a}, \mathbf{a} . ((\mathbf{b} \mathbf{b}) . (\mathbf{b} \mathbf{b})) . \mathbf{a}, \dots\} \\ &= \{\mathbf{aa}, \mathbf{aaaa}, \mathbf{abba}, \mathbf{aaaaaa}, \mathbf{aaabba}, \mathbf{abbaaa}, \mathbf{abbbba}, \dots\} \end{aligned}$$

2.4 Mise en application

On a abordé les expressions régulières sous un angle très théorique, mais on leur trouve bien sûr des applications concrètes.

2.4.1 Quelques astuces

On présente d’abord, sous forme d’exercices (corrigés dans un autre document), quelques astuces classiques, susceptibles d’aider les TAListes dans leurs futures oeuvres.

Exercice 2.4.1. Donner une *regex* pour les mots qui commencent par *a*.

Exercice 2.4.2. Donner une *regex* pour les mots qui finissent par *b*.

Exercice 2.4.3. Donner une *regex* pour les mots qui commencent par *a* finissent par *b*.

Exercice 2.4.4. Donner une *regex* pour les mots de longueur paire.

Exercice 2.4.5. Donner une *regex* pour les mots de longueur impaire qui contiennent au moins 4 lettres.

Exercice 2.4.6. Donner une *regex* pour les mots de longueur impaire, qui contiennent au moins 4 lettres, commencent par *a* et finissent par *b*.

2.4.2 Syntaxe en pratique

Les expressions régulières dans Unix, Python & cie utilisent une syntaxe différente, et surtout plus étendue que celle que l’on vient d’étudier. Cela est dû aux besoins différents que l’on a entre la théorie et la pratique.

Dans la théorie, on veut définir nos objets de façon minimale, c’est-à-dire avec le moins de symboles et de règles possible, afin d’en simplifier l’étude. Par exemple, le peu de règles permet une définition légère de la sémantique formelle des *regex*. De la même façon, toute preuve à leur propos en sera tout autant simplifiée :

Théorème 1. $\forall e, \exists w \in \llbracket e \rrbracket$, cad. que toute expression rationnelle dénote au moins un mot.

Démonstration. On procède par induction structurelle sur l’expression rationnelle *e* :

- Si $e = \epsilon$, alors $\llbracket e \rrbracket = \{\epsilon\}$, qui contient bien un mot (ϵ donc)
- Si $e = a$, alors $\llbracket e \rrbracket = \{a\}$, qui contient bien un mot (*a*)
- Si $e = e_1 + e_2$, alors $\llbracket e \rrbracket = \llbracket e_1 \rrbracket \cup \llbracket e_2 \rrbracket$. Par hypothèse d’induction, $\llbracket e_1 \rrbracket$ contient un mot w_1 et $\llbracket e_2 \rrbracket$ contient w_2 . $\llbracket e \rrbracket$ contient donc non pas un, mais au moins deux mots.
- Si $e = e_1.e_2$, alors $\llbracket e \rrbracket = \llbracket e_1 \rrbracket.\llbracket e_2 \rrbracket$. Par hypothèse d’induction, $\llbracket e_1 \rrbracket$ contient un mot w_1 et $\llbracket e_2 \rrbracket$ contient w_2 . $\llbracket e \rrbracket$ contient donc un mot, w_1w_2 .
- Si $e = e_1^*$, alors $\llbracket e \rrbracket$ contient ϵ .

□

Dans la pratique, on préfère ne pas avoir à réinventer la roue chaque matin, la syntaxe des *regex* y est donc étendue. Ces extensions ne changent rien au fond, dans le sens où elles n’ajoutent pas en expressivité. En effet, les nouveaux symboles peuvent tous être codés avec ceux de la syntaxe minimale :

- $e?$, ou “*e* une ou zéro fois”, peut être codée comme $(e + \epsilon)$

- e^+ , ou "e au moins une fois", peut être codée comme ee^*
remarque On trouve régulièrement cette notation dans la littérature académique sous la forme e^+ . Le $e_1 + e_2$ qu'on a vu est lui, pour le coup, écrit $e_1|e_2$ en pratique.
- $e\{n\}$, ou "e exactement n fois" peut être simplement traduite en $\underbrace{eee\dots e}_{n \text{ fois}}$
- $e\{n, \}$, ou "e au moins n fois" peut être simplement traduite en $\underbrace{eee\dots e}_{n \text{ fois}}e^*$
- $e\{n, m\}$, ou "e entre n et m fois" peut se traduire $\underbrace{eee\dots e}_{n \text{ fois}}\underbrace{(e + \epsilon)\dots(e + \epsilon)}_{m - n \text{ fois}}$

Les traductions proposées ici ne correspondent pas forcément à ce qui se passe concrètement dans les bibliothèques de *regex* des différents langages de programmation (la dernière en particulier semble très ambiguë, et donc inefficace). L'objectif est seulement de montrer que les ajouts à la syntaxe n'ont pas modifié l'expressivité, et qu'il s'agit seulement de ce qu'on appelle du **sucre syntaxique**.

2.4.3 Calcul de l'appartenance

Soit l'expression rationnelle $e = ((\Sigma^*baaba^+)^*baa(abba)^+ba(bb)^*a)^*$, il n'est (normalement) pas totalement évident de déterminer automatiquement si un mot donné appartient à sa sémantique (on pourra se convaincre en essayant à la main avec par exemple *baabbbaaabaabbbaaa*). Or, pour mettre en application les expressions rationnelles⁴, on va avoir besoin d'un tel algorithme. On pourrait par exemple instancier e de toutes les façons possibles en bornant les étoiles par la longueur du mot donné, mais la complexité d'une telle procédure n'est pas réaliste. Un algorithme plus raisonnable va nous être fourni via les **automates finis**.

4. Notamment pour en repérer des occurrences dans du texte

Chapitre 3

Automates finis

Les automates forment un langage de programmation un peu particulier, en ce qu'il est très visuel (chaque programme est un graphe annoté, ou plus prosaïquement des ronds et des flèches) et que tout programme a le même type : un mot en entrée, un booléen en sortie. Un automate définit donc un langage en donnant un moyen automatique de déterminer si n'importe quel mot donné en fait partie ou non¹.

Les automates se divisent en de nombreuses sous-catégories, dont certaines ramifications seront explorées dans ce cours. On verra d'abord le fonctionnement général des automates finis déterministes (3.1) et non-déterministes (3.2), en allant à chaque fois du général au technique. On verra ensuite des algorithmes pour transformer (3.3) des automates. On étudiera enfin les combinaisons d'automates, et donc les propriétés de clôture des langages qu'ils définissent (3.5).

3.1 Automates finis déterministes

On introduit les Automates finis déterministes, noté *AFD* (ou *DFA*, pour *deterministic finite automaton*²), avant d'en étudier la formalisation.

3.1.1 Principe général

Imaginez que vous développiez un jeu d'infiltration. Dans ce jeu, le comportement des méchants gardes ressemblerait sans doute à la figure 3.1.

Ce qu'est censé traduire ce graphe, c'est qu'un garde commence (la \rightarrow sur sa gauche) dans un **état** qui est le dodo, et que différents événements (un bruit, un ennemi trouvé ou non, ou encore tué) vont le faire changer d'**état**. Un AFD fonctionne sur un principe similaire³, mais où les transitions sont déclenchées par la lecture de lettres : un *AFD*, en partant d'un état initial, lit le mot donné en argument lettre par lettre et, à chaque lecture, change d'état en fonction de la lettre.

1. En ce sens, les automates sont des [fonctions caractéristiques](#), qui sont aux ensembles ce que les videurs sont aux boîtes de nuit.

2. Notez qu'on parle d'*automaton* au singulier et d'*automata* au pluriel

3. Les AFD sont en fait des cas particuliers de Machines à états finis, [qui sont effectivement employées dans la conception de jeux vidéo](#)



FIGURE 3.1 – Comportement des gardes d’un jeu imaginaire

Exemple 3.1.1. L’automate de la figure 3.2 contient trois états, appelés 0, 1 et 2. La lecture de tout mot commence en 0, appelé **état initial**. Si on lui passe le mot *abbaaba* en argument, la première lettre (*a*) va nous faire passer de l’état 0 à 1. La deuxième lettre (*b*) nous refait passer en 0. La troisième (*b*) nous y fait rester. Les deux lettres suivantes nous font ensuite passer en 1 puis en 2. Les deux dernières lectures nous font rester en 2 (la virgule est à comprendre comme une disjonction, cad. comme un “ou”).



FIGURE 3.2 – Un premier automate

Comme dit en introduction, un automate accepte ou rejette tout mot donné. Certains états, notés par une douche couche, sont appelés états finaux (ou terminaux). Un mot est accepté par un automate si et seulement si le parcours de ce mot dans l’automate se termine sur un état final.

Exemple 3.1.2. L’automate de la figure 3.2 accepte le mot *abbaaba*, puisqu’il nous fait passer de l’état initial 0 à 2, qui est un état final. Il n’accepte en revanche pas les mots *bbaba* (état 1), *babbab* ou ϵ (état 0 tous les deux).

Exercice 3.1.1. Les mots *abbaba*, *ababbaab* et *abba* sont-ils acceptés par l’automate de la figure 3.2 ?

Exercice 3.1.2. Quel est le **langage reconnu**, cad. l’ensemble des mots acceptés, par l’automate de la figure 3.2 ? Donner la réponse en français et sous forme d’expression rationnelle.

Remarque Un automate ne contient pas toujours une transition pour chaque couple d’état / lettre, auquel cas il est dit **incomplet**. Si un automate ne contient pas de chemin correspondant à un mot, ce dernier est rejeté.

Exemple 3.1.3. L'automate de la figure 3.3 rejette le mot *aba*, car il n'y a pas de transition partant de l'état 1 pour la lettre *b*.

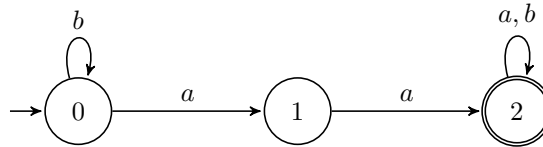


FIGURE 3.3 – Un automate incomplet

Exercice 3.1.3. Les mots *bbbaababbaaba*, *bbabaab* et *baaaaaab* sont-ils acceptés par l'automate de la figure 3.3 ?

Exercice 3.1.4. Quel est le langage reconnu par l'automate de la figure 3.3 ? Donner la réponse en français et sous forme d'expression rationnelle.

Il nous semble important d'insister sur le point suivant : de la même façon qu'un programme devrait la traduction d'une logique sous-jacente plutôt qu'un bidouaille fait à la va-vite, les états d'un automate ont un sens. Avant d'écrire un automate, il convient donc de réfléchir quelles sont les informations à retenir au cours de la lecture du mot. Si la bonne réponse est trouvée, le reste de l'automate devrait s'écrire seul.

Exemple 3.1.4. On veut écrire un automate reconnaissant le langage $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ pair et } |w|_b \text{ impair}\}$, cad. l'ensemble des mots avec un nombre pair de *a* et impairs de *b*⁴.

Il n'est pas question de compter les *a* et les *b* comme on pourrait naïvement l'imaginer, non seulement puisqu'il faut se contenter d'un nombre fini d'états, mais aussi parce que c'est beaucoup plus d'information que nécessaire. Les seules données qui nous intéressent sont en effet la parité du nombre de *a* et du nombre de *b* du mot donné : a^2b comme $a^{26}b^{131}$ sont équivalents dans leur appartenance à L .

Le nombre de *a* et de *b* étant tous les deux pairs ou impairs, on a 4 possibilités. Nos états s'appelleront *PP* (nombre de *a* pair et nombre de *b* pair), *PI* (*a* pair et *b* impair), *IP* et *II*. La définition de L nous dit immédiatement que seul *PI* devrait être terminal. L'état initial devrait être celui qui correspond à ϵ , cad. *PP*.

Les transitions s'écrivent naturellement : en partant de *PP*, la lecture d'un *a* change la parité du nombre de *a* mais pas celle du nombre de *b*, et nous emmène donc vers *IP*, tandis que *b* pointe vers *PI*, et ainsi de suite. S'il y a d'autres lettres dans l'alphabet, elles devraient faire des boucles, puisqu'elles ne changent rien aux parités qui nous intéressent.

Au final, on obtient l'automate suivant :

4. On conseillera tout d'abord au lecteur ou à la lectrice de tenter lui/elle-même l'exercice, afin de mesurer la pertinence de l'approche ici présentée



Exercice 3.1.5. (**) En reprenant l'exemple 3.1.4, montrer que $\forall w, w \in L \leftrightarrow$ l'automate accepte w . Vous pouvez procéder par induction sur w , en utilisant un objectif un peu plus précis que celui fourni.

Dans la série d'exercices qui suit, on utilisera comme alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Exercice 3.1.6. Donner un automate qui reconnaît le langage $\{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq 3\}$.

