

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Escola de Engenharia



ENG04010  
Teoria Eletromagnética e Ondas

---

## Trabalho Complementar

### Resolução de Problemas de Valor de Contorno

---

Pedro Lubaszewski Lima (00341810)

Turma U

23 de dezembro de 2024

# Sumário

1.1	Enunciado do Problema . . . . .	2
2.1	Resolução Analítica do Problema . . . . .	3
2.1.1	Determinando o Comportamento das Soluções . . . . .	4
2.1.2	Cálculo dos Coeficientes das Soluções . . . . .	5
2.1.3	Forma Analítica Final . . . . .	9
3.1	Resolução Numérica do Problema . . . . .	10
3.1.1	Comportamento Numérico da Solução . . . . .	10
3.1.2	Simulação em <i>Software</i> . . . . .	13

## 1.1 Enunciado do Problema

Com o intuito de exercitar os conhecimentos ensinados sobre Problemas de Valores de Contorno (PVC) em Eletrostática, foi proposto o seguinte exercício a ser resolvido:

Considere um cubo oco de dimensões laterais  $a$ , composto de faces condutoras ideais, conforme a figura abaixo. Suponha que exista uma pequena separação entre cada face. As faces laterais, em tom mais claro, são mantidas em um potencial nulo. A face superior ( $0 < x < a$ ,  $0 < y < a$ ,  $z = a$ ) é mantida em potencial contante e uniforme  $V_0$ .

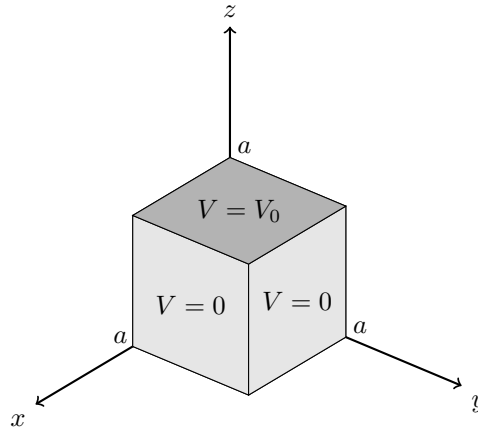


Figura 1: Cubo Condutor de Dimensões Laterais  $a$

Com isso em mente, faça o que se pede:

1. Determine uma equação para o potencial no interior do cubo de forma analítica, utilizando o Método da Separação de Variáveis (discutido na Seção 2.1).
2. Esboce o potencial, na forma de um “mapa de calor”, para a região central do cubo (fixando  $x = \frac{a}{2}$  ou  $y = \frac{a}{2}$  e variando as outras duas variáveis), utilizando resultados obtidos numericamente (discutido na Seção 3.1).

## 2.1 Resolução Analítica do Problema

Partindo de primeiros princípios, utilizando os postulados da Eletrostática:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

Com a segunda expressão, deduz-se que o campo elétrico é conservativo, ou seja,

$$\Rightarrow \exists V \mid \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Logo, unindo essa equação e a primeira equação dessa seção:

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \text{ (Equação de Poisson)}$$

Para o caso do problema, onde não há cargas no local que procura-se determinar o potencial elétrico:

$$\Rightarrow \nabla^2 V = 0 \text{ (Equação de Laplace)}$$

Com isso, para modelar o comportamento de  $V(x, y, z)$  analiticamente, partir-se-á da Equação de Laplace com as Condições de Contorno fornecidas no problema:

$$\begin{cases} \nabla^2 V = 0 \\ x : V(0, y, z) = 0, V(a, y, z) = 0 \\ y : V(x, 0, z) = 0, V(x, a, z) = 0 \\ z : V(x, y, 0) = 0, V(x, y, a) = V_0 \end{cases} \quad (1)$$

A partir dela, tem-se, em coordenadas cartesianas, que:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

E, pelo Método da Separação de Variáveis, assume-se que, para coordenadas cartesianas:

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

Portanto, a partir daí, tem-se que:

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = Y(y)Z(z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = X(x)Z(z) \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = X(x)Y(y) \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = Y(y)Z(z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) + X(x)Z(z) \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y) + X(x)Y(y) \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z) = 0$$

Agora, assumindo que  $X(x) \neq 0$ ,  $Y(y) \neq 0$  e  $Z(z) \neq 0$ , na região de interesse, pode-se dividir a equação acima por  $X(x)Y(y)Z(z)$ :

$$\Rightarrow \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0$$

Porém, a única forma dessa equação resultar em zero para todos os valores de  $X(x)$ ,  $Y(y)$  e  $Z(z)$  se dá quando cada uma das parcelas somadas na equação é uma constante. Em outras palavras:

$$\begin{cases} \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -K_x^2 \\ \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -K_y^2 \\ \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -K_z^2 \end{cases} \Rightarrow K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0 \quad (2)$$

Essa escolha de constantes foi feita para facilitar a dedução do resto do problema, visto que as constantes podem ser complexas.

