

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia



ENG10001
Circuitos Elétricos I-C

Trabalho Bônus 1

Associação de Quadripolos

Pedro Lubaszewski Lima (00341810)

Turma A

8 de dezembro de 2024

Sumário

1.1	Circuitos Sorteados	2
2.1	Circuito Equivalente de Thevénin da Entrada	4
3.1	Análise da Associação de Quadripolos	7
3.1.1	Representação dos Circuitos	7
3.1.2	Parâmetros do Quadripolo Q2	7
3.1.3	Parâmetros do Quadripolo Q1	11
3.1.4	União dos Quadripolos	13
4.1	Circuito Equivalente de Norton da Saída	15
5.1	Ganho de Tensão da Saída V_2/V_1	17

1.1 Circuitos Sorteados

Primeiramente, com o meu número de matrícula **0 0 3 4 1 8 1 0**, observa-se os seguintes dígitos sorteadores:

- $N_1 = 3$;
- $N_2 = 4$;
- $N_3 = 1$;
- $N_4 = 8$;
- $N_5 = 1$;
- $N_6 = 0$.

A partir deles, sabe-se que os circuito a serem analisados são os seguintes:

- Circuito de Entrada:

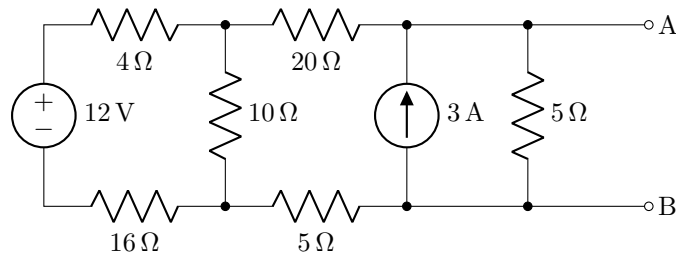


Figura 1: Circuito de Entrada 2

- Primeira Topologia de Quadripolo:

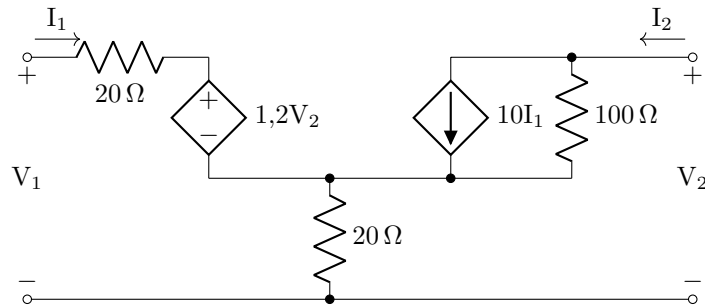


Figura 2: Topologia de Quadripolo 2 (Q1)

- Segunda Topologia de Quadripolo:

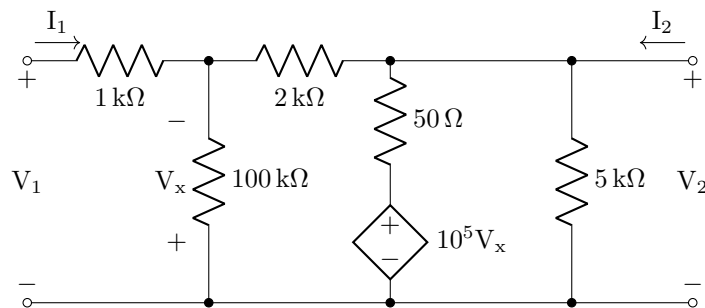


Figura 3: Topologia de Quadripolo 3 (Q2)

- Associação dos Quadripolos:

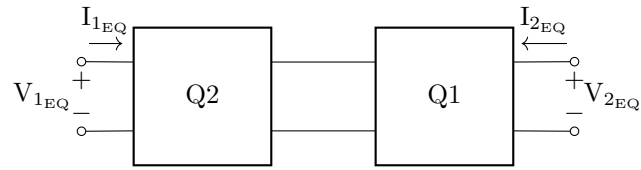


Figura 4: Associação dos Quadripolos Q1 e Q2

- Circuito de Saída:

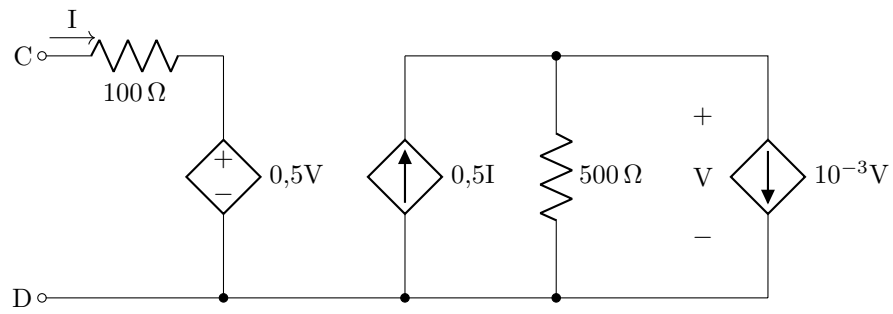
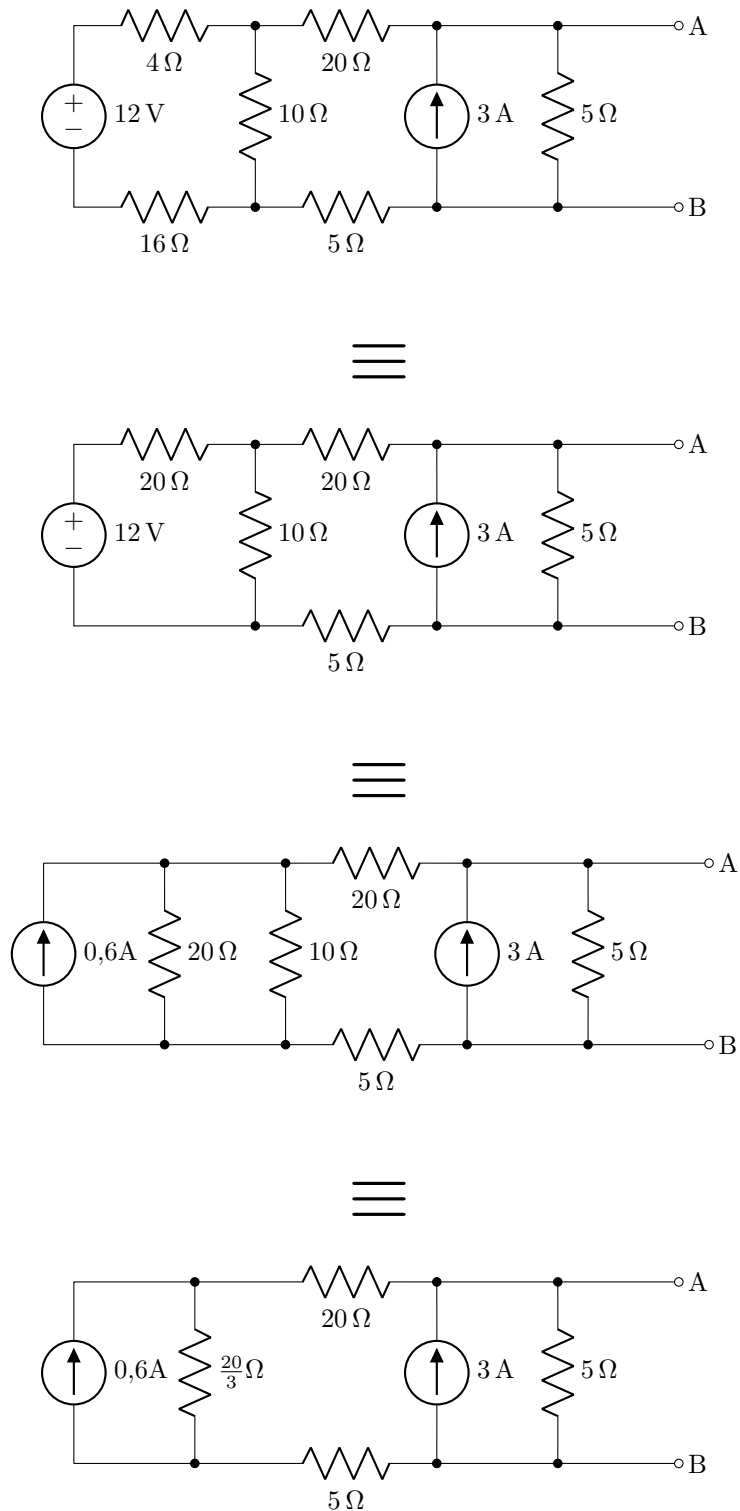
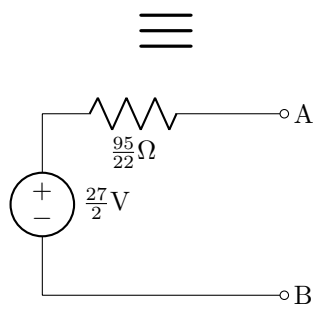
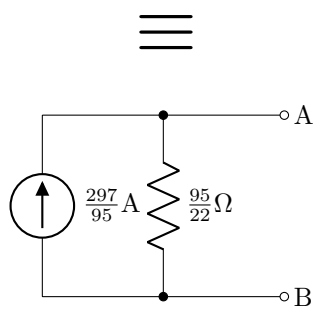
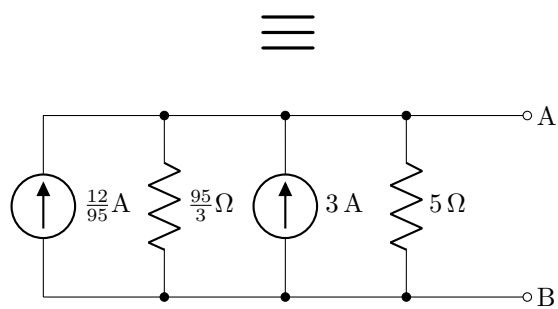
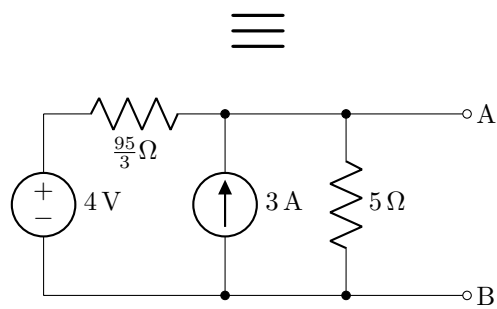
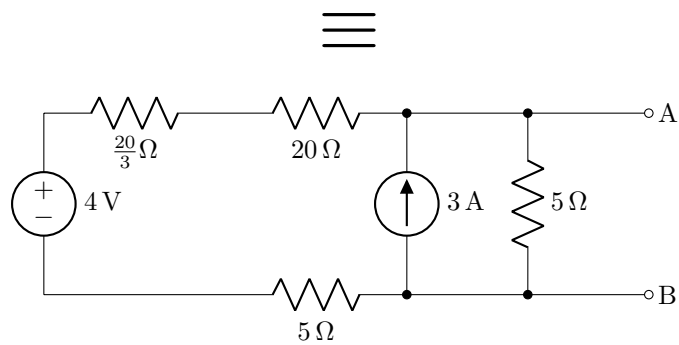


