Scritto in itinere del 13 gennaio

Problema 1

La grandezza M è misurata indirettamente a partire dalle misure dirette di $m = (200 \pm 1)$ g, $x = (50.0 \pm 0.2)$ cm e $t = (7.27 \pm 0.08)$ s in base alla formula:

$$M = \frac{m}{x}(gt^2 - 2x)$$

dove $g = 9.81$ m/s^2, con incertezza trascurabile.

Quanto valgono M e la sua incertezza ΔM (propagare linearmente le incertezze) ?

L'incertezza $\Delta t = 0.08$ s è stata determinata in base alla deviazione standard di un campione di 40 misure di tempo. Nella ipotesi che, ripetendo il campionamento, media e deviazione standard rimangano le stesse, quale dovrebbe essere il numero minimo di misure, del nuovo campionamento, sufficiente per ridurre l'errore relativo $\Delta M/M$ a meno del 2 % (le misure delle altre grandezze rimangono inalterate) ?

1

$$M = \frac{m}{x}\left(gt^2 - 2x\right) = m\left(\frac{gt^2}{x} - 2\right) = 206.995 \text{ kg}$$

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{g\Delta\left(\frac{t^2}{x}\right)}{\frac{gt^2}{x} - 2} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{gm}{M}\left(\frac{t^2}{x^2}\Delta x + \frac{2t}{x}\Delta t\right)$$

$$= \frac{\Delta m}{m} + \frac{mgt^2}{Mx}\left(\frac{\Delta x}{x} + 2\frac{\Delta t}{t}\right) \simeq \frac{\Delta m}{m} + \frac{m}{M}\left(\frac{gt^2}{x} - 2\right)\left(\frac{\Delta x}{x} + 2\frac{\Delta t}{t}\right)$$

$$= \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta x}{x} + 2\frac{\Delta t}{t} = 0.005 + 0.004 + 2 \cdot 0.011 = 0.031$$

$$\Delta M = 0.031 \cdot 206.995 = 6.4 \text{ Kg} \qquad \therefore M = (207.0 \pm 6.4) \text{ kg}$$

Nel primo campionamento:

$$\frac{K\sigma}{\sqrt{40}} \cdot \frac{1}{7.27} = 0.011$$

Nel prossimo campionamento, $2\frac{K\sigma}{\sqrt{N}} \cdot \frac{1}{7.27} = 0.02 - (0.005 + 0.004) = 0.011$

quindi: $\frac{2}{\sqrt{N}} \cdot \sqrt{40} \cdot 0.011 = 0.011$

cioè $N = 4 \cdot 40 = 160$

Problema 2

Supponiamo che la massa di una persona adulta segua una legge gaussiana con media 75 kg e deviazione standard 5 kg. In un certo tipo di ascensore, il numero massimo di persone ammesse in cabina è nove. Il meccanismo, però, non si avvia se la massa totale delle persone presenti è superiore a 700 kg. Qual è la probabilità che la massa totale di nove persone superi 700 kg ? Esprimere il risultato con due cifre significative.

$$M = \sum_{i=1}^{9} m_i$$

$$\overline{M} = \sum_{i=1}^{9} \overline{m_i} = 9 \cdot 75 = 675 \text{ Kg}$$

$$\sigma_M = \sqrt{\sum_{i=1}^{9} \sigma_i^2} = \sqrt{9 \cdot 5^2} = 15 \text{ Kg}$$

$$z_1 = \frac{700 - 675}{15} = 1.67$$

$$P(M > 700 \text{ Kg}) = P(z > z_1 = 1.67) = \frac{1 - 0.9051}{2} = 0.047 \quad (4.7\%)$$

Problema 3

Un certo modello teorico prevede che le due grandezze x e y siano legate dalla relazione:

$$y(x) = a + bx + cx^2$$

con parametri a = 2, b = 4, c = 6.
In un esperimento, si misurano le seguenti coppie di valori (x_i, y_i) per i = 1,..,4:

x_i	y_i
-4	89.8
-2	22.6
2	28.4
6	232.2

L'incertezza sulle x_i è trascurabile, mentre l'incertezza sulle y_i è σ = 2.2 per ogni valore di i. Con un test del χ^2, verificare se il modello è compatibile con i dati sperimentali.

x_i	y_i	$f(x_i)$	χ^2
-4	89,8	82	12,570
-2	22,6	18	4,372
2	28,4	34	6,479
6	232,2	242	19,843
			43,26

ν = 4

$\tilde{\chi}^2$ = 10,82

$$P_{\nu=4}\left(\tilde{\chi}^2 > 10.82\right) < 0.01$$

quindi l'ipotesi è da rigettare in quanto la discrepanza è altamente significativa.

