Bases formelles du TAL

Pierre-Léo Bégay

February 1, 2020

La théorie des automates est l'algèbre linéaire de l'informatique [...], connaissance de base, fondamentale, connue de tous et utilisée par tous, qui fait partie du paysage intellectuel depuis si longtemps qu'on ne l'y remarquerait plus.

Jacques Sakarovitch, dans l'avant-propos de Eléments de théorie des automates

Contents

Chapter 1

Langages

On définit d'abord la notion de mot, nécessaire à celle de langage. On verra ensuite comment décrire des langages à l'aide de notations ensemblistes, révisant ces dernières par la même occasion.

1.1 Mots

Définition 1.1.1: Mot

Un **mot** est une suite de lettres tirées d'un alphabet donné. L'ensemble des mots sur un alphabet Σ est noté Σ^*.

Exemple 1.1.1. *Etant donné l'alphabet* $\Sigma = \{a, b, c\}$*, on peut construire une infinité de mots parmi lesquels*

- abc
- aab
- cc
- $abcabcacbacbacbabcabcabcabcabcabc$
- a

Remarque On va s'intéresser ici à des langages et mots complètement abstraits, en général composés uniquement de a, b et c.

Définition 1.1.2: Mot vide

Une suite de lettres peut être de longueur zéro, formant alors **le mot vide**. Quel que soit l'alphabet, ce dernier sera noté ϵ.

Définition 1.1.3: Concaténation

L'opération de **concaténation**, notée ., consiste tout simplement à "coller" deux mots.

Exemple 1.1.2. *Quelques concaténations :*

- $ab.c = abc$
- $ab.ba = abba$

De plus, pour tout mot w,

$$w.\epsilon = \epsilon.w = w$$

Remarque Les algébristes enthousiastes remarqueront que $(\Sigma^*, ., \epsilon)$ forme un monoïde libre de base Σ

Définition 1.1.4: Longueur d'un mot

Etant donné un mot w, on note sa **longueur** $|w|$.

Exemple 1.1.3. *Tout naturellement,*

- $|abc| = 3$
- $|abba| = 4$
- $|c| = 1$
- $|\epsilon| = 0$

Définition 1.1.5: Principe d'induction sur un mot

Etant donnée une propriété P sur les mots. Si on a

1. $P(\epsilon)$ (cad. que P est vraie pour le mot vide)
2. $\forall w, \forall c \in \Sigma, (P(w) \rightarrow P(c.w))$ (cad. que si P est vraie pour un mot, alors elle reste vraie si on rajoute n'importe quelle lettre à gauche du mot)

Alors la propriété P est vraie pour tout mot w.

Remarque Est également valide le principe d'induction où, dans le cas récursif, la lettre est rajoutée à droite du mot plutôt qu'à sa gauche.

On va s'entraîner à utiliser ce principe d'induction en prouvant deux lemmes qui n'en nécessitaient sans doute pas tant :

Lemme 1. $\forall w \in \Sigma^*, |w| \geq 0$, *cad. que tout mot a une longueur positive.*

Proof. On procède par induction sur w.

Dans le cas de base, $w = \epsilon$. On a donc $|w| = |\epsilon| = 0 \geq 0$.

Dans le cas récursif, $w = c.w'$ avec $c \in \Sigma$ et on suppose $|w'| \geq 0$. On a $|c.w'| = 1 + |w'| \geq |w'| \geq 0$. □

Lemme 2. *Etant donnés deux mots w_1 et w_2, $|w_1.w_2| = |w_1| + |w_2|$.*

Proof. On procède par induction sur w_1.

Dans le cas de base, $w_1 = \epsilon$. On a donc $|w_1.w_2| = |\epsilon.w_2| = |w_2| = 0 + |w_2| = |w_1| + |w_2|$.

Dans le cas récursif, $w_1 = c.w_1'$ avec $c \in \Sigma$ et on suppose $|w_1'.w_2| = |w_1'| + |w_2|$. On a

	$\|w_1.w_2\|$	
=	$\|c.w_1'.w_2\|$	par définition de w_1
=	$1 + \|w_1'.w_2\|$	par définition de $\|.\|$
=	$1 + (\|w_1'\| + \|w_2\|)$	par hypothèse d'induction
=	$(1 + \|w_1'\|) + \|w_2\|$	par associativité de l'addition
=	$\|c.w_1'\| + \|w_2\|$	par définition de $\|.\|$
=	$\|w_1\| + \|w_2\|$	par définition de w_1

On a donc bien nos deux conditions pour le raisonnement par induction. □

Définition 1.1.6: Nombre d'occurrences d'une lettre

Etant donné un mot w et une lettre a, on note $|\mathbf{w}|_\mathbf{a}$ le nombre de a dans w.

Exemple 1.1.4. *On a*

- $|abc|_a = 1$
- $|abba|_b = 2$
- $|c|_a = 0$
- $|\epsilon|_a = 0$

Définition 1.1.7: Préfixe

Un mot p est un **préfixe** du mot w ssi $\exists v, w = p.v$, cad. ssi w *commence* par p.

Définition 1.1.8: Suffixe

Un mot s est un **suffixe** du mot w ssi $\exists v, w = v.s$, cad. ssi w *finit* par s.

Exemple 1.1.5. *Le mot abba admet comme préfixes ϵ, a, ab, abb et abba. Ses suffixes sont, quant à eux, ϵ, a, ba, bba et abba.*

Lemme 3. *$\forall w \in \Sigma^*, \epsilon$ et w sont des préfixes de w*

Proof. Pour ϵ, il suffit de prendre $v = w$. A l'inverse, en prenant $v = \epsilon$, on voit que w est son propre préfixe. □

Lemme 4. *$\forall w \in \Sigma^*, \epsilon$ et w sont des suffixes de w*

Proof. Analogue au lemme précédent. □

Exercice 1.1.1. *Combien de préfixes et suffixes admet un mot w quelconque ?*

Définition 1.1.9: Facteur

Un mot f est un **facteur** du mot w ssi $\exists v_1 v_2, w = v_1.f.v_2$, cad. ssi f apparaît dans w.

Exemple 1.1.6. *Les facteurs du mot abba sont ϵ, a, b, ab, ba, abb, bba et abba.*

Lemme 5. *$\forall w \in \Sigma^*$, ϵ et w sont des facteurs de w.*

Proof. Pour ϵ, il suffit de prendre $v_1 = w$ et $v_2 = \epsilon$ (ou l'inverse) et la condition est trivialement vérifiée. Pour w, on prend $v_1 = v_2 = \epsilon$. □

Exercice 1.1.2. *Donner l'ensemble des facteurs du mot abbba.*

Exercice 1.1.3. *(*) Donner la borne la plus basse possible du nombre de facteurs d'un mot w. Donner un mot d'au moins 3 lettres dont le nombre de facteurs est exactement la borne donnée.*

Définition 1.1.10: Sous-mot

Un mot s est un **sous-mot** du mot w ssi $w = v_0 s_0 v_1 s_1 v_2 ... s_n v_n$ et $s = s_0 s_1 ... s_n$, cad. ssi w est "s avec (potentiellement) des lettres en plus".