Figura 5: Circuito de Saída 1

2.1 Circuito Equivalente de Thevénin da Entrada

Partindo do circuito de entrada sorteado (figura 1), pode-se adotar a estratégia de transformação de fontes repetidas vezes até chegar-se no circuito equivalente de Thevénin:





Assim, com a sequência ilustrada acima, chegou-se ao circuito equivalente de Thevénin da entrada com $V_{TH} = \frac{27}{2}\text{V} = 13,5\text{V}$ e $R_{TH} = \frac{95}{22}\Omega = 4,318\Omega$.

*

3.1 Análise da Associação de Quadripolos

3.1.1 Representação dos Circuitos

Dada a associação de quadripolos sorteada, é mais prudente representar ambos os quadripolos com os parâmetros a , visto que o quadripolo equivalente apresenta parâmetros da seguinte forma:

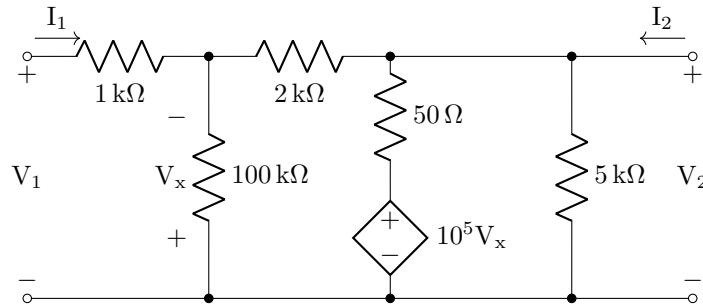
$$\begin{aligned} a_{11} &= a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21} & a_{12} &= a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22} \\ a_{21} &= a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21} & a_{22} &= a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22} \end{aligned} \quad (1)$$

Onde o primeiro quadripolo (Q2) da figura 4 tem os parâmetros a' e o segundo quadripolo (Q1) tem os parâmetros a'' . Além disso, os parâmetros a representam as variáveis dos quadripolos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} V_1 &= a_{11}V_2 - a_{12}I_2 \\ I_1 &= a_{21}V_2 - a_{22}I_2 \end{aligned} \quad (2)$$

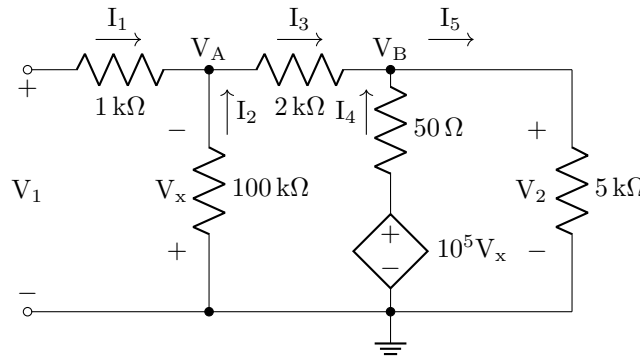
3.1.2 Parâmetros do Quadripolo Q2

Com o segundo quadripolo sorteado (Q2), calcular-se-á os seus parâmetros a' para realizar a sua associação com o primeiro quadripolo (Q1):