Scritto in itinere del 9 febbraio

Problema 1

Un punto materiale si muove con legge oraria:

$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau}$$

Sapendo che $x_0 = (10.4 \pm 0.6)$ m e che il parametro $\tau = 2.5$ s ha incertezza trascurabile, si misura indirettamente la posizione del punto all'istante $t_f = (7.0 \pm 0.2)$ s. Le incertezze su x_0 e t_f sono casuali e indipendenti, quindi l'incertezza su $x(t_f)$ deve essere calcolata con somma in quadratura. Quanto valgono $x(t_f)$ e la sua incertezza? Potendo ridurre l'errore sulla misura di x_0, quale dovrebbe essere il massimo Δx_0 perché l'errore relativo su $x(t_f)$ non superi il 9%?

1

$$x(t_f) = x_0\, e^{-t_f/\tau} = 0.6324\ \mathrm{m}$$

$$\Delta x(t_f) = \sqrt{\left(x(t_f)\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2 + \left(x(t_f)\frac{\Delta t_f}{\tau}\right)^2}$$

cioè $\dfrac{\Delta x(t_f)}{x(t_f)} = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta t_f}{\tau}\right)^2} = 0.099$

$\Delta x(t_f) = 0.062\ \mathrm{m}$

Quindi $x(t_f) = (0.632 \pm 0.062)\ \mathrm{m}$ oppure $x(t_f) = (0.63 \pm 0.06)\ \mathrm{m}$

$$\left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2 \leq 0.09^2 - \left(\frac{\Delta t_f}{\tau}\right)^2 = 0.09^2 - \left(\frac{0.2}{2.5}\right)^2 \Rightarrow \frac{\Delta x_0}{x_0} \leq 0.041$$

cioè $\Delta x_0 \leq 0.041 \cdot 10.4 = 0.43\ \mathrm{m}$

Problema 2

Una scatola contiene un grande numero di palline bianche la cui massa è distribuita normalmente, con media μ_b = 10 g e deviazione standard σ_b = 2.0 g. Un'altra scatola contiene un grande numero di palline nere la cui massa è distribuita normalmente, con media μ_n = 14 g. La frazione di palline nere la cui massa è compresa tra 12 g e 14 g è doppia rispetto alla frazione di palline bianche la cui massa si trova nello stesso intervallo. Quale frazione di palline nere ha massa superiore a 19 g?

(2)

bianche) $P(12g < m < 14g) = P(1 < z < 2) = 0.4772 - 0.3413$

$= 0.1359$

nere) $P(12g < m < 14g) = P\left(-\frac{2}{\sigma_b} < z < 0\right) = 2 \cdot 0.1359 = 0.2718$

$\parallel$

$P\left(0 < z < \frac{2}{\sigma_b}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{\sigma_b} = 0.745 \quad \Rightarrow \quad \sigma_b = 2.7\,g$

$P(m > 19g) = P\left(z > \frac{19-14}{2.7} = 1.85\right) = 0.5 - 0.468 = 0.032$

$\simeq 3.2\%$

Problema 3

In una certa regione di cielo sono visibili N stelle, posizionate uniformemente e in modo indipendente le une dalle altre. La regione di cielo è suddivisa in due parti, A e B, con l'area di A doppia rispetto a quella di B.

- Indicando con N_A il numero di stelle visibili in A, scrivere la probabilità $P(N_A = k)$ per k = 0,…,N. (Risposta in forma simbolica, in funzione della variabile k e del parametro N).
- Il numero totale N di stelle visibili è, in realtà, una variabile poissoniana in quanto dipende dalla potenza del telescopio utilizzato (che supponiamo possa essere variata). Sapendo che il parametro della poissoniana è $\mu = 24$, determinare la probabilità che in A sia visibile una sola stella (esprimere numericamente la probabilità in notazione scientifica, con due cifre significative).

③

$$P(N_A = k) = \binom{N}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{N-k} = \binom{N}{k}\frac{2^k}{3^N}$$

L'evento "una stella osservata in A" è l'unione di eventi intersezione

"una stella osservata in A" $\cap$ "N stelle visibili nella regione di cielo"

con N variabile da 1 a ∞.

Quindi, data l'indipendenza degli eventi in intersezione e la mutua esclusione degli eventi in unione, la probabilità richiesta è:

$$P = \sum_{N=1}^{\infty}\binom{N}{1}\frac{2^1}{3^N}\cdot\frac{\mu^N e^{-\mu}}{N!} = \sum_{N=1}^{\infty} 2e^{-\mu}N\frac{(\mu/3)^N}{N!} = 2e^{-\mu}\frac{\mu}{3}\sum_{N=1}^{\infty}\frac{(\mu/3)^{N-1}}{(N-1)!}$$

$$= \text{definiamo } M \equiv N-1 = 2e^{-\mu}\frac{\mu}{3}\sum_{M=0}^{\infty}\frac{(\mu/3)^M}{M!} = 2e^{-\mu}\frac{\mu}{3}e^{\mu/3}$$

$$= \frac{2}{3}\mu\, e^{-\frac{2}{3}\mu} = \frac{2}{3}\cdot 24\, e^{-\frac{2}{3}\cdot 24} \simeq 1.8\cdot 10^{-6}$$

Scritto in itinere del 10 febbraio

Problema 1

Si misura l'indice di rifrazione n_1 di un mezzo trasparente tramite un esperimento di rifrazione, misurando cioè gli angoli di incidenza θ_1 e di rifrazione θ_2 e conoscendo l'indice di rifrazione dell'altro mezzo trasparente, n_2. La relazione che consente di misurare indirettamente n_1 è: $n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$.

