

# Logique et Langage

## DM final

February 27, 2020

### Consignes

**A rendre au plus tard le samedi 29 décembre, à 3 heures du matin.**

Etant donnée la *deadline*, le devoir est évidemment à me rendre numériquement. Vous pouvez me rendre un document texte, un .pdf ou même des photos de la version écrite. Les seules conditions que j'ai sont 1) ça doit être lisible sans efforts particuliers 2) pas. de. docx. Jamais.

Comme d'habitude, si vous en avez le courage, vous pouvez faire vos arbres syntaxiques avec <http://mshang.ca/syntree/>

Enfin, c'est un DM particulièrement difficile, je vous encourage donc encore plus que de coutume à le travailler en groupe.

## 1 Logique du premier ordre

### 1.1 Introduction aux preuves

Soient les deux formules suivantes :

- $\phi = \forall x. \exists y. K(x, y)$
- $\psi = \exists y. \forall x. K(x, y)$

**Question 1 (1 point)** Après avoir choisi l'interprétation de votre choix pour le prédicat  $K(x, y)$ , décrivez une situation dans laquelle  $\phi$  est vraie et  $\psi$  est fausse.

**Question 2 (1,5 point)** Est-il possible de trouver une situation dans laquelle, à l'inverse,  $\psi$  est vraie et  $\phi$  fausse, et pourquoi ?

### 1.2 Distributivité du $\forall$

Soient les deux formules suivantes :

- $\phi = \forall x. (S(x) \vee H(x))$
- $\psi = (\forall x. S(x)) \vee (\forall x. H(x))$

**Question 1 (1 point)** Après avoir donné des interprétations de votre choix pour les prédicats  $S(x)$  et  $H(x)$ , montrer que les formules ne sont pas équivalentes en décrivant une situation dans laquelle  $\phi$  est vraie mais pas  $\psi$

**Question 2 (1,5 point)** Est-il possible d'avoir une situation dans laquelle, à l'inverse,  $\psi$  est vraie et pas  $\phi$ , et pourquoi ?

On définit maintenant  $\phi$  et  $\psi$  comme :

- $\phi = \forall x.(S(x) \wedge H(x))$
- $\psi = (\forall x.S(x) \wedge \forall x.H(x))$

**Question 3 (1,5 point)** Les formules sont-elles équivalentes<sup>1</sup>, et pourquoi ?

## 2 Modélisation

### 2.1 Traduction

**Question 1 (3 points + bonus si vous repérez et traitez les ambiguïtés)** Modéliser (traduire) en logique du premier ordre<sup>2</sup> (du mieux que possible) les phrases suivantes, en introduisant vos propres prédicats (atomiques) et constantes :

1. Léo n'est pas très bavard, mais il est rigolo
2. Victor déteste les physiciens
3. Tout le monde se déteste soi-même
4. Puisque Rémi n'aime personne d'autre que lui, tout le monde l'a tué
5. Elsa ne part en vacances que si tous ses amis sont en vacances
6. Il y a (dans l'univers) au moins 3 futurs linguistes
7. On ne peut pas être logicien et sain d'esprit
8. Un tueur en série qui ne possède aucune chaise jaune n'est pas sain d'esprit
9. A part Chloé, personne ne pardonnerait un ami qui l'aurait trahi

**Remarque** N'oubliez pas d'utiliser le prédicat  $H(x) \equiv 'x \text{ est un être humain}'$  quand ça vous semble pertinent !

**Question 2 (3 points)** Dresser les arbres syntaxiques des traductions que vous avez données dans la question 1

**Question 3 (4,5 points)** Calculer les négations de ces dernières (des formules donc) et les exprimer en français de la façon la plus naturelle possible.

---

<sup>1</sup>On rappelle que deux formules  $\phi$  et  $\psi$  sont équivalentes si et seulement si  $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$ , c'est-à-dire ssi l'une implique l'autre, et vice-versa

<sup>2</sup>On rappelle que toute formule de la logique propositionnelle est également une formule de la logique du premier ordre, ne vous sentez donc pas obligé(e) de mettre des  $\forall$  et des  $\exists$  quand vous n'en avez pas besoin !

## 2.2 Approche logique du moindre-effort

Vous ouvrez un bar dans le Poitou-Charentes. Vous tenez bien sûr à vérifier que vous n'avez pas de client mineur<sup>3</sup> qui consomme de l'alcool chez vous.

**Question 1 (0,25 point)** Vous voyez actuellement au bar Jules et Elsa, dont vous savez qu'ils ont respectivement 14 et 33 ans, mais vous ne savez pas s'ils sont en train de boire de l'alcool ou non. Avez-vous besoin de vérifier le verre de Jules ? Et d'Elsa ?

**Question 2 (0,75 point)** A côté, vous voyez Diane, qui boit un chocolat chaud, et Jade, qui descend une bouteille de vodka. Sachant que vous ignorez l'âge de l'une comme de l'autre, avez-vous besoin de vérifier la carte d'identité de Diane ? Et de Jade ? Justifiez en utilisant la logique propositionnelle.

## 2.3 Logique du premier ordre et intuition

Soit la phrase suivante : 'Dans toute classe, il existe un étudiant tel que s'il a une bonne note, alors tout le monde a une bonne note'. Cette phrase, à priori contre-intuitive, est pourtant *techniquement* vraie. On prend une classe complètement au hasard qui va nous servir d'univers, dont les individus en sont les différents étudiants. Par exemple,  $\forall x.B(x)$  se traduit alors en 'tous les étudiants de la classe sont blonds'.

**Question 1 (0,5 points)** En partant du prédicat  $N(x) \equiv$  'x a une bonne note', traduire Il existe un étudiant tel que s'il a une bonne note, alors tout le monde a une bonne note' en logique du premier ordre.

**Question 2 (1,5 points)** Expliquer pourquoi elle est *techniquement* vraie.

## 2.4 Enigme (bonus, 3 points)

Chloé, dont la passion dévorante pour *Saw* ne vous avait jamais inquiété(e) jusqu'ici, vous a enfermé(e) dans un sous-sol miteux et vous *propose* de jouer à un jeu. Il y a deux portes, une à gauche, et une à droite. Les deux sont actuellement fermées, mais l'une donne sur la sortie, et l'autre sur un dragon affamé<sup>4</sup>. L'une s'ouvrira si vous dites une phrase vraie, tandis que l'autre s'ouvrira si vous énoncez une phrase fausse (mais vous ne savez pas laquelle est laquelle).

**Question** Chloé vous dit que vous avez le droit à une seule pour vous échapper, que faites-vous ? Justifier avec une modélisation logique.

**Indice** La réponse 'normale' utilise une phrase construite à partir de 'La porte de droite mène à la sortie' et 'La porte de droite s'ouvre si on énonce une proposition vraie', mais il est tout à fait possible qu'il existe d'autres solutions tout à fait différentes. A vous d'essayer de me surprendre si vous vous en sentez la capacité !

---

<sup>3</sup>C'est-à-dire de strictement moins de 18 ans

<sup>4</sup>Oui, bon, on fait ce qu'on peut comme histoire hein