Logique et Langage
Correction DM 5

December 30, 2017

Un grand merci à Olga Seminck, dont j'ai pillé les TDs de Sémantique Computationnelle sans la moindre honte

1 Logique du premier ordre

1.1 Introduction aux preuves

Soient les deux formules suivantes :

- $\phi = \forall x. \exists y. K(x, y)$
- $\psi = \exists y. \forall x. K(x, y)$

Question 1 (0,75 point) Après avoir choisi l'interprétation de votre choix pour le prédicat $K(x, y)$, décrivez une situation dans laquelle ϕ est vraie et ψ est fausse.

Correction On prend - pour changer - $K(x, y) \equiv$ 'x a tué y'. ϕ se traduit alors en 'tout le monde a tué quelqu'un (de potentiellement différent)', tandis que ψ est 'Il y a quelqu'un qui s'est fait tuer par tout le monde (lui-même compris)'.

Soit une situation dans laquelle on a (uniquement) Jules (j) et Elsa (e), tels que Jules a tué Elsa et Elsa a tué Jules. ϕ est alors vraie (si $x = j$, on prend $y = e$, et inversement), tandis que ψ ne l'est pas (Elsa ne s'est pas tué elle-même, Jules non plus).

Réponse plus technique On reprend l'univers décrit plus haut. Puisqu'il est fini, on peut *déplier* ϕ et ψ :

- $\phi = (K(j, e) \vee K(j, j)) \wedge (K(e, e) \vee K(e, j))$
- $\psi = (K(j, j) \wedge K(e, j)) \vee (K(j, e) \wedge K(e, e))$

L'énoncé, quant à lui, se traduit en

- $\neg K(e, e)$
- $K(e, j)$
- $K(j, e)$
- $\neg K(j, j)$

En remplaçant, on obtient donc :

- $\phi = (1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1$
- $\psi = (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$

Question 2 (1,25 point) Est-il possible de trouver une situation dans laquelle, à l'inverse, ψ est vraie et ϕ fausse, et pourquoi ?

- $\phi = \forall x.\exists y.K(x,y)$

Correction - version longue On va faire un raisonnement par l'absurde, c'est-à-dire supposer qu'il existe une situation dans laquelle ψ est vraie et ϕ est fausse, et montrer qu'on obtient une contradiction.

Si ϕ est fausse, alors $\neg\phi$ est vraie. On a donc :

- $\neg\phi = \neg\forall x.\exists y.K(x,y) = \exists x.\neg\exists y.K(x,y) = \exists x.\forall y.\neg K(x,y)$
- $\psi = \exists y.\forall x.K(x,y)$

Puisque $\neg\phi$ est (supposée) vraie, il existe une instanciation (valeur) y qui rend la sous-formule vraie. Appelons cette personne i (pour 'innocent'). De même, si ψ est vraie, il existe une instanciation de x qui rend la sous-formule vraie. On appelle cette personne v (pour 'victime'). On a donc :

- $\phi_{bis} = \forall y.\neg K(i,y)$
- $\psi_{bis} = \forall x.K(x,v)$

Puisque ces deux formules sont vraies pour toutes valeurs de y et x, alors on a, en particulier

- $\neg K(i,v)$ (en remplaçant y par v dans ϕ_{bis})
- $K(i,v)$ (en remplaçant x par i dans ψ_{bis})

On obtient une contradiction ('i a tué v' et 'i n'a pas tué v'). L'hypothèse, qui était que ψ est vraie et ϕ est fausse, est donc elle-même fausse.

Version courte Si ψ est vraie, quelqu'un (la victime) s'est fait tuer par tout le monde. Si ϕ est fausse, alors il existe quelqu'un qui n'a tué personne, et en particulier pas la victime. Contradiction[1].

1.2 Distributivité du $\forall$

Soient les deux formules suivantes :

- $\phi = \forall x.(S(x) \vee H(x))$
- $\psi = (\forall x.S(x)) \vee (\forall x.H(x))$

Question 1 (0,75 point) Après avoir donné des interprétations de votre choix pour les prédicats $S(x)$ et $H(x)$, montrer que les formules ne sont pas équivalentes en décrivant une situation dans laquelle ϕ est vraie mais pas ψ

[1] Ah oui, c'est plus court. D'ailleurs ça me va très bien comme type de réponse pour l'exam, l'important c'est que le raisonnement soit clair.

