Hecke Theory and Jacquet Langlands

数学学院 2020201471 朱祉琪

一、摘要:[1]

我们将从自守形式的角度定义 L 函数并且讨论它的基本性质: 解析延拓与函数方程. L 函数本身蕴含着许多信息, 比如通过 L 函数的基本性质来检测自守形式是否是尖的 (cuspidal), 与数论信息的联系等. 本文由较为熟悉的由 Hecke 和 Tate 建立的关于 GL_1 的理论 ([HX22]) 引入, 通过**类比**的方法介绍与学习了 GL_2 的理论. 这里我们由经典的模形式引入 ([MC16]), 定义并解释了 adelic 自守形式 ([JB15]), 阐述了其对应的 L 函数的相关性质. 这里我们主要跟随了 Godement, Jacquet 和 Langlands 的相关文献 [JL70][GJ72].

实际上, 在 GL_1 的例子中, 傅里叶分析的简介建立在群的可交换上, 同时群 GL_2 表示的分类和实现 (realization) 也起到了基本的作用, 这也体现了**对称**.[2]

二、GL_1 by Hecke and Tate:

取数域 F 和它的 Adele 环, 记为 $\mathbb{A}_F$.[3]定义 GL_1 的**自守表示**是 $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)$ 的一个出现在 $L^2(\mathrm{GL}_1(F)\backslash\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F))$ 里的不可约酉表示. 通过对上述函数空间作为 $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)$-模的直积分 (direct integral) 分解:

$$L^2\left(\mathrm{GL}_1(F)\backslash\mathrm{GL}_1\left(\mathbb{A}_F\right)\right)=\int_{\mathrm{GL}_1(F)\backslash\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_F)}^{\oplus}\psi(g)$$

其中 ψ 是酉的 Hecke 特征, i.e. $\psi: F^\times\backslash\mathbb{A}_F^\times\to S^1$. 所以此时 Hecke 关于 L 函数的结果可以用 Hecke 特征来表述. 具体的, 对于一个酉的 Hecke 特征 ψ, 我们可以做以下分解:

$$\psi=\prod_v\psi_v,$$

[1]**文章还未完整写完, 有不少可以扩充、修改与补全的地方, 未经允许请勿外传.**

[2]**类比**还体现在非常多的地方, 比如不同局部之间的**类比**, 局部和整体的**类比**. **一切尽在不言中.**

[3]关于 $\mathbb{A}_F$ 构造这里不多做说明. 实际上, 我们需要学习对数域每一个位的完备化, 这可以由对于 $\mathbb{Q}$ 每一个位的完备化学习得到. 而在 $\mathbb{Q}$ 的 nonarchimedean place 上的完备化可以由 archimedean place 的完备化过程, 即对不等价的范数构造柯西序列的商, **类比**得到. 文章努力做到 self-contained 但是笔者实在是无暇从第一层开始搭积木. 下文中出现的 F_v 即代表对位 v 完备化的扩域. 对于 $\mathbb{A}_F$: 这是一个限制直积.

这是关于限制直积 $(\mathbb{A}_F)$ 的特征的结果, $\psi(F^\times)=1$ 说明特征由几乎所有的 ψ_v 唯一决定. 这里 ψ_v 是 $F_v^\times$ 的特征, 且对几乎所有的 nonarchimedean 位 v, 都有 ψ_v 非分歧.

Example 1. 这个例子给出了对局部域特征的描述. 设 F 是局部域 (仅在此例中), χ 是 $F^\times$ 的特征. 如果 F 是 nonarchimedean 局部域, $\chi\left(\mathfrak{o}_F^\times\right)=1$, 则我们说 χ 非分歧. 若不然, 我们能找到正整数 e 使得 $\chi\left(1+\varpi^e\mathfrak{o}_F^\times\right)=1$, 这里 ϖ 是任意一个素元 (因为 χ 连续). 这样的正整数里最小的那个称为 χ 的导子.

1. $F=\mathbb{R}$. 所有拟特征 (仅把它当作到 $\mathbb{C}^\times$ 的映射) 为

$$\chi(x)=\left(\frac{x}{|x|}\right)^\epsilon|x|^s,\quad \epsilon=0,1,\quad s\in\mathbb{C}.$$

它是酉特征当且仅当 $s\in\sqrt{-1}\mathbb{R}$. $F=\mathbb{C}$ 的情形类似.

2. F 是 nonarchimedean 局部域. 所有的非分歧拟特征都能写成

$$\chi(x)=|x|^s,\quad s\in\mathbb{C}.$$

它是酉特征当且仅当 $s\in\sqrt{-1}\mathbb{R}$. 所以非分歧特征由它在 ϖ 上的值唯一确定. 我们经常记 $\chi(\mathfrak{p})=\chi(\varpi)$.

3. 一般的, 如果 F 是 nonarchimedean 局部域, χ 是 $F^\times$ 的拟特征, $cond\chi=e$, 则

$$\chi(x)=|x|^s\chi_0(x),\quad s\in\mathbb{C}.$$

这里的 χ_0 是 $\mathfrak{o}_F^\times/1+\varpi^e\mathfrak{o}_F$ 的特征, 所以是有限阶的. χ 是酉特征当且仅当 $s\in\sqrt{-1}\mathbb{R}$.