Exemple 1.1.7. *On souligne les lettres originellement présentes dans le sous-mot :*

- *ab est un sous-mot de baab, qu'on pourrait aussi voir comme baab*
- *abba est un sous-mot de baabaabbaa.*
- *ba n'est pas un sous-mot de aaabbb (l'ordre du sous-mot doit être préservé dans le mot)*

Lemme 6. *$\forall w \in \Sigma^*$, ϵ et w sont des sous-mots de w.*

Proof. Pour ϵ, il suffit de prendre $n = 0$, $s_0 = \epsilon$, $v_0 = w$ et $v_1 = \epsilon$ (ou l'inverse) et la condition est trivialement vérifiée. Pour w, on prend $n = 0$, $s_0 = w$ et $v_0 = v_1 = \epsilon$. □

Exercice 1.1.4. *Montrer que tout facteur d'un mot en est également un sous-mot. A l'inverse, montrer qu'un sous-mot n'est pas forcément un facteur.*

Exercice 1.1.5. *Donner toutes les façons de voir abba comme sous-mot de baaabaabbaa (cf. exemple 1.1.7).*

Exercice 1.1.6. *Donner l'ensemble des sous-mots de abba*

Exercice 1.1.7. *(*) Donner la borne la plus basse possible du nombre de sous-mots d'un mot w. Donner un mot dont le nombre de sous-mots est exactement la borne donnée.*

Exercice 1.1.8. *(*) Dans l'exercice 1.1.1, on demande le nombre exact de préfixes et suffixes d'un mot, alors que dans les exercices 1.1.3 et 1.1.7, on demande une borne, pourquoi ?*

1.2 Langage

Définition 1.2.1: Langage

Un langage, c'est un ensemble de mots.

On distingue donc d'entrée les deux langages extrêmes : $\mathbf{\Sigma}^*$, l'ensemble (infini) de tous les mots formés à partir de Σ, et $\emptyset$, le langage / ensemble vide, qui se caractèrise comme ne contenant aucun élément.

Remarque Ne surtout pas confondre $\emptyset$ et $\{\epsilon\}$. Le premier est un ensemble vide, contenant donc **0** élément, trandis que le second contient **1** élément, le mot ide.

Définition 1.2.2: Produit de langages

Le produit de deux langages L_1 et L_2, noté $L_1.L_2$, renvoie l'ensemble des mots composés d'un mot de L_1 puis d'un de L_2 :
$L_1.L_2 = \{w_1.w_2 \mid w_1 \in L_1 \ \wedge \ w_2 \in L_2\}$
Il s'agit d'un cas particulier de produit d'ensembles (cf. définition A.2.1.

Exemple 1.2.1. *Soit $L_1 = \{ab, b, \epsilon\}$ et $L_2 = \{a, b, aa\}$, on a*

$$\begin{array}{ll} & L_1.L_2 \\ = & \{ab.a, ab.b, ab.aa, b.a, b.b, b.aa, \epsilon.a, \epsilon.b, \epsilon.aa\} \\ = & \{aba, abb, abaa, ba, bb, baa, a, b, aa\} \end{array}$$

Le produit de langage peut être itéré[1] :

$$\begin{aligned} L^0 &= \{\epsilon\} \\ L^{n+1} &= L^n.L \end{aligned}$$

Les langages disposent en plus d'un opérateur spécial :

Définition 1.2.3: Etoile de Kleene

Soit L un langage. On note L^* la concaténation de n'importe quel nombre de mots apparaissant dans L, cad.

$$L^* = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} L^n = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup ...$$

[1] Concrètement, les puissances sur les langages ont le même sens que sur les nombres, avec la multiplication remplacée par la concaténation

Exemple 1.2.2. *Soit $L = \{aa, b\}$, on a*

$$\begin{aligned} L^* = & \{epsilon\} \\ \cup & \{aa, b\} \\ \cup & \{aaaa, aab, baa, bb\} \\ \cup & \{aaaaaa, aaaab, aabaa, aabb, baaaa, baab, bbaa, bbb\} \\ \cup & \ldots \end{aligned}$$

La question maintenant est maintenant de savoir comment on définit et parle de langages précis et plus "intermédiaires" que les deux précédents. En tout généralité, les ensembles peuvent être définis de façon **extensionnelle** ou **intentionnelle**.

Définition 1.2.4: Définition extensionnelle d'un ensemble

On **définit extensionnellement un ensemble** en en donnant la liste des éléments. L'ensemble vide se note quant à lui $\emptyset$.

Exemple 1.2.3. *On définit par exemple l'ensemble (sans intérêt) suivant :*

$$A = \{b, aca, abba\}$$

Les définitions extensionnelles ont le mérite d'être pour le moins simples, mais pas super pratiques quand il s'agit de définir des ensembles avec un nombre infini d'éléments, comme l'ensemble des mots de longueur pair.

Définition 1.2.5: Définition intensionnelle d'un ensemble

On **définit intensionnellement un ensemble** à l'aide d'une propriété que tous ses éléments satisfont. Étant donnés une propriété $Q(x)$ (typiquement représentée sous la forme d'une formule logique) et un ensemble A, on note $\{x \in A \mid Q(x)\}$ l'ensemble des éléments de A qui satisfont P. Si l'ensemble A est évident dans le contexte, on s'abstiendera de le préciser.

Exemple 1.2.4. *On peut définir l'ensemble des mots de longueur paire $\{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ pair}\}$.*

Si les définitions intentionnelles permettent, contrairement aux extensionnelles, de dénoter des ensembles contenant une infinité de mots, elles sont avant tout un outil théorique. En effet, une propriété comme "$|w|$ paire" ne dit rien à un ordinateur en soi, et doit donc être définie formellement. Se pose alors la question d'un langage pour les propriétés.

Plusieurs logiques équipées des bonnes primitives peuvent être utilisées, mais les traductions sont rarement très agréables. Certaines propriétés nécessitent en effet de ruser contre le langage, voire sont impossibles à formaliser dans certaines logiques. Il existe heureusement un outil qui va nous aider, avec le premier problème du moins.

Chapter 2

Expressions régulières

Les expressions régulières permettent définir de façon finie - et relativement intuitive - "la forme" des mots d'un langage, potentiellement infini. On en présentera d'abord le lexique et l'idée générale à l'aide d'exemples, puis on en définira formellement la syntaxe et la sémantique.

