目录

1 前言

葛老师说这本书 (《代数曲线》,Phillip A. Griffiths) 散步的时候都能看, 我一边看电脑一边打 LaTeX, 总没问题吧. 开学以来, 我一直把 Riemann 面当作睡前读物, 不过催眠效果不是太好...(比如读到 Bezout 定理的时候就实在是精彩) 本来以为寒假草草读了梅加强的《导引》之后读这本小册子会很轻松, 实则不然 (毕竟两本书的名字不一样) 不过作为调剂而言还是很不错的. 整体读下来还算是流畅, 遇到卡的地方白天算一下大致也算的懂. 有一点遗憾的就是没有手撕一些不显然的例子, 不过有机会一定一定会手撕一些的. 本来想全部笔记 (抄书笔记, 一是书好, 二是没书) 打完了再更新, 斟酌一下还是分三部分发吧. 第一部分就是没有用到 Riemann-Roch 定理的. 想学黎曼面的理由有很多, 既然是第一次更新就不一一阐明了.

关于书的介绍, 请允许我借用世图的介绍替之 (一是我还没读完, 二是懒): 这本书所需要的准备知识不多, 它从最低限度的复变函数论, 线性代数和初等拓扑的准备出发, 深入浅出地讲解了代数曲线理论中最基本的内容, 包括了 Riemann-Roch 定理的证明和应用. 它叙述精练, 证明严格, 堪称经典. 由于代数曲线是内蕴的黎曼曲面在射影空间里的外在实现形式, 所以此书也可以看成是黎曼曲面理论的入门书. 值得一提的是, 这本篇幅不大的杰出教材后来又从中文译成了英语, 由美国数学会出版社出版.(值得一提的是, 我根本找不到, 不然还受影印版的罪.)

2 基本概念

2.1 $\mathbb{CP}^2$ 上的代数曲线

对 $\mathbb{CP}^2 = \{\mathbb{C}^2 \setminus (0,0,0)\}/\{\exists\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus 0, [\zeta,\xi,\eta] = [\lambda\zeta, \lambda\xi, \lambda\eta]\}$.

在这里, 所有的无穷远点组成 $L_\infty : \zeta = 0$. 这样由代数基本定理所有的根都在讨论范围内 (可以跑到无穷). 那么 $\mathbb{C}^2 = \mathbb{CP}^2 \setminus L_\infty$. 如果 $F(\zeta,\xi,\eta)$ 是关于 ζ,ξ,η 的齐次多项式, 那么

$$F(\zeta,\xi,\eta) = 0$$

代表其上一条代数曲线.F 次数为曲线的次数, 限制在 $\mathbb{C}^2$ 上, 就有

$$f(x,y) = F(1,x,y) = 0$$

称为仿射方程. 容易得到, 一条曲线的齐次方程和仿射方程一一对应.

如果代数曲线 C 由方程 $F(\zeta,\xi,\eta) = 0$ 给出, 把 F 分解为不可与齐次多项式的积, 由此可以定义不可约分支, 不可约曲线.

2.2 *Riemann* 面

Theorem 1. 对任何不可约代数曲线 $C \in \mathbb{CP}^2$, 存在一个紧黎曼面 $\widetilde{C}$, 与全纯映射:

$$\sigma : \widetilde{C} \to C \in \mathbb{CP}^2$$

使得 $\sigma(\widetilde{C}) = C$, 且在光滑点上是一一的. 这样的 $(\widetilde{C}, \sigma)$ 称为曲线的正则化.

另一方面,

Theorem 2. 任意的黎曼面都可作为某平面代数曲线的正则化, 并可要求代数曲线至多只有通常二重点.

这两个定理的证明都在后面.

定义黎曼面. 我们考虑拓扑空间紧致的情形. 注意到紧的 Riemann 面也是紧的光滑实二维流形. 由 Cauchy-Riemann 方程得到这个流形是可定向的. 拓扑学关于二维流形的分类的经典结果告诉我们, 任何可定向的二维紧流形都同胚于一个具有若干环柄 (个数记为亏格) 的球面. 研究二维曲面的一个方便方法, 就是沿一些适当选择的割缝把曲面切开再摊成一块平面上的多边形 (我的理解是从什么多边形开始做了几次商). 有结果:

Theorem 3. 具有 g 个环柄的球面, 可以沿着 $2g$ 条割缝 $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g$ 切开, 摊成 $4g$ 边形:$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$ （指边缘顺序）. 这个表示称为规范表示.

定义欧拉示性数:$\chi = 2 - 2g$.

注: 在黎曼面上考虑拓扑, 往往可以得到一些不平凡的结果. 下面一个例子是老师上课举的: 对黎曼面 S_1, S_2, 如果 S_1 是紧的 S_2 连通, 那么对任意 $S_1 \to S_2$ 的非常值全纯映射总是满的 (只需要注意到像集既开又闭). 由此还知道 S_2 是紧的.

2.3 全纯与亚纯函数

我们希望能在黎曼面 C 上同样定义全纯 (半纯) 函数, 即对每一个坐标卡相容, 同时拉回的函数在 C 上是全纯 (半纯) 函数. 同时定义全体亚纯函数按加法乘法构成亚纯函数域, 记为 $\mathfrak{M}(C)$.

Theorem 4. 紧黎曼面 C 上的全纯函数只能是常值函数.

证明. 黎曼面上的全纯函数 (在有聚点的点集上确定值后全纯函数唯一) 和最大模原理:.... 由于紧, 所以作为拓扑空间的连续函数一定取到极大值. □

对紧 Riemann 面 $C, f \in \mathfrak{M}(C), p \in C$. 不妨设取得的局部坐标使 $z(p) = 0$. Then $f = z^v h(z)$. 其中 h 全纯且 $h(0) \neq 0, v \in \mathbb{Z}$. 容易知道,$v$ 是局部常值的, 用正负区分零点极点,$|v_p(f)|$ 为极点 p 的重数.

由局部坐标域 $U_0 = C$ 的表示和 Laurent 展开得到, 容易得到:

Theorem 5. *Riemann 球面 S 上的亚纯函数域 $\mathfrak{M}(C)$ 同构于其上的有理分式域 $C(z)$.*

Theorem 6. *环面 $\mathfrak{M}(C/\Lambda)$ 同构于以 (ω_1, ω_2) 为周期的双周期亚纯函数域.*

复分析告诉我们, 这些亚纯函数都可表示为具有同样双周期的 Weierstrass 椭圆函数 $\mathscr{P}, \mathscr{P}'$ 的有理分式. 讲到环面, 这里可以趁机引入复结构的概念. 复结构大致可以理解为极大局部坐标卡全体, 方便实用的话可以删掉所有相容的等价关系 (模空间).(更重要的我们常常会考虑 Teichmuller 空间). 通过对环面的模空间 (R_1) 进行烦而不难的分类, 我们可以得到 ...

注: 实际上, 对二维 C^∞ 可定向曲面, 有黎曼度量 g, 利用等温坐标 (isothermal parameter), 我们给它一个复结构, 从而成为黎曼曲面.

继续注一个: 一维时候的 Calabi-Yau 流形: 首先对二维拓扑 (定向) 流形我们可以用 genus 完全分类, 分为 $\mathbb{CP}^1$, torus (cubic curve in $\mathbb{CP}^2$), canoical non-trivial 的.

Theorem 7 (留数定理)**.** *对紧致黎曼曲面以及任何亚纯微分 ω,*

$$\sum_{p\in C} \mathrm{Res}_p(\omega) = 0,$$

对亚纯函数 $f : C \to \mathbb{S}$, 考虑 $\omega = \mathrm{d}f/f$, 有 $v_p(f) = \mathrm{Res}_p(\omega)$.

定义两个黎曼面之间的全纯映射. 显然亚纯函数都是到 $\mathbb{S}$ 的全纯映射. 定义对 $C \to C'$ 的全纯映射 $f, f(p) = q$. 则存在局部坐标 $z, w, z(p) = w(q) = 0, w = z^\mu, \mu \in \mathbb{Z}^+$. 称 $\mu - 1$ 为分歧指数 (为啥这是良好定义的?).

