Logique et Langage
Partiel

Pierre-Léo Bégay

12 Novembre 2018

Consignes

Durée : 2 heures

S'il y a des problèmes de compréhension / de français, ne pas hésiter à me demander

1 Syllogistique et Port-Royal (8,5 points)

1.1 Classification de propositions

Donnez la classe (la plus précise possible) des propositions suivantes (0,25 point par proposition)

- Les films de gladiateurs sont cool
  - Proposition universelle affirmative, ou A (phrase de la forme '(Tous) les X sont Y')
- La réalisatrice du dernier est talentueuse
  - Proposition singulière (on parle d'une personne clairement identifiée, comme l'indique le 'la')
- Certaines critiques étaient mauvaises
  - Proposition particulière affirmative I ("il existe au moins une critique qui était mauvaise")
  - Certain.e.s ont mis que c'était une particulière négative (O). Le fait qu'une prop quantifiée soit positive ou négative n'est pas un jugement de valeur (est-ce que la propriété est positive ("sympa") ou négative ("mauvaise")) mais reflète juste le fait que la propriété soit présente ou absente
- Aucun animal n'a été blessé pendant le tournage
  - Proposition universelle négative E
- L'actrice principale s'appelle Kimberley, tandis que l'acteur c'est Bobby
  - Proposition complexe ("L'actrice principale s'appelle Kimberley" + "l'acteur c'est Bobby)"
- Les documentalistes sont verbeux
  - Proposition universelle affirmative, ou A (phrase de la forme '(Tous) les X sont Y')

1.2 Relations entre propositions

Propositions contradictoires Pour chaque proposition de l'exercice précédent, donnez sa négation. Vous pouvez évidemment utiliser les classifications que vous avez précédemment données (0,5 point par proposition)

- Les films de gladiateurs sont cool
  - Au moins un film de gladiateurs n'est pas cool
- La réalisatrice du dernier est talentueuse
  - La réalisatrice du dernier n'est pas talentueuse
- Certaines critiques étaient mauvaises
  - Aucune critique n'était mauvaise
- Aucun animal n'a été blessé pendant le tournage
  - Au moins un animal a été blessé pendant le tournage
- L'actrice principale s'appelle Kimberley, tandis que l'acteur c'est Bobby
  - L'actrice principale ne s'appelle pas Kimberley, ou l'acteur n'est pas Bobby
  - Pour rappel, $\neg(P \wedge Q) = (\neg P \vee \neg Q)$
- Les documentalistes sont verbeux
  - Au moins un documentaliste n'est pas verbeux

1.3 Schémas

Pour chaque syllogisme, dire s'il est valide ou non (1 point par syllogisme)

1^{er} syllogisme $\dfrac{\begin{array}{c}\text{Certains M sont A}\\ \text{Tous les M sont B}\end{array}}{\text{Certains B sont A}}$

$2^{ème}$ syllogisme $\dfrac{\begin{array}{c}\text{Tous les M sont A}\\ \text{Certains B sont M}\end{array}}{\text{Tous les B sont A}}$

$3^{ème}$ syllogisme $\dfrac{\begin{array}{c}\text{Aucun A n'est M}\\ \text{Aucun B n'est M}\end{array}}{\text{Aucun B n'est A}}$

$4^{ème}$ syllogisme $\dfrac{\begin{array}{c}\text{Certains A sont M}\\ \text{Aucun B n'est M}\end{array}}{\text{Certains B ne sont pas A}}$

Premier syllogisme : valide La première prémisse (ou hypothèse) nous apprend qu'il existe un élément, qu'on appellera x, qui est à la fois M et A. De plus, la deuxième prémisse nous dit que tout élément M est également B. x est donc à la fois M, A et B. Il valide alors la conclusion (on parle de "témoin").

Syllogismes 2, 3 et 4 : non valides Cf les contre-exemples suivants :

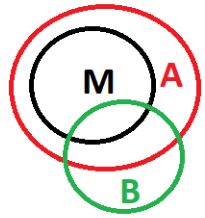


Figure 1: Contre-exemple au deuxième syllogisme

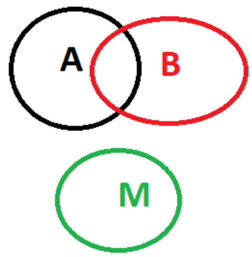


Figure 2: Contre-exemple au troisème syllogisme

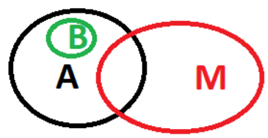


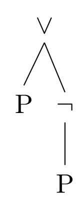
Figure 3: Contre-exemple au quatrième syllogisme

2 Logique propositionnelle (11,5 points)

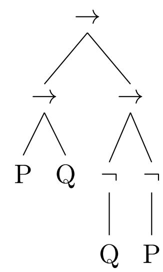
2.1 Arbres syntaxiques

Donnez l'arbre syntaxique de chacune des propositions suivantes (0,5 point par arbre)

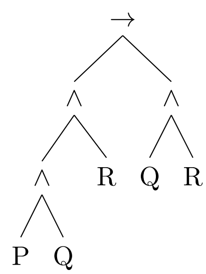
1. $(P \lor \neg P)$



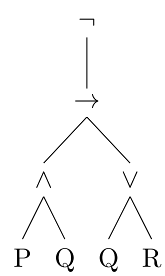
2. $((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P))$



