INTERVALLI/LIVELLI DI CONFIDENZA

CAMPIONI RIDOTTI

CdS Fisica

Laboratorio Meccanica e Termodinamica

Probabilità e Confidenza

- Consideriamo un campione di N misure $\{x_1\ x_2\ ....\ x_N\}$ estratte da una popolazione gaussiana $G(x;\mu,\sigma)$.
- Siamo interessati a stimare il parametro μ, che corrisponde al valore vero della grandezza misurata (in assenza di errori sistematici).

- La stima migliore del parametro μ è la media

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

- La miglior stima del parametro σ è la deviazione standard campionaria

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}$$

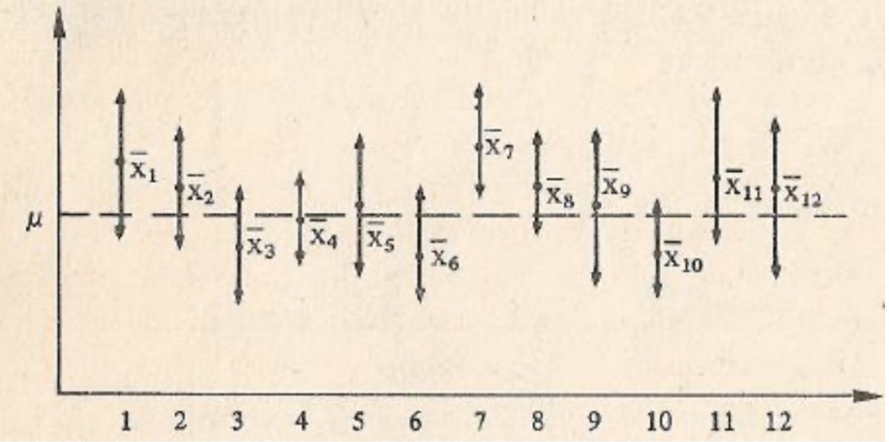
Si tratta di "**stime puntuali**" dei parametri, ottenute con il metodo della **massima verosimiglianza**.

Probabilità e Confidenza (II)

- I valori ottenuti da un numero finito N di misure ripetute sono un campione finito di un'ipotetica popolazione di misure;
- la distribuzione «genitrice» è approssimabile a una gaussiana di media μ e deviazione standard σ;
- **Se l'intera popolazione infinita fosse nota allora la media μ sarebbe il valore vero x_{true} della quantità che vogliamo misurare;**
- In realtà solo il campione di N misure è noto, da cui si può ricavare $\bar{x}$;

Probabilità e Confidenza (III)

Ripetendo più volte il campionamento di N misure, otterremmo valori di $\bar{x}$ diversi :

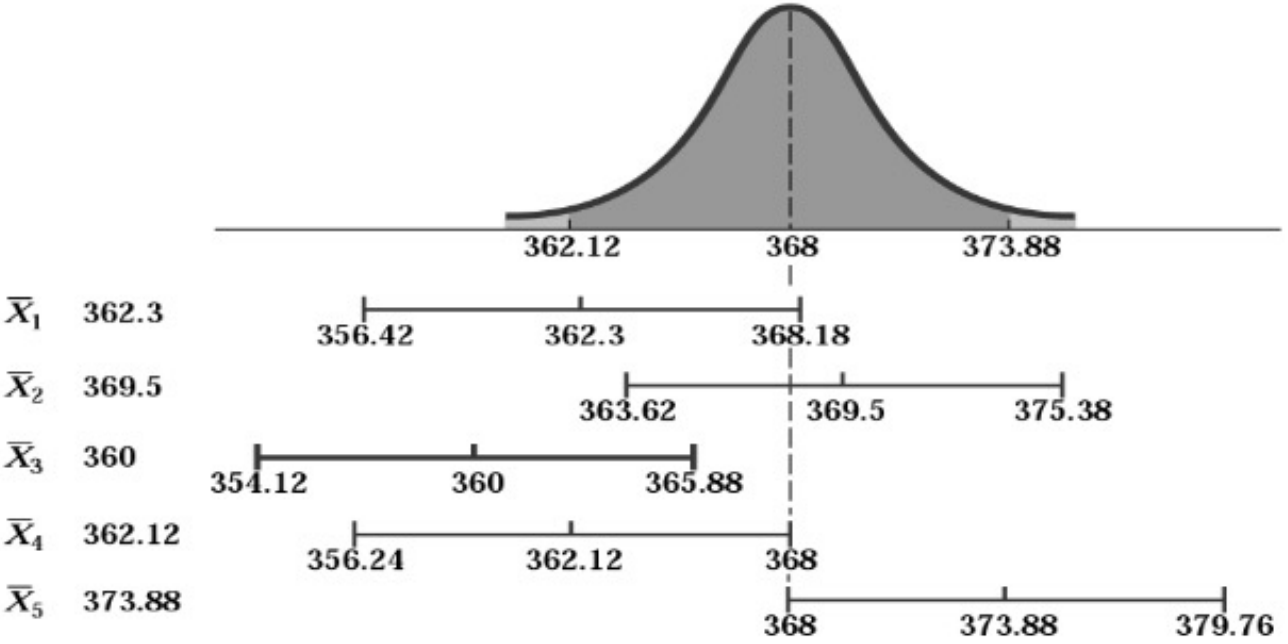


Il **valore medio di un campione di misure a sua volta può essere considerato come una variabile aleatoria casuale (**uno degli individui della popolazione infinita di tutte le medie).

La distribuzione delle medie è:
- centrata attorno al valore vero μ;
- approssimativamente gaussiana per N grande;
- la deviazione standard è legata alla deviazione standard campionaria delle singole misure $\sigma_{\bar{x}} = {}^{\sigma_x}/_{\sqrt{N}}$.

Probabilità e Confidenza (IV)

Supponendo di avere un campione di N misure, **qual è la probabilità che un intervallo di una certa ampiezza centrato intorno al valore vero x_{true} contenga la media del campione $\overline{x}$?**



Probabilità e Confidenza (V)

- Si misurano i possibili diversi intervalli di probabilità in unità di deviazione standard $\sigma_{\bar{x}}$;

- Un intervallo è definito dalla relazione:

$$x_{true} - k\sigma_{\bar{x}} < \bar{x} < x_{true} + k\sigma_{\bar{x}}$$

equivalente a $|\bar{x} - x_{true}| < k\sigma_{\bar{x}}$ oppure $\boxed{\frac{|\bar{x} - x_{true}|}{\sigma_{\bar{x}}} < k}$

k = fattore di copertura

- La distribuzione delle $\bar{x}$ è in prima approssimazione normale, si usa quindi la variabile normale standard

$z = \frac{\bar{x} - x_{true}}{\sigma_{\bar{x}}}$ quindi $\boxed{|z| < k}$

Probabilità e Confidenza (VI)

- La probabilità che la media $\bar{x}$ soddisfi l'equazione $x_{true} - k\sigma_{\bar{x}} < \bar{x} < x_{true} + k\sigma_{\bar{x}}$ è quindi

$$\boxed{\boldsymbol{P(|z| < k) = \int_{-k}^{k} P(z)dz}}$$

- Per N grande uso le tabelle gaussiane per trovare la probabilità corrispondente ad un certo fattore di copertura o per trovare il fattore di copertura in corrispondenza di una certa probabilità;

  Es: k = 1 $\Longrightarrow P(|z| < 1) = 68.3\%$ (tab: verde)

  Es: $P(|z| < k) = 90\% \Longrightarrow$ k = 1.64 (tab: blu)

- $x_{true} - k\sigma_{\bar{x}} < \bar{x} < x_{true} + k\sigma_{\bar{x}}$ è un **intervallo di probabilità**

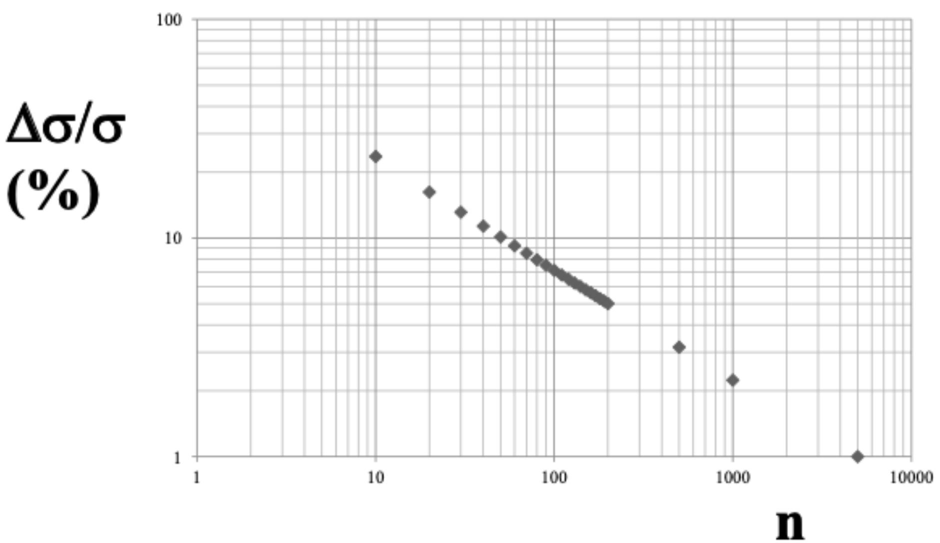
  NB: ipotesi di partenza: popolazione nota!!!

Table C.4. Values of the integral $\Phi^*(z) = \int_0^z \phi(z')\,\mathrm{d}z'$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.9015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4776	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987									
3.5	0.4998									
4.0	0.4999									

Campioni Ridotti

- Realisticamente: non conosciamo l'intera popolazione ma abbiamo un campione di N misure di cui possiamo calcolare la migliore stima di $\mu = \bar{x}$ e la migliore stima di σ (dipendenti dal campione);
- Nel caso di piccoli N ("**campioni ridotti**") la stima puntuale di σ è però poco accurata;



$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}}$$

Per N piccoli l'errore relativo sulla deviazione standard è grande.

