CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

CdS Fisica

Laboratorio Meccanica e Termodinamica

Probabilità

- La teoria delle **probabilità** studia le **proprietà dei fenomeni casuali** (o aleatori), cioè di quei fenomeni ripetibili che possono manifestarsi in più modalità.
- Tali fenomeni **non sono prevedibili singolarmente**, nel senso che, anche essendo noto il risultato di un esperimento, non si possono fare previsioni esatte su quale sarà il risultato successivo, ripetendo la prova.
- Ripetendo più volte la misura otteniamo un campione di dati: se esaminiamo la frequenza delle diverse uscite, possiamo affermare che **l'uscita di un certo risultato è più probabile o meno probabile di un altro**.

Esempio: consideriamo il fenomeno casuale "esito del lancio di due dadi". Se ripetiamo l'esperimento (cioè il lancio) più volte, ci rendiamo conto che l'uscita "2" è meno frequente, e quindi meno probabile, dell'uscita "7".

Probabilità (II)

- L'insieme delle possibili modalità con cui un fenomeno casuale si può verificare costituisce lo **spazio dei risultati**, indicato con **S**.
- Il numero di elementi di S può essere **finito o infinito**.

Ad esempio, nel caso del fenomeno casuale "esito del lancio di due dadi", lo spazio dei risultati è un insieme composto da 6x6 = 36 elementi, ognuno dei quali corrisponde all'uscita di ciascuno dei due dadi con una delle proprie sei facce rivolta verso l'alto.

- Un **evento casuale A** è l'unione di nessuna, una o più di queste possibili modalità, cioè è un **sottoinsieme di S**. Sono compresi anche il sottoinsieme vuoto ∅ (evento impossibile) ed S stesso (evento certo).

Probabilità (III)

S nel caso del lancio di due dadi

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Probabilità (III)

A = la somma dei due dadi è 9

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Probabilità (IV)

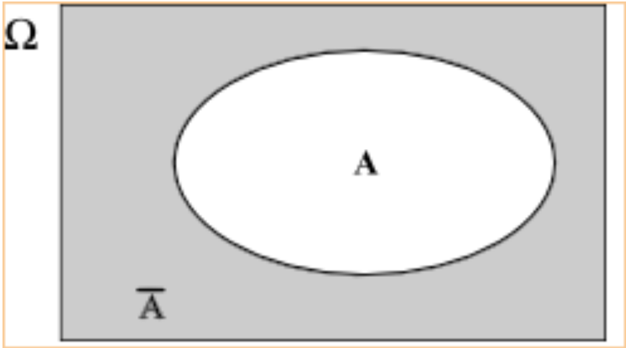
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

- L'evento casuale "9" comprende quattro eventi elementari
  (3+6, 4+5, 5+4, 6+3).
- L'evento casuale "13" è impossibile.
- L'evento casuale "2 $\leq$ somma dei due dadi $\leq$ 12" è certo.

L'insieme dei sottoinsiemi di S costituisce lo **spazio degli eventi**, indicato con **E**.

Probabilità (V)

- La mancata realizzazione dell'evento A costituisce **l'evento complementare ad A**, indicato con **Ā**.
- I due eventi A ed Ā **si escludono mutuamente** (cioè, non ci sono elementi di S che appartengano sia ad A che ad Ā).
- La loro **unione** (si indica con ∪) esaurisce l'insieme di tutti i possibili risultati di una prova (cioè, ogni elemento di S o appartiene ad A o appartiene ad Ā). E' cioè un evento certo: $S = A \cup \bar{A}$



Probabilità (VI)

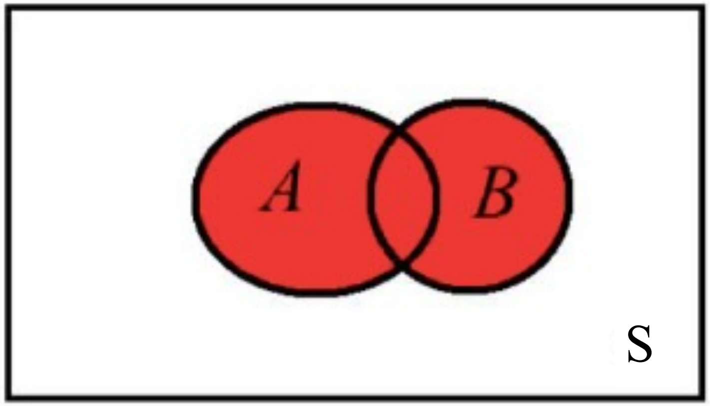
- **Un evento complesso può essere formato dalla combinazione di due (o più) eventi elementari.**

- Definiamo somma logica, o **unione**, di due eventi A e B l'evento che si verifica se è verificato almeno uno dei due eventi A e B. La somma logica degli eventi A e B viene rappresentata da **(A U B)**