Parâmetros a'_{11} e a'_{21}

Através da equação 2, para calcular os parâmetros a'_{11} e a'_{21} , basta zerar a corrente de saída I_2 e determinar os valores de V_1 e I_1 em função da variável restante V_2 . Calcular-se-á essas variáveis através da análise nodal:



Nesse caso, com esses nós e essas correntes, sabe-se que:

$$V_x = -V_A$$

$$V_2 = V_B$$

Equações observáveis de cara no circuito. Além disso, para modelar as correntes em função de V_A e V_B :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_1 - V_A}{1\text{k}\Omega} \\ I_2 &= \frac{V_x}{100\text{k}\Omega} = -\frac{V_A}{100\text{k}\Omega} \end{aligned}$$

$$I_3 = \frac{V_A - V_B}{2k\Omega}$$

$$I_4 = \frac{10^5 \cdot V_x - V_B}{50\Omega} = -\frac{10^5 \cdot V_A + V_B}{50\Omega}$$

$$I_5 = \frac{V_B}{5k\Omega}$$

Com essas correntes, pode-se utilizar a Lei dos Nós para cada nó:

- Nó com V_A :

$$I_1 + I_2 = I_3$$

$$\Rightarrow \frac{V_1 - V_A}{1k\Omega} - \frac{V_A}{100k\Omega} = \frac{V_A - V_B}{2k\Omega}$$

$$\Rightarrow \frac{100V_1 - 100V_A - V_A}{100k\Omega} = \frac{50V_A - 50V_B}{100k\Omega}$$

$$\Rightarrow 100V_1 - 101V_A = 50V_A - 50V_B$$

$$\Rightarrow 151V_A - 50V_B = 100V_1 \quad (I)$$

- Nó com V_B :

$$I_3 + I_4 = I_5$$

$$\Rightarrow \frac{V_A - V_B}{2k\Omega} - \frac{10^5 \cdot V_A + V_B}{50\Omega} = \frac{V_B}{5k\Omega}$$

$$\Rightarrow \frac{5V_A - 5V_B}{10k\Omega} - \frac{2 \cdot 10^7 \cdot V_A + 200V_B}{10k\Omega} = \frac{2V_B}{10k\Omega}$$

$$\Rightarrow 5V_A - 5V_B - 2 \cdot 10^7 \cdot V_A - 200V_B = 2V_B$$

$$\Rightarrow V_A = -\frac{207}{19999995}V_B \quad (II)$$

Substituindo a equação II na equação I:

$$151 \cdot \left(-\frac{207}{19999995}V_B \right) - 50V_B = 100V_1$$

$$\Rightarrow -\frac{31257}{19999995}V_B - 50V_B = 100V_1$$

$$\Rightarrow -\frac{31257}{19999995}V_B - \frac{999999750}{19999995}V_B = \frac{1999999500}{19999995}V_1$$

$$\Rightarrow -1000031007V_B = 1999999500V_1$$

$$\Rightarrow V_B = -\frac{1999999500}{1000031007}V_1 \quad (III)$$

Utilizando o valor obtido na equação III em II:

$$V_A = -\frac{207}{19999995} \cdot \left(-\frac{1999999500}{1000031007}V_1 \right)$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{20700}{1000031007}V_1 \quad (IV)$$

Com essas equações acima, pode-se obter as variáveis de saída (e consequentemente os parâmetros) da seguinte forma:

$$V_B = V_2$$

$$\Rightarrow -\frac{1999999500}{1000031007}V_1 = V_2$$

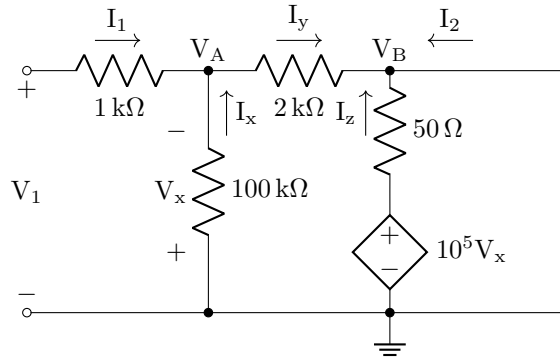
$$\Rightarrow V_1 = -\frac{1000031007}{1999999500}V_2$$

$$\Rightarrow a'_{11} = -\frac{1000031007}{1999999500} \approx -0,5$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{V_1 - V_A}{1\text{k}\Omega} \\
\Rightarrow I_1 &= \frac{V_1 - \frac{20700}{1000031007}V_1}{1\text{k}\Omega} \\
\Rightarrow I_1 &= \frac{1000031007V_1 - 20700V_1}{1000031007000\Omega} \\
\Rightarrow I_1 &= \frac{1000010307V_1}{1000031007000\Omega} \\
\Rightarrow I_1 &= \frac{1000010307}{1000031007000\Omega} \left(-\frac{1000031007}{1999999500}V_2 \right) \\
\Rightarrow I_1 &= -\frac{1,000041314 \cdot 10^{18}}{2,000061514 \cdot 10^{21}\Omega}V_2 \\
\Rightarrow I_1 &= -\frac{1000041314}{2000061514000\Omega}V_2 \\
\Rightarrow a'_{21} &= -\frac{1000041314}{2000061514000}\text{S} \approx -0,0005\text{S} = -0,5\text{mS}
\end{aligned}$$

