Corso di Laurea in Fisica
Laboratorio di Meccanica e Termodinamica – prova scritta

27 gennaio 2022

Tempo per lo svolgimento: 90 minuti

Problema 1 (8 punti)
Misuriamo la velocità (costante) di un punto materiale misurando direttamente la distanza percorsa, data da $d/\cos(\theta)$, e il tempo di percorrenza t_0. Le misure forniscono $d = (200 \pm 1)$ cm e $\theta = 30° \pm 1°$. Il tempo $t_0 = 1.70$ s è la media di un campione di 200 misure, la cui deviazione standard è $s_t = 0.04$ s. Poichè Δd e $\Delta\theta$ sono incertezze massime, all'incertezza su t_0 si applica un fattore di copertura $k = 3$. A quale velocità si muove il punto materiale?

Problema 2 (8 punti)
Un vaso cilindrico contiene $N = 8000$ sfere micrometriche in sospensione liquida. Il contenitore è diviso idealmente in due parti (A = alto e B = basso) di volumi uguali. Il numero n_B di sferette contenute nella parte B è una variabile casuale binomiale. Sappiamo che la variabile casuale $n = n_B - n_A$ ($n_A = N - n_B$) ha media $\bar{n} = 800$ e varianza $\sigma_n^2 = 7920$. Qual è la probabilità di trovare una sferetta nella parte B?

Problema 3 (8 punti)
Un modello teorico predice che due grandezze x e y siano legate dalla relazione $y = A + Bx + Cx^2$ con parametri $A = 10$ m, $B = 2$ m/s e $C = 0.5$ m/s^2. Si fanno delle misure di x (in secondi) e di y (in metri), riassunte in tabella:

x	y
2	15,8
4	25,6
6	40,4
8	58,6
10	80,2

con incertezza trascurabile sulle x e pari a $\sigma_y = 20$ cm sulle y. Con un test del χ^2 verificare che i parametri del modello non sono in accordo con i dati. Ripetendo il test con i tre parametri stimati a partire dai dati (con la massima verosimiglianza) si ottiene $\chi^2 = 7.31$. In questo caso, si può affermare che la discrepanza tra i dati e la dipendenza quadratica ipotizzata è significativa oppure altamente significativa?

Probleme 1

$$V = \frac{d}{t_0 \cos\theta} = \frac{2}{1.7 \cos(30°)} = 1.358 \ m/s$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta t_0}{t_0} + \left|\frac{\Delta \cos\theta}{\cos\theta}\right|$$

$$= \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta t_0}{t_0} + \frac{1}{\cos\theta}\left|\frac{d\cos\theta}{d\theta}\right|\Delta\theta$$

$$= \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta t_0}{t_0} + tg\,\theta\,\Delta\theta$$

$$= \frac{1}{200} + \frac{3 \cdot 0.04}{\sqrt{200} \cdot 1.7} + tg(30°) \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$= 0.005 + 0.005 + 0.010 = 0.02$$

$$\Delta v = 0.02 \cdot 1.358 = 0.027 \ m/s$$

$$V = (1.358 \pm 0.027) \ m/s$$

oppure

$$V = (1.36 \pm 0.03) \ m/s$$

Problema 2

$$n = n_B - n_A = n_B - N + n_B = 2n_B - N$$

$$\bar{n} = 2\bar{n}_B - N$$

$$\sigma_n^2 = \left(\frac{dn}{dn_B}\right)^2 \sigma_{n_B}^2 = 4\sigma_{n_B}^2$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{n}_B &= N p_B \\ \sigma_{n_B}^2 &= N p_B (1-p_B) \end{aligned}\right\} \; n_B \text{ è variabile binomiale}$$

$$\hookrightarrow \sigma_{n_B}^2 = \bar{n}_B (1-p_B)$$

$$\hookrightarrow p_B = 1 - \frac{\sigma_{n_B}^2}{\bar{n}_B} = 1 - \frac{\sigma_n^2}{4\,\frac{N+\bar{n}}{2}}$$

$$p_B = 1 - \frac{\sigma_n^2}{2(N+\bar{n})} = 1 - \frac{7920}{2(8800)} =$$

$$= 1 - 0.45 \simeq 0.55$$

Problema 3

$\sigma_y =$ 0,2 m
A = 10 m
B = 2 m/s
C = 0,5 m/s 2

x (s)	y (m)	f(x) (m)	χ^2
2	15,8	16	1
4	25,6	26	4
6	40,4	40	4
8	58,6	58	9
10	80,2	80	1
			19

$$\nu = 5$$

$$\tilde{\chi}_0^2 = \frac{19}{5} = 3.8$$

$P(\tilde{\chi}^2 > 3.8)$ per $\nu = 5$ è $< 1\%$ (la discrepanza è altamente significativa)

$$100 \int_{\tilde{\chi}_0^2}^{\infty} f_\nu(\tilde{\chi}^2)\, d\tilde{\chi}^2 = 100\, P\left[\tilde{\chi}^2 > \tilde{\chi}_0^2\right] .$$

$\tilde{\chi}_0^2 \rightarrow$	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	8.0	10.0
$\nu=1$	100	48	32	22	16	11	8.3	6.1	4.6	3.4	2.5	1.9	1.4	0.5	0.2
$\nu=2$	100	61	37	22	14	8.2	5.0	3.0	1.8	1.1	0.7	0.4	0.2		
$\nu=3$	100	68	39	21	11	5.8	2.9	1.5	0.7	0.4	0.2	0.1			
$\nu=4$	100	74	41	20	9.2	4.0	1.7	0.7	0.3	0.1	0.1				
$\nu=5$	100	78	42	19	7.5	2.9	1.0	0.4	0.1						

Se i tre parametri sono ottenuti a partire dai dati $\nu = 5 - 3 = 2$

$$\tilde{\chi}_0^2 = \frac{7.31}{2} = 3.66$$

$P(\tilde{\chi}^2 > 3.66)$ per $\nu = 2$ è compreso tra 1.8% e 3% (la discrepanza è significativa ma non altamente significativa)