Logique et Langage
DM 5

December 14, 2017

Consignes

A rendre au plus tard le samedi 30 décembre, à 3 heures du matin.

Etant donnée la *deadline*, le devoir est évidemment à me rendre numériquement. Vous pouvez me rendre un document texte, un .pdf ou même des photos de la version écrite. Les seules conditions que j'ai sont 1) ça doit être lisible sans efforts particuliers 2) pas. de. docx. Jamais.

Comme d'habitude, si vous en avez le courage, vous pouvez faire vos arbres syntaxiques avec `http://mshang.ca/syntree/`

Enfin, c'est un DM particulièrement difficile, je vous encourage donc encore plus que de coutume à le travailler en groupe.

1 Logique du premier ordre

1.1 Introduction aux preuves

Soient les deux formules suivantes :

- $\phi = \forall x.\exists y.K(x,y)$
- $\psi = \exists y.\forall x.K(x,y)$

Question 1 (0,75 point) Après avoir choisi l'interprétation de votre choix pour le prédicat $K(x,y)$, décrivez une situation dans laquelle ϕ est vraie et ψ est fausse.

Question 2 (1,25 point) Est-il possible de trouver une situation dans laquelle, à l'inverse, ψ est vraie et ϕ fausse, et pourquoi ?

1.2 Distributivité du $\forall$

Soient les deux formules suivantes :

- $\phi = \forall x.(S(x) \vee H(x))$
- $\psi = (\forall x.S(x)) \vee (\forall x.H(x))$

Question 1 (0,75 point) Après avoir donné des interprétations de votre choix pour les prédicats $S(x)$ et $H(x)$, montrer que les formules ne sont pas équivalentes en décrivant une situation dans laquelle ϕ est vraie mais pas ψ

Question 2 (1,25 point) Est-il possible d'avoir une situation dans laquelle, à l'inverse, ψ est vraie et pas ϕ, et pourquoi ?

On définit maintenant ϕ et ψ comme :

- $\phi = \forall x.(S(x) \land H(x))$
- $\psi = (\forall x.S(x)) \land (\forall x.H(x))$

Question 3 (1,5 point) Les formules sont-elles équivalentes[1], et pourquoi ?

1.3 Ordonnancement des quantificateurs

Soient le prédicat $P(x, y, z,) \equiv$ 'x a parlé de y à z', et un univers constitué uniquement d'êtres humains[2]. La formule

1. $\forall x.\exists y.\forall z.P(x, y, z)$

se traduit par 'Tout le monde a *sa personne spéciale* dont il/elle a parlé à tout le monde' (par exemple, Jules a parlé d'Elsa à tout le monde, Diane a parlé de Stéphane à tout le monde, etc). On peut cependant ordonner les quantificateurs de 5 autres façons :

2 $\forall x.\forall z.\exists y.P(x, y, z)$

3 $\exists y.\forall x.\forall z.P(x, y, z)$

4 $\exists y.\forall z.\forall x.P(x, y, z)$

5 $\forall z.\exists y.\forall x.P(x, y, z)$

6 $\forall z.\forall x.\exists y.P(x, y, z)$

Question 1 (2,5 points) Traduire en français (plus ou moins) naturel chacune des formules ci-dessus (attention aux ambiguïtés, ne pas hésiter à donner un bout d'exemple comme c'est fait dans l'énoncé pour clarifier votre réponse).

Question bonus (1 point) Quelles formules sont équivalentes entre elles ?

2 Modélisation

2.1 Jules et ses petits secrets

On a vu en cours que la phrase 'Jules cache quelque chose à tout le monde' est ambigüe, puisqu'on ne sait pas si Jules cache la même chose à tout le monde, ou s'il a (au moins) un secret (potentiellement différent) par personne. Nous avons ensuite traduit la première interprétation par $\exists y.\forall z.(H(z) \to C(j, y, z))$ avec $C(x, y, z) \equiv$ 'x cache y à z' et $j \equiv$ Jules.

[1] On rappelle que deux formules ϕ et ψ sont équivalentes si et seulement si $(\phi \to \psi) \land (\psi \to \phi)$, c'est-à-dire ssi l'une implique l'autre, et vice-versa

[2] Donc pas besoin de s'embêter avec le prédicat $H(x) \equiv$ x est humain

Question 1 (0,5 point) Donner une traduction (en logique du premier ordre) de la seconde interprétation, et en dresser l'arbre syntaxique.

Question 2 (0,75 point) *Calculer* la négation de la formule donnée, et l'exprimer de la façon la plus naturelle possible en français.

