Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia

ENG04010
Teoria Eletromagnética e Ondas

Trabalho Complementar
Resolução de Problemas de Valor de Contorno

Pedro Lubaszewski Lima (00341810)

Turma U

23 de dezembro de 2024

Sumário

1.1 Enunciado do Problema

Com o intuito de exercitar os conhecimentos ensinados sobre Problemas de Valores de Contorno (PVC) em Eletrostática, foi proposto o seguinte exercício a ser resolvido:

Considere um cubo oco de dimensões laterais a, composto de faces condutoras ideais, conforme a figura abaixo. Suponha que exista uma pequena separação entre cada face. As faces laterais, em tom mais claro, são mantidas em um potêncial nulo. A face superior ($0 < x < a$, $0 < y < a$, $z = a$) é mantida em potencial contante e uniforme V_0.

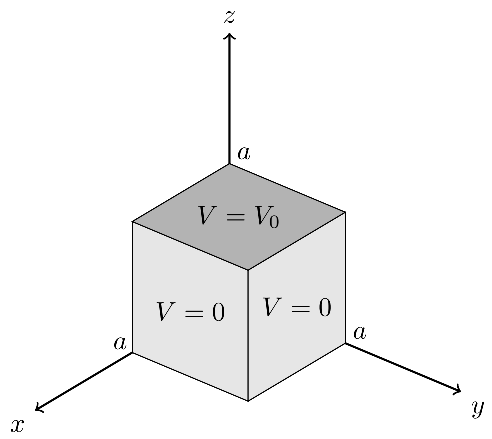

Figura 1: Cubo Condutor de Dimensões Laterais a.

Com isso em mente, faça o que se pede:

1. Determine uma equação para o potencial no interior do cubo de forma analítica, utilizando o Método da Separação de Variáveis (discutido na Seção 2.1).
2. Esboce o potencial, na forma de um "mapa de calor", para a região central do cubo (fixando $x = \frac{a}{2}$ ou $y = \frac{a}{2}$ e variando as outras duas variáveis), utilizando resultados obtidos numericamente (discutido na Seção 3.1).

2.1 Resolução Analítica do Problema

Partindo de primeiros princípios, utilizando dos postulados da Eletrostática:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

Com a segunda expressão, deduz-se que o campo elétrico é conservativo, ou seja,

$$\Rightarrow \exists V \mid \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Logo, unindo essa equação e a primeira equação dessa seção:

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \text{ (Equação de Poisson)}$$

Para o caso do problema onde não há cargas onde procura-se determinar o potencial elétrico:

$$\Rightarrow \nabla^2 V = 0 \text{ (Equação de Laplace)}$$

Com isso, para modelar o comportamento de $V(x, y, z)$ analiticamente, partir-se-á da Equação de Laplace com as Condições de Contorno fornecidas no problema:

$$\begin{cases} \nabla^2 V = 0 \\ x : V(0, y, z) = 0,\ V(a, y, z) = 0 \\ y : V(x, 0, z) = 0,\ V(x, a, z) = 0 \\ z : V(x, y, 0) = 0,\ V(x, y, a) = V_0 \end{cases} \tag{1}$$

A partir dela, tem-se, em coordenadas cartesianas, que:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

E, pelo Método da Separação de Variáveis, assume-se que, para coordenadas cartesianas:

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

Portanto, a partir daí, tem-se que:

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = Y(y)Z(z)\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = X(x)Z(z)\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = X(x)Y(y)\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z(z)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = Y(y)Z(z)\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x) + X(x)Z(z)\frac{\partial^2}{\partial y^2}Y(y) + X(x)Y(y)\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z(z) = 0$$

Agora, assumindo que $X(x) \neq 0$, $Y(y) \neq 0$ e $Z(z) \neq 0$, na região de interesse, pode-se dividir a equação acima por $X(x)Y(y)Z(z)$:

$$\Rightarrow \frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0$$

Porém, a única forma dessa equação resultar em zero para todos os valores de $X(x)$, $Y(y)$ e $Z(z)$ se dá quando cada uma das parcelas somadas na equação é uma constante. Em outras palavras:

$$\begin{cases} \frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -K_x^2 \\ \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -K_y^2 \\ \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -K_z^2 \end{cases} \Rightarrow K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0 \tag{2}$$

Essa escolha de constantes foi feita para facilitar a dedução do resto do problema, visto que as constantes podem ser complexas.

