

Exercices bases formelles du TAL

Pierre-Léo Bégay

pbegay@ens-cachan.fr

1 Théorie des ensembles

Produit cartésien Soit $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Calculer Σ^2 (vous devriez trouver un ensemble à $4^2 = 16$ éléments)

Ensemble des parties Calculer $P(\Sigma)$ (vous devriez trouver un ensemble à $2^4 = 16$ éléments)

2 Mots et langages

2.1 Facteurs et sous-mots

Soit $u = abbababaa$. Les mots suivants sont-ils des sous-mots et/ou des facteurs de u ?

- $aaaaaa$
- $aaaaaaa$
- aba
- bab
- $babaa$
- $bbaab$
- $bbaabb$

2.2 Pré/suffixes

Calculer $Pre(u)$ et $Suf(u)$.

2.3 Distributivité

Soient L_1, L_2 et L_3 trois langages rationnels quelconques. Est-ce qu'on a

$$L_1.(L_2 \cup L_3) = L_1.L_2 \cup L_1.L_3 ?$$

$$L_1 \cup (L_2.L_3) = (L_1 \cup L_2).(L_1 \cup L_3) ?$$

3 Expressions rationnelles

3.1 Distributivité

Soient e_1, e_2 et e_3 trois ERs quelconques. Est-ce qu'on a

$$e_1(e_2 + e_3) \stackrel{?}{=} e_1e_2 + e_1e_3$$

$$e_1 + (e_2e_3) = (e_1 + e_2)(e_1 + e_3) \text{ ?}$$

3.2 Version

Soit un alphabet fini Σ qui contient au moins les lettres a et b . Exprimer en français, de façon la plus naturelle possible, les langages dénotés par les expressions régulières suivantes :

1. $a\Sigma^*$
2. Σ^*a
3. $\Sigma^*abba\Sigma^*$
4. $\Sigma^*a\Sigma^*a\Sigma^*$
5. $\Sigma^*aa\Sigma^*$
6. $(a^*b)^*$
7. $(a^*b)^*a^*$
8. a^*b^*

3.3 ERs et mot vide

Préciser, pour chacune des ERs ci-dessus, si le langage dénoté contient le mot vide ϵ .

1. $a\Sigma^*$
2. Σ^*a
3. $\Sigma^*abba\Sigma^*$
4. $\Sigma^*a\Sigma^*a\Sigma^*$
5. $\Sigma^*aa\Sigma^*$
6. $(a^*b)^*$
7. $(a^*b)^*a^*$
8. a^*b^*

Donner une ER équivalente à $(a + \epsilon)(bc + ab)(c + \epsilon)$ qui n'utilise pas ϵ

¹Où l'égalité entre ERs désigne l'égalité *sémantique*, c'est à dire que $e = e'$ si et seulement si $\llbracket e \rrbracket = \llbracket e' \rrbracket$ (où le second = désigne donc l'égalité entre ensembles). A distinguer de l'égalité *syntactique*, qui indique que les deux ERs données sont formées de l'exacte même façon. On a $(e =_{\text{syntaxe}} e') \Rightarrow (e =_{\text{sémantique}} e')$, mais pas l'inverse. En effet, $(a^*)^* =_{\text{sémantique}} a^*$, mais pas $(a^*)^* =_{\text{syntaxe}} a^*$

3.4 Inclusions et équivalences entre ERs

Pour chaque paire d'ERs e_1 et e_2 , dire si le langage dénoté par la première est inclus dans celui dénoté par la seconde, et inversement. Dit autrement, si on pose $L_1 = \llbracket e_1 \rrbracket$ et $L_2 = \llbracket e_2 \rrbracket$, est-ce qu'on a $L_1 \subseteq L_2$ et/ou $L_2 \subseteq L_1$?

1. $e_1 = a(ba)^*$ et $e_2 = (ab)^*a$
2. $e_1 = a^*(ba)^*$ et $e_2 = (ab)^*a^*$
3. $e_1 = a^*(ba^*)^*$ et $e_2 = (a^*b)^*a^*$
4. $e_1 = (a^*b^*)^*$ et $e_2 = (a^*b^*)$