

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia



ENG10001  
Circuitos Elétricos I-C

---

## Trabalho Bônus 2

### Representação em Espaço de Estados

---

Pedro Lubaszewski Lima (00341810)

Turma A

10 de janeiro de 2025

# Sumário

1.1	Enunciado e Circuitos . . . . .	2
2.1	Representação dos Circuitos em Espaços de Estados . . . . .	4
2.1.1	Circuito do Exercício 8.33 . . . . .	4
2.1.2	Circuito do Exercício 8.38.1 . . . . .	6
2.1.3	Circuito do Exercício 8.38.2 . . . . .	8
2.1.4	Circuito do Exercício 8.39 . . . . .	10
3.1	Circuito Equivalente de Thevénin da Entrada . . . . .	11
4.1	Análise da Associação de Quadripolos . . . . .	14
4.1.1	Representação dos Circuitos . . . . .	14
4.1.2	Parâmetros do Quadripolo $Q2$ . . . . .	14
4.1.3	Parâmetros do Quadripolo $Q1$ . . . . .	18
4.1.4	União dos Quadripolos . . . . .	20
5.1	Circuito Equivalente de Norton da Saída . . . . .	22
6.1	Ganho de Tensão da Saída $V_2/V_1$ . . . . .	24

## 1.1 Enunciado e Circuitos

Este trabalho consiste em representar um dado circuito da lista principal de exercícios de circuitos de segunda ordem em espaços de estados. Esse circuito, bem como as saídas dele seriam sorteados de acordo com o número de matrícula. No entanto, para este trabalho, será feita a análise de todos os possíveis circuitos sorteáveis, com todas as saídas sorteáveis. Todas as análises considerarão as condições iniciais em  $t_0 = 0^+s$ . Abaixo são apresentados os circuitos com as suas respectivas saídas desejadas:

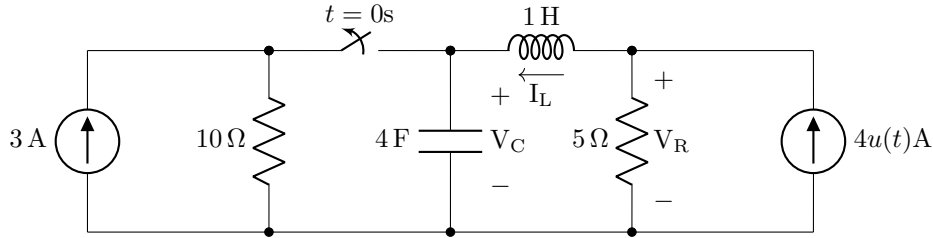


Figura 1: Circuito do Exercício 8.33

Nesse primeiro circuito, chamar-se-á de  $u = 4u(t)A$ . A fonte mais à esquerda passa a não afetar o circuito em  $t \geq t_0$ . Além disso,  $x_1 = V_C$  e  $x_2 = I_L$ . Por fim,  $y_1 = V_C$ ,  $y_2 = I_L$  e  $y_3 = V_R$ .

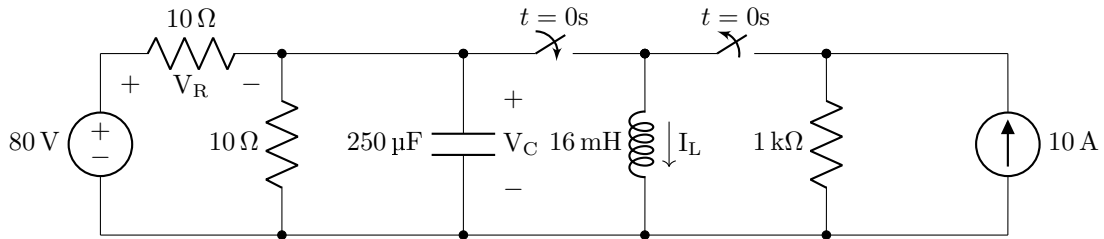


Figura 2: Circuito do Exercício 8.38.1

No segundo circuito, chamar-se-á de  $u = 80V$ . A justificativa é igual àquela do exercício anterior, a fonte da direita não afeta mais o circuito em  $t \geq t_0$ , tempo de interesse. Além disso,  $x_1 = V_C$  e  $x_2 = I_L$ . Por fim,  $y_1 = V_C$ ,  $y_2 = I_L$  e  $y_3 = V_R$ .

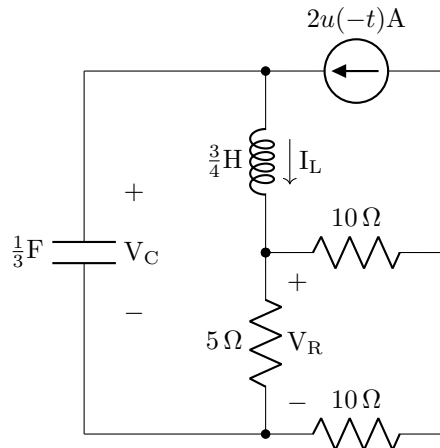


Figura 3: Circuito do Exercício 8.38.2

No terceiro, a partir de  $t = t_0$ , não há mais fontes de alimentação. Por conta disso, não há entradas para a representação em espaço de estados. Além disso,  $x_1 = V_C$  e  $x_2 = I_L$ . Por fim,  $y_1 = V_C$ ,  $y_2 = I_L$  e  $y_3 = V_R$ .

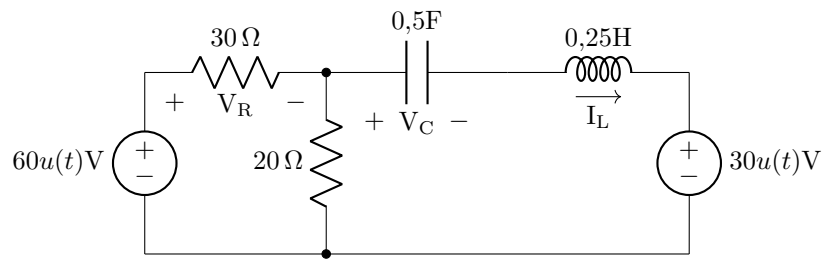


Figura 4: Circuito do Exercício 8.39

Para finalizar, no último circuito,  $u_1 = 60u(t)\text{V}$  e  $u_2 = 30u(t)\text{V}$ . Além disso,  $x_1 = V_C$  e  $x_2 = I_L$ . Ademais,  $y_1 = V_C$ ,  $y_2 = I_L$  e  $y_3 = V_R$ .