Intervallo di Confidenza

- La **stima puntuale** è lo **specifico valore assunto da una statistica**, calcolata in corrispondenza dei dati campionari e che viene utilizzata per **stimare il vero valore non noto di un parametro** di una popolazione;

- Uno **stimatore per intervallo** è un intervallo costruito attorno allo stimatore puntuale, in modo tale che sia **nota e fissata la probabilità che il parametro appartenga all'intervallo stesso;**

- Tale probabilità è in generale indicato con $(1-\alpha)$ dove α è la probabilità che il parametro si trovi al di fuori dell'intervallo;

Intervallo di Confidenza (II)

- Dato un campione di N misure, possiamo stimare media, deviazione standard campionaria e deviazione standard della media;
- $\bar{x}$ e $\hat{\sigma}_{\bar{x}}$ corrispondono ad una variabile casuale poiché calcolata su un particolare campione di dati;
- **Qual è la probabilità che un intervallo di una certa ampiezza centrato intorno alla media del campione $\bar{x}$ contenga il valore vero x_{true}?** (Domanda invertita rispetto slide 5)
- In altre parole, **qual è la probabilità che $\bar{x} - k\hat{\sigma} < x_{true} < \bar{x} + k\hat{\sigma}$?**

Intervallo di Confidenza (III)

- L'intervallo di probabilità $x_{true} - k\sigma_{\bar{x}} < \bar{x} < x_{true} + k\sigma_{\bar{x}}$ si scrive adesso come

  $$\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{k}\widehat{\boldsymbol{\sigma}_{\bar{x}}} < \boldsymbol{x_{true}} < \bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{k}\widehat{\boldsymbol{\sigma}_{\bar{x}}}$$

  equivalente a $|\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x_{true}}| < \boldsymbol{k}\widehat{\boldsymbol{\sigma}_{\bar{x}}}$ oppure $\boxed{\dfrac{|\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x_{true}}|}{\widehat{\boldsymbol{\sigma}_{\bar{x}}}} < \boldsymbol{k}}$

- L'intervallo si chiama "**intervallo di confidenza**".
  La corrispondente probabilità "**livello di confidenza**".
  k è il "**fattore di copertura**".

- Introduciamo una nuova variabile casuale

  $\mathbf{t} = \dfrac{\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x_{true}}}{\widehat{\boldsymbol{\sigma}_{\bar{x}}}}$ quindi $\boxed{|\boldsymbol{t}| < \boldsymbol{k}}$

NB: t è diversa dalla variabile normale standard z poiché a denominatore è presente una stima del parametro!!

Intervallo di Confidenza (IV)

- Il **livello di confidenza** dell'equazione $\bar{x} - k\hat{\sigma}_{\bar{x}} < x_{true} < \bar{x} + k\hat{\sigma}_{\bar{x}}$ è quindi $\boxed{\boldsymbol{P(|t| < k)}}$

- Quindi la confidenza è il **grado di fiducia che l'intervallo possa contenere effettivamente il parametro di interesse;**

- Un livello di confidenza del 95% significa che al 95% il parametro stimato cade all'interno dell'intervallo di confidenza.

Distribuzione di Student

Se la distribuzione dell'intera popolazione è di tipo gaussiano, la variabile $\boxed{\mathbf{t} = \frac{\bar{x} - x_{true}}{\widehat{\sigma_{\bar{x}}}}}$ segue la **distribuzione di Student** con $\boldsymbol{\nu = N - 1}$ gradi di libertà

L'intervallo di confidenza centrato in $\bar{x}$ e ampio $k\widehat{\sigma_{\bar{x}}}$ ha un livello di confidenza dato da P(|t| < k).

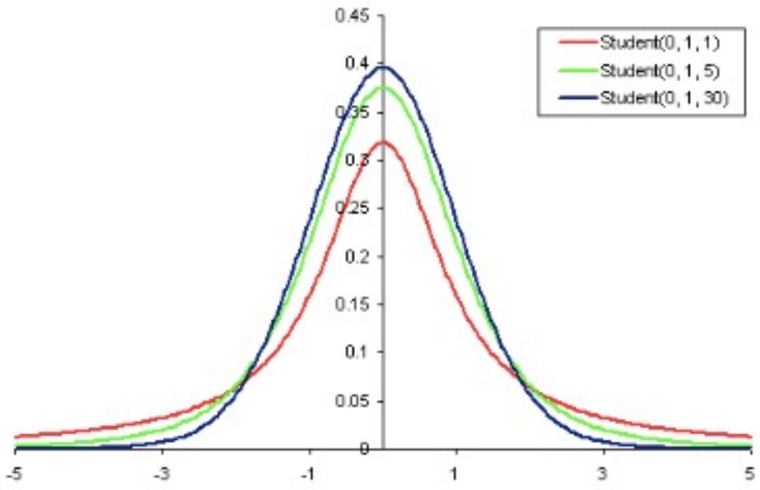
$$S_\nu(t) = \frac{c_\nu}{\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

$$\boxed{P_\nu(|t| < k) = \int_{-k}^{k} S_\nu(t)dt}$$

Distribuzione di Student (II)

Le caratteristiche di questa distribuzione sono:

- Simmetria rispetto al valor medio 0;
- Dipendenza dal parametro ν (per ogni valore di ν si ha una distribuzione diversa);
- Tendenza, per N $\rightarrow \infty$, alla variabile normale standard z;
- Normalizzata a 1.



Se non è richiesta una accuratezza elevata, di fatto, già per **N ≈ 30 ÷ 35** misure si può approssimare la $S_\nu(t)$ con la *G(z;0,1),* indipendente da N.

Distribuzione di Student (III)

Si possono confrontare i livelli di confidenza, corrispondenti a k=1, k=2 e k=3, per la $S_5(t)$ (distribuzione di Student con 5 gradi di libertà) e per la $G(z; 0,1)$ (gaussiana di media 0 e deviazione standard 1).

	k = 1	**k = 2**	**k = 3**
S_5	0.637	0.898	0.970
G	0.683	0.955	0.997

NB: Gaussiana con $\mu = 0$ e $\sigma = 1 \Longrightarrow k = 1$ significa

$$P(-1 \leq z \leq 1) = \int_{-1}^{1} P(z)dz = 2\int_{0}^{1} P(z)dz = 2 * 0.3413 = 0.6826$$

Tabelle di Student

Fattore di copertura

$k \rightarrow$	1	1.5	2	2.5	3
$\nu=1$	50.00	62.57	70.48	75.78	79.52
$\nu=2$	57.74	72.76	81.65	87.04	90.45
$\nu=3$	60.90	76.94	86.07	91.23	94.23
$\nu=4$	62.61	79.20	88.39	93.32	96.01
$\nu=5$	63.68	80.61	89.81	94.55	96.99
$\nu=6$	64.41	81.57	90.76	95.35	97.60
$\nu=7$	64.94	82.27	91.44	95.90	98.01
$\nu=8$	65.34	82.80	91.95	96.31	98.29
$\nu=9$	65.66	83.21	92.34	96.61	98.50
$\nu=10$	65.91	83.55	92.66	96.86	98.67
$\nu=15$	66.68	84.56	93.61	97.55	99.10
$\nu=20$	67.07	85.08	94.07	97.88	99.29
$\nu=30$	67.47	85.59	94.54	98.19	99.46
$\nu=40$	67.67	85.85	94.77	98.34	99.54
$\nu=50$	67.79	86.01	94.91	98.43	99.58
$\nu=100$	68.03	86.32	95.18	98.60	99.66
$\nu=\infty$	68.27	86.64	95.45	98.76	99.73

Gradi di libertà

Risultato è la probabilità (livello di confidenza) in %

Es: S_5 con $k=1$

Tabelle di Student (II)

Probabilità in % (livello di confidenza) →

Gradi di libertà

Risultato è il fattore di copertura

$\mathcal{P}'$ (%) →	50	68.27	90	95	95.45	99	99.73
$\nu = 1$	1.000	1.84	6.31	12.71	13.97	63.66	235.80
$\nu = 2$	0.816	1.32	2.92	4.30	4.53	9.92	19.21
$\nu = 3$	0.765	1.20	2.35	3.18	3.31	5.84	9.22
$\nu = 4$	0.741	1.14	2.13	2.78	2.87	4.60	6.62
$\nu = 5$	0.727	1.11	2.02	2.57	2.65	4.03	5.51
$\nu = 6$	0.718	1.09	1.94	2.45	2.52	3.71	4.90
$\nu = 7$	0.711	1.08	1.89	2.36	2.43	3.50	4.53
$\nu = 8$	0.706	1.07	1.86	2.31	2.37	3.36	4.28
$\nu = 9$	0.703	1.06	1.83	2.26	2.32	3.25	4.09
$\nu = 10$	0.700	1.05	1.81	2.23	2.28	3.17	3.96
$\nu = 15$	0.691	1.03	1.75	2.13	2.18	2.95	3.59
$\nu = 20$	0.687	1.03	1.72	2.09	2.13	2.85	3.42
$\nu = 30$	0.683	1.02	1.70	2.04	2.09	2.75	3.27
$\nu = 40$	0.681	1.01	1.68	2.02	2.06	2.70	3.20
$\nu = 50$	0.680	1.01	1.68	2.01	2.05	2.68	3.16
$\nu = 100$	0.678	1.005	1.660	1.98	2.02	2.63	3.08
$\nu = \infty$	0.674	1.000	1.645	1.96	2.00	2.58	3.00

Es: S_5 per avere un livello di confidenza al 68% k=1.1

Distribuzione di Student (IV)

- Esprimere l'incertezza su $\bar{x}$ in termini di $\hat{\sigma}$ corrisponde quindi a k = 1, cioè ad un livello di confidenza di ~68%, se il numero di misure è grande
(ma solo di ~ 64% se il numero di misure è 6).

- **In generale, nell'esprimere il risultato, andrebbero sempre specificati i valori di ν, o N, e di k**
(lo "standard" resta comunque k = 1).

Esercizio 1

Due studenti misurano la stessa grandezza fisica, ottenendo rispettivamente i seguenti campioni, in unità opportune:

$\{3.5, 4.3, 5.0, 6.0\}$

$\{8.3, 4.3, 6.0, 5.1, 3.7, 10.2, 6.3, 7.2, 5.1, 4.6\}$.

Il primo studente fornisce il risultato al 99% di livello di confidenza, mentre il secondo lo fornisce al 95%.

Quali sono gli estremi dei due intervalli di confidenza ?