Multiplicando cada uma das equações de 2 pelas suas respectivas funções dependentes apenas de uma coordenada e somando a constante dos dois lados das equações obtém-se o seguinte sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs):

$$\begin{cases} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x)K_x^2 = 0 \\ \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + Y(y)K_y^2 = 0 \\ \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + Z(z)K_z^2 = 0 \\ K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Dadas essas EDOs, para alguma das variáveis, pode-se obter as seguintes soluções gerais:

$$S(s) = A_0 s + B_0, K_s^2 = 0 \quad (4)$$

$$S(s) = A_1 \sin(K_s s) + B_1 \cos(K_s s), K_s^2 > 0, K_s \in \mathbb{R} \quad (5)$$

$$S(s) = A_2 \sinh(K_s s) + B_2 \cosh(K_s s), K_s^2 < 0, K_s \in \mathbb{I} \quad (6)$$

Todas essas para  $S(s) = X(x), Y(y), Z(z)$ . Para cada variável  $x$ ,  $y$  e  $z$ , a forma da solução geral depende das Condições de Fronteira.

Alguns PVCs em Eletrostática apresentam dependência em apenas algumas variáveis. No entanto, mesmo que este tenha alguma simetria em relação à  $x$  e  $y$  (fixando um certo  $x$  ou  $y$ , e fazendo  $z$  variar em função da variável restante deve resultar no mesmo comportamento de  $V(y, z)$  ou  $V(x, z)$ ), de forma geral, precisar-se-á resolver o problema para todas as variáveis separadamente.

### 2.1.1 Determinando o Comportamento das Soluções

Para descobrir qual é o comportamento de cada variável desse problema, basta analisar as Condições de Fronteira para duas das variáveis dadas em 1 e, pela equação 3, obter e confirmar o comportamento da variável restante. Para a variável  $z$ :

$$z : V(x, y, 0) = 0, V(x, y, a) = V_0$$

Ou seja, observa-se um comportamento de decaimento. Quanto mais afasta-se verticalmente da placa com potencial  $V_0$ , menor será o potencial. No entanto, esse comportamento não pode ser linear, pois esse é o caso quando há apenas duas placas paralelas, uma com potencial não nulo e a outra com potencial nulo. Esse não é o caso para este problema porque, ao decrementar a variável  $z$ , ocorre um certo amortecimento devido ao potencial nulo das placas laterais, gerando comportamento não linear em  $z$ . Isso indica, dentre as soluções gerais para as equações, que a solução nessa variável corresponde a um decaimento exponencial descrito pela equação 6. Ou seja,  $K_z^2 < 0$ . Por conta disso, sabe-se que precisa haver  $K_x^2 > 0$  ou (inclusivo)  $K_y^2 > 0$  para que o resto da equação 3 seja satisfeito. Nesse caso, como é um cubo com todas as distâncias iguais e com todos os potenciais iguais, exceto na tampa, percebe-se que tanto a variável  $x$ , quanto a variável  $y$  devem apresentar o mesmo comportamento. Isso também pode ser observado diretamente nas Condições de Fronteira dessas variáveis:

$$x : V(0, y, z) = 0, V(a, y, z) = 0$$

$$y : V(x, 0, z) = 0, V(x, a, z) = 0$$

Logo, pelas constatações acima, sabe-se que  $K_x^2 > 0$  e que  $K_y^2 > 0$ . Portanto, obtém-se as seguintes equações gerais para as variáveis do problema:

$$X(x) = A \sin(|K_x|x) + B \cos(|K_x|x), K_x^2 > 0, K_x \in \mathbb{R} \quad (7)$$

$$Y(y) = C \sin(|K_y|y) + D \cos(|K_y|y), K_y^2 > 0, K_y \in \mathbb{R} \quad (8)$$

$$Z(z) = E \sinh(|K_z|z) + F \cosh(|K_z|z), K_z^2 < 0, K_z \in \mathbb{I} \quad (9)$$

Será confirmado se essas constatações estão efetivamente corretas através da análise numérica na seção 3.1.

Portanto, agrupando 7, 8 e 9, obtém-se a seguinte solução geral para o problema original:

$$V(x, y, z) = [A \sin(|K_x|x) + B \cos(|K_x|x)][C \sin(|K_y|y) + D \cos(|K_y|y)][E \sinh(|K_z|z) + F \cosh(|K_z|z)] \quad (10)$$

### 2.1.2 Cálculo dos Coeficientes das Soluções

Com as Condições de Fronteira, serão primeiramente calculados os coeficientes mais diretos. Ou seja, com as condições que envolvem zerar as soluções gerais:

- Usando  $V(0, y, z) = 0$  na equação 10:

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(0, y, z) &= [A \cdot 0 + B \cdot 1][C \sin(|K_y|y) + D \cos(|K_y|y)][E \sinh(|K_z|z) + F \cosh(|K_z|z)] = 0 \\ &\Rightarrow B[C \sin(|K_y|y) + D \cos(|K_y|y)][E \sinh(|K_z|z) + F \cosh(|K_z|z)] = 0 \end{aligned}$$

