1 丘维声《群表示论》有限群部分读后感与使用说明

1.1 前言

读代数，虽然迷茫的时候比学分析还要迷茫，但是研究结构这件事情比估计一点什么东西确实更让初学者享受。这里记录下我的一些感受或者是现在这个阶段的认识或者是辅助理解的 notes，如果感兴趣的话总能获得些什么，对我也是一个简单的梳理。(Inspiration from loong, 而且之前也有朋友给我留言说开设这个“推荐书籍”的栏目。)

丘老这本书延续了高等代数“废话很多”的优良（相对的）传统，特别适合我这种代数初学者。有限群是前五章的内容。这本书的主线非常清晰，就是到处找有限群的不可约表示。丘老试图展现出整个探索过程以及问题导向，看书如听课，而这并不是常常奏效的，(因为很可能读者是条咸鱼就是说)，因为有的时候真的会有些突兀。比如在讨论有限维单代数向它极小左理想做直和分解的时候，感兴趣的读者可以去看一下，真的有点流汗黄豆。总体来说还是很精彩的！

可以搭配丘老的网课，bilibili 大学缺了第二章的（好像是），我有全集的网盘，待会儿链接扔下面。

1.2 准备知识

很少，只需要读过高等代数和抽象代数群的部分。因为这本书把 G 的表示扯到群代数 $K[G]$ 上搞的，所以也需要环和模的一些认识。不过我都是现补的，问题不大。

1.3 我参考的

[1]Pierre Colmez 的《分析与代数原理（及数论）》的有限群表示论部分。确切的说，老师原意是让我们读这个，我太笨了看不懂。很简略（刚刚突然发现习题好多！）。但学完了之后再看还是觉得挺 trivial 的。附录里面有 $GL_2(\mathbb{F}_q)$ 和 S_n 的例子。

[2] 薛航老师的 note:《中国科学院暑假学校讲义: 群表示论的一些小知识》。我无数次的点开这个 note，每次都有新的收获。然而它并不是以非常书面的语言写的，可能不太符合一些人的口味。但它给我的帮助确实很大。

[3] 一个 google 出来的 note：Representations of $GL_2(\mathbb{F}_q)$ *and* $SL_2(\mathbb{F}_q)$, and some remarks about $GL_n(\mathbb{F}_q)$. 它有一个简洁的版本，我也会把链接扔出来。我只读了 $GL_2(\mathbb{F}_q)$ *and* $SL_2(\mathbb{F}_q)$ 的部分，没有完全懂但还是有帮到我，换个视角提高观点，相辅相成吧（纯粹是感受感受)。

[4]GTM 129: 只看了一下它怎么讲 $GL_2(\mathbb{F}_q)$，叙述中稍微有一些 motivation 的东西。发现它前面还有 S_n 和 A_n 的表示，应该是用了新的方法。有空读。

下面会具体提到。

1.4 内容介绍

1.4.1 Chapter 1: 群表示论的基本概念与初步

第一章介绍了基本概念，举了几个简单的例子。通过群表示论研究群就像照镜子一样研究群作用（Cayley 定理总学过吧）。值得一提的是其他所有的书在证明 Maschke 定理的时候都是构造 G 不变正定 Hermitian 二次型，这本书是直接搞矩阵：

Proposition 1.1. 对 $\forall$ 非平凡 G 不变子空间 U, 取它的补空间 U' 与 projection 映射 P_U，使得 $U = \mathrm{Ker}P_U$,$U' = \mathrm{Im}P_U$, 取映射

$$B = \frac{1}{|G|\,1}\sum_{h\in G}\varphi(h)P_U\varphi(h)^{-1},$$

$\mathrm{Im}B$ 就是我们要找的 G 不变补空间。

Remark. 考虑这两个方法有什么联系？（对我来说这个 concrete 的结果更让人踏实一些。）

然后讲个交换群的不可约表示:$G \cong \hat{G}$, 最后介绍了一些非 Abel 群的不可约表示构造方法（比如通过商掉换位子群找不可约 1 次复表示啊，不过都是浅尝辄止）。这里有不少习题是之后用到的, 比如: 1.3.1 可以找到不少不可约表示，1.3.6 就是对单环 $M_n(D)$, 其中 D 是除环，的极小左理想的直和分解。

1.4.2 Chapter 2: 有限维半单代数

第二章直接把 G 的表示扯到群代数 $K[G]$ 上搞，线性表示就变成了研究 $K[G]$ 的左模。左正则表示变成研究左正则 $K[G]$-模 $K[G]$ （丘老聊的是更一般的半单代数的结构），子表示的直和就是子模直和，表示等价就是模同构。简单来说就是包含更多的信息和结构。

