L'INCERTEZZA DI UNA MISURA

CdS Fisica

Laboratorio Meccanica e Termodinamica

L’ Incertezza

- Ad ogni misura è associata un’**incertezza**;

- **Nessuna grandezza fisica può essere misurata con completa certezza**;

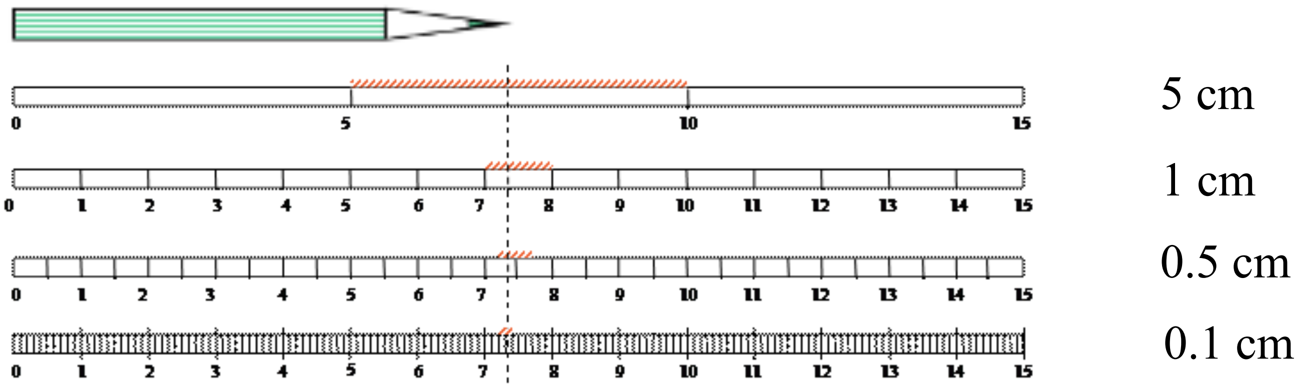
- Le incertezza possono essere ridotte ma mai eliminate;

- Questa impossibilità è dovuta a due ragioni:

  - gli strumenti hanno una sensibilità limitata, per cui non sono in grado di distinguere grandezze che differiscono per meno di una certa quantità;
  - nel fare una misura, si compiono inevitabilmente degli errori.

L’ Incertezza (II)

Esempio: misura di una matita con un righello con tacche ogni:



o con un interferometro laser, il quale ha una risoluzione di circa $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ m.

Questo esperimento ideale può proseguire all’infinito, senza che si riesca ad arrivare a un valore esatto della misura.

L' Incertezza (III)

Il processo di misura, cioè il confronto fra G (grandezza fisica) e u (unità di misura) non fornisce un numero reale ma un **intervallo di valori**.

$$\frac{G}{u} = w \longrightarrow G = uw$$ dove w è un numero puro

$$n_0 u + n_1 \frac{u}{10} + n_2 \frac{u}{100} + n_3 \frac{u}{1000} < G < n_0\, u + n_1 \frac{u}{10} + n_2 \frac{u}{100} + (n_3 + 1) \frac{u}{1000}$$

cioè $n_0.n_1 n_2 n_3 < G < n_0.n_1 n_2 (n_3 + 1)$

Es: 0.147 < d < 0.148 m (se posso misurare fino ai mm)

L’ Incertezza (IV)

Limite di riproducibilità: limite oltre il quale non si può più riprodurre la misura (es: voler misurare dei m con unità di misura in μm).

Soglia di riproducibilità: condizioni che non permettono la ripetibilità (es: la lunghezza di una sbarra di metallo dipende dalla temperatura a cui si trova)

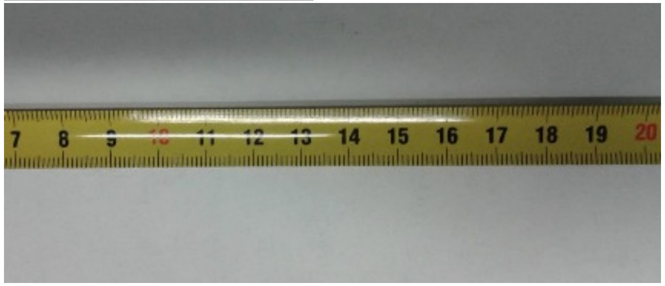
L’ Incertezza (V)

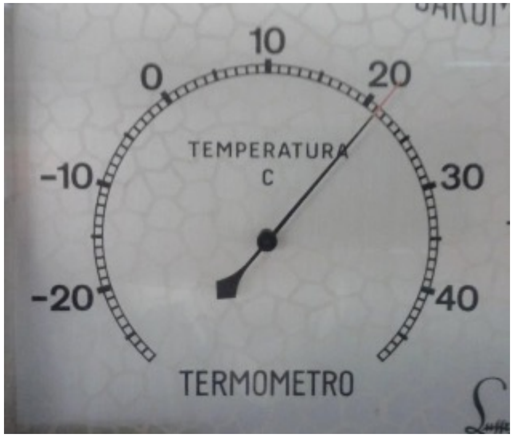
- Misure con incertezza sempre minore di una grandezza consentono di evidenziare fenomeni che resterebbero altrimenti nascosti (come la misura della distanza Terra-Luna).

- L’importanza di stabilire correttamente l’incertezza di misura risiede anche nella necessità di confrontare tra loro misure diverse della stessa grandezza e con valori di riferimento della grandezza, allo scopo di valutare la compatibilità;

L'Incertezza nelle Misure Dirette

- Nel caso di **misure dirette** (o strumentali), la misura consiste nel localizzare un **punto su una scala graduata**





L’Incertezza nelle Misure Dirette

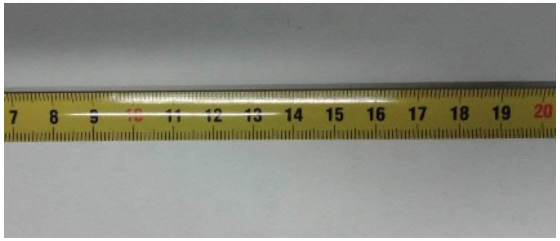
- Nel caso di **misure dirette** (o strumentali), la misura consiste nel localizzare un **punto su una scala graduata** (o leggere il numero che appare sul **display di uno strumento digitale**).

- Tipicamente, l’**incertezza** che si associa ad una misura diretta o strumentale **coincide con la risoluzione** dello strumento.
- Valutare la risoluzione è un po’ più complesso quando si tratta di misure effettuate con sensori e una catena DAQ.

