# INCERTEZZE IN MISURE **DIRETTE**

*CdS Fisica*

*Laboratorio Meccanica e Termodinamica*

# Incertezze in Misure Dirette

Molteplici cause di incertezza:

- Difficoltà nella definizione della grandezza da misurare;
- Caratteristiche operative dello strumento di misura
- Condizioni ambientali;
- Metodologia di misurazione;
- Interazione fra lo strumento di misura e chi effettua la misura o con la grandezza sotto misurazione.

Riassunte in :

- **Risoluzione dello strumento;**
- **Fluttuazioni casuali;**
- **Errori sistematici.**

# Risoluzione dello strumento

Strumenti di due tipologie:

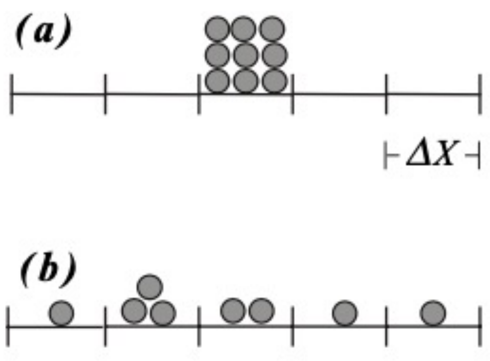
- **Digitali**: la risoluzione coincide con **l'ultimo digit** visualizzato sul display;
- **Analogici**: la risoluzione coincide con **mezza tacca** dello strumento.

**Incertezza massima** $\boxed{\frac{\Delta X}{2}}$

**Incertezza standard** $\boxed{\frac{\Delta X}{\sqrt{12}}}$

Riducibile eseguendo la misura su un **multiplo della grandezza in oggetto.**
Es: misuro 10 periodi di oscillazione di un pendolo con un orologio digitale al decimo di secondo.

# Fluttuazioni Causali



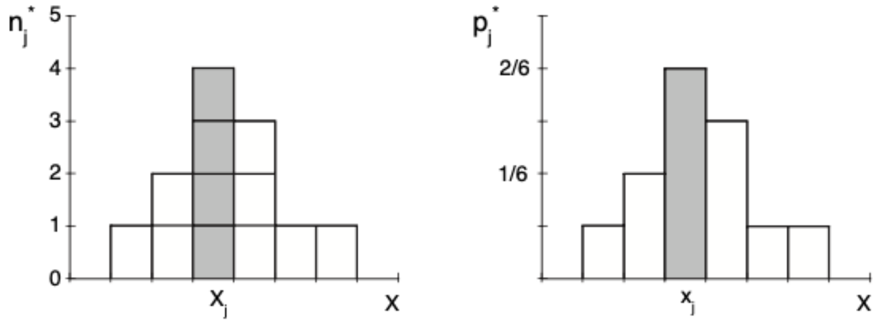

Misure ripetute della stessa grandezza fisica:

- tutte le misure cadono entro lo stesso intervallo dato dalla risoluzione dello strumento;
- Diverse misure cadono in diversi intervalli di risoluzione dello strumento.

Differenze fra le misurazioni di una stessa grandezza fisica effettuate con lo stesso strumento (**effetti casuali**):

- **Errori di lettura** (parallasse, interpolazioni, sincronizzazioni…);
- **Rumori di fondo** (vibrazioni, pressione, umidità, temperatura…);
- Effetti sulla misura dovuti alla misurazione in fase di crescita o diminuzione della grandezza stessa.

# Fluttuazioni Causali (II)




Rappresentazione di misure ripetute tramite istogrammi in occorrenze o in frequenze.

Parametro di posizione: **media semplice**

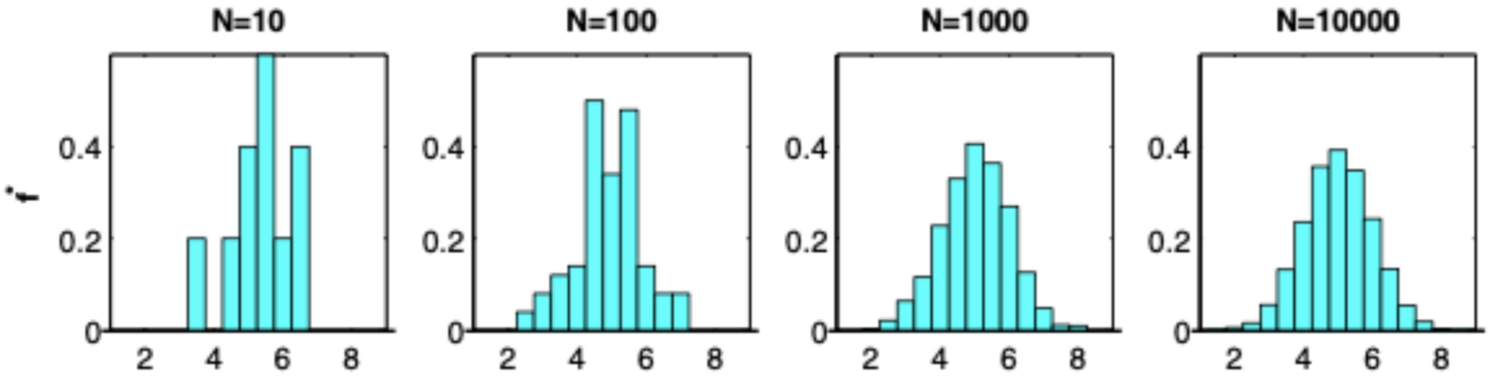
$$\bar{x} = \langle x \rangle = m[x] = m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Parametro di dispersione: **deviazione standard campionaria**

