

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia



ENG04010  
Teoria Eletromagnética e Ondas

---

## Trabalho Complementar

### Resolução de Problemas de Valor de Contorno

---

Pedro Lubaszewski Lima (00341810)

Turma U

23 de dezembro de 2024

# Sumário

1.1	Enunciado do Problema . . . . .	2
2.1	Resolução Analítica do Problema . . . . .	3
2.1.1	Determinando o Comportamento das Soluções . . . . .	4
2.1.2	Cálculo dos Coeficientes das Soluções . . . . .	5
3.1	Resolução Numérica do Problema . . . . .	7
3.1.1	Comportamento Numérico da Solução . . . . .	7
3.1.2	Simulação em <i>Software</i> . . . . .	7
4.1	Exemplos . . . . .	8

## 1.1 Enunciado do Problema

Com o intuito de exercitar os conhecimentos ensinados sobre Problemas de Valores de Contorno (PVC) em Eletrostática, foi proposto o seguinte exercício a ser resolvido:

Considere um cubo oco de dimensões laterais  $a$ , composto de faces condutoras ideais, conforme a figura abaixo. Suponha que exista uma pequena separação entre cada face. As faces laterais, em tom mais claro, são mantidas em um potencial nulo. A face superior ( $0 < x < a$ ,  $0 < y < a$ ,  $z = a$ ) é mantida em potencial contante e uniforme  $V_0$ .

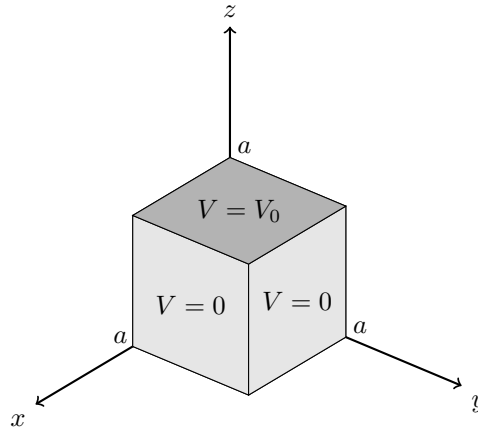


Figura 1: Cubo Condutor de Dimensões Laterais  $a$ .

Com isso em mente, faça o que se pede:

1. Determine uma equação para o potencial no interior do cubo de forma analítica, utilizando o Método da Separação de Variáveis (discutido na Seção 2.1).
2. Esboce o potencial, na forma de um “mapa de calor”, para a região central do cubo (fixando  $x = \frac{a}{2}$  ou  $y = \frac{a}{2}$  e variando as outras duas variáveis), utilizando resultados obtidos numericamente (discutido na Seção 3.1).

## 2.1 Resolução Analítica do Problema

Partindo de primeiros princípios, utilizando dos postulados da Eletrostática:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

Com a segunda expressão, deduz-se que o campo elétrico é conservativo, ou seja,

$$\Rightarrow \exists V \mid \vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

Logo, unindo essa equação e a primeira equação dessa seção:

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}V) = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \text{ (Equação de Poisson)}$$

Para o caso do problema onde não há cargas onde procura-se determinar o potencial elétrico:

$$\Rightarrow \nabla^2 V = 0 \text{ (Equação de Laplace)}$$

Com isso, para modelar o comportamento de  $V(x, y, z)$  analiticamente, partir-se-á da Equação de Laplace com as Condições de Contorno fornecidas no problema:

$$\begin{cases} \nabla^2 V = 0 \\ x : V(0, y, z) = 0, V(a, y, z) = 0 \\ y : V(x, 0, z) = 0, V(x, a, z) = 0 \\ z : V(x, y, 0) = 0, V(x, y, a) = V_0 \end{cases} \quad (1)$$

A partir dela, tem-se, em coordenadas cartesianas, que:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

E, pelo Método da Separação de Variáveis, assume-se que, para coordenadas cartesianas:

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

Portanto, a partir daí, tem-se que:

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = Y(y)Z(z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = X(x)Z(z) \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = X(x)Y(y) \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = Y(y)Z(z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) + X(x)Z(z) \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y) + X(x)Y(y) \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z) = 0$$