2.4 全纯微分和亚纯微分

Definition 1. 对黎曼面 C, C 上的一个全纯 (亚纯) 微分 ω 由 (U_i, z_i, ω_i) 给出:

a)(U_i, z_i) 是全纯坐标覆盖,$\omega_i = f_i(z_i)\mathrm{d}z_i, f_i$ 是全纯 (亚纯).

b) 相交部分按照链式法则转换相容, 即 $f_i(\phi_{ij}(z_j))\mathrm{d}\phi_{ij}(z_j) = f_j(z_j)\mathrm{d}z_j$.

把之集合记为 $\Omega(C)(\mathfrak{K}(C))$. 定义亚纯函数的微分:$\mathrm{d}f = (U_i, z_i, \mathrm{d}f_i(z_i) = \frac{\mathrm{d}f_i(z_i)}{\mathrm{d}(z_i)}\mathrm{d}(z_i))$. 定义 $v_p\omega = v_p f_i, p \in U_i$(well defined?). 正负区分零点极点. 这样我们可以做积分, 有 Stokes 公式. 可以得到, 紧黎曼面得全纯微分都是平凡的.

接着留数定理, 可以知道对亚纯函数, 任意一个函数值重复出现同样多次 (包括 ∞).

2.5 微分形式

2.6 $Poincaré - Hopf$ 公式

对紧黎曼面, 我们希望得到对非平凡的 $\omega \in \mathfrak{K}(C)$,

$$\sum_{p\in C} v_p(\omega) = ?$$

定义环绕数: 对 $f: S^1 \to \mathbf{R}^2 \setminus (0,0)$ 光滑 (圆映射到平面), 环绕数为

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{S^1} f^* \frac{u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u}{u^2+v^2} = \frac{1}{2\pi}\oint_{S^1} \mathrm{d}\arg f$$

这里的 f^* 是拉回映射.

这是总是整数的同伦不变量 (连续变化), 故可以定义到含原点的开集.

定义微分形式的指标: 对 $\lambda = a(x,y)\mathrm{d}x + b(x,y)\mathrm{d}y$ 定义在含原点的开集上. 对 $g: S^1 \ni p \to (a(p), b(p))$, 微分形式在 O 的指标就是 g 的环绕数:

$$\mathrm{Ind}_O\lambda = \frac{1}{2\pi}\oint_{S^1} g^* \frac{u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u}{u^2+v^2}$$

注: 通过局部坐标, 可以定义二维微分流形上性质在孤立奇点 (取值 0 *or* ∞) 的指标. 以下定理是经典的.

Theorem 8 (实微分形式的 *Poincaré − Hopf* 公式)**.** *C 为可定向二维紧微分流形. 对除去有限个孤立奇点的光滑 1 形式, 记这些奇点* $p_1, p_2, \ldots, p_m$, *则*

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Ind}_{p_i}\lambda = \chi(C)(= 2 - 2g)$$

Theorem 9 (亚纯微分的 *Poincaré − Hopf* 指标公式)**.** *紧黎曼面, 对* $\omega \in \mathfrak{K}(C)$,

$$\sum_{p\in C} v_p(\omega) = -\chi(C)$$

证明. 对 $\lambda = \mathbf{Re}\,\omega$, 对奇点附近, 有 $\omega = z^v \mathrm{d}z, v \in \mathbb{Z}$,

于是 λ 转了几圈和 z^v 转了几圈是一样的 , $\lambda = r^v(\cos(-v\theta)\mathrm{d}x + \sin(-v\theta)\mathrm{d}y)$.

由此,$\mathrm{Ind}_p\lambda = -v_p(\omega)$. □

2.7 复流形

当我们讨论 $\mathbb{CP}^2$ 上的代数曲线时, 我们会考虑用一些变通的方法给出示意性的表示, 主要的想法是用 $\mathbb{RP}^2$. 书中给出了 $\xi\eta = \zeta^2$ 与 $\zeta\eta^2 - \xi^3 + \zeta^2\xi = 0$ 的例子.

由可逆线性映射:$T: \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ 诱导出 $T: \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n$, 称为其线性自同构.

由线性函数:

$$L_i: \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$$
$$\xi \to \sum_{j=0}^{n} l_j^i \xi^j$$

定义的 $\mathbb{CP}^n$ 的子集

$$V = \{\xi \in \mathbb{CP}^n\} | L_i(\xi) = 0,\ \forall\ i$$

称为其射影线性子空间. 如果 $rank < L_i >= k$, 那么该线性子空间将可标准嵌入其 $(n-k)$ 维的复射影空间中.

定义 $\mathbb{CP}^n$ 中 k 个点处于一般位置, 如果任意 l 个点不在其一个 $l-2$ 维的射影线性子空间上.

2.8 代数簇

记 $R=\mathbb{C}[x^1,x^2,\ldots,x^n]$, $J=\{f_1,f_2,\ldots,f_k\}$ 生成的理想;
S^d 为 $n+1$ 个变元生成的 d 次齐次多项式空间组成的线性空间;
S 为其分次代数,$I=\{F_1,\ldots,F_k\}, F_i\in S^{d_i}$ 生成的齐次理想.

Definition 2. 仿射代数簇是 $\mathbb{C}^n$ 上形如 $V_0=\{x\in\mathbb{C}^n|f_1(x)=...=f_k(x)=0\}, f_i\in R$ 的子集. 仅一个函数时称为仿射代数超平面, 对 $\mathbb{C}^2$ 的仿射代数超平面称为平面仿射代数曲线.

把 $\mathbb{C}^n$ 换成 $\mathbb{CP}^n$, 相应的 f_i 换成 $F_i\in S^{d_i}$ 则定义了 (射影) 代数簇.

通过 $\mathbb{C}^n$ 以标准方式嵌入 $\mathbb{CP}^n$, 我们可以说明前者的仿射代数簇与后者的射影代数簇一一对应 (不计 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 这样的分支), 使得:

$$V\cap\mathbb{C}^n=V_0$$

实图形:$\mathbb{R}^n\cap V_0$ ($\mathbb{RP}^n\cap V$).

以下定理表示, 平面代数曲线 ($\mathbb{CP}^2$) 的次数有明确的几何意义: 对 d 次代数曲线 $C(F\in S^d)$, 则对任意一条不是 C 的一个分支的直线 L, 都有相交点个数为 d.

2.9 光滑点, 切空间, 隐函数定理

定义仿射代数簇的光滑点, 定义 $\operatorname{rank}(\frac{\partial f_{i_\mu}(x)}{\partial x}|_p)=l$ 为 p 点的维数. 对光滑点, 我们定义点的切空间. 称仿射代数簇是光滑的, 如果所有点都是光滑点. 对射影代数簇可以相似定义:

Definition 3 (射影情形)**.** 设

$$V=\{\xi\in\mathbb{CP}^n|F_1(\xi)=\cdots=F_k(\xi)=0\}$$

是射影代数簇. 一点 $p\in V$ 称为是 V 的光滑点, 如果存在 p 的一个邻域 W 及 $\{F_{i_1},\ldots,F_{i_l}\}\subset\{F_1,\ldots,F_k\}$ 满足

$$(a)\ V\cap W=\{\xi\in W|F_{i_1}(\xi)=\cdots=F_{i_{l(\xi)}}=0\}$$

$$(b)\ \ \operatorname{rank}\left(\left.\frac{\partial F_{i_\mu}(\xi)}{\partial\xi^j}\right|_p\right)=l.$$

(这时 l 和 $n-l$ 分别称为代数簇 V 在 p 点的余维数和维数.) 同时对光滑点定义切空间:

$$T_p(V)=\left\{\eta\in\mathbb{CP}^n\left|\sum_{i=1}^n\left.\frac{\partial F_{i_\mu}(\xi)}{\partial\xi^j}\right|_p\eta^j=0,\mu=1,\ldots,l\right.\right\}\cong\mathbb{CP}^{n-l}$$

称为是 V 在 p 点切空间.

