

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia



ENG10001
Circuitos Elétricos I-C

Trabalho Bônus 2

Representação em Espaço de Estados

Pedro Lubaszewski Lima (00341810)

Turma A

10 de janeiro de 2025

Sumário

1.1	Enunciado e Circuitos	2
2.1	Representação dos Circuitos em Espaços de Estados	4
2.1.1	Circuito do Exercício 8.33	4
2.1.2	Circuito do Exercício 8.38.1	6
2.1.3	Circuito do Exercício 8.38.2	8
2.1.4	Circuito do Exercício 8.39	10
3.1	Simulações dos Resultados	13
3.1.1	Simulação do Exercício 8.33	13
3.1.2	Simulação do Exercício 8.38.1	16
3.1.3	Simulação do Exercício 8.38.2	19
3.1.4	Simulação do Exercício 8.39	22
4.1	Considerações Finais	25

1.1 Enunciado e Circuitos

Este trabalho consiste em representar um dado circuito da lista principal de exercícios de circuitos de segunda ordem em espaços de estados. Esse circuito, bem como as saídas dele seriam sorteados de acordo com o número de matrícula. No entanto, para este trabalho, será feita a análise de todos os possíveis circuitos sorteáveis, com todas as saídas sorteáveis. Todas as análises considerarão as condições iniciais em $t_0 = 0^+$ s. Abaixo são apresentados os circuitos com as suas respectivas saídas desejadas:

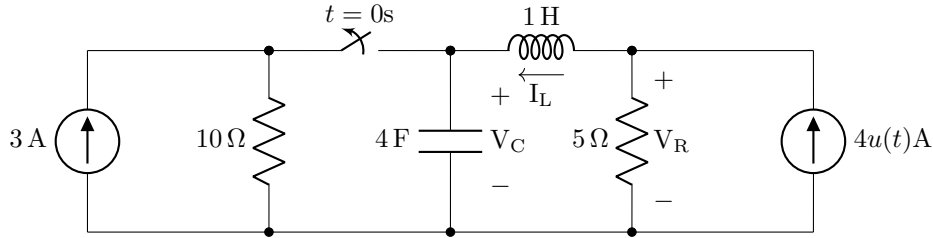


Figura 1: Circuito do Exercício 8.33

Nesse primeiro circuito, chamar-se-á de $u = 4u(t)$ A. A fonte mais à esquerda passa a não afetar o circuito em $t \geq t_0$. Além disso, $x_1 = V_C$ e $x_2 = I_L$. Por fim, $y_1 = V_C$, $y_2 = I_L$ e $y_3 = V_R$.

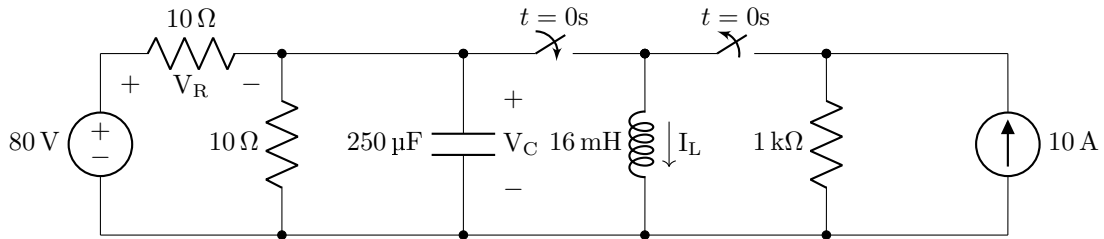


Figura 2: Circuito do Exercício 8.38.1

No segundo circuito, chamar-se-á de $u = 80$ V. A justificativa é igual àquela do exercício anterior, a fonte da direita não afeta mais o circuito em $t \geq t_0$, tempo de interesse. Além disso, $x_1 = V_C$ e $x_2 = I_L$. Por fim, $y_1 = V_C$, $y_2 = I_L$ e $y_3 = V_R$.

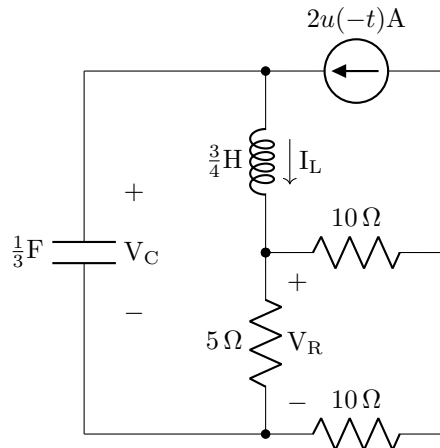


Figura 3: Circuito do Exercício 8.38.2

No terceiro, a partir de $t = t_0$, não há mais fontes de alimentação. Por conta disso, não há entradas para a representação em espaço de estados. Além disso, $x_1 = V_C$ e $x_2 = I_L$. Por fim, $y_1 = V_C$, $y_2 = I_L$ e $y_3 = V_R$.

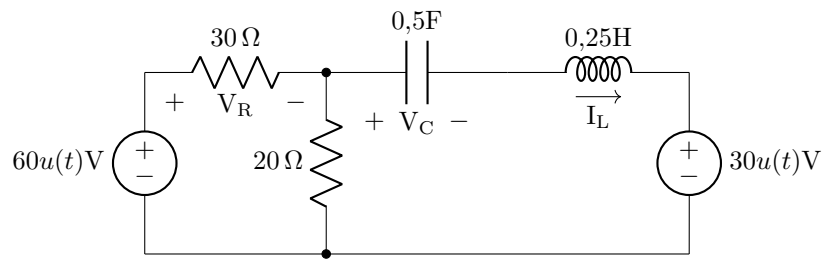


Figura 4: Circuito do Exercício 8.39

Para finalizar, no último circuito, $u_1 = 60u(t)V$ e $u_2 = 30u(t)V$. Além disso, $x_1 = V_C$ e $x_2 = I_L$. Ademais, $y_1 = V_C$, $y_2 = I_L$ e $y_3 = V_R$.

2.1 Representação dos Circuitos em Espaços de Estados

2.1.1 Circuito do Exercício 8.33

Para analisar qualquer circuito, é mais fácil transformar as suas entradas em componentes genéricos já definidos anteriormente, tratando as chaves da forma que ficarão após $t = t_0$. Com isso:

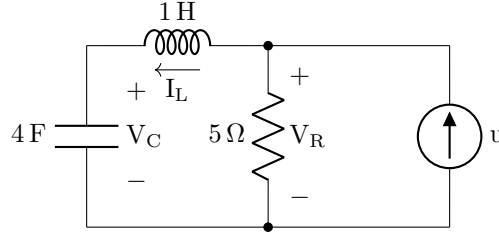


Figura 5: Circuito Genérico do Exercício 8.33

Com o circuito bem simplificado acima, pode-se aplicar nós para começar a sua análise:

$$u = I_R + I_L$$

$$\Rightarrow I_R = u - I_L$$

$$\Rightarrow I_R = u - x_2$$

Como $V_R = 5\Omega \cdot I_R$,

$$V_R = 5\Omega \cdot (u - x_2)$$

$$\Rightarrow V_R = 5\Omega \cdot u - 5\Omega \cdot x_2$$

$$\Rightarrow y_3 = -5x_2 + 5u \quad (1)$$

Além disso, as outras saídas são as próprias variáveis de estado:

$$\Rightarrow y_1 = x_1 \quad (2)$$

$$\Rightarrow y_2 = x_2 \quad (3)$$

Agora, para analisar as derivadas dos estados, vale lembrar que:

$$V_L = L \cdot \dot{I}_L$$

$$\Rightarrow \dot{I}_L = \frac{V_L}{L}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = V_L$$

$$I_C = C \cdot \dot{V}_C$$

$$\Rightarrow \dot{V}_C = \frac{I_C}{C}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{I_C}{4}$$

Porém, como o capacitor e o indutor estão em série, a corrente sobre ambos é igual. Ou seja,

$$I_C = I_L$$

$$\Rightarrow I_C = x_2$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{x_2}{4} \quad (4)$$

Para descobrir a última derivada faltante, basta construir uma malha do lado esquerdo do circuito:

$$-V_C - V_L + V_R = 0$$

$$\Rightarrow V_L = V_R - V_C$$

Como $V_R = y_3$ e já foi calculado antes em 1 e $V_C = x_1$,

$$\Rightarrow V_L = -5x_2 + 5u - x_1$$

$$\Rightarrow V_L = -x_1 - 5x_2 + 5u$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2 + 5u \quad (5)$$

Agora, sabendo o comportamento do circuito a partir do tempo de interesse, calcular-se-á os valores iniciais dos estados para utilizar mais tarde na ferramenta matemática. Para tanto, o circuito antes da chave se manifestar, em $t < t_0$, se comportava da seguinte forma:

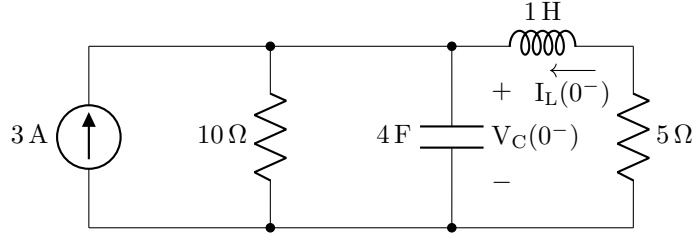


Figura 6: Circuito do Exercício 8.33 antes de t_0

Nesse instante, o capacitor pode ser considerado como carregado e em circuito aberto e o indutor como carregado em forma de curto-circuito, ambos sem ferirem nenhuma LKT, nem LKC. Portanto, a corrente que passa pelo resistor de 5Ω é calculável pelo simples divisor de corrente:

$$I_{R_{5\Omega}} = 3A \cdot \frac{10\Omega}{10\Omega + 5\Omega}$$

$$\Rightarrow I_{R_{5\Omega}} = 3A \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow I_{R_{5\Omega}} = 2A$$

Em decorrência disso, o resto da corrente passa pelo outro resistor:

$$\Rightarrow I_{R_{10\Omega}} = 1A$$

Agora, como é observado na figura 6,

$$I_L(0^-) = -I_{R_{5\Omega}}$$

$$I_L(0^-) = -2A$$

Como o resistor de 10Ω está em paralelo com o capacitor, sabe-se que as suas tensões são iguais. Desta forma,

$$V_C(0^-) = V_{R_{10\Omega}}$$

$$\Rightarrow V_C(0^-) = 1A \cdot 10\Omega$$

$$\Rightarrow V_C(0^-) = 10V$$

Como, no instante em que a chave é aberta, $t = 0s$, e logo após, em $t = 0^+s$, não há nenhuma fonte impulsiva, nem alguma alteração que torne incoerente as LKT e LKC com essas condições calculadas acima, conclui-se que:

$$V_C(0^+) = V_C(0^-)$$

$$I_L(0^+) = I_L(0^-)$$

$$\Rightarrow x_1(t_0) = 10 \quad (6)$$

$$\Rightarrow x_2(t_0) = -2 \quad (7)$$

Agrupando as equações 1 à 7, obtém-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} [u] \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} [u] \\ \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

*

2.1.2 Circuito do Exercício 8.38.1

Para começar, analisar-se-á o comportamento genérico do circuito em $t \geq t_0$:

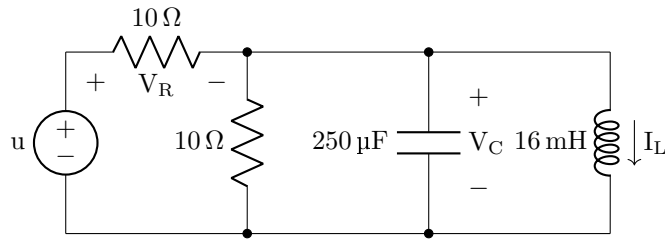


Figura 7: Circuito Genérico do Exercício 8.38.1

Pelas definições iniciais de saídas, já concluí-se que:

$$y_1 = x_1 \quad (9)$$

$$y_2 = x_2 \quad (10)$$

Para a terceira saída, pode-se analisar a primeira malha da esquerda:

$$\begin{aligned} -u + V_R + V_C &= 0 \\ \Rightarrow V_R &= u - V_C \\ \Rightarrow y_3 &= -x_1 + u \end{aligned} \quad (11)$$

Agora, de forma similar ao exercício anterior,

$$\begin{aligned} V_L &= L \cdot \dot{I}_L \\ \Rightarrow \dot{I}_L &= \frac{V_L}{L} \\ \Rightarrow \dot{x}_2 &= 62,5 V_L \\ I_C &= C \cdot \dot{V}_C \\ \Rightarrow \dot{V}_C &= \frac{I_C}{C} \\ \Rightarrow \dot{x}_1 &= 4000 I_C \end{aligned}$$

Com isso em mente, é aparente que o capacitor e o indutor estão em paralelo. Portanto:

$$\begin{aligned} V_L &= V_C \\ \Rightarrow V_L &= x_1 \\ \Rightarrow \dot{x}_2 &= 62,5 x_1 \end{aligned} \quad (12)$$

Agora, para I_C , analisar-se-á o nó superior do circuito:

$$\begin{aligned}
I_R &= I_{R_{10\Omega}} + I_C + I_L \\
\Rightarrow I_C &= I_R - I_{R_{10\Omega}} - I_L \\
\Rightarrow I_C &= \frac{-V_C + u}{10\Omega} - \frac{V_C}{10\Omega} - I_L \\
\Rightarrow I_C &= -\frac{x_1}{5} - x_2 + \frac{u}{10} \\
\Rightarrow \dot{x}_1 &= 4000 \left(-\frac{x_1}{5} - x_2 + \frac{u}{10} \right) \\
\Rightarrow \dot{x}_1 &= -800x_1 - 4000x_2 + 400u
\end{aligned} \tag{13}$$

Com essa análise, partir-se-á para o estudo das condições iniciais de x_1 e x_2 . Em $t = 0^-$:

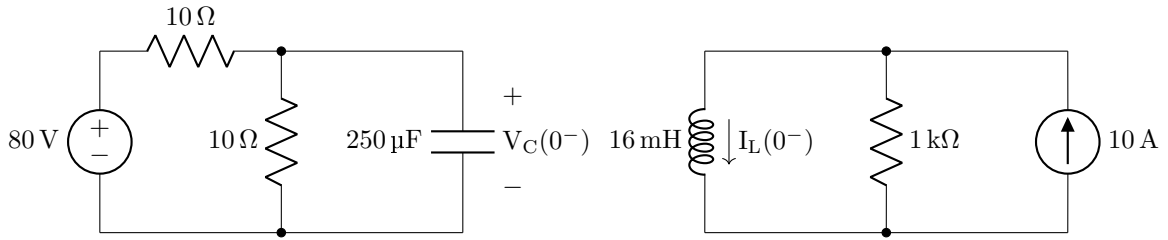


Figura 8: Circuito do Exercício 8.38.1 antes de t_0

Considerando essa situação anterior às chaves, observa-se que, considerando o capacitor em aberto por estar carregado,

$$\begin{aligned}
V_C(0^-) &= 80V \cdot \frac{10\Omega}{10\Omega + 10\Omega} \\
\Rightarrow V_C(0^-) &= 80V \cdot \frac{1}{2} \\
\Rightarrow V_C(0^-) &= 40V
\end{aligned}$$

Para o indutor, considerando-o carregado como um curto-circuito, toda a corrente da fonte de corrente fluirá por ele:

$$I_L(0^-) = 10A$$

Como não fontes impulsivas e, ao unir esses circuitos no circuito genérico 7, não há conflitos em nenhuma LKT, nem LKC, conclui-se que:

$$\begin{aligned}
V_C(0^+) &= V_C(0^-) \\
I_L(0^+) &= I_L(0^-) \\
\Rightarrow x_1(t_0) &= 40
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\Rightarrow x_2(t_0) = 10 \tag{15}$$

Unindo os resultados das equações 9 à 15, obtem-se:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -800 & -4000 \\ 62,5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix} [u] \\
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u] \\
\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 40 \\ 10 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{16}$$

*

2.1.3 Circuito do Exercício 8.38.2

Novamente, começar-se-á pelo comportamento genérico em $t \geq t_0$. A partir desse ponto, já não há mais fontes de alimentação, portanto, as matrizes de entrada são todas nulas e não serão explicitamente representadas aqui:

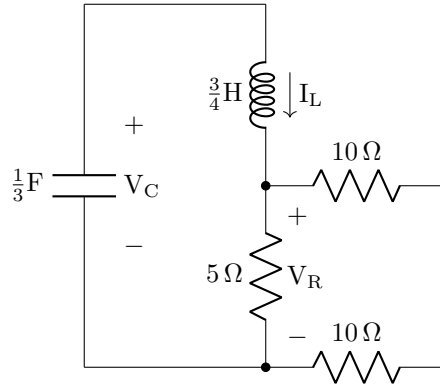


Figura 9: Circuito Genérico do Exercício 8.38.2

De praxe, pela definição das saídas,

$$y_1 = x_1 \quad (17)$$

$$y_2 = x_2 \quad (18)$$

Para as outras grandezas, vale realizar uma breve simplificação no circuito unindo os dois resistores da direita:

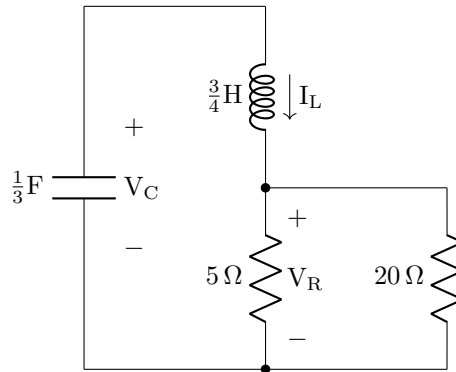


Figura 10: Circuito Genérico Simplificado do Exercício 8.38.2

Pela figura acima, é fácil enxergar que há um divisor de corrente logo acima da grandeza de saída de interesse:

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{20\Omega}{5\Omega + 20\Omega} \cdot I_L \\ \Rightarrow I_R &= \frac{4}{5} I_L \\ \Rightarrow V_R &= 5\Omega \cdot \frac{4}{5} I_L \\ \Rightarrow V_R &= 4I_L \\ \Rightarrow y_3 &= 4x_2 \end{aligned} \quad (19)$$

Para a variação nos estados:

$$\begin{aligned} V_L &= L \cdot \dot{I}_L \\ \Rightarrow \dot{I}_L &= \frac{V_L}{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \dot{x}_2 &= \frac{4}{3}V_L \\
I_C &= C \cdot \dot{V}_C \\
\Rightarrow \dot{V}_C &= \frac{I_C}{C} \\
\Rightarrow \dot{x}_1 &= 3I_C
\end{aligned}$$

Como o capacitor e o indutor estão em anti-série, sabe-se que:

$$\begin{aligned}
I_C &= -I_L \\
\Rightarrow I_C &= -x_2 \\
\Rightarrow \dot{x}_1 &= -3x_2
\end{aligned} \tag{20}$$

Para a tensão sobre o indutor, basta construir uma malha:

$$\begin{aligned}
-V_C + V_L + V_R &= 0 \\
\Rightarrow V_L &= V_C - V_R \\
\Rightarrow V_L &= V_C - 4\Omega \cdot I_L \\
\Rightarrow V_L &= x_1 - 4x_2 \\
\Rightarrow \dot{x}_2 &= \frac{4}{3} \cdot (x_1 - 4x_2) \\
\Rightarrow \dot{x}_2 &= \frac{4}{3}x_1 - \frac{16}{3}x_2
\end{aligned} \tag{21}$$

Agora, para as condições iniciais, partindo de $t = 0^-$:

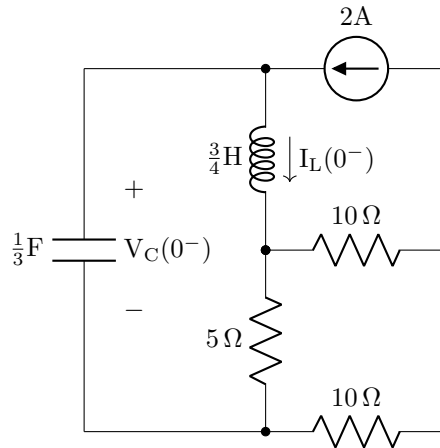


Figura 11: Circuito do Exercício 8.38.2 antes de t_0

Tratando os componentes que armazenam energia como carregados, o capacitor é um circuito aberto e indutor se comporta como um curto-circuito. Logo, como não há outro caminho para a corrente da fonte percorrer,

$$I_L(0^-) = 2A$$

Para determinar a tensão no capacitor, pode-se percorrer a malha esquerda novamente:

$$\begin{aligned}
-V_C(0^-) + V_L(0^-) + V_R(0^-) &= 0 \\
\Rightarrow V_C(0^-) &= V_R(0^-)
\end{aligned}$$

Para descobrir $V_R(0^-)$, pode-se utilizar o divisor de corrente entre os resistores para saber a corrente sobre o componente e aplicar a Lei de Ohm:

$$I_R(0^-) = \frac{10\Omega}{10\Omega + 5\Omega + 10\Omega} \cdot 2A$$

$$\Rightarrow I_R(0^-) = \frac{4}{5} \text{ A}$$

$$V_R(0^-) = 5\Omega \cdot \frac{4}{5} \text{ A}$$

$$\Rightarrow V_R(0^-) = 4 \text{ V}$$

Portanto,

$$V_C(0^-) = 4 \text{ V}$$

Como não há fontes impulsivas, nem chaves, não há nada que fira a LKC ou a LKT.

Então:

$$V_C(0^+) = V_C(0^-)$$

$$I_L(0^+) = I_L(0^-)$$

Com isso,

$$\Rightarrow x_1(t_0) = 4 \quad (22)$$

$$\Rightarrow x_2(t_0) = 2 \quad (23)$$

Agrupando 17 à 23, obtem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ \frac{4}{3} & -\frac{16}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

*

2.1.4 Circuito do Exercício 8.39

Partindo para a análise genérica em $t \geq t_0$:

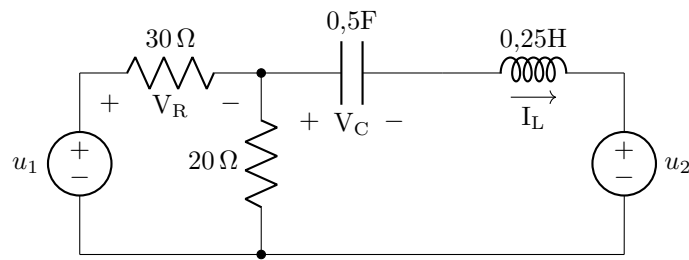


Figura 12: Circuito Genérico do Exercício 8.39

Sabe-se que, de cara, duas das saídas são:

$$y_1 = x_1 \quad (25)$$

$$y_2 = x_2 \quad (26)$$

No único nó superior do circuito, observa-se que:

$$I_R = I_{R_{20\Omega}} + I_L$$

$$\Rightarrow I_{R_{20\Omega}} = I_R - I_L$$

Agora, com esse conhecimento, aplicando malhas na esquerda:

$$\begin{aligned}
-u_1 + V_R + V_{R_{20\Omega}} &= 0 \\
\Rightarrow -u_1 + 50\Omega \cdot I_R - 20\Omega \cdot I_L &= 0 \\
\Rightarrow 50\Omega \cdot I_R &= u_1 + 20\Omega \cdot I_L \\
\Rightarrow I_R &= \frac{1}{50}u_1 + \frac{2}{5}I_L \\
\Rightarrow I_R &= \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{50}u_1
\end{aligned}$$

Pela Lei de Ohm, tem-se:

$$\begin{aligned}
V_R &= 30\Omega \cdot I_R \\
\Rightarrow y_3 &= 12x_2 + \frac{3}{5}u_1
\end{aligned} \tag{27}$$

Agora, para as variações de estados:

$$\begin{aligned}
V_L &= L \cdot \dot{I}_L \\
\Rightarrow \dot{I}_L &= \frac{V_L}{L} \\
\Rightarrow \dot{x}_2 &= 4V_L \\
I_C &= C \cdot \dot{V}_C \\
\Rightarrow \dot{V}_C &= \frac{I_C}{C} \\
\Rightarrow \dot{x}_1 &= 2I_C
\end{aligned}$$

De cara, pela construção do circuito, percebe-se que o capacitor e o indutor estão em série, ou seja,

$$\begin{aligned}
I_C &= I_L \\
\Rightarrow I_C &= x_2 \\
\Rightarrow \dot{x}_1 &= 2x_2
\end{aligned} \tag{28}$$

Para a última variação de estado, realizar-se-á a malha superior inteira do circuito:

$$\begin{aligned}
-u_1 + V_R + V_C + V_L + u_2 &= 0 \\
\Rightarrow V_L &= u_1 - u_2 - V_R - V_C \\
\Rightarrow V_L &= u_1 - u_2 - 12x_2 - \frac{3}{5}u_1 - x_1 \\
\Rightarrow V_L &= -x_1 - 12x_2 + \frac{2}{5}u_1 - u_2 \\
\Rightarrow \dot{x}_2 &= 4 \left(-x_1 - 12x_2 + \frac{2}{5}u_1 - u_2 \right) \\
\Rightarrow \dot{x}_2 &= -4x_1 - 48x_2 + \frac{8}{5}u_1 - 4u_2
\end{aligned} \tag{29}$$

Partindo para as condições iniciais do circuito, em $t = 0^-$, percebe-se que nenhum componente estava carregado até esse instante. Por conta disso, é possível afirmar que:

$$\begin{aligned}
V_C(0^-) &= 0V \\
I_L(0^-) &= 0A
\end{aligned}$$

Devido a não haver fontes impulsivas, nem chaves e não haver violações das leis fundamentais do circuito, os componentes que se opõe à variação de tensão (capacitor) e à variação de corrente (indutor) mantêm esses valores até o instante de interesse:

$$\begin{aligned}
V_C(0^+) &= V_C(0^-) \\
I_L(0^+) &= I_L(0^-)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1(t_0) = 0 \quad (30)$$

$$\Rightarrow x_2(t_0) = 0 \quad (31)$$

Portanto, unindo as afirmações 25 à 31, obtem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{8}{5} & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

*

3.1 Simulações dos Resultados

Como dito pelo enunciado, agora precisa-se simular os resultados gerados pelas matrizes dos exercícios no SIMULINK, do MATLAB. Além disso, como forma de conferir os resultados, serão feitos os gráficos das respostas dos exercícios como descrito na própria lista para garantir que pelo menos uma das grandezas está correta. Esses gráficos das respostas serão feitos através do próprio MATLAB para tornar mais fácil a comparação dos resultados. Pode-se ampliar as imagens o quanto for desejado, visto que elas foram geradas a partir de arquivos PDF. Também vale notar que os gráficos do SIMULINK são gerados incluindo apenas o intervalo de valores que é igual à imagem da função das grandezas (para facilitar a leitura de alguns gráficos).

