Logique et Langage
DM final

February 27, 2020

Consignes

A rendre au plus tard le samedi 29 décembre, à 3 heures du matin.

Etant donnée la *deadline*, le devoir est évidemment à me rendre numériquement. Vous pouvez me rendre un document texte, un .pdf ou même des photos de la version écrite. Les seules conditions que j'ai sont 1) ça doit être lisible sans efforts particuliers 2) pas. de. docx. Jamais.

Comme d'habitude, si vous en avez le courage, vous pouvez faire vos arbres syntaxiques avec `http://mshang.ca/syntree/`

Enfin, c'est un DM particulièrement difficile, je vous encourage donc encore plus que de coutume à le travailler en groupe.

1 Logique du premier ordre

1.1 Introduction aux preuves

Soient les deux formules suivantes :

- $\phi = \forall x.\exists y.K(x, y)$
- $\psi = \exists y.\forall x.K(x, y)$

Question 1 (1 point) Après avoir choisi l'interprétation de votre choix pour le prédicat $K(x, y)$, décrivez une situation dans laquelle ϕ est vraie et ψ est fausse.

Correction On prend - pour changer - $K(x, y) \equiv$ 'x a tué y'. ϕ se traduit alors en 'tout le monde a tué quelqu'un (de potentiellement différent)', tandis que ψ est 'Il y a quelqu'un qui s'est fait tuer par tout le monde (lui-même compris)'.

Soit une situation dans laquelle on a (uniquement) Jules (j) et Elsa (e), tels que Jules a tué Elsa et Elsa a tué Jules. ϕ est alors vraie (si $x = j$, on prend $y = e$, et inversement), tandis que ψ ne l'est pas (Elsa ne s'est pas tué elle-même, Jules non plus).

Réponse plus technique On reprend l'univers décrit plus haut. Puisqu'il est fini, on peut *déplier* ϕ et ψ :

- $\phi = ((K(j,e) \vee K(j,j)) \wedge (K(e,e) \vee K(e,j)))$
- $\psi = ((K(j,j) \wedge K(e,j)) \vee (K(j,e) \wedge K(e,e)))$

La situation, quant à elle, se traduit en

- $\neg K(e,e)$
- $K(e,j)$
- $K(j,e)$
- $\neg K(j,j)$

En remplaçant, on obtient donc :

- $\phi = (1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1) = (1 \wedge 1) = 1$
- $\psi = (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = (0 \vee 0) = 0$

Question 2 (1,5 point) Est-il possible de trouver une situation dans laquelle, à l'inverse, ψ est vraie et ϕ fausse, et pourquoi ?

Correction - version longue On va faire un raisonnement par l'absurde, c'est-à-dire supposer qu'il existe une situation dans laquelle ψ est vraie et ϕ est fausse, et montrer qu'on obtient une contradiction.

Si ϕ est fausse, alors $\neg\phi$ est vraie. On a donc :

- $\neg\phi = \neg\forall x.\exists y.K(x,y) = \exists x.\neg\exists y.K(x,y) = \exists x.\forall y.\neg K(x,y)$
- $\psi = \exists y.\forall x.K(x,y)$

Puisque $\neg\phi$ est (supposée) vraie, il existe une instanciation (valeur) y qui rend la sous-formule vraie. Appelons cette personne i (pour 'innocent'). De même, si ψ est vraie, il existe une instanciation de x qui rend la sous-formule vraie. On appelle cette personne v (pour 'victime'). On a donc :

- $\phi_{bis} = \forall y.\neg K(i,y)$
- $\psi_{bis} = \forall x.K(x,v)$

Puisque ces deux formules sont vraies pour toutes valeurs de y et x, alors on a, en particulier

- $\neg K(i,v)$ (en remplaçant y par v dans ϕ_{bis})
- $K(i,v)$ (en remplaçant x par i dans ψ_{bis})

On obtient une contradiction ('i a tué v' et 'i n'a pas tué v'). L'hypothèse, qui était que ψ est vraie et ϕ est fausse, est donc elle-même fausse.

Version courte Si ψ est vraie, quelqu'un (la victime) s'est fait tuer par tout le monde. Si ϕ est fausse, alors il existe quelqu'un qui n'a tué personne, et en particulier pas la victime. Contradiction[1].

[1] Ah oui, c'est plus court. D'ailleurs ça me va très bien comme type de réponse pour l'exam, l'important c'est que le raisonnement soit clair.

