

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia



ENG04010
Teoria Eletromagnética e Ondas

Trabalho Complementar

Resolução de Problemas de Valor de Contorno

Pedro Lubaszewski Lima (00341810)

Turma U

23 de dezembro de 2024

Sumário

1.1	Enunciado do Problema	2
2.1	Resolução Analítica do Problema	3
2.1.1	Determinando o Comportamento das Soluções	4
2.1.2	Cálculo dos Coeficientes das Soluções	5
3.1	Resolução Numérica do Problema	7
3.1.1	Comportamento Numérico da Solução	7
3.1.2	Simulação em <i>Software</i>	7
4.1	Exemplos	8

1.1 Enunciado do Problema

Com o intuito de exercitar os conhecimentos ensinados sobre Problemas de Valores de Contorno (PVC) em Eletrostática, foi proposto o seguinte exercício a ser resolvido:

Considere um cubo oco de dimensões laterais a , composto de faces condutoras ideais, conforme a figura abaixo. Suponha que exista uma pequena separação entre cada face. As faces laterais, em tom mais claro, são mantidas em um potencial nulo. A face superior ($0 < x < a$, $0 < y < a$, $z = a$) é mantida em potencial contante e uniforme V_0 .

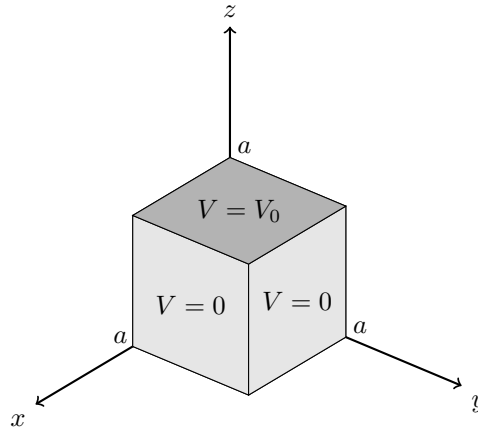


Figura 1: Cubo Condutor de Dimensões Laterais a .

Com isso em mente, faça o que se pede:

1. Determine uma equação para o potencial no interior do cubo de forma analítica, utilizando o Método da Separação de Variáveis (discutido na Seção 2.1).
2. Esboce o potencial, na forma de um “mapa de calor”, para a região central do cubo (fixando $x = \frac{a}{2}$ ou $y = \frac{a}{2}$ e variando as outras duas variáveis), utilizando resultados obtidos numericamente (discutido na Seção 3.1).

2.1 Resolução Analítica do Problema

Partindo de primeiros princípios, utilizando dos postulados da Eletrostática:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

Com a segunda expressão, deduz-se que o campo elétrico é conservativo, ou seja,

$$\Rightarrow \exists V \mid \vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

Logo, unindo essa equação e a primeira equação dessa seção:

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}V) = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \text{ (Equação de Poisson)}$$

Para o caso do problema onde não há cargas onde procura-se determinar o potencial elétrico:

$$\Rightarrow \nabla^2 V = 0 \text{ (Equação de Laplace)}$$

Com isso, para modelar o comportamento de $V(x, y, z)$ analiticamente, partir-se-á da Equação de Laplace com as Condições de Contorno fornecidas no problema:

$$\begin{cases} \nabla^2 V = 0 \\ x : V(0, y, z) = 0, V(a, y, z) = 0 \\ y : V(x, 0, z) = 0, V(x, a, z) = 0 \\ z : V(x, y, 0) = 0, V(x, y, a) = V_0 \end{cases} \quad (1)$$

A partir dela, tem-se, em coordenadas cartesianas, que:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

E, pelo Método da Separação de Variáveis, assume-se que, para coordenadas cartesianas:

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

Portanto, a partir daí, tem-se que:

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = Y(y)Z(z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = X(x)Z(z) \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = X(x)Y(y) \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = Y(y)Z(z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) + X(x)Z(z) \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y) + X(x)Y(y) \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z) = 0$$

Agora, assumindo que $X(x) \neq 0$, $Y(y) \neq 0$ e $Z(z) \neq 0$, na região de interesse, pode-se dividir a equação acima por $X(x)Y(y)Z(z)$:

$$\Rightarrow \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0$$

Porém, a única forma dessa equação resultar em zero para todos os valores de $X(x)$, $Y(y)$ e $Z(z)$ se dá quando cada uma das parcelas somadas na equação é uma constante. Em outras palavras:

$$\begin{cases} \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -K_x^2 \\ \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -K_y^2 \\ \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -K_z^2 \end{cases} \Rightarrow K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0 \quad (2)$$

Essa escolha de constantes foi feita para facilitar a dedução do resto do problema, visto que as constantes podem ser complexas.