Parâmetros a'_{12} e a'_{22}

Agora, zerando a tensão V_2 , calcular-se-á os parâmetros a'_{12} e a'_{22} a partir de mais uma análise nodal. Isto é, encontrando V_1 e I_1 em função de I_2 :



Com essa configuração, observa-se que:

$$V_B = V_2 = 0\text{V}$$

Por conta disso, a tensão sobre o resistor de 50Ω deve ter tensão de mesma magnitude e sentido contrário ao da fonte dependente abaixo dele. Com isso:

$$I_z = \frac{10^5 \cdot V_x}{50\Omega}$$

E o resto pode-se analisar normalmente:

$$\begin{aligned}
I_y &= \frac{V_A}{2\text{k}\Omega} \\
I_x &= \frac{V_x}{100\text{k}\Omega} = -\frac{V_A}{100\text{k}\Omega} \\
I_1 &= \frac{V_1 - V_A}{1\text{k}\Omega}
\end{aligned}$$

- Nó com V_A :

$$\begin{aligned}
I_1 + I_x &= I_y \\
\Rightarrow \frac{V_1 - V_A}{1\text{k}\Omega} - \frac{V_A}{100\text{k}\Omega} &= \frac{V_A}{2\text{k}\Omega} \\
\Rightarrow \frac{100V_1 - 100V_A - V_A}{100\text{k}\Omega} &= \frac{50V_A}{100\text{k}\Omega}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 100V_1 - 101V_A = 50V_A \\
&\Rightarrow 151V_A = 100V_1 \\
&\Rightarrow V_1 = \frac{151}{100}V_A
\end{aligned} \tag{I}$$

• Nó com V_B :

$$\begin{aligned}
&I_y + I_z + I_2 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{V_A}{2k\Omega} + \frac{10^5 \cdot V_x}{50\Omega} + I_2 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{V_A}{2k\Omega} - \frac{10^5 \cdot V_A}{50\Omega} + I_2 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{V_A}{2k\Omega} - \frac{4 \cdot 10^6 \cdot V_A}{2k\Omega} + \frac{2k\Omega \cdot I_2}{2k\Omega} = 0 \\
&\Rightarrow 3999999V_A = 2000\Omega \cdot I_2 \\
&\Rightarrow V_A = \frac{2000}{3999999}\Omega \cdot I_2
\end{aligned} \tag{II}$$

Utilizando a equação II em I:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{151}{100} \cdot \left(\frac{2000}{3999999}\Omega \cdot I_2 \right) \\
&\Rightarrow V_1 = \frac{3020}{3999999}\Omega \cdot I_2
\end{aligned}$$

Cuidando com o sinal inerente da equação 2:

$$a'_{12} = -\frac{3020}{3999999}\Omega$$

Para finalizar:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{V_1 - V_A}{1k\Omega} \\
&\Rightarrow I_1 = \frac{\frac{151}{100}V_A - V_A}{1k\Omega} \\
&\Rightarrow I_1 = \frac{151V_A - 100V_A}{100k\Omega} \\
&\Rightarrow I_1 = \frac{51V_A}{100k\Omega} \\
&\Rightarrow I_1 = \frac{51 \left(\frac{2000}{3999999}\Omega \cdot I_2 \right)}{100k\Omega} \\
&\Rightarrow I_1 = \frac{102}{399999900}I_2
\end{aligned}$$

Relembrando do sinal da equação 2:

$$a'_{22} = -\frac{102}{399999900}$$

Unindo os parâmetros a' do quadripolo Q2

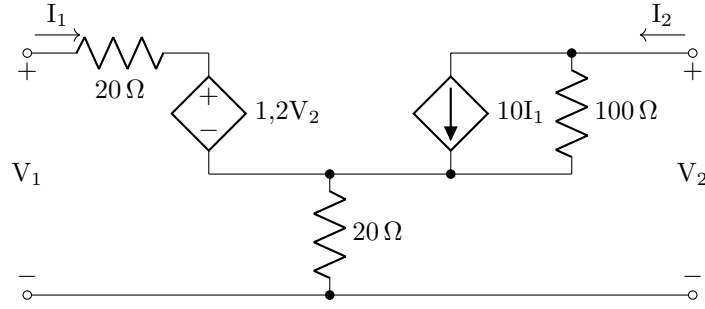
Concluindo, abaixo estão os parâmetros calculados para esse quadripolo:

$$\begin{aligned}
a'_{11} &= -\frac{1000031007}{1999999500} & a'_{12} &= -\frac{3020}{3999999}\Omega \\
a'_{21} &= -\frac{1000041314}{2000061514000}S & a'_{22} &= -\frac{102}{399999900}
\end{aligned} \tag{3}$$