## 2.1 Representação dos Circuitos em Espaços de Estados

### 2.1.1 Circuito do Exercício 8.33

Para analisar qualquer circuito, é mais fácil transformar as suas entradas em componentes genéricos já definidos anteriormente, tratando as chaves da forma que ficarão após  $t = t_0$ . Com isso:

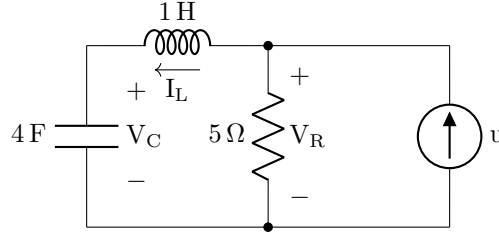


Figura 5: Circuito Genérico do Exercício 8.33

Com o circuito bem simplificado acima, pode-se aplicar nós para começar a sua análise:

$$u = I_R + I_L$$

$$\Rightarrow I_R = u - I_L$$

$$\Rightarrow I_R = u - x_2$$

Como  $V_R = 5\Omega \cdot I_R$ ,

$$V_R = 5\Omega \cdot (u - x_2)$$

$$\Rightarrow V_R = 5\Omega \cdot u - 5\Omega \cdot x_2$$

$$\Rightarrow y_3 = -5x_2 + 5u \quad (1)$$

Além disso, as outras saídas são as próprias variáveis de estado:

$$\Rightarrow y_1 = x_1 \quad (2)$$

$$\Rightarrow y_2 = x_2 \quad (3)$$

Agora, para analisar as derivadas dos estados, vale lembrar que:

$$V_L = L \cdot \dot{I}_L$$

$$\Rightarrow \dot{I}_L = \frac{V_L}{L}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = V_L$$

$$I_C = C \cdot \dot{V}_C$$

$$\Rightarrow \dot{V}_C = \frac{I_C}{C}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{I_C}{4}$$

Porém, como o capacitor e o indutor estão em série, a corrente sobre ambos é igual. Ou seja,

$$I_C = I_L$$

$$\Rightarrow I_C = x_2$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{x_2}{4} \quad (4)$$

Para descobrir a última derivada faltante, basta construir uma malha do lado esquerdo do circuito:

$$-V_C - V_L + V_R = 0$$

$$\Rightarrow V_L = V_R - V_C$$

Como  $V_R = y_3$  e já foi calculado antes em 1 e  $V_C = x_1$ ,

$$\Rightarrow V_L = -5x_2 + 5u - x_1$$

$$\Rightarrow V_L = -x_1 - 5x_2 + 5u$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2 + 5u \quad (5)$$

Agora, sabendo o comportamento do circuito a partir do tempo de interesse, calcular-se-á os valores iniciais dos estados para utilizar mais tarde na ferramenta matemática. Para tanto, o circuito antes da chave se manifestar, em  $t < t_0$ , se comportava da seguinte forma:

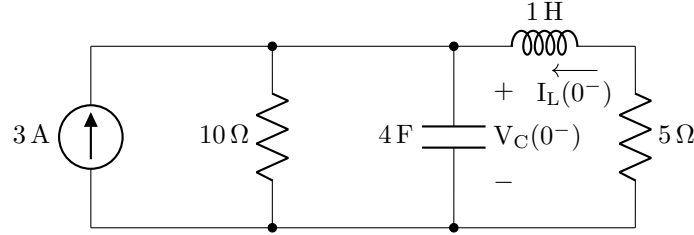


Figura 6: Circuito do Exercício 8.33 antes de  $t_0$

Nesse instante, o capacitor pode ser considerado como carregado e em circuito aberto e o indutor como carregado em forma de curto-circuito, ambos sem ferirem nenhuma LKT, nem LKC. Portanto, a corrente que passa pelo resistor de  $5\Omega$  é calculável pelo simples divisor de corrente:

$$I_{R_{5\Omega}} = 3A \cdot \frac{10\Omega}{10\Omega + 5\Omega}$$

$$\Rightarrow I_{R_{5\Omega}} = 3A \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow I_{R_{5\Omega}} = 2A$$

Em decorrência disso, o resto da corrente passa pelo outro resistor:

$$\Rightarrow I_{R_{10\Omega}} = 1A$$

Agora, como é observado na figura 6,

$$I_L(0^-) = -I_{R_{5\Omega}}$$

$$I_L(0^-) = -2A$$

Como o resistor de  $10\Omega$  está em paralelo com o capacitor, sabe-se que as suas tensões são iguais. Desta forma,

$$V_C(0^-) = V_{R_{10\Omega}}$$

$$\Rightarrow V_C(0^-) = 1A \cdot 10\Omega$$

$$\Rightarrow V_C(0^-) = 10V$$

Como, no instante em que a chave é aberta,  $t = 0s$ , e logo após, em  $t = 0^+s$ , não há nenhuma fonte impulsiva, nem alguma alteração que torne incoerente as LKT e LKC com essas condições calculadas acima, conclui-se que:

$$V_C(0^+) = V_C(0^-)$$

$$I_L(0^+) = I_L(0^-)$$

$$\Rightarrow x_1(t_0) = 10 \quad (6)$$

$$\Rightarrow x_2(t_0) = -2 \quad (7)$$

Agrupando as equações 1 à 7, obtém-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} [u] \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} [u] \\ \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

\*

### 2.1.2 Circuito do Exercício 8.38.1

Para começar, analisar-se-á o comportamento genérico do circuito em  $t \geq t_0$ :

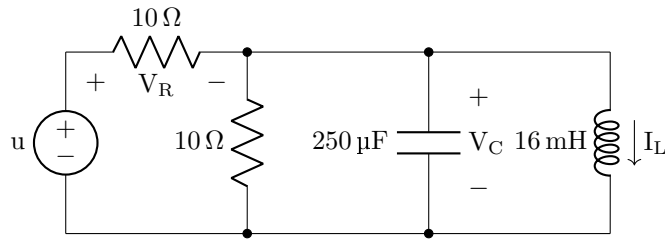


Figura 7: Circuito Genérico do Exercício 8.38.1

Pelas definições iniciais de saídas, já concluí-se que:

$$y_1 = x_1 \quad (9)$$

$$y_2 = x_2 \quad (10)$$

Para a terceira saída, pode-se analisar a primeira malha da esquerda:

$$\begin{aligned} -u + V_R + V_C &= 0 \\ \Rightarrow V_R &= u - V_C \\ \Rightarrow y_3 &= -x_1 + u \end{aligned} \quad (11)$$

Agora, de forma similar ao exercício anterior,

$$\begin{aligned} V_L &= L \cdot \dot{I}_L \\ \Rightarrow \dot{I}_L &= \frac{V_L}{L} \\ \Rightarrow \dot{x}_2 &= 62,5 V_L \\ I_C &= C \cdot \dot{V}_C \\ \Rightarrow \dot{V}_C &= \frac{I_C}{C} \\ \Rightarrow \dot{x}_1 &= 4000 I_C \end{aligned}$$

Com isso em mente, é aparente que o capacitor e o indutor estão em paralelo. Portanto:

$$\begin{aligned} V_L &= V_C \\ \Rightarrow V_L &= x_1 \\ \Rightarrow \dot{x}_2 &= 62,5 x_1 \end{aligned} \quad (12)$$

Agora, para  $I_C$ , analisar-se-á o nó superior do circuito:

$$\begin{aligned}
I_R &= I_{R_{10\Omega}} + I_C + I_L \\
\Rightarrow I_C &= I_R - I_{R_{10\Omega}} - I_L \\
\Rightarrow I_C &= \frac{-V_C + u}{10\Omega} - \frac{V_C}{10\Omega} - I_L \\
\Rightarrow I_C &= -\frac{x_1}{5} - x_2 + \frac{u}{10} \\
\Rightarrow \dot{x}_1 &= 4000 \left( -\frac{x_1}{5} - x_2 + \frac{u}{10} \right) \\
\Rightarrow \dot{x}_1 &= -800x_1 - 4000x_2 + 400u
\end{aligned} \tag{13}$$

Com essa análise, partir-se-á para o estudo das condições iniciais de  $x_1$  e  $x_2$ . Em  $t = 0^-$ :