La Risoluzione

- La **risoluzione** di uno strumento di misura è la più piccola variazione della grandezza che lo strumento stesso riesce ad apprezzare;

- Nel caso di **strumenti analogici** corrisponde **alla minima distanza** tra due tacche della scala graduata (divisione più piccola della scala);



- Nel caso di **strumenti digitali** corrisponde all'**unità del digit meno significativo** (salvo indicazioni diverse nelle specifiche dello strumento)

Sensori - Trasduttori

barometro

fototraguardo

dinamometro

termometro

Data Sheet

Barometer

(Order Code BAR-BTA)

The Barometer measures atmospheric pressure. As shipped, it measures actual, or *station pressure*, but it can be calibrated to measure the elevation-adjusted, or *sea level pressure*, if desired for weather studies (see Station Pressure vs. Sea Level Pressure on Page 3).

Collecting Data with the Barometer

This sensor can be used with the following interfaces to collect data.

- Vernier LabQuest® 2 or original LabQuest® as a standalone device or with a computer
- Vernier LabQuest Mini with a computer
- Vernier LabPro® with a computer or TI graphing calculator
- Vernier Go!®Link
- Vernier EasyLink®
- Vernier SensorDAQ®
- CBL 2™
- TI-Nspire™ Lab Cradle

Here is the general procedure to follow when using the Barometer.

1. Connect the Barometer to the interface.
2. Start the data-collection software.
3. The software will identify the Barometer and load a default data-collection setup. You are now ready to collect data.

Data-Collection Software

This sensor can be used with an interface and the following data-collection software.

- **Logger *Pro* 3** This computer program is used with LabQuest 2, LabQuest, LabQuest Mini, LabPro, or Go!Link.
- **Logger Lite** This computer program is used with LabQuest 2, LabQuest, LabQuest Mini, LabPro, or Go!Link.
- **LabQuest App** This program is used when LabQuest 2 or LabQuest is used as a standalone device.
- **DataQuest™ Software for TI-Nspire™** This calculator application for the TI-Nspire can be used with the EasyLink or TI-Nspire Lab Cradle.
- **EasyData App** This calculator application for the TI-83 Plus and TI-84 Plus can be used with CBL 2, LabPro, and Vernier EasyLink. We recommend version 2.0 or newer, which can be downloaded from the Vernier web site, www.vernier.com/easy/easydata.html, and then transferred to the calculator. See the Vernier web site, www.vernier.com/calc/software/index.html, for more information on the App and Program Transfer Guidebook.
- **DataMate program** Use DataMate with LabPro or CBL 2 and TI-73, TI-83, TI-84, TI-86, TI-89, and Voyage 200 calculators. See the LabPro and CBL 2 Guidebooks for instructions on transferring DataMate to the calculator.
- **LabVIEW** National Instruments LabVIEW™ software is a graphical programming language sold by National Instruments. It is used with SensorDAQ and can be used with a number of other Vernier interfaces. See www.vernier.com/labview for more information.

NOTE: Vernier products are designed for educational use. Our products are not designed nor are they recommended for any industrial, medical, or commercial process such as life support, patient diagnosis, control of a manufacturing process, or industrial testing of any kind.

Specifications

Pressure range (as shipped)	77.98 kPa to 105.29 kPa
Maximum pressure that the sensor can tolerate without permanent damage	310 kPa
Resolution	
13-bit (SensorDAQ)	0.00416 kPa
12-bit (LabQuest 2, LabQuest, LabQuest Mini, LabPro, TI-Nspire™ Lab Cradle, Go! Link)	0.00830 kPa
10-bit, 5 volt A/D converter (CBL 2™)	0.0332 kPa
Combined linearity and hysteresis	±0.5% Full Scale
Response time	100 microseconds
Temperature range	−25°C to 85°C
Calibration values	
slope	6.825 kPa/V
intercept	76.29375 kPa

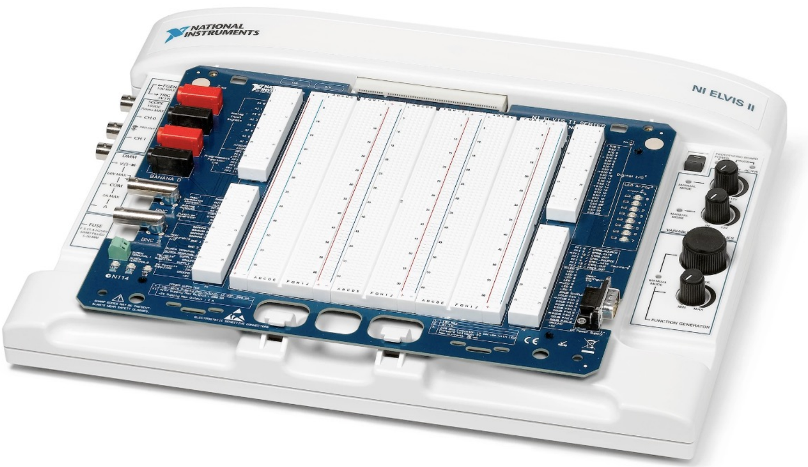
This sensor is equipped with circuitry that supports auto-ID. When used with LabQuest 2, LabQuest, LabQuest Mini, LabPro, Go! Link, SensorDAQ, TI-Nspire™ Lab Cradle, EasyLink, or CBL 2™, the data-collection software identifies the sensor and uses pre-defined parameters to configure an experiment appropriate to the recognized sensor.

How the Barometer Works

The heart of this circuit is a pressure sensor. It has a membrane that flexes as pressure changes. This sensor is set up for absolute pressure measurement, so one side of the membrane is a vacuum. The sensor produces an output voltage that varies in a linear way with absolute pressure. It includes special circuitry to minimize errors caused by changes in temperature.