Exercice 3.1.7. Donner un automate pour les mots qui commencent par a .

Exercice 3.1.8. Donner un automate pour les mots qui finissent par b .

Exercice 3.1.9. Donner un automate pour les mots qui commencent par a finissent par b .

Exercice 3.1.10. Donner un automate pour les mots de longueur paire.

Exercice 3.1.11. Donner un automate pour les mots de longueur impaire qui contiennent au moins 4 lettres.

Exercice 3.1.12. Donner un automate pour les mots de longueur impaire, qui contiennent au moins 4 lettres, commencent par a et finissent par b .

3.1.2 Formalisation et implémentation

Un automate fini déterministe est un 5-uplet (cad. un "paquet" qui contient 5 éléments ordonnés)

$$\langle Q, \Sigma, q_0, F, \delta \rangle$$

avec

Q ensemble fini d'états

Σ l'alphabet

q_0 l'état initial

$F \subseteq Q$, les états terminaux

δ fonction partielle⁵ de $Q \times \Sigma$ dans Q

La fonction δ est alors *liftée* aux mots⁶ pour obtenir la fonction $\delta^* : (Q \times \Sigma^*) \rightarrow Q$ définie de la façon suivante :

- $\delta^*(q, \epsilon) = q$
- $\delta^*(q, a.w) = \delta^*(\delta(q, a), w)$ (a est une lettre et w un mot, éventuellement vide)

Plus prosaïquement, la fonction δ^* applique δ sur w , lettre par lettre, de la gauche vers la droite. Dans ce cadre, on dit qu'un mot w est **reconnu** (ou accepté) par l'automate ssi. $\delta^*(q_0, w) \in F$. Dit encore autrement, un mot est accepté ssi en partant de l'état initial de l'automate et en suivant les transitions correspondant aux lettres successives du mot on finit dans un état terminal.

La définition de δ^* donne quasiment directement une implémentation de la reconnaissance via automate fini déterministe :

```
state = q_0
for c in w:
    state = delta(state, c)
return (state in F)
```

FIGURE 3.4 – Reconnaissance par un AFD

Exemple 3.1.5. L'automate de la figure 3.2 se formalise de la façon suivante :

- $Q = \{0, 1, 2\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $q_0 = 0$
- $F = \{2\}$
- $\delta(0, a) = 1; \delta(0, b) = 0; \delta(1, a) = 2; \delta(1, b) = 0; \delta(2, a) = 2; \delta(2, b) = 2$

On peut vérifier qu'il accepte bien le mot *abbaaba* (lecture comme une BD) :

$$\begin{aligned}
 \delta^*(0, abbaaba) &= \delta^*(\delta(0, a), bbaaba) &= \delta^*(1, bbaaba) \\
 &= \delta^*(\delta(1, b), baaba) &= \delta^*(0, baaba) \\
 &= \delta^*(\delta(0, b), aaba) &= \delta^*(0, aaba) \\
 &= \delta^*(\delta(0, a), aba) &= \delta^*(1, aba) \\
 &= \delta^*(\delta(1, a), ba) &= \delta^*(2, ba) \\
 &= \delta^*(\delta(2, b), a) &= \delta^*(2, a) \\
 &= \delta^*(\delta(2, a), \epsilon) &= \delta^*(2, \epsilon) \\
 &= 2 \in F
 \end{aligned}$$

Exercice 3.1.13. Donner la formalisation de l'automate de l'exemple 3.1.4 et vérifier qu'il accepte le mot *aababba*.

On a introduit en 2.4.3 l'expression rationnelle $e = ((\Sigma^*baaba^+)^*baa(abba)^+ba(bb)^*a)^*$, qu'on était censé traduire en programme via les automates finis. Or, la traduction en AFD n'est à

5. Une fonction partielle est une fonction qui n'attribue pas forcément une image à tout argument. Dans le cas d'un automate complet, la fonction de transition est donc une fonction totale.

6. On dit qu'une fonction est *liftée* lorsqu'on "soulève" le type d'un ou plusieurs de ses arguments, pour qu'elle s'applique par exemple à des listes ou des ensembles. Typiquement, si on a une fonction f de type $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, alors sa version *liftée* aux listes, étant donnée une liste $[a_1, \dots, a_n]$, renverra $[f(a_1), \dots, f(a_n)]$.

priori pas si évidente que ça (on conseille à nouveau d'essayer pour se rendre compte de la difficulté), du fait du haut niveau de non-déterminisme dans la *regex*. On va donc avoir besoin d'un modèle un peu plus permissif.

3.2 Automates finis non-déterministes

Les automates finis qu'on a vus jusqu'ici sont déterministes, en ce qu'un automate admet au maximum une seule transition par lettre, et donc que tout mot n'a lui-même pas plus d'un chemin. On va ici voir une nouvelle classe d'automates, les automates finis non-déterministes (AFND, ou *NFA* pour *non-deterministic finite automaton/a*), qui vont justement nous libérer de cette contrainte.

3.2.1 Principe général

Le non-déterminisme se manifeste de trois façons : les ϵ -transitions, qui sont des transitions "gratuites", la possibilité d'avoir plusieurs transitions pour le même couple état \times lettre, et celle d'avoir plusieurs états initiaux.

Les ϵ -transitions sont présentées et illustrées dans le premier DM. Ce dernier présente notamment un algorithme permettant de les éliminer, cad. qui prend en entrée un automate et en génère un acceptant le même langage sans ϵ -transitions. Les ϵ -transitions sont donc une commodité qu'on peut au choix ignorer ou utiliser. Pour ne pas alourdir le présent document, on l'y ignorera, à l'exception des sous-sections 3.5.2 et 3.5.3, significativement simplifiées par l'utilisation d' ϵ -transitions.

Concentrons nous sur les choix de transitions et d'états initiaux. On peut maintenant avoir dans un automate plusieurs chemins pour un même mot, chemins qui vont chacun mener ou non à un état terminal. On accepte tout mot qui mène à un état terminal via au moins un chemin.

Exemple 3.2.1. *Le langage des mots qui contiennent le facteur aba, dénoté par la regex $\Sigma^*aba\Sigma^*$, est reconnu par l'automate suivant :*



Si on regarde par exemple le mot *aabab*, il dispose de 3 parcours dans l'automate :

- $0 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{b} 0 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{b} 0$
- $0 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{b} 0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 2$
- $0 \xrightarrow{a} 0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{b} 3$

On peut aussi passer dans l'état 1 avec le premier *a*, mais il sera alors impossible de lire l'entièreté du mot (le deuxième *a* n'aura pas de transition).

Des trois chemins possibles, un seul mène à un état terminal. C'est néanmoins suffisant pour que le mot soit accepté. A l'inverse, le mot *abbaabbaaabba*, bien que pouvant faire de très nombreux chemins dans l'automate, n'est pas accepté car aucun ne finit en 3.

Un tel automate a l'avantage de reconnaître très clairement le langage $\Sigma^*aba\Sigma^*$. On peut par exemple le comparer à sa version déterministe qui, malgré la simplicité du langage, perd déjà pas mal en lisibilité :



La grande différence entre les deux automates est que le premier utilise le non-déterminisme pour être une transcription directe de la *regex*, là où le deuxième se bat avec le déterminisme pour reconnaître le langage de façon presque "accidentelle". En un sens, on est passé du domaine de la **spécification** à l'**implémentation**. La mauvaise nouvelle, c'est que les automates non-déterministes sont plus compliqués à mettre en pratique, du fait - ô surprise - du non-déterminisme, qui impose de tester énormément de chemins. La bonne nouvelle, c'est que, comme on va le voir en 3.3.2, on peut traduire automatiquement les automates non-déterministes en automates déterministes équivalents⁷, avec bien sûr un certain coût. Mais avant de plonger dans ces histoires, on va voir encore quelques exemples d'AFND, et en étudier la formalisation.

Exemple 3.2.2. On veut reconnaître le langage des mots qui contiennent le facteur *aba* ou (inclusif) *bab*. On peut exploiter la possibilité d'avoir plusieurs états initiaux, et tout simplement produire l'automate suivant :



On notera bien sûr la symétrie entre l'automate ci-dessus, et la regex $\Sigma^*aba\Sigma^* + \Sigma^*bab\Sigma^*$.

On peut aussi tenter d'être un poil plus malin, se rendre compte que les états 0 et 4 ont le même rôle, que les états 3 et 7 aussi, et donc qu'on peut réduire le nombre d'états en les fusionnant :

7. Pour se rendre compte du miracle que c'est, on peut comparer aux langages de programmation classiques. Ce n'est pas parce qu'on a spécifié formellement, par exemple, le tri d'une liste (ce qui est déjà surprenamment non-trivial) qu'on peut automatiquement obtenir un programme réalisant cette tâche. Même une fois qu'on a codé un tel programme, selon l'algorithme chopisi, il n'est pas forcément aisé de se convaincre qu'il est correct, et encore moins de le prouver formellement. Il est donc assez *cool* que tout ce passage de la spécification (la *regex*) à une représentation intermédiaire (l'automate non-déterministe) à l'implémentation (le déterministe) soit automatique et sûr.



Cette notion d'états équivalents et fusionnables sera formalisée en 3.3.3. On remarquera (à nouveau) la symétrie entre cet automate et la regex $\Sigma^*(aba + bab)\Sigma^*$.

Exercice 3.2.1. Donner une regex et un automate fini pour le langage $L = \{w \mid aba \text{ est un sous-mot de } w\}$.

Exercice 3.2.2. Donner une regex et un automate fini pour le langage des mots qui commencent par ab et finissent par ba .

3.2.2 Formalisation et implémentation

Les automates non-déterministes sont une généralisation⁸ des automates déterministes, où

- L'état initial q_0 est remplacé par un ensemble d'états initiaux $I \subseteq Q$
- La fonction de transition δ change de type, en passant de $(Q \times \Sigma) \rightarrow Q$ à $(Q \times \Sigma) \rightarrow P(Q)$ ⁹.
Dit autrement, étant donné un état $q \in Q$ et une lettre $c \in \Sigma$, on a (potentiellement) accès à un ensemble d'états plutôt qu'à un seul.

Puisqu'on a changé le type δ , on doit également changer son *lift* δ^* , qui renvoie maintenant un ensemble d'états et est donc de type $(Q \times \Sigma^*) \rightarrow P(Q)$:

- $\delta^*(q, \epsilon) = \{q\}$
- $\delta^*(q, a.w) = \bigcup_{q' \in \delta(q, a)} \delta^*(q', w)$

Il nous reste à vérifier que l'ensemble d'états atteignables contient un état terminal. Un AFND accepte donc un mot w ssi. $\exists q \in ((\bigcup_{q_i \in I} \delta^*(q_i, w)) \cap F)$.

Pour ce qui est de la mise en application de δ^* , on est cette fois face à un parcours d'arbres (l'ensemble des chemins) plutôt que d'une liste, comme dans la version déterministe. On adapte donc l'annexe A.3.1 :

8. En effet, un AFD peut-être vu comme un AFND qui se trouve être ... déterministe. Rien dans la définition d'un AFND n'impose que le non-déterminisme permis par le changement de type de δ soit exploité, et on peut donc très bien avoir $|\delta(q, c)| \leq 1 \ \forall q \in Q \text{ et } \forall c \in \Sigma$.

9. Pour rappel, $P(Q)$ est l'ensemble des sous-parties de Q , cad. l'ensemble des ensembles d'états, cf A.2.2.

```

# fonction ndfa_acc(auto,w)
# renvoie true ssi. l automate auto accepte le mot w
todo = stack()
// On va empiler des couples etat x mot qu il faut tester
// On commence par se noter tous les etats initiaux
for i in initial(auto):
    todo.add(i,w)
while (todo pas vide):
    (q,mot) = todo.pop()
    // Si on a fini de lire le mot et qu on est
    // arrive sur un etat final, on accepte
    // Si l etat n est pas final, on ne renvoie
    // pas false, car il peut rester des chemins
    // qu il faut tester
    if mot is empty et q in F:
        return true
    elif mot is a.reste:
        // On continue la lecture du mot avec
        // chaque etat qu on peut atteindre
        // avec la premiere lettre
        next_states = delta(q,a)
        for suivant in next_states:
            todo.add(suivant,reste)
// Si on n a au final rien trouve, on dit non
return false

```

FIGURE 3.5 – Reconnaissance par un AFND - version iterative

```

# fonction ndfa_acc_bis(auto,w,q)
# renvoie true ssi. l automate auto accepte le mot w en partant de l etat q
if w is empty:
    return q in F
elif w is a.reste:
    for suivant in delta(q,a):
        if ndfa_acc_bis(auto,reste,suivant):
            return true
    return false

# fonction ndfa_acc(auto,w)
# renvoie true ssi. l automate auto accepte le mot w
for i in initial(auto):
    if ndfa_acc_bis(auto,w,i):
        return true
return false

```

FIGURE 3.6 – Reconnaissance par un AFND - version récursive

3.3 Transformation d'automates

La formalisation très limitée et simple des automates en fait des programmes particulièrement simple à manipuler, comme l'illustrent les algorithmes de transformation d'automates présentés ici.