任取有限集合 S 包含一些位, 使得如果 $v\notin S$, 那么 v 是 nonarchimedean 位且特征非分歧. 定义:

$$\chi(v)=\psi_v(\pi_v),\quad \text{where } \varpi_v \text{ is } a \text{ uniformizer}$$

定义部分 Hecke L 函数:

$$L^S(s,\chi)=\prod_{v\notin S}\left(1-\psi_v\left(\varpi_v\right)N\mathfrak{p}_v^{-s}\right)^{-1}$$

若 S 恰为 Hecke 特征给出的, 则省略 S(或者记为 S_ψ).

Theorem 1 (Hecke)**.** *对 $L(s,\chi)$, 我们有:*

(1) 在实部大于 1 时收敛;

(2) 在全平面上有亚纯延拓, 如果 χ 不平凡则为整函数, 否则会在 1 处有单极点.

(3) 存在常数 A, 模为 1 的 *Gauss* 和 $W(\chi)$ 与 *gamma* 因子 $\Gamma(s,\chi)$ 使得

$$R(1-s,\chi^{-1}) = W(\chi)R(s,\chi),\ \textit{where}\ R(s,\chi) = s(s-1)A^s\Gamma(s,\chi)L(s,\chi)\ \textit{is entire.}$$

Tate 定义了 Adele 环上的 Schwartz-Bruhat 函数类并给出了傅里叶变换[4]：对于 ψ 是酉的 Hecke 特征, 定义 ζ 函数如下:

$$\text{(global) } \zeta(f,\psi,s) = \prod_v \zeta\left(f_v,\psi_v,s\right)$$

$$\text{(local) } \zeta\left(f_v,\psi_v,s\right) = \int_{\mathrm{GL}_1 F_v} f_v\left(\alpha_v\right)\psi_v\left(\alpha_v\right)\left|\alpha_v\right|_v^s \mathrm{d}^\times \alpha_v$$

通过在 $M(1,F)$ 和 GL_1 上的调和分析我们有

Theorem 2 (Tate)**.** [5] $\zeta(f,\psi,s)$ 在全平面上有解析延拓, 如果 ψ 不平凡则为整函数, 否则会在 $0,1$ 处有单极点. 更进一步的, 满足函数方程

$$\zeta(f,\psi,s) = \zeta(\hat{f},\psi^{-1},1-s).$$

二、GL_2 by Jacquet and Langlands:

(一) * 动机与分析上的准备[6]

就像我们在 GL_1 做的那样, 我们希望能够做出**类比**, 找到 GL_2 的自守形式和 L 函数之间的关联. 我们可以很容易对经典的全纯尖形式 (holomorphic cusp form) 做出对应:

$$L(f,s) = \frac{1}{(2\pi)^s}\Gamma(s)\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s} = \int_0^\infty f(iy)y^{s-1}\mathrm{d}y, \quad \text{for } f\in S_k(N,\psi)$$

[4]由于 nonarchimedean 处完备化后的域的拓扑是完全不连通的, 所以我们直接定义, 其上的光滑函数为局部常值函数. 我们往往考虑的是其上的光滑紧支函数, 也就是函数是局部常值且函数有紧支集. 选取加法特征后就可以定义局部的傅里叶变换. 而对于其限制乘积 ($\mathbb{A}_F$), 由此我们可以取定乘积测度并定义相应的傅里叶变换. 这里的收敛性论证和加法特征、测度的选取可见 Tate 博士论文.

[5]事实上, 定理 2 包含 1, 由于 $\prod_{v\notin S_\psi}\zeta\left(f_v,\psi_v,s\right) = L(s,\chi)\prod_{v\notin S_\psi}\chi\left(\partial_v\right)^{-1}N\left(\partial_v\right)^{s-1/2}$, 其中 ∂_v 是差分理想.

[6]这一节是纯技术性的, **即与类比和对称没有直接联系的. 可以跳过!**

下面用 adelic 的语言叙述这件事, 可以帮助我们定义 L 函数. 记

$$\phi_f(g) = f(g_\infty(i))j(g_\infty, i)^{-k}\tilde{\psi}(k_0), \quad g = \gamma g_\infty k_0 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) = \mathrm{GL}_2(F)(\mathrm{GL}_2)_\infty^+ K_0,$$ [7]

Example 2. 这两个例子通过 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 的情形, 具体解释了这样做的理由. 由强逼近定理, 我们可以知道对任意的紧开集 (仅考虑 nonarchimedean 部分)K, 有分解

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})K$$

取紧开群 K 如下:

$$K_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}) : c \equiv 0 \mod N \right\}$$

那么对任意的正整数 N, 就会有以下自然同构 (一般的到 adelic 的):

$$\Gamma_0(N)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \simeq Z\left(\mathbb{A}_\mathbb{Q}\right)\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2\left(\mathbb{A}_\mathbb{Q}\right)/K_0(N)$$
$$\Gamma_0(N)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2\left(\mathbb{A}_\mathbb{Q}\right)/K_0(N)$$

如果把 archimedean 的分量增添到 $K_0(N)$ 中 (比如 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$), 就会有:

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ K_0(N)$$

我们看看应用到模形式中会有什么样的结果. 对经典的水平为 N 权为 $k \leq 2$ 的 nebentypus 特征为 χ(即同余子群的有限指数特征) **模形式** $f(z)$, 即满足:

- f 是上半平面的全纯函数.
- f 在尖点处全纯, 且对 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$,

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \chi(d)(cz+d)^k f(z)$$

与 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ 上的自守形式做联系和与 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ 上的自守形式做联系的过程[8]是相似的.

---

[7] $j(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) = cz + d, \tilde{\psi}$ 定义见下文例子.

[8] 略去.