*

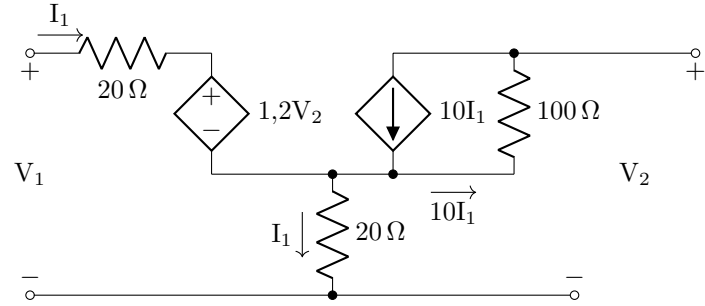
3.1.3 Parâmetros do Quadripolo Q1

Após calcular os parâmetros a' do quadripolo Q2 mostrados na equação 3, calcular-se-á os parâmetros a'' do quadripolo Q1:



Parâmetros a''_{11} e a''_{21}

Através da equação 2, zera-se-á o valor de I_2 para calcular os dois primeiros parâmetros a'' , colocando V_1 e I_1 em função da variável de entrada V_2 :



Pelo desenho acima, é perceptível que, pela malha direita:

$$-V_2 - 10 \cdot I_1 \cdot 100\Omega + I_1 \cdot 20\Omega = 0$$

$$\Rightarrow -1000\Omega \cdot I_1 + 20\Omega \cdot I_1 = V_2$$

$$\Rightarrow -980\Omega \cdot I_1 = V_2$$

$$\Rightarrow I_1 = -\frac{1}{980}\text{S} \cdot V_2$$

$$\Rightarrow a''_{21} = -\frac{1}{980}\text{S} \approx -0,001\text{S} = -1\text{mS}$$

Fazendo a malha do lado esquerdo:

$$-V_1 + I_1 \cdot 20\Omega + 1,2 \cdot V_2 + I_1 \cdot 20\Omega = 0$$

$$\Rightarrow V_1 = 40\Omega \cdot I_1 + 1,2 \cdot V_2$$

$$\Rightarrow V_1 = 40\Omega \cdot \left(-\frac{1}{980\Omega} V_2\right) + 1,2 \cdot V_2$$

$$\Rightarrow V_1 = -\frac{2}{49} V_2 + 1,2 \cdot V_2$$

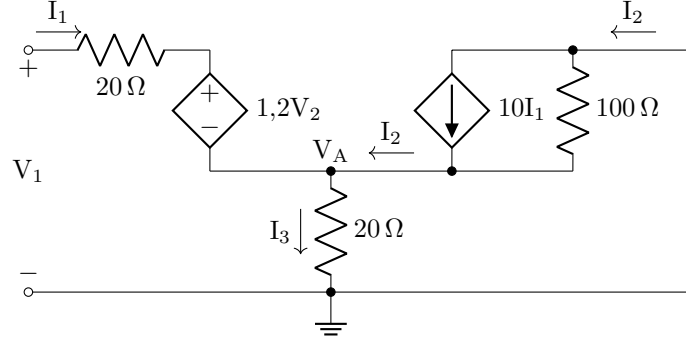
$$\Rightarrow V_1 = -\frac{10}{245} V_2 + \frac{294}{245} V_2$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{284}{245} V_2$$

$$\Rightarrow a''_{11} = \frac{284}{245} \approx 1,159$$

Parâmetros a''_{12} e a''_{22}

Através da equação 2, zerar-se-á o valor de V_2 para calcular os dois últimos parâmetros a'' , colocando V_1 e I_1 em função da variável de entrada I_2 :