Agora, assumindo que  $X(x) \neq 0$ ,  $Y(y) \neq 0$  e  $Z(z) \neq 0$ , na região de interesse, pode-se dividir a equação acima por  $X(x)Y(y)Z(z)$ :

$$\Rightarrow \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0$$

Porém, a única forma dessa equação resultar em zero para todos os valores de  $X(x)$ ,  $Y(y)$  e  $Z(z)$  se dá quando cada uma das parcelas somadas na equação é uma constante. Em outras palavras:

$$\begin{cases} \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -K_x^2 \\ \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -K_y^2 \\ \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -K_z^2 \end{cases} \Rightarrow K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0 \quad (2)$$

Essa escolha de constantes foi feita para facilitar a dedução do resto do problema, visto que as constantes podem ser complexas.

Multiplicando cada uma das equações de 2 pelas suas respectivas funções dependentes apenas de uma coordenada e somando a constante dos dois lados das equações obtém-se o seguinte sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs):

$$\begin{cases} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x)K_x^2 = 0 \\ \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + Y(y)K_y^2 = 0 \\ \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + Z(z)K_z^2 = 0 \\ K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Dadas essas EDOs, para alguma das variáveis, pode-se obter as seguintes soluções gerais:

$$S(s) = A_0 s + B_0, K_s^2 = 0 \quad (4)$$

$$S(s) = A_1 \sin(ks) + B_1 \cos(ks), K_s^2 > 0, K_s = K \text{ real} \quad (5)$$

$$S(s) = A_2 \sinh(ks) + B_2 \cosh(ks), K_s^2 < 0, K_s = K \text{ imaginário} \quad (6)$$

Todas essas para  $S(s) = X(x), Y(y), Z(z)$ . Para cada variável  $x$ ,  $y$  e  $z$ , a forma da solução geral depende das Condições de Fronteira.

Alguns PVCs em Eletrostática apresentam dependência em apenas algumas variáveis. No entanto, mesmo que este tenha alguma simetria em relação à  $x$  e  $y$  (fixando um certo  $x$  ou  $y$ , e fazendo  $z$  variar em função da variável restante deve resultar no mesmo comportamento de  $V(y, z)$  ou  $V(x, z)$ ), de forma geral, precisar-se-á resolver o problema para todas as variáveis separadamente.

### 2.1.1 Determinando o Comportamento das Soluções

Para descobrir qual é o comportamento de cada variável desse problema, basta analisar as Condições de Fronteira para duas das variáveis dadas em 1 e, pela equação 3, obter e confirmar o comportamento da variável restante. Para a variável  $z$ :

$$z : V(x, y, 0) = 0, V(x, y, a) = V_0$$

Ou seja, observa-se um comportamento de decaimento. Quanto mais afasta-se verticalmente da placa com potencial  $V_0$ , menor será o potencial. No entanto, esse comportamento não pode ser linear, pois esse é o caso quando há apenas duas placas paralelas, uma com potencial não nulo e a outra com potencial nulo. Esse não é o caso para este problema porque, ao decrementar a variável  $z$ , ocorre um certo amortecimento devido ao potencial nulo das placas laterais, gerando comportamento não linear em  $z$ . Isso indica, dentre as soluções gerais para as equações, que a solução nessa variável corresponde a um decaimento exponencial descrito pela equação 6. Ou seja,  $K_z^2 < 0$ . Por conta disso, sabe-se que precisa haver  $K_x^2 > 0$  ou (inclusivo)  $K_y^2 > 0$  para que o resto da equação 3 seja satisfeito. Nesse caso, como é um cubo com todas as distâncias iguais e com todos os potenciais iguais, exceto na tampa, percebe-se que tanto a variável  $x$ , quanto a variável  $y$  devem apresentar o mesmo comportamento. Isso também pode ser observado diretamente nas Condições de Fronteira dessas variáveis:

$$x : V(0, y, z) = 0, V(a, y, z) = 0$$

$$y : V(x, 0, z) = 0, V(x, a, z) = 0$$

Logo, pelas constatações acima, sabe-se que  $K_x^2 > 0$  e que  $K_y^2 > 0$ . Portanto, obtém-se as seguintes equações gerais para as variáveis do problema:

$$X(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), K_x^2 > 0, K_x = K \text{ real} \quad (7)$$

$$Y(y) = C \sin(ky) + D \cos(ky), K_y^2 > 0, K_y = K \text{ real} \quad (8)$$

$$Z(z) = E e^{kz} + F e^{-kz}, K_z^2 < 0, K_z = K \text{ imaginário} \quad (9)$$

Será confirmado se essas constatações estão efetivamente corretas através da análise numérica na seção 3.1.

Portanto, agrupando 7, 8 e 9, obtém-se a seguinte solução geral para o problema original:

$$V(x, y, z) = [A \sin(kx) + B \cos(kx)][C \sin(ky) + D \cos(ky)][E e^{kz} + F e^{-kz}] \quad (10)$$

### 2.1.2 Cálculo dos Coeficientes das Soluções

Com as Condições de Fronteira, serão primeiramente calculados os coeficientes mais diretos. Ou seja, com as condições que envolvem zerar as soluções gerais:

- Usando  $V(0, y, z) = 0$  na equação 10:

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(0, y, z) &= [A \cdot 0 + B \cdot 1][C \sin(ky) + D \cos(ky)][E e^{kz} + F e^{-kz}] = 0 \\ &\Rightarrow B[C \sin(ky) + D \cos(ky)][E e^{kz} + F e^{-kz}] = 0 \end{aligned}$$

Para uma multiplicação ser nula, precisa-se algum dos termos multiplicados seja nulo. Como sabe-se que exponenciais nunca são nulas, para essa parcela ser nula, precisar-se-ia que tanto  $E = 0$ , quanto  $F = 0$ . No entanto, isso resulta na solução trivial para a variável  $z$ , algo já constatado como falso. Logo, alguma das outras parcelas ou ambas deve ser nula:

$$\Rightarrow B[C \sin(ky) + D \cos(ky)] = 0$$

O mesmo raciocínio se aplica para as constantes  $C$  e  $D$ , visto que as funções seno e cosseno nunca são zero ao mesmo tempo, exigindo que, para essa parcela ser nula, precisa-se da solução trivial para  $y$ , algo analisado anteriormente como não verdadeiro. Portanto, só resta a conclusão que:

$$\Rightarrow B = 0$$

- Usando  $V(x, 0, z) = 0$  na equação 10 sabendo que  $B = 0$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(x, 0, z) &= A \sin(kx)[C \cdot 0 + D \cdot 1][E e^{kz} + F e^{-kz}] = 0 \\ &\Rightarrow D \cdot A \sin(kx)[E e^{kz} + F e^{-kz}] = 0 \end{aligned}$$

Como já argumentado acima,  $E \neq 0$  e  $F \neq 0$ :

$$\Rightarrow D \cdot A \sin(kx) = 0$$

Pela mesma lógica da condição anterior, para não haver solução trivial na variável  $x$ , precisa-se que  $A \neq 0$ :

$$\Rightarrow D = 0$$

- Usando  $V(x, y, 0) = 0$  na equação 10 sabendo que  $B = 0$  e  $D = 0$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(x, y, 0) &= A \sin(kx)D \sin(ky)[E \cdot 1 + F \cdot 1] = 0 \\ &\Rightarrow A \sin(kx)D \sin(ky)[E + F] = 0 \end{aligned}$$

Como já discutido anteriormente, para não haver solução trivial nas variáveis  $x$  e  $y$ , precisa-se que  $A \neq 0$  e  $C \neq 0$ :

$$\Rightarrow E + F = 0$$

$$\Rightarrow E = -F$$

Assim, para facilitar, chamar-se-á  $K' := E = -F$  e ainda  $C' := A \cdot C$ . Desta forma, separando as exponenciais da equação e renomeando as variáveis  $A' = C' \cdot K'$ :

$$V(x, y, z) = A'(e^{kz} \sin(kx) \sin(ky) - e^{-kz} \sin(kx) \sin(ky)) \quad (11)$$