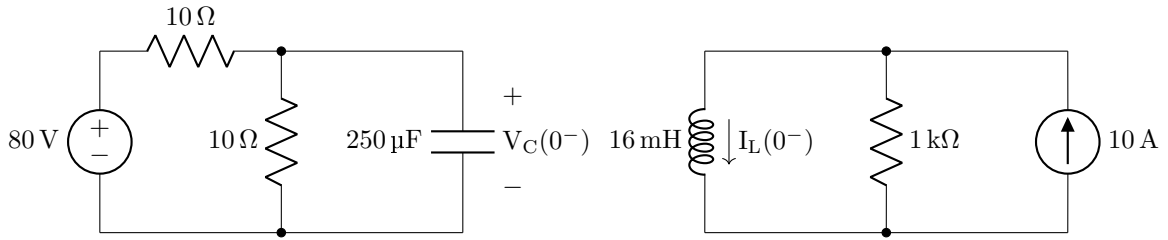


Figura 8: Circuito do Exercício 8.38.1 antes de  $t_0$

Considerando essa situação anterior às chaves, observa-se que, considerando o capacitor em aberto por estar carregado,

$$\begin{aligned}
V_C(0^-) &= 80V \cdot \frac{10\Omega}{10\Omega + 10\Omega} \\
\Rightarrow V_C(0^-) &= 80V \cdot \frac{1}{2} \\
\Rightarrow V_C(0^-) &= 40V
\end{aligned}$$

Para o indutor, considerando-o carregado como um curto-circuito, toda a corrente da fonte de corrente fluirá por ele:

$$I_L(0^-) = 10A$$

Como não fontes impulsivas e, ao unir esses circuitos no circuito genérico 7, não há conflitos em nenhuma LKT, nem LKC, conclui-se que:

$$\begin{aligned}
V_C(0^+) &= V_C(0^-) \\
I_L(0^+) &= I_L(0^-) \\
\Rightarrow x_1(t_0) &= 40
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\Rightarrow x_2(t_0) = 10 \tag{15}$$

Unindo os resultados das equações 9 à 15, obtem-se:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -800 & -4000 \\ 62,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix} [u] \\
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u] \\
\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 40 \\ 10 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{16}$$

\*



### 2.1.3 Circuito do Exercício 8.38.2

Novamente, começar-se-á pelo comportamento genérico em  $t \geq t_0$ . A partir desse ponto, já não há mais fontes de alimentação, portanto, as matrizes de entrada são todas nulas e não serão explicitamente representadas aqui:

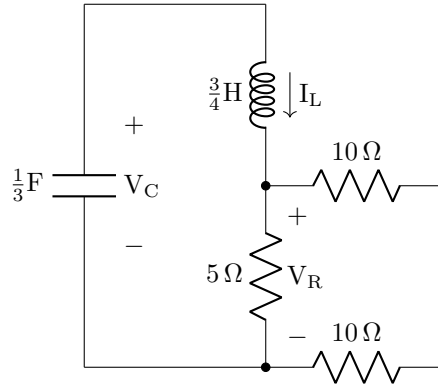


Figura 9: Circuito Genérico do Exercício 8.38.2

De praxe, pela definição das saídas,

$$y_1 = x_1 \quad (17)$$

$$y_2 = x_2 \quad (18)$$

Para as outras grandezas, vale realizar uma breve simplificação no circuito unindo os dois resistores da direita:

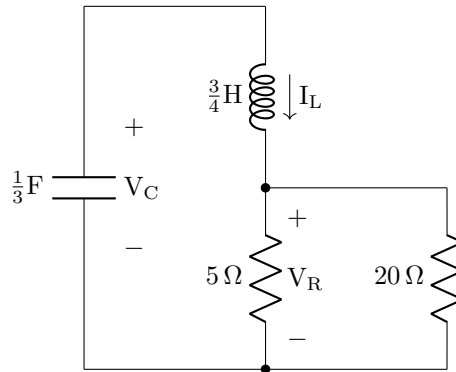


Figura 10: Circuito Genérico Simplificado do Exercício 8.38.2

Pela figura acima, é fácil enxergar que há um divisor de corrente logo acima da grandeza de saída de interesse:

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{20\Omega}{5\Omega + 20\Omega} \cdot I_L \\ \Rightarrow I_R &= \frac{4}{5} I_L \\ \Rightarrow V_R &= 5\Omega \cdot \frac{4}{5} I_L \\ \Rightarrow V_R &= 4I_L \\ \Rightarrow y_3 &= 4x_2 \end{aligned} \quad (19)$$

Para a variação nos estados:

$$\begin{aligned} V_L &= L \cdot \dot{I}_L \\ \Rightarrow \dot{I}_L &= \frac{V_L}{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \dot{x}_2 &= \frac{4}{3}V_L \\
I_C &= C \cdot \dot{V}_C \\
\Rightarrow \dot{V}_C &= \frac{I_C}{C} \\
\Rightarrow \dot{x}_1 &= 3I_C
\end{aligned}$$

Como o capacitor e o indutor estão em anti-série, sabe-se que:

$$\begin{aligned}
I_C &= -I_L \\
\Rightarrow I_C &= -x_2 \\
\Rightarrow \dot{x}_1 &= -3x_2
\end{aligned} \tag{20}$$

Para a tensão sobre o indutor, basta construir uma malha:

$$\begin{aligned}
-V_C + V_L + V_R &= 0 \\
\Rightarrow V_L &= V_C - V_R \\
\Rightarrow V_L &= V_C - 4\Omega \cdot I_L \\
\Rightarrow V_L &= x_1 - 4x_2 \\
\Rightarrow \dot{x}_2 &= \frac{4}{3} \cdot (x_1 - 4x_2) \\
\Rightarrow \dot{x}_2 &= \frac{4}{3}x_1 - \frac{16}{3}x_2
\end{aligned} \tag{21}$$

Agora, para as condições iniciais, partindo de  $t = 0^-$ :

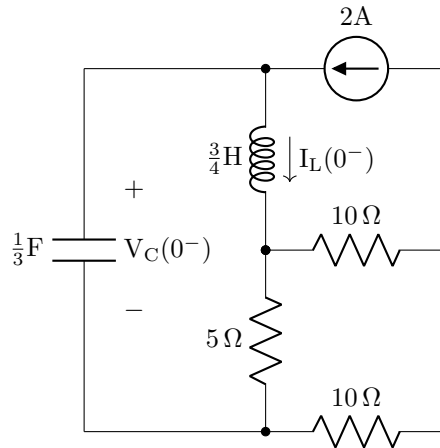


Figura 11: Circuito do Exercício 8.38.2 antes de  $t_0$

Tratando os componentes que armazenam energia como carregados, o capacitor é um circuito aberto e indutor se comporta como um curto-circuito. Logo, como não há outro caminho para a corrente da fonte percorrer,

$$I_L(0^-) = 2A$$

Para determinar a tensão no capacitor, pode-se percorrer a malha esquerda novamente:

$$\begin{aligned}
-V_C(0^-) + V_L(0^-) + V_R(0^-) &= 0 \\
\Rightarrow V_C(0^-) &= V_R(0^-)
\end{aligned}$$

Para descobrir  $V_R(0^-)$ , pode-se utilizar o divisor de corrente entre os resistores para saber a corrente sobre o componente e aplicar a Lei de Ohm:

$$I_R(0^-) = \frac{10\Omega}{10\Omega + 5\Omega + 10\Omega} \cdot 2A$$

$$\Rightarrow I_R(0^-) = \frac{4}{5} \text{ A}$$

$$V_R(0^-) = 5\Omega \cdot \frac{4}{5} \text{ A}$$

$$\Rightarrow V_R(0^-) = 4 \text{ V}$$

Portanto,

$$V_C(0^-) = 4 \text{ V}$$

Como não há fontes impulsivas, nem chaves, não há nada que fira a LKC ou a LKT.