Multiplicando cada uma das equações de 2 pelas suas respectivas funções dependentes apenas de uma coordenada e somando a constante dos dois lados das equações obtém-se o seguinte sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs):

$$\begin{cases} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x)K_x^2 = 0 \\ \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + Y(y)K_y^2 = 0 \\ \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + Z(z)K_z^2 = 0 \\ K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Dadas essas EDOs, para alguma das variáveis, pode-se obter as seguintes soluções gerais:

$$S(s) = A_0 s + B_0,\ K_s^2 = 0 \tag{4}$$

$$S(s) = A_1 \sin(K_s s) + B_1 \cos(K_s s),\ K_s^2 > 0,\ K_s \in \mathbb{R} \tag{5}$$

$$S(s) = A_2 \sinh(K_s s) + B_2 \cosh(K_s s),\ K_s^2 < 0,\ K_s \in \mathbb{I} \tag{6}$$

Todas essas para $S(s) = X(x), Y(y), Z(z)$. Para cada variável x, y e z, a forma da solução geral depende das Condições de Fronteira.

Alguns PVCs em Eletrostática apresentam dependência em apenas algumas variáveis. No entanto, mesmo que este tenha alguma simetria em relação à x e y (fixando um certo x ou y, e fazendo z variar em função da variável restante deve resultar no mesmo comportamento de $V(y,z)$ ou $V(x,z)$), de forma geral, precisar-se-á resolver o problema para todas as variáveis separadamente.

2.1.1 Determinando o Comportamento das Soluções

Para descobrir qual é o comportamento de cada variável desse problema, basta analisar as Condições de Fronteira para duas das variáveis dadas em 1 e, pela equação 3, obter e confirmar o comportamento da variável restante. Para a variável z:

$$z : V(x,y,0) = 0,\ V(x,y,a) = V_0$$

Ou seja, observa-se um comportamento de decaímento. Quanto mais afasta-se verticalmente da placa com potencial V_0, menor será o potencial. No entanto, esse comportamento não pode ser linear, pois esse é o caso quando há apenas duas placas paralelas, uma com potencial não nulo e a outra com potencial nulo. Esse não é o caso para este problema porque, ao decrementar a variável z, ocorre um certo amortercimento devido ao potencial nulo das placas laterais, gerando comportamento não linear em z. Isso indica, dentre as soluções gerais para as equações, que a solução nessa variável corresponde a um decaímento exponencial descrito pela equação 6. Ou seja, $K_z^2 < 0$. Por conta disso, sabe-se que precisa haver $K_x^2 > 0$ ou (inclusivo) $K_y^2 > 0$ para que o resto da equação 3 seja satisfeito. Nesse caso, como é um cubo com todas as distâncias iguais e com todos os potenciais iguais, exceto na tampa, percebe-se que tanto a variável x, quanto a variável y devem apresentar o mesmo comportamento. Isso também pode ser observado diretamente nas Condições de Fronteira dessas variáveis:

$$x : V(0,y,z) = 0,\ V(a,y,z) = 0$$

$$y : V(x,0,z) = 0,\ V(x,a,z) = 0$$

Logo, pelas constatações acima, sabe-se que $K_x^2 > 0$ e que $K_y^2 > 0$. Portanto, obtém-se as seguintes equações gerais para as variáveis do problema:

$$X(x) = A\sin(K_x x) + B\cos(K_x x),\ K_x^2 > 0,\ K_x \in \mathbb{R} \tag{7}$$
$$Y(y) = C\sin(K_y y) + D\cos(K_y y),\ K_y^2 > 0,\ K_y \in \mathbb{R} \tag{8}$$
$$Z(z) = E\sinh(K_z z) + F\cosh(K_z z),\ K_z^2 < 0,\ K_z \in \mathbb{I} \tag{9}$$

Será confirmado se essas constatações estão efetivamente corretas através da análise numérica na seção 3.1.