- Usando  $V(a, y, z) = 0$  na equação 11:

$$\begin{aligned}\Rightarrow V(a, y, z) &= A'(e^{kz} \sin(ka) \sin(ky) - e^{-kz} \sin(ka) \sin(ky)) = 0 \\ \Rightarrow V(a, y, z) &= A'(e^{kz} - e^{-kz}) \sin(ka) \sin(ky) = 0\end{aligned}$$

Como a constante  $A'$  não pode ser nula e as funções seno e exponencial são não nulas para diversos valores de  $y$  e  $z$ , resta que:

$$\Rightarrow \sin(ka) = 0$$

A função seno é periódica e apresenta valor zero quando o seu argumento vale  $n\pi$ , onde  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned}\Rightarrow ka &= n\pi \\ k &= \frac{n\pi}{a}, n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Esse fato é reforçado pela aplicação de outra Condição de Fronteira:

- Usando  $V(x, a, z) = 0$  na equação 11:

$$\begin{aligned}\Rightarrow V(x, a, z) &= A'(e^{kz} \sin(kx) \sin(ka) - e^{-kz} \sin(kx) \sin(ka)) = 0 \\ \Rightarrow V(x, a, z) &= A'(e^{kz} - e^{-kz}) \sin(kx) \sin(ka) = 0\end{aligned}$$

Pelos argumentos anteriores, resta que:

$$\Rightarrow \sin(ka) = 0$$

Ou seja, obteve-se um resultado para  $k$  que satisfaz todas as Condições de Fronteira:

$$k = \frac{n\pi}{a}, n \in \mathbb{Z} \quad (12)$$

Por fim, será utilizada a condição de fronteira  $V(x, y, a) = V_0$  em 11. No entanto, essa condição não é trivial de ser aplicada, visto que gera-se a seguinte sequência de afirmações:

$$\begin{aligned}\Rightarrow V(x, y, z) &= A'(e^{ka} \sin(kx) \sin(ky) - e^{-ka} \sin(kx) \sin(ky)) = V_0 \\ \Rightarrow A'(e^{ka} - e^{-ka}) \sin(kx) \sin(ky) &= V_0\end{aligned}$$

Coletando as constantes e definindo  $C_k := A'(e^{ka} - e^{-ka})$ , obtém-se que

$$\Rightarrow C_k \sin(kx) \sin(ky) = V_0$$

A multiplicação de duas funções periódicas dessa forma nunca será constante. Portanto, será preciso extrapolar o problema e considerar que a função potencial é uma função periódica ímpar tanto em  $x$ , quanto em  $y$ , formando uma espécie tabuleiro de xadrez com largura de posição  $a$  no espaço:

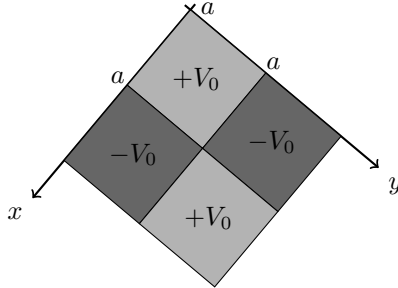


Figura 2: Extrapolação do Potencial além de  $x = y = z = a$ .

Com essa suposição, já que o potencial fora do cubo não é importante para o problema, pode-se aplicar a teoria das Séries de Fourier para achar uma solução que satisfaça às condições acima.

### 3.1 Resolução Numérica do Problema

#### 3.1.1 Comportamento Numérico da Solução

#### 3.1.2 Simulação em *Software*



## 4.1 Exemplos

- $N_1 = 3$ ;
- $N_2 = 4$ ;
- $N_3 = 1$ ;
- $N_4 = 8$ ;
- $N_5 = 1$ ;
- $N_6 = 0$ .

\*

$$\begin{aligned} a_{11} &= a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21} & a_{12} &= a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22} \\ a_{21} &= a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21} & a_{22} &= a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22} \end{aligned} \tag{13}$$