3.3.1 Complétion

On peut facilement compléter un automate en rajoutant un état "poubelle", non terminal et bouclant, qui absorbera tous les transitions ajoutées.

Exemple 3.3.1. Si on complète l'automate de la figure 3.3, on rajoute un état P qui boucle sur lui-même. Il manquait dans l'automate uniquement une b -transition partant de l'état 1. On rajoute donc $1 \xrightarrow{b} P$, et on obtient



FIGURE 3.7 – Un automate complété

Exercice 3.3.1. Compléter le premier automate de l'exemple 3.2.2.

On peut se convaincre assez facilement que la complétion ne change pas le langage reconnu par un automate : un parcours prend de nouvelles transitions ssi. il ne pouvait aller jusqu'au bout dans l'automate initial. Dans les deux cas, le mot associé n'est pas accepté, puisqu'on boucle sur un état non-terminal dans le premier cas, et on "plante" dans le second.

Cette transformation se formalise également assez facilement. Soit un automate déterministe $\langle Q, \Sigma, q_0, F, \delta \rangle$, alors on renvoie l'AFD $\langle Q \cup \{P\}, \Sigma, q_0, F, \delta' \rangle$, avec

$$\begin{cases} \delta'(q, a) = \delta(q, a) & \text{si } \delta(q, a) \text{ défini,} \\ \delta'(q, a) = P & \text{si } \delta(q, a) \text{ non défini,} \\ \delta'(P, a) = P & \text{pour tout } a \in \Sigma \end{cases}$$

Notez qu'on met les cas $\delta'(P, a)$ à part, car (on suppose) $P \notin Q$, ce qui implique que $\delta(P, a)$ n'a pas de sens.

Exercice 3.3.2. Donner la formalisation de la complétion d'un automate non-déterministe.

3.3.2 Déterminisation

L'algorithme présenté ici prend en entrée un AFND et renvoie un AFD reconnaissant le même langage. L'idée est que l'AFD va simuler le comportement de l'AFND, et donc, étant donné un mot, que le (seul) parcours dans l'AFD va représenter tous ceux dans l'AFND.

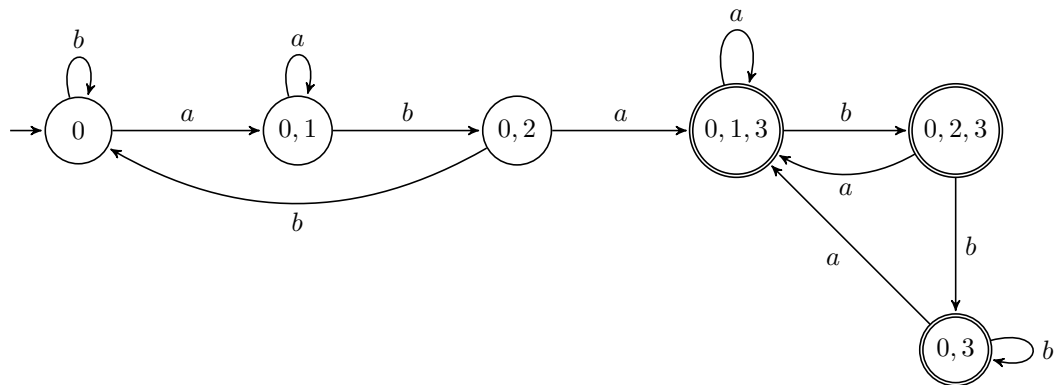
Pour ça, l'ensemble d'états de l'AFD va être l'ensemble des combinaisons d'états de l'AFND. Par exemple, si on a dans ce derniers deux états initiaux i_1 et i_2 , l'automate initial de l'AFD sera l'état $\{i_1, i_2\}$. Supposons de plus que les transitions partant de i_1 et i_2 sont les suivantes :

- $i_1 \xrightarrow{a} q_1$
- $i_1 \xrightarrow{a} q_2$
- $i_2 \xrightarrow{a} q_1$
- $i_2 \xrightarrow{a} q_3$

Tout mot commençant par a lu par l'AFND peut donc faire son premier saut en q_1 , q_2 ou q_3 . On ajoute donc à l'AFD la transition $\{i_1, i_2\} \xrightarrow{a} \{q_1, q_2, q_3\}$, et ainsi de suite.

Arriver, après lecture d'un mot, dans un état X de l'AFD signifie donc que, dans l'AFND, on peut atterir dans chacun des états contenus dans X après la lecture du même mot. Puisqu'un AFND accepte quand au moins un des parcours termine sur un état terminal, tout état de l'AFD contenant un état terminal est lui-même terminal.

Exemple 3.3.2. Si on essaye de déterminer l'automate de l'exemple 3.2.1, on obtient



On notera une grande proximité avec la détermination "à la main" qu'on avait initialement faite dans l'exemple. En effet, on a les correspondances suivantes entre les états :

- $0 \approx 0$
- $1 \approx 0, 1$
- $2 \approx 0, 2$
- $3 \approx 0, 1, 3 + 0, 2, 3 + 0, 3$

Exercice 3.3.3. Déterminer le premier automate de l'exemple 3.2.2. (la correction de cet exercice contient, contrairement à l'exemple ci-dessus, quelques étapes intermédiaires).

La détermination se formalise aussi assez bien en termes de définitions. Soit un automate $\langle Q, \Sigma, I, F, \delta \rangle$, alors on renvoie l'automate $\langle P(Q), \Sigma, \bigcup_{i \in I} i, F', \delta' \rangle$, avec

$$\delta'(X, a) = \bigcup_{q \in X} \delta(q, a)$$

$$F' = \{X \in P(Q) \mid X \cap F \neq \emptyset\}$$

Notez que suivre cette définition génère un automate qui contient tout un tas d'états qui vont être inatteignables, et donc ne servir à rien. En l'appliquant sur l'exemple 3.3.2, on devrait notamment produire les états $\{1, 2\}$ ou $\{2, 3\}$. En pratique, on préférera donc suivre l'algorithme présenté avec les mains, qui consiste à partir de l'état initial et d'ajouter les états / transitions au fur à mesure, jusqu'à atteindre un point fixe.

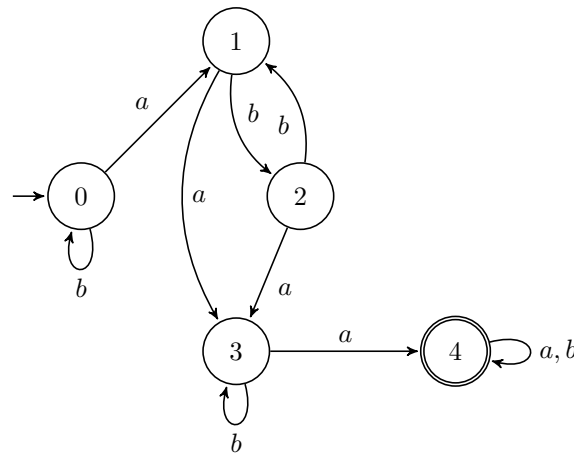
Il s'agit d'un résultat extrêmement important de la théorie des automates, puisqu'il établit l'équivalence entre automates finis déterministes et non-déterministes. Pour montrer qu'un langage est reconnaissable par un AFD, on pourra se contenter de fournir un AFND. D'un point de vue plus pratique, on pourra abondamment utiliser le non-déterminisme dans nos conceptions d'automates, ce dernier pouvant être éliminé par cet algorithme. Cette transformation a cependant un coût, qui peut être très élevé. En effet, le lemme 11 implique que la détermination d'un automate à n états peut en avoir jusqu'à 2^n .

On peut commencer à voir pourquoi en re-regardant l'exemple 3.3.2, où on a 3 états terminaux alors qu'un seul serait suffisant : une fois qu'on a atteint l'état $\{0, 1, 3\}$, on ne fait que tourner entre trois états terminaux, ce qui veut dire que n'importe quel (reste de) mot sera accepté. L'algorithme de détermination ne s'intéresse pas au rôle des états (il est **syntactique**, et non **sémantique**), et ne voit donc pas qu'une fusion est ici possible. De telles optimisations vont cependant nous être fournies par le prochain algorithme.

3.3.3 Minimisation

On a dit dans l'exemple 3.3.2 que plusieurs états avaient le même rôle et pouvaient être fusionnés. On va ici présenter un algorithme qui prend en entrée un automate déterministe complet¹⁰ et en classe les états selon leur rôle, ce qui permet ensuite de fusionner à l'intérieur de chaque classe. On obtient alors un automate reconnaissant le même langage que celui en entrée, mais de façon minimale (par rapport au nombre d'états). On va présenter l'algorithme *via* l'exemple suivant :

Exemple 3.3.3. Soit l'automate suivant :



On disait plus haut qu'on veut regrouper les états selon leur rôle. Le rôle d'un état q est l'ensemble des mots qu'il accepte, cad. l'ensemble des mots qui vont de q à un état terminal, ou $\{w \mid \delta^*(q, w) \in F\}$. On va partir d'un regroupement très approximatif, et affiner petit à petit.

10. Ce qui, grâce aux deux algorithmes précédents, sont des hypothèses gratuites.

Pour commencer, on peut séparer les états terminaux des non-terminaux en deux sous-ensembles, ou classes. En effet, les premiers acceptent le mot ϵ alors que les seconds non. On divise donc notre ensemble d'états en $T = \{4\}$ et $N = \{0, 1, 2, 3\}$. On ne va manifestement pas pouvoir affiner T , contrairement à N . Pour ça, on va regarder toutes les paires d'états de N et, à chaque fois, vérifier si les deux états ont des désaccords en lisant a ou b :

- 0 vs. 1
 - $\delta(0, a) = 1$ et $\delta(1, a) = 3$. Pour l'instant, 1 et 3 appartiennent tous les deux à N , ce qui veut dire qu'on suppose que 1 accepte un mot w ssi. 3 accepte w . On peut donc conclure que, de ce qu'on sait, 0 accepte un mot $a.w$ ssi. 1 accepte $a.w$.
 - $\delta(0, b) = 0$ et $\delta(1, b) = 2$. 0 et 2 appartiennent à la même classe, on suppose donc pour l'instant que 0 accepte un mot $b.w$ ssi. 1 accepte un mot $b.w$.
 - ⇒ Pour l'instant, on conserve notre hypothèse selon laquelle 0 et 1 acceptent le même langage.
- 0 vs. 2
 - $\delta(0, a) = 1$ et $\delta(2, a) = 3$, 1 et 3 sont dans la même classe.
 - $\delta(0, b) = 0$ et $\delta(2, b) = 2$. 0 et 2 appartiennent à la même classe.
 - ⇒ Pour l'instant, on conserve notre hypothèse selon laquelle 0 et 2 acceptent le même langage.
- 0 vs. 3
 - $\delta(0, a) = 1$ et $\delta(3, a) = 4$, 1 et 4 ne sont pas dans la même classe, ce qui veut dire qu'il existe un mot w ¹¹ sur lequel 1 et 4 ne sont pas d'accord, dans le sens où 1 accepte w alors que 4 non, ou l'inverse. On en déduit donc que 0 et 3 sont en désaccord sur $a.w$. Puisqu'ils sont en désaccord, ils ne devraient pas être dans la même classe.
 - ⇒ Pas besoin de tester avec b , on sait déjà qu'on va séparer 0 et 3.
- 1 vs. 2
 - $\delta(1, a) = 3$ et $\delta(2, a) = 3$, pas de souci.
 - $\delta(1, b) = 2$ et $\delta(2, b) = 1$, idem.
 - ⇒ On garde 1 et 2 dans la même classe.
- 1 vs. 3
 - $\delta(1, a) = 3$ et $\delta(3, a) = 4$.
 - ⇒ 3 et 4 ne sont pas dans la même classe, on doit donc séparer 1 et 3.
- 2 vs. 3
 - $\delta(2, a) = 3$ et $\delta(3, a) = 4$.
 - ⇒ 3 et 4 ne sont pas dans la même classe, on doit donc les séparer.

Si on résume ce premier tour de manège, 3 est en désaccord avec 0, 1 et 2, mais ces trois restent compatibles. On divise donc N entre $N_1 = \{0, 1, 2\}$ et $N_2 = \{3\}$. Puisqu'on a scindé une classe en deux, les résultats de certains "duels" peuvent avoir changé. On refait donc une passe sur N_1 :

- 0 vs. 1
 - $\delta(0, a) = 1$ et $\delta(1, a) = 3$.
 - ⇒ 1 et 3 étant maintenant dans des classes différentes, on doit séparer 0 et 1.
- 0 vs. 2
 - $\delta(0, a) = 1$ et $\delta(2, a) = 3$.
 - ⇒ Idem, on doit donc séparer 0 et 2.
- 1 vs. 2
 - $\delta(1, a) = 3$ et $\delta(2, a) = 3$.
 - $\delta(1, b) = 2$ et $\delta(2, b) = 1$.