3.1.1 Simulação do Exercício 8.33

Primeiramente, será feito o gráfico da resposta expressa pelo próprio exercício:

$$V_C(t) = (20 + 0,205e^{-4,95t} - 10,205e^{-0,05t}) V, t > 0$$

Baseado na equação 8, o código para gerar todos os gráficos de saídas deste exercício é o seguinte:

```
1  % Gerando a Representacao em Espaco de Estados
2  A = [0 1/4; -1 -5];
3  B = [0; 5];
4  C1 = [1 0];
5  C2 = [0 1];
6  C3 = [0 -5];
7  D1 = [0];
8  D2 = [0];
9  D3 = [5];
10
11 % Condições iniciais
12 x0 = [10; -2];
13
14 % Colocando as representacoes em um sistema do MATLAB
15 rep1 = ss(A, B, C1, D1);
16 rep2 = ss(A, B, C2, D2);
17 rep3 = ss(A, B, C3, D3);
18
19 % Gerando amostras de tempo adequadas para visualizacao
20 tsim = 0:0.01:100;
21 t1 = 0:0.01:80;
22 t2 = 0:0.01:40;
23 t3 = 0:0.01:60;
24
25 % Resposta do exercicio
26 Vc = 20 + 0.205*exp(-4.95*tsim) - 10.205*exp(-0.05*tsim);
27
28 % Gerando as entradas
29 u = 4 * heaviside(tsim);
30
31 % Resolvendo os sistemas de EDOs
32 [y1, to1, x1] = lsim(rep1, u, tsim, x0);
33 [y2, to2, x2] = lsim(rep2, u, tsim, x0);
34 [y3, to3, x3] = lsim(rep3, u, tsim, x0);
35
36 % Gerando o grafico da primeira saida (salvando em PDF)
37 h = figure;
38 plot(t1, y1(1:size(t1, 2)), 'b', t1, Vc(1:size(t1, 2)), 'r--');
39 xlabel('Tempo-[s]');
40 ylabel('Tensao-no-Capacitor-[V]');
41 title('Saida-no-Capacitor');
42 legend('Espaco-de-Estados', 'Gabarito-do-Exercicio');
43 grid on;
44 filename = 'plot.8_33_y1';
45 filepath = '../images/plots/';
46 set(h, 'Units', 'Inches');
47 pos = get(h, 'Position');
48 set(h, 'PaperPositionMode', 'Auto', 'PaperUnits', 'Inches', 'PaperSize', [pos(3), pos(4)]);
49 print(h, fullfile(filepath, filename), '-dpdf', '-r0');
50
51 % Gerando o grafico da segunda saida (salvando em PDF)
52 h = figure;
```

```

53 plot(t2, y2(1:size(t2, 2)), 'b');
54 xlabel('Tempo-[s]');
55 ylabel('Corrente-no-Indutor-[A]');
56 title('Saída-no-Indutor');
57 grid on;
58 filename = 'plot_8_33_y2';
59 filepath = '../images/plots/';
60 set(h,'Units','Inches');
61 pos = get(h,'Position');
62 set(h,'PaperPositionMode','Auto','PaperUnits','Inches','PaperSize',[pos(3), pos(4)]);
63 print(h, fullfile (filepath, filename),'-dpdf','-r0');
64
65 % Gerando o grafico da terceira saída (salvando em PDF)
66 h = figure;
67 plot(t3, y3(1:size(t3, 2)), 'b');
68 xlabel('Tempo-[s]');
69 ylabel('Tensao-no-Resistor-[V]');
70 title('Saída-no-Resistor');
71 grid on;
72 filename = 'plot_8_33_y3';
73 filepath = '../images/plots/';
74 set(h,'Units','Inches');
75 pos = get(h,'Position');
76 set(h,'PaperPositionMode','Auto','PaperUnits','Inches','PaperSize',[pos(3), pos(4)]);
77 print(h, fullfile (filepath, filename),'-dpdf','-r0');

```

Código 1: Exercício 8.33

Com esse código, gerou-se os seguintes gráficos:

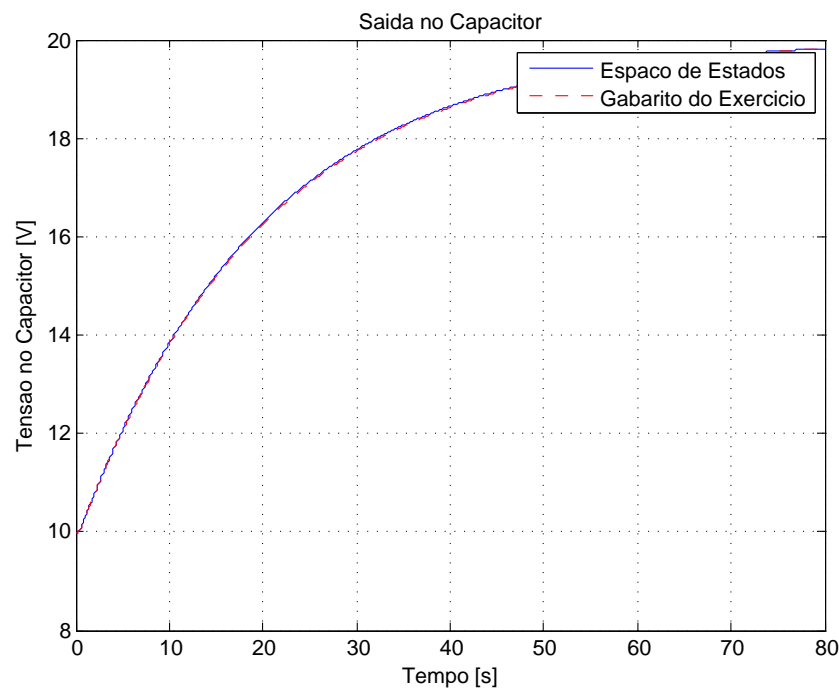


Figura 13: Saída y_1 do Exercício 8.33

Nessa saída, observa-se que há uma ótima sobreposição de saída do Espaço de Estados e da função fornecida pelo gabarito da questão. A tensão no capacitor parte de 10V e estabiliza em 20V, como era esperado.

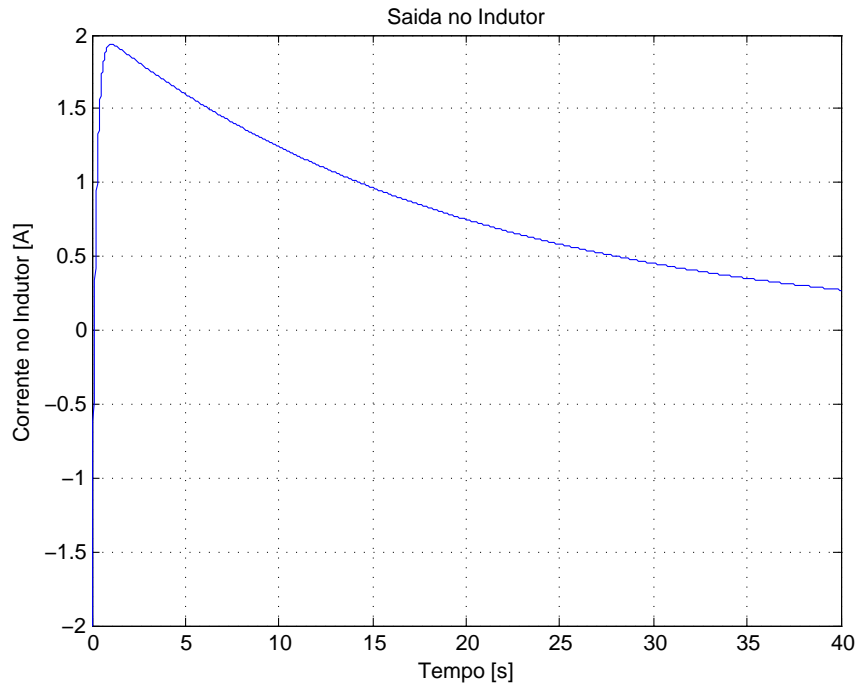


Figura 14: Saída y_2 do Exercício 8.33

Na figura acima, observa-se que a corrente no indutor parte de $-2A$ e chega até o regime permanente esperado de $0A$. Isso porque não há caminho para a corrente do indutor passar após o capacitor ficar carregado.