由前一集我们注意到: 通过 $\mathbb{C}^n$ 以标准方式嵌入 $\mathbb{CP}^n$, 我们可以说明前者的仿射代数簇与后者的射影代数簇一一对应 (不计 $\mathbb{CP}^{n-1}$ 这样的分支), 使得:

$$V \cap \mathbb{C}^n = V_0, \quad p \to [1, p]$$

我们可以说明:

$$T_p V_0 = T_{[1,p]} V \cap \mathbb{C}^n$$

引理 (Osgood):f 在开集全纯等价于对每个变元全纯.

Theorem 10 (全纯隐函数定理)**.**

Proposition 2.1. *设 X 是一个紧复流形,Y 是它一个闭连通子集. 如果存在由 X 的局部坐标邻域组成的 Y 的覆盖及 $f_i^1, \ldots, f_i^l \in$ 全纯函数集, 满足*

$$Y \cap W_i = \{p \in W_i | f_i^1(p) = \cdots = f_i^l(p) = 0\}$$

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial(f_i^1, \ldots, f_i^l)}{\partial(z_i^1, \ldots, z_i^n)}|_{p \in W_i}\right) = l$$

则 Y 为 $n - l$ 维紧复流形 (X 复子流形).

不可约代数簇总是连通的. 那么任意的光滑不可约代数簇都是 $\mathbb{CP}^n$ 的复子流形. 特别的是光滑的不可约代数曲线一定是紧 Riemann 流形. 一个很重要的习题:

Proposition 2.2. *设二元幂级数*

$$f = \sum_{m,n>0} a_{mn} x^m y^n$$

在 $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ 邻近收敛, 且

$$f(0,0) = a_{00} = 0, \quad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(0,0)} = a_{01} \neq 0.$$

a) 试证存在唯一形式幂级数

$$y(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j$$

使得

$$f(x, y(x)) \equiv 0.$$

b) 试证对适当小的 $\rho > 0$, 幂级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_j x^j$$

在 $\{x \in \mathbb{C} | |x| < \rho\}$ 收敛.

2.10 紧 *Riemann* 面到复射影空间的全纯映射

紧 Riemann 面是体现了代数曲线的内在性质; 反之代数曲线是把黎曼面放到复射影空间的实现. 本节就讨论紧的 Riemann 面. 就一个定理, 说明紧黎曼面中, $n+1$ 个线性无关的半纯函数与由黎曼面到 $\mathbb{CP}^n$ 的非退化全纯映射对应. 例子: 有理典范曲线. 这个不提, 提一个 lattice 的例子. 熟知环面 C/Λ. 复分析告诉我们, 具有同样双周期的 Weierstrass 椭圆函数 $\mathscr{P}$ 是满足双周期性及极点条件: 极点都在格上且 $\mathscr{P}(\omega)=\omega^{-2}+h(\omega)$, 其中 h 全纯.

注意到 $\mathscr{P}'=a\mathscr{P}^3+a\mathscr{P}+b$, 考虑映射:

$$f:C/\Lambda\to\mathbb{CP}^2$$

$$[\omega]\to[1,\mathscr{P}(\omega),\mathscr{P}'(\omega)]$$

这就打到了一个三次 (齐次) 代数曲线.

Theorem 11. *对亏格为 g 的紧致黎曼曲面, 总能够全纯嵌入 (处处非退化且单) 到 $\mathbb{R}^{g+1}$.*

3　正则化定理及其应用

3.1 平面代数曲线的奇点

即对 $C=\{[z,x,y]\in\mathbb{CP}^2|F(z,x,y)=0\}$, 同时 $\frac{\partial F}{\partial z}(p)=\frac{\partial F}{\partial x}(p)=\frac{\partial F}{\partial y}(p)=0$ 的点. 令 $f(x,y)=F(1,x,y)$, 把函数写成次数递增的齐次多项式的和, 如果

$$f_0=f_1=\cdots=f_{k-1}=0,\ f_k\neq 0$$

那么 C 在 p 点有 k 条切线 (计重数), 称为 k 重点 (如果切线均不重合, 就称为通常 k 重点).

例子:$x^3-x^2+y^2=0, x^3-y^2=0, (x^2+y+2)^2+3x^2y-y^3=0.$

3.2 不可约平面曲线的连通性

我们首先指出平面代数曲线的奇点集合是有限的 (用结式做的, 一些代数工具).

其次我们说明连通, 令 $C^*=C\setminus S$(由光滑点组成), 由隐函数定理可知它就是个 Riemann 面 (一般来说是 non-compact 的). 为了说明连通性, 我们利用解析延拓:

记一个解析延拓元是一个开圆盘连通上面的解析函数 $(\triangle,f)$, 我们有黎曼单值性定理:

Theorem 12. *设 Ω 为单连通开集. 如果一个解析函数元可以沿着任意道路延拓, 则它可以扩充为定义于整个开集上的单值解析函数.*

证明的关键在于在我们不喜欢的点处的解析延拓是相互的, 即互相延拓, 就是道路连接. 详细的部分我跳了, 一个引理看的头大.

3.3 正则化的概念

我们早就提过目标是:

Theorem 13. 对任何不可约代数曲线 $C \in \mathbb{CP}^2$, 存在一个紧黎曼面 $\widetilde{C}$, 与全纯映射:

$$\sigma : \widetilde{C} \to C \in \mathbb{CP}^2$$

使得 $\sigma(\widetilde{C}) = C$, 且在光滑点上是一一的. 这样的 $(\widetilde{C}, \sigma)$ 称为曲线的正则化.

代数曲线在奇点处的奇异性, 表现为在这点具有不止一条切线, 或者说若干条具有不同切线的曲线支在此处相交. 正则化把曲线支分离开以消除奇异性, 因此又被称为奇性的消去 (desingularization).

引理: 黎曼面间既单又满的全纯映射一定是双全纯的 (即 f^{-1} 也是全纯的, 理由是开映射定理), 即同构. 我们说明代数曲线 C 的正则化在同构的意义下是唯一的 (由定义显然).

为了弄清代数曲线的局部构造, 我们将借助于对 Weierstrass 多项式的讨论.

3.4 Weierstrass 多项式

Definition 4.

$$w \in \{\text{收敛幂级数} f = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} x^m y^n \text{在原点邻近全纯的函数环} (= C\{x, y\})\}$$

称为 y 的 Weierstrass 多项式, 如果

$$w = y^d + a_1(x) y^{d-1} + \cdots + a_0(x),\ a_j(x) \in C\{x, 1\},\quad a_j(0) = 0,\ \forall j.$$

对 $f \in C\{x, y\}$, $f(0, y)$ 不恒等于 0. 那么在 $(0, 0)$ 适当邻域均可唯一的写成 $C\{x, y\}$ 中一个单位 (当作多项式环, 或等价的 $u(0, 0) \neq 0$) 与 Weierstrass 多项式的积.

推论:$C\{x, y\}$ 是 UFD. 注意到 $C\{x, y\}$ 与 $C\{x, 1\}[y]$ 不可约性相同.

证明. 分为以下几个部分:

S1: $C\{x\}$ 是 UFD.

S2: $C\{x\}[y]$ 是 UFD.

S3: 不失一般性, 我们假设 $f(0, y)$ 不恒等于 0.

S4: $C\{x, y\}$ 与 $C\{x, 1\}[y]$ 不可约性相同, 故前者可以做分解.

S5: 唯一性 (*unique*). □

这里具体的构造我懒得码了.

