PROPAGAZIONE DELLE INCERTEZZE

CdS Fisica

Laboratorio Meccanica e Termodinamica

Propagazione delle Incertezze nelle Misure Indirette

- La maggior parte delle grandezze fisiche non può essere misurata direttamente ma si misurano due o più grandezze con cui poi si calcola la grandezza in oggetto

  Esempio: area di un rettangolo $A = bh$

- Quando la misura comporta due passi (misure dirette + calcolo) anche la stima delle incertezze richiede due passi:

  1) stima delle incertezze delle misure dirette;

  2) propagazione delle incertezze nella stima dell'incertezza sul risultato finale;

- Supponiamo che il valore vero delle grandezze x e y sia incluso nell'intervallo definito dalla misura e dall'errore (**incertezze massime**).
- Consideriamo il caso di una grandezza *a* misurata indirettamente da x e y;

Propagazione delle Incertezze nella Somma di Variabili

CASO 1: SOMMA
$a = x + y$ con $x = x_{best} \pm \Delta x$ e y= $y_{best} \pm \Delta y$

- il più alto valore possibile di a è:
$a_{max} = x_{best} + \Delta x + y_{best} + \Delta y = (x_{best} + y_{best}) + (\Delta x + \Delta y)$

- il più basso valore possibile di a è:
$a_{min} = x_{best} - \Delta x + y_{best} - \Delta y = (x_{best} + y_{best}) - (\Delta x + \Delta y)$

La miglior stima di a è: $a_{best} = x_{best} + y_{best}$

La miglior stima dell'incertezza è: $\Delta a = \Delta x + \Delta y$

Propagazione delle Incertezze nelle Differenze di Variabili

CASO 2: DIFFERENZA
$a = x - y$ con $x = x_{best} \pm \Delta x$ e y= $y_{best} \pm \Delta y$

- il più alto valore possibile di a è:

$$a_{max} = (x_{best} + \Delta x) - (y_{best} - \Delta y) = (x_{best} - y_{best}) + (\Delta x + \Delta y)$$

- il più basso valore possibile di a è:

$$a_{min} = (x_{best} - \Delta x) - (y_{best} + \Delta y) = (x_{best} - y_{best}) - (\Delta x + \Delta y)$$

La miglior stima di a è: $a_{best} = x_{best} - y_{best}$

La miglior stima dell'incertezza è: $\Delta a = \Delta x + \Delta y$

Propagazione delle Incertezze: Somma e Differenze

Incertezza nelle somme e nelle differenze
(provvisoria):

Quando più grandezze $x, y \ldots\ldots w$ misurate direttamente con incertezze $\Delta x, \Delta y \ldots\ldots \Delta w$ sono utilizzate per misurare indirettamente una grandezza q tramite somme o differenze, l'incertezza sul valore calcolato di q è data dalla **somma delle incertezze sulle misure dirette**

$$\boldsymbol{\Delta q = \Delta x + \Delta y + \cdots \Delta w}$$

Propagazione delle Incertezze nei Prodotti

CASO 3: PRODOTTO

$a = xy$ con $x = x_{best} \pm \Delta x$ e y= $y_{best} \pm \Delta y$

- in termini di incertezza relativa:

$$x = x_{best}\left(1 \pm \frac{\Delta x}{|x_{best}|}\right) \text{ e y} = y_{best}\left(1 \pm \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right)$$

- La migliore stima per a è: $a = x_{best}y_{best}$
- Il massimo valore probabile é

$$a_{max} = x_{best}\left(1 + \frac{\Delta x}{|x_{best}|}\right) y_{best}\left(1 + \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right) =$$

$$= x_{best}y_{best}\left(1 + \frac{\Delta x}{|x_{best}|}\right)\left(1 + \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right) =$$

$$= x_{best}y_{best}\left(1 + \frac{\Delta x}{|x_{best}|} + \frac{\Delta y}{|y_{best}|} + \cancel{\frac{\Delta x}{|x_{best}|}\frac{\Delta y}{|y_{best}|}}\right) =$$

Supponiamo di lavorare con incertezze piccole

$$= x_{best}y_{best}\left(1 + \frac{\Delta x}{|x_{best}|} + \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right) = x_{best}y_{best}\left[1 + \left(\frac{\Delta x}{|x_{best}|} + \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right)\right]$$