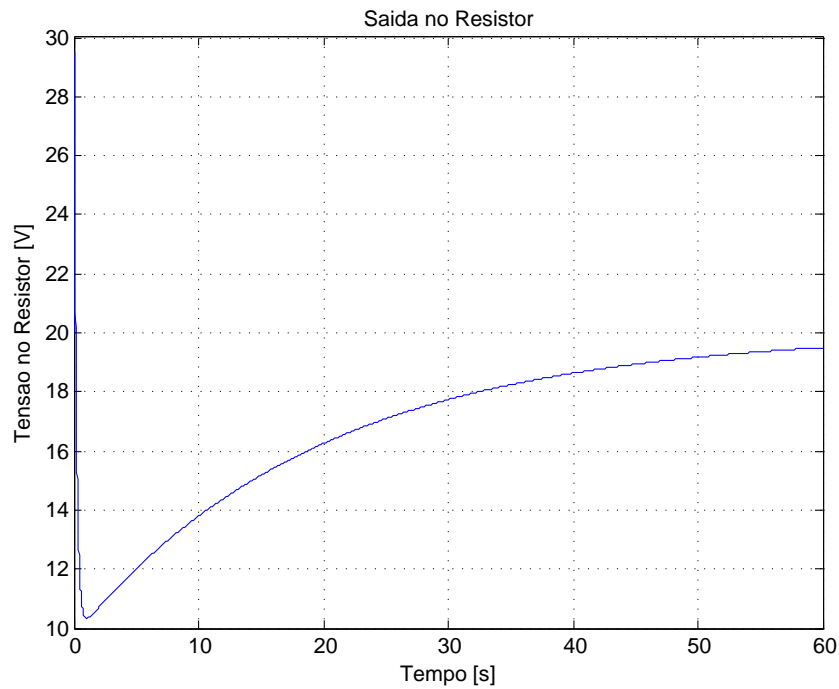


Figura 15: Saída y_3 do Exercício 8.33

Por fim, é observável que a figura acima representa bem o comportamento da tensão sobre o resistor. Partindo de $30V$ e chegando no regime permanente de $20V$. Esse regime permanente advém da própria corrente de entrada que percorre apenas esse resistor ao estabilizar.

*

3.1.2 Simulação do Exercício 8.38.1

Começando novamente pela representação gráfica da resposta do próprio exercício:

$$I_L(t) = \{8 + e^{-400t} [2 \cos(300t) + 11 \sin(300t)]\} A, t > 0$$

Agora, partindo da expressão 16, o código para comparar as respostas e expressar as outras saídas é o seguinte:

```
1  % Gerando a Representacao em Espaco de Estados
2  A = [-800 -4000; 62.5 0];
3  B = [400; 0];
4  C1 = [1 0];
5  C2 = [0 1];
6  C3 = [-1 0];
7  D1 = [0];
8  D2 = [0];
9  D3 = [1];
10
11 % Condicoes iniciais
12 x0 = [40; 10];
13
14 % Colocando as representacoes em um sistema do MATLAB
15 rep1 = ss(A, B, C1, D1);
16 rep2 = ss(A, B, C2, D2);
17 rep3 = ss(A, B, C3, D3);
18
19 % Gerando amostras de tempo adequadas para visualizacao
20 tsim = 0:0.0001:0.1;
21 t1 = 0:0.0001:0.025;
22 t2 = 0:0.0001:0.025;
23 t3 = 0:0.0001:0.025;
24
25 % Resposta do exercicio
26 Il = 8 + exp(-400*tsim).*(2*cos(300*tsim) + 11*sin(300*tsim));
27
28 % Gerando as entradas
29 u = 80 * heaviside(tsim);
30 u(1) = 80;
31
32 % Resolvendo os sistemas de EDOs
33 [y1, to1, x1] = lsim(rep1, u, tsim, x0);
34 [y2, to2, x2] = lsim(rep2, u, tsim, x0);
35 [y3, to3, x3] = lsim(rep3, u, tsim, x0);
36
37 % Gerando o grafico da primeira saida (salvando em PDF)
38 h = figure;
39 plot(t1, y1(1:size(t1, 2)), 'b');
40 xlabel('Tempo-[s]');
41 ylabel('Tensao-no-Capacitor-[V]');
42 title('Saida-no-Capacitor');
43 grid on;
44 filename = 'plot_8.38.1.y1';
45 filepath = '../images/plots/';
46 set(h,'Units','Inches');
47 pos = get(h,'Position');
48 set(h,'PaperPositionMode','Auto','PaperUnits','Inches','PaperSize',[pos(3), pos(4)]);
49 print(h, fullfile ( filepath , filename), '-dpdf','-r0');
50
51 % Gerando o grafico da segunda saida (salvando em PDF)
52 h = figure;
53 plot(t2, y2(1:size(t2, 2)), 'b', t2, Il(1:size(t2, 2)), 'r--');
54 xlabel('Tempo-[s]');
55 ylabel('Corrente-no-Indutor-[A]');
56 title('Saida-no-Indutor');
57 legend('Espaco-de-Estados', 'Gabarito-do-Exercicio');
58 grid on;
59 filename = 'plot_8.38.1.y2';
60 filepath = '../images/plots/';
61 set(h,'Units','Inches');
62 pos = get(h,'Position');
63 set(h,'PaperPositionMode','Auto','PaperUnits','Inches','PaperSize',[pos(3), pos(4)]);
64 print(h, fullfile ( filepath , filename), '-dpdf','-r0');
65
66 % Gerando o grafico da terceira saida (salvando em PDF)
```

```

67 h = figure;
68 plot(t3, y3(1:size(t3, 2)), 'b');
69 xlabel('Tempo[s]');
70 ylabel('Tensao-no-Resistor[V]');
71 title('Saida-no-Resistor');
72 grid on;
73 filename = 'plot_8_38_1_y3';
74 filepath = '../images/plots/';
75 set(h,'Units','Inches');
76 pos = get(h,'Position');
77 set(h,'PaperPositionMode','Auto','PaperUnits','Inches','PaperSize',[pos(3), pos(4)]);
78 print(h, fullfile(filepath, filename), '-dpdf','-r0');

```

Código 2: Exercício 8.38.1

A partir daí, foram construídos os seguintes gráficos:

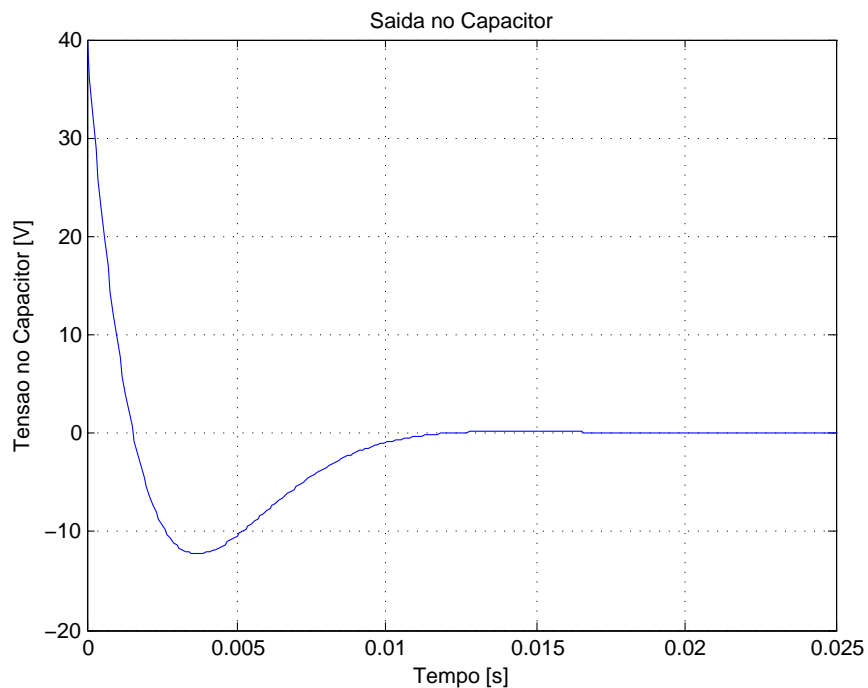


Figura 16: Saída y_1 do Exercício 8.38.1

Aqui, na tensão do capacitor, é observável que ela começa nos 40V, tem comportamento senoidal amortecido e acaba na mesma tensão do indutor carregado, 0V.