3.5 平面代数曲线的局部构造

定义 (不可约) 局部解析曲线, 不可约局部解析曲线支: 对 f 在 $C\{x,y\}$ 中的分解:

$$f = f_1^{m_1} \cdot \cdots \cdot f_l^{m_l}$$

记 $V = m_1 V_1 + \cdots + m_l V_l$,

$$V_j = \{(x,y) || x| < \rho, |y| < \epsilon, f_j(x,y) = 0\}$$

这样我们把一个点局部的分解了. 将证明每一个不可约局部解析曲线支拓扑都相当于圆盘, 即

Theorem 14. *每个不可约局部解析曲线支均存在圆盘与全纯映射:*

$$\triangle = \{t \in \mathbb{C} || t| < \rho^{1/k}\}$$

$$g_j : \triangle \to \mathbb{C}^2$$

$$t \to (t^k, y_v(t^k))$$

一一 (在 $\triangle \setminus O$ 到 $V \setminus (0,0)$ 的双全纯映射).

3.6 正则化定理证明的完成

我们考虑只有一个奇点的情形. 由上节的内容, 我们可以有 m 个开圆盘 $\triangle_j (j = 1, \ldots, m)$ 和他们的局部正则化映射. 这样我们可以记

$$\widetilde{C} = C^* \bigcup_{g_1} \triangle_1 \cdots \bigcup_{g_m} \triangle_m$$

其中 $C^* \bigcup_{g_1} \triangle_1$ 定义为

$$(C^* \bigcup \triangle_1)/p \sim g_1(p)$$

这玩意可以赋予一个局部全纯坐标而作出 Riemann 面!

3.7 因子, 相交数,$Bezout$ 定理

因子群:$Div(\widetilde{C})$. $\deg : Div(\widetilde{C}) \to \mathbb{Z}$ 群同态. 定义典范因子群.

定义相交数: 设平面代数曲线

$$V = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x,y) = 0\right\}$$

$$V = \left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x,y) = 0\right\} W = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{C}^2 \mid h(x,y) = 0\right\}$$

相交于 p . 由引理 5.1 我们可以假设 $p = (0,0)$, 且

$$f(x,y) = y^k + a_1(x) y^{k-1} + \cdots + a_k(x)$$

$$a_j(x) \in \mathbb{C}[x], \quad \deg a_j(x) \leqslant j\text{或者}a_j(x) \equiv 0$$

如果 V 在 $(0,0)$ 邻近局部不可约, 即 f 在 $C\{x\}[y]$ 不可约, 我们可以构造局部正则化

$$g : t \mapsto \left(t^k, y_v\left(t^k\right)\right),$$

且定义 V 和 W 在 $p=(0,0)$ 处的相交数为

$$(V \cdot W)_{p=(0,0)} = \nu_0\left(g^* h\right) = \nu_0\left(h\left(t^k, y_\nu\left(t^k\right)\right)\right)$$

(即 $h\left(t^k, y_v\left(t^k\right)\right)$ 在 $t=0$ 处关于 t 的阶数). 对于一般情形, V 在 $p=(0,0)$ 邻近分解为不可约局部解析曲线支

$V = m_1 V_1 + \cdots + m_l V_l$ (即 $f = f_1^{m_1} \cdots f_l^{m_l}, f_j$在$\mathbb{C}\{x\}\left[y_3\right]$ 中不可约), 这时我们定义 V 和 W 在 $p=(0,0)$ 处的相交数为

$$(V \cdot W)_p = \sum_{j=1}^{l} (V_j \cdot W)_p$$

下面呈现以下

$$(V \cdot W)_{p=(0,0)} = \nu_0\left(g^* h\right) = \nu_0\left(h\left(t^k, y_\nu\left(t^k\right)\right)\right)$$

是什么意思.

Proposition 3.1. 试证明 $(V \cdot W)_p = (W \cdot V)_p$.

证明. 类似于引理 5.1 的做法, 可选择坐标系使得 $p=(0,0)$, 使 V 和 W 的仿射方程 $f(x,y)=0$ 和 $h(x,y)=0$ 满足

$$\begin{aligned}
& f(x,y) = y^m + a_1(x) y^{m-1} + \cdots + a_m(x), \\
& a_j(x) \in \mathbb{C}[x], \quad \deg a_j \leqslant j \text{ 或} a_j = 0 \\
& h(x,y) = y^n + b_1(x) y^{n-1} + \cdots + b_n(x), \\
& b_k(x) \in \mathbb{C}[x], \quad \deg b_k \leqslant k \text{ 或} b_k = 0.
\end{aligned}$$

将 f 和 h 分解为单位与不可约 Weierstrass 多项式的乘积

$$\begin{aligned}
& f(x,y) = \alpha(x,y) v_1(x,y) \cdots v_r(x,y), \\
& h(x,y) = \beta(x,y) w_1(x,y) \cdots w_s(x,y).
\end{aligned}$$

设 $y_\mu^{(j)}(x)\,(\mu = 1, \cdots, m_j)$ 和$z_v^{(k)}(x)\,(\nu = 1, \cdots, n_k)$ 分别是

$$v_j(x,y) = 0, \quad w_k(x,y) = 0$$

$$(j = 1, \cdots, r; \quad k = 1, \cdots, s)$$

的根的解析分支. 按照定义

$$\begin{aligned}
(V \cdot W)_p &= \sum_{j=1}^{r} \text{order } \; h\left(t^{m_j}, y_\mu^{(j)}\left(t^{m_j}\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} \text{order } \; w_k\left(t^{m_j}, y_\mu^{(i)}\left(t^{m_j}\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} \text{order } \; \prod_{v=1}^{n_k}\left(y_\mu^{(i)}\left(t^{m_j}\right) - z_v^{(k)}\left(t^{m_j}\right)\right)
\end{aligned}$$

order 表示 $t = 0$ 处的阶数. 类似的, 对 $(W \cdot V)_p$ 有 ... 注意到:order 是对称的. □

Proposition 3.2. 设 $p = (0, 0)$ 是平面代数曲线

$$V = \{f(x, y) = 0\}$$

的 k 重点和平面代数曲线

$$W = \{h(x, y) = 0\}$$

的 m 重点, 即

$$f(x, y) = f_k(x, y) + f_{k+1}(x, y) + \cdots,$$

f_i 是 i 次齐次多项式, $i = k, k+1, \cdots, \deg f$;

$$h(x, y) = h_m(x, y) + h_{m+1}(x, y) + \cdots,$$

h_j 是 j 次齐次多项式, $(j = m, m+1, \cdots, \deg h)$, 试证

$$(V \cdot W)_p \geqslant km.$$

证明. 将 $f(x, y)$ 分解为单位及不可约 Weierstrass 多项式的乘积

$$f(x, y) = a(x, y)v_1(x, y)\cdots v_r(x, y)$$

这里

$$v_i(x, y) = y^{l_i} + a_{l_i-1}^{(i)}(x)y^{l_i-1} + \cdots + a_0^{(i)}(x)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, r)$$

设 $y_\mu^{(i)}(x)$ 是 $v_i(x, y) = 0$ 的根的解析分支, 按照定义

$$(V\cdot W)_p=\sum_{j=1}^{r}\text{order }\ h\left(t^{l_i},y_\mu^{(i)}\left(t^{l_i}\right)\right)$$

任意 $\varphi(x,y)\in\mathfrak{M}(C)$ 可以写成按升幂排列的齐次多项式的级数和

$$\varphi(x,y)=\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(x,y),\quad \deg\varphi_j=j$$

如果.

$$\varphi_0\equiv\varphi_1=\cdots\equiv\varphi_{j-1}\equiv 0,\quad \varphi_j\neq 0,$$

则称 φ 的阶数为 j, 记为 order $\varphi=j$

设 order $v_i(x,y)=k_i$, 那么 $l_i\geqslant k_i$, order $a_0^{(i)}(x)\geqslant k_i$. 由此可得

$$\begin{aligned}
&\text{order } y_\mu^{(i)}\left(t^{l_i}\right)\\
=&\frac{1}{l_i}\text{order }\prod_{\mu=1}^{l_i}y_\mu^{(i)}\left(t^{l_i}\right)\\
=&\frac{1}{l_i}\text{order } a_0^{(i)}\left(t^{l_i}\right)\\
=&\text{order }\ a_0^{(i)}(x)\\
\geq&k_i\\
&(V\cdot W)_p\\
=&\text{order } h\left(t^{l_i},y_\mu^{(i)}\left(t^{l_i}\right)\right)\\
\geqslant&\sum_{i=1}^{r}k_i m=km.
\end{aligned}$$

□

定义两条代数曲线的交点数就是全部相交点的相交数之和. 我们下面证明重要的 Bezout 定理.

