Logique et Langage
Exercices pour préparer l'examen

Pierre-Léo Bégay

1 Logique du premier ordre

Question 1 Modéliser (traduire) en logique du premier ordre (du mieux que possible) les phrases suivantes, en introduisant vos propres prédicats (**atomiques**) et constantes :

1. Pierre n'est pas cool bien qu'il aime les cookies

   $(\neg C(p) \wedge \forall x.\ (K(x) \rightarrow A(p, x)))$

   avec $C(x)$ = 'x est cool', $K(x)$ = 'x est un cookie' et p =Pierre

2. 3 personnes ont mangé tous les cookies

   Là il y a une ambiguïté assez méchante : les 3 personnes ont-elles chacune mangé l'intégralité des cookies[1], ou est-ce qu'elles ont mangé l'intégralité à trois ?

   Interprétation 1 : $\exists x.\exists y.\exists z.H(x) \wedge H(y) \wedge H(z) \wedge \forall t.\ (K(t) \rightarrow (M(x,t) \wedge M(y,t) \wedge M(z,t)))$

   Interprétation 2 : $\exists x.\exists y.\exists z.H(x) \wedge H(y) \wedge H(z) \wedge \forall t.\ (K(t) \rightarrow (M(x,t) \vee M(y,t) \vee M(z,t)))$

   Remarque : cette formule permet que certains cookies aient été mangés par plusieurs personnes (le $\vee$ n'est pas exclusif). Pour *corriger* ça, il faudrait rajouter par exemple $\neg\exists t'.\exists x'.\exists y'.\ (K(t') \wedge H(x') \wedge H(y') \wedge M(x', t') \wedge M(y', t'))$ en conjonction avec la formule ci-dessus (plein d'autres façons de le faire)

   Remarque bis : techniquement il manque des parenthèses dans les formules ci-dessus, mais les ambiguïtés qui en résultent n'impactent pas la syntaxe

3. Elsa a jeté toutes ses BDs car elle est folle

   $(F(e) \wedge \forall x.\ ((B(x) \wedge P(e, x)) \rightarrow J(e, x)))$

   avec $F(x)$ = 'x est fou/folle', $B(x)$ = 'x est une BD', $P(x, y)$ = 'x possède y', $J(x, y)$ = 'x jette y' et e = Elsa

   Remarque : on pourrait aussi rajouter $\forall x.\ ((H(x) \wedge F(x)) \rightarrow \forall y.((B(y) \wedge P(x, y)) \rightarrow J(x, y)))$, soit "toute personne folle jette toutes ses BDs" en conjonction de la formule précédente, puisque la phrase initiale laisse penser qu'on a une implication entre les deux.

4. Personne n'aime un prof

   Ambiguïté : tout le monde "déteste" le même prof (le pauvre), ou personne n'aime les profs en général ?

   Première interprétation : $\exists x.\ (P(x) \wedge \forall y.\ (H(y) \rightarrow \neg A(y, x)))$

   Deuxième interprétation : $\forall x.\ (P(x) \rightarrow \forall y.\ (H(y) \rightarrow \neg A(y, x)))$

[1] Ce qui impliquerait que les cookies soient mangés trois fois, donc assez peu crédible en pratique, mais on a déjà vu que ce n'est pas le propos de ce cours

avec $P(x)$ = ‘x est prof‘ et $A(x, y)$ = ‘x aime (apprécie) y‘

5. Quelqu'un de raisonnable ne mange que si il/elle a faim

   $\forall x.\ (R(x) \to (M(x) \to F(x)))$

   avec $R(x)$ = ‘x est raisonnable‘, $M(x)$ = x mange et $F(x)$ = ‘x a faim‘

6. Jules n'est pas poli, et pourtant il est beau

   $(\neg P(j) \land B(j))$

   avec $B(x)$ = ‘x est beau‘, $P(x)$ = ‘x est poli‘ et j = Jules

7. Tous les étudiants bruns se sont fait arnaquer par un MIASHS blond

   Ambiguïté : un MIASHS blond arnaque tous les étudiants bruns ou chaque étudiant brun a "son" arnaqueur ?