Então:

$$V_C(0^+) = V_C(0^-)$$

$$I_L(0^+) = I_L(0^-)$$

Com isso,

$$\Rightarrow x_1(t_0) = 4 \quad (22)$$

$$\Rightarrow x_2(t_0) = 2 \quad (23)$$

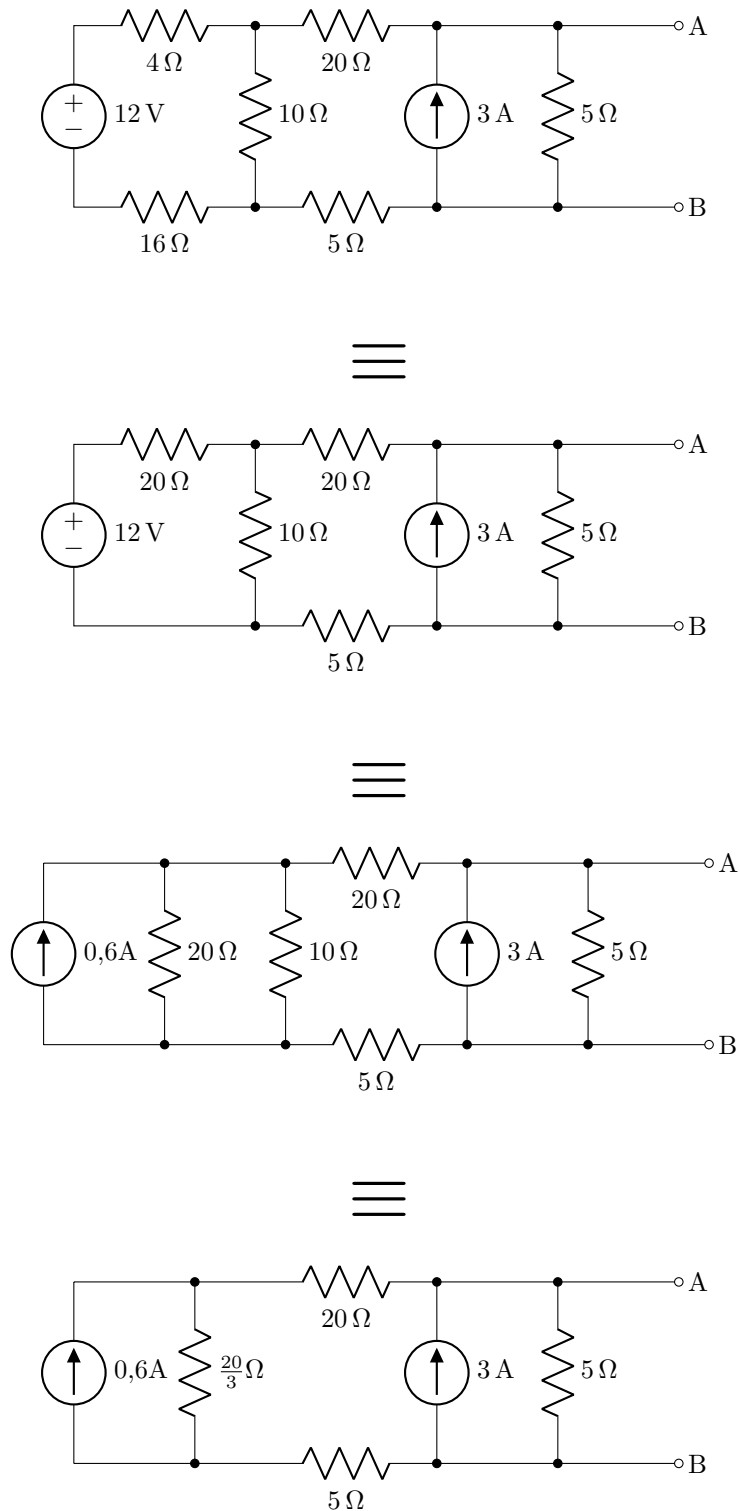
Agrupando 17 à 23, obtem-se:

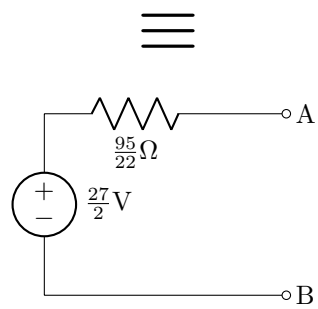
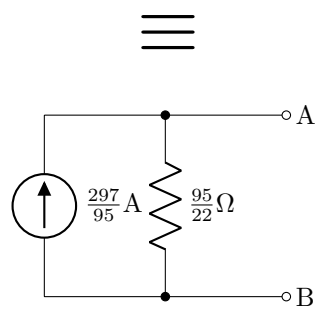
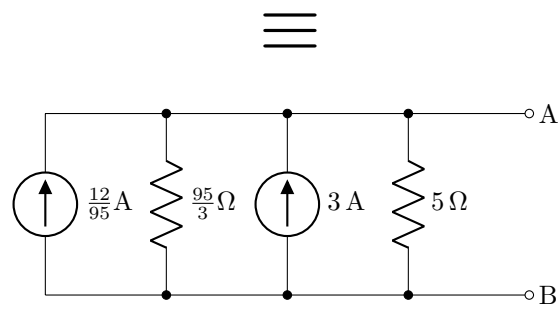
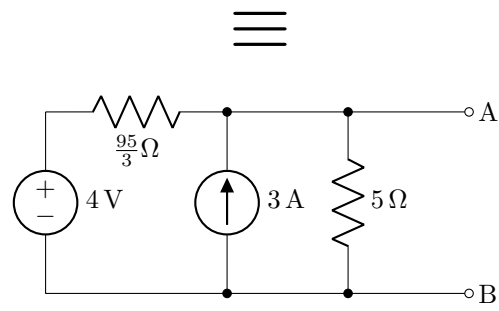
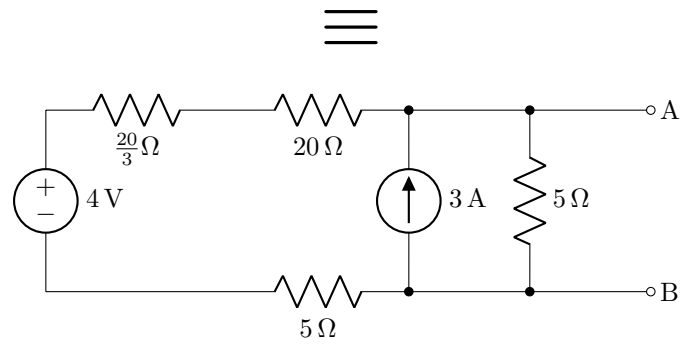
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ \frac{4}{3} & -\frac{16}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

#### 2.1.4 Circuito do Exercício 8.39

### 3.1 Circuito Equivalente de Thevénin da Entrada

Partindo do circuito de entrada sorteado (figura ??), pode-se adotar a estratégia de transformação de fontes repetidas vezes até chegar-se no circuito equivalente de Thevénin:





Assim, com a sequência ilustrada acima, chegou-se ao circuito equivalente de Thevénin da entrada com  $V_{TH} = \frac{27}{2}\text{V} = 13,5\text{V}$  e  $R_{TH} = \frac{95}{22}\Omega = 4,318\Omega$ .