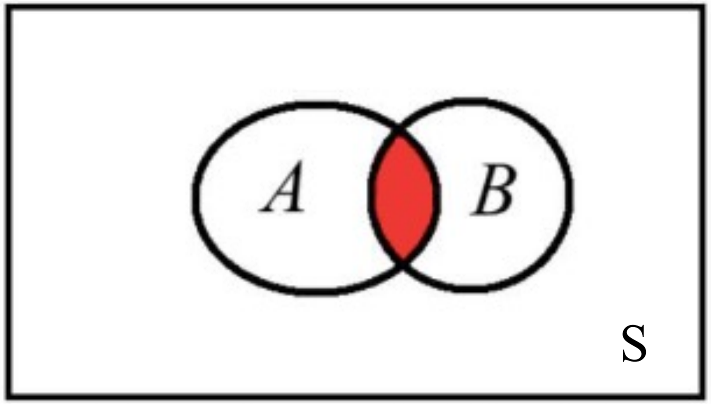
- Il prodotto logico, o **intersezione**, di due eventi A e B è definito come l'evento che si verifica se sono verificati sia A che B.
  Il prodotto logico di A e B viene rappresentato da **(A ∩ B)**

- La **differenza** di due eventi A e B, simboleggiata da **(A – B)**, è l'evento che si verifica quando A è verificato e B non è verificato.

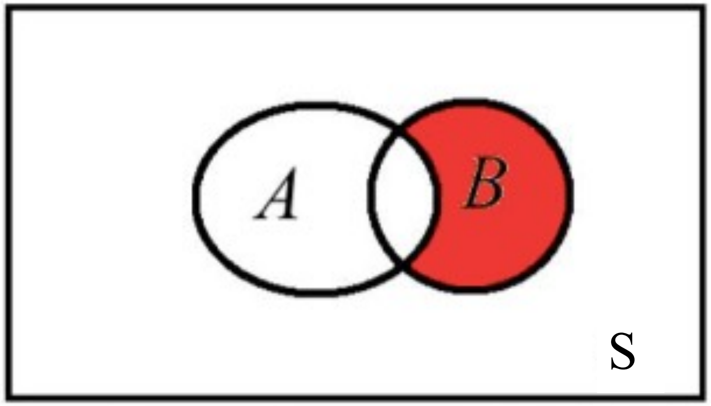
Probabilità: Schemi Grafici



Unione tra A e B $(A \cup B)$

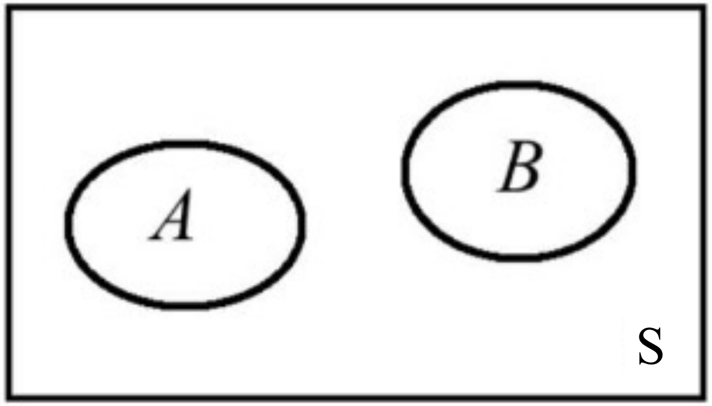


Intersezione tra A e B $(A \cap B)$



Intersezione tra B e negato di A $(B \cap A^c)$

Differenza fra eventi: B-A



Eventi disgiunti $A \cap B = \varnothing$

Probabilità: Tabelle di Verità

A	*B*	$\bar{A}$	$A \cup B$	$A \cap B$	*A-B*
V	V	F	V	V	F
F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V
F	F	V	F	F	F

L'unione è vera se è vero o A o B.
L'intersezione è vera se sono contemporaneamente veri entrambi.
La differenza è vera se A è vero e B è falso.

Esercizio 1

<u>Esempio</u>:

nel caso del fenomeno casuale “esito del lancio di due dadi”, se due eventi A e B sono definiti come:

A = numero pari

B = numero $\leq$ 6

allora:

$\bar{A}$ =

(A U B) =

(A ∩ B) =

(A – B) =

Definizione di Probabilità (I)

1) Definizione "**classica**" di probabilità

La probabilità di un evento casuale è il **rapporto tra il numero di casi favorevoli** (n) al presentarsi dell'evento stesso **ed il numero totale di casi possibili** (N), purché tutti questi casi possibili siano **ugualmente probabili**:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{n}{N}}$$

Questa definizione è insoddisfacente perché presuppone che si sia in grado di valutare la equiprobabilità delle varie modalità con cui può manifestarsi l'evento considerato.

Definizione di Probabilità (II)

2) Definizione "**empirica**"

La probabilità di un evento casuale A è **l'estensione del concetto di frequenza relativa su un numero grandissimo di prove**, cioè:

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} f(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{n}{N}$$

Questa definizione è insoddisfacente perché presuppone una convergenza della frequenza relativa f, al crescere di N, verso un valore ben definito.

