



Corso di Laboratorio di Meccanica e Termodinamica

Modulo ROOT

Lezione VII

Silvia Arcelli

22 Maggio 2024

GENERAZIONE NUMERI CASUALI

Verifica esplicita del metodo del rigetto e della trasformazione inversa:

- Generiamo numeri casuali secondo la p.d.f.:

$$f(x) = x \quad \text{nel dominio } [0,1]$$

- Funzione integrabile con primitiva invertibile:

$$P(x < X) = F(X) = \int_a^X f(x) dx = X^2$$

- Inversa della cumulativa:

$$X = F^{-1}(U) = \sqrt{U}$$

GENERAZIONE NUMERI CASUALI

Sebbene la p.d.f. abbia i requisiti per applicare il metodo della trasformazione inversa, utilizziamo in prima istanza il metodo del rigetto (nel codice la $f(x)$ è parametrizzata da **f1** e il suo massimo da **f_max**):

// CASE 0: Classical Hit or Miss. throw rnd1 in $[a,b]=[0,1]$, then throw rnd2 in $[0,f_max]=[0,1]$

```
for (Int_t j=0; j<ngen; j++) {  
    rnd1=gRandom->Rndm();  
    rnd2=gRandom->Rndm()*f_max;  
    if (rnd2<f1->Eval(rnd1)) h[k]->Fill(rnd1);  
}
```

- pdf **correttamente** simulata
- Rate di rigetto atteso: 50%

GENERAZIONE NUMERI CASUALI

Modo **NON CORRETTO** di applicare il metodo, per simulare correttamente la p.d.f. occorre sempre generare il numero random in y (rnd2) in $[0, f_{\max}]$:

// **CASE 1**: Classical Hit or Miss and one possible way to do it wrong...throw rnd1 in $[a, b]$, calculate $f(x)$ in rnd1, then throw rnd2 in $[0, f(\text{rnd1})]$

```
for (Int_t j=0; j<ngen; j++) {  
  rnd1=gRandom->Rndm();  
  rnd2=gRandom->Rndm()*f1->Eval(rnd1);  
  if (rnd2<f1->Eval(rnd1)) h[k]->Fill(rnd1);  
}
```

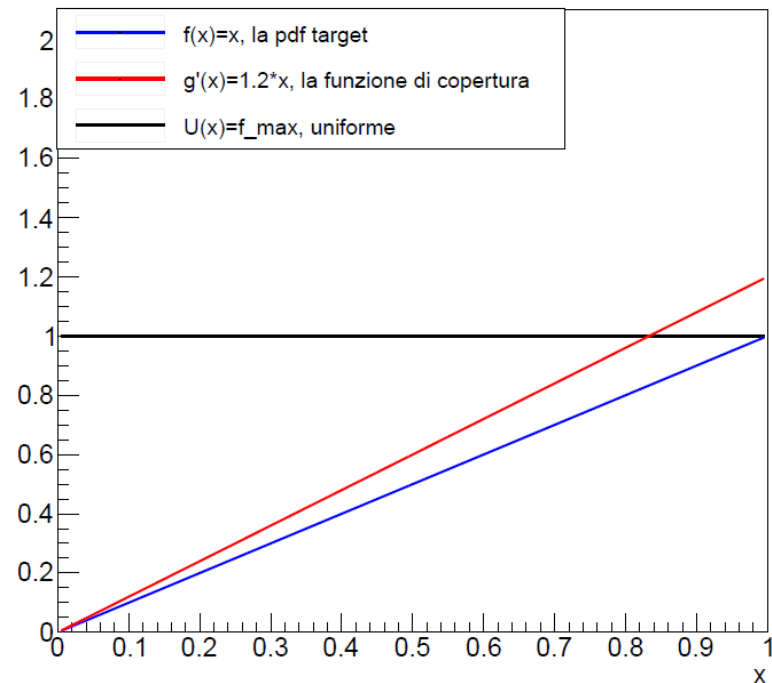
- pdf **NON** correttamente simulata (è una uniforme)
- Rate di rigetto atteso: 0%