Multiplicando cada uma das equações de 2 pelas suas respectivas funções dependentes apenas de uma coordenada e somando a constante dos dois lados das equações obtém-se o seguinte sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs):

$$\begin{cases} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x)K_x^2 = 0 \\ \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + Y(y)K_y^2 = 0 \\ \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + Z(z)K_z^2 = 0 \\ K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Dadas essas EDOs, para alguma das variáveis, pode-se obter as seguintes soluções gerais:

$$S(s) = A_0 s + B_0, K_s^2 = 0 \quad (4)$$

$$S(s) = A_1 \sin(ks) + B_1 \cos(ks), K_s^2 > 0, K_s = K \text{ real} \quad (5)$$

$$S(s) = A_2 \sinh(ks) + B_2 \cosh(ks), K_s^2 < 0, K_s = K \text{ imaginário} \quad (6)$$

Todas essas para $S(s) = X(x), Y(y), Z(z)$. Para cada variável x , y e z , a forma da solução geral depende das Condições de Fronteira.

Alguns PVCs em Eletrostática apresentam dependência em apenas algumas variáveis. No entanto, mesmo que este tenha alguma simetria em relação à x e y (fixando um certo x ou y , e fazendo z variar em função da variável restante deve resultar no mesmo comportamento de $V(y, z)$ ou $V(x, z)$), de forma geral, precisar-se-á resolver o problema para todas as variáveis separadamente.

2.1.1 Determinando o Comportamento das Soluções

Para descobrir qual é o comportamento de cada variável desse problema, basta analisar as Condições de Fronteira para duas das variáveis dadas em 1 e, pela equação 3, obter e confirmar o comportamento da variável restante. Para a variável z :

$$z : V(x, y, 0) = 0, V(x, y, a) = V_0$$

Ou seja, observa-se um comportamento de decaimento. Quanto mais afasta-se verticalmente da placa com potencial V_0 , menor será o potencial. No entanto, esse comportamento não pode ser linear, pois esse é o caso quando há apenas duas placas paralelas, uma com potencial não nulo e a outra com potencial nulo. Esse não é o caso para este problema porque, ao decrementar a variável z , ocorre um certo amortecimento devido ao potencial nulo das placas laterais, gerando comportamento não linear em z . Isso indica, dentre as soluções gerais para as equações, que a solução nessa variável corresponde a um decaimento exponencial descrito pela equação 6. Ou seja, $K_z^2 < 0$. Por conta disso, sabe-se que precisa haver $K_x^2 > 0$ ou (inclusivo) $K_y^2 > 0$ para que o resto da equação 3 seja satisfeito. Nesse caso, como é um cubo com todas as distâncias iguais e com todos os potenciais iguais, exceto na tampa, percebe-se que tanto a variável x , quanto a variável y devem apresentar o mesmo comportamento. Isso também pode ser observado diretamente nas Condições de Fronteira dessas variáveis:

$$x : V(0, y, z) = 0, V(a, y, z) = 0$$

$$y : V(x, 0, z) = 0, V(x, a, z) = 0$$

Logo, pelas constatações acima, sabe-se que $K_x^2 > 0$ e que $K_y^2 > 0$. Portanto, obtém-se as seguintes equações gerais para as variáveis do problema:

$$X(x) = A \sin(nx) + B \cos(nx), K_x^2 > 0, K_x = K \text{ real} \quad (7)$$

$$Y(y) = C \sin(my) + D \cos(my), K_y^2 > 0, K_y = K \text{ real} \quad (8)$$

$$Z(z) = Ee^{kz} + Fe^{-kz}, K_z^2 < 0, K_z = K \text{ imaginário} \quad (9)$$

Será confirmado se essas constatações estão efetivamente corretas através da análise numérica na seção 3.1.

Portanto, agrupando 7, 8 e 9, obtém-se a seguinte solução geral para o problema original:

$$V(x, y, z) = [A \sin(nx) + B \cos(nx)][C \sin(my) + D \cos(my)][Ee^{kz} + Fe^{-kz}] \quad (10)$$

2.1.2 Cálculo dos Coeficientes das Soluções

Com as Condições de Fronteira, serão primeiramente calculados os coeficientes mais diretos. Ou seja, com as condições que envolvem zerar as soluções gerais:

- Usando $V(0, y, z) = 0$ na equação 10:

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(0, y, z) &= [A \cdot 0 + B \cdot 1][C \sin(my) + D \cos(my)][Ee^{kz} + Fe^{-kz}] = 0 \\ &\Rightarrow B[C \sin(my) + D \cos(my)][Ee^{kz} + Fe^{-kz}] = 0 \end{aligned}$$