Esercizio 2

Misuriamo indirettamente la grandezza fisica

$$a = \frac{b}{4\,\pi\, r} e^{-r/R}$$

dove R = 40 cm, con errore trascurabile, e b = (10.0 ± Δb) cm.
La grandezza r, soggetta ad errori casuali, è misurata ripetutamente; un campione di N = 20 misure fornisce una media r = 2.50 cm e una deviazione standard del campione s = 0.44 cm.
Si decide di esprimere Δr ad un livello di confidenza del 99%.
Qual è il valore massimo di Δb che consente di mantenere un errore relativo Δa/a non superiore al 20% ?
Sommare linearmente le incertezze.

Esercizio 2

$$P(t > k) = \int_k^{\infty} P(t)dt$$

TABLE of CRITICAL VALUES for STUDENT'S *t* DISTRIBUTIONS

Column headings denote probabilities (α) ***above*** tabulated values.

d.f.	0.40	0.25	0.10	0.05	0.04	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	0.325	1.000	3.078	6.314	7.916	12.706	15.894	31.821	63.656	127.321	318.289	636.578
2	0.289	0.816	1.886	2.920	3.320	4.303	4.849	6.965	9.925	14.089	22.328	31.600
3	0.277	0.765	1.638	2.353	2.605	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.333	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.191	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.894	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.104	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.046	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.004	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	1.973	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	1.948	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	1.928	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	1.912	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	1.899	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	1.887	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	1.878	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	1.869	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	1.862	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	1.855	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	1.850	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	1.844	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	1.840	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	1.835	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792

Distribuzione di Student (V)

Applicazioni importanti della distribuzione di Student si hanno:

1. nel **confronto di una misura con il valore "accettato"** di una certa grandezza
2. nel **confronto fra due diverse misure** della stessa grandezza

...quando le misure sono ottenute da campioni ridotti.

Dal momento che si tratta di decidere (su basi probabilistiche) se **l'ipotesi di consistenza è da accettare o da rigettare**, siamo nell'ambito di "**test delle ipotesi**".

Test di Ipotesi

- Il test delle ipotesi consente di **verificare se, e in quale misura, una determinata ipotesi è supportata dall'evidenza empirica**;

- L'obiettivo è decidere sulla «verità» o «falsità» di una certa ipotesi che viene formulata sulla popolazione;

- In generale, un test delle ipotesi consiste nel calcolare la **probabilità di ottenere un livello di disaccordo**, rispetto ad una determinata ipotesi, **maggiore** del livello osservato con i dati attuali (le nostre misure).

Test di Ipotesi (II)

- Quanto più è grande questa probabilità (che rappresenta la **probabilità di “fare peggio”** rispetto ai nostri dati), tanto più è plausibile che le misure fatte siano in accordo con l’ipotesi.

- Per decidere, tale probabilità viene confrontata con un valore (fissato a priori e comunque convenzionale) che rappresenti il **confine tra discrepanze ammissibili nell’ipotesi della pura casualità e discrepanze invece tanto improbabili** da far supporre che siano dovute non a fluttuazioni statistiche, ma alla falsità della ipotesi.

Test di Ipotesi: Caso 1

Confronto di una misura con il valore accettato di una certa grandezza

- Si calcola il valore t_{mis} utilizzando come valore "vero" μ il valore accettato della grandezza

- **si rigetta l'ipotesi di consistenza se $P(|t| > t_{mis})$ è troppo piccola**.
  se **$P(|t| > t_{mis}) < 0.05 \rightarrow$ discrepanza significativa**
  se **$P(|t| > t_{mis}) < 0.01 \rightarrow$ discrepanza altamente significativa**

- La P deve essere calcolata in base alla distribuzione opportuna: $S_\nu(t)$ per campioni ridotti (sotto 40 misure) oppure con la $G(z)$ nel caso di campioni non ridotti (da 40 misure in poi).

Test Di Student

Si desidera **stabilire se il valore di una grandezza fisica, determinato tramite un piccolo campione di misure, sia compatibile, ad un certo livello di significatività, con un valore noto a priori.**

Sia x una variabile casuale di valore medio μ_0 noto.
Si estragga un campione di N elementi [$x_1, x_2, ..., x_N$] .
Si stimino $\bar{x}$ e σ_x^2 teorici mediante i valori empirici ottenuti dal campione

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \qquad \sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}$$

Test Di Student (II)

Ci si chiede se è possibile accettare come stima di μ il valore $\bar{x}$ trovato e con quale grado di fiducia:
ci si chiede se **la discrepanza | $\bar{x}$ - μ_0 | sia significativa o meno.**

- Costruzione della variabile t per il test: $$\boxed{t_{mis} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}}$$ NB: della media
- Si fissano l'ipotesi da verificare H_0: $\mu = \mu_0$ e l'ipotesi alternativa H_1: $\mu \neq \mu_0$
- Si fissa il **livello di fiducia α**, ovvero la **probabilità limite della regione di rifiuto dell'ipotesi**;
- dalle tabelle di t, con $\nu = N - 1$, si ricava il valore della probabilità per per $t = t_{mis}$.

Test Di Student (IV)

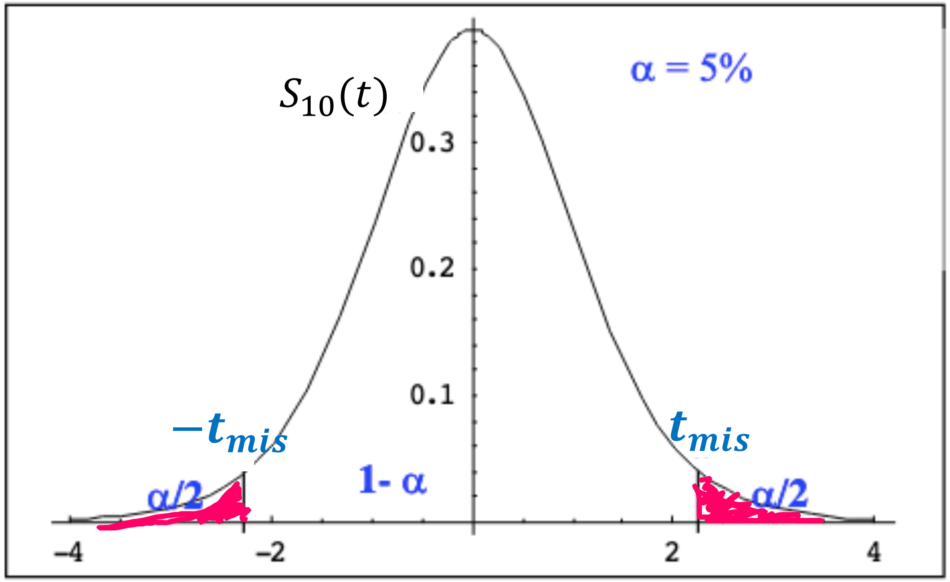
- Se **$P(|t|>t_{mis}) > \alpha$**, allora t cade entro l'intervallo di accettazione dell'ipotesi, e si accetta l'ipotesi che $\bar{x}$, al livello di fiducia prescelto, stimi correttamente $\mu = \mu_0$.
- La **discrepanza $|\bar{x} - \mu_0|$ non è significativa** ma dovuta unicamente a fluttuazioni statistiche che dipendono dal campionamento.

- Se **$P(|t|>t_{mis}) < \alpha$**, allora t cade fuori l'intervallo di accettazione dell'ipotesi, e si rigetta l'ipotesi che $\bar{x}$, al livello di fiducia prescelto, stimi correttamente $\mu = \mu_0$.
- La **discrepanza $|\bar{x} - \mu_0|$ è significativa e** non è giustificabile con le sole fluttuazioni statistiche.

Test Di Student (III)

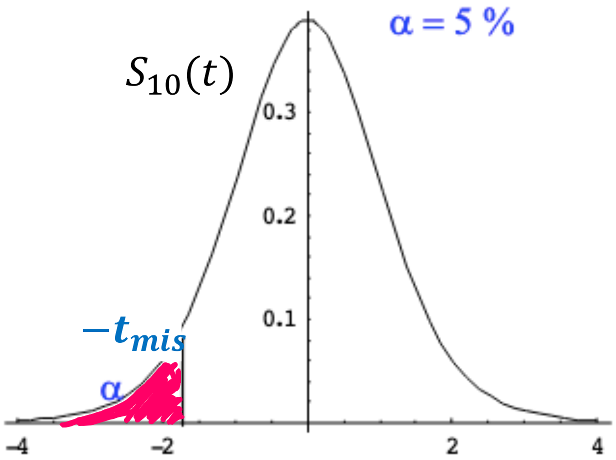
In generale si prendono in considerazione delle deviazioni negative e positive da μ (**test a due code**)

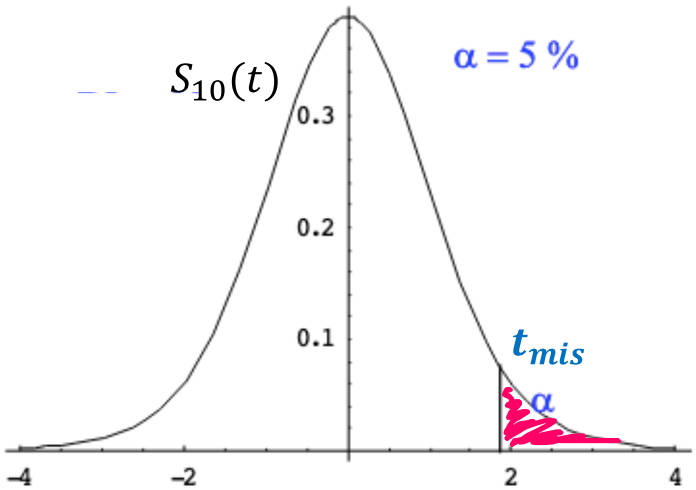
$$P(|t| > t_{mis}) = P(t < -t_{mis} \vee t > t_{mis}) = \int_{-\infty}^{-t_{mis}} S_\nu(t)dt + \int_{t_{mis}}^{+\infty} S_\nu(t)dt = \alpha$$



Test Di Student (V)

Nel caso di deviazioni solo in un verso, si limita la regione critica solo ad una banda: **test ad una coda**.





$$P(t < -t_{mis}) = \int_{-\infty}^{-t_{mis}} S_\nu(t)dt = \alpha$$

$$H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu < \mu_0$$

$$P(t > t_{mis}) = \int_{t_{mis}}^{+\infty} S_\nu(t)dt = \alpha$$

$$H_0: \mu = \mu_0; H_1: \mu > \mu_0$$

Esercizio 3

La tabella riporta sette misure di viscosità dell'acqua, in mPa·s, effettuate alla temperatura di 25 °C.