3. $(((P \wedge Q) \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R))$



4. $\neg((P \wedge Q) \rightarrow (Q \vee R))$



2.2 Sémantique

Donnez les conditions de vérité (càd la table de vérité) des formules de l'exercice précédent. Attention au nombre de configurations (et donc de lignes) ! (1 point par formule)

P	$\neg P$	$(P \vee \neg P)$
0	1	1
1	0	1

Figure 4: Première formule

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(P \to Q)$	$(\neg Q \to \neg P)$	$((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Figure 5: Deuxième formule

P	Q	R	$(P \wedge Q)$	$((P \wedge Q) \wedge R)$	$(Q \wedge R)$	$(((P \wedge Q) \wedge R) \to (Q \wedge R))$
0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Figure 6: Troisième formule

P	Q	R	$(P \wedge Q)$	$(Q \vee R)$	$((P \wedge Q) \to (Q \vee R))$	$\neg((P \wedge Q) \to (Q \vee R))$
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0

Figure 7: Quatrième formule

Donnez des formules équivalentes à la deuxième et la quatrième qui n'utilisent ni $\to$, ni $\wedge$, mais dans lesquelles les proposition atomatiques originales apparaissent quand même[1] (0,75 point par formule)

Deuxième formule En utilisant l'égalité ci-dessus, on obtient

$$
\begin{aligned}
& ((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)) \\
\equiv \quad & ((\neg P \vee Q) \to (Q \vee \neg P)) \\
\equiv \quad & (\neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \vee \neg P))
\end{aligned}
$$

Quatrième formule Et ici, en utilisant une des lois de De Morgan[2]:

[1] Par exemple, dans la réponse pour la deuxième formule on doit avoir P et Q

[2] $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$

$$\neg((P \wedge Q) \rightarrow (Q \vee R))$$

$$\equiv \quad \neg(\neg(P \wedge Q) \ \vee \ (Q \vee R))$$

$$\equiv \quad \neg((\neg P \vee \neg Q) \ \vee \ (Q \vee R))$$

A noter : puisque la première formule est une tautologie et que la deuxième est toujours fausse, vous pouviez un peu tricher en répondant par exemple $((P \vee \neg P) \vee (Q \vee \neg))$ (également une tautologie) pour la première et $((P \wedge \neg P) \wedge (Q \wedge R))$ (également toujours fausse) pour la seconde

2.3 Modélisation

Modéliser en logique propositionnelle (du mieux que possible) les phrases suivantes (1 point par phrase)

- Jules et Elsa sont en vacances
  - On pose J $\equiv$ "Jules est en vacances" et E $\equiv$ "Elsa est en vacances"
  - La phrase se traduit alors par $(J \wedge E)$
- Elsa a pu partir car Clément s'occupe du chat
  - On pose E $\equiv$ "Elsa est partie" et C $\equiv$ "Clément s'occupe du chat"
  - La phrase se traduit alors par $(E \wedge C)$
  - **Remarque** C'est débattable, mais la phrase semble indiquer que le fait que quelqu'un s'occupe du chat est une condition <u>nécessaire</u> au départ d'Elsa. Pour traduire plus fidèlement la phrase, on pourrait introduire Q $\equiv$ "Quelqu'un s'occupe du chat" et donner $((E \rightarrow Q) \wedge (C \wedge E))$
  - **Remarque bis** C'est un peu *moche* d'avoir une proposition "Clément blabla" et une "Quelqu'un (n'importe qui) blabla" qui ont deux noms strictement différents. C'est une des limitations de la logique propositionnelles qui sont levées par la logique des prédicats.
- Jess rejoindra Jules et Elsa si sa cheffe Diane mange ce midi
  - On pose J $\equiv$ "Jess rejoindra Jules", E $\equiv$ "Jess rejoindra Elsa", D $\equiv$ "Diane mange ce midi", $D_j \equiv$ "Diane est la cheffe de Jess" et $D_e \equiv$ "Diane est la cheffe d'Elsa"
  - La phrase est ambigüe à plusieurs niveaux :
    * Le "sa" peut faire référence à Jess ou Elsa
    * On peut comprendre que ce que fera Diane conditionne le rendez-vous tout entier, ou seulement le fait que Jess voie Elsa
  - Schématiquement, on a les 4 interprétations suivantes :
    * Jess rejoindra [Jules et Elsa si sa cheffe Diane mange ce midi]
      $\Rightarrow (D_j \wedge (D \rightarrow (J \wedge E)))$
    * Jess rejoindra Jules et [Elsa si sa cheffe Diane mange ce midi]
      $\Rightarrow (D_j \wedge (J \wedge (D \rightarrow E)))$
    * Jess rejoindra [Jules et Elsa si sa cheffe Diane mange ce midi]
      $\Rightarrow (D_e \wedge (D \rightarrow (J \wedge E)))$
    * Jess rejoindra Jules et [Elsa si sa cheffe Diane mange ce midi]
      $\Rightarrow (D_e \wedge (J \wedge (D \rightarrow E)))$

- Elsa ne pourra profiter de ses vacances que si Jules ne l'embête pas
  - On pose E $\equiv$ "Elsa profitera de ses vacances" et J $\equiv$ "Jules embêtera Elsa"
  - La phrase se traduit alors en $(E \to \neg J)$