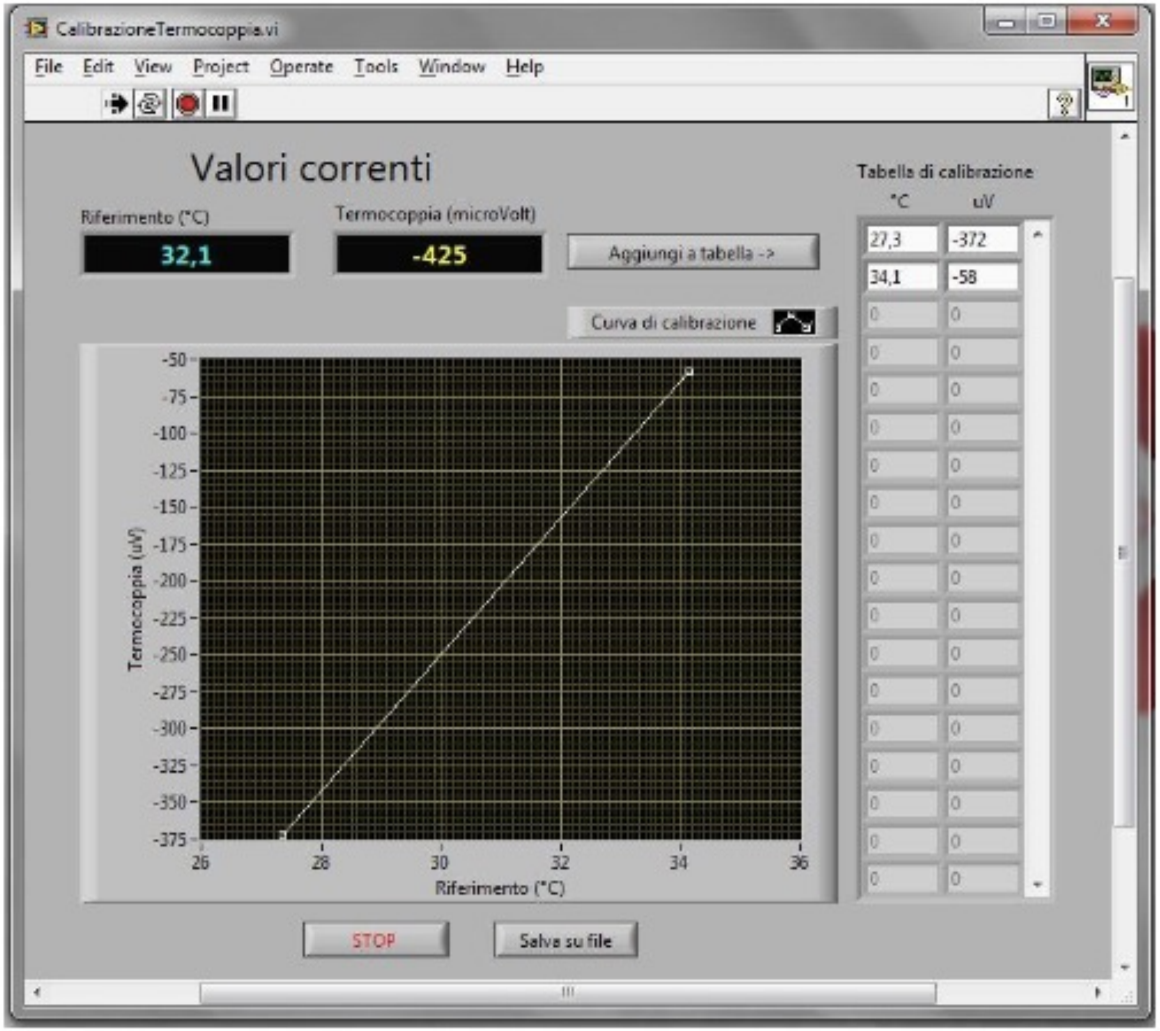
Aumentando il numero di bit, il valore della risoluzione diminuisce (la misura diventa migliore).

Il Dispositivo DAQ: NI Elvis II



- 16 canali analogici con ingresso a 16 bit;
- 1 Multimetro digitale a 18 bit;
- Oscilloscopio a 2 canali;
- Generatore di forme d’onda;
- Alimentatore di corrente continua da -24 V a +24 V;
- Protoboard per la creazione di circuiti;
- Linee digitali, contatori, test di diodi e transistor….

Programmi di Acquisizione VI in LabView



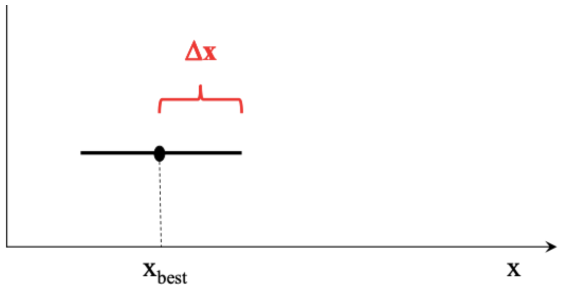
L' Incertezza (IV)

- **L'incertezza (assoluta)** della misura di una grandezza x si rappresenta con Δx.

- In generale, l'esito di una misura sarà quindi espresso da:

  $$\boldsymbol{x = (x_{best} \pm \Delta x)\ \text{u.m.}}$$

- L'incertezza Δx di una misura può essere rappresentata graficamente tramite una **barra di errore;**



$\mathbf{2 \cdot \Delta x}$ l'intervallo entro cui si ha fiducia che si trovi il valore «vero».

NB: x e Δx sono omogenei.

L’ Incertezza (V)

- L’incertezza di una misura deve essere **arrotondata ad una sola cifra significativa**. Se la cifra è un 1, allora si esprime anche la seconda cifra.

- **L’ultima cifra significativa del numero che esprime una misura deve essere dello stesso ordine di grandezza** (nella stessa posizione decimale) **della sua incertezza.**

  Esempio: l’esito di una misura di lunghezza $d = (25.4 \pm 0.2)$ cm.

- **Incertezze strumentali o di lettura sono sinonimi** e si riferiscono a delle **incertezze massime**.

La Precisione

- Si definisce **precisione** o **incertezza relativa** di una misura il rapporto fra l'incertezza assoluta e il valore ottimale («best») della misura stessa: $\frac{\Delta x}{x_{best}}$

- È una grandezza **adimensionale** che permette di confrontare misure di grandezze diverse, anche dimensionalmente;

- Può essere espressa in forma di **percentuale**;

Esempio: d = (25.4 ± 0.2) cm

precisione = $\frac{\Delta d}{d_{best}} = \frac{0.2}{25.4} = 0.00787 = 0.008$

$\rightarrow$ 0.8%

Incertezza ed Errore

- I termini **“incertezza” ed “errore” non sono sinonimi**, anche se spesso sono usati come tali.

- L’**errore** di misura, E, è la differenza tra il valore vero X (che ipotizziamo esistere) della grandezza e il valore misurato x_{best} cioè $\mathbf{E = |X - x_{best}|}$

- Non essendo conosciuto il valore vero, neppure l’errore di misura può essere noto.