   Interprétation 1 : $\exists x.\ ((M(x) \land B(x)) \land \forall y.\ ((E(y) \land D(y)) \to A(x, y)))$

   Interprétation 2 : $\forall x.\ ((E(x) \land D(x)) \to (\exists y.\ (M(y) \land B(y) \land A(y, x))))$

   Avec $M(x) \equiv$ "x est en MIASHS", $B(x) \equiv$ "x est blond", $E(x) \equiv$ "x est étudiant", $D(x) \equiv$ "x est brun" et $A(x, y) \equiv$ "x arnarque y"

8. Tout prof est nécessairement méchant

   $\forall x.\ (P(x) \to M(x))$

   avec $P(x) \equiv$ "x est prof" et $M(x) \equiv$ "x est méchant"

9. Chloé et ses complices sont chassés par tous les policiers de France

   $\forall x.\ ((P(x) \land F(x)) \to \forall y.\ ((K(y, c) \lor y = c) \to C(x, y)))$

   Avec $P(x) \equiv$ "x est policier", $F(x) \equiv$ "x est français", $K(x, y) \equiv$ "x est complice de y", $C(x, y) \equiv$ "x chasse y" et $c \equiv$ Chloé.

Question 2 *Calculer* la négation des formules que vous avez données pour les phrases 1, 3, 4, 7 et 9 dans l'exercice précédent, puis les exprimer en français de la façon la plus naturelle possible.

1 Pierre n'est pas cool bien qu'il aime les cookies

$\neg(\neg C(p) \land \forall x.\ (K(x) \to A(p, x)))$

$\equiv (C(p) \lor \exists x.\ (K(x) \land \neg A(p, x)))$

$\equiv$ "Pierre est cool ou il existe un cookie qu'il n'aime pas"

3 Elsa a jeté toutes ses BDs car elle est folle

$\neg(F(e) \land \forall x.\ ((B(x) \land P(e, x)) \to J(e, x)))$

$\equiv (\neg F(e) \lor \exists x.\ ((B(x) \land P(e, x)) \land \neg J(e, x)))$

$\equiv$ "Elsa n'est pas folle ou il existe une BD qu'elle possède et qu'elle n'a (pourtant) pas jetée"

4 Personne n'aime un prof

Première interprétation : $\neg \exists x.\ (P(x) \land \forall y.\ (H(y) \to \neg A(y, x)))$

$\equiv \forall x.\ (P(x) \to \exists y.\ (H(y) \land A(y, x)))$

$\equiv$ Tout prof est apprécié par au moins une personne

Deuxième interprétation : $\neg \forall x.\ (P(x) \to \forall y.\ (H(y) \to \neg A(y, x)))$

$\equiv \exists x.\ (P(x) \land \exists y.\ (H(y) \land A(y,x)))$

$\equiv$ "Au moins un prof est apprécié par au moins une personne" (ou "Il existe quelqu'un qui apprécie un prof")

7 Tous les étudiants bruns se sont fait arnaquer par un MIASHS blond

Interprétation 1 : $\neg\exists x.\ ((M(x) \land B(x)) \land \forall y.\ ((E(y) \land D(y)) \rightarrow A(x,y)))$

$\equiv \forall x.\ ((M(x) \land B(x)) \rightarrow \exists y((E(y) \land D(y)) \land \neg A(x,y)))$

$\equiv$ "Tout MIASHS blond n'arnaque pas au moins un étudiant brun" (ou "aucun MIASHS blond n'arnaque tous les étudiants bruns")

Interprétation 2 : $\neg\forall x.\ ((E(x) \land D(x)) \rightarrow (\exists y.\ ((M(y) \land B(y)) \land A(y,x))))$

$\equiv \exists x.\ ((E(x) \land D(x)) \land (\forall y.\ (M(y) \land B(y)) \rightarrow \neg A(y,x)))$

$\equiv$ "Il existe un étudiant brun qui ne se fait arnaquer par aucun MIASHS blond"

9 Chloé et ses complices sont chassés par tous les policiers de France

$\neg\forall x.\ ((P(x) \land F(x)) \rightarrow \forall y.\ ((K(y,c) \lor y = c) \rightarrow C(x,y)))$

$\equiv \exists x.\ ((P(x) \land F(x)) \land \exists y.\ (K(yc \lor y = c) \land C(x,y)))$

$\equiv$ "Il existe un policier français qui ne chasse pas Chloé ou au moins un de ses complices.

2 Logique propositionnelle

Soit les formules suivantes :

$(((A \rightarrow B) \land A) \rightarrow B)$

$(((A \rightarrow C) \land (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \lor B) \rightarrow C))$

$((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \land C) \rightarrow B))$

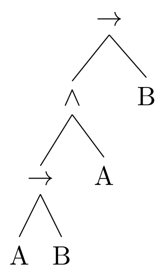
$((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \land C) \rightarrow C))$

Question Toutes ces formules sont des tautologies. Pour le vérifier, donnez l'arbre syntaxique et la table de vérité de chacune.