Portanto, agrupando 7, 8 e 9, obtém-se a seguinte solução geral para o problema original:

$$V(x,y,z) = [A\sin(K_x x)+B\cos(K_x x)][C\sin(K_y y)+D\cos(K_y y)][E\sinh(K_z z)+F\cosh(K_z z)] \tag{10}$$

2.1.2 Cálculo dos Coeficientes das Soluções

Com as Condições de Fronteira, serão primeiramente calculados os coeficientes mais diretos. Ou seja, com as condições que envolvem zerar as soluções gerais:

- Usando $V(0,y,z) = 0$ na equação 10:

$$\Rightarrow V(0,y,z) = [A\cdot 0 + B\cdot 1][C\sin(K_y y) + D\cos(K_y y)][E\sinh(K_z z) + F\cosh(K_z z)] = 0$$
$$\Rightarrow B[C\sin(K_y y) + D\cos(K_y y)][E\sinh(K_z z) + F\cosh(K_z z)] = 0$$

Para uma multiplicação ser nula, precisa-se algum dos termos multiplicados seja nulo. Como sabe-se que exponenciais nunca são nulas, para essa parcela ser nula, precisar-se-ia que tanto $E = 0$, quanto $F = 0$. No entanto, isso resulta na solução trivial para a variável z, algo já constatado como falso. Logo, alguma das outras parcelas ou ambas deve ser nula:

$$\Rightarrow B[C\sin(K_y y) + D\cos(K_y y)] = 0$$

O mesmo raciocínio se aplica para as constantes C e D, visto que as funções seno e cosseno nunca são zero ao mesmo tempo, exigindo que, para essa parcela ser nula, precisa-se da solução trivial para y, algo analisado anteriormente como não verdadeiro. Portanto, só resta a conclusão que:

$$\Rightarrow B = 0$$

- Usando $V(x,0,z) = 0$ na equação 10 sabendo que $B = 0$:

$$\Rightarrow V(x,0,z) = A\sin(K_x x)[C\cdot 0 + D\cdot 1][E\sinh(K_z z) + F\cosh(K_z z)] = 0$$
$$\Rightarrow D\cdot A\sin(K_x x)[E\sinh(K_z z) + F\cosh(K_z z)] = 0$$

Como já argumentado acima, $E \neq 0$ e $F \neq 0$:

$$\Rightarrow D\cdot A\sin(K_x x) = 0$$

Pela mesma lógica da condição anterior, para não haver solução trivial na variável x, precisa-se que $A \neq 0$:

$$\Rightarrow D = 0$$

- Usando $V(x,y,0) = 0$ na equação 10 sabendo que $B = 0$ e $D = 0$:

$$\Rightarrow V(x,y,0) = A\sin(K_x x)C\sin(K_y y)[E\cdot 0 + F\cdot 1] = 0$$
$$\Rightarrow F\cdot A\sin(K_x x)C\sin(K_y y) = 0$$

Como já discutido anteriormente, para não haver solução trivial nas variáveis x e y, precisa-se que $A \neq 0$ e $C \neq 0$:

$$\Rightarrow F = 0$$

Assim, para facilitar, chamar-se-á $A' := A\cdot C\cdot E$, ou seja:

$$V(x,y,z) = A'\sinh(K_z z)\sin(K_x x)\sin(K_y y) \tag{11}$$

- Usando $V(a,y,z) = 0$ na equação 11:

$$\Rightarrow V(a,y,z) = A' \sinh(K_z z)\sin(K_x a)\sin(K_y y) = 0$$

Como a contante A' não pode ser nula e as funções seno e seno hiperbólico são não nulas para diversos valores de y e z, resta que:

$$\Rightarrow \sin(K_x a) = 0$$

A função seno é periódica e apresenta valor zero quando o seu argumento vale $i\pi$, onde $i \in \mathbb{Z}$:

$$\Rightarrow K_x a = i\pi$$

$$K_x = \frac{i\pi}{a},\ i \in \mathbb{Z}$$

- Usando $V(x,a,z) = 0$ na equação 11:

$$\Rightarrow V(x,a,z) = A' \sinh(K_z z)\sin(K_x x)\sin(K_y a) = 0$$

Pelo mesmo raciocínio anterior, tem-se que:

$$\Rightarrow \sin(K_y a) = 0$$

$$\Rightarrow K_y a = j\pi$$

$$K_y = \frac{j\pi}{a},\ j \in \mathbb{Z}$$

Agora, tomando a última equação de 3:

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0$$

$$\Rightarrow -K_z^2 = K_x^2 + K_y^2$$

Como $K_z^2 < 0$, $K_y^2 > 0$ e $K_x^2 > 0$,

$$\Rightarrow K_z^2 = K_x^2 + K_y^2$$

$$\Rightarrow K_z = \pm\sqrt{K_x^2 + K_y^2}$$

Substituindo os valores de K_x e K_y na equação anterior, tem-se que:

$$\Rightarrow K_z = \pm\sqrt{\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{a}\right)^2}$$

$$\Rightarrow K_z = \pm\frac{\pi}{a}\sqrt{i^2 + j^2}$$

No entanto, como a função seno hiperbólico é ímpar e a solução do problema que adere às condições iniciais exige que o potencial não seja negativo dentro do cubo, sabe-se que:

$$\Rightarrow K_z = \frac{\pi}{a}\sqrt{i^2 + j^2}$$

Portanto, em resumo:

$$K_x = \frac{i\pi}{a},\ i \in \mathbb{Z} \tag{12}$$

$$K_y = \frac{j\pi}{a},\ j \in \mathbb{Z} \tag{13}$$

$$K_z = \frac{\pi}{a}\sqrt{i^2 + j^2},\ i,j \in \mathbb{Z} \tag{14}$$

Por fim, será utilizada a condição de fronteira $V(x, y, a) = V_0$ em 11. No entanto, essa condição não é trivial de ser aplicada, visto que gera-se a seguinte sequência de afirmações:

$$\Rightarrow V(x, y, a) = A' \sinh(K_z a) \sin(K_x x) \sin(K_y y) = V_0$$

Coletando as constantes e definindo $C_{ij} := A' \sinh(K_z a)$, obtém-se que

$$\Rightarrow C_{ij} \sin(K_x x) \sin(K_y y) = V_0$$
$$\Rightarrow C_{ij} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{a}\right) = V_0$$

A multiplicação de duas funções periódicas dessa forma nunca será constante. Portanto, será preciso extrapolar o problema e considerar que a função potencial é uma função períodica ímpar tanto em x, quanto em y, formando uma espécie tabuleiro de xadrez com largura de posição a no espaço:

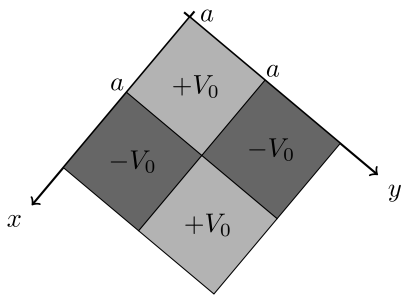

Figura 2: Extrapolação do Potencial além de $x = y = z = a$.

Com essa suposição, já que o potencial fora do cubo não é importante para o problema, pode-se aplicar a teoria das Séries de Fourrier para achar uma solução que satisfaça às condições acima.

Como há uma infinidade de múltiplos de i e j que fazem as contantes C_{ij}, K_x e K_y satisfazerem as Condições de Contorno, sabe-se que, nessa última Condição de Contorno, precisa-se de uma resposta da forma:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{a}\right) = V_0$$

Como sabe-se que $A' = \frac{C_{ij}}{\sinh(K_z a)} = \frac{C_{ij}}{\sinh(\pi\sqrt{i^2+j^2})}$, a resposta final é da forma:

$$V(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_{ij}}{\sinh(\pi\sqrt{i^2+j^2})} \sinh\left(\frac{\pi}{a}\sqrt{i^2+j^2}z\right) \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{a}\right)$$

Agora, resta determinar a última constante que é C_{ij}.

3.1 Resolução Numérica do Problema

3.1.1 Comportamento Numérico da Solução

3.1.2 Simulação em *Software*

4.1 Exemplos

- $N_1 = 3$;
- $N_2 = 4$;
- $N_3 = 1$;
- $N_4 = 8$;
- $N_5 = 1$;
- $N_6 = 0$.

$$*$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21} \qquad & a_{12} &= a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22} \\ a_{21} &= a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21} \qquad & a_{22} &= a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22} \end{aligned} \tag{15}$$