Corso di Laboratorio di Meccanica e Termodinamica
Modulo ROOT
Lezione VI

Silvia Arcelli

15 Maggio 2024

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

probabilità *p*(*k*) che un evento E si verifichi *k* volte su *n* estrazioni, sotto le seguenti ipotesi:

- **l'evento E ha probabilità *p* di accadere, e (1-p) =q di non accadere (2 soli esiti): processo di Bernoulli**

- **le estrazioni sono indipendenti l'una dall'altra**:

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Con: $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Valor medio: $\mu = np$

Varianza: $\sigma^2 = npq$.

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

- **Cosa succede a una distribuzione Binomiale, se mando n (il numero di prove) «all'infinito», fissato p (probabilità che l'evento accada)?**

la distribuzione di Poisson tende a ***una Gaussiana***

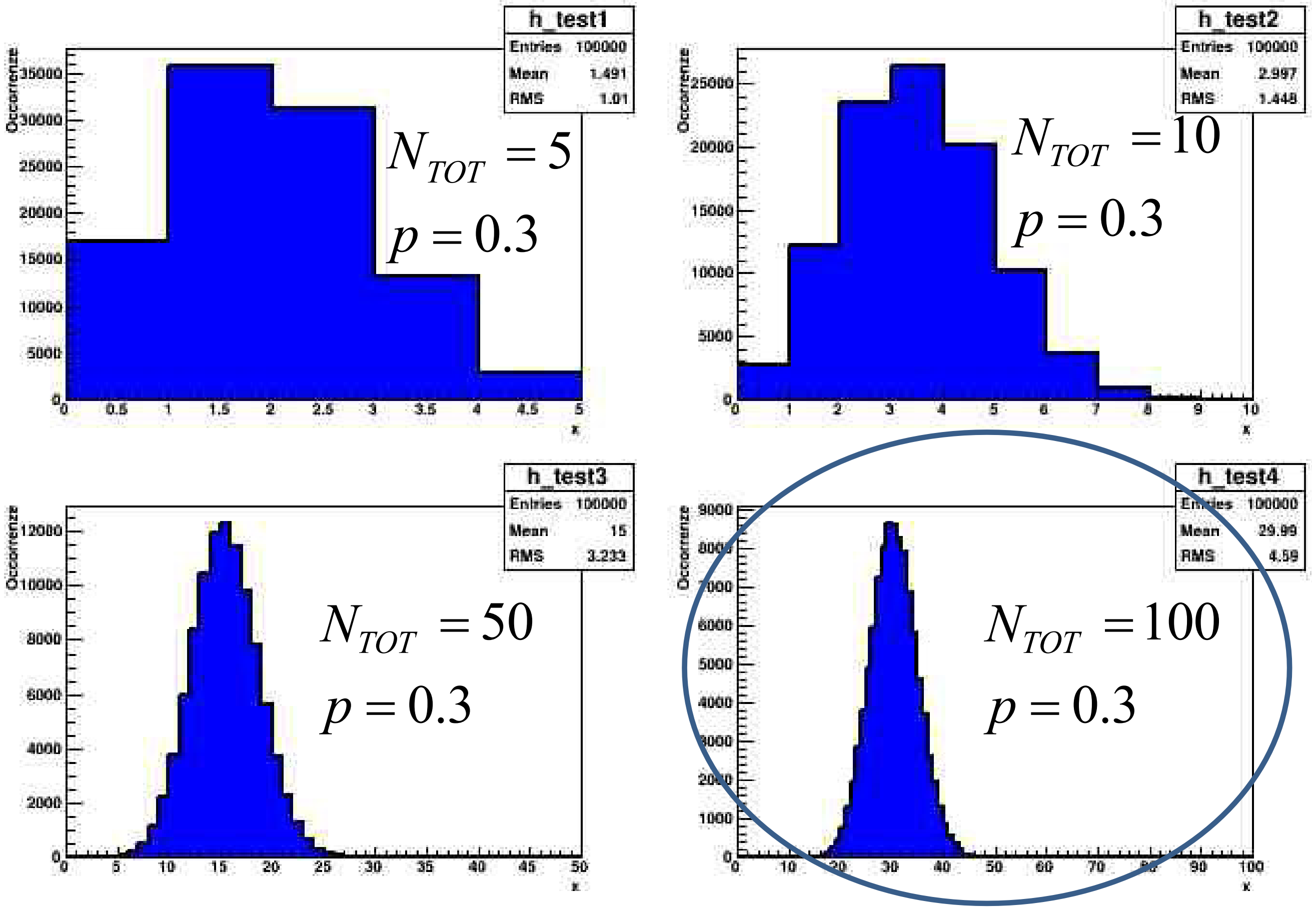
DISTRIBUZIONE BINOMIALE

- **10^5 (ngen) estrazioni da una binomiale, tenendo fisso p (prob) e variando il numero totale di prove (ntot[i]).**

```
Int_t ntot[4]={5,10,50,100};
for (Int_t i=0;i<4;i++){
  for(Int_t j=0;j<ngen;j++){ //ciclo di generazione
   Double_t x=gRandom->Binomial(ntot[i],prob);
   h[i]->Fill(x);
  }
}
```

Macro Binomial-Gaussian.C

DISTRIBUZIONE BINOMIALE
aumentando il numero di prove (N_{TOT})



Andamento sempre più «gaussiano»