Theorem 15 (*Bezout*). *设两平面代数曲线 C 和 E 无共同的曲线分支 (指方程的左端无公因式), 那么*

$$(C\cdot E)=\sum_{p\in C\cap E}(C\cdot E)_p=\deg\ C\cdot\deg\ E$$

证明. S1: 分解成处理不可约代数曲线的问题.

S2: 对直线 (如果 $C=L$ 是 $\mathbb{CP}^2$), 重新叙述 (次数的几何意义)

$$\sum_{p\in L\cap E}(L\cdot E)_p=\deg\ E(=\deg\ L\cdot\deg\ E)$$

S3: 注意到亚纯函数使得 deg 等于 0, 我们的思路是用 S2 中的直线情形近似处理曲线. □

我们称一条不可约曲线是有理的如果它的正则化 $\widetilde{C}=\mathbb{CP}^1$ 我们可以说明, 具有一个通常奇点的不可约三次平面代数曲线是有理的. 由于这个奇点必须是二重点 (否则就可约了), 我们把 $\mathbb{CP}^1$ 与通过奇点 p 的直线的集合等同起来. 根据 Bezout 定理, 除了过 p 点的 C 的两条切线以外, 每条直线都相交曲线于另一点. 我们让每一条这样的直线同它与 C 的另一交点对应, 而让两条切线分别表示不同曲线支上的 p 点. 这样得到 $\mathbb{CP}^1$ 到 C 的映射对应关系. 这是这个特例正则化的几何说明.

这里有不少可以具体动手算的例子, 很遗憾我掌握的并不是很具体毕竟只是睡前读物.... 希望接下来有机会好好琢磨.

3.8 分歧因子, $Riemann-Hurwitz$ 公式

重温以下定义:(重要的是这里要对分歧数有一个好的理解)

Definition 5. 对黎曼面 C,C 上的一个全纯 (亚纯) 微分 ω 由 (U_i,z_i,ω_i) 给出:

a)(U_i,z_i) 是全纯坐标覆盖, 其中 $\omega_i=f_i(z_i)\mathrm{d}z_i, f_i$ 是全纯 (亚纯).

b) 相交部分按照链式法则转换相容, 即 $f_i(\phi_{ij}(z_j))\mathrm{d}\phi_{ij}(z_j)=f_j(z_j)\mathrm{d}z_j$.

我们可以定义两个黎曼面之间 f 对亚纯微分的拉回. 对 $f:C\to C'$ 与给定的 C' 上的亚纯微分:

$$\{U'_\alpha,\omega_\alpha,g_\alpha(\omega_\alpha)\mathrm{d}\omega_\alpha\}$$

取 C 的全纯坐标覆盖 $\{(U_i,z_i)\}$, 使得

$$f(U_i)=U'_{\alpha(i)},\ \omega_\alpha=f_{\alpha_i}(z_i)$$

一下便是 pullback 的亚纯微分:

$$\left(U_i,z_i,g_\alpha(f_{\alpha_i}(z_i))\frac{\mathrm{d}f_{\alpha_i}(z_i)}{\mathrm{d}z_i}\mathrm{d}z_i\right)$$

记为 $f^*\omega$(验证 well-defined).

Theorem 16 ($Riemann-Hurwitz$ 公式)**.** *设 C 和 C' 是紧 Riemann 面, 它们的亏格分别为*

$$genus\,(C)=g\ \text{和}\,\mathrm{genus}\,(C')=g',$$

而 $f:C\to C'$ 是一非常值全纯映射, 其映射度为 $\deg f=n$; 以 R 记 f 的分歧因子:

$$R=\sum_{p\in C}(\nu_f(p)-1)\,p$$

那么

$$\deg R=2\,(g+n-ng'-1)$$

证明. S1: $\deg\,(f^*\omega) = \deg\, f^{-1}((\omega)) + \deg\, R$

S2: $\deg\,(f^*\omega) = 2g-2, \quad \deg\,(\omega) = 2g'-2$

S3: $\deg\, f^{-1}(\omega) = \deg\,(\omega)\cdot\deg\, f.$ □

有几个具体的例子. 注: 其他的证明: 取 S' 上的三角剖分 (依赖于亚纯函数亚纯微分的存在性, 实际上每个闭曲面都有, 不过这里的证明可以不一样, 解析 (全纯) 性质为曲面加了很多 (拓扑, 如第二可数) 限制), 使得每个分歧点的像都是剖分的顶点, 把它 pullback 变成 S 上的剖分. 具体的我们可以简单的解释: 由很不平凡的 Weyl 引理的帮忙, 我们很容易证明:

Theorem 17 (Hodge)**.**

$$L^2(S) = E \oplus E^* \oplus H$$

其中 $L^2(S)$ 是黎曼流形 S 上的平方可积的可测一阶微分形式集合,$||\omega||^2 = \int \omega \wedge *\bar{\omega} < +\infty$,$E = \overline{\{\mathrm{d}f : f \in C_0^\infty(S)\}}$ in $L^2(S)$, E^* 类似定义. 这可以保证非平凡调和微分 (需要不是单叶) 和带给定奇性的亚纯微分的存在性. 特别的, 对任意一个黎曼曲面, 总有非平凡的半纯函数. 由此我们可以断言:

Theorem 18. *紧 Riemann 曲面是可三角剖分的.*

证明. 设 S 是一个紧 Riemann 曲面. 又设 $f : S \to \overline{\mathbb{C}}$ 是 S 上的一个非平凡的半纯函数. 则是满射. 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上作一个三角剖分, 其三角形为 $\Delta_1, \cdots, \Delta_m$, 并假定 f 的分歧点的像点均是顶点. 这时, 对于每个 j, f 在 $f^{-1}(\Delta_j)$ 的每个分支上都是一一映射. $\overline{\mathbb{C}}$ 的三角剖分可根据 f 拉回到 S 上, 从而形成了 S 的一个三角剖分. □

3.9 亏格公式

Theorem 19 (亏格公式)**.** *设 $C = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | f(x,y) = 0\}(\mathbb{C}^2 = \mathbb{CP}^2 \setminus L_\infty)$ 是 d 次不可约代数曲线, 它的 δ 个奇点都是通常二重点; $\sigma : \widetilde{C} \to C$ 是其正则化,*

$$\mathrm{genus}(\widetilde{C}) = g$$

在这些条件下, 我们有以下亏格公式:

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta$$

证明. 我们可以适当选择 $\mathbb{CP}^2$ 中的坐标系使得:

a) L_∞ 与 C 交于 d 个不同的点 (因而 L_∞ 不是 C 的切线也不通过 C 的奇点);

b) 在二重点 $p_1, \ldots, p_\delta$ 处, C 的任何切线都不通过 $[0,0,1]$;

c) $[0,0,1] \bar{\in} C$.

这样奇点处都没有竖直切线. 这样我们可以对 $E \cap C = \{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0\} \cap \{f(x,y) = 0\}$ 内的点分了两部分: 有竖直切线的和奇点.$\sum'$ 是前者的求和, 而对后者我们记录 $p_1, \ldots, p_\delta$ 为通常二重点.

S1: 考虑另一条代数曲线:

$$\left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0\right\}.$$

由 *Bezout*:

$$(E\cdot C)=d(d-1)$$

在做了正则化 σ 之后, 考虑想 $\mathbb{CP}^1$ 的投影:$x=\pi\circ\sigma$. 我们用这个映射计算 $(E\cdot C)$.