Question bonus Essayez maintenant d'expliquer avec vos propres mots pourquoi il est *logique* que ces formules soit tautologiques. Dit autrement, exprimer le raisonnement derrière la validité de ces formules[2]

[2]Même si vous n'êtes pas sûrs ou que vous n'avez pas de réponse pour chaque formule, écrivez ce que vous pouvez : c'est des raisonnements qui sont, au fond, très intuitifs, et la notation de cette question sera généreuse.

Première formule



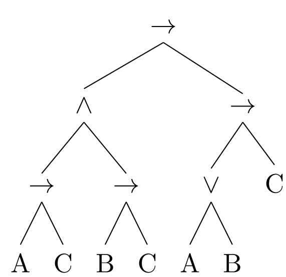
A	B	$(A \to B)$	$((A \to B) \wedge A)$	$(((A \to B) \wedge A) \to B)$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Figure 1: Arbre et table de vérité de la première formule

Bonus On annote la formule de façon à distinguer les $\to$ lors de l'explication : $(((A \to_1 B) \wedge A) \to_2 B)$

La formule peut alors se traduire de la façon suivante : "Si ($\to_2$) on a une relation de cause à effet entre A et B ($A \to_1 B$) et ($\wedge$) la cause (A), alors (toujours $\to_2$) on a la conséquence (B)". Le raisonnement est donc analogue à, par exemple, "Si la mort de Diane rend Elsa triste et que Diane est (justement) morte, alors Elsa est triste".

Deuxième formule



A	B	C	$(A \to C)$	$(B \to C)$	$((A \to B) \wedge (B \to C)) = \phi_1$	$(A \vee B)$	$((A \vee B) \to C) = \phi_2$	$\phi_1 \to \phi_2$
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

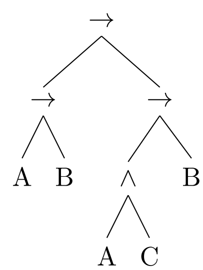
Figure 2: Arbre et table de vérité de la deuxième formule

Bonus On annote la formule de la façon suivante : $(((A \rightarrow_1 C) \wedge (B \rightarrow_2 C)) \rightarrow_3 ((A \vee B) \rightarrow_4 C))$

La formule peut alors se traduire de la façon suivante : "On suppose ($\rightarrow_3$) que A entraîne C ($\rightarrow_1$) et ($\wedge$) que B entraîne C ($\rightarrow_2$). Qu'on ait A ou B ($A \vee B$), alors ($\rightarrow_4$) on a C".

Plus prosaïquement, la partie gauche de $\rightarrow_3$ dit que A et B mènent tous les deux (indépendamment) à la même conclusion C. Dans ce cas, si on a au moins un des deux, quel qu'il soit, on obtient C. Une analogie : des études de maths vous font étudier la logique, des études de linguistique vous font (également) étudier la logique, donc, si c'est sûr que vous finirez en maths ou linguistique (ou les deux), vous vous retrouverez à faire de la logique.

Troisième formule



A	B	C	$(A \rightarrow B)$	$(A \wedge C)$	$((A \wedge C) \rightarrow B)$	$((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow B))$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

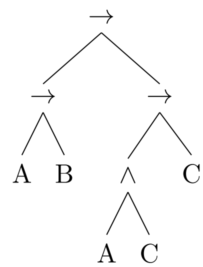
Figure 3: Arbre et table de vérité de la troisième formule

Bonus On annote la formule de la façon suivante : $((A \rightarrow_1 B) \rightarrow_2 ((A \wedge C) \rightarrow_3 B))$

La formule peut alors se traduire de la façon suivante : "Si A implique B" (A $\rightarrow_1$ B), alors A et B (A $\wedge$ B) impliquent ($\rightarrow_3$) C.

Plus prosaïquement, si A implique B, alors A "augmenté" de C iplique toujours B. Par exemple, si faire de la linguistique implique de faire de la logique, alors faire de la linguistique et être blond.e implique toujours de faire de la linguistique.

Quatrième formule



A	B	C	$(A \to B)$	$(A \wedge C)$	$((A \wedge C) \to C)$	$((A \to B) \to ((A \wedge C) \to C))$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Figure 4: Arbre et table de vérité de la quatrième formule

Bonus Ici il y avait un piège, à savoir que la partie gauche de la première flèche ne sert à rien. En effet, à droite on a $((A \wedge C) \to C)$, ce qui en soi est une tautologie (comme on peut le voir dans la table de vérité correspondante), puisque ça dit "si j'ai deux trucs, alors en particulier j'ai le deuxième" (par exemple, "si Jules est blond et barbu, alors il est barbu"). La partie gauche $((A \to B))$ est donc une hypothèse "bonus", qui ne sert à rien mais n'interfère pas avec la tautologie à droite.