Correction On prend $S(x) \equiv$ 'x sait faire des saltos' et $H(x) \equiv$ 'x est hémophile'. Prenons une situation où on a deux personnes, Jules et Elsa, tels que Jules sache faire des saltos mais ne soit pas hémophile, tandis qu'à l'inverse, Elsa soit hémophile mais ne sache pas faire de saltos.

Dans cette situation, ϕ est vraie (car tout individu vérifie au moins une des deux propriétés), mais ψ ne l'est pas (car aucune des deux propriétés n'est vérifiée par tout le monde).

Question 2 (1,25 point) Est-il possible d'avoir une situation dans laquelle, à l'inverse, ψ est vraie et pas ϕ, et pourquoi ?

Correction Si ϕ est fausse, alors $\neg\phi = \exists x.(\neg S(x) \wedge \neg H(x))$ est vraie, ce qui veut dire qu'au moins un individu (le chieur) n'est ni capable de faire un salto, ni hémophile. Or, si ψ est vraie, alors (au moins) une des deux propriétés est satisfaite par tout les individus, y compris donc le chieur. Contradiction.

On définit maintenant ϕ et ψ comme :

- $\phi = \forall x.(S(x) \wedge H(x))$
- $\psi = (\forall x.S(x)) \wedge (\forall x.H(x))$

Question 3 (1,5 point) Les formules sont-elles équivalentes[2], et pourquoi ?

Correction ϕ se traduit par 'Tout individu est [capable de faire des saltos et hémophile]', tandis que ψ est '[Tout individu est capable de faire des saltos] et [tout individu est hémohpile]'. Les deux formules sont donc équivalentes.

1.3 Ordonnancement des quantificateurs

Soient le prédicat $P(x, y, z,) \equiv$ 'x a parlé de y à z', et un univers constitué uniquement d'êtres humains[3]. La formule

1. $\forall x.\exists y.\forall z.P(x, y, z)$

se traduit par 'Tout le monde a *sa personne spéciale* dont il/elle a parlé à tout le monde' (par exemple, Jules a parlé d'Elsa à tout le monde, Diane a parlé de Stéphane à tout le monde, etc). On peut cependant ordonner les quantificateurs de 5 autres façons :

2 $\forall x.\forall z.\exists y.P(x, y, z)$

3 $\exists y.\forall x.\forall z.P(x, y, z)$

4 $\exists y.\forall z.\forall x.P(x, y, z)$

5 $\forall z.\exists y.\forall x.P(x, y, z)$

6 $\forall z.\forall x.\exists y.P(x, y, z)$

Question 1 (2,5 points) Traduire en français (plus ou moins) naturel chacune des formules ci-dessus (attention aux ambiguïtés, ne pas hésiter à donner un bout d'exemple comme c'est fait dans l'énoncé pour clarifier votre réponse).

[2] On rappelle que deux formules ϕ et ψ sont équivalentes si et seulement si $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$, c'est-à-dire ssi l'une implique l'autre, et vice-versa

[3] Donc pas besoin de s'embêter avec le prédicat $H(x) \equiv$ x est humain

Correction Les phrases se traduisent en

2 Tout le monde parle à tout le monde de quelqu'un de potentiellement différent (en fonction du locuteur et du *destinataire*). Par exemple, Jules parle à Elsa de Diane et à Diane de lui-même, tandis que Elsa parle à Jules de Diane et à Diane de Jules, et Diane parle de Jules à tout le monde.

3 Il existe quelqu'un dont tout le monde parle à tout le monde.

4 Il existe quelqu'un dont tout le monde a entendu parler par tout le monde.

5 Tout le monde a entendu parler de quelqu'un de potentiellement différent par tout le monde (par exemple, tout le monde a parlé de Jules à Diane, d'Elsa à Jules et de Diane à Elsa.

6 Tout le monde s'est fait parler par tout le monde de quelqu'un de potentiellement différent (en fonction du locuteur et du destinataire). Même exemple que pour la 2.