2.1 Lexique et idée générale

Une expression rationnelle (ou *regex*, pour *regular expression*[1]) est, en gros, une *forme de mot*, écrite à l'aide de lettres et des symboles ., $*$ et $+$.

2.1.1 Les lettres et ϵ, la base

Les regex sont construites récursivement, en partant bien sûr des cas de base. Étant donné un alphabet Σ, ces derniers sont les différentes lettres de Σ, ainsi que ϵ. Ces regex dénotent chacune un seul mot, la lettre utilisée dans le premier cas, et le mot vide dans le second.

Exemple 2.1.1. *La regex a dénote le langage* $\{a\}$.

2.1.2 ., la concaténation

On peut heureusement concaténer des regex en utilisant à nouveau le symbole .. La concaténation de deux expressions rationnelles e_1 et e_2, notée $e_1.e_2$ donc, dénote l'ensemble des mots qui peuvent se décomposer en une première partie "de e_1" et une deuxième "de e_2".

Remarque En pratique, on ne notera pas les . dans les regex, mais quelque chose comme *abbc* devrait en théorie être lu comme *a.b.b.c*

Exemple 2.1.2. *La regex abca dénote l'ensemble* $\{abca\}$.

[1] On se trompera sans doute souvent en parlant d'"expression régulière"

2.1.3 *, l'itération

Le symbole $*$ permet de dire qu'une regex peut être répétée autant de fois que voulu (y compris 0).

Exemple 2.1.3. *La regex ab^*c dénote l'ensemble des mots de la forme "un a, puis une série (éventuellement vide) de b, puis un c", c'est-à-dire $\{ac, abc, abbc, abbbc, ...\}$*

En utilisant des parenthèses, on peut appliquer $*$ à des facteurs entiers :

Exemple 2.1.4. *La regex $(aa)^*$ dénote l'ensemble des mots de la forme "une série (éventuellement vide) de deux a", c'est-à-dire $\{\epsilon, aa, aaaa, aaaaaa, ...\}$, ou encore les mots composés uniquement de a et de longueur paire.*

On peut bien sûr utiliser plusieurs $*$ dans une même expression. Dans ce cas, les nombres de "copies" des facteurs concernés ne sont pas liés, comme l'illustrent les examples suivant :

Exemple 2.1.5. *La regex a^*b^* dénote l'ensemble des mots de la forme "Une série (éventuellement vide) de a, puis une série (éventuellement vide) de b", contenant notamment ϵ, a, b, aaab, abbbb, bb, aaa, ab, aabb et aaabb*

Exemple 2.1.6. *La regex $ab(bab)^*b(ca)^*b$ dénote l'ensemble des mots de la forme "ab, puis une série (éventuellement vide) de bab, puis un b, puis une série (éventuellement vide) de ca, puis un b", contenant notamment abbb, abbabbb, abbcab ou abbabbabbabbcab.*

Exercice 2.1.1. *Donner 5 autres mots appartenant au langage dénotée par l'expression de l'exemple 2.1.6.*

Exercice 2.1.2. *Pourquoi le changement de formulation dans les exemples 2.1.5 et 2.1.6 par rapport aux exemples précédents ("c'est à dire $\{x, y, z...\}$" qui devient "contenant notamment x, y ou z") ?*

On peut même faire encore plus rigolo, en enchâssant les étoiles:

Exemple 2.1.7. *La regex $(a^*b^*)^*$ dénote l'ensemble des mots de la forme "une série (éventuellement vide) de [(une série (éventuellement vide) de a] puis [une série (éventuellement vide) de b]]", contenant notamment ϵ, abba; baba ou abbbabba.*

Remarque Certaines regex peuvent générer des mêmes mots de plusieurs façons. Si on prend l'expression de l'exemple 2.1.7 et le mot *abbbabba*, on peut la voir comme

- $\underbrace{\underbrace{\underbrace{a}_{a^1}\underbrace{bbb}_{b^3}}_{a^1b^3}\underbrace{\underbrace{a}_{a^1}\underbrace{bb}_{b^2}}_{a^1b^2}\underbrace{\underbrace{a}_{a^1}\underbrace{}_{b^0}}_{a^1b^0}}_{(a^*b^*)^3}$

- $\underbrace{\underbrace{\underbrace{a}_{a^1}\underbrace{b}_{b^1}}_{a^1b^1}\underbrace{\underbrace{bb}_{a^0b^2}}_{a^0b^2}\underbrace{\underbrace{\underbrace{a}_{a^1}\underbrace{b}_{b^1}}_{a^1b^1}\underbrace{\underbrace{b}_{a^0}\underbrace{a}_{b^1}}_{a^0b^1}\underbrace{\underbrace{a}_{a^1}\underbrace{b}_{b^0}}_{a^1b^0}}_{(a^*b^*)^5}}$
- $\underbrace{\underbrace{\underbrace{a}_{a^1}\underbrace{b}_{b^1}}_{a^1b^1}\underbrace{\underbrace{b}_{a^0b^0}}_{a^0b^0}\underbrace{\underbrace{\underbrace{b}_{a^0}\underbrace{b}_{b^1}}_{a^0b^1}\underbrace{\underbrace{b}_{a^0}\underbrace{a}_{b^1}}_{a^0b^1}\underbrace{\underbrace{\underbrace{a}_{a^1}\underbrace{b}_{b^1}}_{a^1b^1}\underbrace{\underbrace{b}_{a^0}\underbrace{a}_{b^1}}_{a^0b^1}\underbrace{\underbrace{a}_{a^1}\underbrace{b}_{b^0}}_{a^1b^0}}_{(a^*b^*)^7}}$

Le premier déroulement (on parlera de **dérivation**) semble bien sûr plus "naturel" et optimal que les deux autres. Ils sont pourtant tout aussi valides, et il sera utile en pratique d'éviter des expressions fortement ambiguës comme celle-ci.

2.1.4 +, la disjonction

Le symbole + permet quant à lui de signifier qu'on a le choix entre plusieurs sous-regex.

Exemple 2.1.8. *La regex $aa + bb$ dénote l'ensemble $\{aa, bb\}$*

Si on a par exemple $\Sigma = \{a, b, c\}$, alors $(a + b + c)$ correspond à "n'importe quelle lettre de l'alphabet". On écrira cette expression plus simplement Σ.