读懂这部分我补了不少环和模的知识，不断回顾一些基本的定理和概念。（实际上我不太懂范畴，所以呢只是“沿途观光”，诱导表示同理）最核心的定理就是说明有限维半单代数的极小双边理想（一堆有限维单代数）分解，然后把有限维单代数分解为极小左理想的直和（用到 Wedderburn 定理，真是简洁呐，还把维数上的问题全搞定了）:

Theorem 1. 设 A 是域 K 上的有限维半单代数，A 到它的极小左理想的一个直和分解：

$$A = L_{11} \oplus \cdots \oplus L_{1m_1} \oplus \cdots \oplus L_{s1} \oplus \cdots \oplus L_{sm_s}$$

其中 $L_{ij} \cong L_{kt}$ 当且仅当 $i = k$. 令 $\forall i$

$$\begin{aligned} A_i &= L_{i1} \oplus \cdots \oplus L_{im_i}, \\ D_i &= \mathrm{Hom}_{A_i}(L_{i1}, L_{i1}), \\ n_i &= \dim_{D_i}(L_{i1}), \\ \tilde{n_i} &= \dim_K(L_{i1}), \end{aligned}$$

则 $m_i = n_i$, 从而

$$\dim_K(A) = \sum_{i=1}^{s} n_i\tilde{n}_i$$

这里 Schur 引理也发挥了重要的作用。最后讲了如果是代数闭域有什么更进一步的结果，比如共轭类和不等价不可约表示一一对应，且构成 $Z(K[G])$（环 $K[G]$ 的中心）的基。这里很多维数的结果在学了特征标之后都是 trivial 的，但是它讲了结构（分解什么的），我会感觉更加完整。最后举了一些例子，虽然在没有用特征标的时候处理起来着实是有些不易，但还是有益的。

1.4.3 Chapter 3: 群的特征标

毫无疑问如果上来就讲特征标，很快就能感受到它的魅力和威力。虽然是丘老的书，我还是想感慨一句这么晚聊特征标有些遗憾。由于之前都在讲 $K[G]$, 所以就考虑把 G 上的特征标“线性的”扩充到群代数上。我们可以得到上一章研究了很久的本原中心幂等元的表示（都是复数域）:

$$e_i = \frac{\chi_i(1)}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_i(g)}g$$

和俩正交关系:（我懒得打了）

Remark. 尝试直接通过代数变形得到第二正交关系。

最核心的就是知道了可以通过算算数确定它是一个不可约表示，并且知道了一个分解:

$$V \simeq \bigoplus_{W\in Irr(G)}(\chi_W,\chi_V)W$$

作为第二正交关系的一个应用，我么可以求出 $C[G]$ 中任一元素的所有系数:

Theorem 2 (反演公式)**.** *有限群 G，单位元素为 1. 设 $A=\sum_{g\in G}a_g g\in\mathbb{C}[G]$, 则对 $\forall g\in G$*

$$a_g = \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\chi(Ag^{-1})(\chi(1))$$

（这玩意长得真好看啊）。更多的信息可以读 *stein* 的 fourier analysis, 或者 note[3]。最后讲了双传递作用和 Bunside 可解性定理作为两个应用。最后一部分用到了有限生成模的一些性质（我不太熟）证明 $\forall i,\ \chi(1)\,|\,|G|$，不过很快我们就会有更进一步的结果，我就没读。

在“[3]note”和“[2] 薛航老师的 note”里面，有一般的有限群上的 Fouier theory, 这在 Weil 表示里面起到了关键的作用。

Theorem 3 (有限群的 Peter Weyl 定理)**.**

$$\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_{\pi}\pi\otimes\pi^\vee$$

1.4.4 Chapter 4: 群的表示的张量积和直积的表示

非常严谨的定义了张量积, 为下一章做准备。(我之前没接触过这个结构, 这里的证明非常清晰! 太感动了!)。然后讨论了俩模的外张量积（群的直积）上的表示的不可约性。这里有一个很精彩的结果:

$$\forall i,\ \chi(1)\mid[G:Z(G)]$$

1.4.5 Chapter 5: 诱导表示和诱导特征标

(ψ,W) 为群 $H<G$ 的一个 K 表示，我们称 $(K[G],K[H])$-双模 $K[G]$ 与左 $K[H]$-模 W 张量积:$K[G]\otimes_{K[H]}W$ 为 W 诱导模，记为 W^G, 表示称为诱导表示。

Remark. 这和其他书上的定义：是 G 在 $\mathrm{Ind}_H^G := \{\varphi: G\mapsto V, \varphi(hx)=h\cdot\varphi(x),\ \forall h\in H,\ \forall x\in G\}$ 为什么一样？你可以给出他们的基么?

