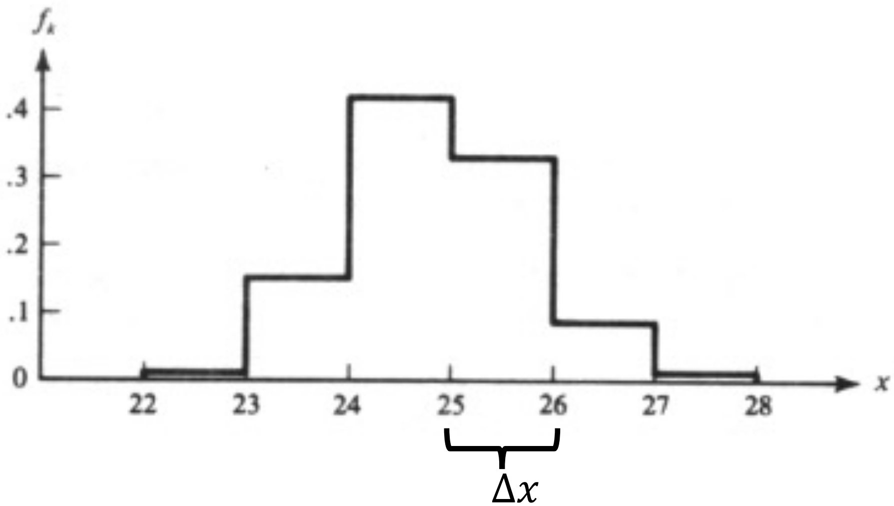
FUNZIONI DENSITÀ DI PROBABILITÀ
(Probability Density Functions PDFs)

CdS Fisica
Laboratorio Meccanica e Termodinamica

Distribuzione Limite

- Consideriamo il caso di misure ripetute di una grandezza fisica;
- Supponiamo che le fluttuazioni casuali siano maggiori della risoluzione dello strumento di misura;

→ otteniamo un campione di misure con il quale possiamo costruire gli istogrammi di occorrenze, frequenze e densità di frequenze.



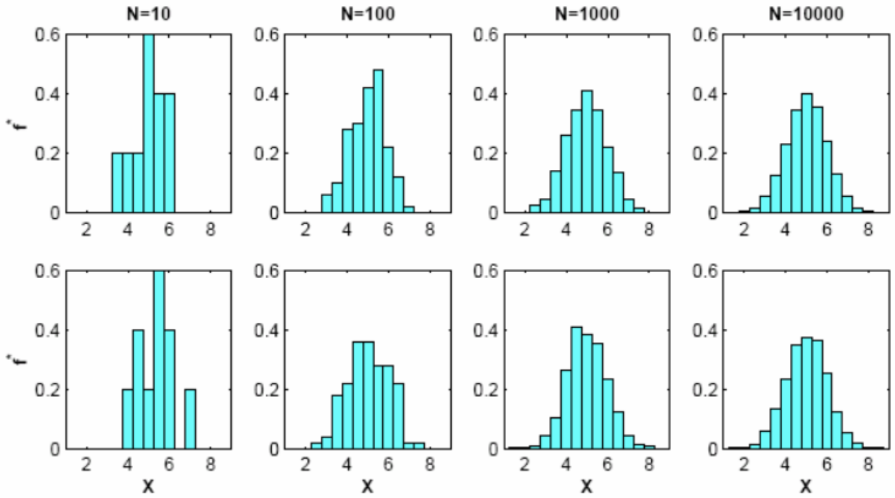
n_k Occorrenze

$$f_k = \frac{n_k}{N}$$ Frequenze

$$\Phi_k = \frac{f_k}{\Delta x}$$ Densità di frequenze

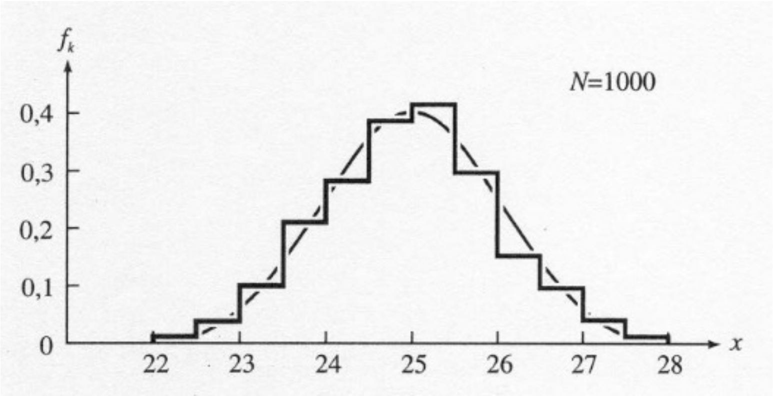
Distribuzione Limite (II)

- Due istogrammi di frequenza su un campione di 10 misure effettuate sulla stessa grandezza fisica possono avere forme molto diverse;
- MA **aumentando il numero delle misure, gli istogrammi tenderanno a diventare sempre più regolari**, simili fra loro, assumendo una tipica **forma "a campana"** con un addensamento al centro e due code poco popolate.



Distribuzione Limite (III)

- Avendo a disposizione sempre più misure, e strumenti sempre più sensibili, possiamo immaginare di diminuire l'ampiezza degli intervalli Δx nei quali vengono raggruppate le misure (l'ampiezza dei *bin*)
- Per $\Delta x \rightarrow dx \rightarrow 0$ l'istogramma in densità di frequenza tenderà a diventare una curva continua chiamata **distribuzione limite**. Tenderà cioè statisticamente ad una **funzione densità di probabilità**;



Distribuzione Limite (IV)

- Tale distribuzione limite è una **costruzione teorica** (è un postulato), che non può mai essere misurata esattamente (occorrerebbe un numero infinito di misure con una strumentazione di sensibilità infinita).

  Si assume che le misure abbiano una distribuzione limite, alla quale la distribuzione sperimentale (istogramma) si avvicina sempre più all'aumentare del numero delle misure.

- Il vantaggio di introdurre questa entità astratta risiede nel poter **trattare matematicamente** la forma "a campana" degli istogrammi relativi a misure ripetute soggette a fluttuazioni casuali, in termini di una funzione continua.