我们取 $K_0(N)$ 作为紧开群如上构造函数, 其中函数 ψ 是特征 χ 的一个 adelization. 具体的, 为了使 ϕ_f 是 $K_0(N)$ 不变的, 我们定义特征 χ 如下: 由强逼近定理:

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{+} = \mathbb{Q}^{\times} \cdot \mathbb{R}_{>0}^{\times} \cdot \prod_p \mathbb{Z}_p^{\times}$$

通过把 $\mathbb{Z}^{\times}/N\mathbb{Z}^{\times}$ 实现成 $\prod_p \mathbb{Z}_p^{\times}$ 的商, 给出 χ 的在 $\mathbb{R}_{>0}^{+}$ 上平凡的逆 ω. 定义

$$\lambda\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \omega(d) = \prod_{p|N} \omega_p(d_p)$$

其中 d_p 代表 d 的 $\mathbb{Q}_p^{\times}$ 分量. 我们可以说明: ϕ_f 是良好定义的. 它是中心特征为 ω 的一个自守形式, 且是一个尖形式, 即 $\phi_f \in \mathcal{A}_0(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}), \omega)$. 根据定义, 我们需要验证:

- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ 左不变, 且关于 $K = K_0(N)\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ 有限[9].
- 检验中心的作用和泛包络代数 (Hecke 代数) 的作用;
- (cusp) 对任意的 $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$,

$$\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}} \phi_f\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \mathrm{d}x = 0.$$

回到 ϕ_f. 为了方便起见, 我们取 $N = 1$ 与平凡的 ψ, 同时把数域都取成 $\mathbb{Q}$(这是毫无影响的). 对实数 $y > 0$,

$$L(f,s) = \int_{\mathbb{Q}^{\times}\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\times}} \phi_f\left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) |y|^s \mathrm{d}^{\times} y.$$

取加法特征 τ, 那么 $\phi_f\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)$ 作为 x 的函数有傅里叶展开:

$$\phi_f\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = \sum_{\lambda\in\mathbb{Q}} \phi_{f,\lambda}(g)\tau(\lambda x),$$

[9]由于对 $k = k_0 k_\infty \in K$, $\phi_f(gk) = e^{-ik\theta}\lambda(k_0)\phi_f(g)$.

其中

$$\phi_{f,\lambda}(g)=\int_{\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times}\phi_f\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)\overline{\tau(\lambda x)}\mathrm{d}x$$

是 $\phi_f\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)$. 的取决于 g 的 λth 傅里叶系数. 取 $x=0$. 定义 ϕ_f 的 1st 傅里叶系数,

$$W_{\phi_f}(g)=\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}}\phi_f\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}g\right)\overline{\tau(x)}\,\mathrm{d}x$$

关注到 adelic 自守形式的性质, 可以得到:

$$\phi_f\left(\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\sum_{\lambda\in\mathbb{Q}^\times}\phi_{f,\lambda}\left(\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\sum_{\lambda\in\mathbb{Q}^\times}W_{\phi_f}\left(\begin{pmatrix}\lambda y & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

带回 $L(f,s)$ 的表达式, 我们得到:

$$L(f,s)=\int_{\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times}\sum_{\lambda\in\mathbb{Q}^\times}W_{\phi_f}\left(\begin{pmatrix}\lambda y & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)|y|^s\mathrm{d}^*y=\int_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\times}W_{\phi_f}\left(\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)|y|^s\mathrm{d}^*y.$$

由此 $L(f,s)$ 是 ϕ_f 的第一位傅里叶系数沿 $\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 的 adelic Mellin 变换[10]

(二) 表示论的结果

对水平为 N 权为 $k\le 2$ 的 nebentypus 特征为 χ(即同余子群的有限指数特征) 的全纯模形式 $f(z)$. 更进一步, 假设它是尖形式且是 Hecke 算子 T_p, $p\nmid N$ 的一个特征函数. 取它所对应的 adelic 自守形式 $\phi_f\in\mathcal{A}_0(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})),\omega)$. 表示论的结果告诉我们:

Theorem 3. ϕ_f 出现在一个唯一的不可约可容许自守表示 π_f 中.

其中 π_f 可以被表示为一个限制乘积 $\otimes_v'\pi_{f,v}$, $\pi_{f,v}\in\mathbf{Rep}(\mathrm{GL}_2(F_v))$.[11]

为了解释这个结果并为最后的定理做铺垫, 我们先需要知道 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 和 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 的不可约可容许表示的分类以及在函数空间上的实现 (Whittaker 模型). 这里只对 nonar-

[10]这样做的好处 (我理解的) 是: 可以推广到一般的群,$GL(1)$; W_{ϕ_f} 可以从表示论的角度得到 (即将看到) 并且; 形式统一, 由于这一段开头定义的 L 函数就是沿垂直半直线的 Mellin 变换, etc. 在具体的计算中, 我能感受到提出这些比较完整的理论之前, 数学家已经对具体的例子有比较清楚的认识. 我作为初学者来说, 感慨理论之美的同时多注意例子的计算, 观察例子之间的关联进行**类比和比较**.

[11]描述这些局部分量是比较困难但是是可行的, 这里不做说明.

chimedean 的情形稍作解释[12]. 对于 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$,

Theorem 4 (Kirillov model)**.** *记 π 是群的一个在无穷维向量空间 V 上的不可约可容许表示. 那么存在唯一一个空间 V', 其中的元素是 $\mathbb{Q}_p^\times$ 的复值函数, 且存在唯一一个群在 V' 上的表示 π', 使得对于任意的 $\xi \in V'$,*

$$\pi'\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\xi'(x) = \tau_F(bx)\xi'(ax) \quad \left(a, x \in \mathbb{Q}_p^\times, b \in \mathbb{Q}_p\right)$$

更进一步的, $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p^\times) \subset V' = \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p^\times) \cup \pi'(\omega)\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p^\times) \subset \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$.

