Logique et Langage
Partiel

Pierre-Léo Bégay

13 Novembre 2017

Consignes

Durée : 2 heures

S'il y a des problèmes de compréhension / de français, ne pas hésiter à me demander

Vous pourrez remarquer un sympathique exercice bonus à la fin. Ne vous y frottez que si vous avez fait - ou au moins tenté - tout le reste.

1 Syllogistique et Port-Royal

1.1 Classification de propositions (0,25 par bonne réponse)

Donnez la classe (la plus précise possible) des propositions suivantes :

- Le prof de logique est fou
  - Proposition singulière (on parle d'une personne clairement identifiée, comme l'indique le 'le')
- Les cours qu'il donne sont brouillons
  - Proposition universelle affirmative, ou A (phrase de la forme '(Tous) les X sont Y')
- Un devoir de ce prof est super long à faire
  - Proposition particulière affirmative I ('Il existe un devoir de ce prof qui est super long à faire')
  - ou universelle affirmative A (prendre la phrase comme une généralisation). Réponse comptée comme bonne si vous m'avez donné une des deux classes, bonus pour avoir relevé l'ambiguïté.
- Aucun élève n'apprécie le cours
  - Proposition universelle négative E (phrase de la forme 'Aucun X n'a la propriété Y')
- Si il est gentil, le prof mettra un partiel pas trop dur
  - Proposition complexe (formée à partir de 'Il [le prof] est gentil' et 'Le prof mettra un partiel pas trop dur', qui sont combinées via le 'si ___, (alors) ___')

1.2 Relations entre propositions

Propositions contradictoires (0,5 par bonne réponse) Pour chaque proposition de l'exercice précédent, donnez sa proposition contradictoire (cad sa négation). Vous pouvez évidemment utiliser les classifications que vous avez précédemment données.

- Le prof de logique est fou
  - Le prof de logique n'est pas fou ($\neg$ (X est Y) = X n'est pas Y)
- Les cours qu'il donne sont brouillons
  - Au moins un cours qu'il donne n'est pas brouillon (pour que 'tous les X sont Y' soit fausse, il suffit qu'un élément de type X ne soit pas Y)
- Un devoir de ce prof est super long à faire
  - Si vous avez répondu I à la question précédente, 'Aucun devoir de ce prof n'est super long à faire' ($\neg$ (au moins un X est Y) = aucun X n'est Y)
  - Si vous avez répondu A, 'Au moins un devoir de ce prof n'est pas super long à faire'
- Aucun élève n'apprécie le cours
  - Au moins un élève apprécie le cours
- Si il est gentil, le prof mettra un partiel pas trop dur
  - On a vu, bon gré mal gré, que $\neg(P \to Q) = P \wedge \neg Q$, donc ici 'Le prof est gentil et il mettra un partiel trop dur '
  - Une formulation plus naturelle (et qui fait à mon avis mieux apparaître la négation du 'si ___, (alors) ___') : le prof mettra un partiel trop dur, bien qu'il soit gentil.

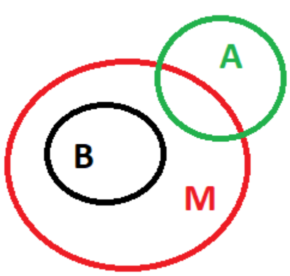
1.3 Schémas

Pour chaque syllogisme, dire s'il est valide ou non (0,75 par syllogisme)

1^{er} syllogisme
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Certains M sont A}\\ \text{Tous les B sont M}\end{array}}{\text{Certains B sont A}}$$

$2^{ème}$ syllogisme
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les M sont A}\\ \text{Certains B sont M}\end{array}}{\text{Certains B sont A}}$$

Premier syllogisme :



Les deux prémisses sont bien respectées, alors que la conclusion ne l'est pas. On a un contre-exemple, **le syllogisme n'est pas valide**

Deuxième syllogisme :

La deuxième prémisse nous dit qu'il existe au moins un élément, qu'on appelera x, qui est à la fois B et M. Or, la première prémisse nous dit que tout élement ayant la propriété d'être M est aussi A. Puisque x est M, cette prémisse nous dit qu'il est également A.