La definizione empirica può essere utilizzata, ad esempio, per determinare la probabilità di conteggio di un rivelatore di radiazione ("efficienza del contatore")

Definizione di Probabilità (III)

3) Definizione "**assiomatica**"

Si definisce probabilità dell'evento casuale A un numero, **P(A)**, associato **univocamente** all'evento stesso, che soddisfi le tre seguenti proprietà:

1. $\mathbf{P(A) \geq 0}$ per ogni A;
2. $\mathbf{P(S) = 1}$;
3. $\mathbf{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots}$

per qualsiasi insieme di eventi $A_1, A_2, \ldots$, a due a due senza alcun elemento in comune (ossia tali che $\mathbf{A_i \cap A_j = \emptyset}$ per ogni $i \neq j$).

Questa definizione, pur logicamente consistente, non dice come assegnare dei valori alla probabilità.

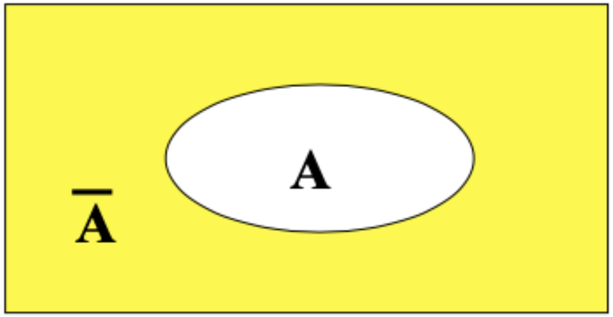
Probabilità (V)

Come si ricava, a partire dalla conoscenza delle probabilità di eventi elementari, la probabilità di eventi complessi ?

Se, su N prove, A si realizza n volte, la frequenza relativa di $\bar{A}$ è:

$$f(\bar{A}) = \frac{N-n}{N} = 1 - \frac{n}{N} = 1 - f(A)$$

da cui si ricava: **P($\bar{A}$) = 1 - P(A)**



Esempio

nel caso del fenomeno casuale "esito del lancio di due dadi" si ha, in base alla definizione classica:

$$P(2) = 1/36 \approx 0.028 \quad (2.8\ \%)$$

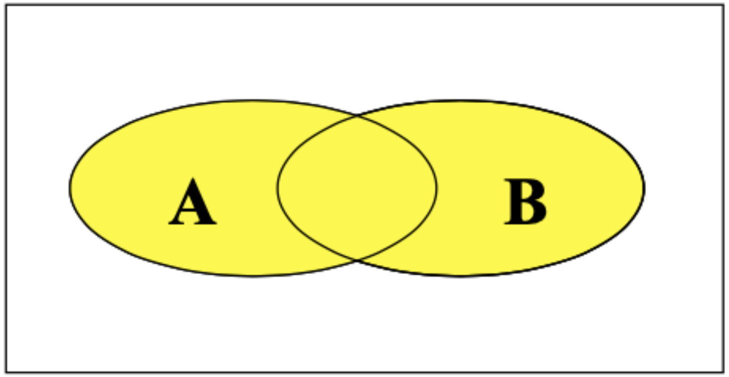
$$P(7) = 6/36 \approx 0.167 \quad (16.7\ \%)$$

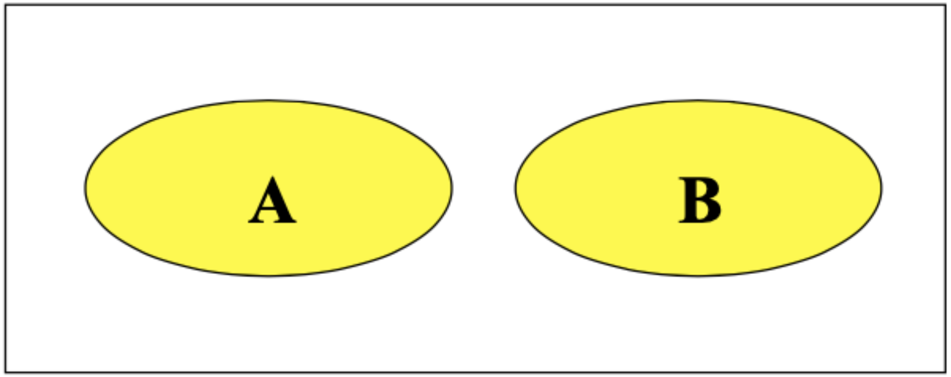
$$P(\overline{7}) = 1 - 6/36 \approx 0.833 \quad (83.3\ \%)$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Probabilità (VI)

- Dati due eventi A e B, con probabilità P(A) e P(B), risulta che: $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)}$
- P(A U B) rappresenta la probabilità che si verifichi l'evento A o l'evento B oppure entrambi.
- L'uguaglianza $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ vale se e solo se A e B sono **mutuamente escludentisi**, cioè se il verificarsi di un evento esclude il verificarsi dell'altro.