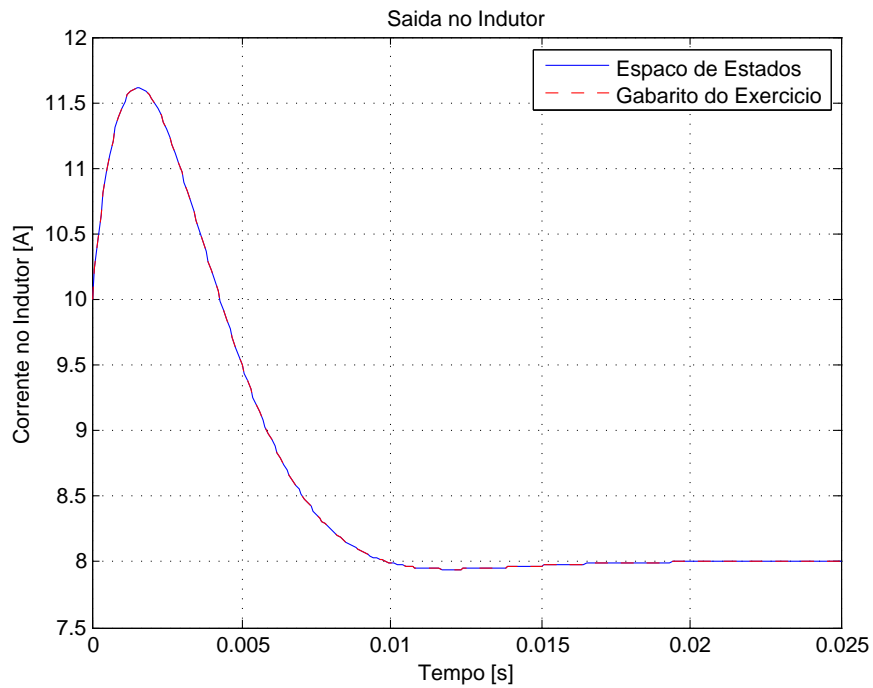


Figura 17: Saída y_2 do Exercício 8.38.1

Nessa figura, é visível que há uma ótima sobreposição entre os resultados da função do gabarito com a resposta em Representação de Espaço de Estados, confirmando que a corrente começa em 10A e acaba em 8A, com comportamento senoidal amortecido.

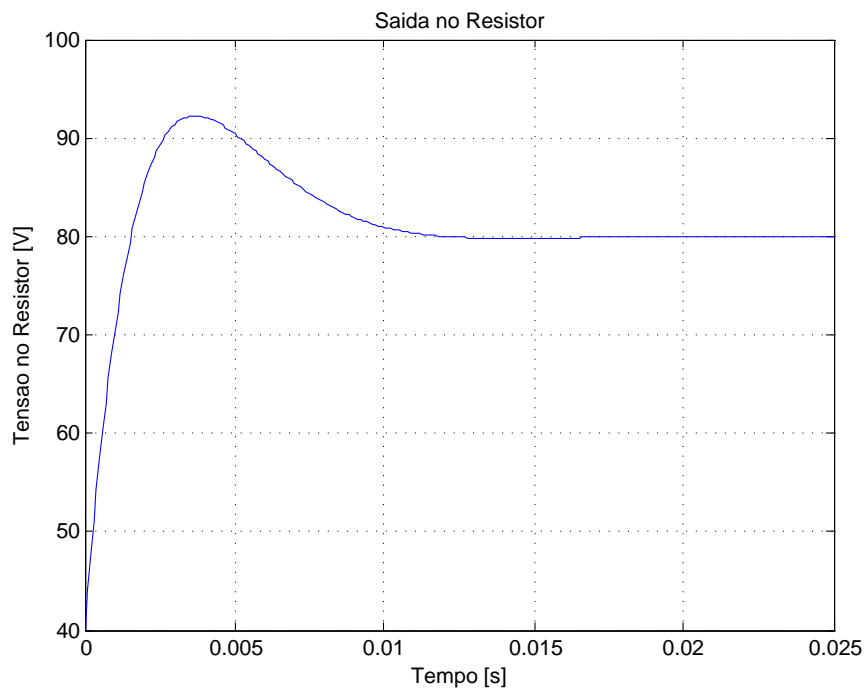


Figura 18: Saída y_3 do Exercício 8.38.1

Por fim, é observável que a figura acima representa bem o comportamento da tensão sobre o resistor. Partindo de 40V e chegando no regime permanente de 80V. No intervalo central, se comportando com o mesmo tipo de oscilação que as outras grandezas acima.

*

3.1.3 Simulação do Exercício 8.38.2

A resposta dada pelo exercício é:

$$I_L(t) = (e^{-4,431t} + e^{-0,903t}) A, t > 0$$

O programa utilizado para gerar os resultados gráficos, contando com 24, está a seguir:

```
1  % Gerando a Representacao em Espaco de Estados
2  A = [0 -3; 4/3 -16/3];
3  B = [0; 0];
4  C1 = [1 0];
5  C2 = [0 1];
6  C3 = [0 4];
7  D1 = [0];
8  D2 = [0];
9  D3 = [0];
10
11 % Condicoes iniciais
12 x0 = [4; 2];
13
14 % Colocando as representacoes em um sistema do MATLAB
15 rep1 = ss(A, B, C1, D1);
16 rep2 = ss(A, B, C2, D2);
17 rep3 = ss(A, B, C3, D3);
18
19 % Gerando amostras de tempo adequadas para visualizacao
20 tsim = 0:0.01:10;
21 t1 = 0:0.01:5;
22 t2 = 0:0.01:5;
23 t3 = 0:0.01:5;
24
25 % Resposta do exercicio
26 Il = exp(-4.431*tsim) + exp(-0.903*tsim);
27
28 % Gerando as entradas (neste caso, qualquer valor com a dimensao de matriz
29 % correta)
30 u = heaviside(tsim);
31
32 % Resolvendo os sistemas de EDOs
33 [y1, to1, x1] = lsim(rep1, u, tsim, x0);
34 [y2, to2, x2] = lsim(rep2, u, tsim, x0);
35 [y3, to3, x3] = lsim(rep3, u, tsim, x0);
36
37 % Gerando o grafico da primeira saida (salvando em PDF)
38 h = figure;
39 plot(t1, y1(1:size(t1, 2)), 'b');
40 xlabel('Tempo-[s]');
41 ylabel('Tensao-no-Capacitor-[V]');
42 title('Saida-no-Capacitor');
43 grid on;
44 filename = 'plot_8.38.2.y1';
45 filepath = '../images/plots/';
46 set(h, 'Units', 'Inches');
47 pos = get(h, 'Position');
48 set(h, 'PaperPositionMode', 'Auto', 'PaperUnits', 'Inches', 'PaperSize', [pos(3), pos(4)]);
49 print(h, fullfile(filepath, filename), '-dpdf', '-r0');
50
51 % Gerando o grafico da segunda saida (salvando em PDF)
52 h = figure;
53 plot(t2, y2(1:size(t2, 2)), 'b', t2, Il(1:size(t2, 2)), 'r--');
54 xlabel('Tempo-[s]');
55 ylabel('Corrente-no-Indutor-[A]');
56 title('Saida-no-Indutor');
57 legend('Espaco-de-Estados', 'Gabarito-do-Exercicio');
58 grid on;
59 filename = 'plot_8.38.2.y2';
60 filepath = '../images/plots/';
61 set(h, 'Units', 'Inches');
62 pos = get(h, 'Position');
63 set(h, 'PaperPositionMode', 'Auto', 'PaperUnits', 'Inches', 'PaperSize', [pos(3), pos(4)]);
64 print(h, fullfile(filepath, filename), '-dpdf', '-r0');
65
66 % Gerando o grafico da terceira saida (salvando em PDF)
67 h = figure;
```

```

68 plot(t3, y3(1:size(t3, 2)), 'b');
69 xlabel('Tempo-[s]');
70 ylabel('Tensao-no-Resistor-[V]');
71 title('Saida-no-Resistor');
72 grid on;
73 filename = 'plot_8_38_2_y3';
74 filepath = '../images/plots/';
75 set(h,'Units','Inches');
76 pos = get(h,'Position');
77 set(h,'PaperPositionMode','Auto','PaperUnits','Inches','PaperSize',[pos(3), pos(4)]);
78 print(h, fullfile(filepath, filename),'-dpdf','-r0');

```

Código 3: Exercício 8.38.2

Com esse programa, obteve-se os seguintes gráficos:

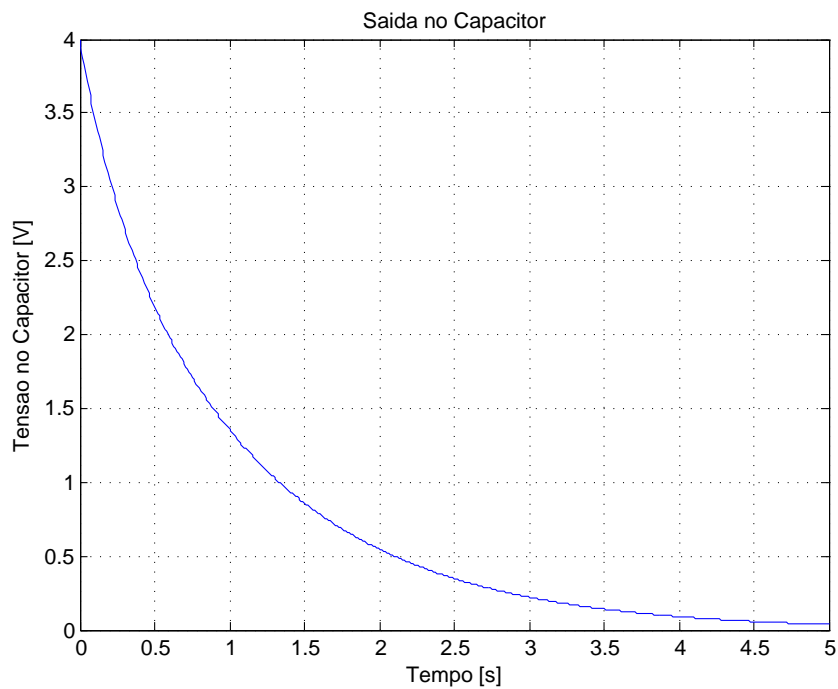


Figura 19: Saída y_1 do Exercício 8.38.2

Aqui, é observado um comportamento de decaimento exponencial, partindo do valor inicial de tensão sobre o capacitor, 4V, até atingir o valor de descarregado por não haver fontes.