0.84	**0.93**	**0.88**	**0.91**	**0.94**	**0.96**	**0.90**

Le misure sono compatibili con il valore tabulato di 0.89 mPa·s?

Esercizio 3

$$P(t > k) = \int_k^{\infty} P(t)dt$$

TABLE of CRITICAL VALUES for STUDENT'S *t* DISTRIBUTIONS

Column headings denote probabilities (α) ***above*** tabulated values.

d.f.	0.40	0.25	0.10	0.05	0.04	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	0.325	1.000	3.078	6.314	7.916	12.706	15.894	31.821	63.656	127.321	318.289	636.578
2	0.289	0.816	1.886	2.920	3.320	4.303	4.849	6.965	9.925	14.089	22.328	31.600
3	0.277	0.765	1.638	2.353	2.605	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.333	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.191	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.894	6.869
6	0.265	0.718	$\boxed{1.440}$	1.943	2.104	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.046	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.004	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	1.973	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	1.948	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	1.928	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	1.912	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	1.899	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	1.887	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	1.878	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	1.869	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	1.862	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	1.855	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	1.850	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	1.844	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	1.840	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	1.835	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792

Test di Ipotesi: Caso 2

Confronto di due misure della stessa grandezza

- Ci si riconduce al caso precedente, perché si tratta di testare l'ipotesi che la differenza tra le due misure sia compatibile con zero: $(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - 0$

$$\boxed{t/z = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\hat{\sigma}}}$$

NB: si usa *t* per campioni ridotti e *z* per campioni numerosi

- Ma, qual è il valore corretto della deviazione standard da utilizzare nel denominatore della t_{mis} (il "metro" che usiamo per quantificare la distanza tra le due misure) ?

Test di Ipotesi: Caso 2 (II)

Nel caso in cui la prima misura, x_1, sia la media di n_1 prove estratte da una popolazione normale e la seconda x_2 sia la media di n_2 prove estratte da una popolazione normale, con n_1 ed $n_2 \geq 30$, si calcola:

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}}$$

NB: **le $\hat{\sigma}$ sono le deviazioni standard <u>dei campioni</u> non delle medie**

La z è una variabile casuale che segue la **distribuzione di Gauss di media 0 e deviazione standard 1**.

Si rigetta l'ipotesi di consistenza se $P(|z| > z_{mis})$ è troppo piccola.

se **$P(|z| > z_{mis}) < 0.05 \rightarrow$ discrepanza significativa**

se **$P(|z| > z_{mis}) < 0.01 \rightarrow$ discrepanza altamente significativa**

Test di Ipotesi: Caso 2 (III)

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2}}$$

Dimostrazione.

Una variabile che sia combinazione lineare di due variabili gaussiane è a sua volta una variabile gaussiana.

Date x e y variabili gaussiane, $q = c_1 x + c_2 y$ è una variabile gaussiana con media $\bar{q} = q(\bar{x}, \bar{y}) = c_1 \bar{x} + c_2 \bar{y}$ e varianza $\sigma_q^2 = c_1^2 \sigma_x^2 + c_2^2 \sigma_y^2$.

Se x_1 e x_2 sono estratte da una popolazione gaussiana anche $z = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ è gaussiana (combinazione lineare di $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ con $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$) per cui la varianza si calcola come:

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}^2 = c_1^2 \sigma_{\bar{x}_1}^2 + c_2^2 \sigma_{\bar{x}_2}^2 = 1^2 \sigma_{\bar{x}_1}^2 + (-1^2) \sigma_{\bar{x}_2}^2 = \sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

cvd

Esercizio 4

Si considerino le due seguenti misure (tra loro indipendenti e casuali) della distanza focale della stessa lente

$f_1 = (225.0 \pm 0.9)$ mm

$f_2 = (229 \pm 3)$ mm

Sono compatibili tra loro ?
Entrambe le misure sono ottenute tramite campioni numerosi e le incertezze sono deviazioni standard della media ($k = 1$).

Esercizio 4

Table C.4. Values of the integral $\Phi^*(z) = \int_0^z \phi(z')\,dz'$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	$\boxed{0.3997}$	0.9015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4776	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987									
3.5	0.4998									
4.0	0.4999									

Test di Ipotesi: Caso 2 (III)

Il caso in cui i campioni di dati sono ridotti può essere trattato facilmente solo se le deviazioni standard delle due popolazioni gaussiane sono uguali tra loro. Si calcola allora:

$$\boxed{t_{mis} = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\left(\frac{n_1 - 1}{n_1 + n_2 - 2}\hat{\sigma}_1^2 + \frac{n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2}\hat{\sigma}_2^2\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}}$$

NB: **le $\hat{\sigma}$ sono le deviazioni standard <u>dei campioni</u> non delle medie**

La t è una variabile casuale che segue la **distribuzione di Student con $\nu = n_1 + n_2 - 2$ gradi di libertà.**

Esercizio 5

Due società di gestioni patrimoniali, A e B, confrontano i rendimenti annuali generati dall'inizio della loro attività. Avendo indicato con R i rendimenti medi e con s le deviazioni standard dei rispettivi campioni, i dati di cui si dispone sono i seguenti:

Società A:	$n_A = 8$	$R_A = 0.12$	$s_A = 0.01$
Società B:	$n_B = 5$	$R_B = 0.09$	$s_B = 0.02$

verificare se l'ipotesi di uguaglianza dei rendimenti ottenuti dai due gestori è soddisfatta.

Esercizio 5

$$P(t > k) = \int_k^{\infty} P(t)dt$$

TABLE of CRITICAL VALUES for STUDENT'S *t* DISTRIBUTIONS

Column headings denote probabilities (α) ***above*** tabulated values.

d.f.	0.40	0.25	0.10	0.05	0.04	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	0.325	1.000	3.078	6.314	7.916	12.706	15.894	31.821	63.656	127.321	318.289	636.578
2	0.289	0.816	1.886	2.920	3.320	4.303	4.849	6.965	9.925	14.089	22.328	31.600
3	0.277	0.765	1.638	2.353	2.605	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.333	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.191	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.894	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.104	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.046	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.004	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	1.973	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	1.948	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	1.928	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	1.912	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	1.899	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	1.887	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	1.878	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	1.869	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	1.862	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	1.855	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	1.850	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	1.844	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	1.840	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	1.835	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792

Rigetto di Dati: Campione Ridotto

Grazie alla distribuzione di Student si può estendere il **criterio di Chauvenet** (rigetto di dati) **al caso di un campione ridotto**.

"Se il numero atteso di misure improbabili almeno quanto la misura sospetta è minore di 0.5, allora la misura sospetta può essere rigettata"

NB: **le $\hat{\sigma}$ sono le deviazioni standard dei campioni non delle medie**

Esercizio 6

Consideriamo sei misure di una grandezza x

2.7   2.5   2.8   1.5   2.6   2.9

La misura di 1.5 è da rigettare ?

Esercizio 6

$$P(t > k) = \int_{k}^{\infty} P(t)dt$$

TABLE of CRITICAL VALUES for STUDENT'S *t* DISTRIBUTIONS

Column headings denote probabilities (α) ***above*** tabulated values.

d.f.	0.40	0.25	0.10	0.05	0.04	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	0.325	1.000	3.078	6.314	7.916	12.706	15.894	31.821	63.656	127.321	318.289	636.578
2	0.289	0.816	1.886	2.920	3.320	4.303	4.849	6.965	9.925	14.089	22.328	31.600
3	0.277	0.765	1.638	2.353	2.605	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.333	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.191	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.894	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.104	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.046	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.004	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	1.973	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	1.948	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	1.928	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	1.912	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	1.899	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	1.887	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	1.878	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	1.869	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	1.862	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	1.855	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	1.850	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	1.844	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	1.840	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	1.835	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792

Esercizio 6

Table C.4. Values of the integral $\Phi^*(z) = \int_0^z \phi(z')\,dz'$.

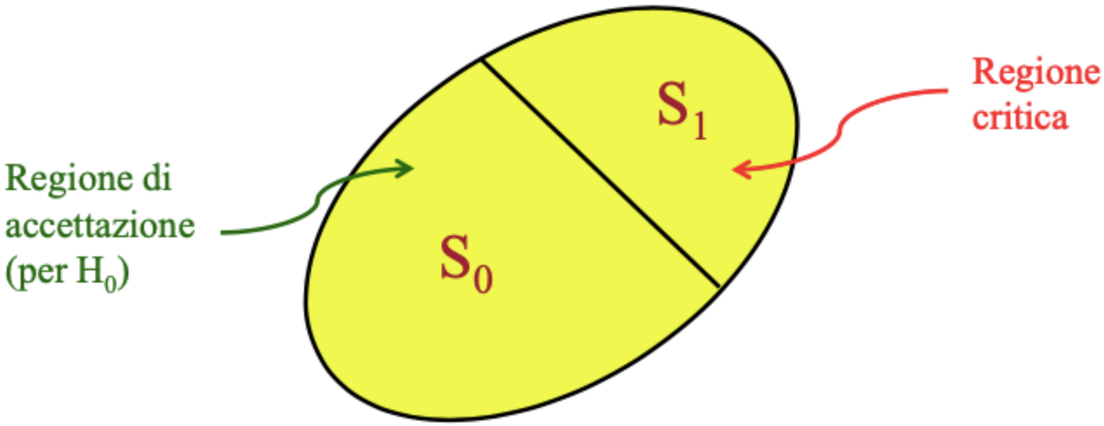
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.9015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	$\boxed{0.4750}$	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4776	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987									
3.5	0.4998									
4.0	0.4999									

Test su Ipotesi Nulla

Un caso semplice di test è quello in cui si valuta la cosiddetta **ipotesi nulla** H_0 rispetto alla **ipotesi alternativa** H_1.