Para uma multiplicação ser nula, precisa-se algum dos termos multiplicados seja nulo. Como sabe-se que exponenciais nunca são nulas, para essa parcela ser nula, precisa-se-ia que tanto  $E = 0$ , quanto  $F = 0$ . No entanto, isso resulta na solução trivial para a variável  $z$ , algo já constatado como falso. Logo, alguma das outras parcelas ou ambas deve ser nula:

$$\Rightarrow B[C \sin(|K_y|y) + D \cos(|K_y|y)] = 0$$

O mesmo raciocínio se aplica para as constantes  $C$  e  $D$ , visto que as funções seno e cosseno nunca são zero ao mesmo tempo, exigindo que, para essa parcela ser nula, precisa-se da solução trivial para  $y$ , algo analisado anteriormente como não verdadeiro. Portanto, só resta a conclusão que:

$$\Rightarrow B = 0$$

- Usando  $V(x, 0, z) = 0$  na equação 10 sabendo que  $B = 0$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(x, 0, z) &= A \sin(|K_x|x)[C \cdot 0 + D \cdot 1][E \sinh(|K_z|z) + F \cosh(|K_z|z)] = 0 \\ &\Rightarrow D \cdot A \sin(|K_x|x)[E \sinh(|K_z|z) + F \cosh(|K_z|z)] = 0 \end{aligned}$$

Como já argumentado acima,  $E \neq 0$  e  $F \neq 0$ :

$$\Rightarrow D \cdot A \sin(|K_x|x) = 0$$

Pela mesma lógica da condição anterior, para não haver solução trivial na variável  $x$ , precisa-se que  $A \neq 0$ :

$$\Rightarrow D = 0$$

- Usando  $V(x, y, 0) = 0$  na equação 10 sabendo que  $B = 0$  e  $D = 0$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(x, y, 0) &= A \sin(|K_x|x)C \sin(|K_y|y)[E \cdot 0 + F \cdot 1] = 0 \\ &\Rightarrow F \cdot A \sin(|K_x|x)C \sin(|K_y|y) = 0 \end{aligned}$$

Como já discutido anteriormente, para não haver solução trivial nas variáveis  $x$  e  $y$ , precisa-se que  $A \neq 0$  e  $C \neq 0$ :

$$\Rightarrow F = 0$$

Assim, para facilitar, chamar-se-á  $A' := A \cdot C \cdot E$ , ou seja:

$$V(x, y, z) = A' \sinh(|K_z|z) \sin(|K_x|x) \sin(|K_y|y) \quad (11)$$

- Usando  $V(a, y, z) = 0$  na equação 11:

$$\Rightarrow V(a, y, z) = A' \sinh(|K_z|z) \sin(|K_x|a) \sin(|K_y|y) = 0$$

Como a contante  $A'$  não pode ser nula e as funções seno e seno hiperbólico são não nulas para diversos valores de  $y$  e  $z$ , resta que:

$$\Rightarrow \sin(|K_x|a) = 0$$

A função seno é periódica e apresenta valor zero quando o seu argumento vale  $i\pi$ , onde  $i \in \mathbb{Z}$ :

$$\Rightarrow |K_x|a = i\pi$$

$$|K_x| = \frac{i\pi}{a}, i \in \mathbb{Z}$$

- Usando  $V(x, a, z) = 0$  na equação 11:

$$\Rightarrow V(x, a, z) = A' \sinh(|K_z|z) \sin(|K_x|x) \sin(|K_y|a) = 0$$

Pelo mesmo raciocínio anterior, tem-se que:

$$\Rightarrow \sin(|K_y|a) = 0$$

$$\Rightarrow |K_y|a = j\pi$$

$$|K_y| = \frac{j\pi}{a}, j \in \mathbb{Z}$$

Agora, tomando a última equação de 3:

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0$$

$$\Rightarrow -K_z^2 = K_x^2 + K_y^2$$

Como  $K_z^2 < 0$ ,  $K_y^2 > 0$  e  $K_x^2 > 0$  e não há superposição entre essas variáveis (são vetores normais),

$$\Rightarrow |K_z|^2 = |K_x|^2 + |K_y|^2$$

$$\Rightarrow |K_z| = \sqrt{|K_x|^2 + |K_y|^2}$$

Substituindo os valores de  $|K_x|$  e  $|K_y|$  na equação anterior, tem-se que:

$$\Rightarrow |K_z| = \sqrt{\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{a}\right)^2}$$

$$\Rightarrow |K_z| = \frac{\pi}{a} \sqrt{i^2 + j^2}$$

Portanto, em resumo:

$$|K_x| = \frac{i\pi}{a}, i \in \mathbb{Z} \tag{12}$$

$$|K_y| = \frac{j\pi}{a}, j \in \mathbb{Z} \tag{13}$$

$$|K_z| = \frac{\pi}{a} \sqrt{i^2 + j^2}, i, j \in \mathbb{Z} \tag{14}$$

Por fim, será utilizada a condição de fronteira  $V(x, y, a) = V_0$  em 11. No entanto, essa condição não é trivial de ser aplicada, visto que gera-se a seguinte sequência de afirmações:

$$\Rightarrow V(x, y, a) = A' \sinh(|K_z|a) \sin(|K_x|x) \sin(|K_y|y) = V_0$$

Coletando as constantes e definindo  $C_{ij} := A' \sinh(|K_z|a)$ , obtém-se que

$$\Rightarrow C_{ij} \sin(|K_x|x) \sin(|K_y|y) = V_0$$

$$\Rightarrow C_{ij} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{a}\right) = V_0$$