Le misure dirette forniscono $\theta_1 = 35° \pm 1°$ e $\theta_2 = 30° \pm 1°$, mentre $n_2 = 1.50 \pm 0.02$.

Quanto vale n_1 (valutare Δn_1 propagando linearmente le incertezze)?

In un secondo tempo, si ripete l'esperimento misurando i due angoli con maggiore precisione; quanto deve valere $\Delta\theta$ ($= \Delta\theta_1 = \Delta\theta_2$) perché n_1 sia misurato con una incertezza relativa inferiore al 3%?

(1)

$$n_1 = n_2 \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = 1.50 \frac{\sin 30°}{\sin 35°} = 1.3076$$

$$\Delta n_1 = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\Delta n_2 + n_2 \sin\theta_2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^2\theta_1}\Delta\theta_1 + n_2 \frac{1}{\sin\theta_1}\cos\theta_2 \Delta\theta_2$$

$$= n_1 \frac{\Delta n_2}{n_2} + n_1 \frac{\Delta\theta_1}{tg\,\theta_1} + n_1 \frac{\Delta\theta_2}{tg\,\theta_2}$$

da cui: $\dfrac{\Delta n_1}{n_1} = \dfrac{\Delta n_2}{n_2} + \left[\dfrac{1}{tg\,\theta_1} + \dfrac{1}{tg\,\theta_2}\right]\Delta\theta = 0.013 + 0.055 = 0.068$

$\Delta n_1 = 0.090$

Quindi: $n_1 = (1.308 \pm 0.090)$ oppure $n_1 = (1.31 \pm 0.09)$

$\dfrac{\Delta n_1}{n_1} \leq 0.03$ se $\left[\dfrac{1}{tg\,\theta_1} + \dfrac{1}{tg\,\theta_2}\right]\Delta\theta \leq 0.017$ se $\Delta\theta \leq 0.3°$ (5.3 mrad)

Problema 2

Di un dato rivelatore si sa che ha una efficienza di conteggio ε pari a circa il 95%. Si vuole misurare la inefficienza $(1-\varepsilon)$ con una incertezza relativa inferiore al 5%. Qual è il numero minimo N di particelle che devono attraversare il rivelatore affinché, con la misura, si possa ottenere questa precisione?

(2)

Poiché $\sigma_{1-\varepsilon} = \sigma_\varepsilon$

si ha che $\dfrac{\sigma_{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} = \dfrac{\sigma_\varepsilon}{1-\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\dfrac{\sigma_\varepsilon}{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\dfrac{\sqrt{N\varepsilon(1-\varepsilon)}}{N}\cdot\dfrac{1}{\varepsilon}$

$$= \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\,\frac{1}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}\cdot\frac{1}{\sqrt{N}}$$

Imponendo che $\dfrac{\sigma_{1-\varepsilon}}{1-\varepsilon} \leq 0.05$ si ottiene $\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,\dfrac{1}{\sqrt{N}} \leq 0.05$

cioè $\sqrt{N} \geq \dfrac{1}{5\cdot 10^{-2}}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}$

cioè $N \geq \dfrac{10^4}{25}\,\dfrac{0.95}{0.05} = \dfrac{19}{25}\cdot 10^4 = 7600$

Problema 3

Le società finanziarie sono suddivise in tre categorie, in base alla propria solidità economica: A (ottima), B (discreta) oppure C (cattiva); la classificazione non è tuttavia resa pubblica. Data una generica società, è ragionevole supporre che la probabilità a priori di essere in fascia A, B o C sia uguale, pari cioè a 1/3. Per stimare a quale gruppo appartenga una determinata società si può effettuare un test (analisi economica) il cui esito può essere solo positivo o negativo. Dagli studi svolti nel passato, sappiamo che l'analisi economica delle società in fascia A ha esito positivo con probabilità del 99%. Per le società in fascia B e C, l'esito è positivo con probabilità dell'80% e del 30%, rispettivamente.

- Determinare la probabilità che l'analisi economica della società "La Migliore" (una società scelta a caso) abbia esito positivo.
- Sapendo che l'analisi economica della società "La Migliore" ha avuto esito negativo, qual è la probabilità che la società sia in fascia C?

3

E = il test ha esito positivo

$$P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C)$$

$$= 0.99 \cdot 1/3 + 0.80 \cdot 1/3 + 0.30 \cdot 1/3 = 1/3 \cdot 2.09 = 0.697$$

$(\simeq 70\%)$

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 0.303$$

$$P(C|\bar{E}) = \frac{P(\bar{E}|C)P(C)}{P(\bar{E})} = \frac{[1 - P(E|C)]P(C)}{P(\bar{E})} =$$

$$= \frac{[1 - 0.30] \cdot 1/3}{0.303} = 0.77 \quad (77\%)$$