Consideriamo lo spazio dei campioni S; $\{x_1, x_2, \ldots x_N\} \in S$

S_0 è l'insieme di tutti i campioni sperimentali compatibili con H_0



Test su Ipotesi Nulla (II)

Prendendo una decisione, si possono commettere due tipi di errore:

Decisione	**H_0 vera**	**H_0 falsa**
H_0 accettata	corretto	**Errore tipo II** **(Probabilità β)**
H_0 rigettata	**Errore tipo I** **(Probabilità α)**	corretto

α = rischio di commettere un errore di tipo I

β = rischio di commettere un errore di tipo II

Test su Ipotesi Nulla (III)

Di solito, si decide H_0 in modo tale che **le conseguenze di commettere un errore di tipo I siano considerate più "gravi" delle conseguenze di errori di tipo II**, e si cerca di rendere **"piccolo"** α.

Ad esempio, si consideri un esperimento nel quale si studia una nuova sostanza (un farmaco, un fertilizzante, un detersivo) prima di metterla in commercio:

H_0 = la sostanza è dannosa per la salute (ha effetti collaterali seri)
H_1= la sostanza è innocua (non ha effetti collaterali importanti)

Errore di tipo I = mettiamo in commercio una sostanza dannosa.
Errore di tipo II = non mettiamo in commercio una sostanza innocua.

Test su Ipotesi Nulla (IV)

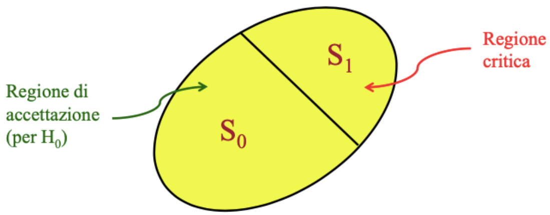
In un esperimento nel quale si cerca l'esistenza di una nuova particella creata, ad esempio, in collisioni di alta energia:

H_0 = nei dati è presente solo "fondo" (cioè particelle conosciute)
H_1 = nei dati è presente una nuova particella, in aggiunta al fondo.

Errore di tipo I = pubblichiamo la scoperta di qualcosa che, in realtà, non esiste.
Errore di tipo II = non ci accorgiamo della presenza di nuova fisica.

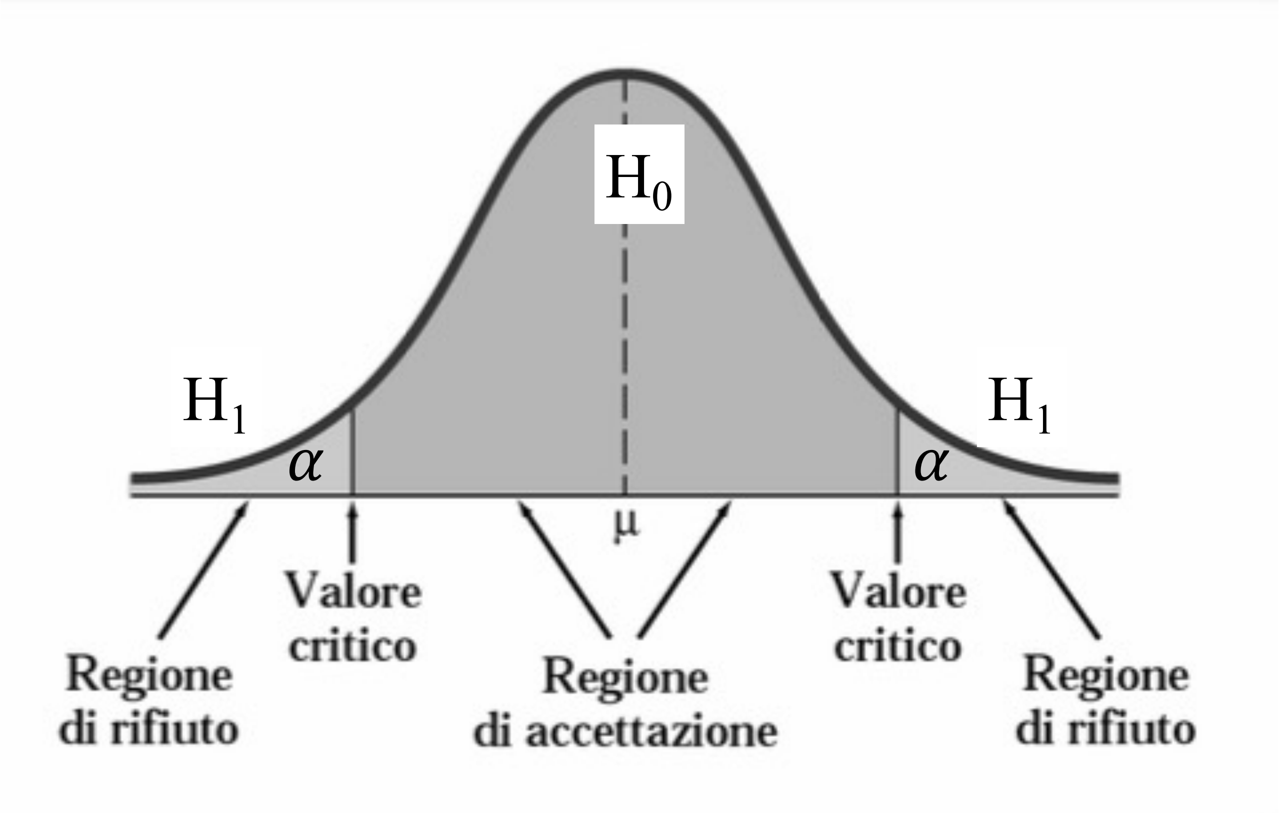
Test su Ipotesi Nulla (V)

Decisione	H_0 vera	H_0 falsa
H_0 accettata	corretto	**Errore tipo II (Probabilità β)**
H_0 rigettata	**Errore tipo I (Probabilità α)**	corretto



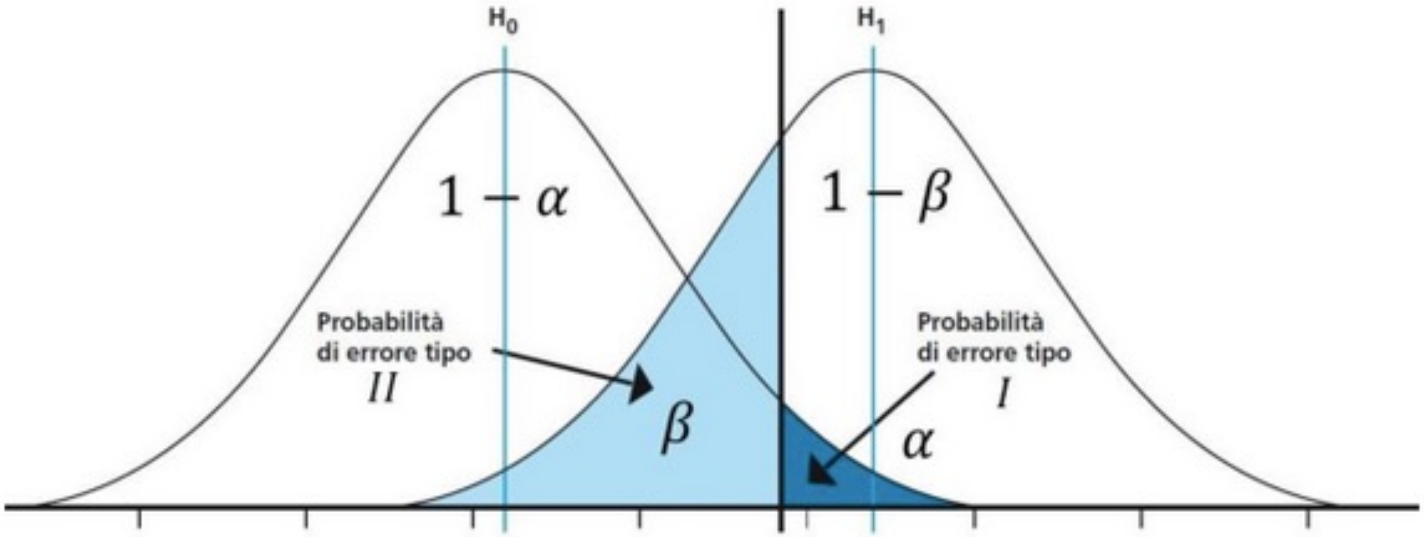
α = P(campione $\in S_1 \mid H_0$) = rischio di "**falso negativo**"
β = P(campione $\in S_0 \mid H_1$) = rischio di "**falso positivo**"
$(1 - \alpha)$ = livello di **significatività** del test
$(1 - \beta)$ = **potenza** del test
Un test è tanto più potente quanto più consente di rigettare ipotesi false.

Test su Ipotesi Nulla (VI)



Fissare l’errore di tipo I (α) equivale a fissare la regione di accettazione, e viceversa.