$$S_x = \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} d_i^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

**Varianza** $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

# Distribuzione Limite




Ripetendo N misurazioni sulla stessa grandezza fisica, si ottiene ogni volta un istogramma diverso in cui **media e deviazione standard** differiscono da un istogramma all'altro (sono loro stesse due **variabili casuali**).

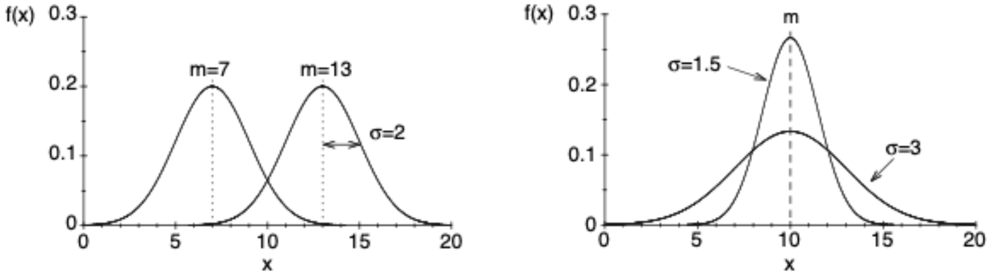
MA all'aumentare di N gli istogrammi smettono di avere carattere casuale e assumono tutti una forma simile.

Per $N \to \infty$ si ha un istogramma limite ($\Delta x \to 0$) $\Rightarrow$

**distribuzione limite**

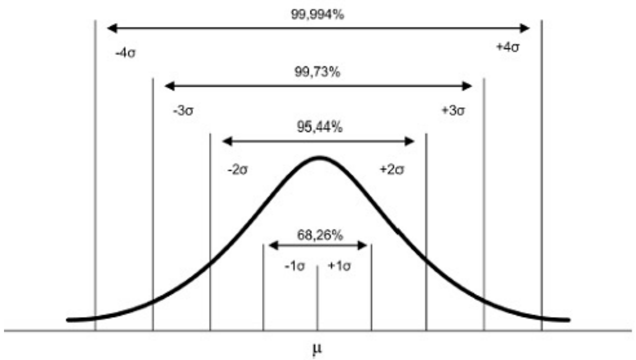
# Distribuzione Limite: Gaussiana

$$G(x;m,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$




$m$ e $\sigma$ sono il limite per $N \to \infty$ della media semplice e della deviazione standard. Applicando le definizioni valide per qualunque PDF:

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} xG(x)dx \qquad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 G(x)dx = \sigma^2$$




$$P(x) = \int_{m-\sigma}^{m+\sigma} G(x)dx = \mathbf{68.3\%}$$

$$P(x) = \int_{m-2\sigma}^{m+2\sigma} G(x)dx = \mathbf{95.4\%}$$

$$P(x) = \int_{m-3\sigma}^{m+3\sigma} G(x)dx = \mathbf{99.7\%}$$

# Distribuzione Limite: Gaussiana (II)

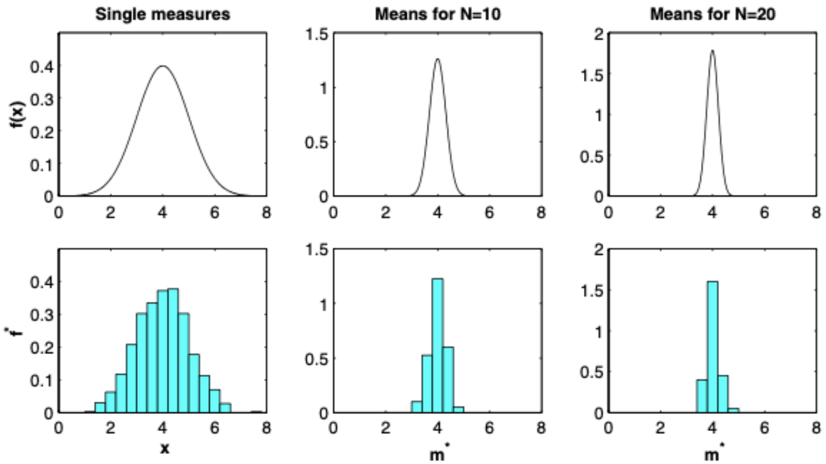
**N misure ripetute** possono essere considerate come un **campione finito estratto da una popolazione limite teorica gaussiana corrispondente ad un numero infinito di misure.**