\*

## 4.1 Análise da Associação de Quadripolos

### 4.1.1 Representação dos Circuitos

Dada a associação de quadripolos sorteada, é mais prudente representar ambos os quadripolos com os parâmetros  $a$ , visto que o quadripolo equivalente apresenta parâmetros da seguinte forma:

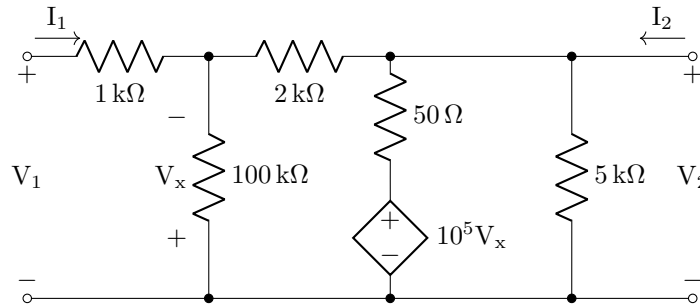
$$\begin{aligned} a_{11} &= a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21} & a_{12} &= a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22} \\ a_{21} &= a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21} & a_{22} &= a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22} \end{aligned} \quad (25)$$

Onde o primeiro quadripolo (Q2) da figura ?? tem os parâmetros  $a'$  e o segundo quadripolo (Q1) tem os parâmetros  $a''$ . Além disso, os parâmetros  $a$  representam as variáveis dos quadripolos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} V_1 &= a_{11}V_2 - a_{12}I_2 \\ I_1 &= a_{21}V_2 - a_{22}I_2 \end{aligned} \quad (26)$$

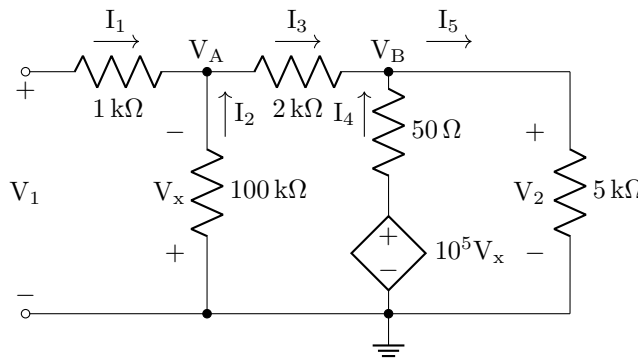
### 4.1.2 Parâmetros do Quadripolo Q2

Com o segundo quadripolo sorteado (Q2), calcular-se-á os seus parâmetros  $a'$  para realizar a sua associação com o primeiro quadripolo (Q1):



#### Parâmetros $a'_{11}$ e $a'_{21}$

Através da equação 26, para calcular os parâmetros  $a'_{11}$  e  $a'_{21}$ , basta zerar a corrente de saída  $I_2$  e determinar os valores de  $V_1$  e  $I_1$  em função da variável restante  $V_2$ . Calcular-se-á essas variáveis através da análise nodal:



Nesse caso, com esses nós e essas correntes, sabe-se que:

$$V_x = -V_A$$

$$V_2 = V_B$$

Equações observáveis de cara no circuito. Além disso, para modelar as correntes em função de  $V_A$  e  $V_B$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_1 - V_A}{1\text{k}\Omega} \\ I_2 &= \frac{V_x}{100\text{k}\Omega} = -\frac{V_A}{100\text{k}\Omega} \end{aligned}$$

$$I_3 = \frac{V_A - V_B}{2k\Omega}$$

$$I_4 = \frac{10^5 \cdot V_x - V_B}{50\Omega} = -\frac{10^5 \cdot V_A + V_B}{50\Omega}$$

$$I_5 = \frac{V_B}{5k\Omega}$$

Com essas correntes, pode-se utilizar a Lei dos Nós para cada nó:

- Nó com  $V_A$ :

$$I_1 + I_2 = I_3$$

$$\Rightarrow \frac{V_1 - V_A}{1k\Omega} - \frac{V_A}{100k\Omega} = \frac{V_A - V_B}{2k\Omega}$$

$$\Rightarrow \frac{100V_1 - 100V_A - V_A}{100k\Omega} = \frac{50V_A - 50V_B}{100k\Omega}$$

$$\Rightarrow 100V_1 - 101V_A = 50V_A - 50V_B$$

$$\Rightarrow 151V_A - 50V_B = 100V_1 \quad (I)$$

- Nó com  $V_B$ :

$$I_3 + I_4 = I_5$$

$$\Rightarrow \frac{V_A - V_B}{2k\Omega} - \frac{10^5 \cdot V_A + V_B}{50\Omega} = \frac{V_B}{5k\Omega}$$

$$\Rightarrow \frac{5V_A - 5V_B}{10k\Omega} - \frac{2 \cdot 10^7 \cdot V_A + 200V_B}{10k\Omega} = \frac{2V_B}{10k\Omega}$$

$$\Rightarrow 5V_A - 5V_B - 2 \cdot 10^7 \cdot V_A - 200V_B = 2V_B$$

$$\Rightarrow V_A = -\frac{207}{19999995}V_B \quad (II)$$

Substituindo a equação II na equação I:

$$151 \cdot \left( -\frac{207}{19999995}V_B \right) - 50V_B = 100V_1$$

$$\Rightarrow -\frac{31257}{19999995}V_B - 50V_B = 100V_1$$

$$\Rightarrow -\frac{31257}{19999995}V_B - \frac{999999750}{19999995}V_B = \frac{1999999500}{19999995}V_1$$

$$\Rightarrow -1000031007V_B = 1999999500V_1$$

$$\Rightarrow V_B = -\frac{1999999500}{1000031007}V_1 \quad (III)$$

Utilizando o valor obtido na equação III em II:

$$V_A = -\frac{207}{19999995} \cdot \left( -\frac{1999999500}{1000031007}V_1 \right)$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{20700}{1000031007}V_1 \quad (IV)$$

Com essas equações acima, pode-se obter as variáveis de saída (e consequentemente os parâmetros) da seguinte forma:

$$V_B = V_2$$

$$\Rightarrow -\frac{1999999500}{1000031007}V_1 = V_2$$

$$\Rightarrow V_1 = -\frac{1000031007}{1999999500}V_2$$

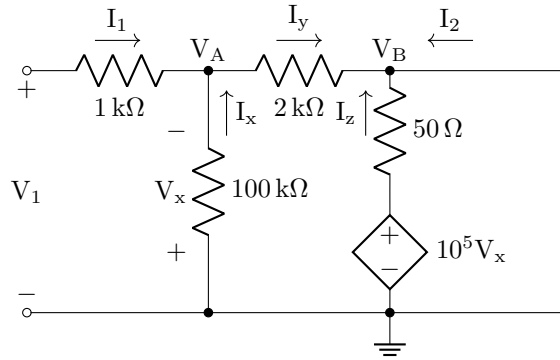
$$\Rightarrow a'_{11} = -\frac{1000031007}{1999999500} \approx -0,5$$



$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{V_1 - V_A}{1\text{k}\Omega} \\
\Rightarrow I_1 &= \frac{V_1 - \frac{20700}{1000031007}V_1}{1\text{k}\Omega} \\
\Rightarrow I_1 &= \frac{1000031007V_1 - 20700V_1}{1000031007000\Omega} \\
\Rightarrow I_1 &= \frac{1000010307V_1}{1000031007000\Omega} \\
\Rightarrow I_1 &= \frac{1000010307}{1000031007000\Omega} \left( -\frac{1000031007}{199999500}V_2 \right) \\
\Rightarrow I_1 &= -\frac{1,000041314 \cdot 10^{18}}{2,000061514 \cdot 10^{21}\Omega}V_2 \\
\Rightarrow I_1 &= -\frac{1000041314}{2000061514000\Omega}V_2 \\
\Rightarrow a'_{21} &= -\frac{1000041314}{2000061514000}\text{S} \approx -0,0005\text{S} = -0,5\text{mS}
\end{aligned}$$