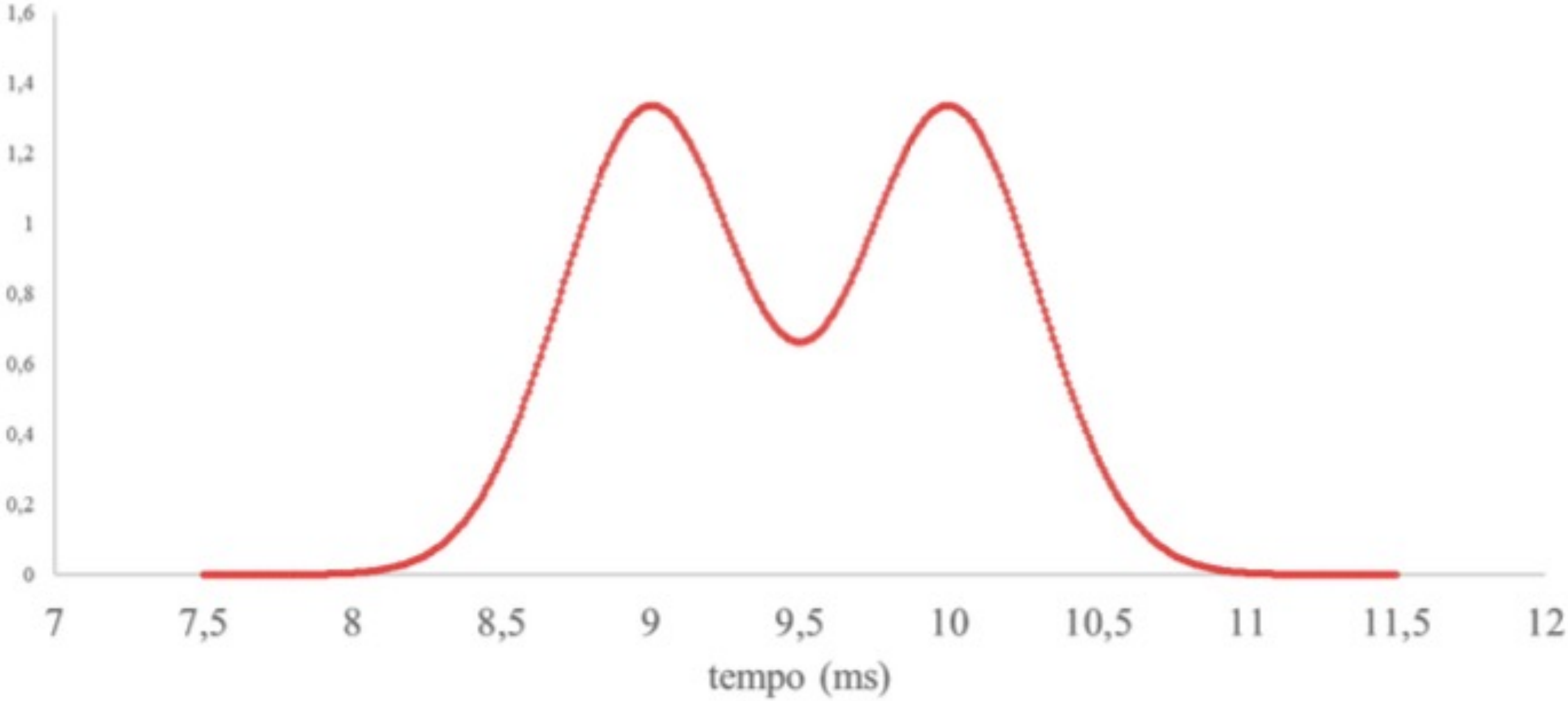
Errori Tipo I e II



Errore di tipo I: rifiutare H_0 quando H_0 è vera. Prob. = α.
Errore tipo II: non rifiutare H_0 quando H_0 è falsa. Prob. = β

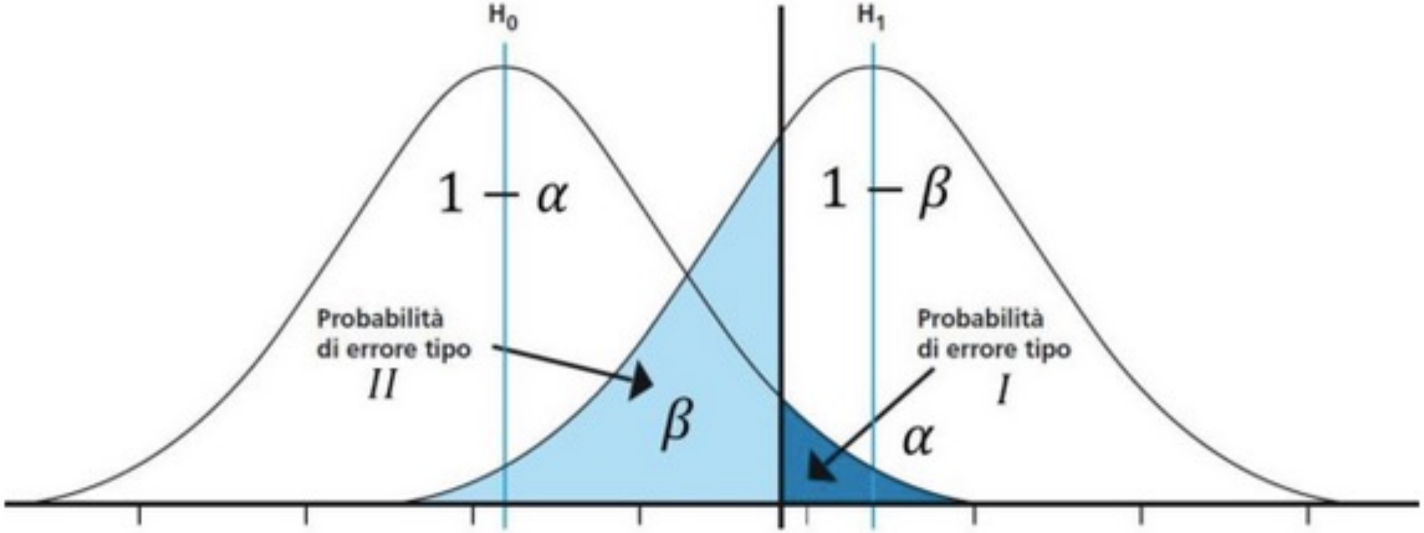
Esercizio 7

Un dispositivo di misura a “tempo di volo” ha lo scopo di distinguere particelle di massa diversa m_1 ed m_2 e stessa quantità di moto in base al diverso tempo di percorrenza di una distanza fissa.
I tempi di percorrenza medi sono di 9 ms e 10 ms rispettivamente per particelle 1 e 2.
La deviazione standard della distribuzione gaussiana dei tempi di volo è 0.3 ms per entrambi i tipi di particelle.



Si stabilisce, nel dominio dei tempi di volo, una "regione di accettazione" per l'ipotesi H_0 = particella di tipo 1 (H_1 = particella di tipo 2), imponendo che $\alpha = 0.01$, cioè una significatività del 99%. Quanto vale β ?

Esercizio 7



Errore di tipo I: rifiutare H_0 quando H_0 è vera. Prob. = α.
Errore tipo II: non rifiutare H_0 quando H_0 è falsa. Prob. = β

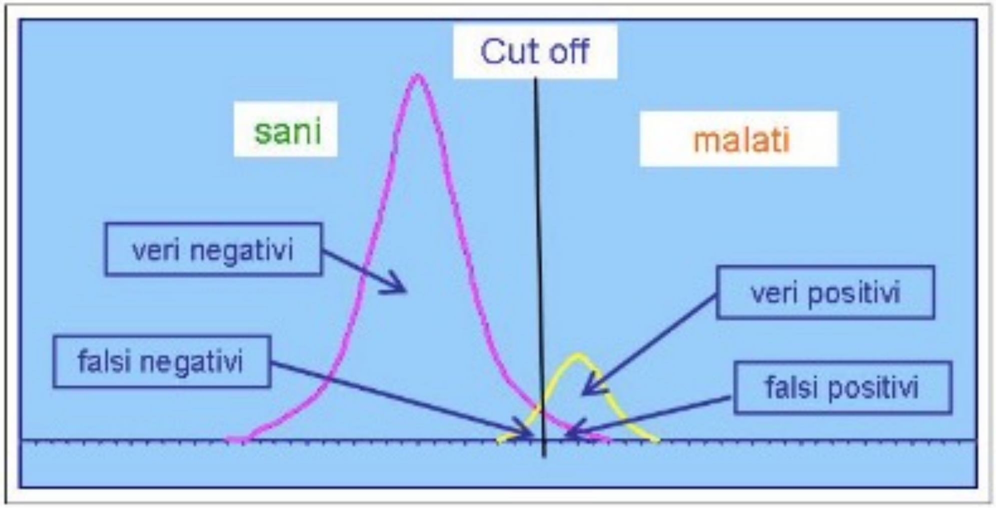
Falsi Positivi/ Falsi Negativi

In una situazione ideale ci si aspetta che un test sia in grado di discriminare perfettamente due popolazioni (sani e malati) non sovrapponibili (mutuamente esclusive), come rappresentato nella figura sotto, dove il 'cut off' rappresenta il valore soglia del test.

Falsi Positivi/ Falsi Negativi (II)

In realtà quello che solitamente avviene è che le due popolazioni si sovrappongono in parte, ed il test necessariamente identificherà come positivi alcuni soggetti non malati (Falsi Positivi FP) e come negativi alcuni soggetti invece malati (Falsi Negativi FN).

LA SITUAZIONE REALE



Falsi Positivi/ Falsi Negativi (III)

- Come abbiamo già detto non esiste un test che distingua nettamente le due popolazioni dei sani e malati.

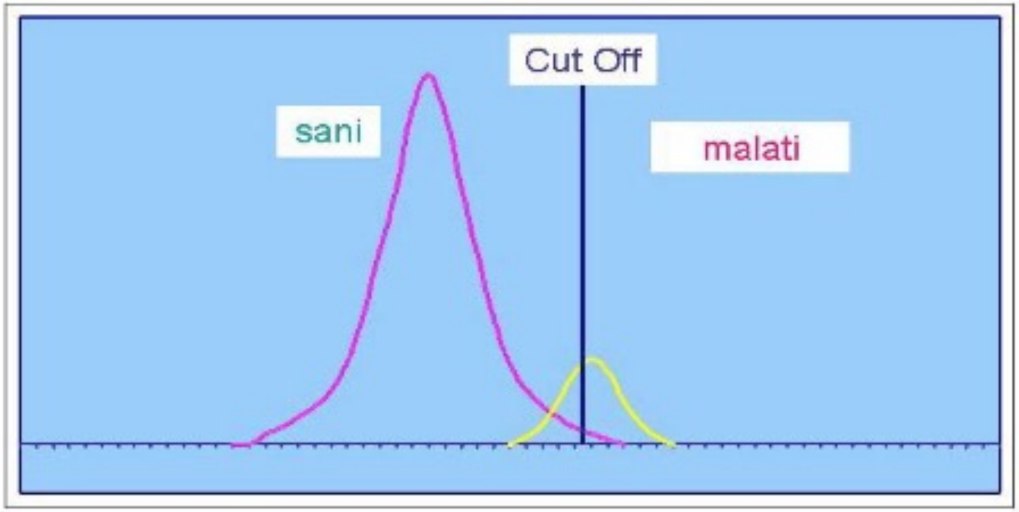
- E’ chiaro che se la soglia per definire positivo o negativo un soggetto viene spostata a destra o sinistra (cioè innalzata o abbassata) avrò un rischio maggiore o minore di FP e di FN.

- Questo influenzerà la significatività e la potenza del test stesso (sensibilità e la specificità del test).