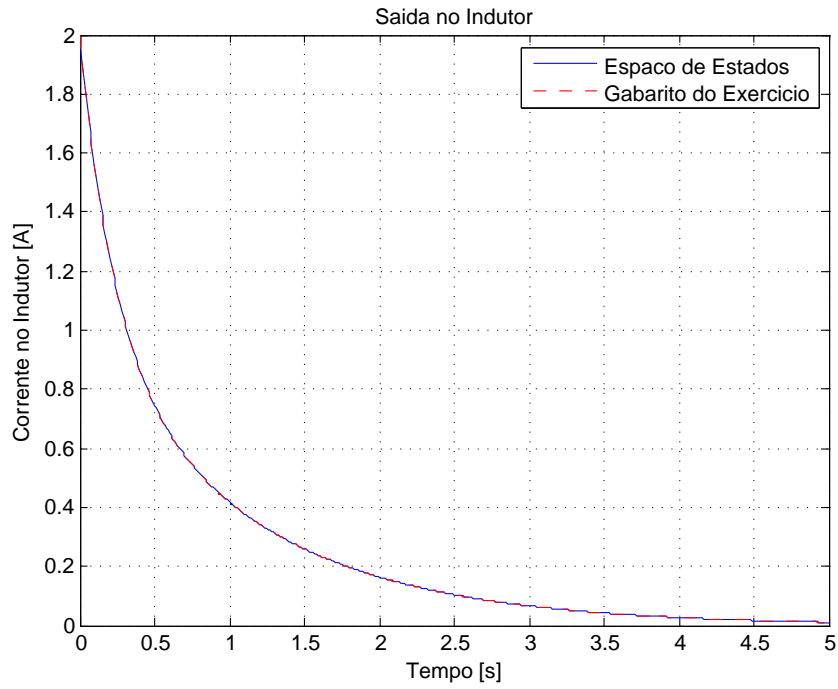


Figura 20: Saída y_2 do Exercício 8.38.2

No gráfico, há novamente a superposição de corrente no indutor esperada e obtida neste trabalho. A corrente da fonte passa, inicialmente, toda pelo indutor e, sem ela, o sistema deixa de ter energia no fim dos tempos.

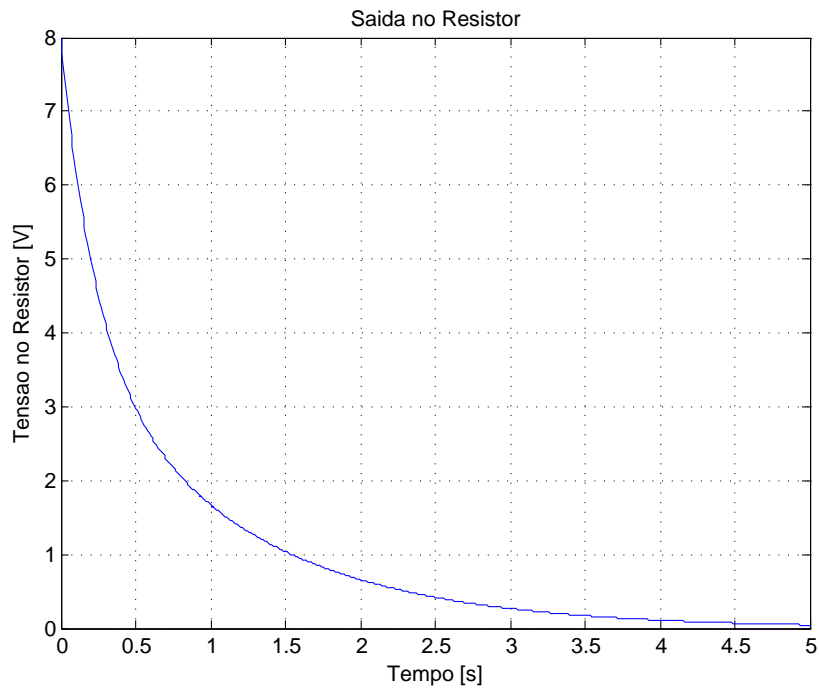


Figura 21: Saída y_3 do Exercício 8.38.2

Também, nessa imagem, há um comportamento esperado de decaimento exponencial no resistor, partindo do valor inicial de 8V que ocorre pelas cargas no indutor e capacitor e decrescendo até não haver mais energia no sistema.

*

3.1.4 Simulação do Exercício 8.39

Por fim, o exercício fornece o seguinte comportamento esperado para uma de suas grandezas:

$$V_C(t) = (-6 - 0,02e^{-47,83t} + 6,02e^{-0,17t}) V, t > 0$$

A seguir, baseado em 32, segue o código para gerar os gráficos das respostas:

```
1  % Gerando a Representacao em Espaco de Estados
2  A = [0 2; -4 -48];
3  B = [0 0; 8/5 -4];
4  C1 = [1 0];
5  C2 = [0 1];
6  C3 = [0 12];
7  D1 = [0 0];
8  D2 = [0 0];
9  D3 = [3/5 0];
10
11 % Condições iniciais
12 x0 = [0; 0];
13
14 % Colocando as representacoes em um sistema do MATLAB
15 rep1 = ss(A, B, C1, D1);
16 rep2 = ss(A, B, C2, D2);
17 rep3 = ss(A, B, C3, D3);
18
19 % Gerando amostras de tempo adequadas para visualizacao
20 tsim = 0:0.01:100;
21 t1 = 0:0.01:30;
22 t2 = 0:0.01:30;
23 t3 = 0:0.01:25;
24
25 % Resposta do exercicio
26 Vc = -6 - 0.02*exp(-47.83*tsim) + 6.02*exp(-0.17*tsim);
27
28 % Gerando as entradas
29 u = zeros(size(tsim, 2), 2);
30 u(:,1) = 60 * heaviside(tsim).';
31 u(:,2) = 30 * heaviside(tsim).';
32
33 % Resolvendo os sistemas de EDOs
34 [y1, to1, x1] = lsim(rep1, u, tsim, x0);
35 [y2, to2, x2] = lsim(rep2, u, tsim, x0);
36 [y3, to3, x3] = lsim(rep3, u, tsim, x0);
37
38 % Gerando o grafico da primeira saida (salvando em PDF)
39 h = figure;
40 plot(t1, y1(1:size(t1, 2)), 'b', t1, Vc(1:size(t1, 2)), 'r--');
41 xlabel('Tempo[s]');
42 ylabel('Tensao-no-Capacitor[V]');
43 title('Saida-no-Capacitor');
44 legend('Espaco-de-Estados', 'Gabarito-do-Exercicio');
45 grid on;
46 filename = 'plot_8.39_y1';
47 filepath = '../images/plots/';
48 set(h, 'Units', 'Inches');
49 pos = get(h, 'Position');
50 set(h, 'PaperPositionMode', 'Auto', 'PaperUnits', 'Inches', 'PaperSize', [pos(3), pos(4)]);
51 print(h, fullfile (filepath, filename), '-dpdf', '-r0');
52
53 % Gerando o grafico da segunda saida (salvando em PDF)
54 h = figure;
55 plot(t2, y2(1:size(t2, 2)), 'b');
56 xlabel('Tempo[s]');
57 ylabel('Corrente-no-Indutor[A]');
58 title('Saida-no-Indutor');
59 grid on;
60 filename = 'plot_8.39_y2';
61 filepath = '../images/plots/';
62 set(h, 'Units', 'Inches');
63 pos = get(h, 'Position');
64 set(h, 'PaperPositionMode', 'Auto', 'PaperUnits', 'Inches', 'PaperSize', [pos(3), pos(4)]);
65 print(h, fullfile (filepath, filename), '-dpdf', '-r0');
66
67 % Gerando o grafico da terceira saida (salvando em PDF)
```

```

68 h = figure;
69 plot(t3, y3(1:size(t3, 2)), 'b');
70 xlabel('Tempo[s]');
71 ylabel('Tensao-no-Resistor[V]');
72 title('Saida-no-Resistor');
73 grid on;
74 filename = 'plot_8.39_y3';
75 filepath = './images/plots/';
76 set(h,'Units','Inches');
77 pos = get(h,'Position');
78 set(h,'PaperPositionMode','Auto','PaperUnits','Inches','PaperSize',[pos(3), pos(4)]);
79 print(h, fullfile(filepath, filename), '-dpdf','-r0');