**Parâmetros  $a'_{12}$  e  $a'_{22}$**

Agora, zerando a tensão  $V_2$ , calcular-se-á os parâmetros  $a'_{12}$  e  $a'_{22}$  a partir de mais uma análise nodal. Isto é, encontrando  $V_1$  e  $I_1$  em função de  $I_2$ :



Com essa configuração, observa-se que:

$$V_B = V_2 = 0\text{V}$$

Por conta disso, a tensão sobre o resistor de  $50\Omega$  deve ter tensão de mesma magnitude e sentido contrário ao da fonte dependente abaixo dele. Com isso:

$$I_z = \frac{10^5 \cdot V_x}{50\Omega}$$

E o resto pode-se analisar normalmente:

$$\begin{aligned}
I_y &= \frac{V_A}{2\text{k}\Omega} \\
I_x &= \frac{V_x}{100\text{k}\Omega} = -\frac{V_A}{100\text{k}\Omega} \\
I_1 &= \frac{V_1 - V_A}{1\text{k}\Omega}
\end{aligned}$$

- Nó com  $V_A$ :

$$\begin{aligned}
I_1 + I_x &= I_y \\
\Rightarrow \frac{V_1 - V_A}{1\text{k}\Omega} - \frac{V_A}{100\text{k}\Omega} &= \frac{V_A}{2\text{k}\Omega} \\
\Rightarrow \frac{100V_1 - 100V_A - V_A}{100\text{k}\Omega} &= \frac{50V_A}{100\text{k}\Omega}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 100V_1 - 101V_A = 50V_A \\
&\Rightarrow 151V_A = 100V_1 \\
&\Rightarrow V_1 = \frac{151}{100}V_A
\end{aligned} \tag{I}$$

• Nó com  $V_B$ :

$$\begin{aligned}
&I_y + I_z + I_2 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{V_A}{2k\Omega} + \frac{10^5 \cdot V_x}{50\Omega} + I_2 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{V_A}{2k\Omega} - \frac{10^5 \cdot V_A}{50\Omega} + I_2 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{V_A}{2k\Omega} - \frac{4 \cdot 10^6 \cdot V_A}{2k\Omega} + \frac{2k\Omega \cdot I_2}{2k\Omega} = 0 \\
&\Rightarrow 3999999V_A = 2000\Omega \cdot I_2 \\
&\Rightarrow V_A = \frac{2000}{3999999}\Omega \cdot I_2
\end{aligned} \tag{II}$$

Utilizando a equação II em I:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{151}{100} \cdot \left( \frac{2000}{3999999}\Omega \cdot I_2 \right) \\
&\Rightarrow V_1 = \frac{3020}{3999999}\Omega \cdot I_2
\end{aligned}$$

Cuidando com o sinal inerente da equação 26:

$$a'_{12} = -\frac{3020}{3999999}\Omega$$

Para finalizar:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{V_1 - V_A}{1k\Omega} \\
&\Rightarrow I_1 = \frac{\frac{151}{100}V_A - V_A}{1k\Omega} \\
&\Rightarrow I_1 = \frac{151V_A - 100V_A}{100k\Omega} \\
&\Rightarrow I_1 = \frac{51V_A}{100k\Omega} \\
&\Rightarrow I_1 = \frac{51 \left( \frac{2000}{3999999}\Omega \cdot I_2 \right)}{100k\Omega} \\
&\Rightarrow I_1 = \frac{102}{399999900}I_2
\end{aligned}$$

Relembrando do sinal da equação 26:

$$a'_{22} = -\frac{102}{399999900}$$

**Unindo os parâmetros  $a'$  do quadripolo Q2**

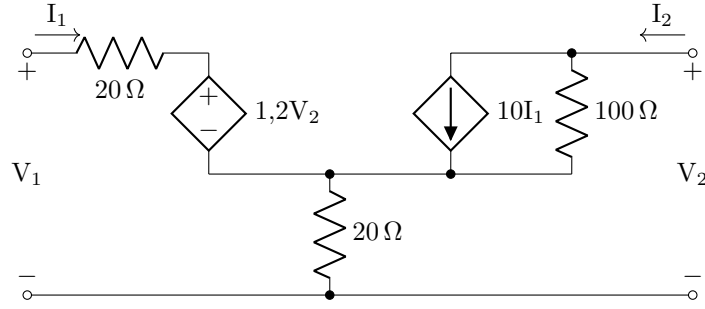
Concluindo, abaixo estão os parâmetros calculados para esse quadripolo:

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= -\frac{1000031007}{1999999500} & a'_{12} &= -\frac{3020}{3999999}\Omega \\
a'_{21} &= -\frac{1000041314}{2000061514000}S & a'_{22} &= -\frac{102}{399999900}
\end{aligned} \tag{27}$$

\*

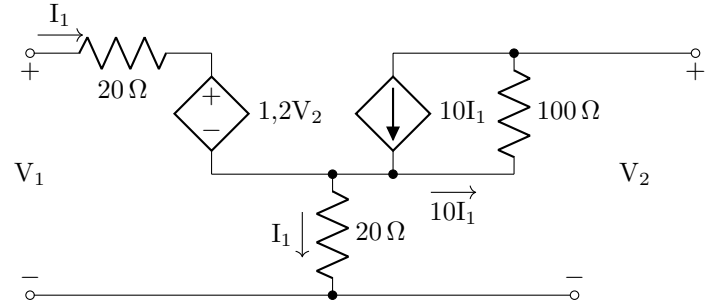
### 4.1.3 Parâmetros do Quadripolo Q1

Após calcular os parâmetros  $a'$  do quadripolo Q2 mostrados na equação 27, calcular-se-á os parâmetros  $a''$  do quadripolo Q1:



**Parâmetros  $a''_{11}$  e  $a''_{21}$**

Através da equação 26, zera-se-á o valor de  $I_2$  para calcular os dois primeiros parâmetros  $a''$ , colocando  $V_1$  e  $I_1$  em função da variável de entrada  $V_2$ :



Pelo desenho acima, é perceptível que, pela malha direita:

$$-V_2 - 10 \cdot I_1 \cdot 100\Omega + I_1 \cdot 20\Omega = 0$$

$$\Rightarrow -1000\Omega \cdot I_1 + 20\Omega \cdot I_1 = V_2$$

$$\Rightarrow -980\Omega \cdot I_1 = V_2$$

$$\Rightarrow I_1 = -\frac{1}{980}\text{S} \cdot V_2$$

$$\Rightarrow a''_{21} = -\frac{1}{980}\text{S} \approx -0,001\text{S} = -1\text{mS}$$