1.2 Distributivité du $\forall$

Soient les deux formules suivantes :

- $\phi = \forall x.(S(x) \vee H(x))$
- $\psi = (\forall x.S(x) \vee \forall x.H(x))$

Question 1 (1 point) Après avoir donné des interprétations de votre choix pour les prédicats $S(x)$ et $H(x)$, montrer que les formules ne sont pas équivalentes en décrivant une situation dans laquelle ϕ est vraie mais pas ψ

Correction On prend $S(x) \equiv$ 'x sait faire des saltos' et $H(x) \equiv$ 'x est hémophile'. Prenons une situation où on a deux personnes, Jules et Elsa, tels que Jules sache faire des saltos mais ne soit pas hémophile, tandis qu'à l'inverse, Elsa soit hémophile mais ne sache pas faire de saltos.

Dans cette situation, ϕ est vraie (car tout individu vérifie au moins une des deux propriétés), mais ψ ne l'est pas (car aucune des deux propriétés n'est vérifiée par tout le monde).

Question 2 (1,5 point) Est-il possible d'avoir une situation dans laquelle, à l'inverse, ψ est vraie et pas ϕ, et pourquoi ?

Correction Si ϕ est fausse, alors $\neg\phi = \exists x.(\neg S(x) \wedge \neg H(x))$ est vraie, ce qui veut dire qu'au moins un individu (le chieur) n'est ni capable de faire un salto, ni hémophile. Or, si ψ est vraie, alors (au moins) une des deux propriétés est satisfaite par tout les individus, y compris donc le chieur. Contradiction.

On définit maintenant ϕ et ψ comme :

- $\phi = \forall x.(S(x) \wedge H(x))$
- $\psi = (\forall x.S(x)) \wedge (\forall x.H(x))$

Question 3 (1,5 point) Les formules sont-elles équivalentes[2], et pourquoi ?

Correction ϕ se traduit par 'Tout individu est [capable de faire des saltos et hémophile]', tandis que ψ est '[Tout individu est capable de faire des saltos] et [tout individu est hémohpile]'. Les deux formules sont donc équivalentes.

2 Modélisation

2.1 Traduction

Question 1 (3 points + bonus si vous repérez et traitez les ambiguïtés) Modéliser (traduire) en logique du premier ordre[3] (du mieux que possible) les phrases suivantes, en introduisant vos propres prédicats (**atomiques**) et constantes.

Question 2 (3 points) Dresser les arbres syntaxiques des traductions que vous avez données dans la question 1

---

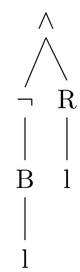
[2] On rappelle que deux formules ϕ et ψ sont équivalentes si et seulement si $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$, c'est-à-dire ssi l'une implique l'autre, et vice-versa

[3] On rappelle que toute formule de la logique propositionnelle est également une formule de la logique du premier ordre, ne vous sentez donc pas obligé(e) de mettre des $\forall$ et des $\exists$ quand vous n'en avez pas besoin !

Question 3 (4,5 points) *Calculer* les négations de ces dernières (des formules donc) et les exprimer en français de la façon la plus naturelle possible.

1. Léo n'est pas très bavard, mais il est rigolo

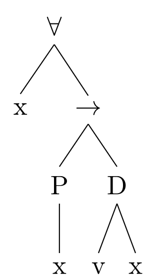
   - $(\neg B(l) \wedge R(l))$ avec $B(x) \equiv$ ‘x est (très) bavard‘, $R(x) \equiv$ ‘x est rigolo‘ et $l \equiv$ Léo



$\neg(\neg B(l) \wedge R(l))$
$\equiv (\neg\neg B(l) \vee \neg R(l))$
$\equiv (B(l) \vee \neg R(l))$
$\equiv$ Léo est bavard ou n'est pas rigolo

2. Victor déteste les physiciens

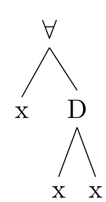
   - $\forall x.(P(x) \rightarrow D(v,x))$ avec $P(x) \equiv$ ‘x est physicien‘, $D(x,y) \equiv$ "x déteste y" et $v \equiv$ Victor



$\neg\forall x.(P(x) \rightarrow D(v,x))$
$\equiv \exists x.\neg(P(x) \rightarrow D(v,x))$
$\equiv \exists x.(P(x) \wedge \neg D(v,x))$
$\equiv$ Il existe un physicien que Victor ne déteste pas