È impossibile determinare esattamente i parametri della gaussiana da un campione finito $\Longrightarrow$ migliore stima dei parametri (metodo della **massima verosimiglianza**):

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \bar{x} \qquad \widehat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}$$

# Distribuzione delle Medie

La distribuzione limite gaussiana descrive la fluttuazione di una grandezza fisica X a causa di fluttuazioni casuali.
Consideriamo M campionamenti di X ognuno costituito da N misurazioni. Ogni campione fornisce una misura della media:
$m_1^*, m_2^*, m_3^*, \ldots m_M^*$.
La distribuzione delle medie per M $\rightarrow \infty$ tende ad una distribuzione limite più stretta di una gaussiana.




$$m^*[m] = m$$

$$\boxed{\sigma_{\bar{m}} = \frac{\sigma_m}{\sqrt{N}}}$$

**Deviazione standard della media**

# Fluttuazioni Causali (III)

La **sequenza logica per valutare l'incertezza dovuta a fluttuazioni casuali** è:

1. L'incertezza dovuta a fluttuazioni casuali è data dalla deviazione standard della media;
2. La deviazione standard della media è legata alla deviazione standard della distribuzione limite tramite la relazione $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$;
3. Non potendo calcolare la deviazione standard della distribuzione limite, sì piò solamente stimarne il valore tramite la distribuzione standard campionaria: $\widehat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}$

# Fluttuazioni Causali (IV)

- Nella distribuzione gaussiana l'area fra $m - \sigma$ e $m + \sigma$ è 0.68.
- Se la distribuzione delle medie è centrata in $m$ con larghezza $\frac{\sigma_m}{\sqrt{N}}$ si suppone che la media $m^*$ di un qualunque altro campione abbia probabilità 68% di cadere nell'intervallo $m^* \pm \frac{\sigma_m}{\sqrt{N}}$.
- Nei casi reali, $m$ non è nota, sono noti $m^*$ e la deviazione standard della media, tramite i quali si stima $m$.
- La domanda è quindi qual è la **probabilità che $m$ cada nell'intervallo $m^* \pm \frac{\sigma_m}{\sqrt{N}}$**.
- Si dimostra che è il **68% solo se N è abbastanza grande**, altrimenti è significativamente più piccola (**campioni ridotti**).

# Fluttuazioni Causali e Risoluzione

- La risoluzione dello strumento va sempre considerata; l'incertezza da fluttuazioni casuali solo se si stanno effettuando misure ripetute della stessa grandezza fisica.

- La **risoluzione dello strumento rappresenta il limite inferiore dell'incertezza sulla misura**;

- Si può **diminuire l'incertezza casuale** aumentando il numero di misure finché sussiste la condizione $\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} > \frac{\Delta x}{\sqrt{12}}$

# INCERTEZZE IN MISURE **INDIRETTE**

*CdS Fisica*

*Laboratorio Meccanica e Termodinamica*

# Incertezze in Misure Indirette

Se q è funzione di più variabili x, y… *q=q(x,y,z …)* tra di loro **dipendenti o soggette a incertezze di tipo massimo** allora l'incertezza $\Delta q$ è data dalla regola della **somma lineare**

$$\boxed{\Delta q(x, y \dots) = \left|\frac{dq(x, y \dots)}{dx}\right| \Delta x + \left|\frac{dq(x, y \dots)}{dy}\right| \Delta y + \cdots}$$

# Incertezze in Misure Indirette (II)

Se q è funzione di più variabili x, y… *q=q(x,y,z …)* tra di loro **indipendenti e soggette a sole incertezze di tipo casuale** allora l'incertezza $\Delta q$ è data dalla regola della **somma in quadratura**

$$\boxed{\Delta q(x, y \dots) = \sqrt{\sigma_q^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \cdots}}$$

La somma lineare è sempre maggiore o uguale alla somma in quadratura.
Per rendere massima una fluttuazione casuale si moltiplica l'incertezza per 3.

# **COMBINAZIONE** DELLE INCERTEZZE

*CdS Fisica*

*Laboratorio Meccanica e Termodinamica*

# Combinazione

Per combinare insieme incertezze sistematiche e causali si utilizza la somma in quadratura

$$\boxed{\Delta x = \sqrt{\sigma_{sis}^2 + \sigma_{stat}^2}}$$

In generale, se ci sono più contributi alla incertezza:

$$\boxed{\Delta x = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2}}$$