S2: 由于我们坐标系的选取法, 有 $(E\cdot C)_p=v_x(p)-1$(其中 p 点有竖直切线). 对一切有竖直切线的点求和, 我们得到:

$$\sum_p{}'(E\cdot C)_p=\deg R_x$$

如果记

$$D=\{\mathscr{D}(f)(x)=0\},$$

那么在 $C\backslash D$ 上 x 是 d 对 1 的映射, 因而

$$\deg x=d.$$

由 Riemann-Hurwitz 公式

$$\sum_p{}'(E\cdot C)_p=\deg R=2(g+d-1),$$

S3: 设 p_j 是二重点之一, 经适当的平移坐标变换我们可以假定 $p_j=(0,0)$. 这样

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+f_3(x,y)+\cdots,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2bx+2cy+\cdots$$

由于 p_i 是通常二重点而 C 在 $p_j=(0,0)$ 没有竖直切线, 所以

$$ac-b^2\neq 0\text{切线不重合},\quad c\neq 0.$$

由隐函数定理, 我们可以从

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$$

中解出 y 作为 x 的函数

$$y=y(x)=-\frac{b}{c}x+\cdots$$

经直接计算得到

$$f(x,y(x))=\frac{ac-b^2}{c}x^2+\ldots$$

这就说明:

$$(E\cdot C)_{p_j}=2$$

联合以上全部结果, 我们得到了亏格公式. □

亏格公式十分重要, 因为它揭示了代数曲线 C 的" 内在" 拓扑不变量和" 外在" 量之间的关系.

4 $Riemann-Roch$ 定理

定义有效因子:$D=\sum_{i=1}^{k} n_ip_i \in \mathrm{Div}(C) \geq 0$. 设 C 为紧致黎曼曲面, D 为 M 上的一个因子. 令

$$\mathscr{L}(D)=\{f\in\mathfrak{M}(C)\mid(f)+D\geqslant 0\},$$

$$K^1(D)=\{\omega\in\mathfrak{K}(C)\mid(\omega)-D\geqslant 0\}.$$

记

$$\dim\mathscr{L}(D)=l(D),$$

$$\dim K^1(D)=i(D).$$

$\mathscr{L}(D)$ 和 $K^1(D)$ 分别是亚纯函数域 $\mathfrak{M}(C)$ 和亚纯微分空间 $\mathfrak{K}(C)$ 的子集. 可以证明:$\mathscr{L}(D)$ 和 $K^1(D)$ 为有限维复向量空间; 注意到 $D\geq 0$ 是有特殊意义的, 此时每个常值函数属于 $\mathscr{L}(D)$, 同时用 $\Omega^1(D)$ 代替 $K^1(D)$ (注意到肯定是个全纯微分 (即 $\Omega(D)\in\Omega(C)$ 为线性子空间)). 以及:

Theorem 20 (Brill-Noether 互反性)**.** *设 $\omega\in\mathfrak{K}(C),(\omega)=D+E$, 则*

$$\mathscr{L}(D)\cong K^1(E),\quad \mathscr{L}(E)\cong K^1(D)$$

定义:Laurent 尾:

Definition 6. 对 $\sum_{j=-n}^{\infty}a_jz^j$ 为 *Laurent* 级数, 则它的奇异部分

$$\sum_{j=-n}^{-1}a_jz^j$$

为 Laurent 尾,n 为 Laurent 尾的阶.

设 $z_i(i=1,2,\ldots,k)$ 为 p_i 附近的局部坐标,$z_i(p_i)=0$. 如果给每个 p_i 一个 n_i 阶的尾, 自然可以提出这样的问题, 在什么时候存在 $f\in\mathfrak{M}(C)$,f 在 p_i 附近恰好是这些尾? 这就是 Mittag − Leffler 问题, 它比 Riemann-Roch 定理更强 (详见最后用 sheaf 的证明)

如果我们考虑到紧黎曼面的亚纯函数在相差一个常值函数的意义下被它的 *Laurent* 尾唯一决定. 即 (当作 $\mathbb{C}^d=\mathbb{C}^{d_1}\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}^{d_k}$ 线性子空间):

$$\mathscr{L}(D)/\mathbb{C}\to\{(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_k)\}$$

$$[f]\to f's\ Laurent\ tails\ at\ p_1,p_2,\ldots,p_k$$

4.1 $\Omega^1(C)$ 的维数

这是 Riemann-Roch 定理的特例:

Theorem 21. *对亏格为 g 的紧黎曼面, 全纯微分空间:*

$$\dim\ \Omega^1(C) = g$$

证明. 先证明一边: 对亏格为 g 的紧黎曼面, 全纯微分空间:

$$\dim\ \Omega^1(C) \geq g$$

我们的证明依赖于正则化. 对于任一紧 Riemann 面 C, 都存在由 C 到 $\mathbb{CP}^2$ 的全纯映射 π , 使得 $C' = \pi(C)$ 是 $\mathbb{CP}^2$ 中一条具有 δ 个通常的二重点（记为 $p_1, p_2, \cdots, p_\delta$) 的 d 次不可约代数曲线, 而无其它重点. 对 $d = 1\ or\ 2$, $g = 0$.

实际上我们需要选取 C' 与 $\mathbb{CP}^2$ 的无穷远直线 L_∞ 不相切. 设此坐标下的仿射方程为 $f(x, y) = 0$.

记 $\Gamma = p_1 + p_2 + \cdots + p_\delta$. 以 S^{d-3} 表示复系数 $d - 3$ dim 三元齐次多项式集合. 令

$$S^{d-3}(-\Gamma) = \{G\left(\xi^0, \xi^1, \xi^2\right) \in S^{d-3} \mid G\left(p_i\right) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, \delta\}.$$

显然, S^{d-3} 与 $S^{d-3}(-\Gamma)$ 都构成复数域上的线性空间, 且

$$\dim S^{d-3} = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

而一个多项式在某点 p_i 取值为零等价于此多项式的系数满足一个线性方程, 故

$$\dim S^{d-3}(-\Gamma) \geq \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \delta = g$$

(这里应用了亏格公式): 我们将构造由 $S^{d-3}(-\Gamma)$ 到 $\Omega^1(C)$ 的一个单同态, 这样就能保证

$$\dim \Omega^1(C) \geqslant \dim S^{d-3}(-\Gamma),$$

证明是构造性的.

下面是反向的证明. 对亏格为 g 的紧黎曼面, 取 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_g$ 为游泳圈不绕大洞的路径,$\gamma_{g+1}, \gamma_{g+2}, \ldots, \gamma_{2g}$ 是绕大圈路径, 他们是 C 的同调群 $H_1(C, \mathbb{Z})$ 的一组 $\mathbb{Z}-$ 基. 设 γ 是 C 上的一条闭曲线, 则有

$$\gamma = \sum_{i=1}^{2g} n_i \gamma_i + \partial\Omega$$

其中 $n_i \in \mathbb{Z}(i = 1, 2, \cdots, 2g), \Omega$ 是 C 上的一个区域. 以下将用 $[\gamma]$ 表示 γ 所在的同调类. 由 *Stokes* 定理易得到: 如果 λ 是 C 上的闭的微分 $1-$ 形式, 则映射

$$\eta_\lambda : H_1(C, \mathbb{Z}) \to C,$$

$$[\gamma] \to \int_\gamma \lambda$$

良定, 其中 γ 是 C 上的闭曲线. 同时若且对所有的 i, 都有

$$\int_{\gamma_i} \lambda = 0$$

则 λ 是恰当的.

此外, 我们还要用到引理: 设 C 是紧 Riemann 面, $\omega, \varphi \in \Omega^1(C)$. 视 ω 和 φ 为 C 上的微分 1− 形式, 如果

$$\omega + \bar{\varphi} = \mathrm{d}f$$

其中 f 为 C 上的 C^∞ 函数, 则

$$\omega = \varphi = 0$$

.