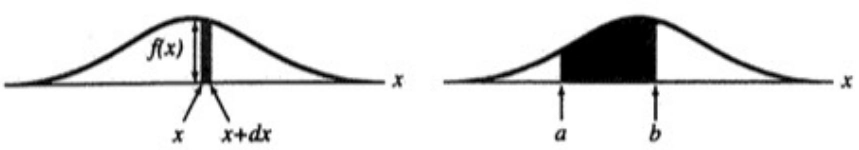
Distribuzione Limite (V)

$\boldsymbol{f(x)dx}$ = frazione di misure che cadono fra x e x + dx

= probabilità che la misura di un risultato cada tra x e x + dx

$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx}$ = frazione di misure che cadono fra a e b

= probabilità che la misura di un risultato cada fra a e b;



Si dimostra che:

1) $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1}$ normalizzazione

2) $\boldsymbol{\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx}$ media

3) $\boldsymbol{s_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{x})^2 f(x)dx}$ varianza

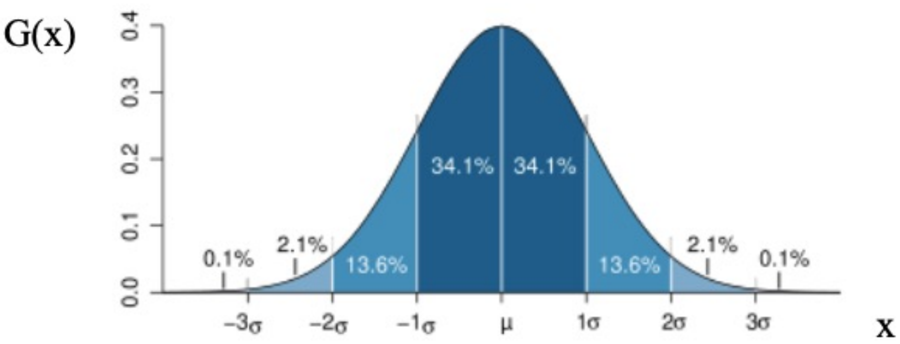
Distribuzione di Gauss (Distribuzione Normale)

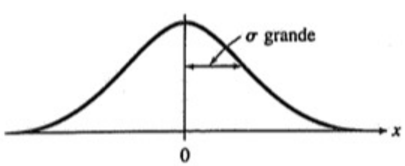
La distribuzione di probabilità (distribuzione limite) relativa ad una misura soggetta ad un grande numero di piccole cause non valutabili che la possono influenzare nei due sensi opposti il risultato verso valori più grandi o più piccoli rispetto al valore medio (**incertezze di tipo casuale**) è la **distribuzione normale** o **di Gauss**:

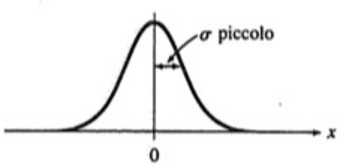
$$\boldsymbol{G(x;\sigma,\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

Dove x è la **variabile casuale** e μ e σ sono due **parametri** che determinano la forma della funzione.

Distribuzione di Gauss (Distribuzione Normale) (II)







- definita per $-\infty < x < +\infty$;
- simmetrica rispetto a $x = \mu$;
- forma "a campana" con due punti di flesso distanti σ da $x = \mu$;
- se σ aumenta, diventa più ampia e il massimo si abbassa;
- [G] = [x]-1 (è una densità di probabilità – PDF)

Si dimostra che:

1) Normalizzazione $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)dx = 1$

2) Media $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xG(x)dx = \mu$

3) Varianza $s_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 G(x)dx = \sigma^2$

Distribuzione di Gauss: Normalizzazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)dx = 1$$

Poniamo $G(x) = Ne^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ e calcoliamo N affinché la G(x) sia normalizzata.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{N} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = N \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Eseguiamo un cambio di variabile: $y = x - \mu \Longrightarrow x = y + \mu \Longrightarrow dx = dy$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)dx = N \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

Eseguiamo un cambio di variabile: ${}^{y}/_{\sigma} = z \Longrightarrow y = \sigma z \Longrightarrow dy = \sigma dz$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)dx = N \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \boxed{\sigma} dz = N\sigma \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz} = N\sigma\sqrt{2\pi}$$

Integrale notevole $= \sqrt{2\pi}$

Distribuzione di Gauss: Normalizzazione (II)

Dal momento che deve essere $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)dx = 1$ dobbiamo porre

$$N\sigma\sqrt{2\pi} = 1 \Rightarrow N = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Arriviamo quindi alla forma derivata per la distribuzione normale

$$G(x; \sigma, \mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$ Cvd

Distribuzione di Gauss: Media

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xG(x)dx = \mu$$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \boxed{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Eseguiamo un cambio di variabile: $y = x - \mu \Longrightarrow x = y + \mu \Longrightarrow dx = dy$

$$\bar{x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (y + \mu)e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

Integrale di una somma = somma di integrali

$$= \cancel{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy} + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{\mu} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \mu \boxed{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy} = \mu$$

Cvd

Ogni contributo di y è cancellato da quello di –y (funzione dispari)

=1 per la normalizzazione

Distribuzione di Gauss: Varianza

$$s_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 G(x)dx = \sigma^2$$

$$s_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \boxed{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Eseguiamo un cambio di variabile: $y = x - \mu \Longrightarrow x = y + \mu \Longrightarrow dx = dy$

$$s_x^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

Eseguiamo un cambio di variabile: $^{y}/_{\sigma} = z \Longrightarrow y = \sigma z \Longrightarrow dy = \sigma dz$

$$s_x^2 = \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{\sigma^2} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} \cancel{\sigma} dz = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Integrazione per parti

Distribuzione di Gauss: Varianza (II)

Integrazione per parti: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)d(x)$

$$s_x^2 = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\boxed{z}}_{f(x)} \underbrace{\boxed{ze^{-\frac{z^2}{2}}}}_{g'(x) \text{ con } g(x) = -e^{-\frac{z^2}{2}}} dz$$

Infatti $\frac{d\left(-e^{-\frac{z^2}{2}}\right)}{dz} = -e^{-\frac{z^2}{2}}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}z\right) = ze^{-\frac{z^2}{2}} \Rightarrow g(x) = -e^{-\frac{z^2}{2}}$

$$s_x^2 = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cancel{\left[-ze^{-\frac{z^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}$$