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

- **la media e la RMS dell'istogramma sono consistenti con i valori attesi (prendendo per esempio come riferimento l'ultima distribuzione):**

$$\mu = N_{TOT} \cdot p = 100 \cdot 0.3 = 30$$

$$\sigma = \sqrt{N_{TOT} \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0.3 \cdot 0.7} = 4.58$$

DISTRIBUZIONE POISSONIANA

la distribuzione di Poisson descrive processi rari ed è il limite della distribuzione binomiale quando:

- **il numero di prove n diventa "molto grande" ($n \to \infty$)**
- **la probabilità p che l'evento si verifichi è "molto piccola" (cioè $p \to 0$)**
- **il prodotto *np* è una costante positiva diversa da 0**

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Valore medio: $\mu = \lambda$

Varianza: $\sigma^2 = \lambda$

DISTRIBUZIONE POISSONIANA

- **Verifica Empirica: cosa succede a una binomiale con media μ=np se mando p a zero e n all'infinito?**

*La distribuzione è, come aspettato, **una Poissoniana***

DISTRIBUZIONE POISSONIANA

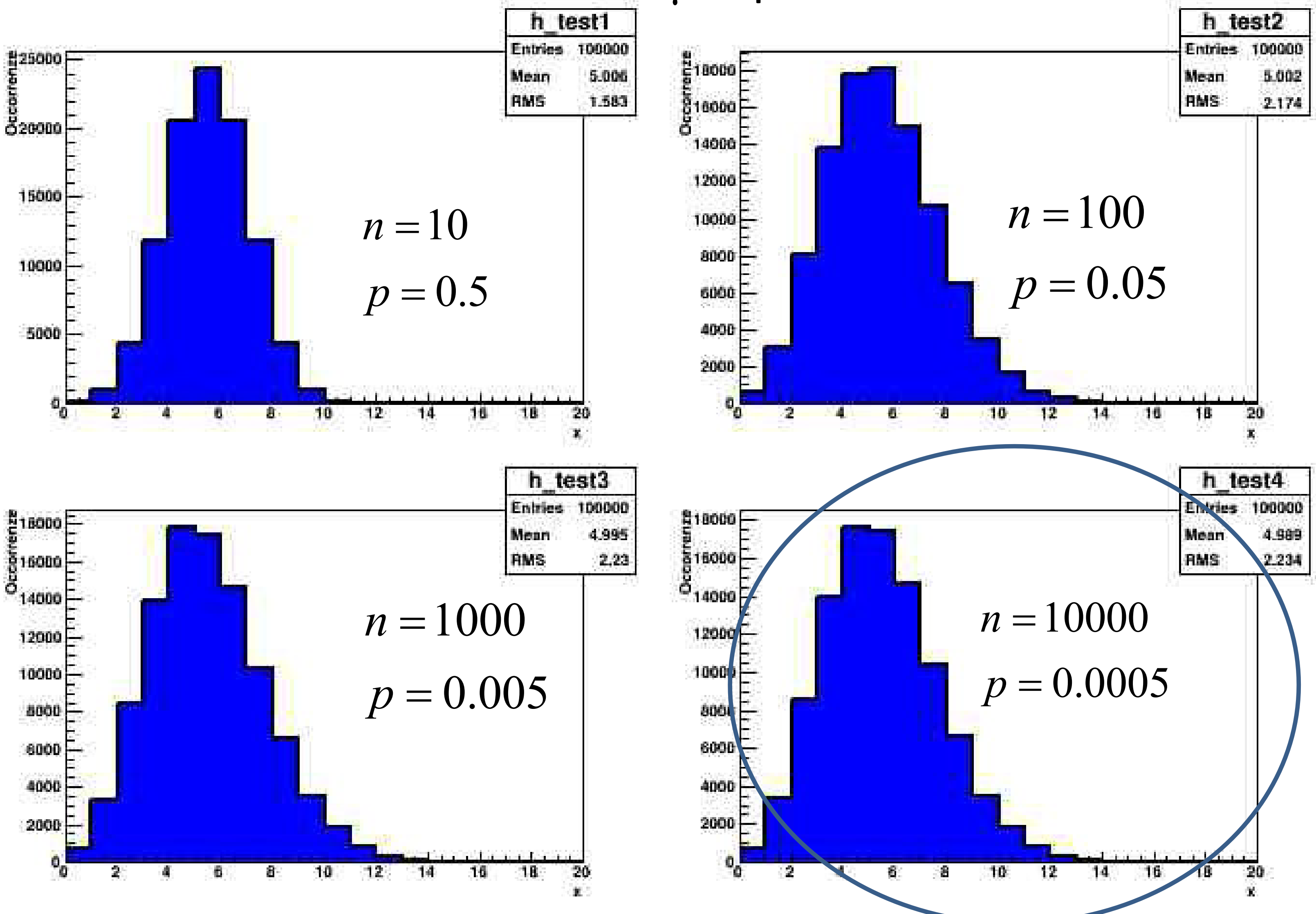
- **10^5 (ngen) estrazioni da una binomiale, variando ntot[i] e prob in modo che la media μ =ntot*prob sia costante (=5):**

```
Int_t ntot[4]={10,100,1000,10000};
for (Int_t i=0;i<4;i++){
 for(Int_t j=0;j<ngen;j++){
   prob=5./ntot[i]; //mu=n*p=5
   Double_t x=gRandom->Binomial(ntot[i],prob);
   h[i]->Fill(x);
}}
```