- Una misura completa consiste quindi nella **stima del valore vero X** (cioè x_{best}) e nella **stima dell’errore E** (cioè l’incertezza Δx).

Esercizio 1

Riscrivere correttamente i seguenti risultati sperimentali, specificando la precisione dei risultati stessi.

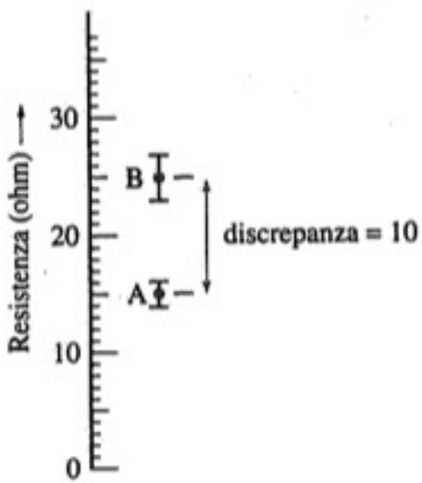
Risultato	Forma corretta	Precisione %
$P = 22.25 \pm 1.1$ hPa		
$F = 1.234\ 567$ MHz ± 54 kHz		
$L = 5.33 \cdot 10^{-3} \pm 3.21 \cdot 10^{-5}$ m		
$R = 0.000\ 538 \pm 0.000\ 03$ km		

Discrepanza

- **Discrepanza:** differenza fra due valori misurati della stessa grandezza fisica;

  Se ciascuna delle due misure è espressa come miglior stima e da un'incertezza, la discrepanza è la **differenza fra le due migliori stime**;
- La discrepanza può essere **significativa o non significativa**.

Esempio
Due misure di resistenza
Studente A: 15 $\pm$ 1 ohm
Studente B: 25 $\pm$ 2 ohm



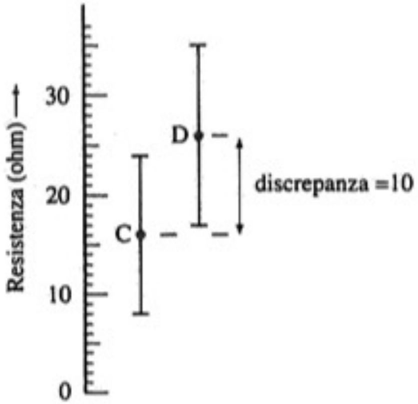
Discrepanza **significativa** perché non c'è un valore di resistenza compatibile con entrambe le misure (**intervalli non si sovrappongono in nessun punto**)

Discrepanza (II)

- **Discrepanza:** differenza fra due valori misurati della stessa grandezza fisica;

  Se ciascuna delle due misure è espressa come miglior stima e da un'incertezza, la discrepanza è la **differenza fra le due migliori stime**;
- La discrepanza può essere **significativa o non significativa**.

Esempio
Due misure di resistenza
Studente C: 16 ± 8 ohm
Studente D: 26 ± 9 ohm

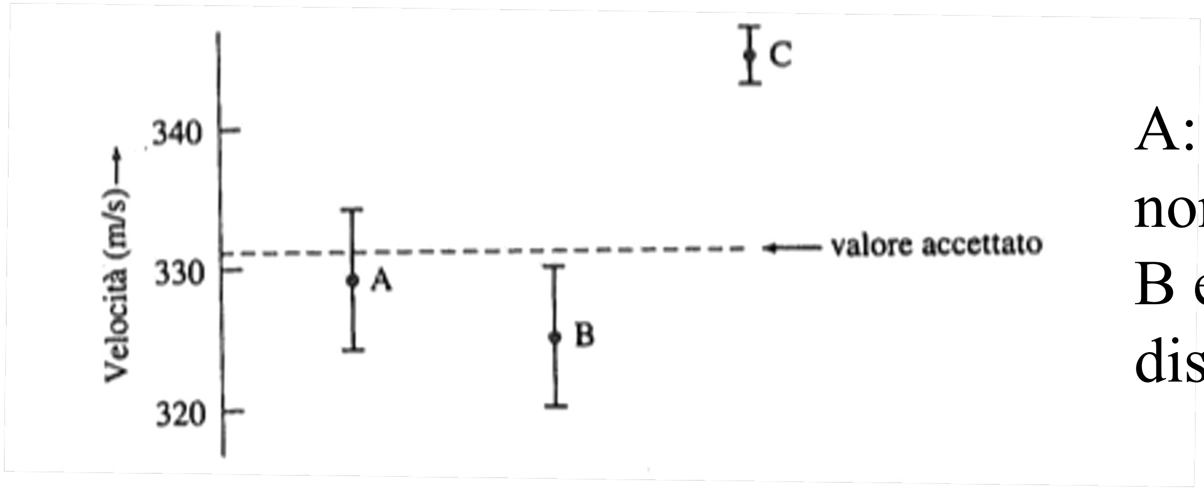


Discrepanza **NON significativa** perché i margini di errore si sovrappongono parzialmente (**intervalli si sovrappongono in almeno un punto**)

Confronto con Valore Accettato

- **Misura di una grandezza il cui valore accettato è noto;**

Esempio: valore della velocità del suono nell'aria
Studente A: 329 $\pm$ 5 m/s
Studente B: 325 $\pm$ 5 m/s
Studente C: 342 $\pm$ 2 m/s
Valore accettato: 331 m/s



A: **compatibile**, discrepanza non significativa
B e C: **non compatibili**, discrepanza significativa

Incertezze Sistematiche

- Una misura può anche essere soggetta ad errori dovuti a fattori non controllati (ma, almeno in linea di principio, controllabili) che determinano una sovrastima, o sottostima, sistematica del risultato, rispetto al valore vero: sono gli **errori sistematici**.

- In generale, questi sono riconducibili a effetti dovuti a strumenti mal calibrati oppure a procedure nelle quali si misura una grandezza che non è esattamente quella che si vorrebbe (o si pensa di) misurare.