A multiplicação de duas funções periódicas dessa forma nunca será constante. Portanto, será preciso extrapolar o problema e considerar que a função potencial é uma função periódica ímpar tanto em  $x$ , quanto em  $y$ , formando uma espécie tabuleiro de xadrez com largura de posição  $a$  no espaço:

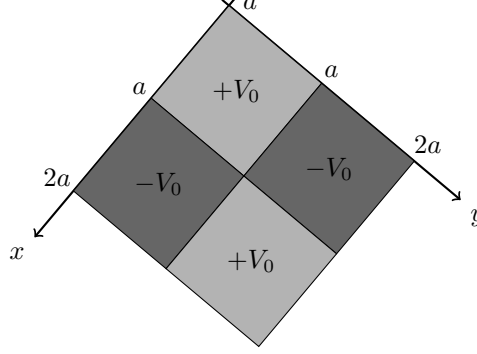


Figura 2: Extrapolação do Potencial além de  $x = y = z = a$

Com essa suposição, já que o potencial fora do cubo não é importante para o problema, pode-se aplicar a teoria das Séries de Fourier para achar uma solução que satisfaça às condições acima.

Como há uma infinidade de múltiplos de  $i$  e  $j$  que fazem as constantes  $C_{ij}$ ,  $|K_x|$  e  $|K_y|$  satisfazerem as Condições de Contorno, sabe-se que, nessa última Condição de Contorno, precisa-se de uma resposta da forma:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{a}\right) = V_0 \quad (15)$$

Como sabe-se, manipulando a sua definição, que  $A' = \frac{C_{ij}}{\sinh(|K_z|a)} = \frac{C_{ij}}{\sinh(\pi\sqrt{i^2+j^2})}$ , a resposta final é da forma:

$$V(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_{ij}}{\sinh(\pi\sqrt{i^2+j^2})} \sinh\left(\frac{\pi z}{a} \sqrt{i^2+j^2}\right) \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{a}\right) \quad (16)$$

Agora, resta determinar a última constante que é  $C_{ij}$  a partir da equação 15.

Para fazer isso, será utilizado o “Truque de Fourier” tanto na variável  $x$ , quanto na variável  $y$ . Ou seja, multiplicar-se-á a equação 15 por  $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$ , com  $n, m \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) &= V_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) &= V_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \end{aligned}$$

Agora, utilizando a identidade trigonométrica  $\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$  no lado esquerdo, obtém-se desse lado:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \left[ \frac{\cos\left(\frac{i\pi x}{a} - \frac{n\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{i\pi x}{a} + \frac{n\pi x}{a}\right)}{2} \right] &\left[ \frac{\cos\left(\frac{j\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a}\right) - \cos\left(\frac{j\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a}\right)}{2} \right] \\ \Rightarrow \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \left[ \cos\left(\frac{\pi x(i-n)}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi x(i+n)}{a}\right) \right] &\left[ \cos\left(\frac{\pi y(j-m)}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y(j+m)}{a}\right) \right] \end{aligned}$$

Aplicando a integral dupla  $\int_0^a dy \int_0^a dx$  no lado esquerdo:

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \int_0^a \int_0^a \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \left[ \cos\left(\frac{\pi x(i-n)}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi x(i+n)}{a}\right) \right] \left[ \cos\left(\frac{\pi y(j-m)}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y(j+m)}{a}\right) \right] dx dy$$



$$\Rightarrow \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \int_0^a \left[ \cos\left(\frac{\pi x(i-n)}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi x(i+n)}{a}\right) \right] dx \int_0^a \left[ \cos\left(\frac{\pi y(j-m)}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y(j+m)}{a}\right) \right] dy$$

Neste ponto, caso  $n \neq i$  ou (inclusivo)  $m \neq j$ :

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \left[ \frac{1}{i-n} \sin\left(\frac{\pi x(i-n)}{a}\right) - \frac{1}{i+n} \sin\left(\frac{\pi x(i+n)}{a}\right) \right]_0^a \left[ \frac{1}{j-m} \sin\left(\frac{\pi y(j-m)}{a}\right) - \frac{1}{j+m} \sin\left(\frac{\pi y(j+m)}{a}\right) \right]_0^a$$

Avaliando a integral acima, quando  $x = 0$  e  $y = 0$ , observa-se que a afirmação acima é nula. Caso  $x = a$  e  $y = a$ , o argumento dos senos será um múltiplo inteiro qualquer de  $\pi$ , zerando novamente toda a afirmação. Com isso, conclui-se que:

$$n \neq i \vee m \neq j \rightarrow \text{a afirmação esquerda é nula.}$$

Agora, caso  $n = i$  e  $m = j$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \left[ \int_0^a dx - \int_0^a \cos\left(\frac{2i\pi x}{a}\right) dx \right] \left[ \int_0^a dy - \int_0^a \cos\left(\frac{2j\pi y}{a}\right) dy \right] \\ \Rightarrow \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \left[ x - \frac{a}{2i\pi} \sin\left(\frac{2i\pi x}{a}\right) \right]_0^a \left[ y - \frac{a}{2j\pi} \sin\left(\frac{2j\pi y}{a}\right) \right]_0^a \end{aligned}$$