Question bonus (1 point) Quelles formules sont équivalentes entre elles ?

Correction Dans une formule de la logique du premier ordre, on peut échanger des $\forall$ adjacents (qui sont côté à côté) sans changer le sens. On a donc

$$\forall x.\forall z.\exists y.P(x,y,z) \equiv \forall z.\forall x.\exists y.P(x,y,z)$$

$$\exists y.\forall x.\forall z.P(x,y,z) \equiv \exists y.\forall z.\forall x.P(x,y,z)$$

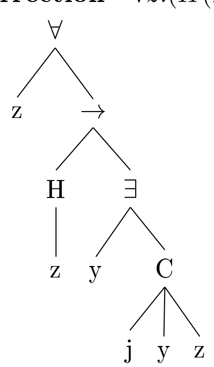
2 Modélisation

2.1 Jules et ses petits secrets

On a vu en cours que la phrase 'Jules cache quelque chose à tout le monde' est ambigüe, puisqu'on ne sait pas si Jules cache la même chose à tout le monde, ou s'il a (au moins) un secret (potentiellement différent) par personne. Nous avons ensuite traduit la première interprétation par $\exists y.\forall z.(H(z) \to C(j,y,z))$ avec $C(x,y,z) \equiv$ 'x cache y à z' et $j \equiv$ Jules.

Question 1 (0,5 point) Donner une traduction (en logique du premier ordre) de la seconde interprétation, et en dresser l'arbre syntaxique.

Correction $\forall z.(H(z) \to \exists y.C(j,y,z))$



Question 2 (0,75 point) *Calculer* la négation de la formule donnée, et l'exprimer de la façon la plus naturelle possible en français.

$$\neg\forall z.(H(z) \to \exists y.C(j,y,z))$$
$$\equiv \exists z.\neg(H(z) \to \exists y.C(j,y,z))$$
$$\equiv \exists z.(H(z) \land \neg\exists y.C(j,y,z))$$
$$\equiv \exists z.(H(z) \land \forall y.\neg C(j,y,z))$$

$\equiv$ Il existe une personne telle que, pour toute chose, il est faux que Jules la lui cache

$\equiv$ Il y a une personne à qui Jules ne cache rien

2.2 Traduction

Question 1 (3 points + bonus si vous repérez et traitez les ambiguïtés) Modéliser (traduire) en logique du premier ordre[4] (du mieux que possible) les phrases suivantes, en introduisant vos propres prédicats (**atomiques**) et constantes :

1. Léo n'est pas très bavard, mais il est rigolo
   - $\neg B(l) \land R(l)$ avec $B(x) \equiv$ 'x est (très) bavard', $R(x) \equiv$ 'x est rigolo' et $l \equiv$ Léo
2. Victor déteste les physiciens
   - $\forall x.(P(x) \to D(v,x))$ avec $P(x) \equiv$ 'x est physicien' et $v \equiv$ Victor
3. Tout le monde se déteste soi-même
   - $\forall x.D(x,x)$ avec $D(x,y) \equiv$ 'x déteste y'
4. Puisque Rémi n'aime personne d'autre que lui, tout le monde l'a tué
   - Tout d'abord, on rappelle que la causalité ne se traduit pas en logique du premier ordre (cf. l'exercice avec Elsa, Jules et le jet ski). On va donc en fait traduire 'Rémi n'aime personne d'autre que lui **et** tout le monde l'a tué'
   - 'Rémi n'aime personne d'autre que lui' $\equiv$ 'Rémi s'aime lui-même et personne d'autre' $\equiv$ 'Rémi s'aime et toute personne que Rémi aime est lui-même' $\equiv$ '$A(r,r) \land \forall x.(A(r,x) \to (r = x))$' avec $A(x,y) \equiv$ 'x aime y' et $r \equiv$ Rémi
   - 'Tout le monde a tué Rémi' $\equiv$ '$\forall x.K(x,r)$' avec $K(x,y) \equiv$ 'x a tué y'
   - La phrase se traduit donc en $(A(r,r) \land \forall x.(A(r,x) \to (r = x))) \land (\forall x.K(x,r))$

