Logique et Langage
Examen

Lundi 8 janvier 2018

Consignes

Durée : 2 heures

S'il y a des problèmes de compréhension / de français, ne pas hésiter à me demander

1 Logique du premier ordre

1.1 Traduction

Question 1 (6 points) Modéliser (traduire) en logique du premier ordre[1] (du mieux que possible) les phrases suivantes, en introduisant vos propres prédicats (**atomiques**) et constantes :

1. Pierre n'est pas cool bien qu'il aime les cookies
2. Il y a au moins 3 personnes qui ont mangé tous les cookies
3. Elsa a jeté toutes ses BDs car elle est folle
4. Personne n'aime un prof
5. Quelqu'un de raisonnable ne mange que si il/elle a faim
6. Jules n'est pas poli, et pourtant il est beau
7. Tout les étudiants bruns se sont fait arnaquer par un MIASHS blond
8. Tout prof est nécessairement méchant
9. Chloé et ses complices sont chassés par tous les policiers de France[2]

Indication Dans les phrases 1, 2 et 3, attention à bien utiliser le prédicat $H(x) \equiv$ 'x est un être humain' (seulement s'il est nécessaire bien sûr !). Dans les autres phrases, on considère que l'univers est de toute façon constitué uniquement de personnes, donc pas besoin de s'embêter avec.

Indication bis Deux de ces phrases sont ambigües[3], attention à bien le signaler en expliquant les différentes interprétations possibles et préciser la version que vous traduisez.

[1]On rappelle que toute formule de la logique propositionnelle est également une formule de la logique du premier ordre, ne vous sentez donc pas obligé(e) de mettre des $\forall$ et des $\exists$ quand vous n'en avez pas besoin !

[2]Ca peut sembler excessif, mais avec le nombre de gens qui n'ont pas su résoudre l'énigme du DM5, ça en fait des cadavres à expliquer !

[3]A vrai dire y en a même une troisième, mais elle est encore plus tordue que les autres

Question 2 (5 points) *Calculer* la négation des formules que vous avez données pour les phrases 1, 3, 4, 7 et 9 dans l'exercice précédent, puis les exprimer en français de la façon la plus naturelle possible.

1.2 Distributivité du $\exists$

Soient les deux formules suivantes :

- $\phi = \exists x.(S(x) \wedge H(x))$
- $\psi = (\exists x.S(x)) \wedge (\exists x.H(x))$

Question 1 (0,75 point) Après avoir donné des interprétations de votre choix pour les prédicats $S(x)$ et $H(x)$, montrer que les formules ne sont pas équivalentes en décrivant une situation dans laquelle ψ est vraie mais pas ϕ

Question 2 (1,25 point) Est-il possible d'avoir une situation dans laquelle, à l'inverse, ϕ est vraie et pas ψ, et pourquoi ?

On définit maintenant ϕ et ψ comme :

- $\phi = \exists x.(S(x) \vee H(x))$
- $\psi = (\exists x.S(x)) \vee (\exists x.H(x))$

Question 3 (1,5 point) Les formules sont-elles équivalentes, et pourquoi ?

2 Logique propositionnelle

Soit les formules suivantes :

$$\phi_1 \equiv ((A \to B) \wedge A) \to B)$$

$$\phi_2 \equiv ((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$$

$$\phi_3 \equiv (A \to B) \to ((A \wedge C) \to B)$$

$$\phi_4 \equiv (A \to B) \to ((A \wedge C) \to C)$$

Question (6 points) Toutes ces formules sont des tautologies. Pour le vérifier, donnez l'arbre syntaxique et la table de vérité de chacune.

Question bonus Essayez maintenant d'expliquer avec vos propres mots pourquoi il est *logique* que ces formules soit tautologiques. Dit autrement, exprimer le raisonnement derrière la validité de ces formules[4]

[4] Même si vous n'êtes pas sûrs ou que vous n'avez pas de réponse pour chaque formule, écrivez ce que vous pouvez : c'est des raisonnements qui sont, au fond, très intuitifs, et la notation de cette question sera généreuse.