记函数空间为 $\mathcal{K}(\pi)$, 表示称为 **Kirillov 表示**.

对每一个 $\xi \in \mathcal{K}(\pi)$, 考虑函数: $W_\xi(g) = \pi(g)\xi(1)$. 由这个映射以及上面的定理,

Theorem 5 (Whittaker space)**.** *记 π 是群的一个在无穷维向量空间上的不可约可容许表示. 那么存在唯一一个向量空间, 它是满足*

$$W\left[\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right] = \tau_F(x)W(g),$$

且是右不变的子空间.π 和群在线性空间上的右平移作用等价. 称为 Whittaker 空间.

通过傅里叶变换我们可以对每个 Borel 诱导表示与唯一的一个 Whittaker 函数相对应, 这里需要用到傅里叶变换. 由此我们完成了对其可容许不可约表示的分类与构造.

(三) Whittaker Models and L-functions

对 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ 我们声称其元素满足以下性质的函数空间:

- 对任意的 $x \in \mathbb{A}_F$,
$$W\left[\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right] = \tau(x)W(g)$$
,

- 对任意的 $z \in \mathbb{A}_F^\times$,
$$W\left[\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} g\right] = \psi(z)W(g)$$

[12]实的情形就是于 $(\mathfrak{g}, K)$ – module 理论, 这里更统一的理解方式是将 $U(\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}))$ 与 $C^\infty(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ 上的微分算子 (或者是函数分布做卷积) 等价. 不过都差不多. 对于 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 的情形, 我们一样不采用 Hecke algebra 来分类 (其实也容易看到关联, 而且可以把对函数空间的作用效果清晰地写下来), 由于直接考虑群在函数上的右平移作用会更为直观且方便我们最后模型的构造.

,

- W 是右 K 有限的, 对群的 archimedean 分量是解析的且是速降的, 即对任意的 $x \in \mathbb{A}_F$,
$$W\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = O(|x|^{-N}), \quad \text{for all } N$$
,

- 整体 Hecke 代数[13]在函数空间上的作用由右卷积给出.

是存在且唯一的. 实际上, 它可由每个位上的相应函数空间做限制乘积得到. 称该空间为 **Whittaker 空间**, 这样的表示为 **Whittaker 模型**.

通过尖形式 f, 我们已经找到了在该函数空间 (即其对应的 adelic 自守表示 π_f) 里的一个元素 W_{ϕ_f}. 由 Hecke algebra 的右卷积作用可以生成一个函数空间. 记该空间 $W(\pi_f)$. 可以说明 $W(\pi_f)$ 恰为一个 Wittaker 空间!

最后我们就可以看到与 Tate 形式上相近的结果. 定义 **(局部)ζ 函数**, 而 L 函数只是其中的特例. 对于 $\mathrm{GL}_2(F_v)$ 的一个不可约可容许表示 π_v, 给定 $F_v^\times$ 的酉特征标 χ, $g \in \mathrm{GL}_2(F_v)$, $W \in W(_v)$. 定义:

$$\zeta(g, \chi, W, s) = \int_{F_v^\times} W\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right] \chi(a)|a|^{s-1/2} \mathrm{d}^\times a.$$

Theorem 6. *局部 ζ 函数在某个右半平面收敛. 且*

1 存在存在 $W^0 \in W(\pi_v)$ 使得 $L(\chi \otimes \pi_v, s) = \zeta(1, \chi, W^0, s)$ 是一个欧拉因子[14], 并且 $\frac{\zeta(g,\chi,W,s)}{L(\chi\otimes\pi_v,s)}$ 对任意的 g, χ, W 是整的.

2 有全平面上的解析延拓, 并满足函数方程:

$$\frac{\zeta(g, \chi, W, s)}{L(\chi \otimes \pi_v, s)} \varepsilon(\pi_v, \chi, s) = \frac{\zeta\left(wg, \chi^{-1}\psi_v^{-1}, W, 1-s\right)}{L\left(\chi^{-1}\psi_v^{-1} \otimes \pi_v, 1-s\right)}$$

其中 ψ_v 是 π_v 的中心特征.

adelic 自守形式 π 对应的 L 函数就是其所有局部因子 π_v 的局部 L 函数乘积, 由此我们就通过**类比和改进**, 得到了由自守形式 (模形式) 定义的 L 函数以及它们的解析延拓和函数方程.

---

[13]前文没定义过.

[14]对 nonarchimedean 位置 v, 欧拉因子意味着形如 $\frac{1}{P(|\varpi_v|^s)}$ 的因子, 其中 P 表示常数项为 1 的多项式; 对 nonarchimedean 位, 其中包含 Γ 因子.

参考文献

[JB15] Jeremy Booher, Viewing Modular Forms as Automorphic Representations, 2015.

[JL70] H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic forms on GL(2), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114, 1970.

[GJ72] Godement, R., Jacquet, H.: Zeta Functions of Simple Algebras. Lecture Notes in Mathematics, vol.260. Springer,1972.

[HX22] Hang Xue, 南京大学暑假学校讲义: 数论选讲, 2022.