回到原问题. 假设 $\geq g+1$, 设 $\omega_1, \ldots, \omega_{g+1} \in \Omega^1(C)$ 在 C 上线性无关. 考虑一组等式,

$$\int_{\gamma_i} \sum_{j=1}^{g+1} \left(\lambda^j \omega_j + \eta^j \bar{\omega}_j\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, 2g),$$

其中 γ_i 是 $H_1(C, \mathbb{Z})$ 的一组 $Z-$ 基. 视 $\lambda^1, \cdots, \lambda^{g+1}, \eta^1, \cdots, \eta^{g+1}$ 为未知量, 则上述等式是这 $2g$+2 个未知量的 $2g$ 个线性方程. 此方程组必有非零解, 设为 $\lambda_0^1, \cdots, \lambda_0^{g+1}, \eta_0^1, \cdots, \eta_0^{g+1}$. 取

$$\omega = \sum_{i=1}^{g+1} \lambda_0^j \omega_j \in \Omega^1(C), \quad \varphi = \sum_{j=1}^{g+1} \bar{\eta}_0^j \omega_j \in \Omega^1(C),$$

于是对所有的 $i = 1, 2, \cdots, 2g$, 都有 $\int_{\gamma_i} (\omega + \bar{\varphi}) = 0$. 由引理, 存在 C 上的 C^∞ 函数 f (闭的微分 1− 形式), 使

$$\omega + \bar{\varphi} = \mathrm{d}f$$

$$\omega = \varphi = 0$$

. 这与非零解, 线性无关矛盾. □

4.2 两个重要定理

这是对后面没什么用的一章. 介绍了 Hodge 定理和 De Rham 定理在紧黎曼面情形下的证明. 定义第一上同调群:

$$H^1(C, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^1(C, \mathbb{Z}), \mathbb{C})$$

所以我们之前的同态:

$$\eta : \{C\text{上所有闭的微分 1 形式}\} \to H^1(C, \mathbb{C})$$

$$\lambda \to \eta_\lambda : [\gamma] \to \int_\gamma \lambda$$

再之, 我们知道它诱导了 $H_{DR}(C)$ 到 $H^1(C,\mathbb{C})$ 的单同态. 上面的引理说明了的是以下同态链是单的:

$$\Omega^1(C) \oplus \overline{\Omega^1(C)} \to H^1_{DR}(C) \to H^1(C,\mathbb{C}).$$

注意到此链两端作为 C 上的线性空间都是 $2g$ 维的 (g 是 C 的亏格), 则知这两个同态都是同构. 这就给出了下述的 Hodge 定理和 De Rham 定理的证明.

Theorem 22 (*Hodge*)**.** *(对于紧 Riemann 面 C) 我们有:*

$$\Omega^1(C) \oplus \overline{\Omega^1(C)} \cong H^1_{\mathrm{DR}}(C).$$

Theorem 23 (*De Rham*)**.** *(对于紧 Riemann 面 C) 我们有:*

$$H^1_{DR}(C) \cong H^1(C,\mathbb{C}).$$

定义周期向量: 对 $H_1(C,\mathbb{Z})$ 的一组基 $(\dim = 2g)$, 定义 $2g$ 个 g 维向量:

$$\pi_i = (\int_{\gamma_i} \omega_1 \ \ \ldots \ \ \int_{\gamma_i} \omega_g)^T$$

为一组周期向量 (矩阵为周期矩阵.)

我们可以证明, 这 $2g$ 个周期向量 $\mathbb{R}$ 线性无关.

4.3 *Riemann* 不等式

可以先提一下下一节的结果:

Theorem 24 (*Riemann–Roch*)**.** *设 C 是亏格为 g 的紧黎曼面, $D \in \mathrm{Div}(C), \deg D = d$. 则*

$$l(D) = d - g + i(D) + 1$$

Theorem 25 (*Riemann* 不等式)**.** *条件同上.*

$$l(D) \geq d - g + 1.$$

证明. 我的说明还是依赖于正则化:

$$\pi : C \to C' \subset \mathbb{CP}^2,$$

使得 C 是 C' 的正则化: 除了 δ 个通常的二重点 $P_1, \cdots, P_\delta$ 之外无其它重点的代数曲线. 设 $\pi^{-1}(p_i) = p_i' + p_i''(i = 1, 2, \cdots, \delta)$, 记

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\delta} (p_i' + p_i'') \in \mathrm{Div}(C)$$

借助 $\mathbb{CP}^2$ 中的坐标变换, 假定 $\pi(D)$ 上 $\pi(\Delta)$ 皆不含无穷远点.

设 C' 由方程 $F\left(\xi^0,\xi^1,\xi^2\right)=0$ 给出, $\deg F=m$

设 $D=D'-D''$, 其中 $D',D''\geqslant 0$. 记

$$\deg D'=d',\quad \deg D''=d''.$$

以 S^n 表示复系数三元 n 次齐次多项式集合. 则 S^n 是复数域 C 上的线性空间,

$$\dim S^n=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

设 $G\left(\xi^0,\xi^1,\xi^2\right)\in S^n$, 满足:$F\nmid G$ 的同时 $G\cdot C\geqslant D'+\Delta$, 其中

$$G\cdot C=\left(\pi^*\left(G\left(\xi^0,\xi^1,\xi^2\right)\right)_0\right.$$

这里给出了 $G\cdot C$ 一个显式的结果, 并指出 $G\cdot C\geqslant D'+\Delta$ 实际上是要求 G 的系数应当满足 $d'+\delta$ 个线性方程. 具体的 (这是一个很有趣的取函数的问题, 我们总能取到 n,$\geq\dim\ S-(d'+\delta)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-d'-\delta\geq\dim\{G\in S^n|F|G\}=\dim\ S^{n-m})$ 我们需要取一个这样的 G.

令 $E=G\cdot C-D'-\Delta$. 置

$$S=\{H\in S^n\mid H\cdot C\geq\Delta+E+D''\}$$

计算 $\dim\ S$. 由 $Bezout$ 定理

$$(G\cdot C)=\deg G\cdot\deg F=nm$$

故

$$\deg E=nm-d'-2\delta$$

就像上面 (对 G) 讨论的一样:

$$H\cdot C\geqslant\Delta+E+D''$$

等价于 H 的系数应当满足 $(\delta+\deg E+\deg D'')$ 个线性方程. 而

$$\begin{aligned}\delta+\deg E+\deg D''&=\delta+(nm-d'-2\delta)+d''\\&=-\delta+nm-d\end{aligned}$$

故

$$\dim S\geq\frac{1}{2}(n+1)(n+2)+\delta-nm+d$$

对每个 $H\in S$, 定义

$$f_H=\pi*\left(\left.\frac{H}{G}\right|_{C'}\right)$$

则

$$\begin{aligned}(f_H)+D &= (H\cdot C)-(G\cdot C)+D\\ &\geqslant (\Delta+E+D'')-(E+D'+\Delta)+D=0\end{aligned}$$

故 $f_H \in \mathscr{L}(D)$. 于是有映射

$$\begin{aligned}a:&S\to\mathscr{L}(D),\\ &H\to f_H\end{aligned}$$

这是线性空间的同态, 而且我们有:

$$\ker(\alpha)=F\cdot S^{n-m}$$

这意味着:

$$\begin{aligned}l(D)&\geq \dim S-\dim S^{n-m}\\ &\geqslant \frac{1}{2}(n+1)(n+2)+\delta-nm+d\\ &-\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)\\ &=d-\frac{1}{2}\left(m^2-3m\right)+\delta=d-g+1\end{aligned}$$

这里用到了亏格公式. □

我们也可以对 $i(D)$ 有相似的叙述, 关键是在于函数的选取.

