Logique et Langage
DM4

A rendre le 27 Novembre 2017

1 Version

Pour chacune des formules suivantes,

- En dresser l'arbre syntaxique
- Donner une *traduction française*, c'est-à-dire une reformulation <u>naturelle</u>, sans x, y et compagnie

  Par exemple, ne traduisez pas $\forall x.\forall y.H(x,y)$ par ‘pour tout x et tout y, x déteste y‘ ou un truc comme ça, mais par ‘tout le monde déteste tout le monde (soi-même compris)‘

1. $B(j)$, avec $B(x) \equiv$ ‘x est beau‘ et j = Jules

Arbre

```
B
|
j
```

Traduction ‘Jules est beau‘

2. $B(j) \wedge B(s)$, avec $B(x) \equiv$ ‘x est beau‘, j = Jules et s = Stéphane

Arbre

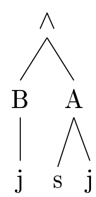
```
  ∧
 / \
B   B
|   |
j   s
```

Traduction ‘Jules est beau et Stéphane est beau‘

$\equiv$ ‘Jules et Stéphane sont beaux‘

3. $B(j) \wedge A(s,j)$, avec $B(x) \equiv$ ‘x est beau‘, $A(x,y) \equiv$ ‘x aime y‘, j = Jules et s = Stéphane

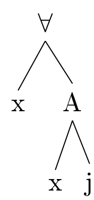
Arbre



Traduction ‘Jules est beau et Stéphane aime Jules‘

4. $\forall x.A(x,j)$, avec $A(x,y) \equiv$ ‘x aime y‘ et j = Jules

Arbre

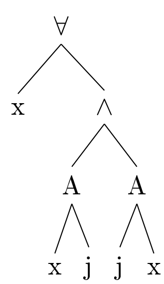


Traduction ‘Pour tout x, x aime Jules‘

$\equiv$ ‘Tout le monde aime Jules‘

5. $\forall x.(A(x,j) \wedge A(j,x))$, avec $A(x,y) \equiv$ ‘x aime y‘ et j = Jules

Arbre



Traduction ‘Pour tout x, x aime Jules et Jules aime x‘

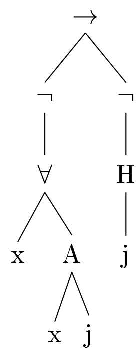
$\equiv$ ‘Jules aime tout le monde et réciproquement‘

Remarque A comparer avec $(\forall x.A(x,j)) \wedge (\forall x.A(j,x)) \equiv$ ‘Jules aime tout le monde et tout le monde aime Jules‘

Equivalence à la fois en français, et en logique

6. $(\neg\forall x.A(x,j)) \to \neg H(j)$, avec $A(x,y) \equiv$ ‘x aime y‘, $H(x) \equiv$ ‘x est heureux‘ et j = Jules

Arbre

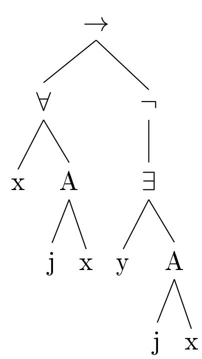


Traduction ‘Si [il est faux que [pour tout x, x aime Jules]], alors [il est faux que Jules est heureux]‘
$\equiv$ ‘Si [il est faux que [pour tout x, x aime Jules]], alors Jules n’est pas heureux‘
$\equiv$ ‘Si [il est faux que tout le monde aime Jules], alors Jules n’est pas heureux‘
$\equiv$ ‘Si au moins une personne n’aime pas Jules, alors Jules n’est pas heureux‘
$\equiv$ ‘Si au moins une personne ne l’aime pas, alors Jules n’est pas heureux‘

Remarque $\phi \to \psi \equiv \neg\psi \to \neg\phi$
Correspondance en français avec ‘Si A, alors B‘ $\equiv$ ¬ B seulement si ¬ A.
Si on applique ça ici, ça donne ’Jules est heureux seulement si tout le monde l’aime’

7. $(\forall x.A(j,x)) \to (\neg\exists y.A(j,y))$, avec $A(x,y) \equiv$ ‘x aime y‘ et j = Jules

Arbre



Traduction ‘Si [pour tout x, Jules aime x], alors [il est faux que [il existe un y tel que Jules aime y]]‘
$\equiv$ ‘Si [pour tout x, Jules aime x], alors [il est faux que Jules aime quelqu’un]‘
$\equiv$ ‘Si [pour tout x, Jules aime x], alors Jules n’aime personne‘
$\equiv$ ‘Si Jules aime tout le monde, alors Jules n’aime personne‘
$\equiv$ ‘S’il aime tout le monde, alors Jules n’aime personne‘

Remarque On pourrait généraliser la formule en $\forall z.((\forall x.A(z,x)) \to (\neg\exists y.A(z,y)))$
$\equiv$ ’Toute personne qui aime tout le monde n’aime personne’
$\equiv$ ‘Quand on aime tout le monde, on n’aime personne‘

Si on remplace les y dans la formule précédente, on obtient $(\forall x.A(j,x)) \rightarrow (\neg\exists x.A(j,x))$. La formule est syntaxiquement différente (pas besoin de faire son arbre) de la précédente, mais est-elle également différente sémantiquement ? Autrement dit, est-ce que le changement de variable change ce qui est exprimé par la formule, et pourquoi ?