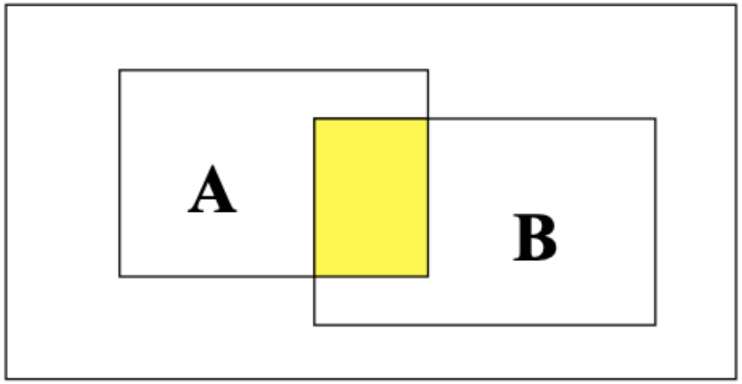


Probabilità (VII)

- Dati due eventi A e B, con probabilità P(A) e P(B), risulta che:

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)}$$

- $P(A \cap B)$ è la probabilità che si verifichino contemporaneamente sia l'evento A che l'evento B.
- **P(A | B)** "probabilità di A, dato B", rappresenta la **probabilità condizionale**, cioè la probabilità che si verifichi A se B è vero.
- P(B | A) "probabilità di B, dato A", cioè la probabilità che si verifichi B se A è vero.



Probabilità (VIII)

- Se A e B sono eventi tra loro **indipendenti** (il verificarsi dell'uno non modifica la probabilità dell'altro), allora

$$P(A|B) = P(A)$$

e quindi:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Il risultato può essere generalizzato al caso di N eventi A_i indipendenti, ottenendo:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_i\right) = \prod_{i=1}^{N} P(A_i)$$

Ad esempio, sono (in genere) indipendenti tra loro le **misure ripetute** di una grandezza che costituiscono un **campione sperimentale**.

Esercizio 2

nel caso del fenomeno casuale “esito del lancio di due dadi”, se:

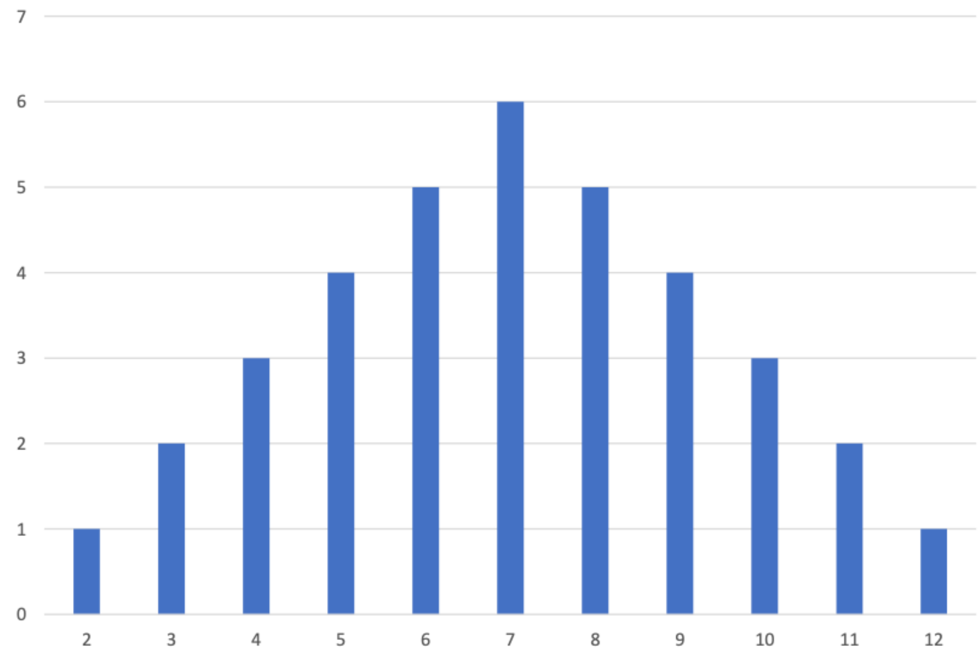
A = numero pari

B = numero ≤ 6

calcolare $P(A \cap B)$ e $P(A \cup B)$.

1	2
$P(A \mid B) =$	$P(B \mid A) =$
$P(B) =$	$P(A) =$
$P(A \cap B) =$	$P(A \cap B) =$

$P(A \cup B) =$



somma dei due dadi

Teorema di Bayes

Consideriamo un problema consistente nel determinare le probabilità di eventi H_i (i = 1, 2 ...... N) tali che:

1) siano mutuamente escludentesi: $P(H_i \cap H_j) = 0$ per ogni i,j
2) $P(H_1 \cup H_2 \ldots \cup H_N) = 1$

dato il verificarsi di un evento E.