11. En l'occurrence ϵ , mais savoir quel mot exactement n'a pas d'importance.

⇒ On ne sépare toujours pas 1 et 2.

On a donc séparé N_1 en $N_2 = \{0\}$ et $N_3 = \{1, 2\}$. Maintenant qu'on a eu une nouvelle séparation, on doit re-tester 1 et 2 :

— 1 vs. 2

— $\delta(1, a) = 3$ et $\delta(2, a) = 3$.

— $\delta(1, b) = 2$ et $\delta(2, b) = 1$.

⇒ On ne sépare toujours pas 1 et 2.

Pour résumer la série des séparations :



On peut maintenant s'amuser à répéter l'expérience autant de fois qu'on veut, mais à partir du moment où il y a eu un tour sans changement, il n'y en aura plus jamais. On accepte alors l'hypothèse selon laquelle 1 et 2 appartiennent à la même classe, ont donc le même rôle et peuvent être fusionnés. On introduit donc un état 1,2. L'état 0 menait initialement avec a à l'état 1, il pointe donc maintenant vers 1,2. 1 et 2 menaient l'un vers l'autre, ça devient une boucle en b sur 1,2. Enfin, 1,2 mène avec a vers 3. 1 et 2 n'étaient pas terminaux, 1,2 ne l'est donc pas non plus :



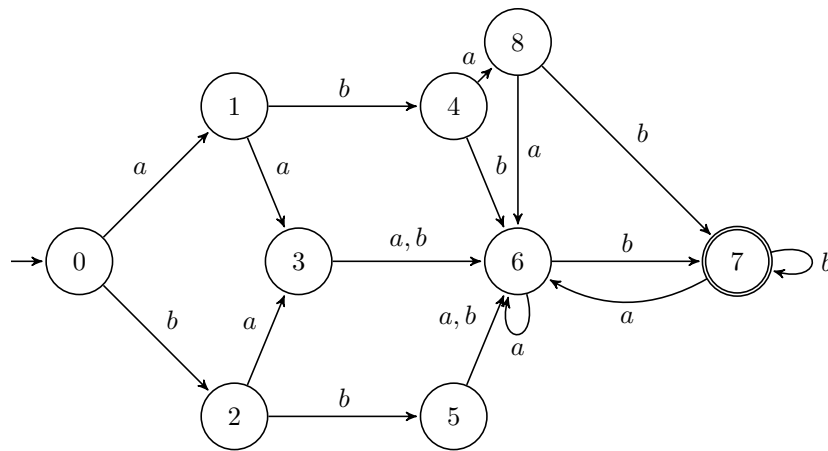
Remarque A la fin de l'exemple, on a justifié de façon un peu rapide et légère l'arrêt de l'algorithme. On n'entrera pas dans les détails ici, mais on donnera l'idée pour que le lecteur ou la lectrice intéressé.e ait matière à réfléchir : l'algorithme présenté ici revient à tester - de façon efficace - les différences d'acceptation entre paires d'états pour les mots de longueur 0, puis 1, puis 2, etc, jusqu'à atteindre un point fixe. Si on n'a pas de changement (ie. de séparation dans une classe) entre les mots de longueur n et $n + 1$, on sait que la stabilité va se propager à l'infini. En effet, soient q_1 et q_2 qui appartiennent à la même classe, et w un mot de longueur $n + 1$. $\delta(q_1, a)$ et $\delta(q_2, a)$ vont dans des états q'_1 et q'_2 qui appartiennent à la même classe, ce qui veut dire qu'aucun mot de longueur $\leq n + 1$ ne peut les séparer. Alors $\delta^*(q_1, a.w) = \delta^*(q'_1, w)$ et $\delta^*(q_2, a.w) = \delta^*(q'_2, w)$ sont d'accord, et idem avec b . q_1 et q_2 sont donc d'accord sur les mots de longueur $n + 2$. On peut itérer, ce qui implique qu'ils sont d'accord sur les mots de n'importe

quelle longueur, et sont donc équivalents.

Remarque bis On peut accélérer l'utilisation de cet algorithme en remarquant que la relation "être d'accord" est **transitive** : étant donnée une partition des états, si q_1 et q_2 sont d'accord d'une part, et q_2 et q_3 le sont d'autre part, alors q_1 et q_3 le sont également. De même, si q_1 et q_2 sont d'accord et que q_2 n'est pas d'accord avec q_3 , alors ce dernier ne l'est pas avec q_1 . On va donc pouvoir s'épargner pas mal de vérifications, comme illustré dans les corrections des deux exercices suivant.

Exercice 3.3.4. Minimiser (en utilisant l'algorithme) l'automate de l'exemple 3.3.2.

Exercice 3.3.5. Minimiser l'automate suivant :



3.4 Limite de la reconnaissance par automates finis

On s'est jusqu'ici amusé à écrire des automates qui reconnaissent tel ou tel langage, sans jamais faillir. Le théorème suivant va être notre premier échec.

Théorème 2. Il n'existe pas d'automate fini reconnaissant le langage $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Démonstration. On va procéder par l'absurde (voir A.1.1), et donc supposer qu'il existe un automate fini A reconnaissant L . Grâce aux algorithmes vus précédemment, on peut supposer que A est déterministe et complet (puisque s'il ne l'est pas, on peut en générer un qui l'est et reconnaît également L).

L'ensemble d'états de A , appelé Q , est par définition fini, de cardinal $|Q|$. L contient tous les mots de la forme $a^n b^n$, et notamment $a^{|Q|} b^{|Q|}$. Il existe donc dans A un chemin

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} \dots \xrightarrow{a} q_{|Q|} \xrightarrow{b} q_{|Q|+1} \xrightarrow{b} \dots \xrightarrow{b} q_{2|Q|}$$

dans A , avec q_0 initial et $q_{2|Q|}$ terminal. On note que, en lisant les a , on parcourt $|Q| + 1$ états. D'après le [principe des tiroirs \(à chaussettes\)](#), au moins un état est visité deux fois. On a donc i et j tels que $0 \leq i < j \leq |Q|$ et $q_i = q_j$. A accepte alors le mot $a^{|Q|-(j-i)} b^{|Q|}$ via le chemin

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} \dots \xrightarrow{a} q_i \xrightarrow{a} q_{j+1} \xrightarrow{a} \dots \xrightarrow{a} q_{|Q|} \xrightarrow{b} q_{|Q|+1} \xrightarrow{b} \dots \xrightarrow{b} q_{2|Q|}$$

Autrement dit, on a dans la lecture de $a^{|Q|}b^{|Q|}$ une lecture dans le passage sur les a , et on peut obtenir une nouvelle lecture en retirant le contenu de la boucle (la partie entre i et j). Visuellement, ça ressemble au passage de



Or, le mot maintenant lu, $a^{|Q|-(j-i)}b^{|Q|}$, n'appartient pas au langage reconnu par l'automate. On obtient donc un paradoxe, ce qui veut dire que l'automate A n'existait pas en premier lieu. \square

Au-delà de la preuve, comment expliquer l'impossibilité pour un automate fini de reconnaître ce langage ? On comparera à l'exemple 3.1.4, où on pouvait raisonner *modulo*, sans retenir toute l'information (le nombre de a et de b lus) mais seulement une abstraction, simplifiée et finie (la parité du nombre de a et de b). Ici, quand on commence à lire des b , on doit avoir enregistré le nombre précis de a lus, pour vérifier qu'on en a bien le même nombre. Or, le nombre de a n'est pas borné, et la seule mémoire disponible dans un automate est les états.

Si on avait le droit à une infinité d'états, on pourrait essayer d'écrire, de manière finie, un automate infini comme celui de la figure 3.8. Le domaine des automates infinis existe bel et bien, mais n'est pas au programme de ce cours. On évoquera, dans la partie 5, une autre approche consistant à ajouter aux automates une deuxième forme de mémoire, potentiellement infinie mais aisément représentable de manière finie.



FIGURE 3.8 – Un exemple d'automate infini

3.5 Propriétés de clôture des langages reconnus par automates

On dit qu'un ensemble E est clos sous une opération binaire \circ si, pour tous éléments x et y de E , $x \circ y$ appartient également à E . Dit autrement, E est clos sous \circ ssi. l'application de \circ à ses éléments ne fait pas sortir de l'ensemble. On va regarder ici si les langages reconnaissables par automate fini sont clos sous les opérations sur les langages.

3.5.1 Union

Théorème 3. *Les langages reconnaissables par automate fini sont clos par union, i.e. pour tous langages L_1 et L_2 reconnaissables par automate fini, il existe un automate fini reconnaissant $L_1 \cup L_2$.*

Démonstration. Si L_1 et L_2 sont reconnaissables par automate fini, il existe des automates A_1 et A_2 qui reconnaissent L_1 et L_2 , respectivement. Pour plus de généralité, on va supposer A_1 et A_2 non-déterministes. $L_1 \cup L_2$ est reconnu par " A_1 et A_2 posés à côté l'un de l'autre". Plus formellement, soient $A_1 = \langle Q_1, \Sigma_1, \delta_1, I_1, F_1 \rangle$ et $A_2 = \langle Q_2, \Sigma_2, \delta_2, I_2, F_2 \rangle$, alors $L_1 \cup L_2$ est reconnu par $\langle Q_1 \cup Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta', I_1 \cup I_2, F_1 \cup F_2 \rangle$ avec

$$\begin{cases} \delta'(q, a) = \delta_1(q, a) & \text{si } q \in Q_1, \\ \delta'(q, a) = \delta_2(q, a) & \text{si } q \in Q_2 \end{cases}$$

□

C'est exactement l'astuce qui a été utilisée dans l'exemple 3.2.2, où on a effectivement "mis ensemble" deux automates.

3.5.2 Concaténation

Théorème 4. *Les langages reconnaissables par automate fini sont clos par concaténation, i.e. pour tous langages L_1 et L_2 reconnaissables par automate fini, il existe un automate fini reconnaissant $L_1.L_2$.*

Démonstration. Si L_1 et L_2 sont reconnaissables par automate fini, il existe des AF A_1 et A_2 qui reconnaissent L_1 et L_2 , respectivement. On veut reconnaître $L_1.L_2 = \{u.v \mid u \in L_1 \wedge v \in L_2\}$, l'astuce va être de mettre A_1 et A_2 l'un après l'autre en rajoutant des ϵ -transitions pour que, à chaque fois qu'on finit de lire un mot u accepté par A_1 , au lieu d'accepter, on puisse aller vers un état initial de A_2 en lire un deuxième v . Dualelement au fait qu'on ne veuille plus accepter dès la fin d'une lecture en A_1 , on ne veut pas pouvoir commencer en A_2 . La figure 3.9 illustre schématiquement cette transformation sur un exemple.

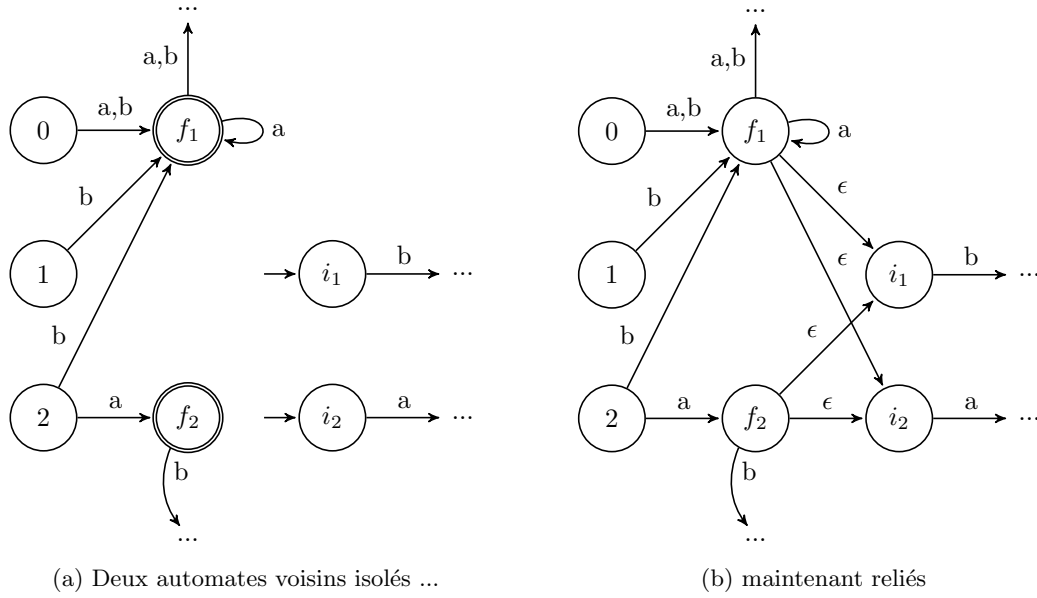


FIGURE 3.9 – Concaténation d'automates

Soit un mot $w = u.v$ avec $u \in L_1$ et $v \in L_2$. u étant accepté par A_1 , sa lecture en partant d'un état initial nous amène en f_1 ou f_2 . Dans la version transformée, u seul n'est plus accepté, mais les ϵ -transitions partant de f_1 et f_2 nous permettent de nous "téléporter" en i_1 ou i_2 . Or, v est accepté par A_2 , ce qui veut dire qu'il va nous envoyer de l'un ou l'autre à un état terminal de A_2 .