GENERAZIONE NUMERI CASUALI

Metodo del rigetto «improved», con utilizzo di una funzione **che ricopre** la pdf. In questo test ricopriamo la $f(x)$ con una funzione che è semplicemente sé stessa riscalata di un fattore >1 :

$$g(x) = f(x)$$

$$g'(x) = S \cdot f(x) \text{ con } S > 1$$



(nel codice $S=\text{scale}=1.2$, la $g'(x)$ è parametrizzata da **f2**, e l'inversa della cumulativa da **F2**):

GENERAZIONE NUMERI CASUALI

Modo **NON CORRETTO** di applicare l'Hit of Miss «improved», stiamo ricadendo nel caso precedente introducendo un po' di rate di rigetto, che dipende dal rapporto delle aree delle due funzioni, la $f(x)$ e la $g'(x)$.

// CASE 2: "Improved" Hit or miss: one possible way to do it wrong...throw rnd1 in $[a,b]$, calculate $g'(x)=scale*f(x)$ in rnd1, then throw rnd2 in $[0,g'(rnd1)]$

```
for (Int_t j=0; j<ngen; j++) {  
    rnd1=gRandom->Rndm();  
    rnd2=gRandom->Rndm()*f2->Eval(rnd1);  
    if (rnd2<f1->Eval(rnd1)) h[k]->Fill(rnd1);  
}
```

- pdf **NON** correttamente simulata, è sempre una uniforme...
- Rate di rigetto atteso: $\approx 17\%$

GENERAZIONE NUMERI CASUALI

Modo CORRETTO di applicare l'Hit of Miss «improved», il numero random in x non viene estratto secondo una distribuzione uniforme, come nel caso precedente, ma in base alla densità di probabilità definita dalla p.d.f della funzione ricoprente attraverso **il metodo della trasformazione inversa**.

// CASE 3: "Improved" Hit or miss: the Correct way! get rnd1 *from the Inverse transform method* (in this case $g'(x) = \text{scale} * f(x)$, the inverse of the cumulative function is $\text{sqrt}(\text{scale} * U)$, calculate $g'(x) = \text{scale} * f(x)$ in the so-found rnd1, then throw rnd2 in $[0, g'(\text{rnd1})]$)

```
for(Int_t j=0; j<ngen; j++) {  
  rnd1=F2->Eval(gRandom->Rndm());  
  rnd2=gRandom->Rndm()*f2->Eval(rnd1);  
  if(rnd2<f1->Eval(rnd1)) h[k]->Fill(rnd1);  
}
```

- pdf **correttamente** simulata
- Rate di rigetto atteso: $\approx 17\%$

GENERAZIONE NUMERI CASUALI

Una considerazione: il metodo del rigetto classico (il primo caso che abbiamo considerato (CASE 0) può essere visto come **un caso particolare** del Metodo del rigetto «improved» (CASE 3), in cui la funzione ricoprente è una distribuzione costante (una uniforme) corrispondente al massimo della funzione target $f(x)$.

$$g(x) = f_{\max}$$

Una funzione costante è integrabile con cumulativa:

$$F(X) = X$$

E l'inversa della cumulativa è la cumulativa stessa:

$$X = F^{-1}(U) = U$$

GENERAZIONE NUMERI CASUALI

// CASE 4: The classic hit or miss can be seen as the case where the covering function is an uniform, so a specific case of the "Improved Hit or Miss". get rnd1 from the Inverse transform method (in this case $g'(x)=\text{const}=f_{\text{max}}=1$, parametrized by **f0**, and the inverse of the cumulative function is **x**, parametrised by **F0**)

```
for(Int_t j=0;j<ngen;j++){  
  rnd1=F0->Eval(gRandom->Rndm());  
  rnd2=gRandom->Rndm()*f0->Eval(rnd1);  
  if(rnd2<f1->Eval(rnd1)) h[k]->Fill(rnd1);  
}
```

- pdf **correttamente** simulata
- Rate di rigetto atteso: 50%

Ovviamente conviene trovare una funzione ricoprente **più efficace**, come nel caso 3