Propagazione delle Incertezze nei Prodotti (II)

CASO 3: PRODOTTO

$a = xy$ con $x = x_{best} \pm \Delta x$ e y= $y_{best} \pm \Delta y$

- Il minimo valore probabile é

$$a_{min} = x_{best}\left(1 - \frac{\Delta x}{|x_{best}|}\right) y_{best}\left(1 - \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right) =$$

$$= x_{best} y_{best}\left(1 - \frac{\Delta x}{|x_{best}|}\right)\left(1 - \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right) =$$

$$= x_{best} y_{best}\left(1 - \frac{\Delta x}{|x_{best}|} - \frac{\Delta y}{|y_{best}|} + \cancel{\frac{\Delta x}{|x_{best}|}\frac{\Delta y}{|y_{best}|}}\right) =$$

Supponiamo di lavorare con incertezze piccole

$$= x_{best} y_{best}\left(1 - \frac{\Delta x}{|x_{best}|} - \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right) = x_{best} y_{best}\left[1 - \left(\frac{\Delta x}{|x_{best}|} + \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right)\right]$$

Propagazione delle Incertezze nei Prodotti (III)

$$a_{max} = x_{best}y_{best}\left[1 + \left(\frac{\Delta x}{|x_{best}|} + \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right)\right] \qquad a_{min} = x_{best}y_{best}\left[1 - \left(\frac{\Delta x}{|x_{best}|} + \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right)\right]$$

$$\Delta a = \frac{a_{max} - a_{min}}{2}$$

$$= \frac{\left\{\cancel{x_{best}y_{best}}\left[1 + \left(\frac{\Delta x}{|x_{best}|} + \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right)\right]\right\} - \left\{\cancel{x_{best}y_{best}}\left[1 - \left(\frac{\Delta x}{|x_{best}|} + \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right)\right]\right\}}{2}$$

$$= \frac{x_{best}y_{best}\left(\frac{\Delta x}{|x_{best}|} + \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right) + x_{best}y_{best}\left(\frac{\Delta x}{|x_{best}|} + \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right)}{2} =$$

$$= \frac{\cancel{2}x_{best}y_{best}\left(\frac{\Delta x}{|x_{best}|} + \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right)}{\cancel{2}} = \overset{a_{best}}{\boxed{x_{best}y_{best}}}\left(\frac{\Delta x}{|x_{best}|} + \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right) \Longrightarrow \frac{\Delta a}{a_{best}} = \frac{\Delta x}{|x_{best}|} + \frac{\Delta y}{|y_{best}|}$$

L'incertezza relativa su a è data dalla somma delle incertezze relative su x e y: $\frac{\Delta a}{a_{best}} = \frac{\Delta x}{x_{best}} + \frac{\Delta y}{y_{best}}$

Propagazione delle Incertezze nei Quozienti

CASO 4: QUOZIENTE

$a = \frac{x}{y}$ con $x = x_{best} \pm \Delta x$ e y= $y_{best} \pm \Delta y$

- in termini di incertezza relativa:

$$x = x_{best}\left(1 \pm \frac{\Delta x}{|x_{best}|}\right) \text{ e y} = y_{best}\left(1 \pm \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right)$$

- Il massimo valore probabile è

$$a_{max} = \frac{x_{best}\left(1 + \frac{\Delta x}{|x_{best}|}\right)}{y_{best}\left(1 - \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right)} \approx \frac{x_{best}}{y_{best}}\left(1 + \frac{\Delta x}{|x_{best}|}\right)\left(1 + \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right)$$

Sviluppo di Taylor

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

se $|x| < 1$

$$= \frac{x_{best}}{y_{best}}\left(1 + \frac{\Delta x}{|x_{best}|} + \frac{\Delta y}{|y_{best}|} + \cancel{\frac{\Delta x}{|x_{best}|}\frac{\Delta y}{|y_{best}|}}\right) =$$

Supponiamo di lavorare con incertezze piccole

$$= \underbrace{\boxed{\frac{x_{best}}{y_{best}}}}_{a_{best}}\left[1 + \boxed{\left(\frac{\Delta x}{|x_{best}|} + \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right)}\right]$$