Ou seja, como qualquer múltiplo inteiro de  $\pi$  torna a função seno nula, tem-se, no lado esquerdo:

$$\frac{a^2}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \quad (17)$$

Agora, voltando para o lado direito da equação e aplicando a mesma integral dupla para manter a igualdade válida:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^a \int_0^a V_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dx dy \\ \Rightarrow V_0 \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dy \\ \Rightarrow \frac{a^2 V_0}{\pi^2} \left[ -\frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right]_0^a \left[ -\frac{1}{m} \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \right]_0^a \\ \Rightarrow \frac{a^2 V_0}{\pi^2} \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cos(n\pi) \right] \left[ \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \cos(m\pi) \right] \end{aligned}$$

Nesse ponto, o valor da integral depende da paridade de  $n$  e  $m$ . Caso  $n$  ou (inclusivo)  $m$  for par, a integral se torna nula. Logo, precisa-se que  $n = i = 2l - 1$  e  $m = j = 2k - 1$ , com  $l, k \in \mathbb{Z}$  para que o lado direito não seja nulo e valha:

$$\frac{4a^2 V_0}{\pi^2 n m}, \quad n = 2l - 1, \quad m = 2k - 1, \quad l, k \in \mathbb{Z} \quad (18)$$

Portanto, reunindo novamente o lado esquerdo 17 e o lado direito 18, mantendo as restrições impostas por cada lado, tem-se:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{a^2}{4} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{(2l-1)(2k-1)} = \frac{4a^2 V_0}{\pi^2 (2l-1)(2k-1)} \\ \Rightarrow \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{(2l-1)(2k-1)} = \frac{16V_0}{\pi^2 (2l-1)(2k-1)} \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, como, para cada valor de iterador  $l$  e  $k$ , obtém-se uma nova igualdade, obtém-se:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{(2l-1)(2k-1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16V_0}{\pi^2 (2l-1)(2k-1)} \\ \Rightarrow C_{(2l-1)(2k-1)} = \frac{16V_0}{\pi^2 (2l-1)(2k-1)} \end{aligned}$$

Retornando essa constante para a equação 16, tem-se que:

$$V(x, y, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16V_0}{\pi^2 (2l-1)(2k-1) \sinh(\pi \sqrt{(2l-1)^2 + (2k-1)^2} z)} \sinh\left(\frac{\pi}{a} \sqrt{(2l-1)^2 + (2k-1)^2} z\right) \sin\left(\frac{(2l-1)\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{(2k-1)\pi y}{a}\right)$$

### 2.1.3 Forma Análítica Final

Para finalizar, reunindo a última equação, movendo alguns termos para organizá-la e renomeando os iteradores, obteve-se a seguinte expressão:

$$V(x, y, z) = \frac{16V_0}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{ij \sinh(\pi \sqrt{i^2 + j^2})} \sinh\left(\frac{\pi z}{a} \sqrt{i^2 + j^2}\right) \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{a}\right) \quad (19)$$

Onde, na expressão acima,  $i = 1, 3, 5, \dots, 2l-1, \dots$  e  $j = 1, 3, 5, \dots, 2k-1, \dots$ ,  $0 < x < a$ ,  $0 < y < a$ ,  $0 < z < a$ ,  $a > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$  e  $V_0 \in \mathbb{R}$ .

\*

### 3.1 Resolução Numérica do Problema

#### 3.1.1 Comportamento Numérico da Solução

Para obter um gráfico de comparação com a simulação realizada na próxima subseção, utilizar-se-á os seguintes parâmetros na solução analítica:

- $a = 3\text{mm}$ ;
- $V_0 = 100\text{V}$ ;
- Plano de corte em  $x = \frac{a}{2}$ ;
- 6 Primeiros termos com iterador  $i$  e 30 primeiros termos com iterador  $j$ ;
- 180 termos expandidos da série para gerar os gráficos (serão transcritos aqui apenas 5 desses).

Com esses critérios em mente, a expansão de cinco termos da solução analítica, todos com  $i = 1$ , se dá por:

$$\begin{aligned} V\left(\frac{a}{2}, y, z\right) \approx & 3,81 \sinh(1480,96z) \sin(1047,20y) \\ & + 0,005 \sinh(3311,53z) \sin(3141,59y) \\ & + 7,16 \cdot 10^{-6} \sinh(5339,68z) \sin(5235,99y) \\ & + 10^{-8} \sinh(7404,81z) \sin(7330,38y) \\ & + 1,59 \cdot 10^{-11} \sinh(9482,78z) \sin(9424,78y) \end{aligned} \quad (20)$$