Remarque 'Tout personne que Rémi aime est lui-même' peut aussi se traduire par $\forall x.((x \neq r) \to \neg A(r,x))$

5. Elsa ne part en vacances que si tous ses amis sont en vacances
   - $H(e) \to (\forall x.(A(x,e) \to H(x))$ avec $H(x) \equiv$ 'x part / est en vacances' et $A(x,y) \equiv$ 'x et y sont amis'
6. Il y a (dans l'univers) au moins 3 futurs linguistes
   - $\exists x.\exists y.\exists z.(((x \neq y) \land (x \neq z) \land (y \neq z)) \land (L(x) \land L(y) \land L(z)))$ avec $L(x) \equiv$ 'x est un(e) futur(e) linguiste'

[4] On rappelle que toute formule de la logique propositionnelle est également une formule de la logique du premier ordre, ne vous sentez donc pas obligé(e) de mettre des $\forall$ et des $\exists$ quand vous n'en avez pas besoin !

- Attention à ne pas oublier la partie avec les $\neq$: sans, la formule sera vraie dans une situation avec seulement un futur linguiste (il suffit d'instancier x, y et z avec la personne en question)

7. On ne peut pas être logicien et sain d'esprit
   - Dit autrement, les propriétés 'être logicien' et 'être sain d'esprit' sont incompatibles. Si on en a une, on se doit donc de ne pas avoir l'autre[5] :
   - $\forall x.(L(x) \rightarrow \neg S(x))$ avec $L(x) \equiv$ 'x est logicien' et $S(x) \equiv$ 'x est saint d'esprit'

   $\equiv$ $\forall x.(L(x) \rightarrow \neg S(x))$
   - Alternativement (les formules sont équivalentes), vous pouviez faire
   - $\neg\exists x.(L(x) \wedge S(x))$

   $\equiv$ $\forall x.(\neg L(x) \vee \neg S(x))$

8. Un tueur en série qui ne possède aucune chaise jaune n'est pas sain d'esprit
   - Structure de la phrase : $\forall x.(P(x) \rightarrow \neg S(x))$ avec $S(x) \equiv$ 'x est saint d'esprit' et $P(x) \equiv$ 'x est un tueur en série qui ne possède aucune chaise jaune'
   - Votre spider-sens vous alerte évidemment que le prédicat P n'est absolument pas atomique. Il faut donc le *coder* :
   - $P(x) \equiv (H(x)^6 \wedge K(x) \wedge \neg\exists y.(C(y) \wedge J(y) \wedge P(x,y)))$ avec $K(x) \equiv$ 'x est un tueur en série', $C(x) \equiv$ 'x est une chaise', $J(x) \equiv$ 'x est jaune' et $P(x,y) \equiv$ 'x possède y'
   - La formule *globale* est donc :
   - $\forall x.((H(x) \wedge K(x) \wedge \neg\exists y.(C(y) \wedge J(y) \wedge P(x,y))) \rightarrow \neg S(x))$

9. A part Chloé, personne ne pardonnerait un ami qui l'aurait trahi
   - Reformulation de la phrase : Chloé pardonnerait un ami qui l'aurait trahie, et toute personne qui n'est pas Chloé ne pardonnerait pas un ami qui l'aurait trahi
   - Structure de la formule : $Q(c) \wedge \forall x.((x \neq c) \rightarrow \neg Q(x))$, avec $Q(x) \equiv$ 'x pardonnerait un ami qui l'aurait trahi' et $c \equiv$ Chloé
   - Le prédicat Q n'étant carrément pas atomique, on le *code* :
   - $Q(x) \equiv (\forall y.((A(x,y)^7 \wedge B(y,x)^8) \rightarrow P(x,y)))$, avec $A(x,y) \equiv$ 'x et y sont amis', $B(x,y) \equiv$ 'x a trahi y' et $P(x,y) \equiv$ 'x pardonne y'
   - La formule globale est donc :
   - $(\forall y.((A(c,y) \wedge B(y,c)) \rightarrow P(c,y))) \wedge \forall x.((x \neq c) \rightarrow \neg(\forall y.((A(x,y) \wedge B(y,x)) \rightarrow P(x,y))))$

Indice Dans la phrase 8, attention à bien utiliser le prédicat $H(x) \equiv$ 'x est un être humain'. Dans les autres phrases, on considère que l'univers est de toute façon constitué uniquement de personnes, donc pas besoin de s'embêter avec.