Falsi Positivi/ Falsi Negativi (IV)

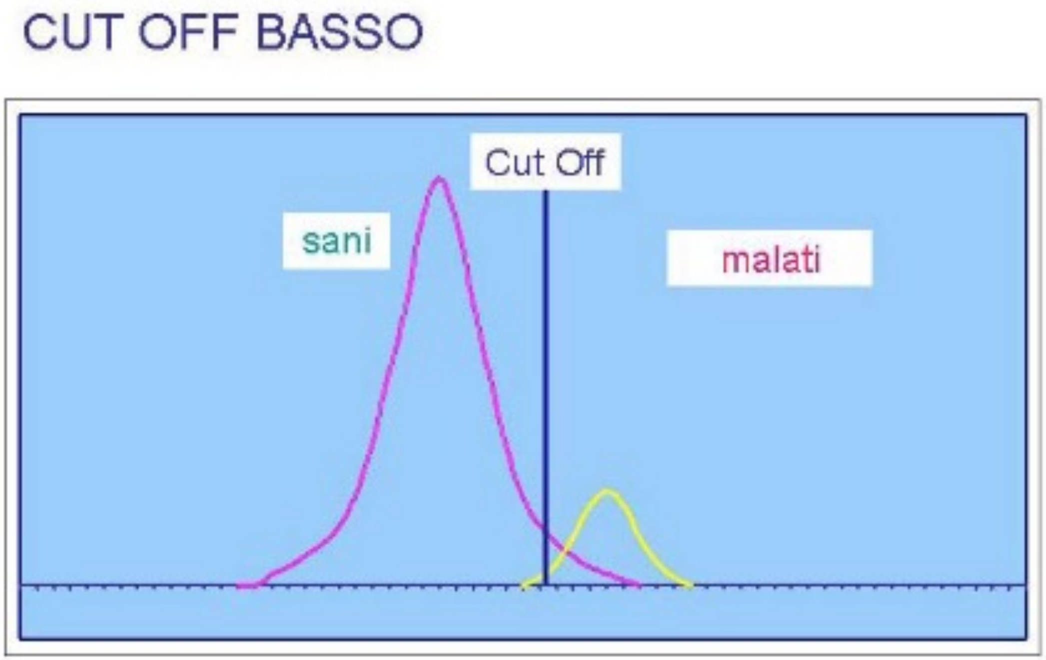
Un cut off elevato permetterà di identificare correttamente la maggior parte dei sani, conferendo al test un'elevata specificità (quindi pochi FP), ma sottostimerà la proporzione dei malati, conferendo al test una bassa sensibilità (quindi molti FN).

CUT OFF ELEVATO



Falsi Positivi/ Falsi Negativi (V)

Un cut off basso al contrario permetterà di identificare correttamente la maggior parte dei malati, conferendo al test un'elevata sensibilità (pochi FN), ma sottostimerà la proporzione dei sani, conferendo al test una bassa specificità (molti FP).



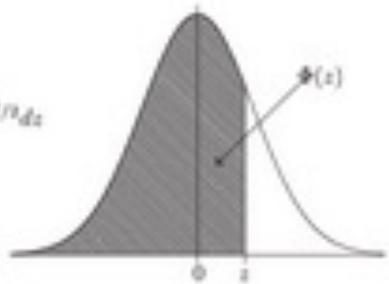
Esercizio 7

Table C.4. Values of the integral $\Phi^*(z) = \int_0^z \phi(z')\,dz'$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.9015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4776	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987									
3.5	0.4998									
4.0	0.4999									

Esercizio 7

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	$\boxed{0.1587}$	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Esercizio 8

Una industria produce fili metallici di lunghezza "uguale".
Due laboratori misurano le lunghezze di due diversi campioni di fili.
I risultati sono:

Campione 1) $n_1 = 64$ media $l_1 = 10.42$ cm dev. st. del campione $s_1 = 0.16$ cm
Campione 2) $n_2 = 121$ media $l_2 = 10.38$ cm dev. st. del campione $s_2 = 0.14$ cm

Verificare, con un test di ipotesi, la compatibilità delle due medie poi calcolare la media pesata delle due misure, e il suo errore.

Esercizio 8

Table C.4. Values of the integral $\Phi^*(z) = \int_0^z \phi(z')\,dz'$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	$\boxed{0.4545}$
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4776	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987									
3.5	0.4998									
4.0	0.4999									

Esercizio 9

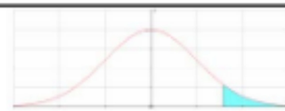
Una compagnia di assicurazioni vuole valutare l'entità media delle richieste di risarcimento danni per incidenti automobilistici. Un'indagine, svolta su un campione di 25 richieste, fornisce i seguenti risultati (x rappresenta la variabile "richiesta di risarcimento in migliaia di euro"):

$$\sum_{i=1}^{25} x_i = 112.12 \ \text{k€} \qquad \sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 629.89 \ (\text{k€})^2$$

Ipotizzando che x abbia distribuzione gaussiana, calcolare l'intervallo di confidenza al 95% per la richiesta media di risarcimento, utilizzando la statistica di Student.

Esercizio 9

Tavole t di Student : P(T>t_{α})



GL	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
infinity	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.091	3.291

Esercizio 10

Da informazioni derivanti da precedenti esperimenti, si sa che la deviazione standard campionaria di misure ripetute di una certa grandezza x è $s_x \approx 6$. Quanto numeroso (al minimo) deve essere un nuovo campione di misure di quella grandezza affinché la semiampiezza dell'intervallo di confidenza al 90% per il valore medio di x sia inferiore a 4 ?

Esercizio 10

TABLE of CRITICAL VALUES for STUDENT'S *t* DISTRIBUTIONS

Column headings denote probabilities (α) ***above*** tabulated values.

d.f.	0.40	0.25	0.10	0.05	0.04	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	0.325	1.000	3.078	6.314	7.916	12.706	15.894	31.821	63.656	127.321	318.289	636.578
2	0.289	0.816	1.886	2.920	3.320	4.303	4.849	6.965	9.925	14.089	22.328	31.600
3	0.277	0.765	1.638	2.353	2.605	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.333	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.191	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.894	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.104	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.046	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.004	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	1.973	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	1.948	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	1.928	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	1.912	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	1.899	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	1.887	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	1.878	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	1.869	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	1.862	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	1.855	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	1.850	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	1.844	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	1.840	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	1.835	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792

Esercizio 11

Un campione di 18 misure della costante di Boltzmann ha media $\bar{x} = 1.410 \cdot 10^{-23}$ J/K e deviazione standard del campione $s_x = 6.04 \cdot 10^{-25}$ J/K.

Una delle 18 misure vale $x_S = 1.544 \cdot 10^{-23}$ J/K; sarebbe da rigettare, in base al criterio di Chauvenet ?

Il campione è compatibile con il valore $k_B = 1.380649 \cdot 10^{-23}$ J/K della costante di Boltzmann ?

Esercizio 11

$$P(t > k) = \int_k^{\infty} P(t)dt$$

TABLE of CRITICAL VALUES for STUDENT'S *t* DISTRIBUTIONS

Column headings denote probabilities (α) ***above*** tabulated values.

d.f.	0.40	0.25	0.10	0.05	0.04	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	0.325	1.000	3.078	6.314	7.916	12.706	15.894	31.821	63.656	127.321	318.289	636.578
2	0.289	0.816	1.886	2.920	3.320	4.303	4.849	6.965	9.925	14.089	22.328	31.600
3	0.277	0.765	1.638	2.353	2.605	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.333	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.191	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.894	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.104	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.046	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.004	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	1.973	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	1.948	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	1.928	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	1.912	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	1.899	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	1.887	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	1.878	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	1.869	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	1.862	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	1.855	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	1.850	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	1.844	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	1.840	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	1.835	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792

Esercizio 11

$$P(t > k) = \int_k^{\infty} P(t)dt$$

TABLE of CRITICAL VALUES for STUDENT'S *t* DISTRIBUTIONS

Column headings denote probabilities (α) ***above*** tabulated values.

d.f.	0.40	0.25	0.10	0.05	0.04	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	0.325	1.000	3.078	6.314	7.916	12.706	15.894	31.821	63.656	127.321	318.289	636.578
2	0.289	0.816	1.886	2.920	3.320	4.303	4.849	6.965	9.925	14.089	22.328	31.600
3	0.277	0.765	1.638	2.353	2.605	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.333	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.191	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.894	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.104	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.046	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.004	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	1.973	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	1.948	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	1.928	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	1.912	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	1.899	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	1.887	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	1.878	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	1.869	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	1.862	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	1.855	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	1.850	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	1.844	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	1.840	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	1.835	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792

Esercizio 12

La tabella riporta le misure di resistenza alla pressione, in MPa, di sette travi uguali di calcestruzzo.

38.49	**38.39**	**38.55**	**38.32**	**38.75**	**38.51**	**38.61**

La misura di 38.75 MPa è da scartare, in base al criterio di Chauvenet e la statistica di Student ?
A quale livello di confidenza il valore medio delle sette misure è compatibile con il valore di 38.4 MPa, riportato su un manuale ?