Para gerar os gráficos, utilizou-se a plataforma Scilab. Nela, gerou-se o seguinte código para construir as visualizações desta seção:

```
1 // Potential function
2 function U = V(x, y, z, V0, a, i_max, j_max)
3     if i_max < 1 then
4         i_max = 1;
5     end
6
7     if j_max < 1 then
8         j_max = 1;
9     end
10
11     U = 0;
12     for i = 1:i_max
13         for j = 1:j_max
14             U = U + (1/(i*j*sinh(%pi*sqrt(i**2 + j**2))))..
15                 .*sinh((%pi/a)*sqrt(i**2 + j**2).*z) ..
16                 .*sin((i*%pi/a).*x).*sin((j*%pi/a).*y);
17         end
18     end
19     U = (16*V0/%pi**2).*U;
20 endfunction
21
22 // Potential function with less arguments
23 function U = Vv(y, z)
24     V0 = 100; // Volts
25     a = 0.003; // millimeters
26     i_max = 13; // 6 i terms
27     j_max = 59; // 30 j terms
28     x = a/2;
29
30     U = V(x, y, z, V0, a, i_max, j_max);
31 endfunction
32
33 a = 0.003;
34 y = linspace(0, a, 200);
35 z = y;
36 U = feval(y, z, Vv);
37 nV = linspace(0, a, 30);
38
39 // Isolines graph
40 scf(0);
41 contour(y, z, U, 30);
42 xgrid;
```

```

43  xtitle("Equipotenciais", "y-[m]", "z-[m]");
44  xs2pdf(0, "numerical_isolines.pdf");
45
46  // Potential in terms of z
47  scf(1);
48  V1 = Vv(a/2, z);
49  plot(z, V1);
50  xgrid;
51  xtitle("Potencial-em-Z", "z-[m]", "V-[V]");
52  xs2pdf(1, "numerical_potential_z.pdf");
53
54  // Potential in terms of y
55  scf(2);
56  V2 = Vv(y, a/2);
57  plot(y, V2);
58  xgrid;
59  xtitle("Potencial-em-Y", "y-[m]", "V-[V]");
60  xs2pdf(2, "numerical_potential_y.pdf");

```

Código 1: Geração de Gráficos no Scilab

A partir desse código, gerou-se os seguintes gráficos que serão analisados com mais detalhes na subseção 3.1.2:

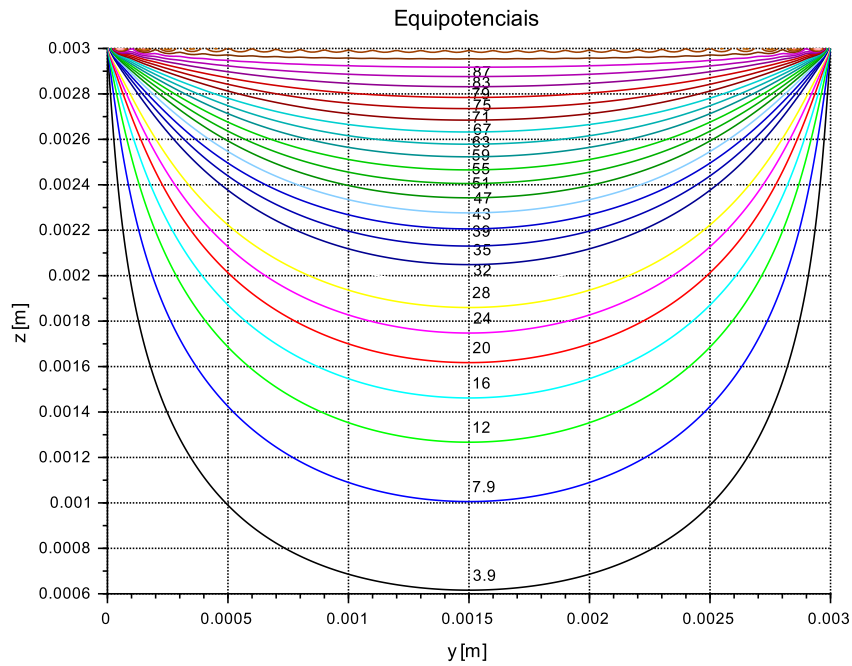


Figura 3: Linhas Equipotenciais da Solução Numérica

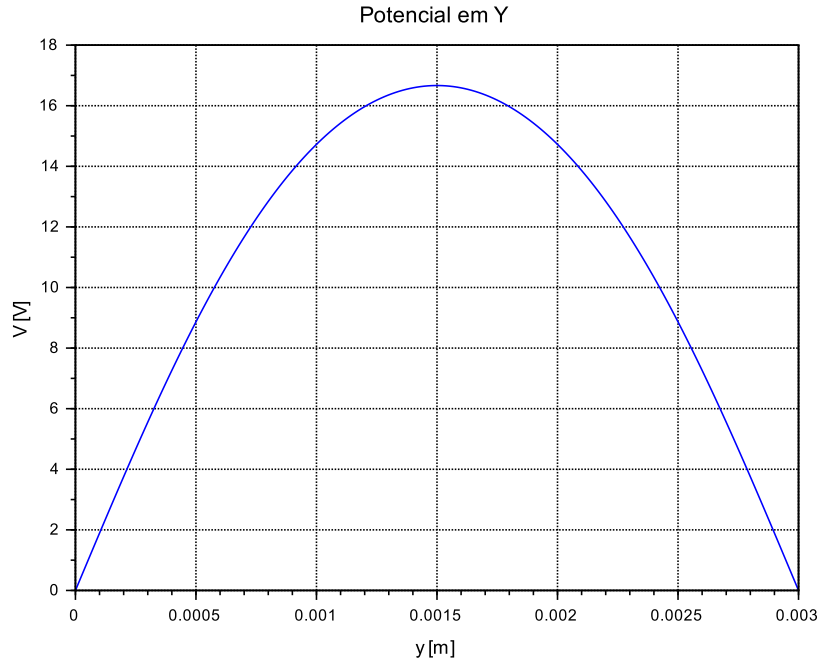


Figura 4: Comportamento da Variável  $y$  na Solução Numérica

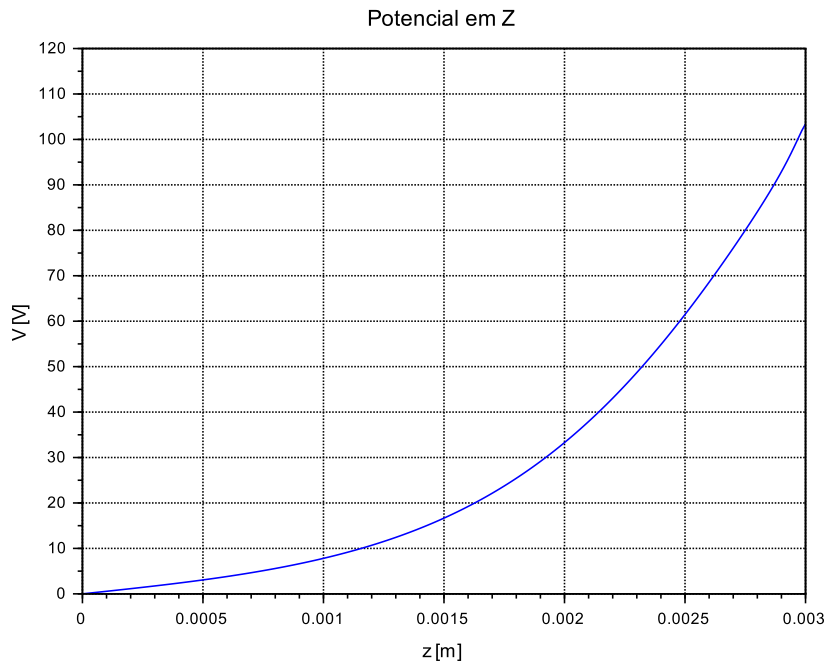


Figura 5: Comportamento da Variável  $z$  na Solução Numérica

Observa-se que, mesmo com alguns erros de truncamento, a solução aproxima bem o que era esperado. O comportamento da variável  $z$  extrapola um pouco o limite de  $V_0$  devido também aos erros de truncamento dos termos da solução analítica, porém mantém bem a forma exponencial esperada para essa variável.

### 3.1.2 Simulação em *Software*

Para realizar a simulação, estabeleceu-se os mesmo parâmetros utilizados na subseção anterior. Ou seja, os seguintes valores:

- $a = 3\text{mm}$ ;
- $V_0 = 100\text{V}$ ;
- Plano de corte em  $x = \frac{a}{2}$ .

Além disso, para ser possível obter-se resultados na versão gratuita do simulador, colocou-se um pequeno espaçamento  $\varepsilon = 0,1\text{mm}$  entre cada face do cubo. Para conseguir bons resultados, utilizou-se o tipo de *mesh* hexaédrica, com acurácia  $\text{acc} = 10^{-9}$ .

Com esses parâmetros, gerou-se os seguintes gráficos no simulador CST Studio Suite 2024 - Learning Edition:

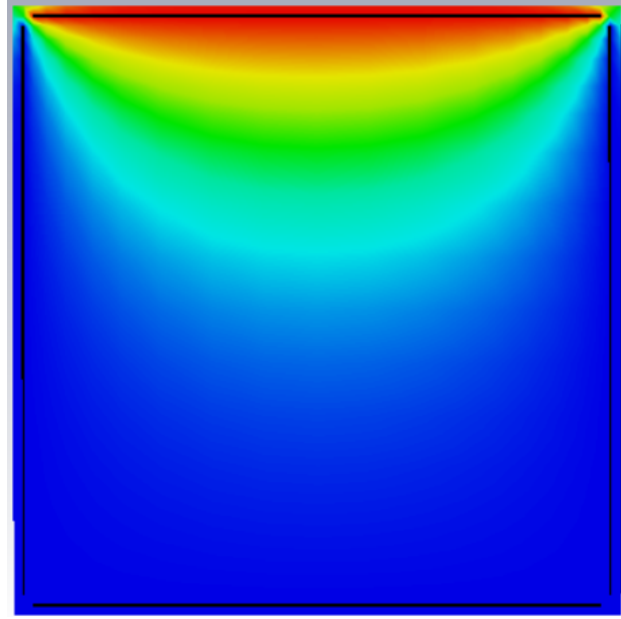


Figura 6: Mapa de Calor do Potencial na Simulação

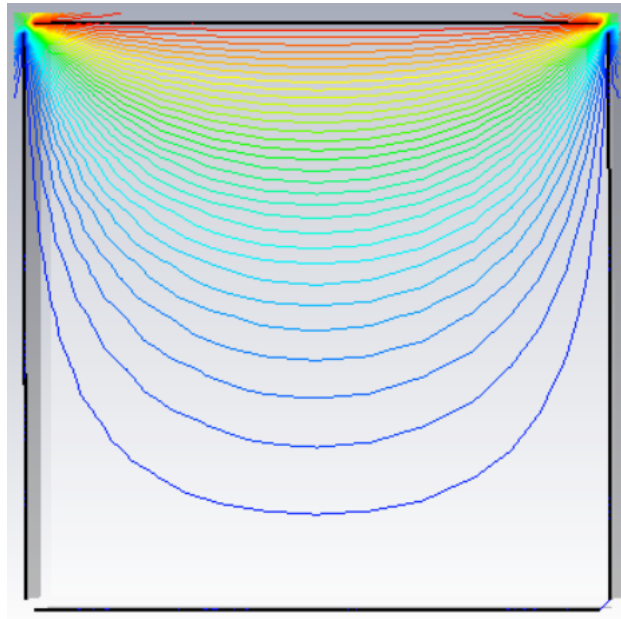


Figura 7: Linhas Equipotenciais na Simulação

Apesar dos efeitos de borda, gerou-se resultados que representam funções contínuas.