Integrale notevole $= \sqrt{2\pi}$

Nullo perché è una funzione dispari sul dominio

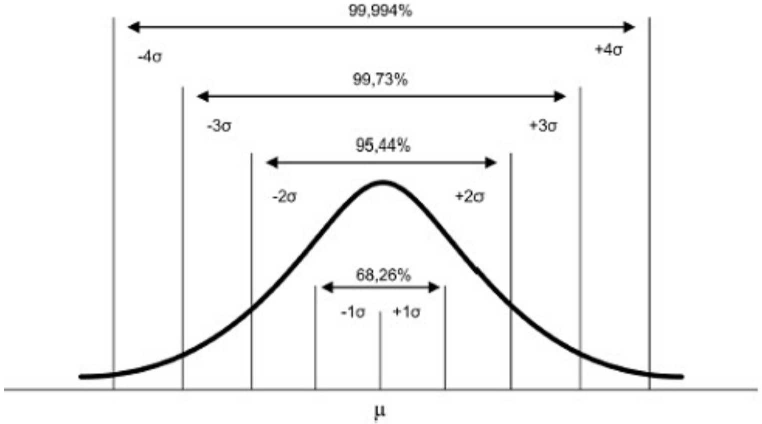
$$s_x^2 = \frac{\sigma^2}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} \cancel{\sqrt{2\pi}} = \sigma^2$$

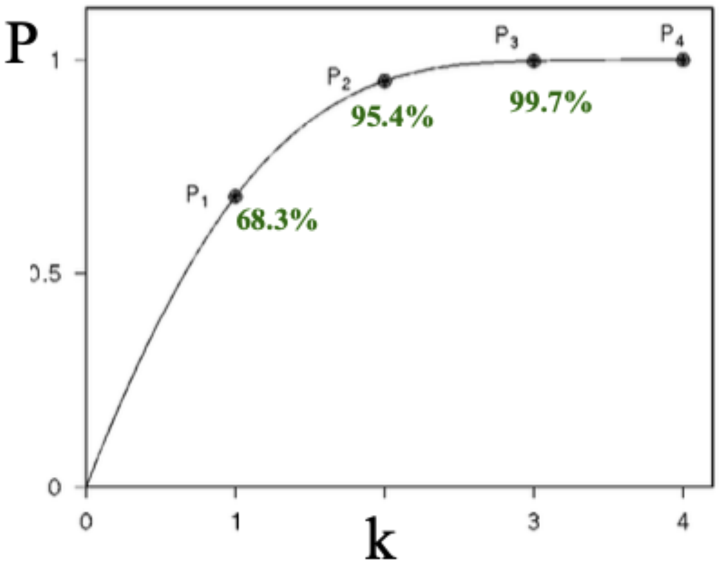
Cvd

Distribuzione di Gauss: Probabilità di una Misura

$$P(x) = \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} G(x)dx$$

Probabilità di ottenere il risultato di una misura fra $\mu - k\sigma$ e $\mu + k\sigma$





Per k = 1,2,3 i valori della probabilità sono noti:

$$P(x) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} G(x)dx = \mathbf{68.3\%} \qquad \mathbf{k = 1}$$

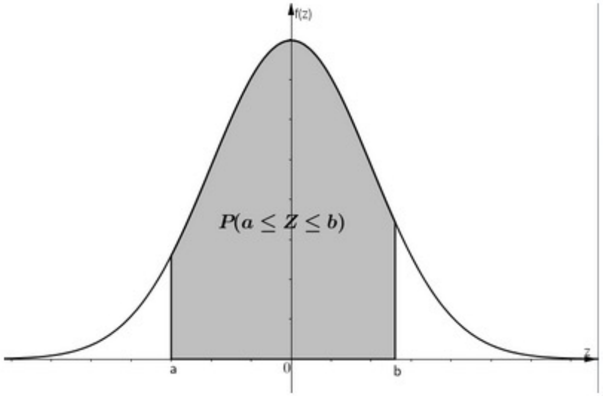
$$P(x) = \int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} G(x)dx = \mathbf{95.4\%} \qquad \mathbf{k = 2}$$

$$P(x) = \int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} G(x)dx = \mathbf{99.7\%} \qquad \mathbf{k = 3}$$

Distribuzione di Gauss: Probabilità di una Misura (II)

$$P(x) = \int_b^a G(x)dx$$

Probabilità di ottenere il risultato di una misura fra a e b.



Per calcolare la probabilità relativa ad un **intervallo generico**, vengono utilizzate **tabelle** che riportano integrali della G espressa in termini della "**variabile normale standard**":

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

La z è una variabile adimensionale che rappresenta la distanza di x dal valore medio, "misurata" in unità di deviazioni standard.

Table C.4. Values of the integral $\Phi^*(z) = \int_0^z \phi(z')\,dz'$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	$\boxed{0.04}$	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
$\boxed{1.9}$	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4776	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987									
3.5	0.4998									
4.0	0.4999									

Come si legge?

Supponiamo di avere
z = a,bc
con a, b, c cifre di z.
Le prime due cifre di z vanno cercate nella prima colonna.
La terza cifra di z va cercata nella prima riga.
Il valore dell'integrale corrisponde all'incrocio fra riga (cifre a,b)e colonna (cifra c) delle cifre di z.
Esempio z = **1.94**
Integrale = 0.4738
(47%)

Esercizio 1

Quanto valgono gli integrali

$$\int_{0.94}^{1.38} G(z)dz \quad \text{e} \quad \int_{-1.04}^{0.92} G(z)dz \ ?$$

Table C.4. Values of the integral $\Phi^*(z) = \int_0^z \phi(z')\,dz'$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441

Esercizio 2

In un articolo, troviamo scritto che la misura della pressione sistolica di 100 persone ha fornito un valore
$p = (120.0 \pm 0.4)$ mmHg. Ipotizziamo che il campione sia stato estratto da una popolazione gaussiana.

i) Quante delle 100 misure ci aspettiamo avessero una pressione compresa tra 126 e 130 mmHg ?

ii) Qual è la probabilità che una ulteriore misura sia compresa tra 116 e 120 mmHg ?

Esercizio 3

L'altezza media di un gruppo di 20.000 individui è distribuita normalmente con media μ=170 cm e con deviazione standard σ=10 cm.

A) Qual è la probabilità che l'altezza sia compresa fra 155 e 180 cm.

B) Quante persone sono alte almeno 2 metri.

C) Quante persone sono alte non più di 1 metro e 60 cm.