Plus formellement, soient $A_1 = \langle Q_1, \Sigma_1, \delta_1, I_1, F_1 \rangle$ et $A_2 = \langle Q_2, \Sigma_2, \delta_2, I_2, F_2 \rangle$, alors $L_1.L_2$ est reconnu par $\langle Q_1 \cup Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta', I_1, F_2 \rangle$ avec

$$\begin{cases} \delta'(q, a) = \delta_1(q, a) & \text{si } q \in Q_1 \\ \delta'(q, \epsilon) = \delta_1(q, a) & \text{si } q \in Q_1 \setminus F_1, \\ \delta'(q, \epsilon) = \delta_1(q, a) \cup I_2 & \text{si } q \in F_1, \\ \delta'(q, a) = \delta_2(q, a) & \text{si } q \in Q_2, \\ \delta'(q, \epsilon) = \delta_2(q, \epsilon) & \text{si } q \in Q_2 \end{cases}$$

Ainsi, on garde toutes les transitions autrefois présentes, et on ajoute (troisième cas) des ϵ -transitions des états terminaux de A_1 vers les initiaux de A_2 .

Si A_1 accepte le mot vide, on veut pouvoir considérer cette possibilité et commencer la lecture en A_2 directement. Or, c'est déjà pris en compte par les nouvelles transitions : A_1 accepte le mot vide ssi. il a un état initial et terminal. Or, la définition de δ' ajoute une ϵ -transition de cet état vers tous les initiaux de A_2 . On peut donc, en pratique, faire lire tout mot donné intégralement par A_2 .

Pas besoin non plus de faire attention pour les états terminaux : si A_2 accepte le mot vide, au moins un de ses états initiaux est terminal, ce qui veut dire que les transitions qu'on ajoute

permettront d'accepter un mot de L_1 . □

Remarque On a dit en 3.2.1 qu'on ignorerait dans ce document les ϵ -transitions, à l'exception de la sous-section actuelle et la suivante (3.5.3), d'où la prise en compte des ϵ dans la définition de δ' .

Exemple 3.5.1. Soient $L_1 = \{w \mid |w|_a \text{ pair et } |w|_b \text{ impair}\}$ et $L_2 = \Sigma^*(aba + bab)\Sigma^*$. On peut reconnaître $L_1.L_2$ en combinant les automates des exemples 3.1.4 et 3.2.2. L'état anciennement terminal PI permet maintenant d'accéder gratuitement à 0 et 4, qui deviennent non-initiaux. On obtient au final :



3.5.3 Itération

Théorème 5. Les langages reconnaissables par automate fini sont clos par concaténation, i.e. pour tout langage L reconnaissable par automate fini, il existe un automate fini reconnaissant L^* .

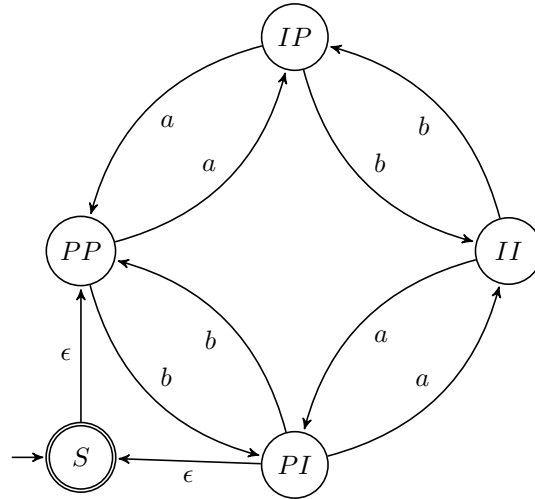
Démonstration. On veut reconnaître des mots de la forme $u_1.u_2...u_n$ avec $u_i \in L$ pour tout i . On ajoute un état spécial, S , qui sera le seul initial et terminal, et qui sera le début et la fin de tout tour de manège. La construction de l'automate ressemble ensuite à celle de la concaténation, en ce qu'on rajoute des ϵ -transitions qui, quand on est dans un état (anciennement) terminal, nous permettent de revenir à S . Dualemént, on ajoute des ϵ -transitions allant de S à tout état (anciennement) initial pour pouvoir commencer chaque tour.

Plus formellement, soient $A = \langle Q, \Sigma, \delta, I, F \rangle$, alors L^* est reconnu par $\langle Q \cup \{S\}, \Sigma, \delta', \{S\}, \{S\} \rangle$ avec

$$\begin{cases} \delta'(q, a) = \delta(q, a) & \text{si } q \in Q, \\ \delta'(q, \epsilon) = \delta(q, \epsilon) & \text{si } q \in Q \setminus F, \\ \delta'(q, \epsilon) = \delta(q, \epsilon) \cup \{S\} & \text{si } q \in F, \\ \delta'(S, a) = \emptyset, \\ \delta'(S, \epsilon) = I \end{cases}$$

□

Exemple 3.5.2. Soit $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ pair et } |w|_b \text{ impair}\}$. L^* est reconnu par l'automate suivant :



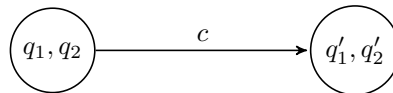
Exercice 3.5.1. Est-il nécessaire dans la transformation de rendre non-terminaux les états qui l'étaient dans l'automate original ?

Exercice 3.5.2. Pourquoi était-il indispensable d'introduire un nouvel état dans la transformation ?

3.5.4 Intersection

Théorème 6. Les langages reconnaissables par automate fini sont clos par intersection, i.e. pour tous langages L_1 and L_2 reconnaissables par automate fini, il existe un automate fini reconnaissant $L_1 \cap L_2$.

Démonstration. Soient A_1 et A_2 des automates reconnaissant L_1 et L_2 . Comme dans l'algorithme de détermination, on va utiliser un automate pour en simuler un autre, ou en l'occurrence deux, en utilisant comme états des couples d'états de A_1 / A_2 . Si par exemple on a dans $q_1 \xrightarrow{c} q'_1$ dans A_1 et $q_2 \xrightarrow{c} q'_2$ dans A_2 , alors on aura dans l'automate de $L_1 \cap L_2$



Ce faisant, la lecture d'un mot exécute celles du même mot à la fois dans A_1 (parties gauches des différents états) et dans A_2 (parties droites). On veut commencer au début des deux automates, les états initiaux seront donc l'ensemble des i_1, i_2 tels que i_1 est initial dans A_1 et i_2 dans A_2 . On ne veut accepter un mot que s'il appartient aux deux langages, cad. ssi. il serait accepté par les deux langages. Les états terminaux sont donc ceux de la forme f_1, f_2 , où f_1 et f_2 sont tous les deux terminaux dans leurs automates respectifs.

Plus formellement, soient $A_1 = \langle Q_1, \Sigma_1, \delta_1, I_1, F_1 \rangle$ et $A_2 = \langle Q_2, \Sigma_2, \delta_2, I_2, F_2 \rangle$, alors $L_1 \cap L_2$ est reconnu par $\langle Q_1 \times Q_2, \Sigma_1 \cap \Sigma_2, \delta', I_1 \times I_2, F_1 \times F_2 \rangle$ avec $\delta(\langle q_1, q_2 \rangle, a) = \delta_1(q_1, a) \times \delta_2(q_2, a)$.

Par coquetterie et amour inconditionnel des homomorphismes, on mentionnera la jolie définition de δ' dans le cas déterministe :

$$\delta(\langle q_1, q_2 \rangle, a) = \langle \delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a) \rangle$$

□

Remarque L'intersection de deux automates est déterministe ssi. les deux automates sont déterministes.

Exemple 3.5.3. On veut reconnaître le langage des mots qui contiennent les facteurs *aba* et *bab*. Les facteurs se chevauchant, écrire directement un tel automate n'est pas totalement évident. On va utiliser l'algorithme d'intersection, dans sa version déterministe ou non. On choisit ici la première option. On commence donc en rappelant les AFD reconnaissant les deux langages à mêler :



On part de l'état 0,0. Vu que *a* nous emmène de 0 en 1 dans le premier automate et de 0 en 0 dans le second, 0,0 va en 1,0 et 1,0 en lisant *a*, et ainsi de suite. On obtient au final l'automate suivant :

De plus, l'automate doit être complet. En effet, un chemin non-existant reste non-existant malgré une inversion des terminaux et non-terminaux. Par exemple le mot a n'est pas reconnu par l'automate



ni par l'automate



Si on complète le premier automate, on obtient



qui ne reconnaît toujours aucun mot. En calculant son complémentaire, on obtient



qui accepte tous les mots.

□

Exemple 3.5.4. On veut un automate pour les mots qui ne contiennent pas le facteur aba . En reprenant un exemple qu'on a déjà trop vu, on obtient



Exercice 3.5.5. Donner un automate des mots ne terminant pas par aba .

3.5.6 Conséquences pour les langages non-reconnus

On a vu que les langages reconnaissables par automate fini pouvaient se construire en combinant d'autres langages reconnaissables par automate fini, ce qui nous permet de montrer facilement que tout un tas de langages sont eux-mêmes reconnaissables par un automate fini. Mais ces propriétés de clôture permettent aussi, assez ironiquement, de montrer facilement que pas mal de langages ne le sont pas.

Théorème 8. Le langage $L = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$, cad. l'ensemble des mots contenant autant de a que de b , n'est pas reconnaissable par automate fini.

Démonstration. On pourrait essayer d'adapter la preuve du théorème 2, mais ça serait beaucoup plus désagréable que d'utiliser la clôture par intersection. En effet, le langage $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ peut être défini comme l'intersection de $a^* b^*$ et L . Or, $a^* b^*$ est reconnu par l'automate suivant :



Si L était reconnu par un automate fini, $a^* b^* \cap L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ le serait également, ce qui n'est pas le cas (cf. théorème 2). On en déduit donc que L n'est pas reconnaissable par automate. \square

Exercice 3.5.6. Montrer que le langage $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$ n'est pas reconnaissable par automate.

Chapitre 4

Théorème de Kleene

On a pour l'instant utilisé les expressions rationnelles pour décrire les langages reconnus par des automates, et utilisé des automates pour implémenter des expressions rationnelles. On a cependant vu que l'expressivité des automates était limitée, en ce qu'il existe de nombreux langages qu'ils ne peuvent reconnaître. On peut donc légitimement se demander si les expressions rationnelles sont plus ou moins expressives que les automates finis.

Le mathématicien Stephen C. Kleene (1909 - 1994) répond à cette question via le théorème qui porte son nom :

Théorème 9. (Théorème de Kleene) *Les langages représentable par expression rationnelle sont exactement ceux reconnus par automate fini.*

L'égalité entre deux ensembles A et B équivaut à la double inclusion entre les mêmes ensembles, cad. $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$. On va donc chercher une preuve que chaque langage représentable par *regex* est reconnaissable par automate fini, et inversement. Ces deux sous-théorèmes admettent aujourd'hui de nombreuses preuves, notamment constructives, cad. sous la forme d'algorithmes qui réalisent la transformation d'une *regex* en automate, et inversement. Cette section présente plusieurs de ces algorithmes.

4.1 Des expressions rationnelles aux automates

On veut prouver ici le théorème suivant :

Théorème 10. *Les langages représentable par expression rationnelle sont également reconnus par automate fini.*

On en présente ici deux preuves différentes.

4.1.1 Traduction récursive

Démonstration. On va procéder par induction structurelle sur les expressions rationnelles. On en rappelle d'abord la définition récursive :

$$e ::= \begin{array}{l} \epsilon \\ a \in \Sigma \\ e_1.e_2 \\ e_1 + e_2 \\ e_1^* \end{array}$$

L'expression ϵ est clairement reconnu par l'automate



L'expression a quant à elle est reconnue par



On peut donc traduire en automates les cas de base des expressions rationnelles. Quant aux cas récurrents, on les a en fait déjà traités en 3.5 : pour construire un automate reconnaissant $e_1 + e_2$, on construit des automates A_1 et A_2 reconnaissant e_1 et e_2 , et on applique la construction de l'union. On procède de même avec la concaténation pour e_1e_2 et l'itération pour e^* . \square

Remarque Les constructions vues pour les propriétés de clôture ne sont pas optimales. L'[algorithme de Thomson](#) utilise les mêmes idées mais s'assure qu'il n'y ait pas plus d'un état initial et un état terminal (différents) tout au long de la construction de l'automate, ce qui permet de borner plus finement sa taille, et de faciliter la concaténation (on fusionne l'état terminal gauche et l'état initial droit).