Exemple 2.1.9. *L'expression $\Sigma\Sigma\Sigma$, ou Σ^3, correspond à n'importe quel mot de longueur 3.*

La disjonction peut bien sûr se combiner avec $*$:

Exemple 2.1.10. *La regex $(aa)^* + (bb)^*$ dénote l'ensemble des mots composés uniquement de a et de longueur paire, ou uniquement de b et de longueur également paire, par exemple ϵ, aa, bb, aaaa ou bbbbbb. La dérivation du dernier mot serait alors de la forme*

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{bb}_{(bb)^4}\underbrace{bb}_{(bb)^*}}_{(aa)^* + (bb)^*}}$$

Exemple 2.1.11. *La regex $(aa + bb)^*$ dénote l'ensemble des mots de la forme "une série (éventuellement vide) de aa et bb", par exemple aabb, aaaaaaaaaaaa ou bbaabbbbbbaa. La dérivation du dernier mot ressemblerait alors à*

$$\underbrace{\underbrace{bb}_{aa+bb}\underbrace{aa}_{aa+bb}\underbrace{bb}_{aa+bb}\underbrace{bb}_{aa+bb}\underbrace{bb}_{aa+bb}\underbrace{aa}_{aa+bb}}_{(aa+bb)^6}$$

Exercice 2.1.3. *Donner un mot acceptant deux dérivations avec la regex de l'exemple 2.1.10 (justifier en donnant les dérivations). Existe-t-il un autre mot admettant plusieurs dérivations ?*

Exercice 2.1.4. *Existe-t-il un mot acceptant plusieurs dérivations pour la regex de l'exemple 2.1.11 ?*

Exercice 2.1.5. *Donner un mot accepté par la regex de l'exemple 2.1.11 mais pas celle de l'exemple 2.1.10. Est-il possible de trouver un mot qui, à l'inverse, est accepté par la deuxième mais pas la première ?*

Exercice 2.1.6. *(*) Exprimer, en langue naturelle et de façon concise, le langage dénoté par la regex de l'exemple 2.1.7. Traduire ensuite ce langage en une regex non-ambiguë, c'est-à-dire où il n'y aura qu'une dérivation pour chaque mot.*

Notez que dans l'exemple 2.1.10, on choisit d'abord de composer le mot de a ou de b, puis la longueur. A l'inverse, on choisit dans la regex de l'exemple 2.1.11 la longueur, puis a ou b pour chaque "morceau", et ce, individuellement. Pour mieux comprendre cette différence, il faut s'intéresser formellement à la mécanique des regex, qui se décompose bien évidemment entre syntaxe et sémantique.

2.2 Syntaxe

Les expressions rationnelles ont, comme à peu près tout langage, une structure. Elles sont définies à l'aide de 5 règles, dont 3 récursives, qui correspondent au lexique décrit précédemment :

$$\begin{array}{rcl} e & ::= & \epsilon \\ & | & a \in \Sigma \\ & | & e_1.e_2 \\ & | & e_1 + e_2 \\ & | & e_1^* \end{array}$$

Figure 2.1: Syntaxe des expression régulières

La figure 2.1 se lit "une expression rationnelle e est

soit le symbole ϵ

soit une lettre appartenant à l'alphabet Σ

soit une expression rationnelle e_1 (définie à l'aide des mêmes règles), suivie de ., puis d'une expression rationnelle e_2

soit une expression rationnelle e_1, suivie de $+$, puis d'une expression rationnelle e_2

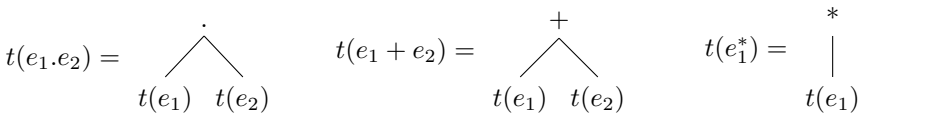
soit une expression rationnelle e_1 auréolée d'un $*$

et rien d'autre".

Ces règles de dérivation nous permettent de *parser* des expressions rationnelles. En notant $t()$ la fonction qui prend une regex et renvoie son arbre syntaxique, on peut la définir à l'aide des 5 règles de la figure 2.1 :

- $t(\epsilon)$ renvoie une feuille annotée par ϵ.
- $t(a)$ renvoie une feuille annotée par a.

- $t(e_1.e_2)$ renvoie un noeud . dont les descendants sont les arbres de e_1 et e_2, comme sur la figure 2.2a
- $t(e_1 + e_2)$ renvoie un noeud $+$ dont les descendants sont les arbres de e_1 et e_2, comme sur la figure 2.2b
- $t(e_1^*)$ renvoie un noeud $*$ avec un seul descendant, l'arbre de e_1, comme sur la figure 2.2c



(a) Concaténation (b) Disjonction (c) Etoile

Figure 2.2: Analyse syntaxique récursive de *regex*

Les règles décrites ci-avant ne disent pas comment parser une expression comme $a.b+c$. En effet, rien ne dit si elle doit être lue comme $(ab) + c$ ou $a.(b + c)$. Pour éviter d'avoir à mettre des parenthèses absolument partout, on va devoir définir les priorités entre les différentes opérations :

$$+ < . < *$$

Figure 2.3: Priorités pour les opérateurs d'expressions rationnelles

Concrètement, $+ <$. veut dire qu'une expression comme $a.b + c$ doit être interprétée comme $(a.b) + c$[2]. De même, $a.b^*$ se lit $a.(b^*)$, et $a + b^*$ comme $a + (b^*)$.

Maintenant qu'on a les règles de dérivation et les priorités associées, on peut commencer à jouer avec quelques exemples.

Exemple 2.2.1. *L'expression rationnelle $(aa)^* + (bb)^*$ peut être parsée comme*

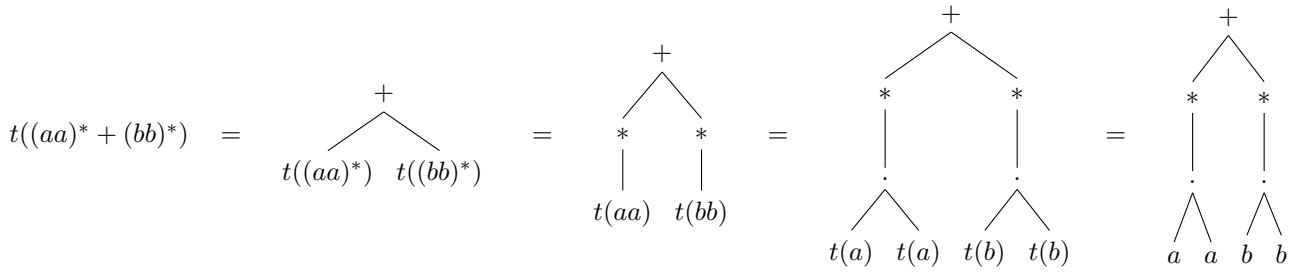
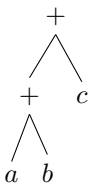


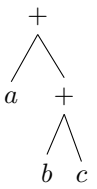
Figure 2.4: Analyse syntaxique de $(aa)^* + (bb)^*$

On remarquera bien sûr l'absence habile dans l'exemple 2.2.1 de formes encore problématiques : $a + b + c$ et $a.b.c$. En effet, rien ne nous dit pour l'instant auquel des arbres de la figure 2.5 la première regex correspond.