Esercizio 4

Ad un esame universitario, il voto medio è stato $\mu=24$ con $\sigma=4$. Supponendo i voti normalmente distribuiti, calcolare la probabilità che uno studente abbia riportato:

A) Un voto superiore a 27

B) Un voto non inferiore a 22

E' inoltre, richiesto:

C) Il voto minimo riportato dal 70% degli studenti

D) Il voto massimo non superato dal 90% degli studenti :

Esercizio 5

Una macchina, confeziona sacchetti di caramelle, del peso medio μ=200 g con uno scarto quadratico medio (deviazione standard) σ=10 g; calcola:

A) La percentuale di sacchetti che pesano più di 220 g

B) La percentuale di sacchetti che pesano più di 190 g

C) Se ad un controllo vengono scartati sacchetti con un peso inferiore a 185 g, su 1000 sacchetti quanti si prevede verranno scartati?

Table C.4. Values of the integral $\Phi^*(z) = \int_0^z \phi(z')\,dz'$.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4776	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987									
3.5	0.4998									
4.0	0.4999									

Tavola della probabilità della curva normale standardizzata

Tavola delle probabilità cumulate per valori NEGATIVI di z

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Tavola delle probabilità della curva normale standardizzata

Probabilità cumulate per valori POSITIVI di z

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Distribuzione di Gauss: Incertezze Casuali

Giustifichiamo la forma della distribuzione normale (di Gauss) come distribuzione limite relativa ad una misura soggetta ad un grande numero di piccole cause che la possono influenzare nei due sensi opposti (**incertezze casuali**).

$$G(x;\sigma,\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \boxed{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

Per farlo, calcoliamo la probabilità *P(x)* che l'esito di una misura sia *x* se il valore vero della grandezza è *X* e sono presenti *n* effetti casuali ognuno dei quali provoca uno "spostamento" *a* (positivo o negativo) nella misura.

Distribuzione di Gauss: Incertezze Casuali (II)

Parametri del modello: X = valore vero
n = numero di effetti casuali
a = entità dello spostamento

Una generica misura si può scrivere come:

$$x = X + n_+ a - (n - n_+)a = X + (2n_+ - n)a$$

dove n_+ è il numero di effetti «positivi» ed è la variabile causale

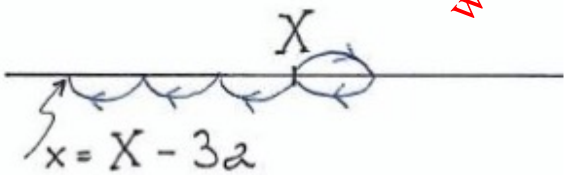
Definendo $s = 2n_+ - n = n_+ - (n - n_+)$ allora $x = X + sa$.
C'è quindi una corrispondenza biunivoca fra x, n_+ e s.

n_+	s	x
0	$-n$	$X - na$
$n/2$	0	X
n	n	$X + na$

Quindi $P(x) = P(n_+) = P(s)$

Random walk

$n = 5 \quad n_+ = 1$



Distribuzione di Gauss: Incertezze Casuali (III)

$$P(n_+) = \boxed{\frac{n!}{n_+!\,(n-n_+)!}}\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Prodotto in cui ogni termine ha probabilità $\frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\dots. = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Coefficiente binomiale: dati due numeri interi n e k $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ indica il numero di combinazioni semplici di k elementi partendo da un gruppo di n

$$s = 2n_+ - n \Rightarrow n_+ = \frac{n+s}{2} \quad \text{e} \quad n - n_+ = \frac{n-s}{2}$$

Quindi risulta che

$$P(s) = \frac{n!}{\left(\frac{n+s}{2}\right)!\left(\frac{n-s}{2}\right)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n \propto \frac{n!}{\left(\frac{n+s}{2}\right)!\left(\frac{n-s}{2}\right)!}$$

Distribuzione di Gauss: Incertezze Casuali (IV)

Approssimazione di Stirling: per n grande $ln(n!) \cong nln(n) - n$

$$lnP(s) \propto ln\frac{n!}{\left(\frac{n+s}{2}\right)!\left(\frac{n-s}{2}\right)!} = ln(n!) - ln\left(\left(\frac{n+s}{2}\right)!\left(\frac{n-s}{2}\right)!\right) =$$

$$= ln(n!) - ln\left[\left(\frac{n+s}{2}\right)!\right] - ln\left[\left(\frac{n-s}{2}\right)!\right] =$$ Log di un prodotto

$$= [n\,ln(n) - n] - \left[\frac{n+s}{2}ln\left(\frac{n+s}{2}\right) - \frac{n+s}{2}\right] - \left[\frac{n-s}{2}ln\left(\frac{n-s}{2}\right) - \frac{n-s}{2}\right] =$$

$$= n\,ln(n) - \cancel{n} - \frac{n+s}{2}ln\left(\frac{n+s}{2}\right) + \cancel{\frac{n+s}{2}} - \frac{n-s}{2}ln\left(\frac{n-s}{2}\right) + \cancel{\frac{n-s}{2}} =$$

$$= n\,ln(n) - \frac{n+s}{2}ln\left(\frac{n+s}{2}\right) - \frac{n-s}{2}ln\left(\frac{n-s}{2}\right) =$$

$$= n\,ln(n) - \frac{n}{2}ln\left(\frac{n+s}{2}\right) - \frac{s}{2}ln\left(\frac{n+s}{2}\right) - \frac{n}{2}ln\left(\frac{n-s}{2}\right) + \frac{s}{2}ln\left(\frac{n-s}{2}\right) =$$

Distribuzione di Gauss: Incertezze Casuali (V)

$$lnP(s) \propto n\,ln(n) - \frac{n}{2}ln\left(\frac{n+s}{2}\right) - \frac{s}{2}ln\left(\frac{n+s}{2}\right) - \frac{n}{2}ln\left(\frac{n-s}{2}\right) + \frac{s}{2}ln\left(\frac{n-s}{2}\right) =$$

$$= n\,ln(n) - \frac{n}{2}\left[ln\left(\frac{n+s}{2}\right) + ln\left(\frac{n-s}{2}\right)\right] - \frac{s}{2}\left[ln\left(\frac{n+s}{2}\right) - ln\left(\frac{n-s}{2}\right)\right] =$$

$$= n\,ln(n) - \frac{n}{2}[ln(n+s) - ln2 + ln(n-s) - ln2]$$
$$- \frac{s}{2}[ln(n+s) - ln2 - ln(n-s) + ln2] =$$

$$= n\,ln(n) - \frac{n}{2}\left[ln\left(n\left(1+\frac{s}{n}\right)\right) - ln2 + ln\left(n\left(1-\frac{s}{n}\right)\right) - ln2\right]$$
$$- \frac{s}{2}\left[ln\left(n\left(1+\frac{s}{n}\right)\right) - ln2 - ln\left(n\left(1-\frac{s}{n}\right)\right) + ln2\right] =$$