Question 2 (3 points) Dresser les arbres syntaxiques des traductions que vous avez données dans la question 1 des phrases 3, 8 et 9, puis *calculer* les négations de ces dernières (des formules donc) et les exprimer en français de la façon la plus naturelle possible.

---

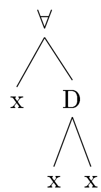
[5] Pour l'intuition, pensez à 'être bourré' et 'conduire'. La loi dit 'bourré $\rightarrow \neg$ conducteur', ou, de façon équivalente, 'conducteur $\rightarrow \neg$ bourré'

[6] Le fait d'être humain peut paraître un peu redondant avec la propriété 'être un tueur en série', mais pensez à la clope, à l'alcool, au nutella etc !

[7] ou A(y,x), on s'en fout

[8] Ah par contre, là l'ordre est très important !

Correction phrase 3

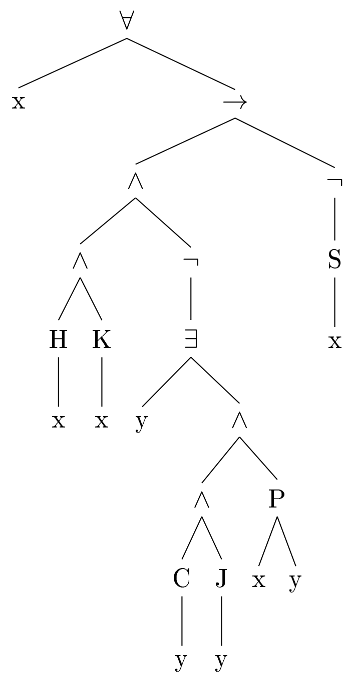


- $\neg\forall x.D(x,x)$

$\equiv$ $\exists x.\neg D(x,x)$

$\equiv$ Il existe quelqu'un qui ne se déteste pas

Correction phrase 8 (arg)



$\neg\forall x.((H(x) \wedge K(x) \wedge \neg\exists y.(C(y) \wedge J(y) \wedge P(x,y))) \rightarrow \neg S(x))$

$\equiv$ $\exists x.\neg((H(x) \wedge K(x) \wedge \neg\exists y.(C(y) \wedge J(y) \wedge P(x,y))) \rightarrow \neg S(x))$

$\equiv$ $\exists x.((H(x) \wedge K(x) \wedge \neg\exists y.(C(y) \wedge J(y) \wedge P(x,y))) \wedge \neg\neg S(x))$[9]

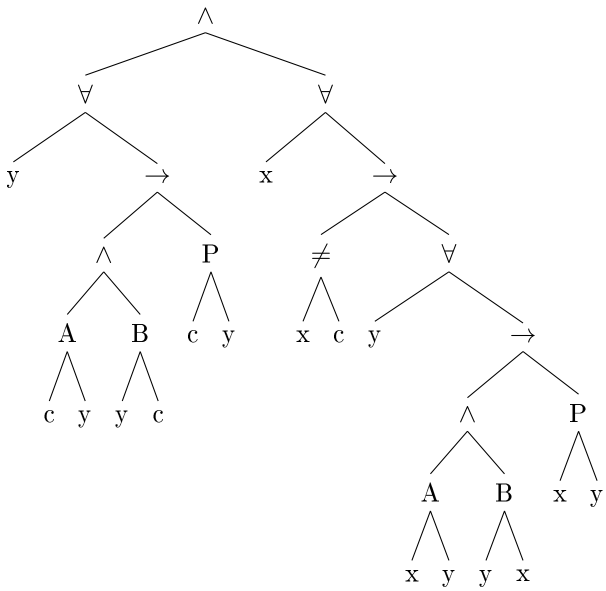
$\equiv$ $\exists x.((H(x) \wedge K(x) \wedge \neg\exists y.(C(y) \wedge J(y) \wedge P(x,y))) \wedge S(x))$