Fazendo a malha do lado esquerdo:

$$-V_1 + I_1 \cdot 20\Omega + 1,2 \cdot V_2 + I_1 \cdot 20\Omega = 0$$

$$\Rightarrow V_1 = 40\Omega \cdot I_1 + 1,2 \cdot V_2$$

$$\Rightarrow V_1 = 40\Omega \cdot \left(-\frac{1}{980\Omega} V_2\right) + 1,2 \cdot V_2$$

$$\Rightarrow V_1 = -\frac{2}{49} V_2 + 1,2 \cdot V_2$$

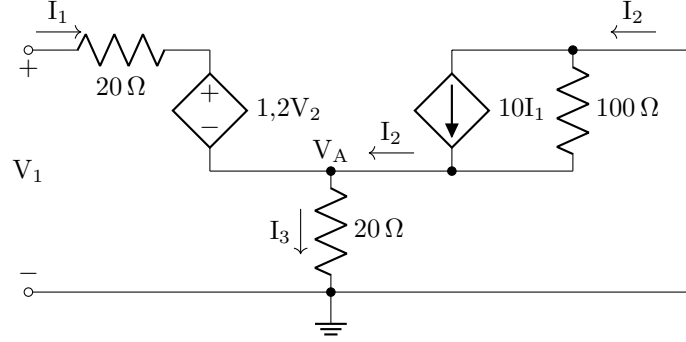
$$\Rightarrow V_1 = -\frac{10}{245} V_2 + \frac{294}{245} V_2$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{284}{245} V_2$$

$$\Rightarrow a''_{11} = \frac{284}{245} \approx 1,159$$

### Parâmetros $a''_{12}$ e $a''_{22}$

Através da equação 26, zerar-se-á o valor de  $V_2$  para calcular os dois últimos parâmetros  $a''$ , colocando  $V_1$  e  $I_1$  em função da variável de entrada  $I_2$ :



Pela figura acima, é perceptível que o resistor de  $20\Omega$  abaixo está em paralelo com o lado direito do circuito. Por conta disso descobrir-se-á a tensão sobre ele através de análise nodal. No lado direito do nó com potencial  $V_A$ , observa-se, decorrente do fato dos componentes em paralelo, que a corrente  $I_2$  flui por ali no sentido da figura:

$$I_1 = \frac{V_1 - 1,2 \cdot V_2 - V_A}{20\Omega} = \frac{V_1 - V_A}{20\Omega}$$

$$I_3 = \frac{V_A}{20\Omega}$$

Agora, equacionando o nó  $V_A$ :

$$I_1 + I_2 = I_3$$

$$\Rightarrow \frac{V_1 - V_A}{20\Omega} + I_2 = \frac{V_A}{20\Omega}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1 - V_A}{20\Omega} + \frac{20\Omega}{20\Omega} I_2 = \frac{V_A}{20\Omega}$$

$$\Rightarrow V_1 = 2V_A - 20\Omega \cdot I_2 \quad (\text{I})$$

Então, analisando o paralelo na direita, onde determinou-se que há uma tensão comum de  $V_A$ , encontrar-se-á uma relação entre  $V_A$  e  $I_2$ :

$$I_2 = 10 \cdot I_1 - \frac{V_A}{100\Omega}$$

$$I_1 = I_3 - I_2$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{V_A}{20\Omega} - I_2$$

$$\Rightarrow I_2 = 10 \cdot \left( \frac{V_A}{20\Omega} - I_2 \right) - \frac{V_A}{100\Omega}$$

$$\Rightarrow \frac{100\Omega}{100\Omega} I_2 = \frac{50}{100\Omega} V_A - \frac{1000\Omega}{100\Omega} I_2 - \frac{1}{100\Omega} V_A$$

$$\Rightarrow 1100\Omega \cdot I_2 = 49V_A$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{1100}{49} \Omega \cdot I_2 \quad (\text{II})$$

Utilizando a equação II na equação I:

$$V_1 = 2 \cdot \left( \frac{1100}{49} \Omega \cdot I_2 \right) - 20\Omega \cdot I_2$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{2200}{49} \Omega \cdot I_2 - \frac{980}{49} \Omega \cdot I_2$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1220}{49} \Omega \cdot I_2$$

Cuidando o sinal da equação 26:

$$a''_{12} = -\frac{1220}{49}\Omega \approx -24,898\Omega$$

Com a equação II, pode-se calcular  $I_1$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_A}{20\Omega} - I_2 \\ \Rightarrow I_1 &= \frac{\frac{1100}{49}\Omega \cdot I_2}{20\Omega} - I_2 \\ \Rightarrow I_1 &= \frac{1100}{980}I_2 - I_2 \\ \Rightarrow I_1 &= \frac{1100}{980}I_2 - \frac{980}{980}I_2 \\ \Rightarrow I_1 &= \frac{120}{980}I_2 \\ \Rightarrow I_1 &= \frac{6}{49}I_2 \end{aligned}$$

Novamente cuidando do sinal na equação 26:

$$\Rightarrow a''_{22} = -\frac{6}{49} \approx -0,122$$

#### Unindo os parâmetros $a''$ do quadripolo Q1

Concluindo, abaixo estão os parâmetros calculados para esse quadripolo:

$$\begin{aligned} a''_{11} &= \frac{284}{245} & a''_{12} &= -\frac{1220}{49}\Omega \\ a''_{21} &= -\frac{1}{980}\text{S} & a''_{22} &= -\frac{6}{49} \end{aligned} \tag{28}$$

\*

#### 4.1.4 União dos Quadripolos

Juntando os parâmetros  $a'$  da equação 27 e os parâmetros  $a''$  da equação 28 na equação 25 de associação em cascata:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21} \\ \Rightarrow a_{11} &= \left(-\frac{1000031007}{1999999500}\right) \cdot \left(\frac{284}{245}\right) + \left(-\frac{3020}{3999999}\Omega\right) \cdot \left(-\frac{1}{980}\text{S}\right) \\ \Rightarrow a_{11} &= -\frac{284008805988}{489999877500} + \frac{3020}{3919999020} \\ \Rightarrow a_{11} &= -\frac{1113314241144330131760}{1920799039600120050000} + \frac{1479799630050000}{1920799039600120050000} \\ \Rightarrow a_{11} &= -\frac{1113312761344700081760}{1920799039600120050000} \approx -0,579 \\ a_{12} &= a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22} \\ \Rightarrow a_{12} &= \left(-\frac{1000031007}{1999999500}\right) \cdot \left(-\frac{1220}{49}\Omega\right) + \left(-\frac{3020}{3999999}\Omega\right) \cdot \left(-\frac{6}{49}\right) \\ \Rightarrow a_{12} &= \frac{1220037828540}{97999975500}\Omega + \frac{18120}{195999951}\Omega \\ \Rightarrow a_{12} &= \frac{239127354611986401540}{19207990396001200500}\Omega + \frac{1775759556060000}{19207990396001200500}\Omega \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_{12} = \frac{239129130371542461540}{19207990396001200500} \Omega \approx 12,449\Omega$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21} \\ \Rightarrow a_{21} &= \left(-\frac{1000041314}{2000061514000}\text{S}\right) \cdot \left(\frac{284}{245}\right) + \left(-\frac{102}{399999900}\right) \cdot \left(-\frac{1}{980}\text{S}\right) \\ \Rightarrow a_{21} &= -\frac{284011733176}{490015070930000}\text{S} + \frac{102}{391999902000}\text{S} \\ \Rightarrow a_{21} &= -\frac{111332571571842148752000}{192085859783083048860000000}\text{S} + \frac{49981537234860000}{192085859783083048860000000}\text{S} \\ \Rightarrow a_{21} &= -\frac{111332521590304913892000}{192085859783083048860000000}\text{S} \approx -0,579\text{mS} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22} \\ \Rightarrow a_{22} &= \left(-\frac{1000041314}{2000061514000}\text{S}\right) \cdot \left(-\frac{1220}{49}\Omega\right) + \left(-\frac{102}{399999900}\right) \cdot \left(-\frac{6}{49}\right) \\ \Rightarrow a_{22} &= \frac{1220050403080}{98003014186000} + \frac{612}{19599995100} \\ \Rightarrow a_{22} &= \frac{23912981922121024908000}{1920858597830830488600000} + \frac{59977844681832000}{1920858597830830488600000} \\ \Rightarrow a_{22} &= \frac{23913041899965706740000}{1920858597830830488600000} \approx 0,012 \end{aligned}$$