Somma delle incertezze relative

Propagazione delle Incertezze nei Quozienti (II)

CASO 4: QUOZIENTE

$a = \frac{x}{y}$ con $x = x_{best} \pm \Delta x$ e y= $y_{best} \pm \Delta y$

- Il minimo valore probabile é

$$a_{min} = \frac{x_{best}\left(1 - \frac{\Delta x}{|x_{best}|}\right)}{y_{best}\left(1 + \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right)} \approx \frac{x_{best}}{y_{best}}\left(1 - \frac{\Delta x}{|x_{best}|}\right)\left(1 - \frac{\Delta y}{|y_{best}|}\right) =$$

Sviluppo di Taylor

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

se $|x| < 1$

$$= \frac{x_{best}}{y_{best}}\left(1 - \frac{\Delta x}{|x_{best}|} - \frac{\Delta y}{|y_{best}|} + \cancel{\frac{\Delta x}{|x_{best}|}\frac{\Delta y}{|y_{best}|}}\right) =$$

Supponiamo di lavorare con incertezze piccole

a_{best}

$$= \boxed{\frac{x_{best}}{y_{best}}}\left[1 - \left(\boxed{\frac{\Delta x}{|x_{best}|} + \frac{\Delta y}{|y_{best}|}}\right)\right]$$

Somma delle incertezze relative

L'incertezza relativa su a è data dalla somma delle incertezze relative su x e y: $\frac{\Delta a}{a_{best}} = \frac{\Delta x}{x_{best}} + \frac{\Delta y}{y_{best}}$

Propagazione delle Incertezze: Prodotti e Quozienti

Incertezza nei prodotti e nei quozienti (provvisoria):

Quando più grandezze $x, y \ldots\ldots w$ misurate direttamente con incertezze $\Delta x, \Delta y \ldots\ldots \Delta w$ sono utilizzate per misurare indirettamente una grandezza q tramite prodotti o quozienti, l'incertezza RELATIVA sul valore calcolato di q è data dalla **somma delle incertezze RELATIVE sulle misure dirette**

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \cdots \frac{\Delta w}{w}$$

Propagazione delle Incertezze: Prodotti per Costanti e Potenze

Prodotto di una grandezza per un numero esatto

se $q = Bx$ dove B non ha incertezza allora l'incertezza su q è esattamente B volte l'incertezza su x

$$\boldsymbol{\Delta q = B\Delta x}$$

Incertezza in una potenza

se $q = x^n$ allora l'incertezza RELATIVA su q è n volte l'incertezza RELATIVA su x

$$\boldsymbol{\frac{\Delta q}{q} = n\frac{\Delta x}{|x|}}$$

Propagazione delle Incertezze: Generalizzazione

Incertezza nei prodotti e nei quozienti (provvisoria):
Generalizzando, se $q = cx^\alpha y^\beta z^\gamma$ ... dove c è una costate numerica

$$\frac{\Delta q}{q} = |\alpha|\frac{\Delta x}{x} + |\beta|\frac{\Delta y}{y} + |\gamma|\frac{\Delta z}{z} \dots.$$

Ad esempio: $a = \sqrt{2}\,\frac{x^2}{y^3} \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{2} \quad \alpha = 2 \quad \beta = -3$