[2]De la même façon que $a \times b + c$ se comprend comme $(a \times b) + c$



(a) version $(a + b) + c$



(b) version $a + (b + c)$

Figure 2.5: Ambiguïté syntaxique de $a + b + c$

Comme on le verra dans la partie sémantique, les symboles + et . sont **associatifs**, ce qui veut dire que, pour toutes expressions e_1, e_2 et e_3, $(e_1 + e_2) + e_3$ et $e_1 + (e_2 + e_3)$ ont le même sens[3], et pareil avec la concaténation. Malgré une méfiance justifiée des arbres ternaires et plus, on se permettra donc d'écrire des expressions ambiguës comme $e_1 + e_2 + e_3$ ou $e_1e_2e_3$, et de les parser comme dans la figure 2.6

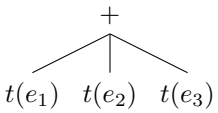
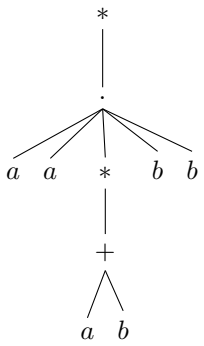


Figure 2.6: Ambiguïté syntaxique assumée de $a + b + c$

Exemple 2.2.2. *L'expression rationnelle* $(aa(a + b)^*bb)^*$ *s'analyse comme*



On a pour l'instant uniquement défini le lexique et la syntaxe des expressions régulières, mais les beaux arbres qu'on est désormais en mesure de constuire n'ont en soi aucun sens, et donc aucun intérêt. Il s'agit donc désormais d'en définir une sémantique.

2.3 Sémantique

Avant de regarder la tuyauterie d'une fonction, il s'agit d'en définir le type. La sémantique des expressions rationnelles, notée $[\![e]\!]$, prend en argument une expression et renvoie un langage,

[3]Notez qu'en arithmétique, + et × sont également associatives

donc un ensemble de mots. Comme pour le parsing, il suffit de définir la sémantique sur les 5 constructeurs des expressions rationnelles pour pouvoir toutes les traiter :

2.3.1 Les cas de base

Ici, pas de surprise, $[\![\epsilon]\!] = \{\epsilon\}$ et $[\![a]\!] = \{a\}$.

2.3.2 Sémantique de la concaténation

La sémantique de la concaténation repose sur un produit d'ensembles avec la concaténation (cf. définition A.2.1). Formellement, on a

$$\left[\!\!\left[\begin{array}{c} \cdot \\ \diagup\ \diagdown \\ e_1 \quad e_2 \end{array} \right]\!\!\right] = [\![e_1]\!].[\![e_2]\!] = \{u.v \mid u \in [\![e_1]\!] \ \wedge \ v \in [\![e_2]\!]\} = \bigcup_{\substack{u \in [\![e_1]\!] \\ v \in [\![e_2]\!]}} u.v$$

Concrètement, ça veut dire que la sémantique de la concaténation de deux regex est la concaténation des sémantiques de e_1 et e_2, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons d'un mot de $[\![e_1]\!]$ concaténé à un mot de $[\![e_2]\!]$. La notation $\bigcup_{\substack{u \in [\![e_1]\!] \\ v \in [\![e_2]\!]}} u.v$ est analogue une double boucle sur les éléments de $[\![e_1]\!]$ et $[\![e_2]\!]$, comme dans le pseudocode python suivant :

```
s = set()
for u in e1:
    for v in e2:
        s.add(u.v)
return s
```

Exemple 2.3.1. *En appliquant les règles de la concaténation et des lettres vues précédemment, la sémantique de l'expression ab est*

$$\left[\!\!\left[\begin{array}{c} \cdot \\ \diagup\ \diagdown \\ \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \end{array} \right]\!\!\right] = \bigcup_{\substack{u \in [\![a]\!] \\ v \in [\![b]\!]}} u.v = \bigcup_{\substack{u \in \{a\} \\ v \in \{b\}}} u.v = \{a.b\} = \{ab\}$$

L'exemple n'est pas renversant, mais permet d'illustrer l'aspect purement systémique et récursif de la sémantique. Pour des exemples plus intéressants, on va avoir besoin d'ajouter des constructeurs à la sémantique.

2.3.3 Sémantique de la disjonction

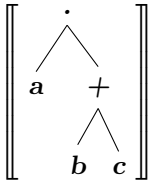
Formellement, on a

$$\left[\!\!\left[\begin{array}{c} + \\ \diagup\ \diagdown \\ e_1 \quad e_2 \end{array} \right]\!\!\right] = [\![e_1]\!] \cup [\![e_2]\!]$$

Concrètement, ça veut dire que la sémantique de la disjonction de deux regex est l'union des sémantiques de e_1 et e_2, c'est-à-dire l'ensemble des mots qui apparaissent dans $[\![e_1]\!]$ ou (inclusif) $[\![e_2]\!]$.

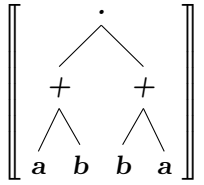
Remarque A partir d'ici et pour des raisons de mise en page, on ne mettra pas forcément tout sous forme d'arbres dans les exemples, et on comptera sur la capacité du lecteur ou de la lectrice à *parser* automatiquement toute expression rationnelle qu'il ou elle lit. Ne vous y trompez pas cependant : l'analyse sémantique s'opère bien sur un arbre plutôt que sur une expression "plate".

Exemple 2.3.2. *En appliquant les règles de la concaténation et des lettres vues précédemment, la sémantique de l'expression $a(b+c)$ est*



$$= \bigcup_{\substack{u\in[\![a]\!]\\ v\in[\![b+c]\!]}} u.v = \bigcup_{\substack{u\in\{a\}\\ v\in[\![b]\!]\cup[\![c]\!]}} = \bigcup_{\substack{u\in\{a\}\\ v\in\{b,c\}}} u.v = \{a.b, a.c\} = \{ab, ac\}$$

Exemple 2.3.3. *En appliquant les règles de la concaténation et des lettres vues précédemment, la sémantique de l'expression $(a+b)(b+a)$ est*



$$= \bigcup_{\substack{u\in[\![a+b]\!]\\ v\in[\![b+a]\!]}} u.v = \bigcup_{\substack{u\in[\![a]\!]\cup[\![b]\!]\\ v\in[\![b]\!]\cup[\![a]\!]}} = \bigcup_{\substack{u\in\{a,b\}\\ v\in\{b,a\}}} u.v = \{a.b, a.a, b.b, b.a\} = \{ab, aa, bb, ba\}$$

Il ne nous manque maintenant que le plus ésotérique des constructeurs.

