

Bases formelles du TAL DM sur les ϵ -transitions

Pierre-Léo Bégay

À me rendre le 6 mars 2020

1 ϵ -transitions

1.1 Définitions

On donne parfois la définition suivante d'un AFND :

$$A = \langle Q, \Sigma, q_0, F, \delta \rangle$$

Q ensemble fini d'états

Σ l'alphabet (ensemble de lettres)

q_0 l'état initial

$F \subseteq Q$, les états terminaux

δ fonction de $(Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}))$ dans 2^Q

Par rapport à la définition du cours, on revient à un seul état initial et qu'on permet d'étiqueter des transitions par ϵ . Ces transitions, appelées ϵ -transitions, sont *gratuites*, par contraste avec les transitions normales qui *consomment* une lettre chaque fois qu'on les emprunte. La notion d'acceptation est sinon la même que pour les AFND qu'on a déjà vus.

1.2 Exemples

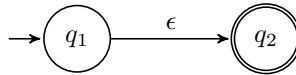


Figure 1: Automate A_1

Dans l'automate A_1 , aucune transition par lettre n'est possible, ce qui empêche d'accepter tout mot autre que le mot vide. Ce dernier est cependant reconnu car on peut emprunter *gratuitement* l'unique transition et atterrir dans un état terminal.

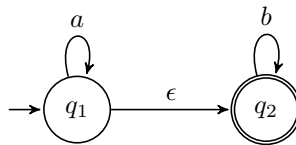


Figure 2: Automate A_2

L'automate A_2 reconnaît quant à lui le langage a^*b^* . En effet, on peut boucler avec des a sur q_1 puis, une fois qu'on a fini, on passe gratuitement à q_2 (sans consommer de a ou de b) où on peut boucler avec des b jusqu'à avoir fini le mot.

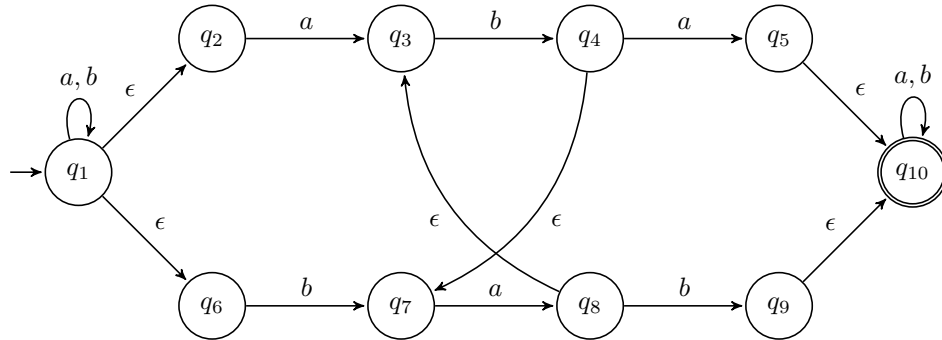


Figure 3: Automate A_3

Enfin, l'automate A_3 , proche d'un qu'on a vu en cours, reconnaît quant à lui le langage $\Sigma^*aba\Sigma^* + \Sigma^*bab\Sigma^*$ (les deux ϵ -transitions en croix ne permettent pas d'accepter plus de mots).

2 Lecture d'automates avec ϵ -transitions

Décrivez les langages reconnus par les automates A_4 , A_5 et A_6 à l'aide d'une expression rationnelle. Essayez de justifier, au moins informellement, votre réponse.