Para uma multiplicação ser nula, precisa-se algum dos termos multiplicados seja nulo. Como sabe-se que exponenciais nunca são nulas, para essa parcela ser nula, precisa-se de que tanto $E = 0$, quanto $F = 0$. No entanto, isso resulta na solução trivial para a variável z , algo já constatado como falso. Logo, alguma das outras parcelas ou ambas deve ser nula:

$$\Rightarrow B[C \sin(my) + D \cos(my)] = 0$$

O mesmo raciocínio se aplica para as constantes C e D , visto que as funções seno e cosseno nunca são zero ao mesmo tempo, exigindo que, para essa parcela ser nula, precisa-se da solução trivial para y , algo analisado anteriormente como não verdadeiro. Portanto, só resta a conclusão que:

$$\Rightarrow B = 0$$

- Usando $V(x, 0, z) = 0$ na equação 10 sabendo que $B = 0$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(x, 0, z) &= A \sin(nx)[C \cdot 0 + D \cdot 1][Ee^{kz} + Fe^{-kz}] = 0 \\ &\Rightarrow D \cdot A \sin(nx)[Ee^{kz} + Fe^{-kz}] = 0 \end{aligned}$$

Como já argumentado acima, $E \neq 0$ e $F \neq 0$:

$$\Rightarrow D \cdot A \sin(nx) = 0$$

Pela mesma lógica da condição anterior, para não haver solução trivial na variável x , precisa-se que $A \neq 0$:

$$\Rightarrow D = 0$$

- Usando $V(x, y, 0) = 0$ na equação 10 sabendo que $B = 0$ e $D = 0$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(x, y, 0) &= A \sin(nx)D \sin(my)[E \cdot 1 + F \cdot 1] = 0 \\ &\Rightarrow A \sin(nx)D \sin(my)[E + F] = 0 \end{aligned}$$

Como já discutido anteriormente, para não haver solução trivial nas variáveis x e y , precisa-se que $A \neq 0$ e $C \neq 0$:

$$\Rightarrow E + F = 0$$

$$\Rightarrow E = -F$$

Assim, para facilitar, chamar-se-á $K' := E = -F$.

Portanto, a solução do problema agora é:

$$V(x, y, z) = A \sin(nx) D \sin(my) (K' e^{kz} - K' e^{-kz}) \quad (11)$$

Agora, será utilizada a condição de fronteira $V(x, y, a) = V_0$ em 11. No entanto, essa condição não é trivial de ser aplicada, visto que gera-se a seguinte sequência de afirmações:

$$\Rightarrow V(x, y, a) = A \sin(nx) D \sin(my) (K' e^{ka} - K' e^{-ka}) = V_0$$

Coletando as constantes e definindo $C_{nm} = A \cdot B(K' e^{ka} - K' e^{-ka})$:

$$\Rightarrow C_{nm} \sin(nx) \sin(my) = V_0$$

A multiplicação de duas funções periódicas dessa forma nunca será constante. Portanto, será preciso extrapolar o problema e considerar que a função potencial é uma função periódica ímpar tanto em x , quanto em y , formando uma espécie tabuleiro de xadrez com largura de posição a no espaço:

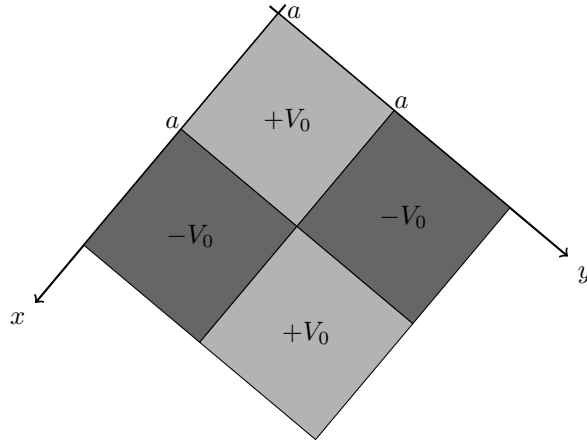


Figura 2: Extrapolação do Potencial além de $x = y = z = a$.

3.1 Resolução Numérica do Problema

3.1.1 Comportamento Numérico da Solução

3.1.2 Simulação em *Software*

4.1 Exemplos

- $N_1 = 3$;
- $N_2 = 4$;
- $N_3 = 1$;
- $N_4 = 8$;
- $N_5 = 1$;
- $N_6 = 0$.

*

$$\begin{aligned} a_{11} &= a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21} & a_{12} &= a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22} \\ a_{21} &= a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21} & a_{22} &= a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22} \end{aligned} \tag{12}$$