$\equiv$ Il existe un tueur en série qui ne possède aucune chaise jaune et qui est sain d'esprit

Remarque Vous noterez que ça correspond à $\neg$ (Aucun X n'est Y) $\equiv$ (au moins un X n'est pas Y), avec X = tueur en série qui ne possède pas de chaise jaune, et Y = ne pas être sain d'esprit

Correction phrase 9 $(\forall y.((A(c,y) \wedge B(y,c)) \rightarrow P(c,y))) \wedge \forall x.((x \neq c) \rightarrow \neg(\forall y.((A(x,y) \wedge B(y,x)) \rightarrow P(x,y))))$

[9] Rappel : $\neg(\phi \rightarrow \psi) \equiv \phi \wedge \neg\psi$



$$\equiv \neg(\forall y.((A(c,y) \land B(y,c)) \to P(c,y))) \land \forall x.((x \neq c) \to \neg(\forall y.((A(x,y) \land B(y,x)) \to P(x,y))))$$

$$\equiv (\neg\forall y.((A(c,y) \land B(y,c)) \to P(c,y))) \lor \neg\forall x.((x \neq c) \to \neg(\forall y.((A(x,y) \land B(y,x)) \to P(x,y))))$$

$$\equiv (\exists y.\neg((A(c,y) \land B(y,c)) \to P(c,y))) \lor \neg\forall x.((x \neq c) \to \neg(\forall y.((A(x,y) \land B(y,x)) \to P(x,y))))$$

$$\equiv (\exists y.((A(c,y) \land B(y,c)) \land \neg P(c,y))) \lor \neg\forall x.((x \neq c) \to \neg(\forall y.((A(x,y) \land B(y,x)) \to P(x,y))))$$

$$\equiv (\exists y.((A(c,y) \land B(y,c)) \land \neg P(c,y))) \lor \exists x.\neg((x \neq c) \to \neg(\forall y.((A(x,y) \land B(y,x)) \to P(x,y))))$$

$$\equiv (\exists y.((A(c,y) \land B(y,c)) \land \neg P(c,y))) \lor \exists x.((x \neq c) \land \neg\neg(\forall y.((A(x,y) \land B(y,x)) \to P(x,y))))$$

$$\equiv (\exists y.((A(c,y) \land B(y,c)) \land \neg P(c,y))) \lor \exists x.((x \neq c) \land (\forall y.((A(x,y) \land B(y,x)) \to P(x,y))))$$

$\equiv$ Chloé n'a pas pardonné quelqu'un qui l'a trahie, ou il existe une personne, qui n'est pas Chloé, qui a pardonné quelqu'un qui l'a trahi(e).

2.3 Approche logique du moindre-effort

Question 1 (1,5 point) Soit un paquet de cartes qui ont chacune un nombre d'un côté, et une lettre de l'autre (par exemple C/9, D/2, P/7 etc). Vous voulez vérifier que toute carte avec un ‘A‘ d'un côté a un ‘4‘ de l'autre, et vous avez devant vous des cartes ‘A‘, ‘7‘, ‘D‘, ‘4‘. Lesquelles avez-vous besoin de retourner, et pourquoi ? (justifier avec de la logique propositionnelle si possible)

Correction La règle pour chaque carte se modélise en $A \to 4$, avec $A \equiv$ ‘la lettre de la carte est un A‘ et $4 \equiv$ ‘le chiffre de la carte est 4‘[10]. Or, cette formule est équivalente à $\neg 4 \to \neg A$.

La règle peux donc être reformulée en ‘Si on voit un A, on retourne la carte pour vérifier si y a un 4, et si on a autre chiffre qu'un 4, on retourne pour vérifier que la lettre n'est pas un A‘. On doit donc retourner uniquement les deux premières cartes.

[10] Notez qu'on aurait pu utiliser de la logique du premier ordre et faire $\forall x.(A(x) \to 4(x))$, mais ce qui est important dans cet exo c'est avant tout la flèche.