4.1.2 Traduction linéaire

On propose un autre algorithme, qui sépare la construction des états de celles des transitions : l'**algorithme de Glushkov**.

Exemple 4.1.1. Soit $e = (abb^*a + (ba)^*)^*$. On commence par distinguer toutes les lettres de l'expression, par exemple en les indexant par leur position. On obtient donc

$$(a_1b_2b_3^*a_4 + (b_5a_6)^*)^*$$

On crée ensuite un état pour chaque lettre, ainsi qu'un état initial 0 :



Le jeu va être de représenter, avec les transitions, les "promenades" dans l'expression. Toute mot capturé par l'expression commence par a_1 ou b_5 . On ajoute donc ces transitions :



Quand on a lu un a_1 , on est obligé de lire un b_2 . De même, un b_5 est forcément suivi d'un a_6 :



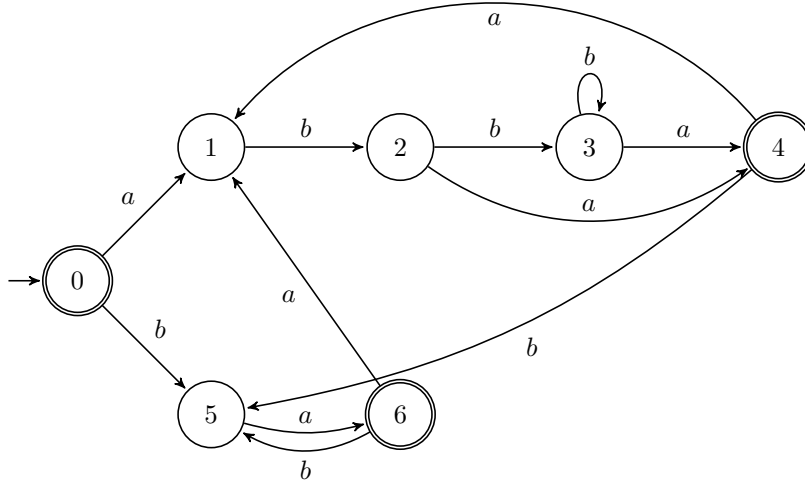
Après la lecture d'un a_6 , on peut recommencer la boucle $(b_5 a_6)^*$, auquel cas on lit un b_5 , ou recommencer la boucle entière $(a_1 b_2 b_3^* a_4 + (b_5 a_6)^*)^*$, en lisant un a_1 ou un b_5 :



Après la lecture d'un b_2 , on peut lire un b_3 , mais aussi sauter b_3^* et aller directement lire un a_4 . En b_3 , on peut boucler ou passer en a_4 . En a_4 , comme en a_6 , on peut lire a_1 ou b_5 . On a donc :



On peut arrêter de boucler quand on vient de lire un a_4 ou un a_6 , ce qui veut dire que les états correspondant vont être terminaux. De plus, l'expression rationnelle contient le mot vide, ce qui veut dire que l'état initial doit être terminal. Il ne nous reste plus qu'à "déspecialiser" les lettres, et éventuellement renommer les états :



On a présenté l'algorithme *via* un exemple, mais il repose bien évidemment sur des définitions formelles, procédant par induction sur l'expression. Une fois qu'on a spécialisé les lettres et créé les états comme dans l'exemple, on veut d'abord savoir si l'expression rationnelle donnée accepte ou non le mot vide. C'est à cette question que répond la fonction suivante :

$$\begin{cases} E(\epsilon) = \top \\ E(a) = \perp \\ E(e_1 + e_2) = E(e_1) \vee E(e_2) \\ E(e_1.e_2) = E(e_1) \wedge E(e_2) \\ E(e^*) = \top \end{cases}$$

L'état initial est terminal ssi. $E(e) = \top$. Pour les premières transitions, qui partiront de l'état initial 0, on a besoin de déterminer quelles lettres peuvent commencer les mots reconnus par l'expression, ce que fait la fonction suivante :

$$\begin{cases} D(\epsilon) = \emptyset \\ D(a) = \{a\} \\ D(e_1 + e_2) = D(e_1) \cup D(e_2) \\ D(e_1.e_2) = D(e_1) & \text{Si } e_1 \text{ n'accepte pas le mot vide, cad. si } \neg E(e_1) \\ D(e_1.e_2) = D(e_1) \cup D(e_2) & \text{sinon} \\ D(e^*) = D(e) \end{cases}$$

On ajoute une transition $0 \xrightarrow{q} q$ pour tout $q \in D(e)$. De même, on a besoin de savoir quelles lettres peuvent finir les mots du langage dénoté par une expression :

$$\begin{cases} F(\epsilon) = \emptyset \\ F(a) = \{a\} \\ F(e_1 + e_2) = F(e_1) \cup F(e_2) \\ F(e_1.e_2) = F(e_2) & \text{Si } e_2 \text{ n'accepte pas le mot vide, cad. si } \neg E(e_2) \\ fF(e_1.e_2) = F(e_1) \cup F(e_2) & \text{sinon} \\ F(e^*) = F(e) \end{cases}$$

Tout les états de F sont terminaux. En plus des premières transitions, on veut bien sûr les autres. Pour ça, on calcule l'ensemble des lettres qui peuvent se suivre dans le langage dénoté par l'expression :

$$\begin{cases} P(\epsilon) = \emptyset \\ P(a) = \emptyset \\ P(e_1 + e_2) = P(e_1) \cup P(e_2) \\ P(e_1.e_2) = P(e_1) \cup P(e_2) \cup F(e_1).D(e_2) \\ P(e^*) = P(e) \cup F(e).D(e) \end{cases}$$

Toute paire $\langle q_1, q_2 \rangle$ appartenant à $P(e)$ génère donc une transition $q_1 \xrightarrow{q_2} q_2$ dans l'automate.

Exercice 4.1.1. Utiliser l'algorithme de Glushkov pour traduire en automate l'expression $e = (bb)^*(b(a+b)^*)^*$

Remarque On a présenté ces différents algorithmes comme des preuves de la "traductabilité" des expressions rationnelles en automates finis. Si on était vraiment rigoureux, les algorithmes ne suffiraient pas, il faudrait aussi prouver 1) qu'ils terminent sur toute entrée 2) qu'ils produisent bien un automate fini acceptant le langage décrit par l'expression donnée. Ces preuves sont autrement plus complexes que l'écriture des algorithmes¹ et vont au-delà du programme du cours, mais il est toujours bon de garder son esprit critique face à ces choses. Cette remarque s'applique bien évidemment également à l'algorithme présenté dans les pages qui suivent pour la traduction inverse.

1. On entend souvent dire que la preuve d'un programme ou algorithme est au moins un ordre de grandeur plus complexe que l'écriture de ce dernier

Chapitre 5

Grammaires formelles et hiérarchie de Chomsky

5.1 Principe général

Une **grammaire formelle** est une série de **règles** permettant de générer des mots. Ces règles utilisent des **symboles** dits **terminaux** (les lettres "normales", par convention en minuscules), et d'autres dits **non-terminaux** (normalement dénotés par des lettres majuscules). Un de ces symboles non-terminaux, appelé **axiome**, indique le début de toute génération de mot. On présente d'abord le fonctionnement des grammaires et les concepts de base à l'aide de quelques exemples.

Exemple 5.1.1. On présente la grammaire dénotée par ces deux règles :

$$\begin{cases} S \rightarrow \epsilon \\ S \rightarrow abS \end{cases}$$

Cette grammaire contient un seul symbole non-terminal, S . Il s'agit donc automatiquement de l'axiome. Le symbole S peut se transformer en ϵ (première règle) ou en abS (deuxième règle). Cette grammaire génère l'ensemble des mots composés uniquement de symboles terminaux (a et b) qu'on peut obtenir en partant de l'axiome S et en appliquant autant de fois qu'on veut les règles données. Dans ce qui suit, on écrira \rightarrow_1 pour une application de la première règle et \rightarrow_2 pour la seconde.

On peut par exemple obtenir le mot ab de la façon suivante :

$$S \rightarrow_2 abS \rightarrow_1 ab$$

Dans cette suite de transformation, appelée **dérivation**, on remplace d'abord l'axiome par abS à l'aide de la deuxième règle. Puisque abS contient le facteur S , on peut utiliser localement la deuxième règle pour faire disparaître ce S . Dans ce cas, ce qu'il y avait autour du S , le **contexte**, reste inchangé.

On peut également obtenir le mot $abab$:

$$S \rightarrow_2 abS \rightarrow_2 ababS \rightarrow_1 abab$$

ou ababab :

$$S \rightarrow_2 abS \rightarrow_2 ababS \rightarrow_2 abababS \rightarrow_1 ababab$$

Il n'est pas obligatoire d'utiliser toutes les règles d'une grammaire. On peut donc générer le mot vide :

$$S \rightarrow_1 \epsilon$$

On se rend compte assez vite que la grammaire **engendre** le langage $(ab)^*$.

Exemple 5.1.2. Un symbole non-terminal peut générer d'autres symboles non-terminaux, et même plusieurs en même temps. De plus, un non-terminal peut générer un autre mot que juste ϵ . Ces deux points sont illustrés par la grammaire suivante :

$$\begin{cases} S \rightarrow LaaR \\ L \rightarrow Lb \\ L \rightarrow ab \\ R \rightarrow bR \\ R \rightarrow ba \end{cases}$$

Quelques exemples de dérivations dans cette grammaire :

$$S \rightarrow_1 LaaR \rightarrow_2 LbaaR \rightarrow_2 LbbaaR \rightarrow_4 LbbaabR \rightarrow_3 abbbaabR \rightarrow_5 abbbaabba$$

$$S \rightarrow_1 LaaR \rightarrow_3 abaaR \rightarrow_5 abaaba$$

On note \rightarrow_i^j j utilisations de la règle numéro i , comme dans la dérivation suivante :

$$S \rightarrow_1 LaaR \rightarrow_2^5 LbbbbbaaR \rightarrow_3 abbbbbbaaR \rightarrow_4^3 abbbbbbaabbbR \rightarrow_5 abbbbbbaabbbba$$

Remarque Quand on a plusieurs règles de la forme

$$\begin{cases} u \rightarrow v_1 \\ \dots \\ u \rightarrow v_n \end{cases}$$

on pourra gagner de la place en écrivant

$$\{u \rightarrow v_1 \mid \dots \mid v_n\}$$

Par exemple, la grammaire de l'exemple 5.1.2 peut également s'écrire

$$\begin{cases} S \rightarrow LaaR \\ L \rightarrow Lb \mid ab \\ R \rightarrow bR \mid ba \end{cases}$$

Exercice 5.1.1. Quel est le langage engendré par la grammaire de l'exemple 5.1.2 ?

Exercice 5.1.2. Quel est le langage engendré par la grammaire suivante ?

$$\begin{cases} S \rightarrow A \mid B \\ A \rightarrow aA \mid \epsilon \\ B \rightarrow bB \mid \epsilon \end{cases}$$

Exercice 5.1.3. Quel est le langage engendré par la grammaire suivante ?

$$\begin{cases} S \rightarrow aS \mid bS \mid \epsilon \end{cases}$$

Exercice 5.1.4. Donner l'ensemble des mots qui admettent deux dérivations (ie. peuvent être construits de plusieurs façons différentes) dans la grammaire de l'exercice 5.1.2. Même question pour celle de l'exercice 5.1.3.

Exemple 5.1.3. On a jusqu'ici seulement vu des exemples de grammaires avec un seul non-terminal à gauche des flèches de réécriture. Il est cependant possible de préciser le contexte dans lequel les réécritures doivent se faire, comme dans la grammaire suivante :

$$\begin{cases} S \rightarrow SABC \mid \epsilon \\ AB \rightarrow BA \\ BA \rightarrow AB \\ AC \rightarrow CA \\ CA \rightarrow AC \\ BC \rightarrow CB \\ CB \rightarrow BC \\ A \rightarrow a \\ B \rightarrow b \\ C \rightarrow c \end{cases}$$

Toute dérivation dans cette grammaire fonctionne de la façon suivante : on commence par utiliser la première règle n fois pour produire $S(ABC)^n$. Ensuite, on utilise la deuxième règle pour faire disparaître S et se retrouver avec $(ABC)^n$. Les règles 3 à 8 permettent ensuite de mélanger les symboles non-terminaux comme on l'entend. Une fois qu'ils ont été disposés de la façon voulue, on les transforme en a , b et c avec les règles 9, 10 et 11.

Le langage engendré par cette grammaire est donc celui des mots contenant autant de a que de b et de c .