Macro Binomial-Poisson.C

DISTRIBUZIONE POISSONIANA

Binomiali con μ=np=5



DISTRIBUZIONE POISSONIANA

Primo istogramma: Binomiale con p=0.5 e ntot=10

- Media dell'istogramma: 5.00577 +/- 0.00500721
- RMS dell'istogramma: 1.58342 +/- 0.00354063

consistente con μ =np e $\sigma=\sqrt{}$npq di una binomiale, non consistente con μ =λ e $\sigma=\sqrt{\lambda}$ di una poissoniana (non siamo ancora nelle condizioni di limite ($n \to \infty$ e $p \to 0$)

Quarto istogramma: Binomiale con o=0.0005 e ntot=10000

- Media dell'istogramma: 4.98907 +/- 0.00706529
- RMS dell'istogramma: 2.23424 +/- 0.00499591

consistente con μ =np e $\sigma=\sqrt{}$npq di una binomiale, ma anche consistente con μ =λ e $\sigma=\sqrt{\lambda}$ di una poissoniana

DISTRIBUZIONE POISSONIANA

- Cosa succede a una **Poissoniana** se mando la **media** $\mu = \lambda$ all'infinito?

la distribuzione approssima progressivamente

una Gaussiana

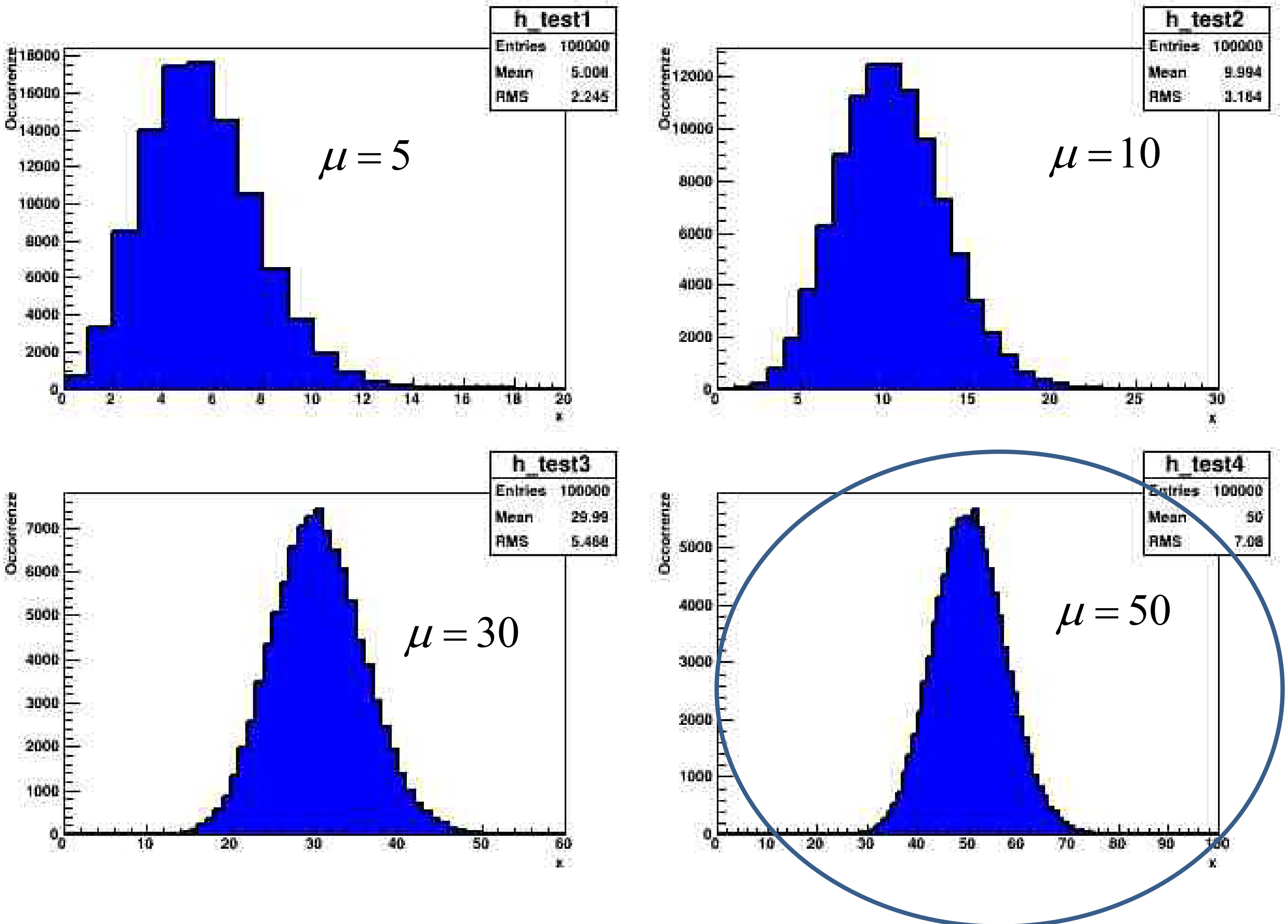
DISTRIBUZIONE POISSONIANA

- **10^5 (ngen) estrazioni da una Poissoniana, variando la media $\mu = \lambda$ (mean[i]).**

```
Int_t mean[4]={5,10,30,50};
for (Int_t i=0;i<4;i++){
       for(Int_t j=0;j<ngen;j++){
              Double_t x=gRandom->Poisson(mean[i]);
                     h[i]->Fill(x);
}}
```

Macro Poisson-Gaussian.C

DISTRIBUZIONE POISSONIANA



DISTRIBUZIONE BINOMIALE E POISSONIANA

Abbiamo quindi visto che :