Esercizio 12

$$P(t > k) = \int_k^{\infty} P(t)dt$$

TABLE of CRITICAL VALUES for STUDENT'S *t* DISTRIBUTIONS

Column headings denote probabilities (α) ***above*** tabulated values.

d.f.	0.40	0.25	0.10	0.05	0.04	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	0.325	1.000	3.078	6.314	7.916	12.706	15.894	31.821	63.656	127.321	318.289	636.578
2	0.289	0.816	1.886	2.920	3.320	4.303	4.849	6.965	9.925	14.089	22.328	31.600
3	0.277	0.765	1.638	2.353	2.605	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.333	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.191	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.894	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.104	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.046	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.004	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	1.973	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	1.948	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	1.928	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	1.912	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	1.899	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	1.887	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	1.878	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	1.869	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	1.862	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	1.855	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	1.850	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	1.844	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	1.840	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	1.835	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792

Esercizio 12

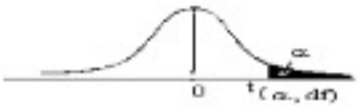
$k \rightarrow$	1	1.5	2	2.5	3
ν= 1	50.00	62.57	70.48	75.78	79.52
ν= 2	57.74	72.76	81.65	87.04	90.45
ν= 3	60.90	76.94	86.07	91.23	94.23
ν= 4	62.61	79.20	88.39	93.32	96.01
ν= 5	63.68	80.61	89.81	94.55	96.99
ν= 6	64.41	81.57	90.76	95.35	97.60
ν= 7	64.94	82.27	91.44	95.90	98.01
ν= 8	65.34	82.80	91.95	96.31	98.29
ν= 9	65.66	83.21	92.34	96.61	98.50
ν=10	65.91	83.55	92.66	96.86	98.67
ν=15	66.68	84.56	93.61	97.55	99.10
ν=20	67.07	85.08	94.07	97.88	99.29
ν=30	67.47	85.59	94.54	98.19	99.46
ν=40	67.67	85.85	94.77	98.34	99.54
ν=50	67.79	86.01	94.91	98.43	99.58
ν=100	68.03	86.32	95.18	98.60	99.66
$\nu=\infty$	68.27	86.64	95.45	98.76	99.73

BACK UP SLIDES

Valori critici della distribuzione t di Student per un <u>test bilaterale</u>

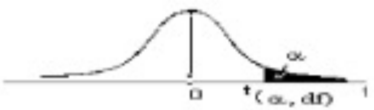
Gradi Di Libertà	α								
	0.500	0.400	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
1	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	25.452	63.657	127.31	636.62
2	.816	1.061	1.886	2.920	4.303	6.205	9.925	14.089	31.598
3	.765	0.978	1.638	2.353	3.182	4.176	5.841	7.453	12.941
4	.741	.941	1.533	2.132	2.776	3.495	4.604	5.598	8.610
5	.727	.920	1.476	2.015	2.571	3.163	4.032	4.773	6.859
6	.718	.906	1.440	1.943	2.447	2.969	3.707	4.317	5.959
7	.711	.896	1.415	1.895	2.365	2.841	3.499	4.029	5.405
8	.706	.889	1.397	1.860	2.306	2.752	3.355	3.832	5.041
9	.703	.883	1.383	1.833	2.262	2.685	3.250	3.690	4.781
10	.700	.879	1.372	1.812	2.228	2.634	3.169	3.581	4.587
11	.697	.876	1.363	1.796	2.201	2.593	3.106	3.497	4.437
12	.695	.873	1.356	1.782	2.179	2.560	3.055	3.428	4.318
13	.694	.870	1.350	1.771	2.160	2.533	3.012	3.372	4.221
14	.692	.868	1.345	1.761	2.145	2.510	2.977	3.326	4.140
15	.691	.866	1.341	1.753	2.131	2.490	2.947	3.286	4.073
16	.690	.865	1.337	1.746	2.120	2.473	2.921	3.252	4.015
17	.689	.863	1.333	1.740	2.110	2.458	2.898	3.222	3.965
18	.688	.862	.330	1.734	2.101	2.445	2.878	3.197	3.922
19	.688	.861	1.328	1.729	2.093	2.433	2.861	3.174	3.883
20	.687	.860	1.325	1.725	2.086	2.423	2.845	3.153	3.850
21	.686	.859	1.323	1.721	2.080	2.414	2.831	3.135	3.819
22	.686	.858	1.321	1.717	2.074	2.406	2.819	3.119	3.792
23	.685	.858	1.319	1.714	2.069	2.398	2.807	3.104	3.767
24	.685	.857	1.318	1.711	2.064	2.391	2.797	3.090	3.745
25	.684	.856	1.316	1.708	2.060	2.385	2.787	3.078	3.725
26	.684	.856	1.315	1.706	2.056	2.379	2.779	3.067	3.707
27	.684	.855	1.314	1.703	2.052	2.373	2.771	3.056	3.690
28	.683	.855	1.313	1.701	2.048	2.368	2.763	3.047	3.674
29	.683	.854	1.311	1.699	2.045	2.364	2.756	3.038	3.659
30	.683	.854	1.310	1.697	2.042	2.360	2.750.	5.030	3.646
35	.682	.852	1.306	1.690	2.030	2.342	2.724	2.996	3.591
40	.681	.851	1.303	1.684	2.021	2.329	2.704	2.971	3.551
45	.680	.850	1.301	1.680	2.014	2.319	2.690	2.952	3.520
50	.680	.849	1.299	1.676	2.008	2.310	2.678	2.937	3.496
55	.679	.849	1.297	1.673	2.004	2.304	2.669	2.925	3.476
60	.679	.848	1.296	1.671	2.000	2.299	2.660	2.915	3.460
70	.678	.847	1.294	1.667	1.994	2.290	2.648	2.899	3.435
80	.678	.847	1.293	1.665	1.989	2.284	2.638	2.887	3.416
90	.678	.846	1.291	1.662	1.986	2.279	2.631	2.878	3.402
100	.677	.846	1.290	1.661	1.982	2.276	2.625	2.871	3.390
120	.677	.845	1.289	1.658	1.980	2.270	2.617	2.860	3.373
∞	.6745	.8416	1.2816	1.6448	1.9600	2.2414	2.5758	2.8070	3.2905

Valori critici della distribuzione t di Student per un test unilaterale (prima parte)



Gradi Di Libertà	Aree della coda superiore					
	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8207	63.6574
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0322
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.6884	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.6876	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.6864	1.3232	1.7207	2.0796	2.5177	2.8314
22	0.6858	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.6853	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.6848	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.6840	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.6837	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.6834	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.6830	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
31	0.6825	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32	0.6822	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33	0.6820	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34	0.6818	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284
35	0.6816	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
36	0.6814	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37	0.6812	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38	0.6810	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39	0.6808	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
40	0.6807	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
41	0.6805	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
42	0.6804	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981
43	0.6802	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951
44	0.6801	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923
45	0.6800	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896
46	0.6799	1.3002	1.6787	2.0129	2.4102	2.6870
47	0.6797	1.2998	1.6779	2.0117	2.4083	2.6846
48	0.6796	1.2994	1.6772	2.0106	2.4066	2.6822
49	0.6795	1.2991	1.6766	2.0096	2.4049	2.6800
50	0.6794	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
51	0.6793	1.2984	1.6753	2.0076	2.4017	2.6757
52	0.6792	1.2980	1.6747	2.0066	2.4002	2.6737
53	0.6791	1.2977	1.6741	2.0057	2.3988	2.6718
54	0.6791	1.2974	1.6736	2.0049	2.3974	2.6700
55	0.6790	1.2971	1.6730	2.0040	2.3961	2.6682
56	0.6789	1.2969	1.6725	2.0032	2.3948	2.6665
57	0.6788	1.2966	1.6720	2.0025	2.3936	2.6649
58	0.6787	1.2963	1.6716	2.0017	2.3924	2.6633
59	0.6787	1.2961	1.6711	2.0010	2.3912	2.6618
60	0.6786	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603

Valori critici della distribuzione t di Student per un <u>test unilaterale</u> (seconda parte)



Gradi di Libertà	Aree della coda superiore					
	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
61	0.6785	1.2956	1.6702	1.9996	2.3890	2.6589
62	0.6785	1.2954	1.6698	1.9990	2.3880	2.6575
63	0.6784	1.2951	1.6694	1.9983	2.3870	2.6561
64	0.6783	1.2949	1.6690	1.9977	2.3860	2.6549
65	0.6783	1.2947	1.6686	1.9971	2.3851	2.6536
66	0.6782	1.29.45	1.6683	1.9966	2.3842	2.6524
67	0.6782	1.2943	1.6679	1.9960	2.3833	2.6512
68	0.6781	1.2941	1.6676	1.9955	2.3824	2.6501
69	0.6781	1.2939	1.6672	1.9949	2.3816	2.6490
70	0.6780	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479
71	0.6780	1.2936	1.6666	1.9939	2.3800	2.6469
72	0.6779	1.2934	1.6663	1.9935	2.3793	2.6459
73	0.6779	1.2933	1.6660	1.9930	2.3785	2.6449
74	0.6778	1.4931	1.6657	1.9925	2.3778	2.6439
75	0.6778	1.2929	1.6654	1.9921	2.3771	2.6430
76	0.6777	1.2928	1.6652	1.9917	2.3764	2.6421
77	0.6777	1.2926	1.6649	1.9913	2.3758	2.6412
78	0.6776	1.2925	1.6646	1.9908	2.3751	2.6403
79	0.6776	1.2924	1.6644	1.9905	2.3745	2.6395
80	0.6776	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387
81	0.6775	1.2921	1.6639	1.9897	2.3733	2.6379
82	0.6775	1.2920	1.6636	1.9893	2.3727	2.6371
83	0.6775	1.2918	1.6634	1.9890	2.3721	2.6364
84	0.6774	1.2917	1.6632	1.9886	2.3716	2.6356
85	0.6774	1.2916	1.6630	1.9883	2.3710	2.6349
86	0.6774	1.2915	1.6628	1.9879	2.3705	2.6342
87	0.6773	1.2914	1.6626	1.9876	2.3700	2.6335
88	0.6773	1.2912	1.6624	1.9873	2.3695	2.6329
89	0.6773	1.2911	1.6622	1.9870	2.3690	2.6322
90	0.6772	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316
91	0.6772	1,2909	1.6618	1.9864	2.3680	2.6309
92	0.6772	1.2908	1.6616	1.9861	2.3676	2.6303
93	0.6771	1.2907	1.6614	1.9858	2.3671	2.6297
94	0.6771	1.2906	1.6612	1.9855	2.3667	2.6291
95	0.6771	1.2905	1.6611	1.9853	2.3662	2.6286
96	0.6771	1.2904	1.6609	1.9850	2.3658	2.6280
97	0.6770	1.2903	1.6607	1.9847	2.3654	2.6275
98	0.6770	1.2902	1.6606	1.9845	2.3650	2.6269
99	0.6770	1.2902	1.6604	1.9842	2.3646	2.6264
100	0.6770	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259
110	0.6767	1.2893	1.6588	1.9818	2.3607	2.6213
120	0.6765	1.2886	1.6577	1.9799	2.3578	2.6174
130	0.6764	1.2881	1.6567	1.9784	2.3554	2.6142
140	0.6762	1.2876	1.6558	1.9771	2.3533	2.6114
150	0.6761	1.2872	1.6551	1.9759	2.3515	2.6090
∞	0.6745	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758

Confronto dei valori critici della distribuzione t tra un <u>test bilaterale e un test unilaterale</u>

	Area nelle due code				
	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
	Area in una coda				
d.f.	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**	**0.0005**
1	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	2.353	3.182	4.541	5.841	12941
4	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	1.771	2.160	2.650	3.01	4.221
14	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	1.684	2.021	.423	2.704	3.551
60	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291