Logique et Langage - DM2

Pierre-Léo Bégay

November 13, 2018

Consignes

A rendre au plus tard le lundi 5 novembre, au début du cours

Si vous voulez me rendre une version numérique, vous pouvez faire les arbres

- en utilisant `http://mshang.ca/syntree/`, ou tout autre outil en ligne similaire (éventuellement en utilisant ‘ou‘, ‘et‘, ‘impl‘ et ‘equiv‘ au lieu de $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$)
- sous paint ou assimilé
- (en dernier recours) sur papier + photo intégrée au document

Assurez-vous quand même, éventuellement en demandant à quelqu'un d'autre, que le résultat est lisible sans yeux bioniques

1 Syllogistique et Port-Royal

1.1 Classification de propositions (0,25 par bonne réponse)

Donnez la classe (la plus précise possible) des propositions suivantes :

- Les poules ne volent pas
  - Proposition universelle négative E (phrase de la forme ‘Aucun X n'a la propriété Y‘)
- (par contre) Les poules ont des dents
  - Proposition universelle affirmative, ou A (phrase de la forme ‘(Tous) les X sont Y‘)
- Une des poules s'est enfuie
  - Proposition particulière affirmative I (‘Il existe un devoir de ce prof qui est super long à faire‘)
- La poule qui s'est enfuie est très sympa
  - Proposition singulière (on parle d'une personne clairement identifiée, comme l'indique le ‘la‘)
- Si la poule qui s'est enfuie revient, l'éleveur se mettra à la salsa
  - Proposition complexe (formée à partir de ‘La poule qui s'est enfuie revient‘ et ‘l'éleveur se mettra à la salsa‘, qui sont combinées via le ‘si ___, (alors) ___‘)

- La majorité des poules qui restent se sont mises au tango
  - Proposition quantifiée (on parle du groupe d'individus qui partagent la propriété "être une poule"), mais pas une A, E, I ou O. Elle appartient donc à la classe "le reste"

1.2 Relations entre propositions

Propositions contradictoires (0,5 par bonne réponse) Pour chaque proposition de l'exercice précédent, donnez sa proposition contradictoire (cad sa négation). Vous pouvez évidemment utiliser les classifications que vous avez précédemment données.

En utilisant la carré d'opposition :

- Les poules ne volent pas
  - Au moins une poule vole
- (par contre) Les poules ont des dents
  - Au moins une poule n'a pas de dents
- Une des poules s'est enfuie
  - Aucune poule ne s'est enfuie
- La poule qui s'est enfuie est très sympa
  - La poule qui s'est enfuie n'est pas très sympa
- Si la poule qui s'est enfuie revient, l'éleveur se mettra à la salsa
  - La poule qui s'est enfuie reviendra, et l'éleveur ne se mettra pas à la salsa
  - Rappel : $\neg(P \to Q) = (P \wedge \neg Q)$ (cf. le cours)
- La majorité des poules qui restent se sont mises au tango
  - Pas évident à dire. Le mieux est sans doute "Au plus la minorité des poules qui restent se sont mises au tango"

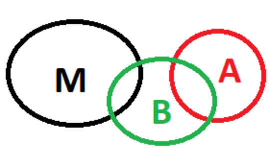
1.3 Schémas

Pour chaque syllogisme, dire s'il est valide ou non (0,75 par syllogisme)

1^{er} syllogisme $\dfrac{\begin{array}{c}\text{Aucun M n'est A}\\ \text{Certains B sont M}\end{array}}{\text{Aucun B n'est A}}$

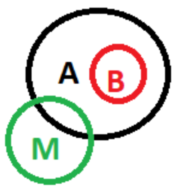
$2^{ème}$ syllogisme $\dfrac{\begin{array}{c}\text{Certains M sont A}\\ \text{Aucun B n'est M}\end{array}}{\text{Certains B ne sont pas A}}$

Premier syllogisme :



Les deux prémisses sont bien respectées, alors que la conclusion ne l'est pas. On a un contre-exemple, **le syllogisme n'est pas valide**

Deuxième syllogisme :



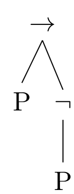
Les deux prémisses sont bien respectées, alors que la conclusion ne l'est pas. On a un contre-exemple, **le syllogisme n'est pas valide**