1)la distribuzione binomiale, nel limite in cui n $\rightarrow$ +∞ e il prodotto *np* è un numero reale "sufficientemente grande" (~30), tende a una gaussiana con media μ = *np* e varianza σ^2= *npq*

2)la distribuzione binomiale ha come limite la distribuzione di Poisson per *n* $\rightarrow$ +∞ , *p*$\rightarrow$ 0 e prodotto *np* costante

3)Anche la distribuzione di Poisson ha come limite la Gaussiana, se $\mu=\lambda$ è sufficientemente grande (un valore da ~30 in poi)

Le proprietà 1) e 3) sono conseguenza del teorema del limite centrale

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

- **Teorema del limite centrale:**

La somma di N variabili aleatorie di distribuzione arbitraria (ma identicamente distribuite) e aventi valori attesi comparabili e varianza finita

tende alla Gaussiana per grandi N

- **N.B. le variabili aleatorie <u>non</u> devono essere necessariamente gaussiane!**

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

- **Nel caso della Binomiale la variabile k (i successi) può essere vista come la somma di n variabili aleatorie (le prove), ciascuna delle quali assume un valore 1 o 0 con probabilità p e q=(1-p) . Al crescere di n, la variabile aleatoria somma (i successi k) deve presentare una distribuzione di probabilità che tende a quella della Gaussiana.**

- **Poichè la Binomiale tende alla Poissoniana in opportune condizioni, anche per la Poissoniana vale la stessa proprietà.**