Distribuzione di Gauss: Incertezze Casuali (VI)

$$lnP(s) \propto$$

$$n\,ln(n) - \frac{n}{2}\left[ln\left(n\left(1+\frac{s}{n}\right)\right) - ln2 + ln\left(n\left(1-\frac{s}{n}\right)\right) - ln2\right] - \frac{s}{2}\left[ln\left(n\left(1+\frac{s}{n}\right)\right) - ln2 - ln\left(n\left(1-\frac{s}{n}\right)\right) + ln2\right]$$

$$= n\,ln(n) - \frac{n}{2}\left[ln(n) + ln\left(1+\frac{s}{n}\right) - ln2 + ln(n) + ln\left(1-\frac{s}{n}\right) - ln2\right]$$
$$- \frac{s}{2}\left[ln(n) + ln\left(1+\frac{s}{n}\right) - ln2 - ln(n) - ln\left(1-\frac{s}{n}\right) + ln2\right] =$$

$$= \cancel{n\,ln(n)} - \cancel{\frac{n}{2}ln(n)} - \frac{n}{2}ln\left(1+\frac{s}{n}\right) + \frac{n}{2}ln2 - \cancel{\frac{n}{2}ln(n)} - \frac{n}{2}ln\left(1-\frac{s}{n}\right) + \frac{n}{2}ln2$$
$$- \cancel{\frac{s}{2}ln(n)} - \frac{s}{2}ln\left(1+\frac{s}{n}\right) + \cancel{\frac{s}{2}ln2} + \cancel{\frac{s}{2}ln(n)} + \frac{s}{2}ln\left(1-\frac{s}{n}\right) - \cancel{\frac{s}{2}ln2} =$$

$$= \boxed{-\frac{n}{2}ln\left(1+\frac{s}{n}\right)}\boxed{+\frac{n}{2}ln2}\boxed{-\frac{n}{2}ln\left(1-\frac{s}{n}\right)}\boxed{+\frac{n}{2}ln2}\boxed{-\frac{s}{2}ln\left(1+\frac{s}{n}\right) + \frac{s}{2}ln\left(1-\frac{s}{n}\right)} =$$

$$= \boxed{-\frac{n}{2}\left[ln\left(1+\frac{s}{n}\right) + ln\left(1-\frac{s}{n}\right)\right]} + \boxed{n\,ln2} - \boxed{\frac{s}{2}\left[ln\left(1+\frac{s}{n}\right) - ln\left(1-\frac{s}{n}\right)\right]}$$

Distribuzione di Gauss: Incertezze Casuali (VII)

$$lnP(s) \propto = -\frac{n}{2}\left[ln\left(1+\frac{s}{n}\right)+ln\left(1-\frac{s}{n}\right)\right]+nln2-\frac{s}{2}\left[ln\left(1+\frac{s}{n}\right)-ln\left(1-\frac{s}{n}\right)\right]$$

Poiché $\frac{|s|}{n} \ll 1$ per n grande

$$ln\left(1+\frac{s}{n}\right) \approx \frac{s}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{n}\right)^2$$

$$ln\left(1-\frac{s}{n}\right) \approx -\frac{s}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{n}\right)^2$$

Sviluppo di Taylor

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

per |x| <1

$$= -\frac{n}{2}\left[\cancel{\frac{s}{n}}-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{n}\right)^2-\cancel{\frac{s}{n}}-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{n}\right)^2\right]+nln2-\frac{s}{2}\left[\frac{s}{n}-\cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{s}{n}\right)^2}+\frac{s}{n}+\cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{s}{n}\right)^2}\right]=$$

$$= +\frac{\cancel{n}}{2}\left(\frac{s}{\cancel{n}}\right)^2+nln2-\frac{s}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\frac{s}{n}\right)=\frac{s^2}{2n}+nln2-\frac{s^2}{n}=ln(2^n)-\frac{s^2}{2n}$$

Distribuzione di Gauss: Incertezze Casuali (VIII)

$$lnP(s) \propto ln(2^n) - \frac{s^2}{2n}$$

Facendo l'esponenziale dei due membri $P(s) \propto 2^n e^{-\frac{s^2}{2n}}$

Ricordando che $x = X + sa \Longrightarrow s = \frac{x-X}{a}$

$$\Longrightarrow P(s) \propto e^{-\frac{(x-X)^2}{2na^2}}$$

Posso interpretare il parametro X come μ e $\sigma = a\sqrt{n}$

La distribuzione normale (di Gauss) è la distribuzione limite relativa ad una misura soggetta a sole incertezze casuali (cvd).

La Stima dei Parametri

- Dato un campione (x_1, x_2 ...... x_N) di dati estratti da una popolazione gaussiana, qual è la stima più attendibile che possiamo fare dei parametri μ e σ della distribuzione limite ?
- Possiamo ottenere la risposta tramite il **metodo di massima verosimiglianza** (**maximum likelihood**) che ha validità più generale:

  "Le migliori stime dei parametri di una distribuzione sono quelle che rendono massima la probabilità di uscita del campione effettivamente ottenuto".
- Nel caso di una distribuzione di Gauss, si tratta di trovare quella G($x;\mu,\sigma$), tra le infinite possibili variando i due parametri μ e σ, che meglio si adatta all'istogramma in densità di frequenza relativo al campione sperimentale.

