Corso di Laurea in Fisica
Laboratorio di Meccanica e Termodinamica – prova scritta

4 febbraio 2022

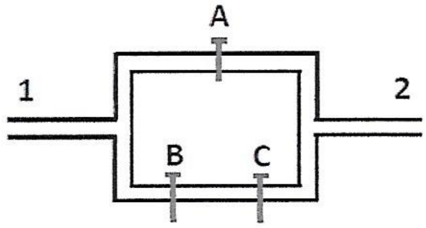
Tempo per lo svolgimento: 90 minuti

Problema 1 (9 punti)

La grandezza z è misurata indirettamente come $z = z_0 \dfrac{e^{-x/x_0}}{ln(y/y_0)}$ dove x_0, y_0 e z_0 sono parametri costanti, mentre x e y sono misurate direttamente con incertezze Δx e Δy casuali e indipendenti. Dalle misure risulta che $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{y} = 0.01$ e che il rapporto $\frac{y}{y_0} = 1.284$. Quanto può valere, al massimo, il rapporto $\frac{x}{x_0}$ affinché l'errore relativo $\frac{\Delta z}{z}$ non superi il 5%?

Problema 2 (6 punti)

Tramite i rubinetti A, B e C, che funzionano in modo indipendente, si può interrompere il flusso di acqua nelle tubature dal punto 1 al punto 2. Ogni rubinetto ha una probabilità p = 0.6 di essere aperto, all'istante t. Qual è la probabilità che, all'istante t, il flusso di acqua verso il punto 2 non sia interrotto?



Problema 3 (9 punti)

In un articolo gli autori riportano la seguente misura di intervallo di tempo: $t_0 = (5.43 \pm 0.10)$ s, affermando che è stata ottenuta da un campione di N = 21 misure e che l'incertezza riportata è pari a una deviazione standard della media. Dalla tabella delle 21 misure si può tuttavia vedere che una di queste, $t_S = 3.87$ s, può essere esclusa dal campione, secondo il criterio di Chauvenet. Determinare t_0 in base alle 20 misure rimanenti, esprimendo il risultato (media e incertezza sulla media) fino alla cifra dei millesìmi di secondo.

Problema 1

$$\Delta z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2$$

$$= \left[\frac{z_0}{\ln(y/y_0)} \frac{e^{-x/x_0}}{x_0} \Delta x\right]^2 + \left[\frac{z_0 e^{-x/x_0} \frac{y_0}{y} \cdot \frac{1}{y_0}}{\ln^2(y/y_0)} \Delta y\right]^2$$

$$= \left[-z \frac{\Delta x}{x_0}\right]^2 + \left[-z \frac{\frac{1}{y}}{\ln(y/y_0)} \Delta y\right]^2$$

$$= z^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + z^2 \left(\frac{1}{\ln(y/y_0)}\right)^2 \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2$$

$$= z^2 \left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{\ln(y/y_0)}\right)^2\right] \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2$$

Quindi

$$\left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2 = \left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \frac{1}{\ln^2(y/y_0)}\right] \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2$$ da cui:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 \leq \left(\frac{0.05}{0.01}\right)^2 - \frac{1}{\ln^2(1.284)} = 25 - 16 = 9$$

cioè $\frac{x}{x_0} \leq 3$

Problema 2

F = flusso non interrotto

$F = A \cup (B \cap C)$

dove: A = rubinetto A aperto (e simile per B e C)

$$P(F) = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap (B \cap C))$$

$$= P(A) + P(B) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B \cap C) =$$

$$= P(A) + P(B) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$= p + p^2 - p^3$$

$$= 0.6 + 0.6^2 - 0.6^3$$

$$= 0.744 \quad (74.4\%)$$

Problema 3

Indichiamo con un apice le quantità valutate dal campione, avendo sottratto la misura t_s.

$$t_0' = \frac{N \cdot t_0 - t_s}{N-1} = \frac{21 \cdot 5.43 - 3.87}{20} = 5.508\ s$$

$$S_t = \sqrt{N}\, S_{\bar{t}}$$

$$S_t^2 = \frac{N}{N-1}\left(\overline{t^2} - \bar{t}^2\right) \quad \text{dove } \bar{t} = t_0$$

$$\hookrightarrow N\,\overline{t^2} = (N-1)\,S_t^2 + N\,t_0^2 = N\left((N-1)\,S_{\bar{t}}^2 + t_0^2\right)$$

$$\overline{t^2}' = \frac{N\overline{t^2} - t_s^2}{N-1} = \frac{N\left[(N-1)S_{\bar{t}}^2 + t_0^2\right] - t_s^2}{N-1}$$

$$= \frac{21\left[20 \cdot 0.1^2 + 5.43^2\right] - 3.87^2}{20} = 30.4203\ s^2$$

$$S_t^{2\,'} = \frac{N-1}{N-2}\left(\overline{t^2}' - t_0'^2\right)$$

$$S_{\bar{t}}^{2\,'} = \frac{S_t^{2\,'}}{N-1} = \frac{\left(\overline{t^2}' - t_0'^2\right)}{N-2}$$

$$S_{\bar{t}}' = \sqrt{\frac{\overline{t^2}' - t_0'^2}{N-2}} = \sqrt{\frac{30.4203 - 5.508^2}{19}}$$

$$= 0.066\ s$$

In conclusione:

$$t_0' = (5.508 \pm 0.066)\ s$$