Nous avons donc un élément, x, qui est à la fois M, B et A. On peut donc dire que 'certains B sont A' est vraie, puisque x en est la 'preuve vivante' (on parle de *témoin*).

2 Raisonnement (2 points par raisonnement)

2.1 Première situation

Mary Jane s'inquiète : non seulement son copain Clark Kent rate la plupart de leurs rendez-vous, mais en plus ça correspond systématiquement à des apparitions de Batman - super-héros masqué local - pour sauver la ville d'un nouveau super-méchant. Au bout de la cinquantième fois, et alors qu'elle n'a toujours pas vu les deux en même temps, Mary Jane en est persuadée : Clark Kent est en fait Batman.

Quel type de raisonnement fait-elle (merci de donner le nom précis du raisonnement) ? Est-ce un raisonnement rigoureux, et pourquoi ?

Correction Deux explications possibles aux disparations de Clark Kent quand Batman apparaît : soit une série de coïncidences, soit le fait que Clark Kent soit en fait Batman. Au bout de 1, 2, 3 etc fois, il reste - à priori - toujours raisonnable de privilégier les coïncidences, mais au bout de 50, ça devient du domaine de l'improbable, et le fait que Clark Kent soit Batman devient, en comparaison, une explication probable.

Mary-Jane fait donc une **abduction**, à savoir qu'elle admet une explication 'naturelle' (encore une fois, par rapport aux autres) de faits. L'abduction n'est, par nature, pas rigoureuse, puisqu'une série de 50 coïncidences est improbable mais pas impossible. On pourrait aussi imaginer d'autres scénarios, par exemple Clark Kent sort avec Batman et il ne veut donc pas que ce dernier le voie avec Mary-Jane[1].

Attention On pourrait aussi croire que le raisonnement est une induction (non-rigoureuse), mais ce n'est pas le cas. Pour rappel, une induction consiste à dire 'Soit une famille (potentiellement infinie) d'éléments x_1, x_2, x_3 ... Je sais que x_1 a la propriété P, x_2 a la propriété P, ... et x_n a la propriété P, j'en déduis donc que toute la famille des x a la propriété P' (c'est ce qu'on appelle dans le langage courant une **généralisation**).

La seule induction qu'il est possible de faire ici, c'est 'A la première apparition de Batman, Clark Kent n'était pas là, à la deuxième pareil, troisième pareil ... au cinquantième pareil, j'en déduis donc que Clark Kent ne sera jamais là quand Batman est là', ce qui n'est pas la même chose que de dire que Clark Kent est Batman ! (même si la première proposition découle de la deuxième).

Bref, une induction consiste seulement à généraliser des faits observés, pas à les expliquer avec une nouvelle information.

[1] Explication qui m'a vraiment été proposée dans une copie

2.2 Deuxième situation

Chloé, armée de tout son courage et de quelques centaines d'heures de temps libre[2], décide de se mettre à jouer à un jeu en ligne appelé *Légende of Ligue 1* (LoL1). Lors de sa première partie, elle tombe sur des joueurs agressifs, qui l'insultent pour un oui ou pour un non. Puis pareil à la seconde partie, à la troisième, etc ...

Au bout de 50 parties à se faire agresser par l'intégralité des autres participants, Chloé conclut que tous les joueurs de *LoL1* sont des gens peu recommandables. Quel type de raisonnement fait-elle (nom précis aussi svp) ? Est-ce un raisonnement rigoureux, et pourquoi ?