La Stima dei Parametri (II)

Dato un campione (x_1, x_2 ...... x_N) di dati estratto da una popolazione gaussiana. Per ogni x_i con i=1,….N vale che

$$P(x_i;\sigma,\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

La probabilità congiunta di tutti gli x_i risulta quindi

$$P(x;\sigma,\mu) = P(x_1;\sigma,\mu)P(x_2;\sigma,\mu) \ldots\ldots P(x_N;\sigma,\mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot\!. \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_N-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} P(x_i;\sigma,\mu) = \frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^N} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \propto \frac{1}{\sigma^N} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

La Stima dei Parametri (III)

$$P(x;\sigma,\mu) \propto \frac{1}{\sigma^N} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Chiamo $L = ln[P(x;\sigma,\mu)]$
I parametri che massimizzano $P(x;\sigma,\mu)$ massimizzano anche L

$$L = ln[P(x;\sigma,\mu)] = ln\left[\frac{1}{\sigma^N} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

$$= ln\frac{1}{\sigma^N} - \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$= ln\sigma^{-N} - \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} = -Nln\sigma - \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

La Stima dei Parametri (IV)

$$L = ln[P(x;\sigma,\mu)] \propto -Nln\sigma - \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

<u>Stima di μ</u>

Il valore di μ che rende massimo L è quello che rende nulla la derivata nel parametro

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial \mu}\left(-Nln\sigma - \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$-\frac{-2\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)}{2\sigma^2} = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu) = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{N}x_i - \sum_{i=1}^{N}\boxed{\mu} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N}x_i - N\mu = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{N}x_i}{N} = \bar{x}$$

La miglior stima di μ è esattamente la media del campione

La Stima dei Parametri (V)

$$L = ln[P(x;\sigma,\mu)] \propto -Nln\sigma - \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

<u>Stima di σ</u>

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(-Nln\sigma - \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$-N\frac{1}{\cancel{\sigma}} - \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{\cancel{2}}\left(-\frac{\cancel{2}}{\sigma^{\cancel{3}\,2}}\right) = 0 \Longrightarrow -N + \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N} \quad \text{Da cui} \quad \widehat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N-1}$$

N-1 perché un parametro già determinato con i dati

Distribuzioni di Variabili Casuali

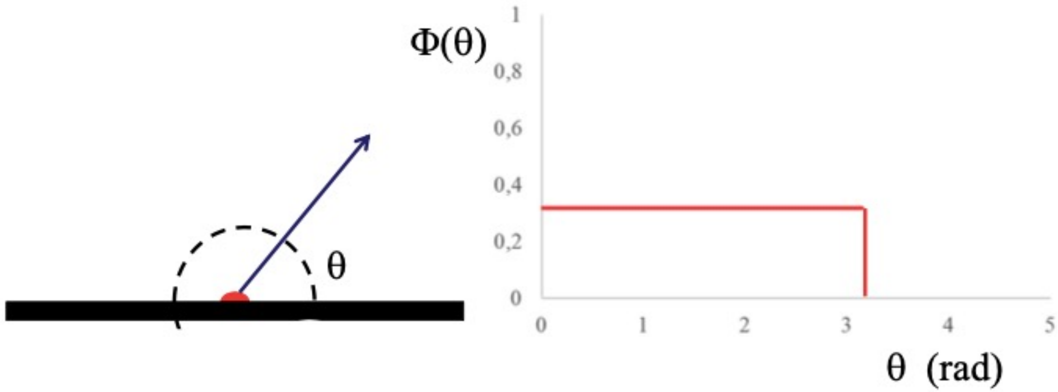
- Il concetto di distribuzione di probabilità (PDF) è generale e può essere applicato a tutti i fenomeni casuali.

- Si parla di "**variabile casuale**", dove la variabilità non è necessariamente dovuta agli effetti casuali che intervengono nel processo di misura (come per la gaussiana) ma piuttosto alla natura stocastica del fenomeno stesso.

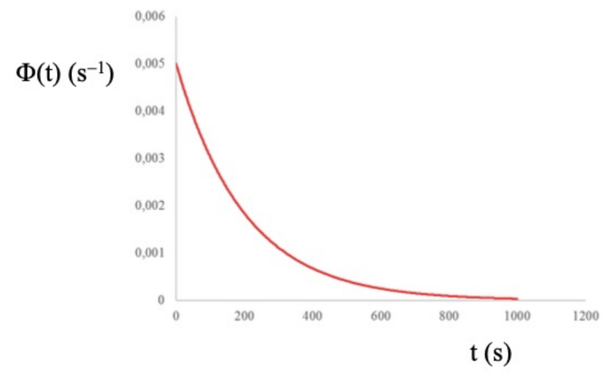
- Sono molte le PDF di interesse per la fisica.

Distribuzioni di Variabili Casuali (II)

Esempio: distribuzione uniforme (angolo in un decadimento isotropo)

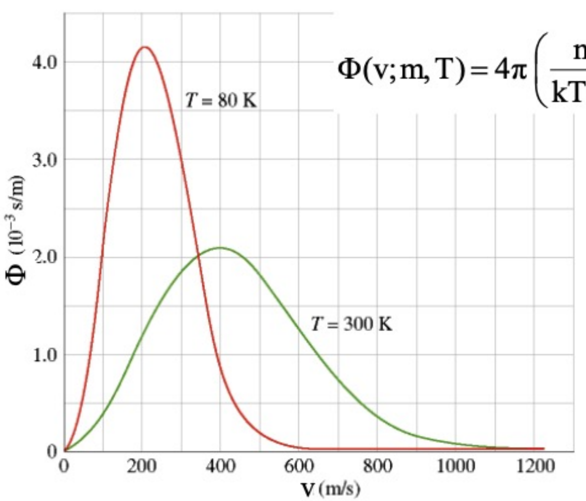


Esempio: distribuzione esponenziale (durata di un componente elettronico, vita di una particella instabile)



Esempio: distribuzione di Maxwell-Boltzmann delle velocità molecolari in un gas all'equilibrio termico

$$\Phi(v;m,T)=4\pi\left(\frac{m}{kT2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}v^2e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$



Distribuzioni di Variabili Casuali (III)

Per ogni PDF $\boldsymbol{\Phi(x)}$ valgono le seguenti definizioni:

$\boldsymbol{\Phi(x)dx}$ = frazione di misure che cadono fra x e x $+\,dx$
= probabilità che la misura di un risultato cada tra x e x $+\,dx$

$\boldsymbol{\int_a^b \Phi(x)dx}$ = frazione di misure che cadono fra a e b
= probabilità che la misura di un risultato cada fra a e b;

$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)dx = 1}$ (normalizzazione)

$\boldsymbol{\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi(x)dx}$ (media)

$\boldsymbol{s_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2\Phi(x)dx}$ (varianza)

Distribuzioni di Variabili Casuali (IV)

$$\boxed{s_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

La varianza è pari alla **media dei quadrati meno il quadrato della media**

Dimostrazione:

$$s_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 \Phi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + \bar{x}^2 - 2x\bar{x})\Phi(x)dx =$$