Remarque Dans l'exemple ci-dessus, on découpe toute dérivation en 4 étapes : utilisation de la première règle, puis de la seconde, puis des 3 à 8, et enfin des 9 à 11. Cette présentation nous semble améliorer la compréhension de l'exemple et du langage engendré, mais techniquement, rien n'empêche de mélanger les étapes, comme dans la dérivation suivante :

$$S \rightarrow_1 SABC \rightarrow_9 SaBC \rightarrow_7 SaCB \rightarrow_{11} SaCb \rightarrow_1 SABCaCb \rightarrow_2 ABCaCB \xrightarrow{5}_{9,10,11} abcacb$$

Où $\xrightarrow{5}_{9,10,11}$ indique 5 utilisations de règles parmi 9, 10 et 11.

5.2 Formalisation

Maintenant qu'on a un peu joué avec les grammaires formelles, on peut regarder comment elles se formalisent. Techniquement donc, une grammaire formelle est un quadruplet $\langle \Sigma, V, S, R \rangle$, où

- Σ est l'ensemble des **symboles terminaux**
- V est l'ensemble des **symboles non-terminaux**
- $S \in V$ est l'**axiome**
- R est l'ensemble des **règles de production**, ou règles de réécriture. Ces dernières forment un sous-ensemble de $(\Sigma \cup V)^* V (\Sigma \cup V)^* \times (\Sigma \cup V)^*$, cad. qu'elles doivent toujours avoir au moins un non-terminal à gauche.

Exemple 5.2.1. La grammaire de l'exemple 5.1.2 s'écrit

$$\langle \{a, b\}, \{S, L, R\}, S, \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow LaaR \\ L \rightarrow Lb \mid ab \\ R \rightarrow bR \mid ba \end{array} \right\} \rangle$$

Définition 5.2.1: Réécriture / dérivation immédiate

Soient p, s et g des mots sur l'alphabet $(\Sigma \cup V)$, et $f \in (\Sigma \cup V)^* V (\Sigma \cup V)^*$. Si la règle r est de la forme $f \rightarrow g$, alors le mot pfs se **réécrit** (ou dérive) **immédiatement** en pgs via la règle r , ce qu'on note

$$pfs \rightarrow_r pgs$$

Plus généralement, étant donnée une grammaire G , on dit qu'elle réécrit (ou dérive) **immédiatement** un mot u en v ssi. il existe une règle r dans la grammaire telle que u se réécrit immédiatement en v via la règle r . On écrit ceci

$$pfs \rightarrow_G pgs$$

Remarque $u \rightarrow_r v$ est parfois noté $u \xrightarrow{r} v$. De plus, quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la grammaire étudiée, on note $u \rightarrow v$ plutôt que $u \rightarrow_G v$.

Définition 5.2.2: Réécriture / dérivation

Soient une grammaire G et deux mots u et v . On dit que u se **réécrit** (ou dérive) en v avec G ssi. il existe une série (potentiellement nulle) de réécritures immédiates menant de u à v dans G . On le note

$$u \rightarrow_G^* v$$

ou $u \rightarrow^* v$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la grammaire étudiée.

Exemple 5.2.2. Dans l'exemple 5.1.3, on a

$$S \rightarrow^* SABCaCb \rightarrow^* abcacb$$

et donc

$$S \rightarrow^* abcacb$$

Définition 5.2.3: Langage engendré

Le langage engendré par le mot f dans une grammaire G , noté $L_G(f)$, est l'ensemble des mots de Σ^* (formés uniquement de symboles terminaux) en lesquelles on peut réécrire l'axiome de f en suivant les règles de G . Plus formellement,

$$L_G(f) = \{u \in \Sigma^* \mid f \rightarrow_G^* u\}$$

Le langage engendré par une grammaire est le langage engendré par l'axiome dans cette grammaire. Soit une grammaire G d'axiome S , son langage engendré, noté L_G , est $L_G(S)$.

Exemple 5.2.3. Soit G la grammaire de l'exemple 5.1.3.

$$L_G = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$$

Exercice 5.2.1. Donner une grammaire qui engendre le langage $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 5.2.2. Quel est le langage engendré par la grammaire qui suit ?

$$\begin{cases} S \rightarrow XY \\ X \rightarrow aXbZ \mid \epsilon \\ Zb \rightarrow bZ \\ ZY \rightarrow Yc \\ Y \rightarrow \epsilon \end{cases}$$

5.3 Hierarchie de Chomsky

Chomsky propose en 1956 une classification des grammaires en fonction des formes de leurs règles. Les grammaires sont donc divisées en 4 catégories, appelées grammaires de type 0, 1, 2 et 3.

5.3.1 Grammaires de type 3, ou régulières

Les grammaires de type 3, appelées **grammaires régulières**, se divisent elles-même en deux sous-classes : les **grammaires linéaires à gauche** et **grammaires linéaires à droite**.

Grammaires linéaires à gauche et à droite

Dans les deux cas, on ne permet que d'écrire un symbole terminal à la fois, en allant toujours dans le même sens.

Définition 5.3.1: Grammaire linéaire à gauche

Une grammaire linéaire à gauche est une grammaire dont toutes les règles sont de la forme

$$A \rightarrow Ba$$

ou

$$A \rightarrow a$$

ou

$$A \rightarrow \epsilon$$

où A et B sont des symboles non-terminaux, et a un terminal.

Exemple 5.3.1. La grammaire

$$\begin{cases} S \rightarrow Sa \mid Ta \mid a \\ T \rightarrow Tb \mid b \end{cases}$$

est une grammaire linéaire à gauche.

Exercice 5.3.1. Quel est le langage engendré par la grammaire de l'exemple 5.3.1?

Définition 5.3.2: Grammaire linéaire à droite

Une grammaire linéaire à droite est une grammaire dont toutes les règles sont de la forme

$$A \rightarrow aB$$

ou

$$A \rightarrow a$$

ou

$$A \rightarrow \epsilon$$

où A et B sont des symboles non-terminaux, et a un terminal.

Exemple 5.3.2. La grammaire

$$\{ S \rightarrow aS \mid bS \mid \epsilon \}$$

est une grammaire linéaire à droite.

Exercice 5.3.2. Quel est le langage engendré par la grammaire de l'exemple 5.3.2 ?

Remarque Les grammaires de type 3, ou régulières, est l'ensemble des grammaires linéaires à gauche et des grammaires linéaires à droite, mais sans mélange. Par exemple, la grammaire

$$\{S \rightarrow aS \mid Sb \mid \epsilon\}$$

n'est pas une grammaire de type 3.

Lemme 7. Les grammaires linéaires à gauche et les grammaires linéaire à droite ont la même expressivité. Dit autrement, tout langage engendré par une grammaire linéaire à gauche est également engendré par une grammaire linéaire à droite, et inversement.

Démonstration. On n'entrera pas ici dans les détails, qui dépassent le cadre de ce cours. Etant donnée une grammaire linéaire à gauche (resp. droite), on peut écrire une grammaire linéaire à droite (resp. gauche) qui la simule en partant des règles $A \rightarrow a$ et $A \rightarrow \epsilon$. Les règles normales sont inversées et nouvelles règles terminales correspondent à l'axiome de la première grammaire. \square

Exercice 5.3.3. (**) Donner, en suivant l'intuition de la preuve ci-dessus, une grammaire linéaire à droite qui engendre le même langage que la grammaire de l'exemple 5.3.1.

Une extension du théorème de Kleene

On a vu dans le chapitre 4 que les langages pouvant être décrits par des expressions rationnelles et ceux définissables par automate étaient les mêmes. Ce résultat peut s'étendre aux grammaires de type 3.

Théorème 11. Les langages reconnus par automate fini sont exactement ceux engendrés par des grammaires de type 3.

Démonstration. Comme dans le théorème de Kleene original, on propose comme preuve une tradition des grammaires vers les automates, et inversement. Contrairement aux expressions rationnelles, les grammaires de type 3 ont un fonctionnement très similaire aux automates finis, les traductions sont donc très simples.

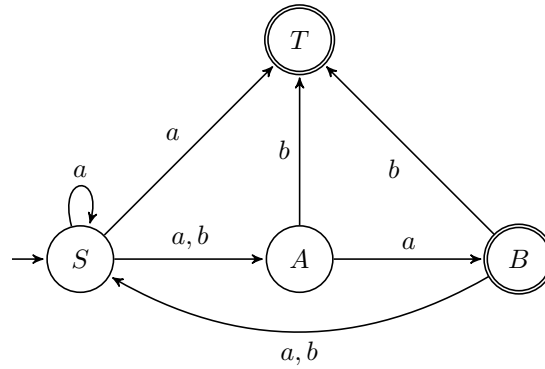
Soit G une grammaire de type 3. Puisque les grammaires linéaires à gauche et à droite engendrent les mêmes langages, on peut supposer que G est une grammaire linéaire à droite. On crée un automate dont les états sont les symboles non-terminaux de G , ainsi qu'un état supplémentaire et terminal T (pour terminus). L'état initial est son axiome. Toute règle $A \rightarrow aB$ devient une transition de A vers B en lisant a . Les règles $A \rightarrow a$ deviennent des transitions de A vers T en a . Enfin, on rend terminal tout état A tel qu'il existe une règle $A \rightarrow \epsilon$.

Soit A un automate fini. On détermine A en A_{det} . On crée une grammaire dont les symboles non-terminaux sont les états de A_{det} . L'axiome est l'état initial de A_{det} . Toute transition $A \xrightarrow{a} B$ se traduit par une règle $A \rightarrow aB$. Pour tout état terminal A , on ajoute une règle $A \rightarrow \epsilon$. \square

Exemple 5.3.3. Soit la grammaire suivante :

$$\begin{cases} S \rightarrow aS \mid aA \mid bA \mid a \\ A \rightarrow aB \mid b \mid \epsilon \\ B \rightarrow b \mid aS \mid bS \end{cases}$$

Le langage qu'elle engendre est reconnu par l'automate suivant :



Exemple 5.3.4. L'automate de l'exemple 3.5.4 est simulé par la grammaire qui suit, où 0 est remplacé par A, 1 par B etc, et A est l'axiome.

$$\begin{cases} A \rightarrow bA \mid aB \\ B \rightarrow aB \mid bC \\ C \rightarrow aD \mid bA \\ D \rightarrow aD \mid bD \end{cases}$$

Exercice 5.3.4. Traduire en automate la grammaire

$$\begin{cases} S \rightarrow aS \mid bB \mid a \mid \epsilon \\ A \rightarrow aS \mid \epsilon \\ B \rightarrow a \end{cases}$$

Exercice 5.3.5. Traduire en grammaire l'automate de l'exemple 3.3.2.

5.3.2 Grammaires de type 2, ou non contextuelles

Les grammaires de type 2, appelées **grammaires non contextuelles** (*context-free*), ou parfois grammaires algébriques, n'ont aucune contrainte quant à la partie droite des règles. Elles imposent cependant que la partie gauche ne contienne pas plus d'un caractère, empêchant donc de prendre en compte le contexte dans les dérivations.

Définition 5.3.3: Grammaire non contextuelle

Une grammaire non contextuelle est une grammaire dont toutes les règles sont de la forme
 $A \rightarrow \gamma$
 où A est un symbole non-terminal, et γ est n'importe quel mot constitué de symboles terminaux et non-terminaux.

Exemple 5.3.5. La grammaire

$$\begin{cases} S \rightarrow aSb \\ S \rightarrow \epsilon \end{cases}$$

est une grammaire de type 2, qui engendre le langage $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Remarque Toute grammaire de type 3 est également une grammaire de type 2, puisque toute règle d'une grammaire de type 3 a bien un seul symbole à gauche de toute règle.

Lemme 8. Les langages engendrés par des grammaires de type 3 forment un sous-ensemble strict des langages engendrés par des grammaires de type 2. Autrement dit, si un langage est engendré par une grammaire de type 3, alors il l'est également par une grammaire de type 2, mais il existe au moins un (et même plein) langage engendré par une grammaire de type 2 qui ne peut pas être engendré par une grammaire de type 3.

Démonstration. L'inclusion non-strict est triviale avec la remarque précédente. En effet, soit L un langage engendré par la grammaire de type 3 G , alors G est également une grammaire de type 2 qui, de fait, engendre toujours L .

Pour l'aspect strict de cette inclusion, la grammaire de type 2 de l'exemple 5.3.5 engendre le langage $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Or, on a vu en 3.4 que ce langage n'était pas reconnaissable par automate. Puisque les grammaires de type 3 ont la même expressivité que ces derniers (cf. 5.3.1), il n'en existe pas qui engendre ce langage. \square

5.3.3 Grammaires de type 1, ou contextuelles

Les grammaires de type 1, appelées **grammaires contextuelles**, n'ont aucune contrainte quant à la partie droite des règles. On peut désormais mettre n'importe quel mot (contenant au moins un symbole non-terminal) à gauche d'une flèche. La seule contrainte est qu'on ne permet pas d'avoir le mot vide à droite d'une flèche, sauf cas particulier pour capturer le mot vide.