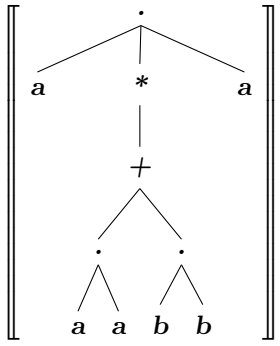
2.3.4 Sémantique de l'itération

Formellement, on a

$$[\![e^*]\!] = [\![e]\!]^* = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} [\![e]\!]^n = \{[\![e]\!]^0, [\![e]\!]^1, [\![e]\!]^2, [\![e]\!]^3 ...\}$$

Concrètement, on fait l'union de $[\![e]\!]^n$ pour tous les entiers n, $[\![e]\!]^n$ étant n mots de $[\![e]\!]$ concaténés.

Exemple 2.3.4. *La sémantique de l'expression $a(aa+bb)^*a$ est*



$$
\begin{aligned}
&= [\![a]\!].[\![(aa+bb)^*]\!].[\![a]\!] \\
&= \{a\}.\bigcup_{n\in\mathbf{N}}[\![aa+bb]\!]^n.\{a\} \\
&= \{a\}.\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\{aa,bb\}^n.\{a\} \\
&= \{a.\epsilon.a, a.aa.a, a.bb.a, a.((aa).(aa)).a, a.((aa).(bb)).a, a.((bb).(aa)).a, a.((bb).(bb)).a, ..\} \\
&= \{aa, aaaa, abba, aaaaaa, aaabba, abbaaa, abbbba, ...\}
\end{aligned}
$$

2.4 Mise en application

On a abordé les expressions régulières sous un angle très théorique, mais on leur trouve bien sûr des applications concrètes.

2.4.1 Quelques astuces

On présente d'abord, sous forme d'exercices (corrigés dans un autre document), quelques astuces classiques, susceptibles d'aider les TAListes dans leurs futures oeuvres.

Exercice 2.4.1. *Donner une regex pour les mots qui commencent par a.*

Exercice 2.4.2. *Donner une regex pour les mots qui finissent par b.*

Exercice 2.4.3. *Donner une regex pour les mots qui commencent par a finissent par b.*

Exercice 2.4.4. *Donner une regex pour les mots de longueur paire.*

Exercice 2.4.5. *Donner une regex pour les mots de longueur impaire qui contiennent au moins 4 lettres.*

Exercice 2.4.6. *Donner une regex pour les mots de longueur impaire, qui contiennent au moins 4 lettres, commencent par a et finissent par b.*

2.4.2 Syntaxe en pratique

Les expressions régulières dans Unix, Python & cie utilisent une syntaxe différente, et surtout plus étendue que celle que l'on vient d'étudier. Celà est dû aux besoins différents que l'on a entre la théorie et la pratique.

Dans la théorie, on veut définir nos objets de façon minimale, c'est-à-dire avec le moins de symboles et de règles possible, afin d'en simplifier l'étude. Par exemple, le peu de règles permet une définition légère de la sémantique formelle des *regex*. De la même façon, toute preuve à leur propos en sera tout autant simplifiée :

Théorème 1. *$\forall e, \exists w \in [\![e]\!]$, cad. que toute expression rationnelle dénote au moins un mot.*

Proof. On procède par induction structurelle sur l'expression rationnelle e:

- Si $e = \epsilon$, alors $[\![e]\!] = \{\epsilon\}$, qui contient bien un mot (ϵ donc)
- Si $e = a$, alors $[\![e]\!] = \{a\}$, qui contient bien un mot (a)
- Si $e = e_1 + e_2$, alors $[\![e]\!] = [\![e_1]\!] \cup [\![e_2]\!]$. Par hypothèse d'induction, $[\![e_1]\!]$ contient un mot w_1 et $[\![e_2]\!]$ contient w_2. $[\![e]\!]$ contient donc non pas un, mais au moins deux mots.
- Si $e = e_1.e_2$, alors $[\![e]\!] = [\![e_1]\!].[\![e_2]\!]$. Par hypothèse d'induction, $[\![e_1]\!]$ contient un mot w_1 et $[\![e_2]\!]$ contient w_2. $[\![e]\!]$ contient donc un mot, $w_1 w_2$.
- Si $e = e_1^*$, alors $[\![e]\!]$ contient ϵ.

□

Dans la pratique, on préfère ne pas avoir à réinventer la roue chaque matin, la syntaxe des *regex* y est donc étendue. Ces extensions ne changent rien au fond, dans le sens où elles n'ajoutent pas en expressivité. En effet, les nouveaux symboles peuvent tous être codés avec ceux de la syntaxe minimale :

- $e?$, ou "e une ou zéro fois", peut être codée comme $(e + \epsilon)$
- $e+$, ou "e au moins une fois", peut être codée comme ee^*

remarque On trouve régulièrement cette notation dans la littérature académique sous la forme e^+. Le $e_1 + e_2$ qu'on a vu est lui, pour le coup, écrit $e_1|e_2$ en pratique.

- $e\{n\}$, ou "e exactement n fois" peut être simplement traduite en $\underbrace{eee...eee}_{n \text{ fois}}$
- $e\{n,\}$, ou "e au moins n fois" peut être simplement traduite en $\underbrace{eee...eee}_{n \text{ fois}} e^*$
- $e\{n,m\}$, ou "e entre n et m fois" peut se traduire $\underbrace{eee...eee}_{n \text{ fois}} \underbrace{(e+\epsilon)...(e+\epsilon)}_{m-n \text{ fois}}$

Les traductions proposée ici ne correspondent pas forcément à ce qui se passe concrètement dans les bibliothèques de *regex* des différents langages de programmation (la dernière en particulier semble très ambigüe, et donc inefficace). L'objectif est seulement de montrer que les ajouts à la syntaxe n'ent modifient pas l'expressivité, et qu'il s'agit seulement de ce qu'on appelle du **sucre syntaxique**.

2.4.3 Calcul de l'appartenance

Soit l'expression rationnelle $e = ((\Sigma^* baaba^+)^* baa(abba)^+ ba(bb)^* a)^*$, il n'est (normalement) pas totalement évident de déterminer automatiquement si un mot donné appartient à sa sémantique (on pourra se convaincre en essayant à la main avec par exemple *baabbaaabaababbaaa*). Or, pour mettre en application les expressions rationnelles[4], on va avoir besoin d'un tel algorithme. Ce dernier va nous être fourni via les **automates finis**.