2 Logique propositionnelle

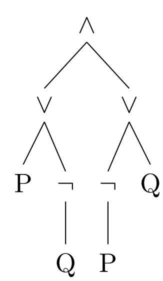
2.1 Arbres syntaxiques (0,5 par arbre)

Donnez l'arbre syntaxique de chacune des propositions suivantes :

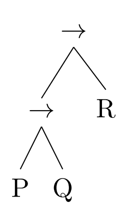
1. $(P \to \neg P)$



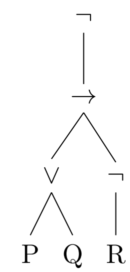
2. $((P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q))$



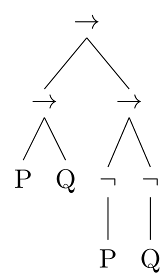
3. $((P \to Q) \to R)$



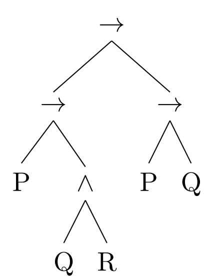
4. $\neg((P \vee Q) \to \neg R)$



5. $((P \to Q) \to (\neg P \to \neg Q))$



6. $((P \to (Q \wedge R)) \to (P \to R))$



2.2 Sémantique (1 point par tableau, 1 point pour la formule équivalente)

Donnez les conditions de vérité (cad la table de vérité) des formules de l'exercice précédent. Attention au nombre de configurations (et donc de lignes) !

Première formule

P	$\neg P$	$P \to \neg P$
0	1	1
1	0	0

Deuxième formule

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$	$\neg P \vee Q$	$(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1

Troisième formule

P	Q	R	$P \to Q$	$((P \to Q) \to R)$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Quatrième formule

P	Q	R	$\neg R$	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \to \neg R$	$\neg((P \vee Q) \to \neg R)$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1

Cinquième formule

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \to Q$	$\neg P \to \neg Q$	$(P \to Q) \to (\neg P \to \neg Q)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1

Sixième formule

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \to (Q \wedge R)$	$P \to R$	$(P \to (Q \wedge R)) \to (P \to R)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Donnez une formule équivalente à la quatrième et la sixième qui n'utilisent ni $\to$, ni $\vee$

Quatrième formule

$$
\begin{array}{ccc}
 & \neg((P \vee Q) \to \neg R) & \text{Equivalence utilisée} \\
\equiv & \neg(\neg(P \vee Q) \vee \neg R) & (\phi \to \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi) \\
\equiv & \neg((\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg R) & \neg(\phi \vee \psi) \equiv (\neg\phi \wedge \neg\psi) \\
\equiv & (\neg(\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg\neg R) & \neg(\phi \vee \psi) \equiv (\neg\phi \wedge \neg\psi) \\
\equiv & (\neg(\neg P \wedge \neg Q) \wedge R) & \neg\neg\phi \equiv \phi
\end{array}
$$

Sixième formule

$$
\begin{array}{ccc}
 & ((P \to (Q \wedge R)) \to (P \to R)) & \text{Equivalence utilisée} \\
\equiv & (\neg(P \to (Q \wedge R)) \vee (P \to R)) & (\phi \to \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi) \\
\equiv & (\neg(\neg P \vee (Q \wedge R)) \vee (\neg P \vee R)) & (\phi \to \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi) \\
\equiv & \neg((\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge \neg(\neg P \vee R)) & (\phi \vee \psi) \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \\
\equiv & \neg(\neg(P \wedge \neg(Q \wedge R)) \wedge \neg(\neg P \vee R)) & (\phi \vee \psi) \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \\
\equiv & \neg(\neg(P \wedge \neg(Q \wedge R)) \wedge (P \wedge \neg R)) & (\phi \vee \psi) \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)
\end{array}
$$

2.3 Modélisation (0,75 par phrase)

Modéliser en logique propositionnelle (du mieux que possible) les phrases suivantes :

- Jules a mangé Jess
  - Soit P $\equiv$ Jules a mangé Jess
  - La phrase se modélise alors en P
- Jules et Jess ont été mangés par Diane
  - Soit P $\equiv$ Diane a mangé Jules et Q $\equiv$ Diane a mangé Jess
  - La phrase se modélise alors en $P \wedge Q$
- Jess ne dit bonjour à Diane que si elle porte un chapeau et une moustache
  - Soit P $\equiv$ Jess dit bonjour à Diane, Q $\equiv$ Diane[1] porte un chapeau et R $\equiv$ Diane porte une moustache
  - La phrase se modélise alors en $(P \rightarrow (Q \wedge R))$
- Bien que Elsa vive à Rennes, Jules s'est inscrit à Paris 7 car c'est là que Jess étudie
  - Soit P $\equiv$ Elsa vit à Rennes, Q $\equiv$ Jules s'est inscrit à Paris 7 et R $\equiv$ Jess étudie à Paris 7
  - La phrase se modélise alors en $P \wedge Q \wedge R$ (parenthésage libre)