Pela figura acima, é perceptível que o resistor de 20Ω abaixo está em paralelo com o lado direito do circuito. Por conta disso descobrir-se-á a tensão sobre ele através de análise nodal. No lado direito do nó com potencial V_A , observa-se, decorrente do fato dos componentes em paralelo, que a corrente I_2 flui por ali no sentido da figura:

$$I_1 = \frac{V_1 - 1,2 \cdot V_2 - V_A}{20\Omega} = \frac{V_1 - V_A}{20\Omega}$$

$$I_3 = \frac{V_A}{20\Omega}$$

Agora, equacionando o nó V_A :

$$I_1 + I_2 = I_3$$

$$\Rightarrow \frac{V_1 - V_A}{20\Omega} + I_2 = \frac{V_A}{20\Omega}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1 - V_A}{20\Omega} + \frac{20\Omega}{20\Omega} I_2 = \frac{V_A}{20\Omega}$$

$$\Rightarrow V_1 = 2V_A - 20\Omega \cdot I_2 \quad (\text{I})$$

Então, analisando o paralelo na direita, onde determinou-se que há uma tensão comum de V_A , encontrar-se-á uma relação entre V_A e I_2 :

$$I_2 = 10 \cdot I_1 - \frac{V_A}{100\Omega}$$

$$I_1 = I_3 - I_2$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{V_A}{20\Omega} - I_2$$

$$\Rightarrow I_2 = 10 \cdot \left(\frac{V_A}{20\Omega} - I_2 \right) - \frac{V_A}{100\Omega}$$

$$\Rightarrow \frac{100\Omega}{100\Omega} I_2 = \frac{50}{100\Omega} V_A - \frac{1000\Omega}{100\Omega} I_2 - \frac{1}{100\Omega} V_A$$

$$\Rightarrow 1100\Omega \cdot I_2 = 49V_A$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{1100}{49} \Omega \cdot I_2 \quad (\text{II})$$

Utilizando a equação II na equação I:

$$V_1 = 2 \cdot \left(\frac{1100}{49} \Omega \cdot I_2 \right) - 20\Omega \cdot I_2$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{2200}{49} \Omega \cdot I_2 - \frac{980}{49} \Omega \cdot I_2$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1220}{49} \Omega \cdot I_2$$

Cuidando o sinal da equação 2:

$$a''_{12} = -\frac{1220}{49}\Omega \approx -24,898\Omega$$

Com a equação II, pode-se calcular I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_A}{20\Omega} - I_2 \\ \Rightarrow I_1 &= \frac{\frac{1100}{49}\Omega \cdot I_2}{20\Omega} - I_2 \\ \Rightarrow I_1 &= \frac{1100}{980}I_2 - I_2 \\ \Rightarrow I_1 &= \frac{1100}{980}I_2 - \frac{980}{980}I_2 \\ \Rightarrow I_1 &= \frac{120}{980}I_2 \\ \Rightarrow I_1 &= \frac{6}{49}I_2 \end{aligned}$$

Novamente cuidando do sinal na equação 2:

$$\Rightarrow a''_{22} = -\frac{6}{49} \approx -0,122$$

Unindo os parâmetros a'' do quadripolo Q1

Concluindo, abaixo estão os parâmetros calculados para esse quadripolo:

$$\begin{aligned} a''_{11} &= \frac{284}{245} & a''_{12} &= -\frac{1220}{49}\Omega \\ a''_{21} &= -\frac{1}{980}S & a''_{22} &= -\frac{6}{49} \end{aligned} \tag{4}$$

*

3.1.4 União dos Quadripolos

Juntando os parâmetros a' da equação 3 e os parâmetros a'' da equação 4 na equação 1 de associação em cascata:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21} & a_{12} &= a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22} \\ a_{21} &= a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21} & a_{22} &= a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22} \end{aligned} \tag{5}$$