3. Tout le monde se déteste soi-même

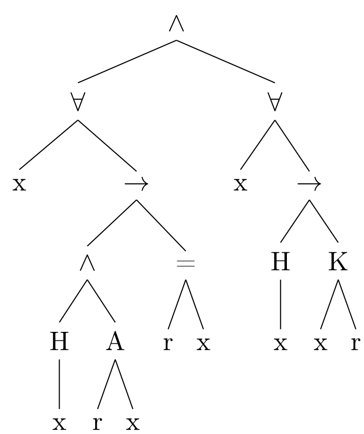
   - $\forall x.D(x,x)$ avec $D(x,y) \equiv$ ‘x déteste y‘



$$\begin{aligned} & \neg\forall x.D(x,x) \\ \equiv\ & \exists x.\neg D(x,x) \\ \equiv\ & \text{Il existe une personne qui ne se déteste pas} \end{aligned}$$

4. Puisque Rémi n'aime personne d'autre que lui, tout le monde l'a tué

   - Tout d'abord, on rappelle que la causalité ne se traduit pas en logique du premier ordre (cf. l'exercice avec Elsa, Jules et le jet ski). On va donc en fait traduire ‘Rémi n'aime personne d'autre que lui **et** tout le monde l'a tué‘
   - ‘Rémi n'aime personne d'autre que lui‘ ≡ ‘Rémi s'aime lui-même et personne d'autre‘ ≡ ‘Rémi s'aime et toute personne que Rémi aime est lui-même‘ ≡ ‘$(A(r,r) \wedge \forall x.((H(x) \wedge A(r,x)) \rightarrow (r = x)))$‘ avec $A(x,y) \equiv$ ‘x aime y‘ et $r \equiv$ Rémi
   - ‘Tout le monde a tué Rémi‘ ≡ ‘$\forall x.(H(x) \rightarrow K(x,r))$‘ avec $K(x,y) \equiv$ ‘x a tué y‘
   - La phrase se traduit donc en $((A(r,r) \wedge \forall x.((H(x) \wedge A(r,x)) \rightarrow (r = x))) \wedge \forall x.(H(x) \rightarrow K(x,r)))$



$$\begin{aligned} & \neg((A(r,r) \wedge \forall x.((H(x) \wedge A(r,x)) \rightarrow (r = x))) \wedge \forall x.(H(x) \rightarrow K(x,r))) \\ \equiv\ & (\neg(A(r,r) \wedge \forall x.((H(x) \wedge A(r,x)) \rightarrow (r = x))) \vee \neg\forall x.(H(x) \rightarrow K(x,r))) \\ \equiv\ & ((\neg A(r,r) \vee \neg\forall x.((H(x) \wedge A(r,x)) \rightarrow (r = x))) \vee \neg\forall x.(H(x) \rightarrow K(x,r))) \\ \equiv\ & ((\neg A(r,r) \vee \exists x.\neg((H(x) \wedge A(r,x)) \rightarrow (r = x))) \vee \neg\forall x.(H(x) \rightarrow K(x,r))) \\ \equiv\ & ((\neg A(r,r) \vee \exists x.((H(x) \wedge A(r,x)) \wedge \neg(r = x))) \vee \neg\forall x.(H(x) \rightarrow K(x,r))) \\ \equiv\ & ((\neg A(r,r) \vee \exists x.((H(x) \wedge A(r,x)) \wedge \neg(r = x))) \vee \exists x.\neg(H(x) \rightarrow K(x,r))) \\ \equiv\ & ((\neg A(r,r) \vee \exists x.((H(x) \wedge A(r,x)) \wedge \neg(r = x))) \vee \exists x.(H(x) \wedge \neg K(x,r))) \end{aligned}$$

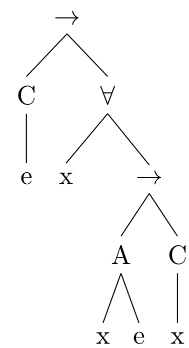
Rémi ne s'aime pas, ou il existe quelqu'un (d'autre) qu'il aime, ou il existe quelqu'un qui ne l'a pas tué

Remarque Les subtilités de la phrase perdues lors de la traduction en logique du premier ordre ne sont pas magiquement restaurées lors de la négation, d'où une "négation française" étrange (cette remarque s'applique à plusieurs phrases ici d'ailleurs)

Remarque bis ‘Tout personne que Rémi aime est lui-même‘ peut aussi se traduire par $\forall x.((x \neq r) \rightarrow \neg A(r,x))$