Indicando con $P(H_i)$ la probabilità **a priori** (prima del verificarsi di E) della "ipotesi" i-esima H_i possiamo dire (formula di Bayes) che la probabilità a posteriori (cioè dopo che E si è verificato) di H_i è:

Probabilità che si verifichi H_i dato E

$$\boxed{P(H_i|E) = \frac{P(E|H_i)P(H_i)}{P(E)}}$$

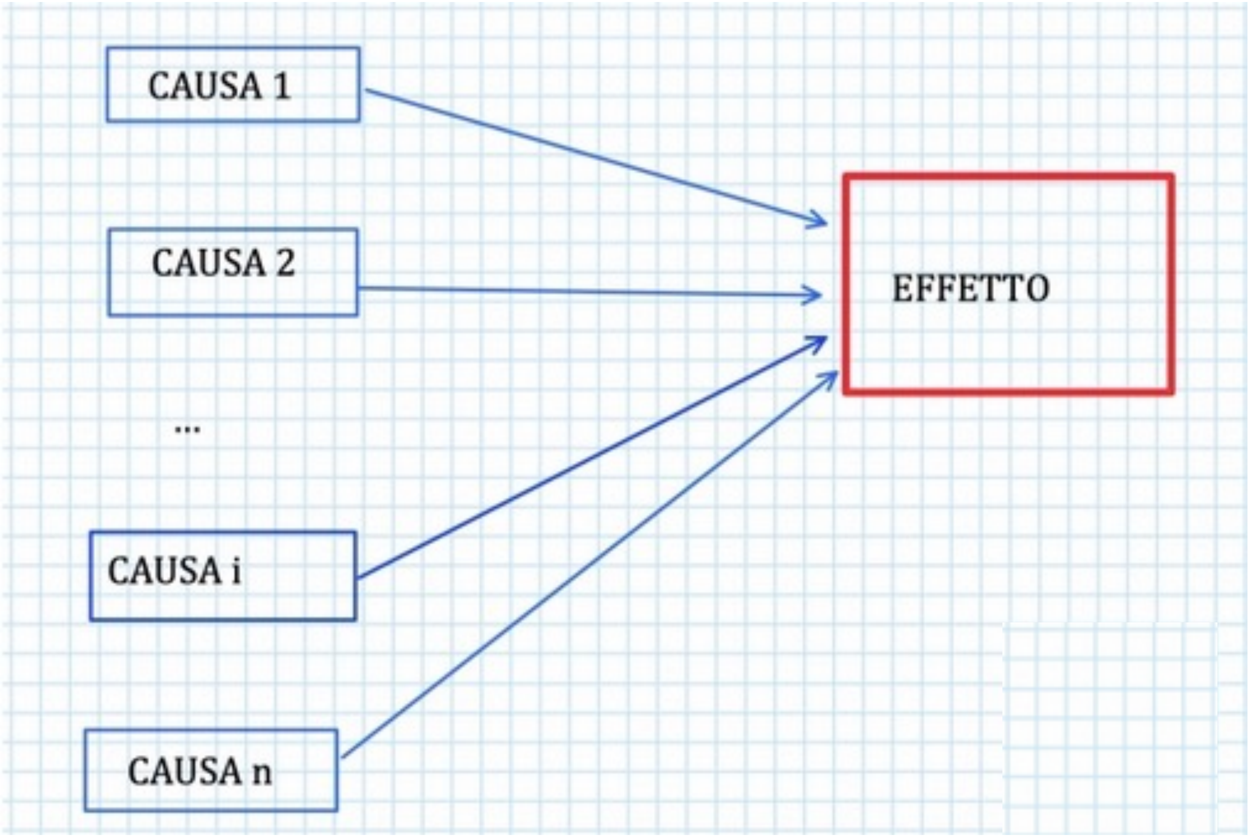
Probabilità a priori (prior) di H_i

Probabilità che si verifichi E dato H_i

Probabilità totale dell'evento

$$P(E) = \sum_{i=1}^{N} P(E|H_i)P(H_i)$$

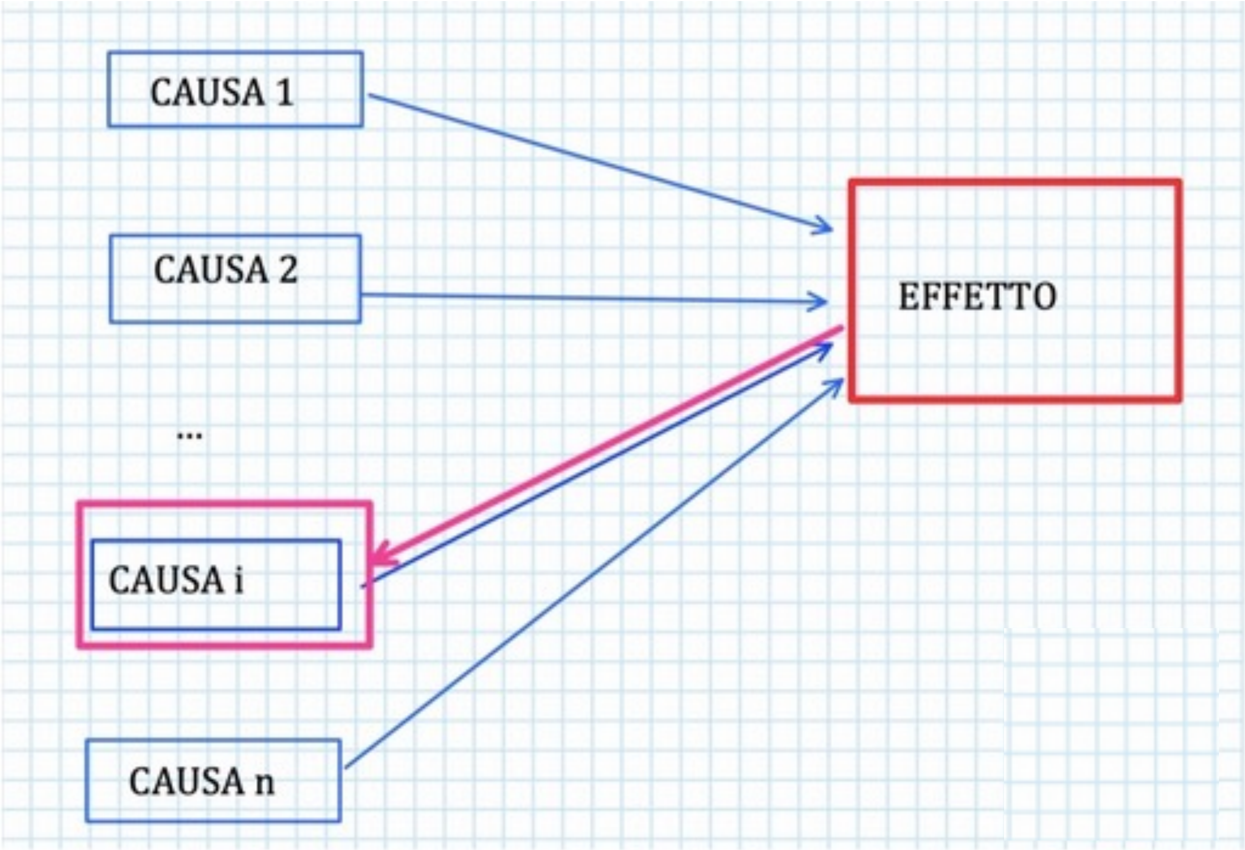
Teorema di Bayes: Graficamente



Quando vogliamo studiare un effetto stiliamo la **lista di tutte le possibili cause** che possono determinare questo effetto.

Per **effetto** intendiamo una conseguenza che si manifesta proprio in seguito alle possibili cause.

Teorema di Bayes: Graficamente (II)