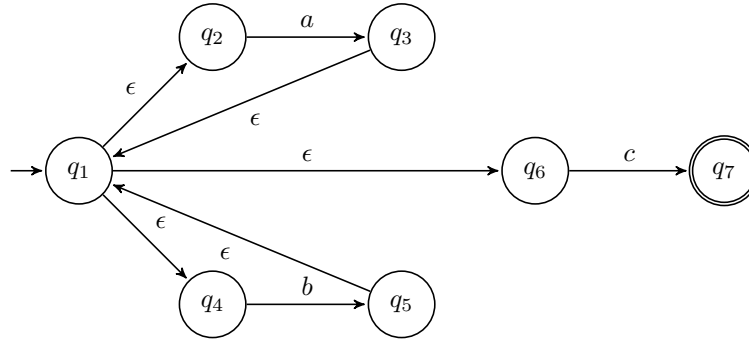


Figure 4: Automate A_4

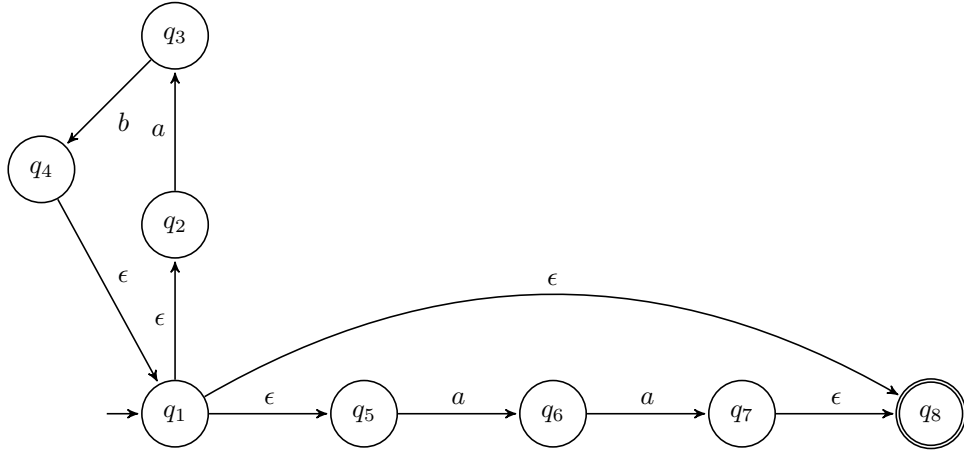


Figure 5: Automate A_5

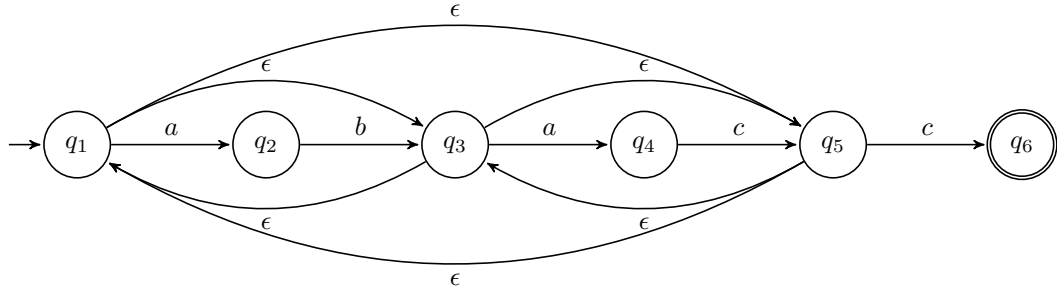


Figure 6: Automate A_6

3 Elimination d' ϵ -transitions

On propose une méthode pour éliminer les ϵ -transitions s'appuyant sur la fonction ϵ^+ de type $Q \rightarrow 2^Q$ définie de la façon suivante :

1. Si $q_j \in \delta(q_i, \epsilon)$, alors $q_j \in \epsilon^+(q_i)$
2. Si $q_j \in \epsilon^+(q_i)$ et $q_k \in \delta(q_j, \epsilon)$, alors $q_k \in \epsilon^+(q_i)$

Figure 7: Définition de ϵ^+

A partir d'un automate non-déterministe avec ϵ -transitions $\langle Q, \Sigma, q_0, F, \delta \rangle$, on génère un automate non-déterministe équivalent sans ϵ -transitions $\langle Q, \Sigma, q_0, F', \delta' \rangle$ avec l'algorithme suivant :

```

1:  $F' := F$ 
2: for all  $q_i \in Q$  do
3:   for all  $c \in \Sigma$  do  $\delta'(q_i, c) := \delta(q_i, c)$ 
4:   end for
5: end for
6: for all  $q_i \in Q$  tels que  $\epsilon^+(q_i) \neq \emptyset$  do
7:   for all  $q_j \in \epsilon^+(q_i)$  do
8:     for all  $c \in \Sigma$  et  $q_r \in Q$  tels que  $q_r \in \delta(q_j, c)$  do
9:        $\delta'(q_i, c) := \delta'(q_i, c) \cup \{q_r\}$ 
10:    end for
11:    if  $q_j \in F$  then
12:       $F' := F' \cup \{q_i\}$ 
13:    end if
14:  end for
15: end for

```

Figure 8: Algorithme d'élimination des ϵ -transitions

Question 1 Pour chaque automate (A_1 à A_6), calculez la fonction ϵ^+ en vous servant de la définition en figure 7. Vous devriez donner l'image de chaque état, par exemple $\epsilon^+(q_1) = \{q_1, q_2\}$, $\epsilon^+(q_2) = \emptyset$ etc.

Question 2 Pour chaque automate (A_1 à A_6), appliquez l'algorithme de la figure 8. Vous pouvez dessiner le résultat. Pas besoin de détailler tous les calculs.

Question 3 Essayez d'expliquer en français la fonction ϵ^+ et l'algorithme comme si vous vouliez me convaincre qu'ils font correctement leur boulot (ce qui est le cas)¹. Vous pouvez vous aider d'exemples, soit tirés de la question précédente, soit originaux.

4 Formalisation

Question 4 Donnez une formalisation de l'acceptation d'un mot dans le contexte des AFND avec ϵ -transition en adaptant la définition de δ^* donnée dans le cours.

Question bonus Les AFND avec ϵ -transitions sont-ils plus ou moins expressifs² que ceux vus en cours, où on pouvait avoir plusieurs états initiaux ?

5 Propriétés de clôture

Question 5 Etant donnés des AFND (version ϵ) représentant deux expressions rationnelles quelconques e_1 et e_2 , expliquez, en vous aidant de schémas, comment construire des automates reconnaissant les expressions $e_1 + e_2$, $e_1.e_2$ et e_1^* .

Question bonus Répondre à la question précédente en utilisant la formalisation des automates.

¹Notez que rien n'est gratuit dans l'algorithme et que chaque *morceau* a un sens. Vous devriez donc tout mentionner.

²cad. permettent-ils de décrire plus ou moins de langages ?