```

Código 4: Exercício 8.39

Esse gerou as seguintes figuras:

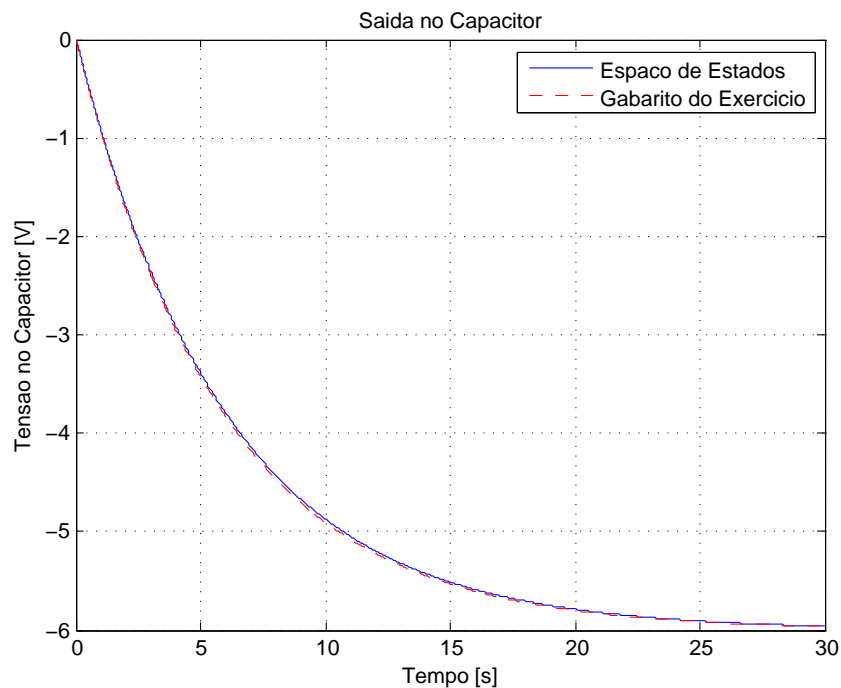


Figura 22: Saída y_1 do Exercício 8.39

Essa imagem apresenta bastante superposição da resposta do gabarito em comparação com a resposta obtida por este trabalho. Há apenas leves desvios devido a erros de truncamento. De fato, o valor inicial do capacitor é de 0V e ele termina com -6V de carga por conta da malha da direita do circuito 4.

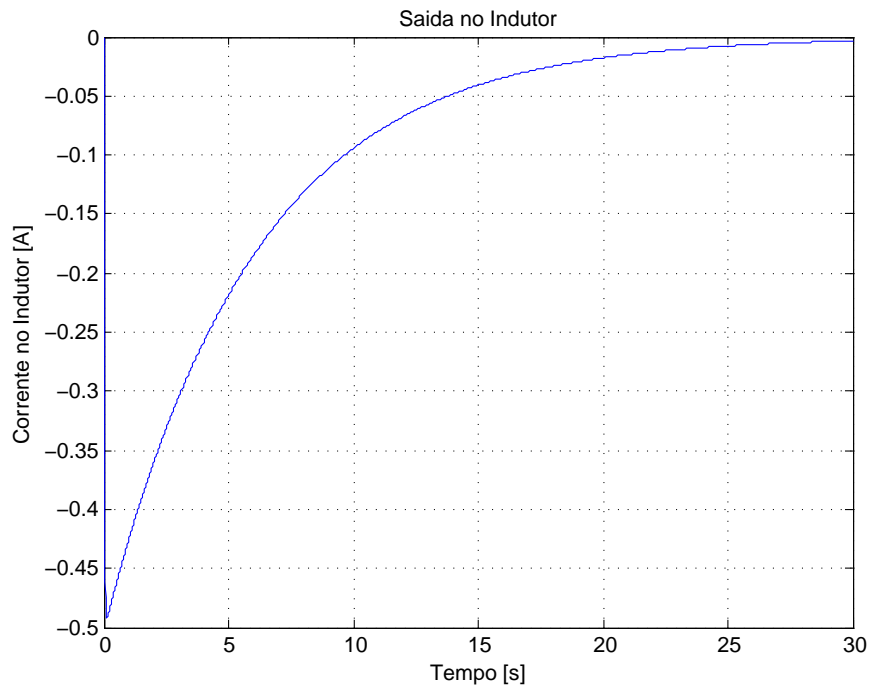


Figura 23: Saída y_2 do Exercício 8.39

Com *zoom*, é observável que a corrente no indutor começa em 0A e termina no mesmo ponto, com comportamento exponencial. No início, ele está descarregado e, no final, o capacitor “corta” a corrente do ramo onde o indutor também está presente.

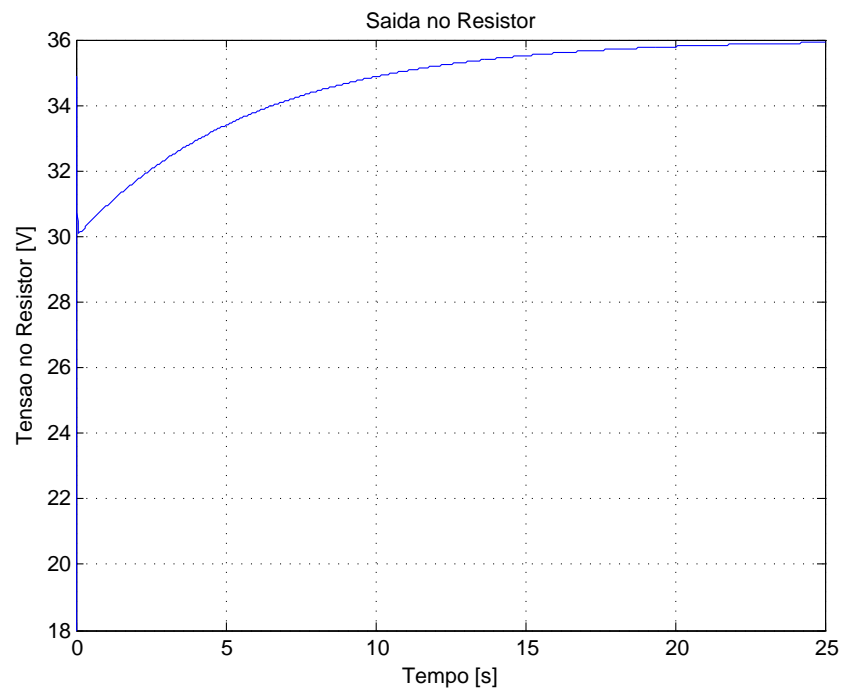


Figura 24: Saída y_3 do Exercício 8.39

Por fim, o comportamento da tensão no resistor também se comporta como deveria: partindo de 36V, estabilizando na mesma tensão em regime permanente. Isso se dá porque todo o lado direito do circuito 4 passa a não ter corrente devido ao indutor (no início) ou devido ao capacitor (no fim).

*

4.1 Considerações Finais

Este trabalho mostrou que, mesmo em circuitos onde é possível deduzir as equações diferenciais e analisar o comportamento das suas grandezas com equações diferenciais de alguma ordem, é possível deduzir as mesmas conclusões através da Representação em Espaço de Estados. Ademais, em circuitos de ordem muito elevada, a resolução das equações diferenciais puras pode se tornar inviável, exigindo a dedução da derivada de uma grandeza em t_0 de até uma ordem a menos que a ordem do circuito. Desde que se descubra a condição inicial de cada variável de estado, é possível resolver qualquer sistema dessa maneira.

Além disso, fazendo o mapeamento para um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, é bem mais fácil de resolver qualquer grandeza no circuito através da aplicação de uma Transformada de Laplace, onde o sistema de EDOs de primeira ordem passa a ser traduzido para um sistema linear comum. Resolvendo-o e tomando as transformadas inversas das funções resultantes, obtém-se a resposta temporal do sistema.

Para finalizar, essa forma de representar circuitos remete à ideia que todos os componentes passivos, excluindo as fontes dependentes, são impedâncias. Pois, ao tratá-las nesse sistema, especialmente no espaço de frequências, o indutor se comporta como um atraso na corrente, uma rotação positiva da tensão no espaço complexo e o capacitor atrasa a tensão e a rotaciona negativamente no espaço complexo. Já o resistor, pela Lei de Ohm, apresenta tensão sincronizada com a sua corrente. Toda essa teoria é unificada e simplificada através do uso de fasores.