2.2 Traduction

Question 1 (3 points + bonus si vous repérez et traitez les ambiguïtés) Modéliser (traduire) en logique du premier ordre[3] (du mieux que possible) les phrases suivantes, en introduisant vos propres prédicats (**atomiques**) et constantes :

1. Léo n'est pas très bavard, mais il est rigolo
2. Victor déteste les physiciens
3. Tout le monde se déteste soi-même
4. Puisque Rémi n'aime personne d'autre que lui, tout le monde l'a tué
5. Elsa ne part en vacances que si tous ses amis sont en vacances
6. Il y a (dans l'univers) au moins 3 futurs linguistes
7. On ne peut pas être logicien et sain d'esprit
8. Un tueur en série qui ne possède aucune chaise jaune n'est pas sain d'esprit
9. A part Chloé, personne ne pardonnerait un ami qui l'aurait trahi

Indice Dans la phrase 8, attention à bien utiliser le prédicat $H(x) \equiv$ 'x est un être humain'. Dans les autres phrases, on considère que l'univers est de toute façon constitué uniquement de personnes, donc pas besoin de s'embêter avec.

Question 2 (3 points) Dresser les arbres syntaxiques des traductions que vous avez données dans la question 1 des phrases 3, 8 et 9, puis *calculer* les négations de ces dernières (des formules donc) et les exprimer en français de la façon la plus naturelle possible.

2.3 Approche logique du moindre-effort

Question 1 (1,5 point) Soit un paquet de cartes qui ont chacune un nombre d'un côté, et une lettre de l'autre (par exemple C/9, D/2, P/7 etc). Vous voulez vérifier que toute carte avec un 'A' d'un côté a un '4' de l'autre, et vous avez devant vous des cartes 'A', '7', 'D', '4'. Lesquelles avez-vous besoin de retourner, et pourquoi ? (justifier avec de la logique propostionnelle si possible)

Maintenant que vous avez fini de jouer avec des cartes, vous ouvrez un bar au Havre. Vous tenez bien sûr à vérifier que vous n'avez pas de client mineur[4] qui consomme de l'alcool chez vous.

Question 2 (0,25 point) Vous voyez actuellement au bar Jules et Elsa, dont vous savez qu'ils ont respectivement 14 et 33 ans, mais vous ne savez pas s'ils sont en train de boire de l'alcool ou non. Avez-vous besoin de vérifier le verre de Jules ? Et d'Elsa ?

[3] On rappelle que toute formule de la logique propositionnelle est également une formule de la logique du premier ordre, ne vous sentez donc pas obligé(e) de mettre des $\forall$ et des $\exists$ quand vous n'en avez pas besoin !

[4] C'est-à-dire de strictement moins de 18 ans

Question 3 (0,5 point) A côté, vous voyez Diane, qui boit un chocolat chaud, et Jade, qui descend une bouteille de vodka. Sachant que vous ignorez l'âge de l'une comme de l'autre, avez-vous besoin de vérifier la carte d'identité de Diane ? Et de Jade ?

2.4 Logique du premier ordre et intuition

Soit la phrase suivante : 'Dans toute partie de LoL, il existe un joueur tel que s'il se comporte bien, alors tout le monde se comporte bien'. Cette phrase, contre-intuitive à malheureusement bien des niveaux, est pourtant *techniquement* vraie. On prend une partie de LoL complètement au hasard qui va nous servir d'univers, dont les individus sont les différents joueurs de la partie. Par exemple, $\forall x.B(x)$ se traduit alors en 'tous les joueurs de la partie sont blonds'.

Question 1 (2,5 points) En partant du prédicat $C(x) \equiv$ 'x se comporte bien', traduire 'Dans la partie considérée (l'univers), il existe un joueur tel que s'il se comporte bien, alors tout le monde se comporte bien' en logique du premier ordre et expliquer pourquoi elle est *techniquement* vraie.

Question bonus (0,5 point) Expliquer alors pourquoi la phrase 'Dans toute partie de LoL, il existe un joueur tel que s'il se comporte bien, alors tout le monde se comporte bien' est techniquement vraie.

2.5 Enigme (bonus, 3 points)

Chloé, dont la passion dévorante pour *Saw* ne vous avait jamais inquiété(e) jusqu'ici, vous a enfermé(e) dans un sous-sol miteux et vous *propose* de jouer à un jeu. Il y a deux portes, une à gauche, et une à droite. Les deux sont actuellement fermées, mais l'une donne sur la sortie, et l'autre sur un dragon affamé[5]. L'une s'ouvrira si vous dites une phrase vraie, tandis que l'autre s'ouvrira si vous énoncez une phrase fausse (mais vous ne savez pas laquelle est laquelle).

Question Chloé vous dit que vous avez le droit à une seule pour vous échapper, que faites-vous ? Justifier avec une modélisation logique.

Indice La réponse 'normale' utilise une phrase construite à partir de 'La porte de droite mène à la sortie' et 'La porte de droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie', mais il est tout à fait possible qu'il existe d'autres solutions tout à fait différentes. A vous d'essayer de me surprendre si vous vous en sentez la capacité !

[5] Oui, bon, on fait ce qu'on peut comme histoire hein