Correction Chloé observe que les joueurs de la première partie sont *peu recommendables*, pareil pour la seconde, la troisième etc jusqu'à la cinquiantième. Au final, elle s'est constituée un *corpus* de joueurs n'en comprenant aucun recommendable, mais qui, à priori, ne couvre pas l'entièreté des joueurs de *LoL1*. Le fait de décréter que **tous** les joueurs du jeu sont peu recommendables est donc une généralisation abusive, c'est-à-dire une **induction incomplète**

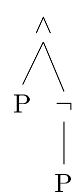
C'est un raisonnement non-rigoureux par nature (à part dans le cas très particulier où elle aurait croisé l'intégralité des joueurs du jeu, mais rien ne le dit), et elle pourrait tout à fait tomber sur quelqu'un de sympa à la $51^{ème}$ partie. Par ailleurs, même si ça ne change pas grand chose au raisonnement, si on prend sa déduction littéralement, Chloé se considère elle-même comme quelqu'un de peu recommendable, ce qui est un peu bizarre.

3 Logique propositionnelle

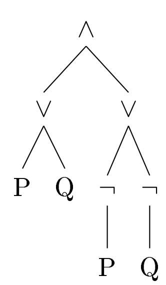
3.1 Arbres syntaxiques (0,5 par arbre)

Donnez l'arbre syntaxique de chacune des propositions suivantes :

1. $(P \wedge \neg P)$

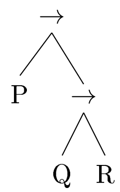


2. $((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q))$

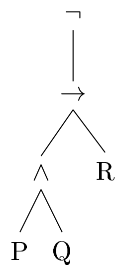


3. $(P \to (Q \to R))$

[2]en même temps, c'est manifestement pas sur vous qu'elle peut compter pour s'occuper



4. $\neg((P \wedge Q) \rightarrow R)$



3.2 Sémantique (1 point par tableau, 1 point pour la formule équivalente)

Donnez les conditions de vérité (cad la table de vérité) des formules de l'exercice précédent. Attention au nombre de configurations (et donc de lignes) !

Première formule

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
0	1	0
1	0	0

Attention Certains m'ont fait un tableau à 4 lignes, avec les lignes $P = \neg P = 0$ ou 1, ce qui n'a aucun sens ! Une proposition atomique, c'est **une lettre**. En particulier, $\neg P$ n'est pas une proposition atomique, puisque qu'on peut la 'décomposer' en deux (P et la négation).

Deuxième formule

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \vee Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0

Troisième formule

P	Q	R	$Q \rightarrow R$	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Quatrième formule On a vu en cours que $((P \wedge Q) \rightarrow R) \equiv (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$. La quatrième formule est donc équivalente à la négation de la troisième, vous pouviez donc reprendre le même tableau en rajoutant une colonne pour la négation. Sinon, le tableau complet :

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	$\neg((P \wedge Q) \rightarrow R)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Donnez une formule équivalente à la quatrième qui n'utilise ni $\rightarrow$, ni $\wedge$ Allez-y doucement et mécaniquement, et ça se passera bien

Correction

$$\begin{array}{lll} & \neg((P \wedge Q) \rightarrow R) & \text{Equivalence utilisée} \\ \equiv & \neg(\neg(P \wedge Q) \vee R) & (\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi) \\ \equiv & \neg((\neg P \vee \neg Q) \vee R) & \neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg\phi \vee \neg\psi) \end{array}$$

3.3 Modélisation (0,75 par phrase)

Modéliser en logique propositionnelle (du mieux que possible) les phrases suivantes :

- Stéphane étudie à Paris 7
  - Soit P $\equiv$ Stéphane étudie à Paris 7
  - La phrase se modélise alors en P
- Stéphane et Jade étudient à Paris 7
  - Soit P $\equiv$ Stéphane étudie à Paris 7 et Q $\equiv$ Jade étudie à Paris 7
  - La phrase se modélise alors en $P \wedge Q$
- Stéphane s'est inscrit à Paris 7 parce que c'est là que Jade étudie
  - Soit P $\equiv$ Stéphane étudie à Paris 7 et Q $\equiv$ Jade étudie à Paris 7
  - La phrase se modélise alors en $P \wedge Q$

Attention $\rightarrow$ ne modélise pas l'*explication* ! $\phi \rightarrow \psi$ dit juste qu'il est impossible d'avoir ϕ sans ψ, mais n'assure pas que ϕ (ou ψ) est vraie ! $Q \rightarrow P$ dit donc que si Jade étudie à P7, alors c'est aussi le cas de Stéphane, ce qui n'est pas ce que dit la phrase de base.