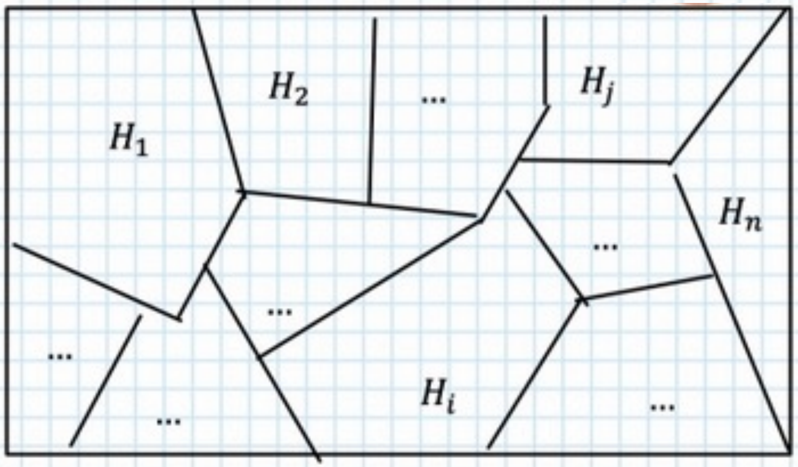


Il teorema di Bayes ci risponde alla seguente domanda:
Qual è la probabilità che un certo effetto sia imputabile ad una determinata causa?
Attenzione che in questa situazione sappiamo per certo che **l'effetto si è certamente manifestato**.

Esempio: Fumo (causa) e prendo il cancro ai polmoni (effetto). Ovviamente il fatto di fumare è sicuramente la più incisiva ma non l'unica possibile causa del tumore ai polmoni. Tale tumore può essere infatti causata da altri fattori come amianto, metalli pesanti…

Teorema di Bayes: Graficamente (III)

SPAZIO CAMPIONARIO (Ω)



$CAUSE = \{H_1; H_2; \ldots; H_i; \ldots; H_j; \ldots H_n\}$

POSSIBILI

$P(H_i) \neq 0 \; \forall i$

INCOMPATIBILI

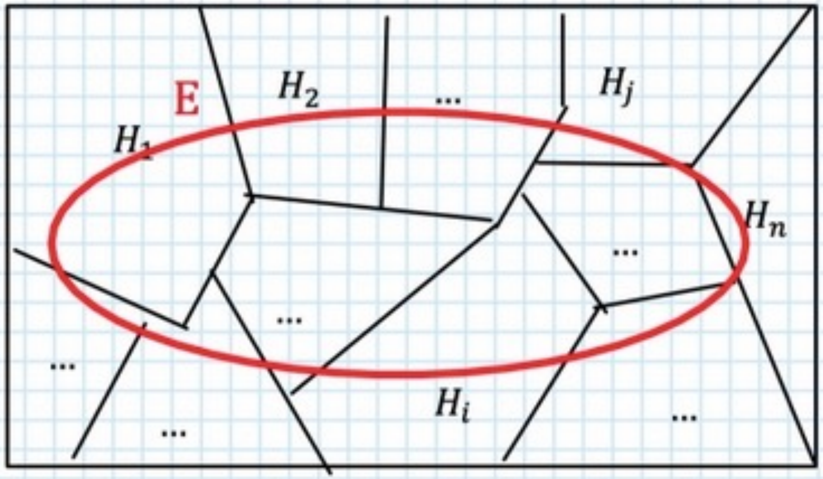
$H_i \cap H_j = \{\emptyset\} \; \forall i,j \; \rightarrow P(H_i \cap H_j) = 0$