[JT50] J.T. Tate. Fourier Analysis In Number Fields and Hecke's Zeta-Functions. PhD thesis, Princeton, 1950.

[MC16] Sander Mack-Crane, Hecke Theory and Jacquet Langlands, 2016.

我所知道的菲尔兹奖获得者的工作和故事

数学学院 2020201471 朱祉琪

一、前言:[1]

[2]即使是在落笔之时, 我还是觉得我的选择非常的不妥. 因为对于一位志向于纯粹数学——特别是数论——的学生, 泛泛而谈一些"故事"一定是不妥的. **Fields 得主**陶哲轩在他的主页上写过, 一位好的数学工作者一定是从具体的问题入手的, 或许需要多提提 Serre, Deligne 这样的名字让自己的文章有更多人看, 但很少有人直接面对大的图景, 就像 Grothendieck 在代数几何, Langlands 在表示论中做的那样. 就个人的经验而言, 我感觉到数学里非常美妙的事情就是建立不同范畴之间的对应, 或者说, 对我们所关心的对象做"自然的"参数化, 比如变换下的函子性 (functoriality), 局部整体的相容性 (local-global compatibility) 等. 不过我在感慨理论之美的同时, 会更提醒自己要多注意例子的计算, 脚踏实地地做数论, 比方说把 GL_1 和 GL_2 的问题算明白.

以上是我总的观点, 基于此我当然也必须聊一些**真数学**, 切不可只聊"故事"不聊"本事"[3] . 为魏老师写的 Hecke Theory and Jacquet Langlands 已经让我焦头烂额了, 倘若换成所有得主的获奖成果和成长经历那更是遥不可及, 我也没胆量置喙, 甚至连第一位得主 Ahlfors 的"远古"工作, 我都只是瞻仰许久而难窥其全貌. 况且若是只论工作, Fields 得主的工作只是所有好的数学中的一部分, 获奖的更是, 同时对我最重要的也只是数学本身罢. 踌躇再三, 我打算**仅择两位得主, 聊聊我学过的知识和 Fields 得主工作的相关联之处**. 这也未必是得奖的工作, 也有不少是继续的工作, 我想他们的数学魅力是共同的. 不管怎样, 我想这是我能做到最真诚的表达和最诚挚的敬意了. 其中有很多工作承上启下的, 许多人名没有单列章节.

[1]**文章还未完整写完, 有不少可以扩充、修改与补全的地方, 未经允许请勿外传.** 文章中必要的定义和记号都会给出解释, 但是由于实在是太多了, 我努力用"标准"的记号.

[2]心平气和地.

[3]无论如何也不能丢王老师的脸, 写出我都不愿意读的东西. 或者说, **故事好听但千人千面, 本事晦涩但受益终生**. 我读过不少好故事, 比如 Fields 得主 J.P. Serre 少年时的学数学动机. 他的父母都是化学家, 他的妻子也是. 在他十四五岁时, 他常常翻阅研读他母亲的微积分课本. 可是他一开始并不喜欢 ϵ-δ 的话术. 一直到很久之后, 他才知道光是做数学也有人会给你薪水. 在之后就是参加数学竞赛、考入巴黎高师云云. 但是我再知道他的童年, 再了解他拿的奖有多么的重量级, 也不会对他在代数拓扑、代数几何和代数数论上的贡献有任何的帮助. 还不如让我去学学怎么算 S^n 的同伦群呢!

二、菲尔兹奖获得者的工作和故事:

(一) Lars Ahlfors:

Ahlfors 生于芬兰赫尔辛基, 他是极具天赋且努力的数学工作者. 他的研究方法带有深刻的几何洞察力和非常精细的分析技巧, 同时能连结多个领域的核心问题. 实际上这也是真正大家的共性. 1936 年他因在复分析上的研究获奖.

他的代表作之一是于 22 岁完成的博士论文 [LA29], 其中证明了 Denjoy 假设.[4]

经典的 Schwarz 引理提供了由单位圆盘到自身, 满足 $f(0)=0$ 的全纯映射的模长估计. Ahlfors 提供了推广 [LA38]:

Theorem 1 (Schwartz-Pick Lemma)**.** 对于全纯映射 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$, 对任意的 $z_1,z_2\in\mathbb{D}$,

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}\right|\le\left|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_1}z_2}\right|,$$

特别的, 对任意的 $z\in\mathbb{D}$,

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\le\frac{1}{1-|z|^2}$$

这个结果并不难证明, 但是如果考虑单位圆盘上的标准双曲度量, 引理告诉我们在在双曲度量意义下任何一个单位圆盘到自身的全纯映射是 1-Lipschitz 的. 更进一步的, 他把值域换成了 (包含原来的单位圆盘) 的满足一定几何条件的抽象空间, 就有:

Theorem 2 (Schwartz-Ahlfors-Pick Lemma 1938)**.** 对带有一个共形度量的高斯曲率 ≤ 1 的黎曼面 X, 和全纯的函数 $f:(\mathbb{D},\frac{4|\mathrm{d}z|^2}{(1-|z|^2)^2})\to X$. 那么对于任意的 $z,w\in\mathbb{D}$,

$$\mathrm{dist}_X(f(z),f(w))\le\mathrm{dist}_{hyp}(z,w).$$

1968 年陈省身和鲁永振对 Ahlfors 的 Schwarz 引理做了高维的推广, 定义域改为带 Poincare-Bergman 度量的单位开球, 值域改为高维满足全纯双截曲率为负的 Kähler 流形. Fields 奖得主丘成桐的推广容许了值域不是 Kähler 的情形.