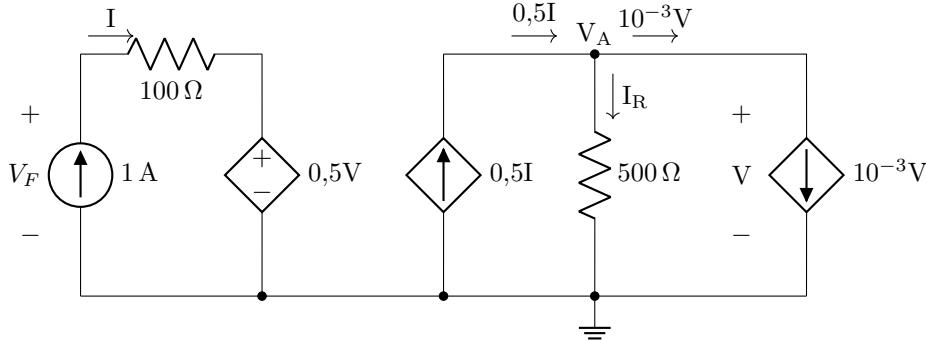
$$\begin{aligned} a_{11} &= a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21} \\ \Rightarrow a_{11} &= \left(-\frac{1000031007}{1999999500}\right) \cdot \left(\frac{284}{245}\right) + \left(-\frac{3020}{3999999}\Omega\right) \cdot \left(-\frac{1}{980}S\right) \\ &= -\frac{284008805988}{489999877500} + \frac{3020}{3919999020} \\ \Rightarrow a_{11} &= -\frac{1113314241144330131760}{1920799039600120050000} + \frac{1479799630050000}{1920799039600120050000} \\ \Rightarrow a_{11} &= -\frac{1113312761344700081760}{1920799039600120050000} \approx -0,579 \\ a_{12} &= a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22} \\ \Rightarrow a_{12} &= \left(-\frac{1000031007}{1999999500}\right) \cdot \left(-\frac{1220}{49}\Omega\right) + \left(-\frac{3020}{3999999}\Omega\right) \cdot \left(-\frac{6}{49}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow a_{12} = \frac{1220037828540}{97999975500}\Omega + \frac{18120}{195999951}\Omega \\
&\Rightarrow a_{12} = \frac{239127354611986401540}{19207990396001200500}\Omega + \frac{1775759556060000}{19207990396001200500}\Omega \\
&\Rightarrow a_{12} = \frac{239129130371542461540}{19207990396001200500}\Omega \approx 12,449\Omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_{21} = a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21} \\
&\Rightarrow a_{21} = \left(-\frac{1000041314}{2000061514000}\text{S}\right) \cdot \left(\frac{284}{245}\right) + \left(-\frac{102}{3999999900}\right) \cdot \left(-\frac{1}{980}\text{S}\right) \\
&\Rightarrow a_{21} = -\frac{284011733176}{490015070930000}\text{S} + \frac{102}{391999902000}\text{S} \\
&\Rightarrow a_{21} = -\frac{111332571571842148752000}{1920858597830830488600000000}\text{S} + \frac{49981537234860000}{1920858597830830488600000000}\text{S} \\
&\Rightarrow a_{21} = -\frac{111332521590304913892000}{1920858597830830488600000000}\text{S} \approx -0,579\text{mS}
\end{aligned}$$

4.1 Circuito Equivalente de Norton da Saída

Partindo do circuito de saída sorteado (figura 5), sabe-se de cara que, por não haver nenhuma fonte de tensão ou de corrente independente, a corrente de Norton é $I_N = 0\text{A}$. Para determinar-se o valor de R_N , pode-se colocar uma fonte independente na saída e medir a outra grandeza sobre essa, visto que $R_N = \frac{V_F}{I_F}$. Para esse circuito em específico, colocar-se-á uma fonte de corrente de $I_F = 1\text{A}$ para cima e medir-se-á a tensão V_F sobre ela:



Nesse caso, com essa fonte de corrente, forçou-se $I = 1\text{A}$. Por conta disso, do outro lado do circuito, obteve-se que a primeira fonte de corrente controlada fornece ou consome $0,5 \cdot I = 0,5\text{A}$.

A partir dessa informação, no nó V_A , obtém-se que a corrente I_R sobre o resistor de 500Ω se dá por:

$$\begin{aligned} 0,5 \cdot I &= I_R + 10^{-3} \cdot V \\ \Rightarrow I_R &= 0,5 \cdot I - 10^{-3} \cdot V \\ \Rightarrow I_R &= 0,5\text{A} - 10^{-3} \cdot V \end{aligned}$$

Com essa informação, como, em resistores, $V = R \cdot I$:

$$\begin{aligned} V &= I_R \cdot 500\Omega \\ \Rightarrow V &= (0,5\text{A} - 10^{-3} \cdot V) \cdot 500\Omega \\ \Rightarrow V &= 250\text{V} - 0,5 \cdot V \\ \Rightarrow 1,5 \cdot V &= 250\text{V} \\ \Rightarrow V &= \frac{500}{3}\text{V} \end{aligned}$$

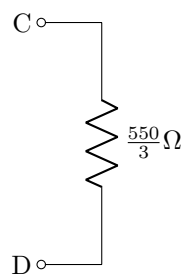
Com essa informação, basta retornar para o outro lado do circuito e determinar a tensão V_F através de Lei das Malhas:

$$\begin{aligned} -V_F + I \cdot 100\Omega + 0,5 \cdot V &= 0 \\ \Rightarrow V_F &= I \cdot 100\Omega + 0,5 \cdot V \\ \Rightarrow V_F &= 1\text{A} \cdot 100\Omega + 0,5 \cdot \frac{500}{3}\text{V} \\ \Rightarrow V_F &= 100\text{V} + \frac{250}{3}\text{V} \\ \Rightarrow V_F &= \frac{550}{3}\text{V} \end{aligned}$$

Logo, a partir dessa tensão, pode-se determinar por fim o valor de R_N :

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{V_F}{I_F} \\ \Rightarrow R_N &= \frac{\frac{550}{3}\text{V}}{1\text{A}} \\ \Rightarrow R_N &= \frac{550}{3}\Omega = 183,3\bar{3}\Omega \end{aligned}$$

Ou seja, o circuito equivalente Norton da saída é o seguinte:



*

5.1 Ganho de Tensão da Saída V_2/V_1