Correction Dans le *calcul* de la traduction ci-dessus, on observe que les x et y ne se *croisent* pas. En effet, chacun est dans une partie différente de la phrase, comme on peut le voir dans l'arbre (le x étant dans la branche gauche et y dans la droite), x n'intervient pas au niveau de y et inversement.

Dit autrement, si les y étaient remplacés par des x, alors $\exists x.A(j,x)$ serait de toute façon déjà devenu 'Jules aime quelqu'un' au niveau de la flèche, quand on met les deux bouts principaux de phrases ensemble. Puisque la variable a été effacée, elle pouvait tout à fait s'appeler x (ou z, ou ø etc) sans risque de parasiter le premier x et changer le sens de la phrase.

2 Thème

Pour chacune des phrases suivantes, en donner une traduction en logique du premier ordre (notamment en introduisant les prédicats et constantes nécessaires, comme je le fais dans l'exercice précédent). Pas besoin de dresser l'arbre syntaxique de la formule donnée.

Attention, certaines phrases sont ambigües. Quand c'est le cas, reformuler les différentes interprétations, et d'en choisir une pour la traduction (voir l'exemple de la phrase 5)

1. Quelqu'un est en feu

   $\exists x.F(x)$ avec $F(x) \equiv$ 'x est en feu'

2. Il existe deux personnes qui se détestent

Remarque La phrase est ambiguë : est-ce que deux personnes <u>différentes</u> se détestent mutuellement (par exemple Tom et Jerry (enfin je crois)), ou est-ce qu'il y a deux personnes qui se détestent elles-mêmes (par exemple Jean-Marc se déteste et Jean-Pierre se déteste, mais ils ne se connaissent pas) ?

Première interprétation $\exists x.\exists y.((x \neq y) \wedge (H(x,y) \wedge H(y,x)))$ avec $H(x,y) \equiv$ 'x déteste y'

Deuxième interprétation $\exists x.\exists y.((x \neq y) \wedge (H(x,x) \wedge H(y,y)))$ avec $H(x,y) \equiv$ 'x déteste y

3. Tout le monde a déjà tué quelqu'un

Remarque La phrase est ambiguë : est-ce que tout le monde a tué une personne <u>potentiellement</u> différente, ou est-ce qu'une même personne s'est fait tuer par tout le monde ?

Première interprétation $\forall x.\exists y.K(x,y)$ avec $K(x,y) \equiv$ 'x a tué y'

Deuxième interprétation $\exists y.\forall x.K(x,y)$ avec $K(x,y) \equiv$ 'x a tué y'

Remarque La seule différence entre les traductions des deux interprétations est l'ordre des quantificateurs !

4. Tous les MIASHS ont déjà tué quelqu'un

Remarque Même ambiguïté que précédemment

Première interprétation $\forall x.(M(x) \rightarrow \exists y.K(x,y))$ avec $K(x,y) \equiv$ 'x a tué y' et $M(x) \equiv$ 'x est en MIASH'

Deuxième interprétation $\exists y.\forall x.(M(x) \rightarrow K(x,y))$ avec $K(x,y) \equiv$ 'x a tué y' et $M(x) \equiv$ 'x est en MIASH'

Remarque La première formule est une traduction plus *naturelle* de la première interprétation de la phrase, mais elle est sémantiquement équivalente à $\forall x.\exists y.(M(x) \rightarrow K(x,y))$!

5. Il existe quelqu'un qui n'a pas tué tout le monde

Cette phrase peut se comprendre de deux façons : 'il existe quelqu'un qui a potentiellement tué des gens, mais pas tout le monde non plus (et nous voilà bien rassurés)'[1], ou 'il existe quelqu'un qui n'a tué personne'[2]. Merci de traiter la première interprétation.

Première interprétation $\exists x.\neg(\forall y.K(x,y))$ avec $K(x,y) \equiv$ 'x a tué y'
$\equiv \exists x.\exists y.\neg K(x,y)$

Deuxième interprétation $\exists y.\forall x.\neg K(y,x)$ avec $K(x,y) \equiv$ 'x a tué y'

6. Si tout le monde est sympa, alors tout le monde est heureux

$(\forall x.S(x)) \rightarrow (\forall x.H(x))$ avec $S(x) \equiv$ 'x est sympa' et $H(x) \equiv$ 'x est heureux'

7. Si un(e) ami(e) la trahit, Chloé le/la mangera vivant(e)[3]

$(\forall x.((A(x,c) \wedge B(x,c)) \rightarrow M(c,x))$ avec $A(x,y) \equiv$ 'x et y sont ami(e)s', $B(x,y) \equiv$ 'x trahit y' et $M(x,y) \equiv$ 'x mange y vivant(e)'

[1] Il existe quelqu'un qui [n'a pas [tué tout le monde]]
[2] Il existe quelqu'un qui [n'a pas tué] [tout le monde]
[3] Ah ben elle est sympa jusqu'à un certain point Chloé, fallait pas la chercher