Définition 5.3.4: Grammaire contextuelle

Une grammaire contextuelle est une grammaire dont toutes les règles sont de la forme $\alpha \rightarrow \beta$, où α et β sont des mots constitués de symboles terminaux et non-terminaux, tels que α contient au moins un symbole non-terminal et $\beta \neq \epsilon$
ou
 $S \rightarrow \epsilon$, où S est l'axiome de la grammaire. Si cette règle est utilisée, S n'a pas le droit d'apparaître à droite d'une règle.

Cette exception un peu étrange permet aux grammaires contextuelles d'engendrer le mot vide, ce qui ne serait pas possible uniquement avec le premier type de règle. Supposons par exemple qu'on ait une grammaire contextuelle G d'axiome S engendrant un langage L ne contenant pas le mot vide, on peut facilement construire la grammaire G' qui engendre $L \cup \{\epsilon\}$.

Il suffit d'ajouter un nouveau non-terminal, S' , qui sera le nouvel axiome, ainsi que les deux règles qui suivent :

$$\begin{cases} S' \rightarrow \epsilon \\ S' \rightarrow S \end{cases}$$

Ainsi, on permet d'engendrer ϵ dès le début, ou de faire une génération "normale" de G en repartant de S . Avec cette transformation, on est sûr que S' n'apparaît jamais à droite d'une règle.

Exemple 5.3.6. La grammaire de l'exemple 5.2.2 n'est **pas** une grammaire de type 1, à cause des règles $X \rightarrow \epsilon$ et $Y \rightarrow \epsilon$. On peut cependant légèrement la modifier pour obtenir une grammaire de type 1 qui engendre le même langage, c'est-à-dire $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$$\begin{cases} S \rightarrow XY \mid \epsilon \\ X \rightarrow aXbZ \mid abZ \\ Zb \rightarrow bZ \\ ZY \rightarrow Yc \\ bY \rightarrow b \end{cases}$$

Exercice 5.3.6. Montrer que la grammaire de l'exemple 5.3.6 engendre bien le langage $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Remarque Une grammaire de type 2 n'est **pas forcément** une grammaire de type 1, à cause des règles de la forme $A \rightarrow \epsilon$. Il existe cependant un algorithme qui prend une grammaire de type 2 et en renvoie une autre, également de type 2, engendrant le même langage sans règle de la forme $A \rightarrow \epsilon$, sauf éventuellement pour l'axiome. Cet algorithme sera décrit en ???.

Lemme 9. Les langages engendrés par des grammaires de type 2 forment un sous-ensemble strict des langages engendrés par des grammaires de type 1. Autrement dit, si un langage est engendré par une grammaire de type 2, alors il l'est également par une grammaire de type 1, mais il existe au moins un (et même plein) langage engendré par une grammaire de type 1 qui ne peut pas être engendré par une grammaire de type 2.

Démonstration. L'inclusion non-strict est encore une fois simple avec la remarque précédente. En effet, soit L un langage engendré par la grammaire de type 2 G , alors on peut construire G' une grammaire de type 2 qui est également de type 1 et engendre toujours L .

Pour l'aspect strict de cette inclusion, la grammaire de type 1 de l'exemple 5.3.6 engendre le langage $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On n'en donnera malheureusement pas la preuve ici, mais ce langage n'est pas engendré par une grammaire de type 2¹. \square

1. Vous pouvez cependant essayer de vous en convaincre en essayant d'écrire une telle grammaire!

Chapitre 6

Introduction à la calculabilité

Bibliographie

Annexe A

Rappels mathématiques

A.1 Logique

A.1.1 Raisonnement par l'absurde

Définition A.1.1: Raisonnement par l'absurde

Un **raisonnement par l'absurde** consiste à prouver une chose en 1) supposant son contraire et 2) montrer que ça fout tout en l'air. Plus formellement, pour prouver P , on suppose $\neg P$ et on montre que ça nous permet de déduire \perp , ce qui veut dire soit que la logique est incohérente, soit que $\neg P$ est fausse, et donc que P est vraie.

Exemple A.1.1. Imaginons une situation où les rues sont sèches, et où on voudrait prouver qu'il n'a pas plu. On suppose alors l'inverse, c'est-à-dire qu'il a plu. Or, s'il a plu, les routes sont mouillées. On obtient alors que 1) les routes sont mouillées et 2) les routes ne sont pas mouillées, ce qui est un paradoxe. La seule hypothèse faite étant le fait qu'il a plu, elle doit être fausse.

Exemple A.1.2. On veut prouver qu'il existe une infinité de nombres premiers. On suppose l'inverse, cad. qu'il y en a un ensemble fini $\{p_1, \dots, p_n\}$. Soit $n = 1 + \prod_{i \in [1-n]} p_i = 1 + p_1 \times \dots \times p_n$. n , comme tout nombre, admet au moins un diviseur premier.

Or, n est strictement plus grand que tout nombre premier et ne peut donc pas en être un. De plus, pour tout $i \in [1-n]$, $\frac{n}{p_i} = p_1 \times \dots \times p_{i-1} \times p_{i+1} \times \dots \times p_n + \frac{1}{p_i}$. Tout nombre premier étant ≥ 2 , $\frac{1}{p_i}$ ne forme pas un entier, et donc $\frac{n}{p_i}$ non plus.

On obtient une contradiction, notre hypothèse sur la finitude des nombres premiers est donc fausse.

A.2 Ensembles

A.2.1 Opérations entre ensembles

On suppose dans cette section deux ensembles E_1 et E_2 d'éléments de même nature. De plus, on rappelle que \mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels (0, 1, 2, ...) et on pose $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pair}\}$ et $I = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ impair}\}$.

Définition A.2.1: Union

L'union de E_1 et E_2 , notée $E_1 \cup E_2$, est l'ensemble des éléments appartenant à E_1 ou E_2 (ou les deux). Plus formellement, $E_1 \cup E_2 = \{x \mid x \in E_1 \vee x \in E_2\}$.

Exemple A.2.1. $P \cup I = \mathbb{N}$.

Définition A.2.2: Intersection

L'intersection de E_1 et E_2 , notée $E_1 \cap E_2$, est l'ensemble des éléments appartenant à E_1 et E_2 . Plus formellement, $E_1 \cap E_2 = \{x \mid x \in E_1 \wedge x \in E_2\}$.

Exemple A.2.2. $P \cap I = \emptyset$.

Définition A.2.3: Différence

La différence (ensembliste) de E_1 et E_2 , notée $E_1 \setminus E_2$, est l'ensemble des éléments appartenant à E_1 mais pas à E_2 . Plus formellement, $E_1 \setminus E_2 = \{x \mid x \in E_1 \wedge x \notin E_2\}$.

Exemple A.2.3. $\mathbb{N} \setminus I = P$ et $\mathbb{N} \setminus P = I$.

Exemple A.2.4. $I \setminus \mathbb{N} = \emptyset$.

Exemple A.2.5. $E_1 \setminus \emptyset = E_1$.

Définition A.2.4: Complémentaire

Le complémentaire de E_1 , noté $\overline{E_1}$, est l'ensemble des éléments (de même nature) n'appartenant pas à E_1 .

Exemple A.2.6. $\overline{P} = I$ et $\overline{I} = P$.

Remarque Soit E l'ensemble des éléments du même type que ceux de E_1 (par exemple \mathbb{N} pour P ou I), alors $\overline{\overline{E_1}} = E \setminus E_1$.

Définition A.2.5: Produit d'ensembles

Soit deux ensembles E_1 et E_2 , contenant respectivement des éléments de types τ_1 et τ_2 . Soit également \cdot une opération de type $\tau_1 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \tau_3$, cad. une opération qui prend en argument gauche un élément de type τ_1 et à droite un argument de type τ_2 et renvoie un objet de type τ_3 , alors

$$E_1 \cdot E_2 = \{x \cdot y \mid x \in E_1 \wedge y \in E_2\}$$

Dit autrement, un produit d'ensembles renvoie l'ensemble des combinaisons d'éléments de deux ensembles *via* une opération fournie. Si l'opération \cdot est un endomorphisme, cad. qu'elle est de type $\tau \rightarrow \tau \rightarrow \tau$, alors on peut itérer le produit de la façon suivante :

$$E^0 = \{1\} \quad \text{Où } 1 \text{ est l'élément neutre de } \tau$$
$$E^{n+1} = E^n \cdot E$$

Cette notion très générale ne doit pas être confondue avec

Définition A.2.6: Produit cartésien

Soit deux ensembles E_1 et E_2 , ne contenant pas forcément des éléments de même type, alors

$$E_1 \times E_2 = \{(x, y) \mid x \in E_1 \wedge y \in E_2\}$$

Le produit cartésien, noté \times , renvoie l'ensemble des couples d'éléments de deux ensembles donnés. Il s'agit d'un cas particulier du produit d'ensemble, où l'opération est la "mise en couple". Cette opération ne pouvant pas être un endomorphisme, le produit cartésien ne peut être itéré.

A.2.2 Ensemble des parties

Soit un ensemble X , on note $P(X)$ (parfois 2^X) l'ensemble de ses parties (ou *powerset*), cad l'ensemble des ensembles formés à partir d'éléments de X .

Exemple A.2.7. Soit $X = \{x, y, z\}$, alors - en classant les éléments par leur cardinal -

$$P(X) = \{ \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\} \}.$$

Lemme 10. $\forall X, \emptyset \in P(X) \wedge X \in P(X)$.

Lemme 11. $\forall X, |P(X)| = 2^{|X|}$.

Démonstration. Pour générer l'ensemble des sous-ensembles de X , on choisit de prendre ou non chaque élément de X . On a donc $\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ fois}}$ choix, d'où les $2^{|X|}$ au total. \square

A.3 Algorithmique

A.3.1 Itératif vs. récursif, le cas des parcours d'arbre

On va comparer les implémentations itératives et récursives d'un parcours d'arbre. On regardera, sans perte de généralité, un parcours préfixe qui effectue une opération f (par exemple afficher, peu importe) sur tous les éléments de l'arbre.

Commençons par l'itératif. Puisqu'on a (littéralement) des branchements, contrairement à une liste où on pourrait juste foncer tout droit, on va avoir besoin d'une mémoire. L'idée va être d'avoir une *todo-list*, sous forme de pile, et d'explorer l'arbre en la suivant. On commence avec seulement la racine dans la pile et, chaque fois qu'en extrait un noeud comme dans la figure A.1, exécuter $f(x)$ et se noter qu'on doit explorer les arbre d_1 , d_2 et d_3 . Au total, on a l'algorithme de la figure A.2.

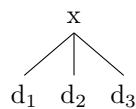


FIGURE A.1 – Exemple de noeud

```
# fonction tree_it(arbre)
todo = stack()
todo.add(root(arbre))
while (todo pas vide):
    current = todo.pop()
    if current is Leaf(x):
        f(x)
    // si current est un noeud interne avec
    // un element x et la liste de descendants descs
    elif current is Noeud(x, descs):
        f(x)
        // pour du prefixe, on doit avoir
        // d1 plus haut dans la pile que d2
        for d in reverse(descs):
            todo.add(d)
```

FIGURE A.2 – Parcours itératif d'arbre

Il n'est pas totalement trivial de se convaincre que cet algorithme visite bien tous les noeuds d'un arbre donné dans un ordre préfixe, notamment en comparaison de la version récursive trouvable en figure A.3

```
# fonction tree_rec(arbre)
if arbre is Leaf(x):
    f(x)
elif arbre is Noeud(x, descs):
    f(x)
    for d in descs:
        tree_rec(d)
```

FIGURE A.3 – Parcours récursif d'arbre

La version récursive est dite **de haut-niveau**, dans le sens où elle est très proche de la définition d'un parcours d'arbre, alors que la version itérative est plus **de bas-niveau**, en ce qu'elle implémente cette définition. Dit autrement, la version récursive est plus abstraite, là où la version itérative est plus concrète, dans la mise en pratique de la définition. D'ailleurs, la figure [A.2](#) correspond bien à l'exécution de la figure [A.3](#), où la pile *todo* remplace la pile d'appels, qui gère les appels récursifs en suivant "où on en est" et ce qu'il reste à faire.

Ces deux approches ont bien sûr leurs avantages et inconvénients. La programmation de haut-niveau permet de se convaincre - voire de prouver - bien plus facilement qu'un programme réalise ce qu'il est censé faire, et est plus facilement lisible / réutilisable. Par contre, jouer soi-même avec l'implémentation de la récursion permet de gérer à la main ces mécanismes et donc potentiellement d'optimiser tout ça - bien que les compilateurs appliquent des optimisations de plus en plus puissantes, bien souvent plus sûres et malignes que ce qu'on peut imaginer.