5. Elsa ne part en vacances que si tous ses amis sont en vacances

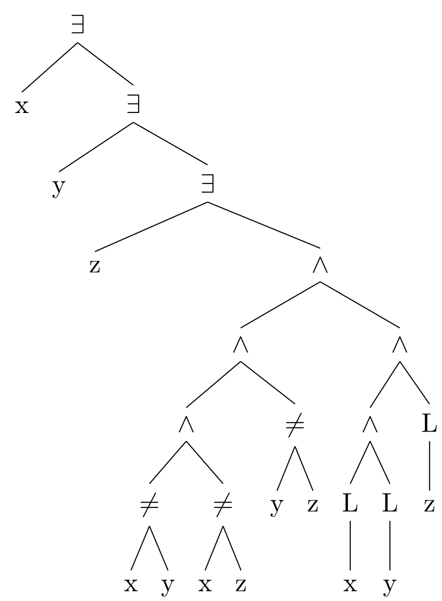
- $(C(e) \to \forall x.(A(x,e) \to C(x)))$ avec $C(x) \equiv$ 'x part / est en vacances' et $A(x,y) \equiv$ 'x et y sont amis'



$$
\begin{aligned}
& \neg(C(e) \to \forall x.(A(x,e) \to C(x))) \\
\equiv\ & (C(e) \land \neg\forall x.(A(x,e) \to C(x))) \\
\equiv\ & (C(e) \land \exists x.\neg(A(x,e) \to C(x))) \\
\equiv\ & (C(e) \land \exists x.(A(x,e) \land \neg C(x))) \\
\equiv\ & \text{Elsa est partie en vacances et (alors que) un de ses amis n'est pas en vacances}
\end{aligned}
$$

6. Il y a (dans l'univers) au moins 3 futurs linguistes

- $\exists x.\exists y.\exists z.((((x \neq y) \land (x \neq z)) \land (y \neq z)) \land ((L(x) \land L(y)) \land L(z)))$ avec $L(x) \equiv$ 'x est un(e) futur(e) linguiste'
- Attention à ne pas oublier la partie avec les $\neq$: sans, la formule sera vraie dans une situation avec seulement un futur linguiste (il suffit d'instancier x, y et z avec la personne en question)



$\neg\exists x.\exists y.\exists z.((((x \neq y) \land (x \neq z)) \land (y \neq z)) \land ((L(x) \land L(y)) \land L(z)))$

$\equiv \forall x.\forall y.\forall z.\neg((((x \neq y) \wedge (x \neq z)) \wedge (y \neq z)) \wedge ((L(x) \wedge L(y)) \wedge L(z)))$ (3 étapes d'un coup)

$\equiv \forall x.\forall y.\forall z.(\neg(((x \neq y) \wedge (x \neq z)) \wedge (y \neq z)) \vee \neg((L(x) \wedge L(y)) \wedge L(z)))$

$\equiv \forall x.\forall y.\forall z.(\neg(((x \neq y) \wedge (x \neq z)) \wedge (y \neq z)) \vee (\neg(L(x) \wedge L(y)) \vee \neg L(z)))$

$\equiv \forall x.\forall y.\forall z.(\neg(((x \neq y) \wedge (x \neq z)) \wedge (y \neq z)) \vee ((\neg L(x) \vee \neg L(y)) \vee \neg L(z)))$

En utilisant $\phi \to \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$:

$\equiv \forall x.\forall y.\forall z.((((x \neq y) \wedge (x \neq z)) \wedge (y \neq z)) \to ((\neg L(x) \vee \neg L(y)) \vee \neg L(z)))$

$\equiv$ Pour toutes 3 personnes (différentes), au moins l'une n'est pas linguiste

$\equiv$ Il y a (strictement) moins de 3 linguistes

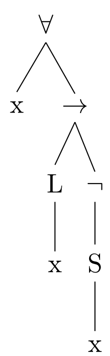
7. On ne peut pas être logicien et sain d'esprit

- Dit autrement, les propriétés ‘être logicien‘ et ‘être sain d'esprit‘ sont incompatibles. Si on en a une, on se doit donc de ne pas avoir l'autre[4] :
- $\forall x.(L(x) \to \neg S(x))$ avec $L(x) \equiv$ ‘x est logicien‘ et $S(x) \equiv$ ‘x est saint d'esprit‘

En utilisant $\phi \to \psi \equiv \neg\psi \to \neg\phi$ et $\neg\neg\phi \equiv \phi$:

$\equiv \forall x.(S(x) \to \neg L(x))$

On prendra la première version pour la suite



$\neg\forall x.(L(x) \to \neg S(x))$

$\equiv \exists x.\neg(L(x) \to \neg S(x))$

$\equiv \exists x.(L(x) \wedge \neg\neg S(x))$

$\equiv \exists x.(L(x) \wedge S(x))$

$\equiv$ Il existe un logicien saint d'esprit

Alternativement (les formules sont équivalentes), vous pouviez faire

- $\neg\exists x.(L(x) \wedge S(x))$

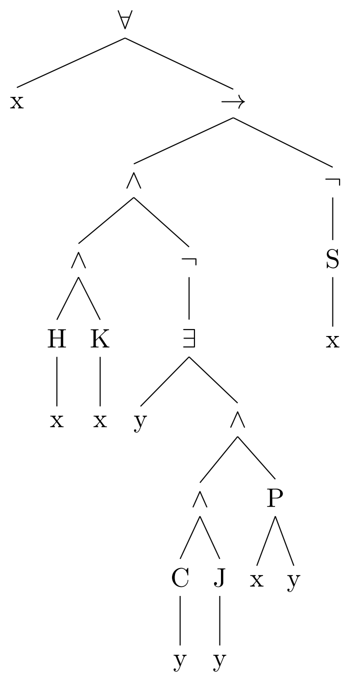
$\equiv \forall x.(\neg L(x) \vee \neg S(x))$

$\equiv \forall x.(L(x) \to \neg S(x))$

8. Un tueur en série qui ne possède aucune chaise jaune n'est pas sain d'esprit

[4]Pour l'intuition, pensez à ‘être bourré‘ et ‘conduire‘. La loi dit ‘bourré $\to \neg$ conducteur‘, ou, de façon équivalente, ‘conducteur $\to \neg$ bourré‘

- Structure de la phrase : $\forall x.(P(x) \to \neg S(x))$ avec $S(x) \equiv$ ‘x est saint d'esprit‘ et $P(x) \equiv$ ‘x est un tueur en série qui ne possède aucune chaise jaune‘
- Votre spider-sens vous alerte évidemment que le prédicat P n'est absolument pas atomique. Il faut donc le *coder* :
- $P(x) \equiv (H(x)$[5] $\wedge K(x) \wedge \neg\exists y.(C(y) \wedge J(y) \wedge P(x,y)))$ avec $K(x) \equiv$ ‘x est un tueur en série‘, $C(x) \equiv$ ‘x est une chaise‘, $J(x) \equiv$ ‘x est jaune‘ et $P(x,y) \equiv$ ‘x possède y‘
- La formule *globale* est donc :
- $\forall x.(((H(x) \wedge K(x)) \wedge \neg\exists y.((C(y) \wedge J(y)) \wedge P(x,y))) \to \neg S(x))$



$$\begin{aligned}
& \neg\forall x.(((H(x) \wedge K(x)) \wedge \neg\exists y.((C(y) \wedge J(y)) \wedge P(x,y))) \to \neg S(x)) \\
\equiv\ & \exists x.\neg(((H(x) \wedge K(x)) \wedge \neg\exists y.((C(y) \wedge J(y)) \wedge P(x,y))) \to \neg S(x)) \\
\equiv\ & \exists x.(((H(x) \wedge K(x)) \wedge \neg\exists y.((C(y) \wedge J(y)) \wedge P(x,y))) \wedge \neg\neg S(x)) \\
\equiv\ & \exists x.(((H(x) \wedge K(x)) \wedge \neg\exists y.((C(y) \wedge J(y)) \wedge P(x,y))) \wedge S(x)) \\
\equiv\ & \text{Il existe un tueur en série qui ne possède aucune chaise jaune et est sain d'esprit}
\end{aligned}$$

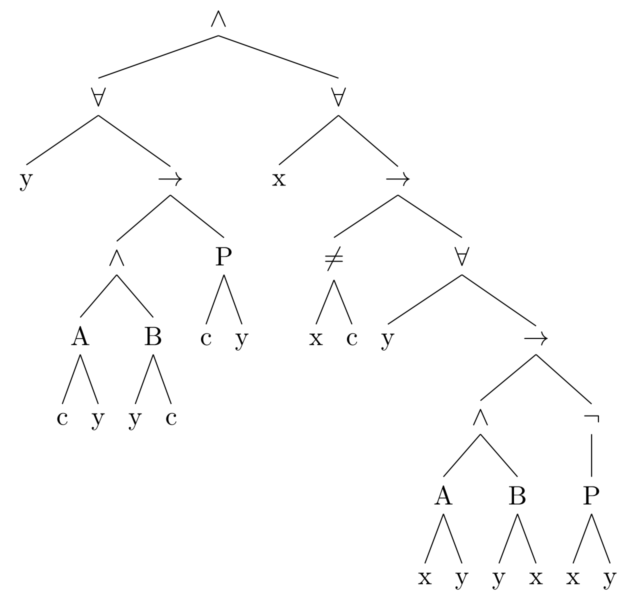
9. A part Chloé, personne ne pardonnerait un ami qui l'aurait trahi

Remarque La phrase pourrait être ambiguë, puisque "un ami" peut faire référence à un ami en particulier, ou être une généralité ("un ami" = "n'importe quel ami"). Je pense néanmoins que la première interprétation est assez tordue, et me concentrerai donc sur la seconde.