Remarque Cet exercice est totalement pompé sur la tâche de sélection de Wason, une expérience classique de psychologie. Le ‘truc‘ est que la réponse généralement donnée par les sujet est de retourner les cartes ‘A‘ et ‘4‘, alors que la carte ‘4‘ ne peut justement pas enfreindre la règle, puisque A ou non de l’autre côté, c’est ok, contrairement à la carte 7.

Maintenant que vous avez fini de jouer avec des cartes, vous ouvrez un bar au Havre. Vous tenez bien sûr à vérifier que vous n’avez pas de client mineur[11] qui consomme de l’alcool chez vous.

Question 2 (0,25 point) Vous voyez actuellement au bar Jules et Elsa, dont vous savez qu’ils ont respectivement 14 et 33 ans, mais vous ne savez pas s’ils sont en train de boire de l’alcool ou non. Avez-vous besoin de vérifier le verre de Jules ? Et d’Elsa ?

Correction Vous devez vérifier le verre de Jules, qui ne peut pas boire d’alcool. Els par contre ne peut pas enfreindre la règle, puisqu’elle est majeure.

Question 3 (0,5 point) A côté, vous voyez Diane, qui boit un chocolat chaud, et Jade, qui descend une bouteille de vodka. Sachant que vous ignorez l’âge de l’une comme de l’autre, avez-vous besoin de vérifier la carte d’identité de Diane ? Et de Jade ?

Correction Pas besoin de vérifier l’âge de Diane, qui a le droit de boire du chocolat chaud quel que soit son âge. Par contre, Jade se doit d’être majeure, et vus devez donc regarder sa carte d’identité.

2.4 Logique du premier ordre et intuition

Soit la phrase suivante : ‘Dans toute partie de LoL, il existe un joueur tel que s’il se comporte bien, alors tout le monde se comporte bien‘. Cette phrase, contre-intuitive à malheureusement bien des niveaux, est pourtant *techniquement* vraie. On prend une partie de LoL complètement au hasard qui va nous servir d’univers, dont les individus sont les différents joueurs de la partie. Par exemple, $\forall x.B(x)$ se traduit alors en ‘tous les joueurs de la partie sont blonds‘.

Question 1 (2,5 points) En partant du prédicat $C(x) \equiv$ ‘x se comporte bien‘, traduire ‘Dans la partie considérée (l’univers), il existe un joueur tel que s’il se comporte bien, alors tout le monde se comporte bien‘ en logique du premier ordre et expliquer pourquoi elle est *techniquement* vraie.

Correction Traduction de la phrase :

- il existe un joueur (ce joueur se comporte bien $\rightarrow$ (tous les joueurs se comportent bien))
- $\exists x.(C(x) \rightarrow \forall y.C(y))$

Une formule de la forme $\exists x.\phi$ est vraie si et seulement si il existe une instanciation de x qui rende ϕ vraie. Le but du jeu est donc de trouver le joueur en question.

La validité de cette formule repose sur le principe appelé **tiers exclu**[12], qui dit que toute chose est soit vraie, soit fausse. En particulier, soit tous les joueurs se comportent bien, soit il est faux que tous les joueurs se comportent bien. On vérifie que dans les deux cas, la formule est vraie :

[11] C’est-à-dire de strictement moins de 18 ans

[12] Principe qui est accepté en logique classique et dans ce cours, mais qui en soi est au centre d’un sacré bordel en logique. Si vous êtes curieux, vous pouvez commencer par wikipedia.

Tous les joueurs se comportent bien Dans cette situation, la partie droite de la flèche est vraie. Il suffit donc de remplacer x par n'importe quel joueur j, et on obtient la formule suivante :

$$
\begin{aligned}
& C(j) \to \forall y.C(y) \\
\equiv\ & 1 \to 1 \\
\equiv\ & 1
\end{aligned}
$$

Dans cette configuration, la formule est donc vraie.

Il est faux que tous les joueurs se comportent bien Comme vous le savez (cf la négation en logique du premier ordre ou le carré magique dans la logique de Port-Royal), la négation de ‘tous les joueurs se comportent bien‘ est ‘au moins un joueur ne se comporte pas bien‘. Appelons un tel joueur c (pour connard), et remplaçons x par c dans la formule

$$
\begin{aligned}
& C(c) \to \forall y.C(y) \\
\equiv\ & 0 \to 0 \\
\equiv\ & 1
\end{aligned}
$$

Encore une fois, la formule est vraie.