Comparando com o gráfico 3 gerado pelo cálculo numérico da solução analítica, observa-se grande semelhança entre as conclusões obtidas pelas duas abordagens.

Para analisar o efeito nas variáveis individualmente, gerou-se gráficos unidimensionais ao fixar as duas outras variáveis no centro do cubo:

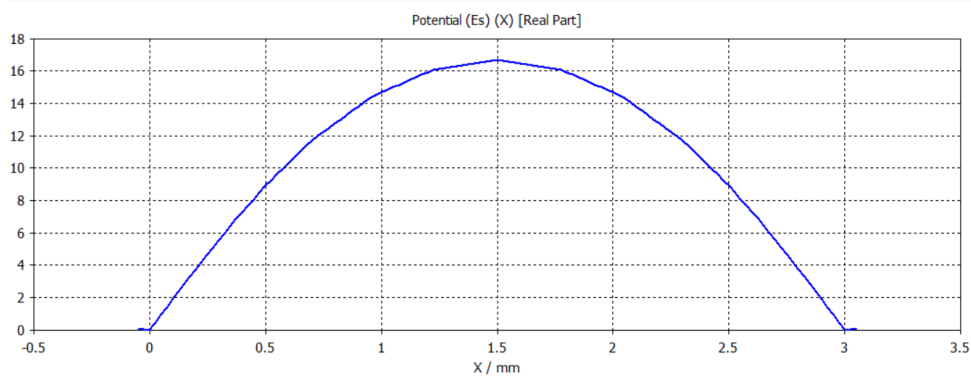


Figura 8: Comportamento da Variável  $x$  na Simulação

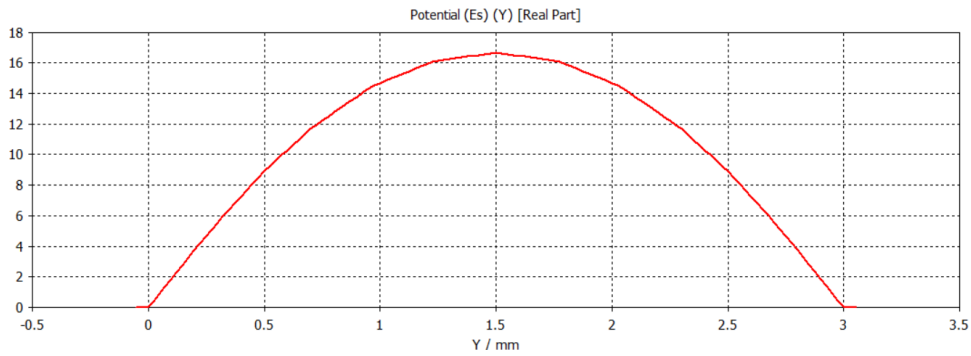


Figura 9: Comportamento da Variável  $y$  na Simulação

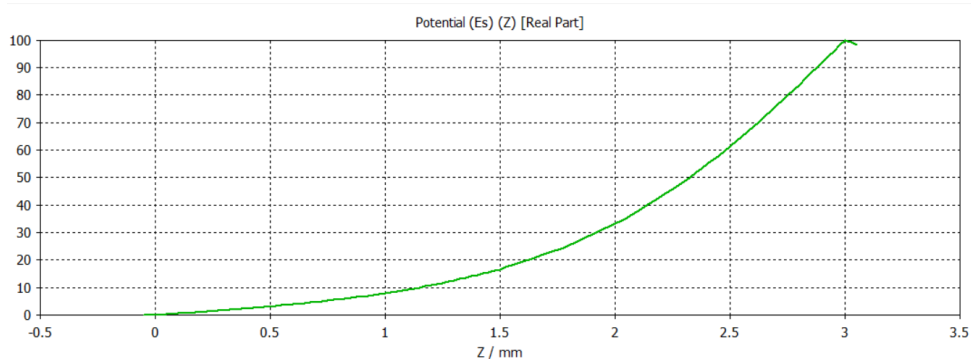


Figura 10: Comportamento da Variável  $z$  na Simulação

Esses últimos *plots* confirmam as hipóteses iniciais da solução analítica. Essas imagens mostram que, de fato, as variáveis  $x$  e  $y$  apresentam o mesmo comportamento periódico e senoidal e que a variável  $z$  apresenta crescimento exponencial. Ademais, os gráficos 4 e 5 da solução numérica apresentam os mesmos comportamentos, com quase os mesmos valores de  $V(y)$  e  $V(z)$  nos respectivos gráficos. Isso confirma por fim que a solução analítica foi corretamente construída.