- Reformulation de la phrase : Chloé pardonnerait un ami qui l'aurait trahie, et toute personne qui n'est pas Chloé ne pardonnerait pas un ami qui l‘aurait trahi
- Structure de la formule : $(Q(c) \wedge \forall x.((x \neq c) \to \neg Q(x)))$, avec $Q(x) \equiv$ ‘x pardonnerait un ami qui l'aurait trahi‘ et $c \equiv$ Chloé

[5] Le fait d'être humain peut paraître un peu redondant avec la propriété ‘être un tueur en série‘, mais pensez à la clope, à l'alcool, au nutella etc !

- Le prédicat Q n'étant carrément pas atomique, on le *code* :
- $Q(x) \equiv \forall y.((A(x,y)$[6] $\wedge B(y,x)$[7]$) \to P(x,y))$, avec $A(x,y) \equiv$ ‘x et y sont amis‘, $B(x,y) \equiv$ ‘x a trahi y‘ et $P(x,y) \equiv$ ‘x pardonne y‘
- La formule globale est donc :
- $(\forall y.((A(c,y) \wedge B(y,c)) \to P(c,y)) \wedge \forall x.((x \neq c) \to \forall y.((A(x,y) \wedge B(y,x)) \to \neg P(x,y))))$



$$\begin{aligned}
& \neg(\forall y.((A(c,y) \wedge B(y,c)) \to P(c,y)) \wedge \forall x.((x \neq c) \to \forall y.((A(x,y) \wedge B(y,x)) \to \neg P(x,y)))) \\
\equiv\ & (\neg \forall y.((A(c,y) \wedge B(y,c)) \to P(c,y)) \vee \neg \forall x.((x \neq c) \to \forall y.((A(x,y) \wedge B(y,x)) \to \neg P(x,y)))) \\
\equiv\ & (\neg \forall y.((A(c,y) \wedge B(y,c)) \to P(c,y)) \vee \exists x.\neg((x \neq c) \to \forall y.((A(x,y) \wedge B(y,x)) \to \neg P(x,y)))) \\
\equiv\ & (\neg \forall y.((A(c,y) \wedge B(y,c)) \to P(c,y)) \vee \exists x.((x \neq c) \wedge \neg \forall y.((A(x,y) \wedge B(y,x)) \to \neg P(x,y)))) \\
\equiv\ & (\neg \forall y.((A(c,y) \wedge B(y,c)) \to P(c,y)) \vee \exists x.((x \neq c) \wedge \exists y.\neg((A(x,y) \wedge B(y,x)) \to \neg P(x,y)))) \\
\equiv\ & (\neg \forall y.((A(c,y) \wedge B(y,c)) \to P(c,y)) \vee \exists x.((x \neq c) \wedge \exists y.((A(x,y) \wedge B(y,x)) \wedge \neg\neg P(x,y)))) \\
\equiv\ & (\neg \forall y.((A(c,y) \wedge B(y,c)) \to P(c,y)) \vee \exists x.((x \neq c) \wedge \exists y.((A(x,y) \wedge B(y,x)) \wedge P(x,y)))) \\
\equiv\ & (\exists y.\neg((A(c,y) \wedge B(y,c)) \to P(c,y)) \vee \exists x.((x \neq c) \wedge \exists y.((A(x,y) \wedge B(y,x)) \wedge P(x,y)))) \\
\equiv\ & (\exists y.((A(c,y) \wedge B(y,c)) \wedge \neg P(c,y)) \vee \exists x.((x \neq c) \wedge \exists y.((A(x,y) \wedge B(y,x)) \wedge P(x,y))))
\end{aligned}$$

$\equiv$ Chloé ne pardonnerait pas au moins un ami l'ayant trahie, ou il existe quelqu'un qui n'est pas Chloé et qui pardonnerait un ami l'ayant trahi

Remarque N'oubliez pas d'utiliser le prédicat $H(x) \equiv$ ‘x est un être humain‘ quand ça vous semble pertinent !