他的代表作之三是关于拟共形 (quasi-conformal) 映射. 这是满足 Cauchy-Riemann 方程的共形映射的推广:

---

[4] 假设的陈述如下: 对于非常数的解析函数, 一个复数 z 称为是 asymptotic value, 如果存在一条连续的曲线走向无穷使得这个函数沿着这个曲线的极限就是 z. 对一个非常值整函数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, 若满足

$$\max_{|z|=r}\log|f(z)|=O(r^\rho),\quad r\to\infty,\ \text{for some } \rho>0.$$

那么 f 有至多 2ρ 个不同的有限 asymptotic values.

Definition 1 (quasi-conformal)**.** 对区域 $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$, 同态 $f : D_1 \to D_2$ 被称为拟共形 (quasi-conformal) 的, 如果

$$\mu_f = \sup_{z\in D_1} \left| \frac{\frac{\partial}{\partial \bar z} f}{\frac{\partial}{\partial z} f} \right| < 1.$$

特别的 f 是共形的如果 $\mu_f = 0$.

这个推广对后续复分析的发展印象深远. 这里简举定理一例 [AB60], 它后续对很多不同的领域都有重要的应用, 包括 Teichmüller 理论、低维拓扑等:

Theorem 3 (Ahlfors-Bers-Morrey 1960)**.** *对 $\mathbb{C}$ 上的一个有界可测函数 μ 且满足的 $||\mu|| < 1$, Beltrami 方程*

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} f(z) = \mu(z) \cdot \frac{\partial}{\partial z} f(z)$$

有唯一的满足如下条件的解 f: f 是拟共形映射且固定 $0, 1, \infty$.

同时, Ahlfors 也是第一个研究黎曼曲面的 Teichmüller 空间上的自然的 L^2 内积 Weil-Petersson 度量的人. 他还有更多重要的工作, 引领了单复变这个研究领域和更深的复几何的研究.

(二) 小平邦彦 (Kunihiko Kodaira):

小平邦彦的主要成就包括小平消灭定理 (使用了流形上的调和分析的手段), 复结构的形变理论和复流形的分类定理[5].1954 年他因在调和分析, 复代数几何上的研究获奖.

我们先简单介绍一下小平消灭定理. 对于一个带黎曼度量的紧定向实流形, 我们希望可以描述调和 p 形式: $\omega \in A^p(M)$, $d\omega = d^*\omega = 0$. 为此等价于考虑 Laplacian 算子:

$$\Delta_d \overset{\text{def}}{=} dd^* + d^*d : \ A^p(M) \to A^p(M),$$

的核 (kernel). 在此设定的 Hodge 定理告诉我们, 每一个 de Rham 上同调类有一个唯一的调和代表元:

$$\mathcal{H}^p(M) \overset{\text{def}}{=} \{\omega \in A^p(M) | \Delta_d \omega = 0\} \cong H^p_{dR}(M; \mathbb{R}), \quad p = 0, ..., m.$$

对 Hermitian 度量 g 的紧复流形 X, 类似地定义 $\bar\partial-$Laplacian $\Delta_{\bar\partial} : A^{p,q}(X) \to A^{p,q}(X)$

$$\Delta_{\bar\partial} \overset{\text{def}}{=} \bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial$$

[5]这个我不了解, 说是对代数几何有很大的进步. 不过前面俩我倒是仔细学过.

有 Hodge 分解如下:

$$\mathcal{H}^{p,q}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \in A^{p,q}(M) | \Delta_{\bar{\partial}}\omega = 0\} \cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X), \quad p, q = 0, ..., n.$$

由此考虑一个带 Hermitian 度量 g 的紧复流形 X, 度量是 Kähler 的等价于局部存在全纯的坐标 $(z_1, \ldots, z_n)$, 使得

$$z_i(p) = 0, \ g_{i\bar{j}}(p) = \delta_{ij}, \ \mathrm{d}g_{i\bar{j}}(p) = 0.$$

我们假设 (X^n, J, g) 是紧的 Kähler 流形, 这个时候相较于紧黎曼流形或者是 Hermitian 的情形, 调和形式和 Dolbeault 上同调有更好的形式. 我们可以改进 Hodge 分解如下:

Theorem 4 (Hodge decomposition for compact Kähler manifolds)**.** *记 Ω^p 代表全纯 $(p, 0)$-form. 我们有同构*

$$H_{dR}^r(X, \mathbb{C}) \cong \oplus_{p+q=r} H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X) \cong \oplus_{p+q=r} H^q\left(X, \Omega^p\right), \quad r = 0, 1, \ldots, 2n$$

以上分别代表 de Rham 上同调, Dolbeault 上同调和 Cěch 上同调. 同时

$$\overline{H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X)} \cong H_{\bar{\partial}}^{q,p}(X)$$

这本身在 Kähler 几何中有很重要的运用[6].

现在我们正式来陈述小平消灭定理. 回顾定义: 我们称一个实 $(1, 1)$-form 是正的, 如果它能够被写作 $\omega = \sqrt{-1}\sum_{i,j} a_{i\bar{j}} \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\bar{z}_j$, 且 $(a_{i\bar{j}})$ 是处处正定的. 一个线丛 L 是正的, 如果在 L 上存在一个 Hermitian 度量 h, 使得 $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{-1}\Theta(h)$ 是正的.