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

- **Proprietà: La gaussiana limite risultante ha media e varianza definite ancora da:**

$$\mu = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \dots + \alpha_n\mu_n$$

$$\sigma^2 = \alpha^2{}_1\sigma^2{}_1 + \alpha^2{}_2\sigma^2{}_2 + \dots + \alpha^2{}_n\sigma^2{}_n$$

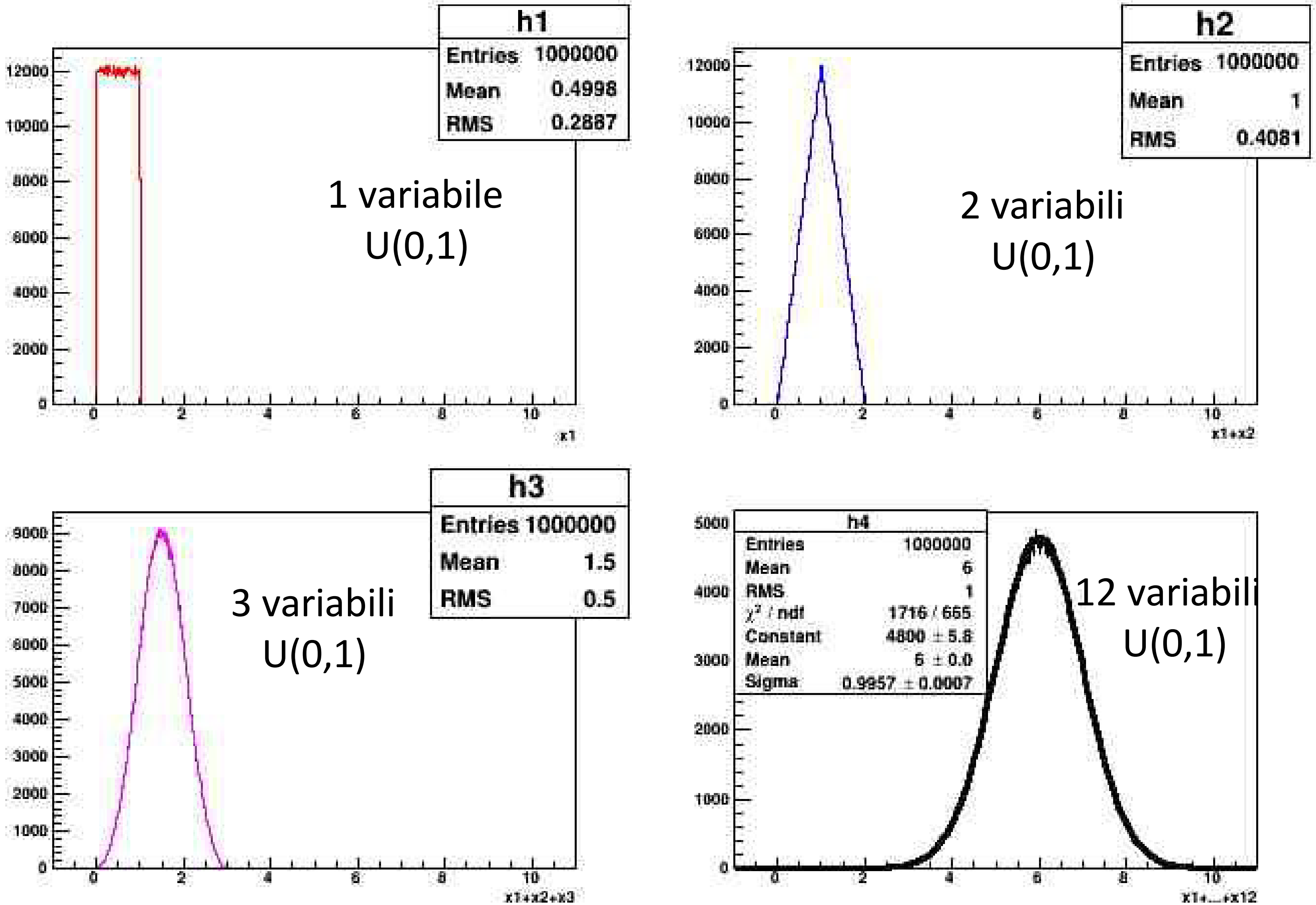
- **Nell'esempio che vi presento (N variabili U(0,1), non gaussiane!)**

$$\mu = N \cdot \bar{x}_{U(0,1)} = N \cdot 0.5$$

$$\sigma^2 = N \cdot \sigma^2_{U(0,1)} = N \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)^2$$