2.2 Approche logique du moindre-effort

Vous ouvrez un bar dans le Poitou-Charentes. Vous tenez bien sûr à vérifier que vous n'avez pas de client mineur[8] qui consomme de l'alcool chez vous.

[6] ou A(y,x), on s'en fout
[7] Ah par contre, là l'ordre est très important !
[8] C'est-à-dire de strictement moins de 18 ans

Question 1 (0,25 point) Vous voyez actuellement au bar Jules et Elsa, dont vous savez qu'ils ont respectivement 14 et 33 ans, mais vous ne savez pas s'ils sont en train de boire de l'alcool ou non. Avez-vous besoin de vérifier le verre de Jules ? Et d'Elsa ?

Vous devez vérifier le verre de Jules, qui ne peut pas boire d'alcool. Els par contre ne peut pas enfreindre la règle, puisqu'elle est majeure.

Question 2 (0,75 point) A côté, vous voyez Diane, qui boit un chocolat chaud, et Jade, qui descend une bouteille de vodka. Sachant que vous ignorez l'âge de l'une comme de l'autre, avez-vous besoin de vérifier la carte d'identité de Diane ? Et de Jade ? Justifiez en utilisant la logique propositionnelle.

Correction La règle se modélise en $\forall x.(B(x) \rightarrow M(x))$[9], où $M(x) \equiv$ "x est majeur" et $B(x) \equiv$ "x boit de l'alcool"[10]. Puisque Jade boit, $B(j) = 1$. La règle impose donc d'avoir $M(j)$, soit "Jade est majeur".

A l'inverse, puisque $B(e) = 0$, $M(e)$ peut valoir 0 ou 1, ça ne contredira pas la règle. Pas besoin donc de vérifier l'âge d'Elsa.

Remarque J'ai parlé de logique propositionnelle dans l'énoncé, car l'exercice est une adaptation de la tâche de sélection de Wason (http://cpc.cx/np0), dans laquelle cette dernière suffit (puisqu'elle joue sur la bonne compréhension du $\rightarrow$), mais pour une version humaine ça passait finalement mieux avec de la logique du premier ordre.

2.3 Logique du premier ordre et intuition

Soit la phrase suivante : 'Dans toute classe, il existe un étudiant tel que s'il a une bonne note, alors tout le monde a une bonne note'. Cette phrase, à priori contre-intuitive, est pourtant *techniquement* vraie. On prend une classe complètement au hasard qui va nous servir d'univers, dont les individus en sont les différents étudiants. Par exemple, $\forall x.B(x)$ se traduit alors en 'tous les étudiants de la classe sont blonds'.

Question 1 (0,5 points) En partant du prédicat $N(x) \equiv$ 'x a une bonne note', traduire Il existe un étudiant tel que s'il a une bonne note, alors tout le monde a une bonne note' en logique du premier ordre.

Correction Puisqu'on s'intéresse à une classe, on suppose que tout le monde est étudiant et qu'on n'a donc pas besoin d'un prédicat pour ça (ce qui simplifie la suite sans changer le fond de l'exercice)

- il existe un étudiant tel que [cet étudiant a une bonne note $\rightarrow$ [tous les étudiants ont une bonne note]]

$\equiv$ $\exists x.(N(x) \rightarrow \forall y.N(y))$

Question 2 (1,5 points) Expliquer pourquoi elle est *techniquement* vraie.

Une formule de la forme $\exists x.\phi$ est vraie si et seulement si il existe une instance (ou un remplacement) de x qui rende ϕ vraie. Le but du jeu est donc de trouver l'étudiant en question.

[9] Et non l'inverse, comme l'intuition peut le laisser penser
[10] Bon, ça devrait être "peut boire de l'alcool", mais bref

La validité de cette formule repose sur le principe appelé **tiers exclu**[11], qui dit que toute chose est soit vraie, soit fausse. En particulier, soit tous les étudiants ont une bonne note, soit il est faux que tous les étudiants ont une bonne note. On vérifie que dans les deux cas, la formule est vraie :

Tous les étudiants ont une bonne note Dans cette situation, la partie droite de la flèche est vraie. Il suffit donc de remplacer x par n'importe quel étudiant e, et on obtient la formule suivante :

$$\begin{aligned} & N(e) \to \forall y.N(y) \\ \equiv\ & 1 \to 1 \\ \equiv\ & 1 \end{aligned}$$

Dans cette configuration, la formule est donc vraie.