[4] Notamment pour en repérer des occurences dans du texte

Chapter 3

Automates finis

Les automates forment un langage de programmation un peu particulier, en ce qu'il est très visuel (chaque programme est un graphe annoté, ou plus prosaïquement des ronds et des flèches) et que tout programme a le même type : un mot en entrée, un booleen en sortie. Un automate définit donc un langage en donnant un moyen automatique de déterminer si n'importe quel mot donné en fait partie ou non[1].

Les automates se divisent en de nombreuses sous-catégories, dont certaines ramifications seront explorées dans ce cours. On verra d'abord le fonctionnement général des automates finis déterministes (3.1) et non-déterministes (3.2), en allant à chaque fois du général au technique. On verra ensuite des algorithmes pour transformer (3.3) des automates. On étudiera enfin les combinaisons d'automates, et donc les propriétés de clôture des langages qu'ils définissent (3.4).

3.1 Automates finis déterministes

On introduit les Automates finis déterministes, noté AFD (ou DFA, pour *deterministic finite automaton*[2]), avant d'en étudier la formalisation.

3.1.1 Principe général

Imaginez que vous développiez un jeu d'infiltration. Dans ce jeu, le comportement des méchants gardes ressemblerait sans doute à la figure 3.1.

Ce qu'est censé traduire ce graphe, c'est qu'un garde commence (la $\rightarrow$ sur sa gauche) dans un **état** qui est le dodo, et que différents événements (un bruit, un ennemi trouvé ou non, ou encore tué) vont le faire changer d'**état**. Un AFD fonctionne sur un principe similaire[3], mais où les transitions sont déclenchées par la lecture de lettres : un AFD, en partant d'un état initial, lit le mot donné en argument lettre par lettre et, à chaque lecture, change d'état en fonction de la lettre.

[1] En ce sens, les automates sont des fonctions caractéristiques, qui sont aux ensembles ce que les videurs sont aux boîtes de nuit.

[2] Notez qu'on parle d'*automat**on*** au singulier et d'*automat**a*** au pluriel

[3] Les AFD sont en fait des cas particuliers de Machines à états finis, qui sont effectivement employées dans la conception de jeux vidéo

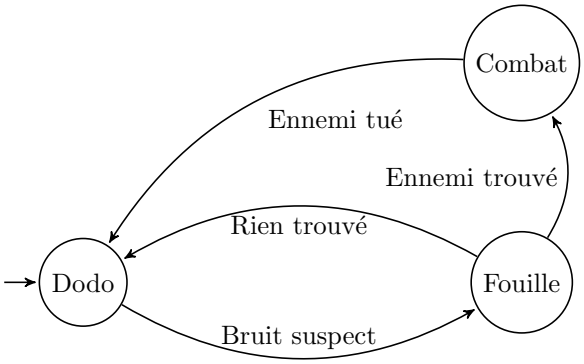


Figure 3.1: Comportement des gardes d'un jeu imaginaire

Exemple 3.1.1. *L'automate de la figure 3.2 contient trois états, appelés* 0, 1 *et* 2. *La lecture de tout mot commence en* 0, *appelé* ***état initial****. Si on lui passe le mot abbaaba en argument, la première lettre (a) va nous faire passer de l'état* 0 *à* 1. *La deuxième lettre (b) nous refait passer en* 0. *La troisième (b) nous y fait rester. Les deux lettres suivantes nous font ensuite passer en* 1 *puis en* 2. *Les deux dernières lectures nous font rester en* 2 *(la virgule est à comprendre comme une disjonction, cad. comme un "ou").*

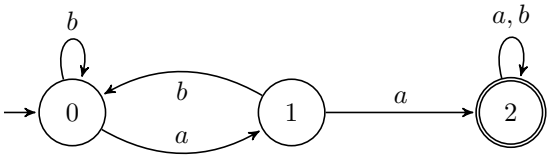


Figure 3.2: Un premier automate

Comme dit en introduction, un automate accepte ou rejette tout mot donné. Certains états, notés par une douche couche, sont appelés états finaux (ou terminaux). Un mot est accepté par un automate si et seulement si le parcours de ce mot dans l'automate se termine sur un état final.

Exemple 3.1.2. *L'automate de la figure 3.2 accepte le mot abbaaba, puisqu'il nous fait passer de l'état initial* 0 *à* 2, *qui est un état final. Il n'accepte en revanche pas les mots bbaba (état* 1*), babbab ou* ϵ *(état* 0 *tous les deux).*

Exercice 3.1.1. *Les mots abbaba, ababbaab et abba sont-ils acceptés par l'automate de la figure 3.2 ?*

Exercice 3.1.2. *Quel est le* ***langage reconnu****, cad. l'ensemble des mots acceptés, par l'automate de la figure 3.2 ? Donner la réponse en français et sous forme d'expression rationnelle.*

Remarque Un automate ne contient pas toujours une transition pour chaque couple d'état / lettre, auquel cas il est dit **incomplet**. Si un automate ne contient pas de chemin correspondant à un mot, ce dernier est rejetté.

Exemple 3.1.3. *L'automate de la figure 3.3 rejette le mot aba, car il n'y a pas de transition partant de l'état 1 pour la lettre b.*

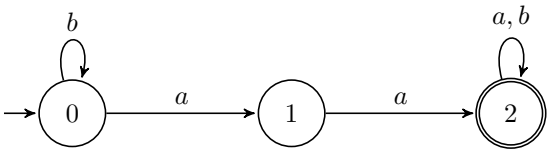


Figure 3.3: Un automate incomplet

Exercice 3.1.3. *Les mots bbbaababbaaba, bbabaab et baaaaaab sont-ils acceptés par l'automate de la figure 3.3 ?*

Exercice 3.1.4. *Quel est le langage reconnu par l'automate de la figure 3.3 ? Donner la réponse en français et sous forme d'expression rationnelle.*

Il nous semble important d'insister sur le point suivant : de la même façon qu'un programme devrait la traduction d'une logique sous-jacente plutôt qu'un bidouaille fait à la va-vite, les états d'un automate ont un sens. Avant d'écrire un automate, il convient donc de réfléchir quelles sont les informations à retenir au cours de la lecture du mot. Si la bonne réponse est trouvée, le reste de l'automate devrait s'écrire seul.

Exemple 3.1.4. *On veut écrire un automate reconnaissant le langage* $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a$ *pair et* $|w|_b$ *impair*$\}$*, cad. l'ensemble des mots avec un nombre pair de a et impairs de b*[4].