Attention $\rightarrow$ ne modélise pas l'*explication* ! $\phi \rightarrow \psi$ dit juste qu'il est impossible d'avoir ϕ sans ψ, mais n'assure pas que ϕ (ou ψ) est vraie ! $R \rightarrow Q$ dit donc que **si** Jess étudie à Paris 7, alors Jules aussi, ce qui n'est pas ce que dit la phrase de base.

La logique propositionnelle ne permet pas d'encoder directement l'*explication*, d'où le fait d'utiliser $R \wedge Q$. Une alternative (logiquement équivalente) qui le fait de façon un peu tordue aurait été $R \wedge (R \rightarrow Q)$, voire $R \wedge (R \rightarrow Q) \wedge Q$

- S'il fait beau demain, Diane n'ira pas en cours
  - Soit P $\equiv$ il fait beau demain et Q $\equiv$ Diane ira en cours
  - La phrase se modélise alors en $(P \rightarrow \neg Q)$

Attention 'Diane n'ira pas cours demain' n'est pas une proposition atomique, puisqu'on peut la décomposer comme la négation de 'Diane ira en cours demain'

Bonus

Soient les (squelettes de) formules

$\phi = ((A?B)?(C?D))$

$\psi = ((A?B)?(C?D))$

Remplacez chacun des "?" par un connecteur binaire ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ou $\leftrightarrow$, chacun peut servir 0, 1 ou plusieurs fois) de façon à ce qu'aucune des deux formules n'implique l'autre. Dit autrement, de telle sorte que ϕ puisse être vraie sans que ψ le soit, et inversement.

Je vois deux façons d'essayer de résoudre cette *énigme* : soit vous prenez des formules au hasard et vous tâtonnez jusqu'à ce qu'elles marchent, soit vous pouvez vous inspirer de *patterns* (ou phénomènes) de la logique propositionnelle qu'on a croisés plusieurs fois depuis le début du cours.

[1] Le "elle" de la phrase est ambigu, puisqu'il peut faire référence à Diane ou Jess. Ici on choisit Diane, mais dans l'autre cas ça ne changerait que les définitions de Q et R, pas la formule logique finale

Pour prouver votre réponse, donnez une configuration[2] telle que ϕ soit vraie ($= 1$) et ψ soit fausse ($= 0$), puis une autre configuration telle que ψ soit vraie et ϕ soit fausse

Réponse De nombreuses réponses possibles (il y a 2048 paires de formules, dont pas mal marchent), mais celle que j'avais en tête est

$$\phi = ((A \wedge B) \vee (C \wedge D))$$

$$\psi = ((A \vee B) \wedge (C \vee D))^3$$

En effet, si $A = B = 1$ et $C = D = 0$, $\phi = 1$ et $\psi = 0$. A l'inverse, si $A = C = 1$ et $B = D = 0$, $\phi = 0$ et $\psi = 1$, on a bien deux formules telles que l'une n'implique pas l'autre.

S'il vous reste du temps, essayez d'expliquer en français, avec vos propres mots, pourquoi aucune des deux formules n'implique l'autre

Réponse Soit A et B les propositions *à gauche* et C et D celles *à droite*. La formule ϕ garantit seulement que tout est vrai à gauche ou que tout est vrai à droite, tandis que la formule ψ dit uniquement qu'on a au moins un truc vrai de chaque côté. Dit autrement, ϕ est vraie (notamment) dans les configurations très *déséquilibrés* entre le gauche et la droite, tandis que ψ requiert un minimum d'équilibre. Ce sont donc deux formules qui, bien que structurellement très proches, ont des conditions de vérité très indépendantes.

[2] Par configuration, on entend une valuation des propositions atomiques, par exemple $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ et $D = 1$

[3] Notez l'alternance, d'une formule à l'autre, entre les $\vee$ et $\wedge$. C'est ce à quoi je faisais référence en parlant de *patterns* déjà observés en cours