Theorem 5 (Kodaira-Nakano)**.** *对一个正全纯线丛 $L \to X$, 其中 X 是紧的 Kähler 流形*[7]*, 我们有*

$$H^q(X, \Omega^p(L)) = 0, \quad \text{for } p + q > n.$$

[6]举一例. 记 $\omega, \tilde{\omega}$ 是 X 上的在同一 de Rham 上同调类中的 Kähler 形式. 那么由 Hodge 分解 (具体的,$\partial\bar{\partial}$ 引理), 我们可以找到光滑函数 $\phi \in C^\infty(X; \mathbb{R})$, 使得 $\tilde{\omega} = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi$. 另一方面, 如果 ϕ 满足 $\tilde{\omega}$ 恒正, 这给同一个 Kähler 类定义了一个 Kähler 度量. 所以我们找到了同一 $[\omega]$ 上同调类的 Kähler 度量到 $\{\phi \in C^\infty(X; \mathbb{R}) | \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi > 0\}/\mathbb{R}$ 的一一对应. 由此我们将 Kähler 几何中的典范度量存在性问题转化为对 ϕ 解的存在性 (一般是一个非线性 PDE) 问题.

[7]下一个定理能够帮助我们弱化假设到紧复流形, 实际上此时可以推出它是 Kähler 的.

特别的, 对典范线丛 $K_X = \bigwedge^n (T^*X)$, 有

$$H^q(X, K_X \otimes L) = 0, \quad \text{for } q > 0.$$

由 Hodge 定理这等价于说明当 $p+q>n$ 是每个 L 值全纯 (p,q)-form 必须为零.

这可以用来证明带有正线丛的紧复流形都是 projective algebraic 的, 即存在全纯的嵌入映射 $\varphi : X \to \mathbb{CP}^n$ 使得 $\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) = L^{\otimes m}$, 对某个 $m>0$. 我们可以直接用消灭定理构造整体的截面, 当然我们也可以直接通过运用 Höemander L^2 方法解 $\bar\partial$ 方程来得到.

Kunihiko Kodaira 和 Donald C. Spencer 在**复流形和代数簇的形变理论**上有奠基性的工作. 我们这里同样选择用同调的方法对形变障碍进行描述, 具体地, Kodaira-Spencer 映射. Kodaira-Spencer 映射 (至少) 有两个几何上的解释: 用以描述向量场全纯提升中的障碍和复结构的一阶变分. 下面都会有表现.

Definition 2 . (B, b_0) 是带基点的流形, 定 义紧复流形 M_0 在 (B, b_0) 上的一个**形变**是形同 $M_0 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} (B, b_0)$ 的全纯映射组合, 使得

(1)$fi(M_0) = b_0$.

(2) 存在邻域 $b_0 \in U \subset B$, 使得 f 在其上是一个 **proper smooth family**[8].

(3)$i : M_0 \to f^{-1}(b_0)$ 是复流形的同构.

取定 $f : M \to B$ 为一个紧复流形的光滑映射族, $\dim B = n, \dim M = m+n$, 对任意的 $b \in B$ 记 $M_b = f^{-1}(b)$.

对任意的开子集 $V \subset B$, 记 $\Gamma(V, T_B)$ 是 V 上的全纯向量场空间.$T_f \subset T_M$ 是使得 $f_*v = 0$ 的全纯切向量子丛. 可以说明对任意的 $\gamma \in \Gamma(V, T_B)$, 可以取得 $\eta \in \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{A}^{0,0}(T_M))$ 使得 $f_*\eta = \gamma$. 对 M 的一个取定的可容许全纯局部坐标 (z_i, t_j)[9], 将 η 写作 $\eta = \sum_i \eta_i(z,t)\frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_j \gamma_i(t)\frac{\partial}{\partial t_j}$. 定义 Kodaira-Spencer 映射如下:

$$\mathcal{KS}(V)_f : \Gamma\left(V, T_B\right) \to H^1\left(f^{-1}(V), \mathcal{A}^{0,1}(T_f)\right), \quad \mathcal{KS}(V)_f(\gamma) = [\bar\partial\eta] \overset{\text{def}}{=} [\sum_i \bar\partial\eta_i(z,t)\frac{\partial}{\partial z_i}]$$

这是一个良好定义的 $\mathcal{O}(V)$-mod 同态. 由定义容易知道, 对 $\mathcal{KS}(V)_f(\gamma) = 0$ 等价于存在 $\eta \in \Gamma(f^{-1}(V), T_M)$ 使得 $f_*\eta = \gamma$.

[8]i.e. 一个 proper 的全纯映射并满足微分对于切空间是处处满的.

[9]对开 U, 如果 $f(U)$ 包含坐标卡 $(v_1, ..., v_n) :\ V \hookrightarrow \mathbb{C}^n$, $V \subset B$, 使得对任意的 i 有 $t_i = v_i \circ f$.

Example 1. 注意到对开区间 $V_1 \subset V_2 \subset B$, 有以下图表交换:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(V_2, T_B) \arrow[r, "\mathcal{KS}(V)_f"] \arrow[d, "\mathrm{res}"] & H^1(f^{-1}(V_2), \mathcal{A}^{0,1}(T_f)) \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\
\Gamma(V_1, T_B) \arrow[r, "\mathcal{KS}(V)_f"] & H^1(f^{-1}(V_1), \mathcal{A}^{0,1}(T_f))
\end{tikzcd}$$

取正向极限:

$$\mathcal{KS}_f : \Theta_{B,b} \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{V} \Gamma(V, T_B) \to (R^1 f_* T_f)_b \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{V} H^1(f^{-1}(V), \mathcal{A}^{0,1}(T_f)$$

可以说明一个紧复流形的形变 $M_0 \to M \xrightarrow{f} (B, b_0)$ 是平凡的当且仅当 $\mathcal{KS}_f : \Theta_{B,b_0} \to (R^1 f_* T_f)_{b_0}$ 是平凡的.