Sumarizando todos os resultados:

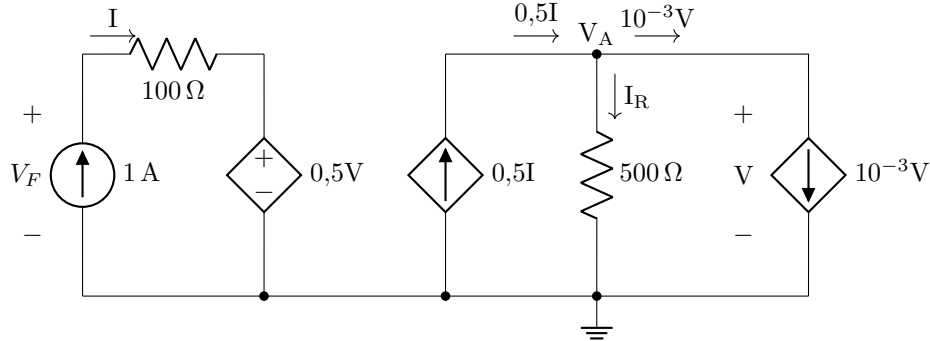
$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{1113312761344700081760}{1920799039600120050000} & a_{12} &= \frac{239129130371542461540}{19207990396001200500} \Omega \\ a_{21} &= -\frac{111332521590304913892000}{192085859783083048860000000}\text{S} & a_{22} &= \frac{23913041899965706740000}{1920858597830830488600000} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} V_{1_{EQ}} &= -\frac{1113312761344700081760}{1920799039600120050000} \cdot V_{2_{EQ}} - \frac{239129130371542461540}{19207990396001200500} \Omega \cdot I_{2_{EQ}} \\ I_{1_{EQ}} &= -\frac{111332521590304913892000}{192085859783083048860000000}\text{S} \cdot V_{2_{EQ}} - \frac{23913041899965706740000}{1920858597830830488600000} \cdot I_{2_{EQ}} \end{aligned} \quad (30)$$

\*

## 5.1 Circuito Equivalente de Norton da Saída

Partindo do circuito de saída sorteado (figura ??), sabe-se de cara que, por não haver nenhuma fonte de tensão ou de corrente independente, a corrente de Norton é  $I_N = 0A$ . Para determinar-se o valor de  $R_N$ , pode-se colocar uma fonte independente na saída e medir a outra grandeza sobre essa, visto que  $R_N = \frac{V_F}{I_F}$ . Para esse circuito em específico, colocar-se-á uma fonte de corrente de  $I_F = 1A$  para cima e medir-se-á a tensão  $V_F$  sobre ela:



Nesse caso, com essa fonte de corrente, forçou-se  $I = 1A$ . Por conta disso, do outro lado do circuito, obteve-se que a primeira fonte de corrente controlada fornece ou consome  $0,5 \cdot I = 0,5A$ .

A partir dessa informação, no nó  $V_A$ , obtém-se que a corrente  $I_R$  sobre o resistor de  $500\Omega$  se dá por:

$$\begin{aligned} 0,5 \cdot I &= I_R + 10^{-3} \cdot V \\ \Rightarrow I_R &= 0,5 \cdot I - 10^{-3} \cdot V \\ \Rightarrow I_R &= 0,5A - 10^{-3} \cdot V \end{aligned}$$

Com essa informação, como, em resistores,  $V = R \cdot I$ :

$$\begin{aligned} V &= I_R \cdot 500\Omega \\ \Rightarrow V &= (0,5A - 10^{-3} \cdot V) \cdot 500\Omega \\ \Rightarrow V &= 250V - 0,5 \cdot V \\ \Rightarrow 1,5 \cdot V &= 250V \\ \Rightarrow V &= \frac{500}{3}V \end{aligned}$$

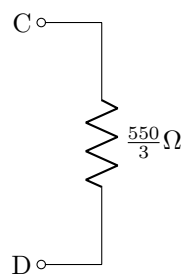
Com essa informação, basta retornar para o outro lado do circuito e determinar a tensão  $V_F$  através de Lei das Malhas:

$$\begin{aligned} -V_F + I \cdot 100\Omega + 0,5 \cdot V &= 0 \\ \Rightarrow V_F &= I \cdot 100\Omega + 0,5 \cdot V \\ \Rightarrow V_F &= 1A \cdot 100\Omega + 0,5 \cdot \frac{500}{3}V \\ \Rightarrow V_F &= 100V + \frac{250}{3}V \\ \Rightarrow V_F &= \frac{550}{3}V \end{aligned}$$

Logo, a partir dessa tensão, pode-se determinar por fim o valor de  $R_N$ :

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{V_F}{I_F} \\ \Rightarrow R_N &= \frac{\frac{550}{3}V}{1A} \\ \Rightarrow R_N &= \frac{550}{3}\Omega = 183,3\Omega \end{aligned}$$

Ou seja, o circuito equivalente Norton da saída é o seguinte:

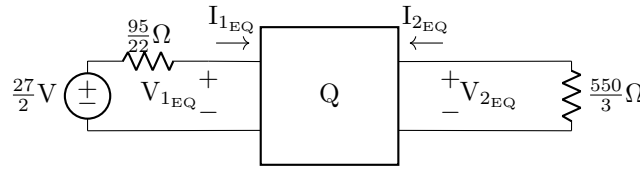


\*



## 6.1 Ganho de Tensão da Saída $V_2/V_1$

Partindo do circuito equivalente de Thevénin da entrada, dos parâmetros  $a$  da interconexão dos quadripolos e do circuito equivalente Norton da saída (que é puramente resistivo, sem fonte de corrente), obteve-se o seguinte circuito:



Nesse circuito, os parâmetros  $a$  do quadripolo  $Q$  são os descritos pela equação 29. Assim, a partir da relação encontrada em aula entre  $\frac{V_2}{V_1}$  para parâmetros  $a$  nesse mesmo tipo de circuito, determinar-se-á esse ganho a seguir:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_L}{a_{11}Z_L + a_{12}}$$

Nesse circuito em específico:

$$Z_L = \frac{550}{3} \Omega$$

$$a_{11} = -\frac{1113312761344700081760}{1920799039600120050000}$$

$$a_{12} = \frac{239129130371542461540}{19207990396001200500} \Omega$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} &= \frac{\frac{550}{3} \Omega}{-\frac{1113312761344700081760}{1920799039600120050000} \cdot \frac{550}{3} \Omega + \frac{239129130371542461540}{19207990396001200500} \Omega} \\ \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} &= \frac{\frac{550}{3} \Omega}{-\frac{1113312761344700081760}{1920799039600120050000} \cdot \frac{550}{3} \Omega + \frac{239129130371542461540}{19207990396001200500} \cdot \frac{300}{300} \Omega} \\ \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} &= \frac{550}{-\frac{1113312761344700081760}{1920799039600120050000} \cdot 550 + \frac{239129130371542461540}{1920799039600120050000} \cdot 300} \\ \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} &= \frac{550 \cdot 1920799039600120050000}{-(1113312761344700081760 \cdot 550) + (239129130371542461540 \cdot 300)} \\ \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} &= \frac{1056439471780066027500000}{-612322018739585044968000 + 71738739111462738462000} \\ \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} &= -\frac{1056439471780066027500000}{540583279628122306506000} \approx -1,954 \end{aligned}$$

\*