- Gli errori sistematici non vanno confusi con i banali "sbagli" (come letture erronee delle scale dello strumento di misura oppure errori di calcolo nelle misure indirette)

Incertezze Sistematiche (II)

- **strumento di misura calibrato male o che non riproduce fedelmente l'unità di misura**

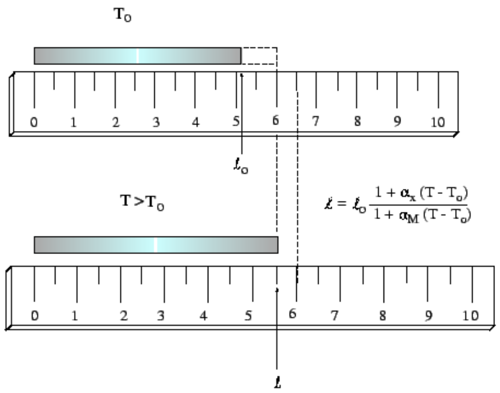
  - cronometro che anticipa o ritarda;

  - *offset* di un calibro;

- **condizioni ambientali in cui viene effettuata la misura diverse da quelle prescritte dalla procedura**

  - regolo graduato in acciaio realizzato per essere usato a temperatura ambiente e soggetto a dilatazione termica;

  - sensore di temperatura inserito solo parzialmente nel sistema in misura (ad es. un liquido)



Incertezze Sistematiche (III)

- **presenza di fattori che influiscono sulla misura modificando la grandezza in esame**

  - nelle misure di attività di una sorgente radioattiva, il fondo ambientale provoca una sovrastima della attività stessa;
  - nelle misure calorimetriche, il non completo isolamento termico causa una sottostima della temperatura di equilibrio);
  - nelle misure di precisione di massa, la forza di Archimede modifica la misura se la densità dell'oggetto è diversa da quella delle masse usate per la calibrazione.

Incertezze Sistematiche (IV)

- La gamma di situazioni che portano ad errori sistematici non consente una trattazione completa dell'argomento.
- Gli errori sistematici possono essere messi in evidenza **ripetendo la misura con strumenti diversi e/o in condizioni diverse**.
- Non ci sono "regole" vere e proprie che guidano lo sperimentatore in questa attività, se non quelle che nascono dalla esperienza; vedremo alcuni esempi concreti nelle sessioni in laboratorio.
  "La stima della incertezza statistica è un calcolo, la stima della incertezza sistematica è un'arte"
- Una volta identificate le cause degli errori sistematici, i risultati delle misure possono essere rielaborati in modo da eliminarne l'influenza.

Incertezze Sistematiche (V)

- Un buono strumento di misura ha un errore sistematico piccolo (cioè trascurabile) rispetto alla risoluzione della sua scala.

- Una buona procedura mantiene gli errori sistematici piccoli rispetto all'incertezza (strumentale o statistica) della misura.

- Una misura effettuata con strumenti e procedure che mantengono **piccoli gli errori sistematici** viene detta **accurata**.

Incertezze Statistiche e Campioni di Dati

Si presentano frequentemente situazioni nelle quali **misure ripetute** della stessa grandezza forniscono risultati diversi tra loro.

- La grandezza si riferisce agli **individui di una popolazione** ed il suo valore varia da individuo a individuo

  Esempi: l'altezza degli abitanti di una città; il modulo della velocità delle molecole di un gas all'equilibrio termico

- La grandezza è intrinsecamente **stocastica (casuale)**

  Esempio: il numero di nuclei di una sorgente radioattiva che decadono in un dato intervallo di tempo

- La lettura della scala dello strumento è spinta a sottomultipli dell'unità di misura **oltre il limite di riproducibilità** della misura stessa

  Esempio: nelle misure di intervalli di tempo eseguite con un cronometro manuale interviene in ciascuna misura un effetto casuale, imprevedibile, dovuto alle fluttuazioni rispetto al ritardo medio dello *start* e dello *stop* del cronometro

Incertezze Statistiche e Campioni di Dati (II)

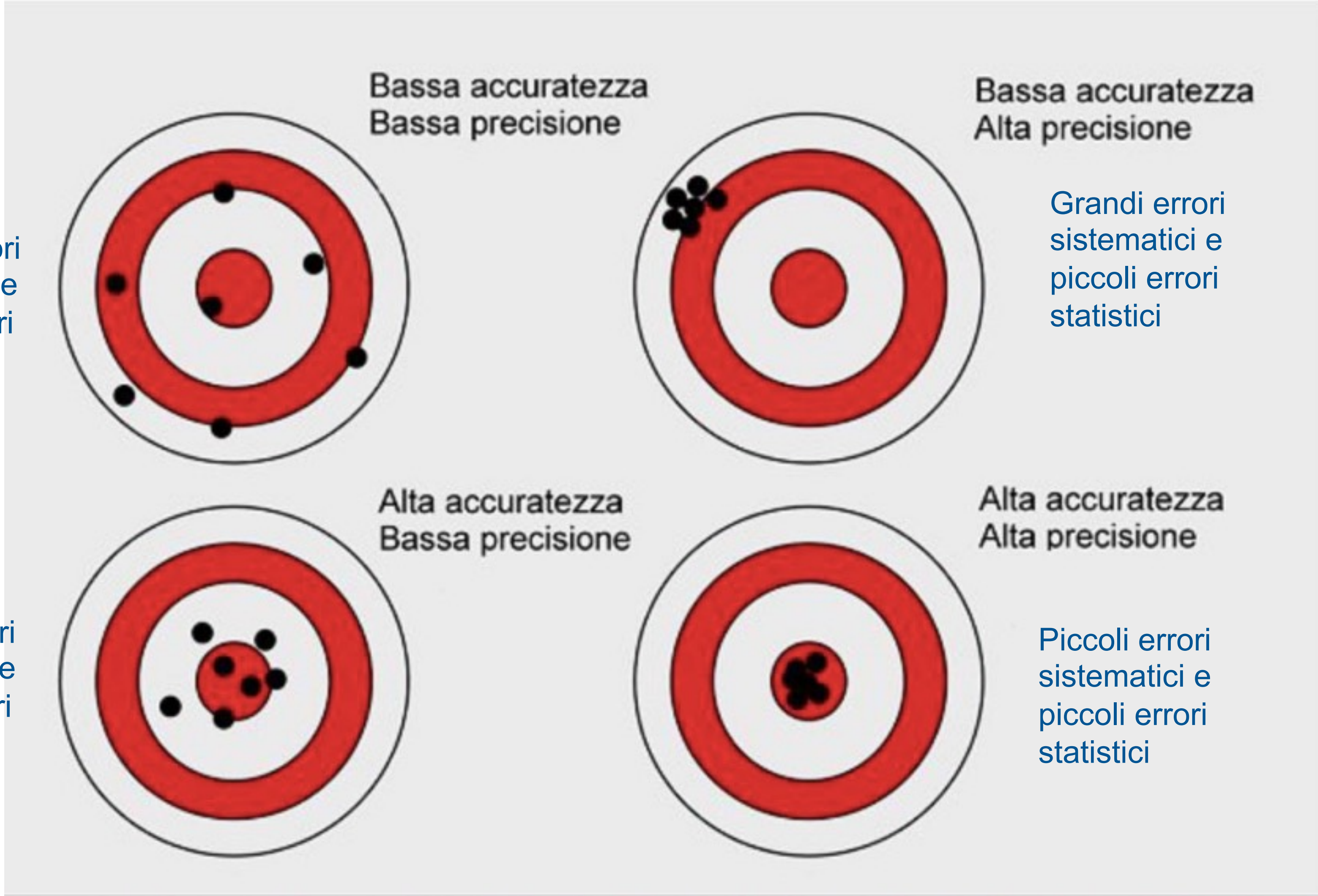
- Si definisce **errore casuale o statistico** la deviazione della misura dal valore vero dovuta a molte piccole perturbazioni incontrollabili nel processo di misura