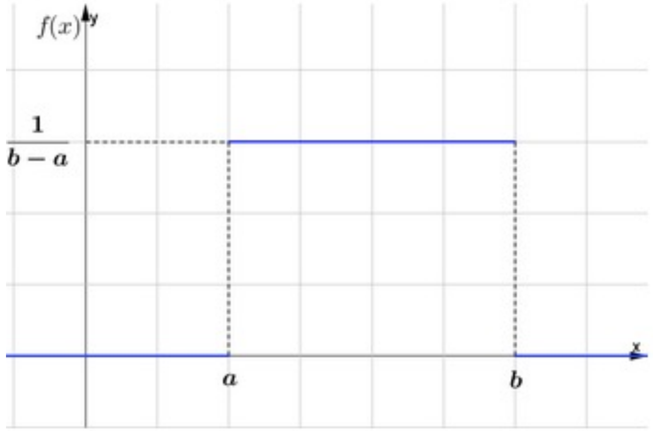
$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \Phi(x)dx}_{=\overline{x^2}\text{ (def di media)}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{\bar{x}^2}\Phi(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{2\bar{x}} x\Phi(x)dx =$$

$$= \overline{x^2} + \bar{x}^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)dx}_{= 1\text{ (normalizzazione)}} - 2\bar{x} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x\Phi(x)dx}_{= \bar{x}\text{ (def di media)}} =$$

$$= \overline{x^2} + \bar{x}^2 - 2\bar{x}\bar{x} = \overline{x^2} + \bar{x}^2 - 2\bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad \text{(Cvd)}$$

Distribuzione Uniforme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{Se } x < a \lor x > b \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{Se a} \le x \le b \end{cases}$$



Si dimostra che:

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2} \quad \text{Media}$$

$$s_x = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \quad \text{Deviazione standard}$$

$$\frac{b-a}{2} = \text{incertezza massima} \Longrightarrow \boxed{s_x = \frac{incertezza\_massima}{\sqrt{3}}}$$

Incertezza standard di risoluzione

L'incertezza su una misura diretta ripetibile dovuto alla **risoluzione di uno strumento** viene calcolato come **deviazione standard della distribuzione uniforme**

Esercizio 6

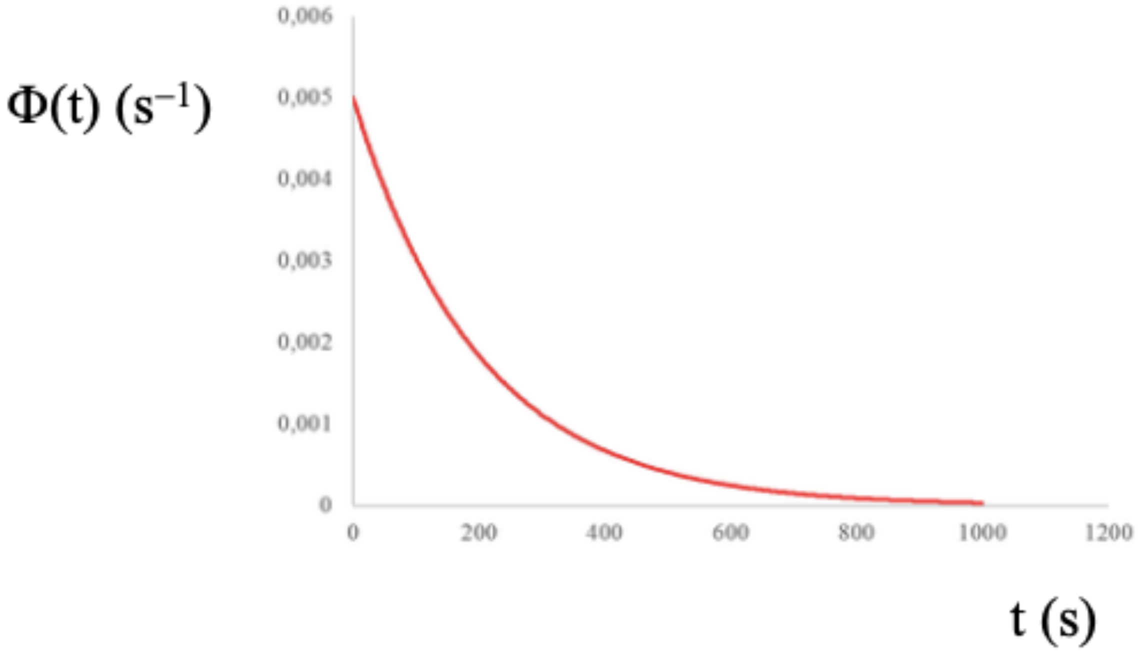
Data la distribuzione di probabilità uniforme $\Phi(x) = \dfrac{1}{(b - a)}$ per $a < x < b$, calcolare:

(1) il valore medio $\overline{x}$;

(2) la deviazione standard s_x

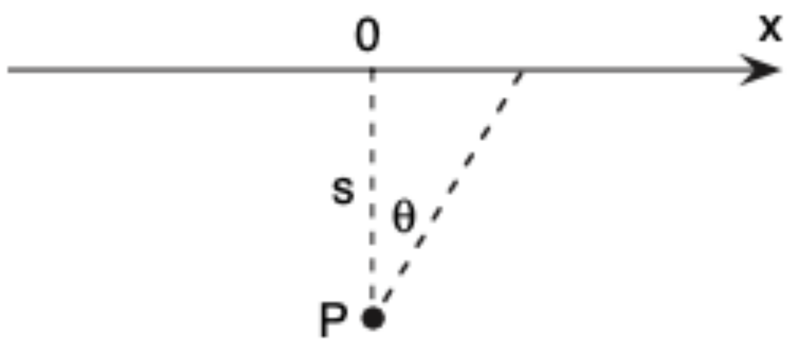
Esercizio 7

Data la PDF esponenziale $\Phi(t) = ce^{-\frac{t}{\tau}}$
nell'intervallo $0 < t < \infty$ (dove c = costante da determinare),
calcolare il valore medio $\bar{t}$



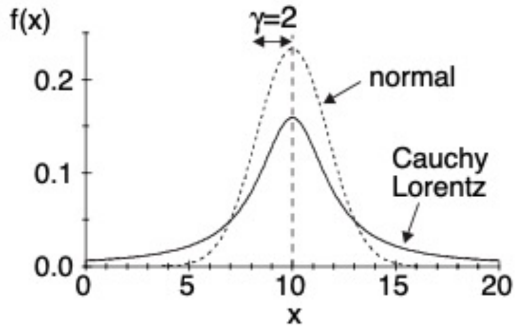
Esercizio 8

Una sorgente radioattiva è situata in posizione P (vedi figura) ad una distanza s dal piano di un detector posizionato lungo l'asse delle x. La sorgente radioattiva emette in maniera isotropa variando l'angolo fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$. Qual è la densità di probabilità della variabile casuale x?