COMPLEMENTARI

$H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n = \Omega \rightarrow \; \mathrm{P(H_1) + P(H_2) + \cdots + P(H_n) = 1}$

Teorema di Bayes: Graficamente (IV)

SPAZIO CAMPIONARIO (Ω) ED EVENTO EFFETTO (E)

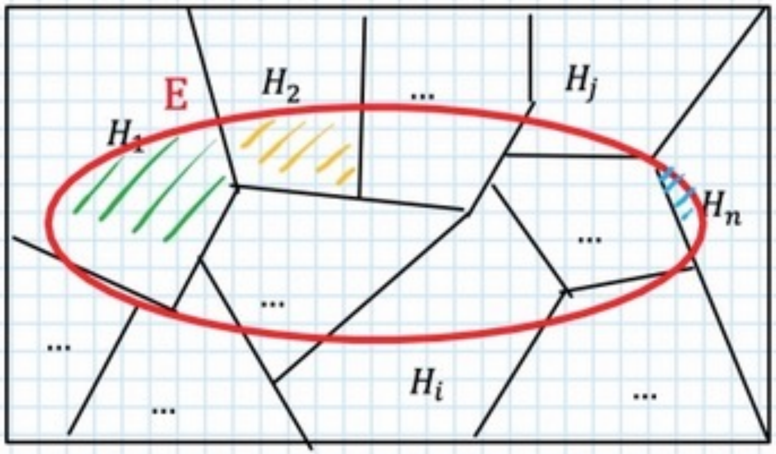


COMPATIBILITA' DELL'EFFETTO CON LE CAUSE

$$E \cap H_i \neq \{\emptyset\}\ \forall i \rightarrow\ P(E \cap H_i) \neq 0\ \forall i$$

Teorema di Bayes: Graficamente (V)

SPAZIO CAMPIONARIO (Ω) ED EVENTO EFFETTO (E)

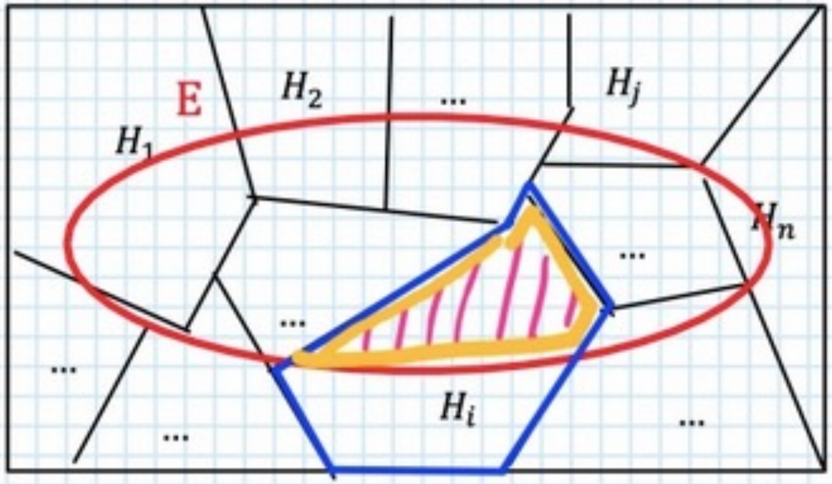


$$E = \boxed{(E \cap H_1)} \cup \boxed{(E \cap H_2)} \cap \cdots \cap \boxed{(E \cap H_n)}$$

$$P(E) = \boxed{P(E \cap H_1)} + \boxed{P(E \cap H_2)} + \cdots + \boxed{P(E \cap H_n)}$$

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E \cap H_i)$$

Teorema di Bayes: Graficamente (VI)