  Esempi: variazioni di temperatura, pressione, vibrazione, condizioni operative degli strumenti di misura, tempo di risposta dello sperimentatore, etc..
- Gli errori sistematici agiscono sempre nello stesso verso (tendono cioè ad aumentare, o diminuire, tutte le misure ripetute) Gli errori casuali hanno la **stessa probabilità di aumentare o di diminuire il valore della singola misura**.
- La **media degli errori casuali tende a zero** statisticamente.
- Di conseguenza, a differenza degli errori sistematici, l'entità degli errori casuali può essere **ridotta (non azzerata) aumentando il numero delle misure**.

Incertezze Statistiche e Campioni di Dati (III)

- Il risultato di una serie di misure fornisce un **campione** di dati distinti (estratto dalla **popolazione**) ognuno corrispondente alla variabilità del risultato della misura da **individuo** a individuo.
- E' importante che il campione estratto sia rappresentativo della popolazione, cioè non presenti dei *bias*.
- Lo studio statistico dell'insieme di dati consente di fornire la migliore stima del valore della grandezza in esame e della sua incertezza; per questo motivo, gli errori casuali sono chiamati anche **errori statistici**.
- Una procedura che fornisca una misura il cui **errore casuale è minore** rispetto a quello ottenuto tramite un'altra procedura, si dice più **precisa**.

Incertezze Sistematiche e Statistiche



Grandi errori sistematici e grandi errori statistici

Grandi errori sistematici e piccoli errori statistici

Piccoli errori sistematici e grandi errori statistici

Piccoli errori sistematici e piccoli errori statistici

Incertezze Sistematiche e Statistiche (II)

Nota Bene

- In quello che segue supporremo, salvo avviso contrario, di avere individuato le sorgenti di errore sistematico e di avere effettuato la misura in modo tale da ridurre **l'errore sistematico ad un livello trascurabile rispetto all'errore statistico** (o strumentale).

- In caso contrario, nella rappresentazione dell'incertezza di una misura occorre sommare l'errore sistematico a quello statistico:

$$x = x_{best} \pm \Delta x_{stat} \pm \Delta x_{sys}$$

Campioni di Dati
Tabelle e Istogrammi

- Consideriamo, come esempio, N = 160 misure del tempo di discesa di una sferetta lungo un piano inclinato, effettuate con un cronometro al decimo di secondo.
- Possiamo rappresentare l'insieme delle misure (il "**campione**" $\{x_i\} = \{x_1,x_2,x_3,....,x_N\}$) per mezzo di una tabella di

Tempo (s) x_k	n_k
2.7	4
2.8	21
2.9	50
3.0	52
3.1	23
3.2	7
3.3	3

Occorrenze n_k

Frequenze

$$f_k = \frac{n_k}{N}$$

k = **indice del bin**, da 1 (misura più bassa) a k_{max} (misura più alta)

Tempo (s) x_k	f_k
2.7	0.025
2.8	0.131
2.9	0.313
3.0	0.325
3.1	0.144
3.2	0.044
3.3	0.019

Campioni di Dati
Tabelle e Istogrammi (II)

Preso un campione di dati $\{x_i\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N\}$

risulta che: $$\sum_{k=1}^{k_{max}} n_k x_k = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

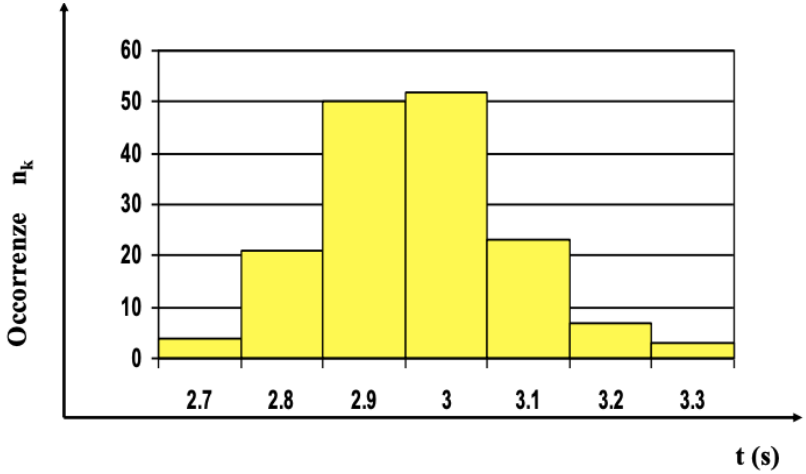
La somma delle occorrenze n_k è: $$\sum_{k=1}^{k_{max}} n_k = N$$

La somma delle frequenze f_k è: $$\sum_{k=1}^{k_{max}} f_k = 1$$

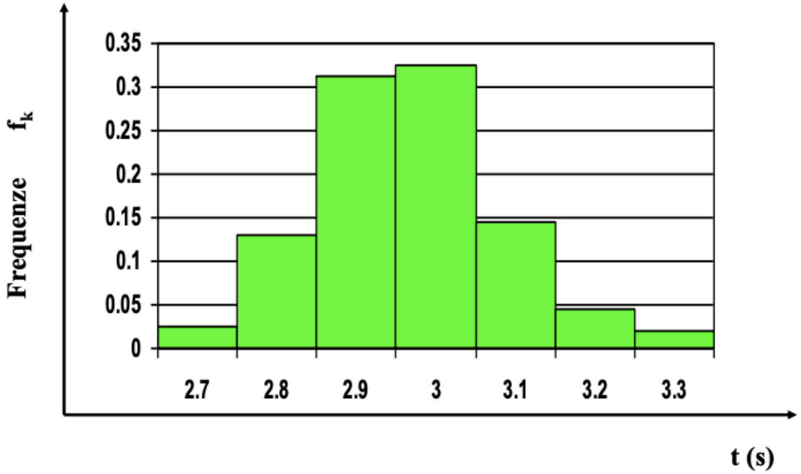
Campioni di Dati
Tabelle e Istogrammi (III)