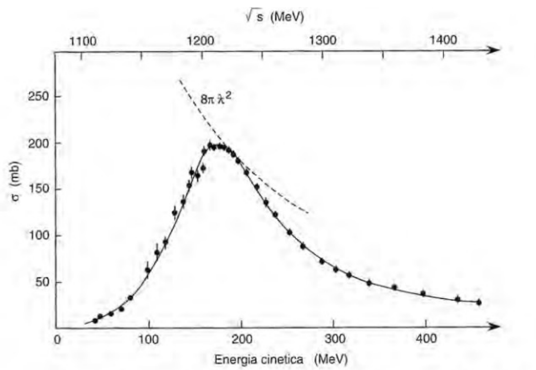
Distribuzione di Cauchy-Lorentz

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{s}{x^2 + s^2}}$$



A parità di media è più bassa di una distribuzione normale e con le code più popolate.

Funzione «patologica»: sebbene questa distribuzione sia ben definita e abbia una connessione con un fenomeno fisico, la distribuzione non ha una media o una varianza poiché gli integrali divergono (infiniti).



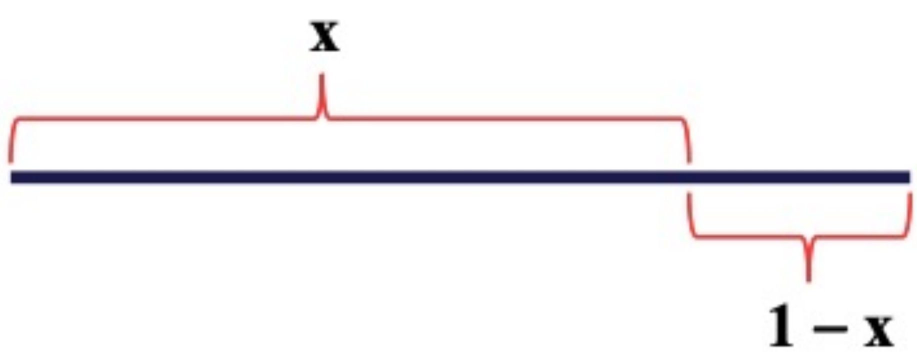
Sezione d'urto totale $\pi^+ p$ in funzione dell'energia cinetica del π incidente, indicata nella scala in ascissa in basso, nella regione della risonanza $\Delta^{++}(1232)$. Il valore massimo, al picco, della sezione d'urto è consistente con il valore massimo $8\pi\lambda\!\!\!^-{}^2$ previsto per una risonanza elastica con spin 3/2. La scala in ascissa in alto si riferisce all'energia nel c.m., ovvero alla massa effettiva del sistema π p.

Meglio conosciuta in fisica delle particelle come **Breit-Wigner** ed è usata per descrivere **fenomeni di risonanza** (picco ad un certo valore di energia nell'urto fra due o più particelle).

Esercizio 9

Barre di lunghezza unitaria vengono spezzate a caso in due parti, di lunghezza x e (1–x), con $0.5 \le x \le 1$. La densità di probabilità della variabile x è quindi uniforme. Calcolare il valore medio della variabile casuale r definita come:

$$r = \frac{\text{lunghezza del pezzo corto}}{\text{lunghezza del pezzo lungo}} = \frac{1-x}{x}$$



Esercizio 10

La durata t di un certo componente elettronico segue la densità di probabilità esponenziale

$$\Phi(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

nell'intervallo $0 < t < \infty$.

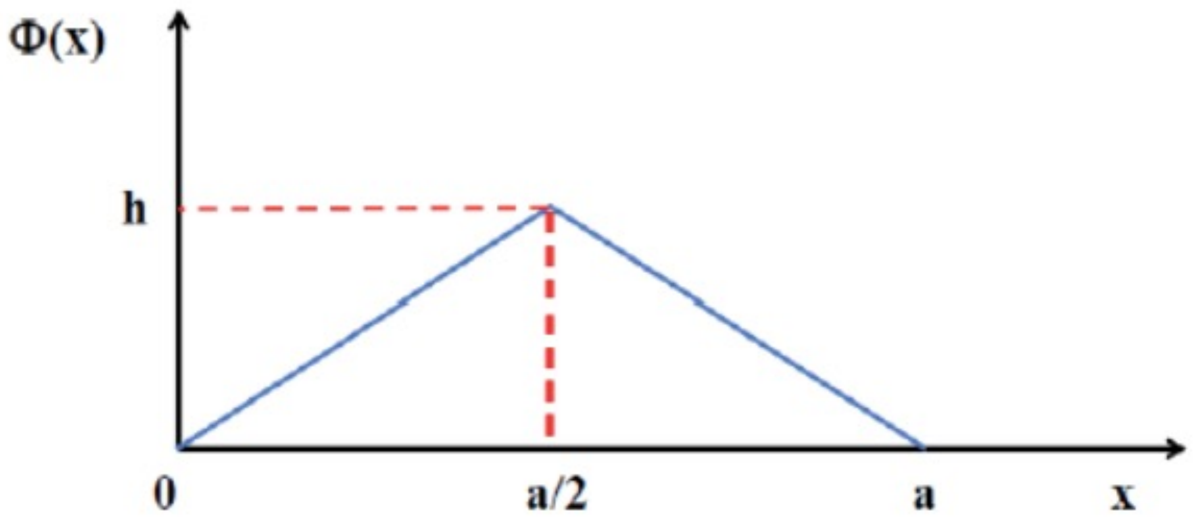
Stimare il parametro τ, secondo il principio di massima verosimiglianza, in base ad un campione di misure $(t_1, t_2, \ldots t_N)$

Esercizio 11

La variabile casuale continua x segue la PDF triangolare $\Phi(x)$ nell'intervallo $0 \leq x \leq a$, dove $a = 8$ mm.

Quanto vale l'altezza h ?

Quanto vale la deviazione standard s_x ?



Esercizio 12

La Full Width at Half Maximum (FWHM), cioè la larghezza a metà altezza, è una grandezza spesso facilmente misurabile in istogrammi gaussiani sperimentali. Qual è la relazione che lega la FWHM e il parametro σ della gaussiana ?