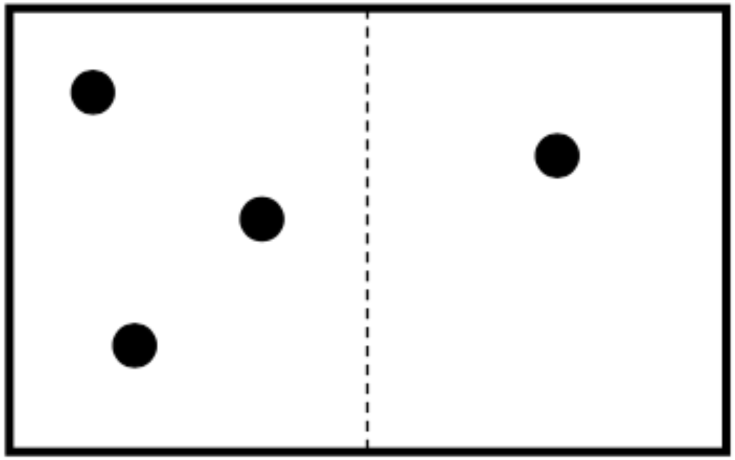


$$\boxed{P(E \cap H_i)} = \boxed{P(H_i)} * \boxed{P(E|H_i)}$$

$P(E|H_i)$
è la probabilità che si verifichi E condiazionata a H_i

Esercizio 3

Quattro molecole si trovano in un contenitore idealmente diviso in due parti uguali (chiamate "sinistra" e "destra"). Qual è la probabilità che, ad un certo istante, tre molecole si trovino nella parte "sinistra" e una nella parte "destra" ?



Esercizio 4

In una partita di tennis, col punteggio in parità, il gioco è vinto dal primo giocatore che raggiunge un vantaggio di due punti.
Se la probabilità che il giocatore A vinca un punto è $P_A = 0.7$ e ogni punto è giocato in modo indipendente dagli altri, qual è la probabilità che il giocatore A vinca il gioco, alla fine ?

Esercizio 5

Sappiamo che in una scatola sono contenute quattro palline bianche o nere, delle quali almeno una nera e una bianca. Estraendo una pallina a caso, si osserva che è bianca. Determinare le probabilità delle tre possibili composizioni:

- H_1 = 1 bianca e 3 nere
- H_2 = 2 bianche e 2 nere
- H_3 = 3 bianche e 1 nera

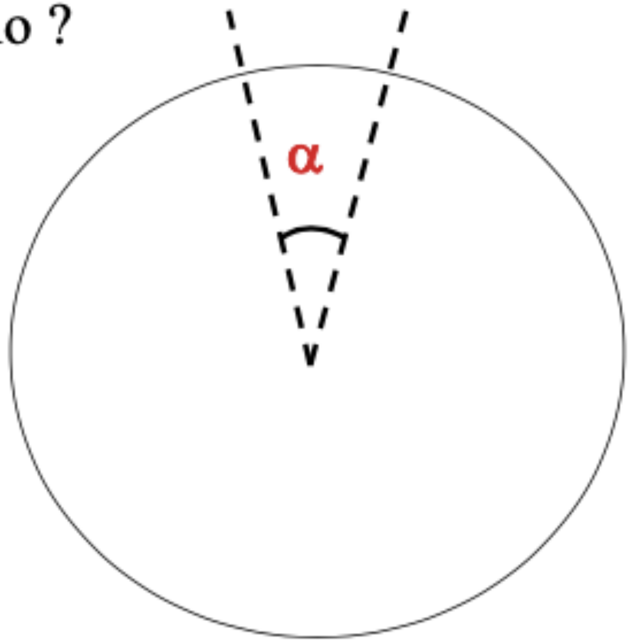
Esercizio 6

Su una circonferenza sono distribuiti, a caso, 100 punti. Considerando un angolo di apertura $\alpha = 1°$ con vertice nel centro della circonferenza, qual è la probabilità di:

(i) non trovare nessun punto all'interno dell'arco corrispondente ?

(ii) trovarne uno, ed uno solo ?

(iii) trovarne almeno due ?



Esercizio 7

Un "fascio" di particelle, contenente particelle di due tipi, **A** e **B**, attraversa un rivelatore. Il rivelatore

- se attraversato da una particella di tipo **A** la identifica sempre correttamente (dà sempre la "risposta" **a**);
- se attraversato da una particella di tipo **B** la identifica correttamente nel 50% dei casi (risposta **b**) e sbaglia (risposta **a**) nel restante 50% dei casi.

In un esperimento, osserviamo che il 55% delle risposte del contatore è **a**. Qual è la composizione del fascio, in percentuali f_A ed f_B ?

Se in un singolo conteggio il rivelatore fornisce la risposta **a**, qual è la probabilità che la particella che lo ha attraversato sia effettivamente di tipo **A** ?

Esercizio 8

Due contatori di particelle ionizzanti sono sottoposti, uno dopo l'altro, al passaggio di un fascio di particelle.
Le loro efficienze (cioè probabilità di dare un conteggio, se attraversati da una particella) ε_1 e ε_2 non sono note. In un dato intervallo di tempo δt i contatori contano $n_1 = 200$ e $n_2 = 125$ particelle, rispettivamente. Il numero di coincidenze tra i due rivelatori, cioè il numero di volte che la stessa particella ha prodotto un conteggio in entrambi i contatori, è $n_{12} = 25$.
Quante sono le particelle che hanno attraversato i contatori nell'intervallo δt, se ipotizziamo che i due contatori operino in modo indipendente uno dall'altro ?

Esercizio 9

Si trasmette un messaggio composto da $n = 100$ simboli binari "0" o "1". Durante la trasmissione ciascun simbolo è perturbato, potendosi trasformare nel simbolo opposto con una probabilità $p = 0.001$. Per precauzione il messaggio è trasmesso due volte. Qual è la probabilità che i due messaggi risultino identici ?