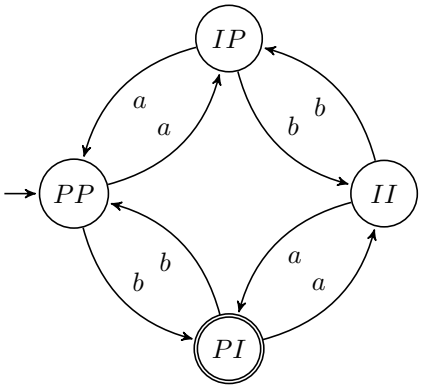
Il n'est pas question de compter les a et les b comme on pourrait naïvement l'imaginer, non seulement puisqu'il faut se contenter d'un nombre fini d'états, mais aussi parce que c'est beaucoup plus d'information que nécessaire. Les seules données qui nous intéressent sont en effet la parité du nombre de a et du nombre de b du mot donné : a^2b *comme* $a^{26}b^{131}$ *sont équivalents dans leur appartenance à* L*.*

Le nombre de a et de b étant tous les deux pairs ou impairs, on a 4 possibilités. Nos états s'appeleront PP *(nombre de a pair et nombre de b pair),* PI *(a pair et b impair),* IP *et* II*. La définition de* L *nous dit immédiatement que seul* PI *devrait être terminal. L'état initial devrait être celui qui correspond à* ϵ*, cad.* PP*.*

Les transitions s'écrivent naturellement : en partant de PP*, la lecture d'un a change la parité du nombre de a mais pas celle du nombre de b, et nous emmène donc vers* IP*, tandis que b pointe vers* PI*, et ainsi de suite. S'il y a d'autres lettres dans l'alphabet, elles devraient faire des boucles, puisqu'elles ne changent rien aux parités qui nous intéressent.*

Au final, on obtient l'automate suivant :

[4] On conseillera tout d'abord au lecteur ou à la lectrice de tenter lui/elle-même l'exercice, afin de mesurer la pertinence de l'approche ici présentée



Exercice 3.1.5. *(**) En reprenant l'exemple 3.1.4, montrer que* $\forall w, w \in L \leftrightarrow$ *l'automate accepte* w*. Vous pouvez procéder par induction sur* w*, en utilisant un objectif un peu plus précis que celui fourni.*

Dans la série d'exercices qui suit, on utilisera comme alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Exercice 3.1.6. *Donner un automate qui reconnaît le langage* $\{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq 3\}$.

Exercice 3.1.7. *Donner un automate pour les mots qui commencent par* a.

Exercice 3.1.8. *Donner un automate pour les mots qui finissent par* b.

Exercice 3.1.9. *Donner un automate pour les mots qui commencent par* a *finissent par* b.

Exercice 3.1.10. *Donner un automate pour les mots de longueur paire.*

Exercice 3.1.11. *Donner un autuomate pour les mots de longueur impaire qui contiennent au moins 4 lettres.*

Exercice 3.1.12. *Donner un automate pour les mots de longueur impaire, qui contiennent au moins 4 lettres, commencent par* a *et finissent par* b.

3.1.2 Formalisation

3.2 Automates finis non-déterministes

3.2.1 Principe général

3.2.2 Formalisation

3.3 Transformation d'automates

3.3.1 Complétion

3.3.2 Déterminisation

3.3.3 Minimisation

3.4 Propriétés de clôture

3.4.1 Union

3.4.2 Intersection

3.4.3 Concaténation

3.4.4 Itération

Chapter 4

Grammaires formelles

TODO

Chapter 5

Introduction à la calculabilité

Chapter 6

Théorème de Kleene et hiérarchie de Chomsky

TODO

Appendix A

Rappels mathématiques

A.1 Logique

A.1.1 Raisonnement par l'absurde

Définition A.1.1: Raisonnement par l'absurde

Un **raisonnement par l'absurde** consiste à prouver une chose en 1) supposant son contraire et 2) montrer que ça fout tout en l'air. Plus formellement, pour prouver P, on suppose $\neg P$ et on montre que ça nous permet de déduire $\bot$, ce qui veut dire soit que la logique est incohérente, soit que $\neg P$ est fausse, et donc que P est vraie.

Exemple A.1.1. *Imaginons une situation où les rues sont sèches, et où on voudrait prouver qu'il n'a pas plu. On suppose alors l'inverse, c'est-à-dire qu'il a plu. Or, s'il a plu, les routes sont mouillées. On obtient alors que 1) les routes sont mouillées et 2) les routes ne sont pas mouillées, ce qui est un paradoxe. La seule hypothèse faite étant le fait qu'il a plu, elle doit être fausse.*

Exemple A.1.2. *On veut prouver qu'il existe une infinité de nombres premiers. On suppose l'inverse, cad. qu'il y en a un ensemble fini* $\{p_1, ..., p_n\}$. *Soit* $n = 1 + \prod_{i \in [1-n]} p_i = 1 + p_1 \times ... \times p_n$. *$n$, comme tout nombre, admet au moins un diviseur premier.*

Or, n est strictement plus grand que tout nombre premier et ne peut donc pas en être un. De plus, pour tout $i \in [1-n]$, $\frac{n}{p_i} = p_1 \times ... \times p_{i-1} \times p_{i+1} \times ... \times p_n + \frac{1}{p_i}$. *Tout nombre premier étant* ≥ 2, $\frac{1}{p_i}$ *ne forme pas un entier, et donc* $\frac{n}{p_i}$ *non plus.*

On obtient une contradiction, notre hypothèse sur la finitude des nombres premiers est donc fausse.

A.2 Ensembles

A.2.1 Opérations entre ensembles

Définition A.2.1: Produit d'ensembles

Soit deux ensembles E_1 et E_2, contenant respectivement des éléments de types τ_1 et τ_2. Soit également $\cdot$ une opération de type $\tau_1 \to \tau_2 \to \tau_3$, cad. une opération qui prend en argument gauche un élément de type τ_1 et à droite un argument de type τ_2 et renvoie un objet de type τ_3, alors

$$E_1 \cdot E_2 = \{x \cdot y \mid x \in E_1 \ \wedge \ y \in E_2\}$$

Dit autrement, un produit d'ensembles renvoie l'ensemble des combinaisons d'éléments de deux ensembles *via* une opération fournie. Si l'opération $\cdot$ est un endormorphisme, cad. qu'elle est de type $\tau \to \tau \to \tau$, alors on peut itérer le produit de la façon suivante :

$$E^0 = \{1\} \qquad \text{Où 1 est l'élément neutre de } \tau$$
$$E^{n+1} = E^n \cdot E$$

Cette notion très générale ne doit pas être confondue avec

Définition A.2.2: Produit cartésien

Soit deux ensembles E_1 et E_2, ne contenant pas forcément des éléments de même type, alors

$$E_1 \times E_2 = \{(x, y) \mid x \in E_1 \ \wedge \ y \in E_2\}$$

Le produit cartésien, noté $\times$, renvoie l'ensemble des couples d'éléments de deux ensembles donnés. Il s'agit d'un cas particulier du produit d'ensemble, où l'opération est la "mise en couple". Cette opération ne pouvant pas être un endormorphisme, le produit cartésien ne peut être itéré.