Il est faux que tous les étudiants ont eu une bonne note Comme vous le savez (cf la négation en logique du premier ordre ou le carré magique dans la logique de Port-Royal), la négation de ‘tous les étudiants ont une bonne note‘ est ‘au moins un étudiant n'a pas eu une bonne note‘. Appelons un tel étudiant m (pour "malchanceux"), et remplaçons x par m dans la formule

$$\begin{aligned} & N(m) \to \forall y.N(y) \\ \equiv\ & 0 \to 0 \\ \equiv\ & 1 \end{aligned}$$

Encore une fois, la formule est vraie.

Conclusion On sait, de par le principe du tiers exclus (et le bon sens), que soit personne, soit au moins une personne a eu une mauvaise (en tout cas "pas bonne") note. On a aussi vu que dans les deux situations, la formule est vraie (pour des raisons différentes). La formule est donc vraie ‘dans l'absolu‘.

Remarque Cet exercice est une reformulation d'un problème de logique bien connu appelé ‘Paradoxe du buveur‘, qui consiste à formuler la phrase ‘Dans tout bar non-vide[12], il existe une personne telle que, si cette personne boit, alors tout le monde boit‘ et à dire que, contrairement à l'intuition et pour les mêmes raisons que dans cet exercice, la phrase est toujours vraie.

Remarque bis Il était peut-être tentant de répondre quelque chose du genre "ben oui, le plus mauvais étudiant de la classe". Mais si vous êtes arrivés jusqu'aux études supérieures, vous avez forcément remarqué que les notes ne sont pas toujours attribuées avec la plus grande justesse ou objectivité ! (et accessoirement, qu'il n'y a pas de plus mauvais élève dans l'absolu)

2.4 Enigme (bonus, 3 points)

Chloé, dont la passion dévorante pour *Saw* ne vous avait jamais inquiété(e) jusqu'ici, vous a enfermé(e) dans un sous-sol miteux et vous *propose* de jouer à un jeu. Il y a deux portes, une à gauche, et une à droite. Les deux sont actuellement fermées, mais l'une donne sur la sortie, et l'autre sur un dragon affamé[13]. L'une s'ouvrira si vous dites une phrase vraie, tandis que l'autre s'ouvrira si vous énoncez une phrase fausse (mais vous ne savez pas laquelle est laquelle).

[11] Principe qui est accepté en logique classique et dans ce cours, mais qui en soi est au centre d'un sacré bordel en logique. Si vous êtes curieux, vous pouvez jeter un oeil ici : http://cpc.cx/np1

[12] Oui, normalement il faut ajouter à l'exo comme hypothèse que la classe contient au moins un étudiant, puisqu'aucune formule de la forme $\exists x.\phi$ ne peut être vraie dans un univers vide (aucune valeur possible pour x, tout bêtement)

[13] Oui, bon, on fait ce qu'on peut comme histoire hein

Question Chloé vous dit que vous avez le droit à une seule pour vous échapper, que faites-vous ? Justifier avec une modélisation logique.

Indice La réponse ‘normale‘ utilise une phrase construite à partir de ‘La porte de droite mène à la sortie‘ et ‘La porte de droite s’ouvre si on énonce une proposition vraie‘, mais il est tout à fait possible qu’il existe d’autres solutions tout à fait différentes. A vous d’essayer de me surprendre si vous vous en sentez la capacité !

Correction On pose

$B \equiv$ ‘La porte de droite mène à la sortie‘

$H \equiv$ ‘La porte de droite s’ouvre si on énonce une proposition vraie‘

$\phi \equiv B \leftrightarrow H$

Le fait que la porte droite mène à la sortie et qu’elle s’ouvre en cas de vérité sont indépendants. On peut donc avoir B vraie et H vraie, B vraie et H fausse, B fausse et H vraie, et B fausse et H fausse. On fait une table de vérité pour voir dans chaque cas s’il faut dire un truc vrai ou faux pour s’en sortir, et si par hasard y aurait pas une corrélation avec la formule ϕ :

B	H	Il faut prendre la porte	On doit dire un truc	ϕ
0	0	Gauche	Vrai	1
0	1	Gauche	Faux	0
1	0	Droite	Faux	0
1	1	Droite	Vrai	1

On notera que ϕ a toujours la valeur de vérité qui correspond à ce qu’il faut dire pour que la bonne porte s’ouvre. Il suffit donc de dire ‘La porte de droite mène à la sortie si et seulement si la porte de droite s’ouvre si on énonce une proposition vraie‘ pour pouvoir sortir sans risquer de passer par l’intestin d’un dragon.