Conclusion On sait, de par le principe du tiers exclus (et le bon sens), que soit aucun, soit au moins un joueur se comporte bien. On a aussi vu que dans les deux situations, la formule est vraie (pour des raisons différentes). La formule est donc vraie ‘dans l'absolu‘.

Remarque Cet exercice est une reformulation d'un problème de logique bien connu appelé ‘Paradoxe du buveur‘, qui consiste à formuler la phrase ‘Dans tout bar non-vide[13]‘ et à dire que, contrairement à l'intuition et pour les mêmes raisons que dans cet exercice, la phrase est toujours vraie.

Question bonus (0,5 point) Expliquer alors pourquoi la phrase ‘Dans toute partie de LoL, il existe un joueur tel que s'il se comporte bien, alors tout le monde se comporte bien‘ est techniquement vraie.

Correction On vient de montrer qu'une partie de LoL arbitraire vérifiait la phrase ‘il existe un joueur blabla‘. Puisqu'on n'avait aucune information particulière à propos de cette partie et donc qu'on a utilisé aucune hypothèse sur cette dernière, le raisonnement s'applique à n'importe quelle partie. On peut donc affirmer que la phrase est vraie pour n'importe quelle partie de LoL.

Remarque Oui, bon, c'était une question un peu cheloue et mal posée, on est d'accord, déso.

2.5 Enigme (bonus, 3 points)

Chloé, dont la passion dévorante pour *Saw* ne vous avait jamais inquiété(e) jusqu'ici, vous a enfermé(e) dans un sous-sol miteux et vous *propose* de jouer à un jeu. Il y a deux portes, une à gauche, et une à droite. Les deux sont actuellement fermées, mais l'une donne sur la sortie, et l'autre sur un dragon affamé[14]. L'une s'ouvrira si vous dites une phrase vraie, tandis que l'autre s'ouvrira si vous énoncez une phrase fausse (mais vous ne savez pas laquelle est laquelle).

[13] Oui, normalement il faut ajouter à l'exo comme hypothèse que la partie de LoL a au moins un joueur, puisqu'aucune formule de la forme $\exists x.\phi$ ne peut être vraie dans un univers vide (aucune valeur possible pour x, tout bêtement)

[14] Oui, bon, on fait ce qu'on peut comme histoire hein

Question Chloé vous dit que vous avez le droit à une seule pour vous échapper, que faites-vous ? Justifier avec une modélisation logique.

Indice La réponse ‘normale‘ utilise une phrase construite à partir de ‘La porte de droite mène à la sortie‘ et ‘La porte de droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie‘, mais il est tout à fait possible qu'il existe d'autres solutions tout à fait différentes. A vous d'essayer de me surprendre si vous vous en sentez la capacité !

Correction On pose

$B \equiv$ ‘La porte de droite mène à la sortie‘

$H \equiv$ ‘La porte de droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie‘

$\phi \equiv B \leftrightarrow H$

Le fait que la porte droite mène à la sortie et qu'elle s'ouvre en cas de vérité sont indépendants. On peut donc avoir B vraie et H vraie, B vraie et H fausse, B fausse et H vraie, et B fausse et H fausse. On fait une table de vérité pour voir dans chaque cas s'il faut dire un truc vrai ou faux pour s'en sortir, et si par hasard y aurait pas une corrélation avec la formule ϕ :

B	H	Il faut prendre la porte	On doit dire un truc	ϕ
0	0	Gauche	Vrai	1
0	1	Gauche	Faux	0
1	0	Droite	Faux	0
1	1	Droite	Vrai	1

On notera que ϕ a toujours la valeur de vérité qui correspond à ce qu'il faut dire pour que la bonne porte s'ouvre. Il suffit donc de dire ‘La porte de droite mène à la sortie si et seulement si la porte de droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie‘ pour pouvoir sortir sans risquer de passer par l'intestin d'un dragon.