在研究过张量积的运算 (From Chapter 4) 之后, 很多东西都是显然的, 比如诱导表示的传递性 (就不用摊开来算了)。最重要的结果毫无疑问是 Frobenius 互反律和 Mackey 子群定理:

Theorem 4 (Frobenius 互反律)**.**

$$(\mathrm{Ind}_H^G \mu, \chi)_G = (\mu, \mathrm{Res}_G^H \chi)_H$$

由此很容易得到对有限群 G 的所有不可约复表示的次数的最大者（记为 $m(G)$）的估计:

Proposition 1.2.

$$\forall H < G, m(H) \leq m(G) \leq [G:H]m(H)$$

Remark. 或者你可以尝试构造同构（我还在理解这玩意，[3] 里有详细的描述）: $H < G, (\pi, V)$ 是 H 的表示，(τ, U) 是 G 的表示, 则有:

$$\mathrm{Hom}_G(U, \mathrm{Ind}_H^G V) \simeq \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_G^H U, V)$$

Theorem 5 (Mackey 子群定理)**.** *对有限群 $G, L, H < G, g_1, g_2, \cdots, g_t$ 为其双陪集代表系，令 $L_i = L \cap g_i H g_i^{-1}, \sigma_1, \sigma_2$ 分别为 L, H 的复特征标，则:*

1°

$$\mathrm{Res}_G^L(\mathrm{Ind}_H^G \sigma_2) = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{Ind}_{L_i}^L(\mathrm{Res}_{g_i H g_i^{-1}}^{L_i} \sigma_2^{g_i})$$

2°

$$(\mathrm{Ind}_L^G \sigma_1, \mathrm{Ind}_H^G \sigma_2)_G = \sum_{i=1}^{t} (\mathrm{Res}_L^{L_i} \sigma_1, \mathrm{Res}_{g_i H g_i^{-1}}^{L_i} \sigma_2^{g_i})_{L_i}$$

Remark. 你可以找到同构么?

Proposition 1.3 ($GL_2(\mathbb{F}_q)$)**.** *如果注意到 $GL_2(\mathbb{F}_q)$ 的 Bruhat 分解 $GL_2(\mathbb{F}_q) = B \amalg B\omega B$，运用上面两个定理很容易得到:*

$$\mathrm{dimHom}_G(I(\chi_1, \chi_2), I(\mu_1, \mu_2)) = \delta_{\chi_1,\mu_1}\delta_{\chi_2,\mu_2} + \delta_{\chi_1,\mu_2}\delta_{\chi_1,\mu_2}$$

这样子前三类不可约表示就都涵盖了。接下来只剩下 $\frac{1}{2}(q^2 - q)$ 个不可约表示，（构造出来了直接算我也会算啊），[4] 有一个 motivation，[3] 靠特征标直接算明白了，[2] 讲了 Weil 表示构造出的尖表示，好神奇好想搞懂。之后再说啦。

回到书里。习题 5.4 又多又难！里面还有 Clifford 定理，之后会有用，揭示了不可约表示的产生方式。然后的主要工作就是说明什么样的群是 $M - group$（每个不可约表示都是单项表示），和 Brauer 定理:

Theorem 6. *复数域 K（或者对 $charK = 0$ 的同时是所有有限群 G 的子群的分裂域 K），类函数都可以表示为其初等子群的 1 次特征标的诱导特征标的整系数线性组合。*

以及一些应用以及 Artin 定理。我只是能勉强读懂证明并且难窥其思想, 并且还有不少疑惑之处。

1.5 $GL_2(\mathbb{F}_q)$

1.6 相关链接

[1] 丘老的视频和书: 链接: https://pan.baidu.com/s/1ToMn07L9LU7rZBT-N24MvQ 提取码: 521h

[2] 薛航老师的 note:http://www.math.ac.cn/xshd/hyyzt/201902/t20190201_475367.html

[3] 一个 google 出来的 note：https://arxiv.org/pdf/0712.4051.pdf

[4] 简洁版本 https://www.imsc.res.in/ amri/GL2p.pdf