Macro CLT.C

SOMMA DI N VARIABILI CASUALI TENDE ALLA DISTRIBUZIONE GAUSSIANA (TLC)



SOMMA DI N VARIABILI CASUALI TENDE ALLA DISTRIBUZIONE GAUSSIANA (TLC)

- **Analisi della distribuzione somma delle 12 variabili U(0,1) uniformemente distribuite. Ci si aspetta che :**

$$\mu = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \ldots + \alpha_n\mu_n$$

$$\sigma^2 = \alpha^2{}_1\sigma^2{}_1 + \alpha^2{}_2\sigma^2{}_2 + \ldots + \alpha^2{}_n\sigma^2{}_n$$

$$\Rightarrow \quad \mu = 12 \cdot \mu_{U(0,1)} = 12 \cdot 0.5 = 6$$

$$\sigma = \sqrt{12 \cdot \sigma^2_{U(0,1)}} = \sqrt{12} \cdot \sigma_{U(0,1)} = \sqrt{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} = 1$$

Valori osservati:

- **Media dell'istogramma: 6.00019 +/- 0.00100015**
- **RMS dell'istogramma: 1.00015 +/- 0.000707212**
- **Convergenza verso la distribuzione gaussiana (discreto χ^2/DOF)**

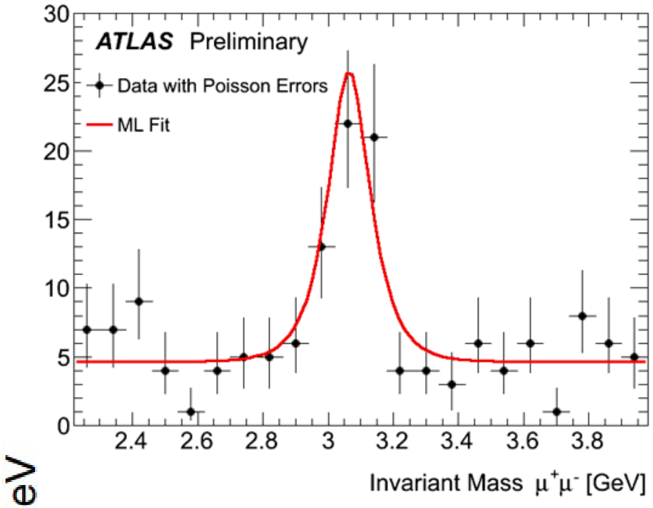
DISTRIBUZIONE DI CAUCHY

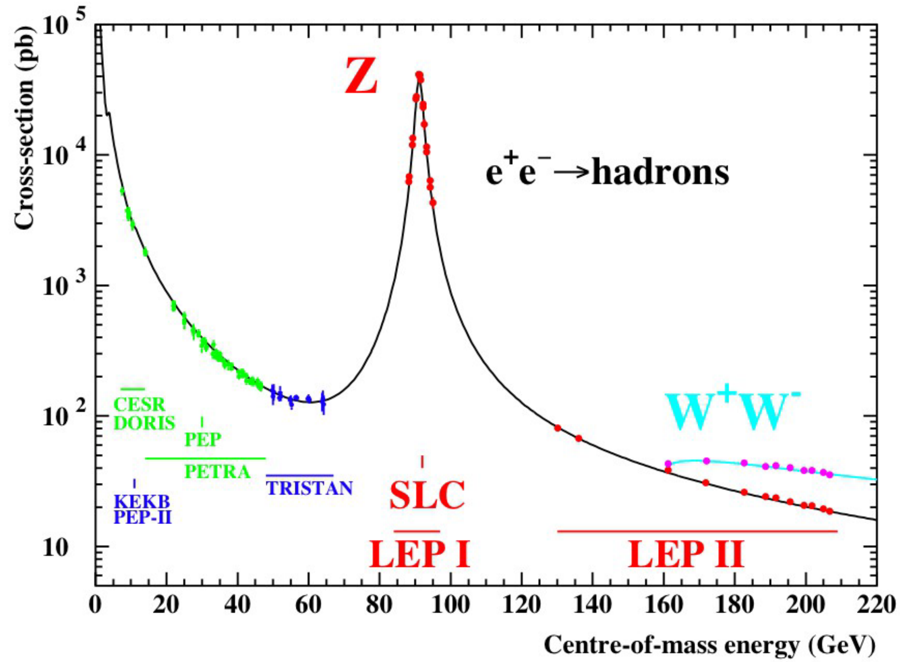
- **Se una variabile casuale θ è uniformemente distribuita in $[-\pi/2,\pi/2]$, la variabile $X=X_0+b\tan(\theta)$ con $b>0$ è distribuita secondo la distribuzione di Cauchy (detta anche Lorentziana):**