GENERAZIONE NUMERI CASUALI

In realtà la nostra p.d.f. di partenza ha i requisiti per il metodo della trasformazione inversa....ed è il migliore! Estrazione di **un solo numero random**, e **nessun rate di rigetto** (ogni estrazione è «buona»):

// CASE 5: generating directly by the inverse transform approach (best one in this case, $f(x)$ is integrable, and its primitive is invertible), so just get `rnd1` from the Inverse transform method (in this case $f(x)=x$, the inverse of the cumulative function is \sqrt{x})

```
for(Int_t j=0;j<ngen;j++){  
  rnd1=F1->Eval(gRandom->Rndm());  
  h[k]->Fill(rnd1);  
}
```

- pdf **correttamente** simulata
- Rate di rigetto atteso: 0%

QUESITI (1)

Si scriva la parte rilevante e autoconsistente del codice di una macro di ROOT in cui:

1. Si definisce un grafico atto a rappresentare le 7 coppie di misure (x,y) che dovranno essere opportunamente inserite in forma di arrays:

valori in x: (-0.75,-0.5,-0.25,0.,0.25,0.5,0.75)

valori in y: (3.1, 0.1 , -3.2, -0.1, 2.9, 0.1, -3.2)

errori in y: (0.2,0.1,0.2,0.1,0.2,0.1,0.2)

2. Si disegna il grafico con l'opzione per visualizzare anche le barre di errore;

3. Si esegue sul grafico un fit secondo una dipendenza funzionale del tipo:

$$f(x)=A*\sin(B*x)$$

Dove A e B sono parametri liberi del fit. A tal fine istanziare un oggetto funzione TF1 in modo opportuno.

4. Si stampano a schermo i valori dei due parametri e le relative incertezze, e il valore del χ^2 ridotto

.

QUESITI (2)

Si scriva la parte rilevante e autoconsistente del codice di una macro di ROOT in cui:

1. Si definisce un grafico (Classe TGraphErrors) atto a rappresentare le 10 coppie di misure (x,y) e l'incertezza sui valori in y che sono, nell'ordine (x,y,dy), salvati nelle tre colonne del file di testo denominato dati.txt come segue:

```
1 6 0.6
2 17 1.7
3 34 3.4
4 57 5.7
5 86 8.6
6 121 12.1
7 162 16.2
8 209 20.9
9 262 26.2
10 321. 32.1
```

2. Si disegna il grafico, inserendo le label degli assi;
3. Si esegue sul grafico un fit secondo una dipendenza funzionale del tipo:

$$f(x)=A*x^2 +B*x + C$$

Dove A, B e C sono parametri liberi del fit. Si stampi a schermo il valore dei parametri dopo il fit con le relative incertezze, e il χ^2 ridotto.

QUESITI (3)

Si scriva la parte rilevante ed autoconsistente del codice di una macro di ROOT in cui:

1. Si definiscono tre istogrammi unidimensionali con 100 bin, in un range da 0. a 10.;
2. In un ciclo si riempiono gli istogrammi con 10^6 occorrenze:
 - a. di una variabile casuale estratta da una distribuzione gaussiana con media 5. e deviazione standard 0.5 (primo istogramma);
 - b. di una variabile casuale estratta una distribuzione uniforme fra 0 e 10 (secondo istogramma);
 - c. di una variabile casuale estratta una distribuzione esponenziale decrescente con media 1 (terzo istogramma);
3. Al termine del ciclo si effettua la somma dei tre istogrammi, e si stampano a schermo la media e la RMS dell'istogramma risultante con le rispettive incertezze, Il numero di ingressi totali, il numero di underflow e di overflow, il massimo dell'istogramma e l'indice del bin corrispondente al massimo.

ULTIME INFO

Per l'esame:

- **1 quesito allo scritto (elaborazione di un frammento di codice , 6 punti/30) e domande all'orale (eventuale discussione scritto, metodo Monte Carlo).**
- **Durante l'esame si possono consultare le dispense (formato cartaceo)**
- **Si possono integrare i parziali non solo al primo appello**