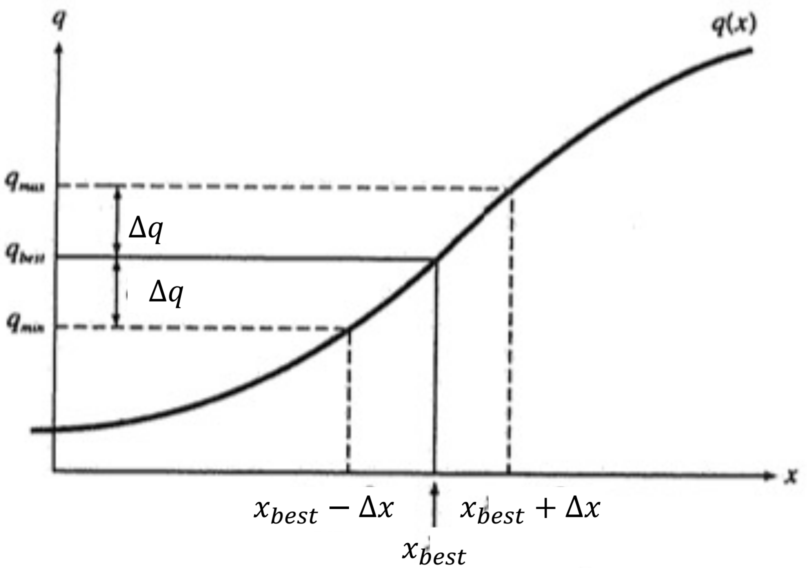
$$\frac{\Delta a}{a} = 2\frac{\Delta x}{x} + 3\frac{\Delta y}{y} \Rightarrow \Delta a = a\left(2\frac{\Delta x}{x} + 3\frac{\Delta y}{y}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta a = \sqrt{2}\frac{x^2}{y^3}\left(2\frac{\Delta x}{x} + 3\frac{\Delta y}{y}\right) = \underset{c}{\boxed{\sqrt{2}}}\left(\frac{2x\Delta x}{y^3} + \frac{3x^2\Delta y}{y^4}\right)$$

$q = Bx$
$\Delta q = B\Delta x$

Propagazione delle Incertezze nelle Funzioni di Variabili

Se q dipende da una sola x misurata direttamente, ma la dipendenza è espressa da una funzione qualsiasi:
q(x) = f(x)



- La miglior stima di x è x_{best};
- La miglior stima di q è
  $$q_{best} = q(x_{best})$$
- $\Delta q = q_{max} - q_{best} =$
  $q(x_{best} + \Delta x) - q_{best} =$
  $$q(x_{best} + \Delta x) - q(x_{best}) = \left|\frac{dq}{dx}\right|_{x_{best}} \Delta x$$

Si deve calcolare la derivata nel punto x_{best} e poi moltiplicarla per l'incertezza su x.

Propagazione delle Incertezze nelle Funzioni di Variabili (II)

Incertezza in una funzione di una variabile:

Se x è misurato con incertezza Δx ed è utilizzato per calcolare la funzione q(x), allora l'incertezza Δq è

$$\Delta q = \left|\frac{dq}{dx}\right|_{x_{best}} \Delta x$$

Incertezza in una funzione di più variabili:

Se q è funzione di più variabili x, y…allora l'incertezza Δq è

$$\Delta q(x, y \ldots) = \left|\frac{dq(x, y \ldots)}{dx}\right|_{x_{best}, y_{best} \cdots} \Delta x + \left|\frac{dq(x, y \ldots)}{dy}\right|_{x_{best} y_{best} \cdots} \Delta y + \cdots$$

Propagazione delle Incertezze nelle Funzioni di Variabili (III)

NOTA BENE

- C'è una situazione nella quale si deve usare la formula con le derivate parziali e non è corretto usare la formula "passo passo": quando **la grandezza a è un monomio (o polinomio) ma almeno una delle grandezze x, y, z .... si presenta più di una volta nella espressione di a;**
- Quando una funzione implica una stessa grandezza più di una volta alcuni degli errori possono cancellarsi fra loro (**compensazione degli errori**) e la procedura passo-passo porta alla sovrastima dell'incertezza finale;

  Esempio: $q(x, y, z) = \frac{x+y}{x+z}$
- In questo caso occorre utilizzare la formula con le derivate parziali;

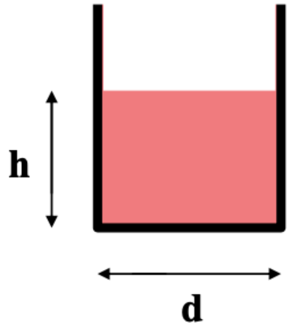
Esercizio 1

Si vuole misurare la densità di un liquido. Si versa il liquido in un contenitore cilindrico di massa m_C e si misurano il diametro interno del cilindro, d, l'altezza del livello di liquido, h e la massa totale, m_T. Le misure dirette sono:

$m_C = (50 \pm 1)$ g $d = (5.15 \pm 0.05)$ cm

$m_T = (184 \pm 1)$ g $h = (8.25 \pm 0.05)$ cm

Calcolare la densità ρ e la sua incertezza.