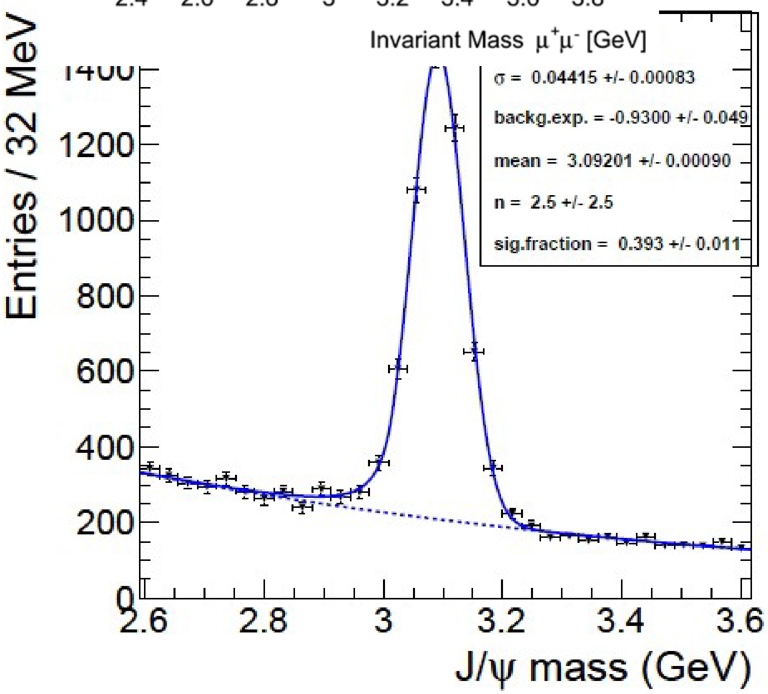
$$f(X) = \frac{1}{\pi}\frac{b}{(X-X_0)^2+b^2}$$

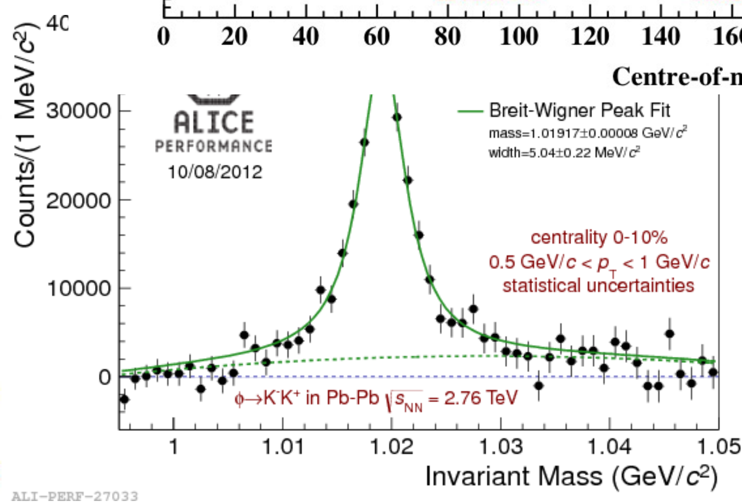
- **Molto rilevante in Fisica, descrive i fenomeni di risonanza...**

UNA STRETTA PARENTE: LA BREIT-WIGNER









Particelle elementari:

-X0 è la massa, m

-b è legato alla vita media τ

DISTRIBUZIONE DI CAUCHY

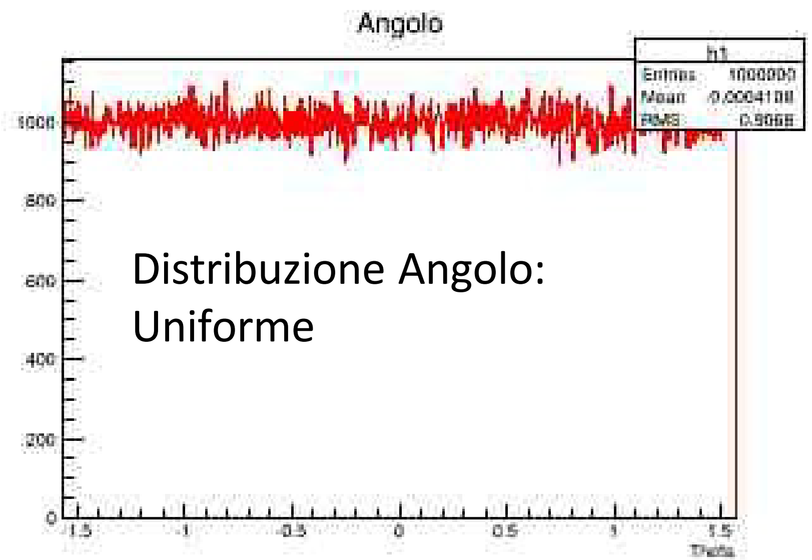
- **Generazione di θ in $[-\pi/2,\pi/2]$, e analisi delle occorrenze in funzione della variabile $X= \tan(\theta)$ attraverso un istogramma;**