Possiamo rappresentare lo stesso campione di misure anche per mezzo di un **istogramma.**

Bin = divisione del dominio della variabile sulle ascisse in intervalli



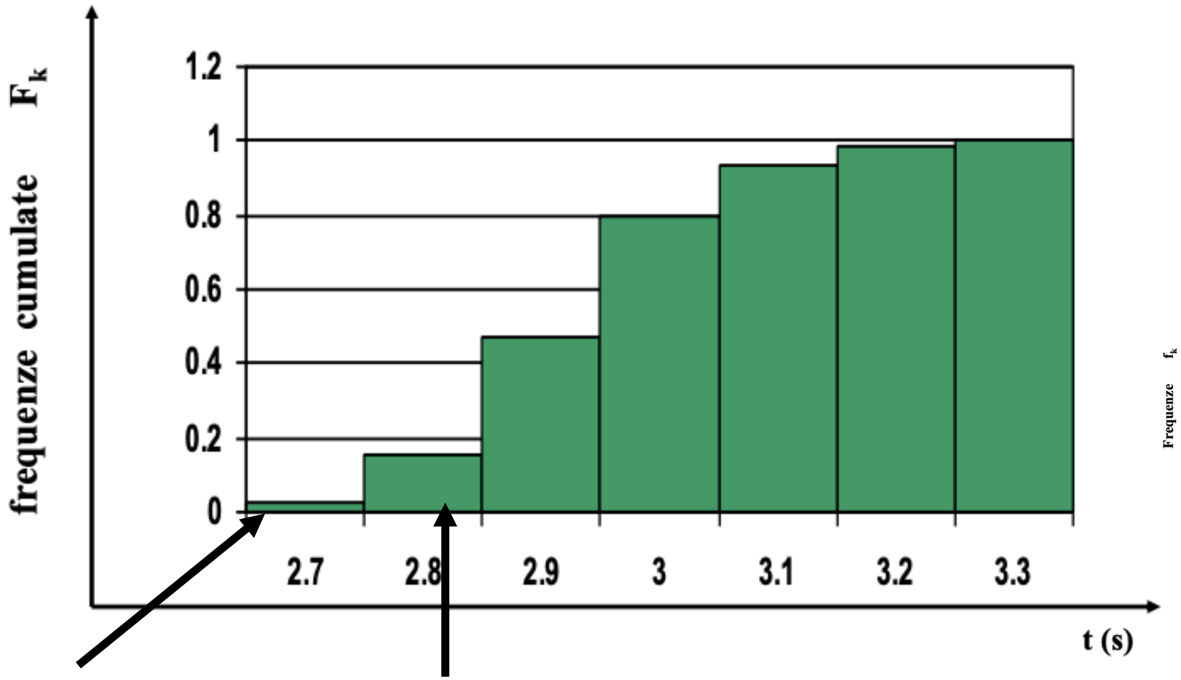
In questo caso sono utilizzate le n_k

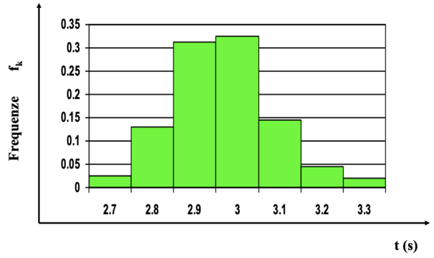


Utilizzare le frequenze f_k consente di confrontare campioni con N diversi.

Campioni di Dati
Tabelle e Istogrammi (IV)

Frequenza Cumulativa : $$F_k = \sum_{j=1}^{k} f_j$$





Primo bin uguale a quello delle frequenze

Secondo bin = somma del primo e del secondo bin delle frequenze

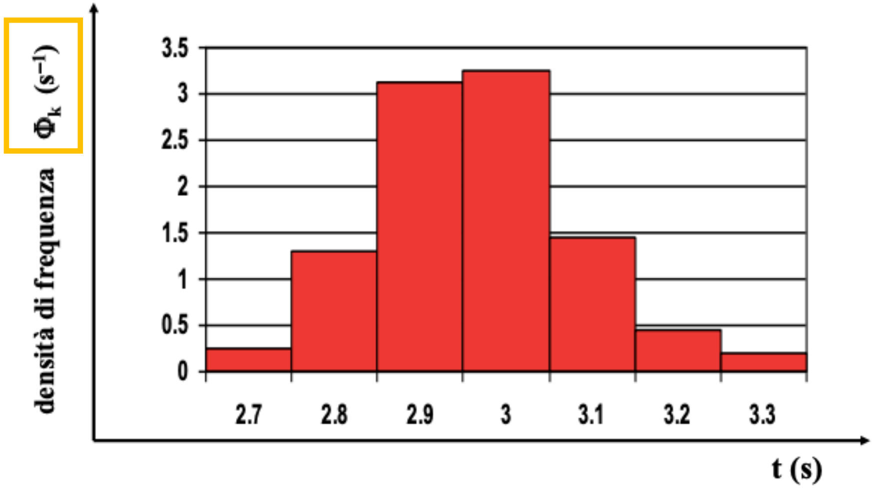
Campioni di Dati
Tabelle e Istogrammi (V)

Densità di Frequenza: $\Phi_k = \dfrac{f_k}{\Delta x}$

Δx = ampiezza dell'intervallo nell'asse delle ascisse;
Corrisponde in genere alla risoluzione dello strumento di misura.