La logique propositionnelle ne permet pas d'encoder directement l'*explication*, d'où le fait d'utiliser $P \wedge Q$. Une réponse (logiquement équivalente) qui le fait de façon un peu tordue aurait été $Q \wedge (Q \rightarrow P)$, voire $Q \wedge (Q \rightarrow P) \wedge P$

- Si elle n'a pas cours demain, Jade ira au cinéma
  - Soit P $\equiv$ Jade a cours demain et Q $\equiv$ Jade ira au cinéma
  - La phrase se modélise alors en $\neg P \rightarrow Q$

Attention 'Jade n'a pas cours demain' n'est pas une proposition atomique, puisqu'on peut la décomposer comme la négation de 'Jade a cours demain'

- Stéphane n'ira au cinéma demain que s'il n'a pas cours et qu'il a de l'argent
  - Soit P $\equiv$ Stéphane ira au cinéma demain, Q $\equiv$ Stéphane a cours demain et R $\equiv$ Stéphane a de l'argent

– La phrase se modélise alors en $P \to (\neg Q \wedge R)$

Attention Le ‘que‘ change le sens de la flèche par rapport à la phrase précédente !

Attention aussi ‘Stéphane n’a pas cours demain‘, qui n’est pas une proposition atomique

Bonus

Soient les (squelettes de) formules

$$\phi = ((A?B)?(C?D))$$

$$\psi = ((A?B)?(C?D))$$

Remplacez chacun des ”?” par un connecteur binaire ($\wedge$, $\vee$, $\to$ ou $\leftrightarrow$, chacun peut servir 0, 1 ou plusieurs fois) de façon à ce qu’aucune des deux formules n’implique l’autre. Dit autrement, de telle sorte que ϕ puisse être vraie sans que ψ le soit, et inversement.

Je vois deux façons d’essayer de résoudre cette *énigme* : soit vous prenez des formules au hasard et vous tâtonnez jusqu’à ce qu’elles marchent, soit vous pouvez vous inspirer de *patterns* (ou phénomènes) de la logique propositionnelle qu’on a croisés plusieurs fois depuis le début du cours.

Pour prouver votre réponse, donnez une configuration[3] telle que ϕ soit vraie ($= 1$) et ψ soit fausse ($= 0$), puis une autre configuration telle que ψ soit vraie et ϕ soit fausse

Réponse De nombreuses réponses possibles (il y a 2048 paires de formules, dont pas mal marchent), mais celle que j’avais en tête est

$$\phi = ((A \wedge B) \vee (C \wedge D))$$

$$\psi = ((A \vee B) \wedge (C \vee D))$$[4]

En effet, si $A = B = 1$ et $C = D = 0$, $\phi = 1$ et $\psi = 0$. A l’inverse, si $A = C = 1$ et $B = D = 0$, $\phi = 0$ et $\psi = 1$, on a bien deux formules telles que l’une n’implique pas l’autre.

S’il vous reste du temps, essayez d’expliquer en français, avec vos propres mots, pourquoi aucune des deux formules n’implique l’autre

Réponse Soit A et B les propositions *à gauche* et C et D celles *à droite*. La formule ϕ garantit seulement que tout est vrai à gauche ou que tout est vrai à droite, tandis que la formule ψ dit uniquement qu’on a au moins un truc vrai de chaque côté. Dit autrement, ϕ est vraie (notamment) dans les configurations très *déséquilibrés* entre le gauche et la droite, tandis que ψ requiert un minimum d’équilibre. Ce sont donc deux formules qui, bien que structurellement très proches, ont des conditions de vérité très indépendantes.

[3] Par configuration, on entend une valuation des propositions atomiques, par exemple $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ et $D = 1$

[4] Notez l’alternance, d’une formule à l’autre, entre les $\vee$ et $\wedge$. C’est ce à quoi je faisais référence en parlant de *patterns* déjà observés en cours