可以证明存在线性映射 $\mathrm{KS}_f : T_{b,B} \to H^1(M_b, T_{M_b})$ 使得以下图表交换:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(V, T_B) \arrow[r, "\mathcal{KS}(V)_f"] \arrow[d, "\mathrm{res}"] & H^1(f^{-1}(V), \mathcal{A}^{0,1}(T_f)) \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\
T_{b,B} \arrow[r, "\mathrm{KS}_f"] & H^1(M_b, T_{M_b})
\end{tikzcd}$$

这个线性映射对于每个形变的等价类是良好定义的. 对于一个形变 $\xi : M_0 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} (B, b_0)$, $fi(M_0) = b_0$, 定义它是有如下性质的:

(1) Versal (or complete): 如果 KS_ξ 是满射且对于每个复流形 (C, c_0), 映射:

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{Ger}}\left((C, c_0), (B, b_0)\right) \to \mathbf{Def}_{M_0}(C, c_0), \quad g \mapsto g^* \xi$$

是满射;

(2) Semiuniversal: 如果它是 $versal$ 的且 KS_ξ 是双射.

(3) Universal: 如果 KS_ξ 是双射且对映射

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{Ger}}\left((C, c_0), (B, b_0)\right) \to \mathbf{Def}_{M_0}(C, c_0), \quad g \mapsto g^* \xi$$

是双射.

Kodaira-Spencer 在形变理论奠基性的论文中给出了以上映射的完备性和存在性定

理

Theorem 6 (Completeness theorem[KS58])**.** *对紧完备流形 M_0 的形变 ξ, versal 当且仅当 KS_ξ 是满射.*

Theorem 7 (Existence theorem[KNS58])**.** *对紧完备流形 M_0, 如果 $H^2(M_0, T_{M_0}) = 0$ 那么 M_0 容许在光滑底空间上有 semiuniversal 的形变.*

下一个结果是对形变性质的提升, 这是一个充分条件 ("几乎" 是必要的).

Theorem 8 ([MS68])**.** *对紧完备流形 M_0 和 semiuniversal 的形变 ξ, 如果 $b \mapsto h^0(M_b, T_{M_b})$ 是个定值, 那么 ξ 就是 universal 的.* (e.g. M 仅有有限个全纯自同构时,$H^0(M, T_M) = 0$.)

(三) 代数几何和几何与拓扑相关:

我还有非常长的路要走... 我正在努力阅读他们的书籍并学习他们的工作, 比如 Jean-Pierre Serre, John Milnor, Michael Atiyah, Grothendieck, Mumford, Deligne, 吴宝珠 (Ngô Bảo Châu)[10]等等, 但谈他们具有创新性的工作对我来说太难了. 正如我前言所说的, 或许他们有很多好听的故事, 或许充满了智慧, 或许只是一些数学家八卦. 但对我而言, 属于他们最闪耀的东西一定是数学本身. 之后我会尽我所能把这部分补全.

三、思考:

纵然我是纯粹做数学的学生, 同时也能被更广泛的数学所吸引. 这里的更广泛指的是诸如物理, 历史文化等等. 在一些领域应用数学的建模和变换, 找到解决一些关键领域的关键数学问题的方法的时候, 获得反馈的成就感, 更有烟火气息. 数学不只在星空之上, 也在社会之中. 同时学数学是要几分诗人才气的, 而这几分诗人才气真正地源于我们每一个数学爱好者对未知的渴望[11]; 同时它也一定会是**既接纳交流探讨, 又客观严肃、严谨较真的**, 我想我们都应该继续努力探索. 我稍有所了解的数学家 Langlands 说过, "Certainly the best times were when I was alone with mathematics, free of ambition and pretense, and indifferent to the world.[12]" 这也是我幻想的与数学交流的状态.

[10]我本来是想写一个简单的例子, 比如 SL_2 的, 结果发现写不完, 对不起.

[11]In the broad light of day mathematicians check their equations and their proofs, leaving no stone unturned in their search for rigour. But, at night, under the full moon, they dream, they float among the stars and wonder at the miracle of the heavens. They are inspired. Without dreams there is no art, no mathematics, no life. — By Atiyah (NAMS Jan 2010 p.8).

[12]Langlands, in Mathematicians: An Outer View of the Inner World, p142.

参考文献

[LA29] L. Ahlfors, *Über die asymptotischen Werte der ganzen Funktionen endlicher Ordnung.* Annales Academiae Scientiarum Fennicae. **32** (6): 15.

[LA38] L. Ahlfors, *An extension of Schwarz's lemma.* Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), no. 3, 359-364. doi:10.2307/1990065

[AB60] L. Ahlfors; Bers, Lipman. *Riemann's mapping theorem for variable metrics.* Ann. of Math. (2) 72 (1960), 385-404. doi:10.2307/1970141

[KNS58] K. Kodaira, L. Nirenberg, D.C. Spencer: *On the existence of deformations of complex analytic structures.* Annals of Math.**68** (1958) 450-459.

[KS58] K. Kodaira, D.C. Spencer: *A theorem of completeness for complex analytic fibre spaces.* Acta Math. **100** (1958) 281-294.

[MS68] M. Schlessinger: *Functors of Artin rings.* Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968) 208-222.