Risulta quindi: $\displaystyle\sum_{k=1}^{k_{max}} \Phi_k \Delta x = \sum_{k=1}^{k_{max}} f_k = 1$

Nota $[\Phi_k] = [x^{-1}]$



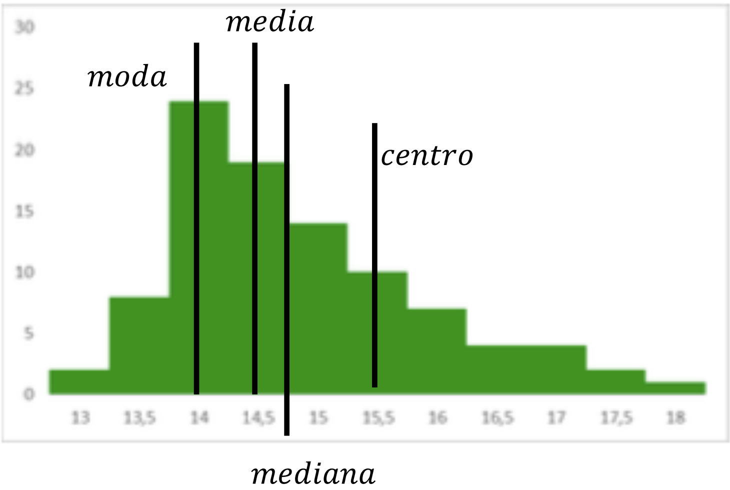
Somma delle aree = 1

Rappresentazione adatta al confronto di un campione sperimentale con una PDF (Probability Density Function) ipotizzata.

Campioni di Dati: Parametri Caratteristici

- Le proprietà generali di un campione di dati possono essere sintetizzate tramite un insieme di **parametri**, il cui significato può anche essere visualizzato sull'istogramma delle occorrenze, o delle frequenze.
- I parametri principali sono gli **indici di posizione** e di **dispersione**.
- Possibili indici di **posizione**: **centro intervallo**, **moda**, **mediana** e **media aritmetica**.
- Possibili indici di **dispersione**: sono la **semidispersione massima**, lo **scarto medio** e lo **scarto quadratico medio** (o **deviazione standard**).

Campioni di Dati: Indici di Posizione



Centro intervallo $= \dfrac{x_{min} + x_{max}}{2}$

Moda = valore di x_k tale che n_k è massimo

Mediana = valore di x_k tale che $\frac{N}{2}$ elementi del campione hanno valori $< x_k$

Media aritmetica = $\bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{k_{max}} n_k x_k$

Campioni di Dati: Indici di Dispersione

Semi-dispersione Massima = $\boxed{\dfrac{x_{max} - x_{min}}{2}}$

Usata per stimare **l'incertezza sulla media di poche misure**.

Definendo lo scarto i-esimo come $d_i = x_i - \bar{x}$ si ha che $\sum_{i=1}^{N} d_i = 0$ e $\bar{d} = 0$

$$\sum_{i=1}^{N} d_i = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} \boxed{\bar{x}} = N\bar{x} - \bar{x}\sum_{i=1}^{N} 1 = N\bar{x} - \bar{x}N = 0$$

Def. di media

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i}{N} = \frac{0}{N} = 0$$

Scarto Medio = $\boxed{\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |d_i|}$

Campioni di Dati: Indici di Dispersione (II)

Scarto Quadratico Medio = Deviazione Standard $= S_x$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} d_i^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Campioni di Dati: Indici di Dispersione (III)

Perché N-1 a denominatore e non solo N come la media?

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

1) Risposta pratica: supponiamo di avere 1 sola misura.

- $x_i = \bar{x}$.
- N a denominatore $\Longrightarrow S_x = 0$ non corretto
- N-1 a denominatore$\Longrightarrow S_x = \frac{0}{0}$ forma indeterminata (corretto);

2) Risposta statistica: questione di **gradi di libertà**

- i **gradi di libertà di una variabile aleatoria o di una statistica esprimono il numero minimo di dati sufficienti a valutare la quantità d'informazione** contenuta nella statistica.
- per valutare la deviazione standard abbiamo già utilizzato un'informazione contenuta dai dati per stimare la media quindi il numero di gradi di libertà passa da N a N-1.

Campioni di Dati

In un campione statistico di N misure ripetute x_i si assume che
1) la **migliore stima del valore vero è la media aritmetica delle misure del campione:**

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

2) la **deviazione standard del campione è la migliore stima della incertezza su una singola misura:**

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Campioni di Dati (II)

3) la **deviazione standard della media** **è la migliore stima dell'incertezza casuale da associare alla media**

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} = \boxed{\frac{S_x}{\sqrt{N}}}$$

La dimostrazione verrà effettuata nelle prossime lezioni.

Il risultato della misura della grandezza x, a partire da un campione di prove ripetute $\{x_1, x_2 \ldots\ldots x_N\}$ viene espresso quindi da:

$$\boxed{x = (\bar{x} \pm s_{\bar{x}})u.m}$$

Campioni di Dati (III)

$$s_x^2 = \frac{N}{N-1}\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)$$

La varianza campionaria si può anche scrivere come **differenza tra la media dei quadrati e il quadrato della media**

Dimostrazione:

$$s_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

Moltiplico e divido per N

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}\frac{N}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2)}{N}\frac{N}{N-1} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N}\bar{x}x_i + \sum_{i=1}^{N}\bar{x}^2}{N}\frac{N}{N-1} =$$

Campioni di Dati (IV)

$$= \frac{N}{N-1}\left(\boxed{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}} - \frac{2\sum_{i=1}^{N} \boxed{\bar{x}} x_i}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{N} \boxed{\bar{x}^2}}{N}\right)$$

$= \overline{x^2}$ (def di media)

$$= \frac{N}{N-1}\left(\overline{x^2} - 2\bar{x}\boxed{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}} + \bar{x}^2 \frac{\boxed{\sum_{i=1}^{N} 1}}{N}\right) =$$

$= N$

$= \bar{x}$ (def di media)

$$= \frac{N}{N-1}\left(\overline{x^2} - 2\bar{x}\bar{x} + \bar{x}^2\frac{N}{N}\right) = \frac{N}{N-1}\left(\overline{x^2} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2\right) =$$

$$= \frac{N}{N-1}\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right) \quad \text{(Cvd)}$$

Esercizio 2

Uno studente misura il periodo di un pendolo, utilizzando un cronometro. Con un campione di 50 misure ottiene

T= (3.94 ± 0.04) s

Quante misure dovrebbe fare per ottenere, con lo stesso cronometro, una incertezza casuale di 0.02 s ?

Esercizio 3

Di un campione di 200 misure di tempo sappiamo che la somma delle misure è pari a 920 s e la somma dei quadrati delle misure è pari a 4300 s^2. Qual è l'esito della misura?