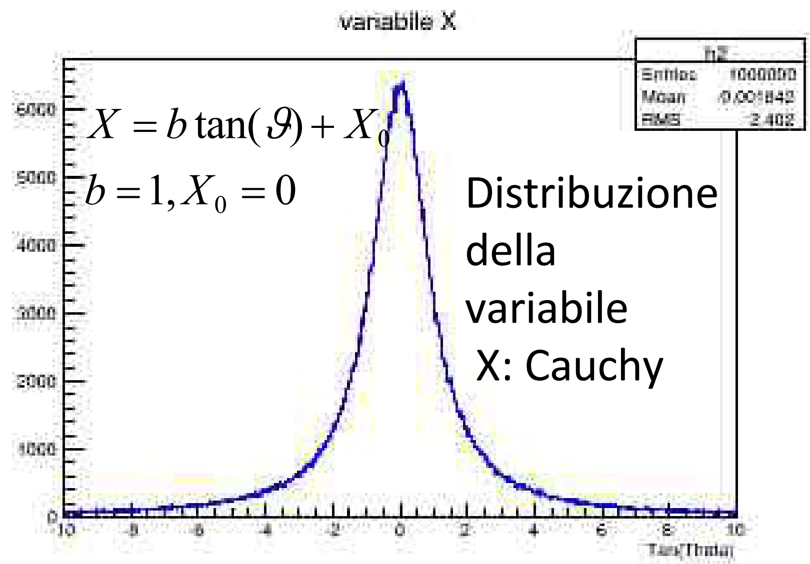
```
for(Int_t j=0;j<1000000;j++){
  Theta=gRandom->Uniform(-TMath::Pi()/2.,TMath::Pi()/2.);
   h1->Fill(Theta); //uniform
   h2->Fill(TMath::Tan(Theta));//X=tan(theta), Cauchy X0=0 e b=1
 }
```

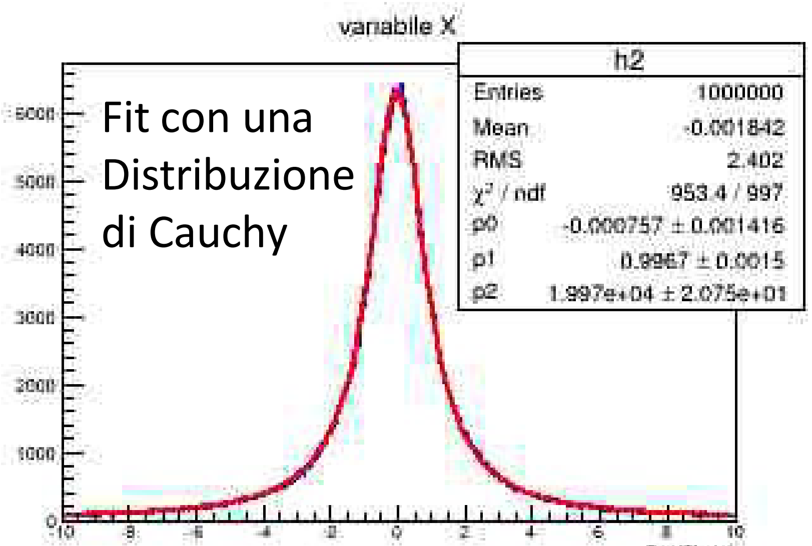
- **Ci aspettiamo che la variabile X segua una Cauchy con $b=1$ e $X_0=0$.**
- **Verifica attraverso un fit con la funzione di Cauchy, disponibile in root: $TMath::CauchyDist(x,X_0,b)$**

Macro Cauchy.C

DISTRIBUZIONE DI CAUCHY







$$f(X) \propto \frac{1}{\pi}\frac{1}{X^2 + 1^2}$$

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

Fit a

TMath::CauchyDist(x,X_0,b)