Esercizio 2

Valutare l'errore sull'area di un cerchio sapendo che il valore sul raggio è $r = (r_{best} \pm \Delta r)$

Esercizio 3

Si vuole misurare il coefficiente di attrito statico tra la superficie di un tavolo e un blocco di legno. Si aumenta gradualmente l'inclinazione del tavolo e si misura l'angolo critico θ_C, cioè l'inclinazione minima alla quale il blocco comincia a scivolare.
La misura diretta fornisce $\theta_C = (32 \pm 1)°$.
Calcolare il coefficiente di attrito statico μ_S e la sua incertezza, sapendo che:

$$\mu_S = tg(\theta_C)$$

Esercizio 4

La legge di Snell lega l'angolo di rifrazione di un raggio di luce che viaggia in un mezzo trasparente con indice di rifrazione n_2 all'angolo di incidenza di un raggio di luce che viaggia in un mezzo con indice di rifrazione n_1.

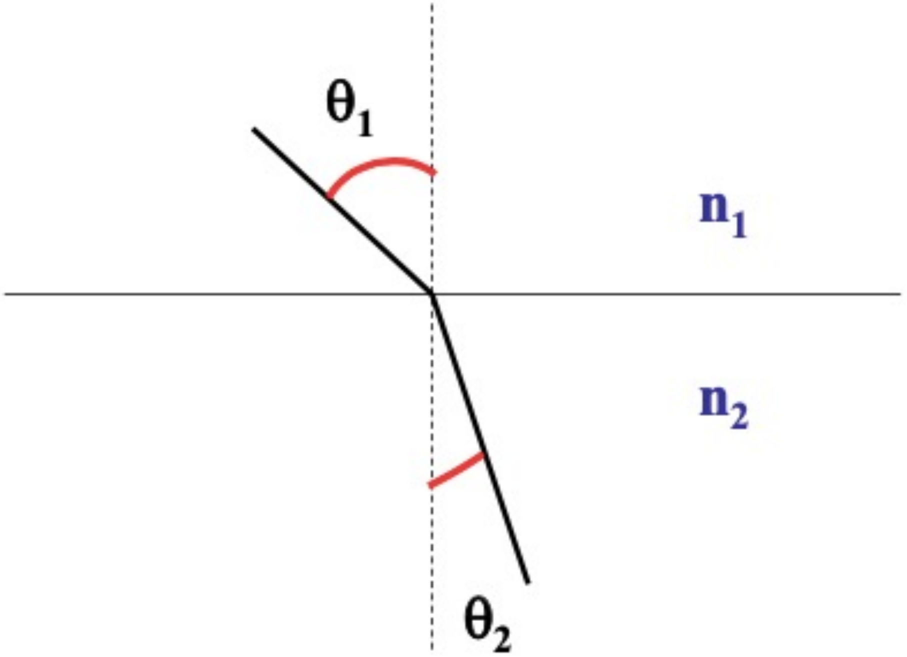
La legge può essere scritta nella forma: $n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$.

Calcolare n_2, e la sua incertezza, usando le seguenti misure sperimentali:

$\theta_1 = (50 \pm 1)°$

$\theta_2 = (30 \pm 1)°$

$n_1 = 1.0000$



Esercizio 5

Si vuole misurare la distanza focale f di una lente sottile con un errore relativo non più grande del 5%. Si utilizza la formula $\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i}$ nella quale o, la distanza lente-oggetto, è 2 cm mentre i, la distanza lente-immagine, è 10 cm. Quale deve essere la massima incertezza assoluta $\Delta o = \Delta i$ con la quale si misurano le distanze?

Esercizio 6

Da una lamina metallica quadrata di lato L = 1 m, lavorata con alta precisione meccanica, vengono tolti quattro quadrati identici (ombreggiati ed indicati con q in figura) agli angoli. I quattro rettangoli r vengono poi ripiegati di 90° per ottenere un contenitore a forma di parallelepipedo di capacità V. La lunghezza x del lato dei quadrati q è tale da rendere massima la capacità del contenitore.

Sapendo che la precisione della macchina che taglia i quadrati q comporta una incertezza $\Delta x = 2$ mm su x, quale incertezza possiamo associare a V ?