注:$\mathcal{H}$ 是 M 上全纯 1− 形式的全体组成的复向量空间 ($\dim\mathcal{H}=\dim i(0)\leq d(K)+1<+\infty$), 我们有引理:

Theorem 26. *设 M 为紧致黎曼曲面, n 为正整数. 任取 $p\in M, B$ 为 p 附近的坐标邻域, z 为 B 上的坐标函数, $z(p)=0$. 则存在 M 上的亚纯微分 ω, 使得 ω 以 p 为惟一极点, 且在 p 附近有*

$$\omega=\mathrm{d}\left(\frac{1}{z^n}\right)+\omega_h,$$

其中, ω_h 是 p 附近的全纯微分, 并且奇异积分 $\int_M\omega\wedge\bar{\phi}_i=0, i=1,2,\cdots,g$. 其中 $\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_g\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一组基.

这个引理可以帮助我们得到一个 $d:\mathscr{L}(D)\to m(D)=\mathrm{span}\{\mathrm{d}(\frac{1}{z^k})+\eta_i^k\}$,$1\leq k\leq n_i, 1\leq i\leq m$, η_i^k 为 p_i 邻域的全纯微分. 而像集 $d(\mathscr{L}(D))$ 在 $m(D)$ 中满足 g 个线性约束条件. 这可以做这个不等式. 下面的 Riemann-Roch 定理需要我们决定出 Im d 的维数 (线性无关). 梅的书构造了几个我很难想到的线性算子.

4.4 $Riemann - Roch$ 定理

证明. 首先我们先证明: 如果 $D \geq 0$, 则

$$l(D) \leq d - g + i(D) + 1$$

重温 p_i 附近的 Laurent 尾: 设 $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_k)$

$$\eta_i = \frac{a_{in_i}}{z_i^{n_i}} + \cdots + \frac{a_{i1}}{z_i}$$

全体 η 组成的线性空间与 $\mathbb{C}^d$ 同构. 考虑映射:

$$RES : \mathbb{C}^d \times \Omega^1(C) \to \mathbb{C}$$

$$(\eta, \omega) \to \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}_{p_i}(\eta_i \omega)$$

这是一个双线性映射. 我们可以由定义得到性质:

$$RES(\eta, \omega) = 0, \quad \forall \eta \in \mathbb{C}^d \Leftrightarrow \omega \in K^1(D)$$

然后非常精彩的是它考虑了

$$RES_1 : \mathbb{C}^d \times \Omega^1(C)/\Omega^1(D) \to \mathbb{C}$$

对 $\Omega^1(C)/\Omega^1(D)$ 是非退化的, 同时在第一节里面我们已经把 $\mathscr{L}$ 当做 $\mathbb{C}^d$ 的线性子空间,

$$\mathscr{L}(D)/\mathbb{C} \to \{(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)\}$$

由留数定理可以得到:

$$RES_1(\mathscr{L}(D)/\mathbb{C} \times \Omega^1(C)/\Omega^1(D)) = 0$$

由线性代数的知识:

$$\dim(\mathscr{L}(D)/\mathbb{C}) \leq \dim\, \mathbb{C}^d - \dim(\Omega^1(C)/\Omega^1(D))$$

算一下维数就是不等式. 然后只要分情况讨论 (有一些小的细节需要处理, 注意到 $\dim\, \omega = \chi$) □

Riemann-Roch 定理是研究的起点, 在很多语境下都有深刻的解释. 这里补充用层 (sheaf) 语言的叙述.

Proposition 4.1. *如果 L 为黎曼曲面 M 上的全纯线丛, D 为有效因子, 则有层的短正合序列:*

$$0 \to \Omega(L) \to \Omega(L + \lambda(D)) \to \mathcal{S}_D \to 0$$

这里 $\Omega(L)$ 代表线丛 L 全纯截面层 ,$\lambda(D)$ 代表 D 生成的线丛,$\mathcal{S}_D$ 代表摩天大厦层. 这可以诱导出长正合列 (都是 Čech 上同调):

$$0 \to H^0(M, \Omega(L)) \to H^0(M, \Omega(L + \lambda(D))) \to H^0(M, \mathcal{S}_D) \to H^1(M, \Omega(L)) \cdots$$

然后估计以下维数, 如果定义 (Euler 数, 这一段是对一般的层的短正合列都对的. 不过在我们考虑 $\Omega(L)$ 是全纯函数芽层的时候, 由 Dolbeault 定理,H^2 就没了):

$$\chi(S) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \dim\, H^q(M, S)$$

则有 $\chi(\Omega(L + \lambda(D))) = \chi(\Omega(L)) + \chi(\mathcal{S}_D)$. 在取 $\Omega(L)$ 全纯函数芽层的时候, 注意到

$$\omega = \omega_h + \mathrm{d}f + *\mathrm{d}g$$

取 ω 为 (0,1)-form, 考虑两边的 (0,1) 分量:

$$\omega = \omega_h' + \bar{\partial}(f + \sqrt{-1}g)$$

这就构造了 $H^{0,1}_{\bar{\partial}} \cong \bar{\mathcal{H}}. \, Then \; \chi(\mathcal{O}) = 1 - g.$

那么就有对任意因子 (有效因子是直接的, 一般的减一下就行了):

$$\chi(\lambda(D)) = (1 - g) + d(D)$$

然后我们要用到 Serre duality(这个定理的证明很简单, 证明是个 perfect pairing 就行了, 不证了直接开算!). 那么就有:

$$\begin{aligned}
\dim l(D) - \dim i(D) &= \dim \Gamma_h(\lambda(D)) - \dim \Gamma_h\left(T_h^* M - \lambda(D)\right) \\
&= \dim H^0\left(M; \Omega^0(\lambda(D))\right) - \dim H^0\left(M; \Omega^0\left(T_h^* M - \lambda(D)\right)\right) \\
&= \dim H^0\left(M; \Omega^0(\lambda(D))\right) - \dim H^0\left(M; \Omega^1(\lambda(-D))\right) \\
&= \dim H^0\left(M; \Omega^0(\lambda(D))\right) - \dim H^1\left(M; \Omega^0(\lambda(D))\right) \quad (Serre) \\
&= \chi(\lambda(D))
\end{aligned}$$

第一行源于线性空间的同构, 根据定义就可以做.

接下来我们给出在 $\mathbb{CP}^1$ 和环面上直接证 Riemann-Roch 定理的例子. 构造函数:

$\mathbb{CP}^1$ 上: 对 $D = n_1 p_1 + \cdots + n_k p_k$, $(p_1, \cdots, p_k)$ 均不是无穷远点. 设 p_i 在 C 中的坐标为 $z_i (i = 1, \cdots k)$. 考虑

$$f_0(z) = 1,$$
$$f_{ij}(z) = \begin{cases} \frac{1}{(z - z_i)^j}, & \text{当} z \neq, \infty, \\ 0, & \text{当} z = \infty, \end{cases}$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant n_i$. 则构成 $\mathscr{L}(D)$.

$C = \mathbb{C}/\{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 | m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$, 不妨假设:

$$D = \sum_{i=1}^{k} n_i p_i \quad (n_1, \cdots, n_k > 0)$$

对每个 p_i, 取它在投影 φ: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 | m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$ 的一个原象 z_i. 定义半纯函数:

$$\mathscr{P}_i(z) = \mathscr{P}_i(z - z_i) \quad i = 1, \cdots, k.$$

定义:

$$f_{ij} = \frac{(-1)^j}{(j+1)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^j \mathscr{P}_i(z)}{\mathrm{d}z^j}$$

这里 $(i = 1, \cdots, k; j = 1, \cdots, n_i - 2)$.

$$g_i(z) = (z_i - z_{i+1})\left[\frac{1}{(z-z_i)(z-z_{i+1})} + \sum_{\omega \in lattice \backslash O}\left(\frac{1}{(z-z_i-\omega)(z-z_{i+1}-\omega)} - \frac{1}{\omega^2}\right)\right]$$

这两组函数都是良好定义的函数. 观察极点,$f = 1$ 与他们构成基 (why?). 下面我们会更多的关注 Riemann-Roch 定理的应用. 从此真正开始了引人入胜的部分.

5 Riemann-Roch 定理的应用 (1)

伍鸿熙在他的前言里面提到研究黎曼面的三个主要观点:

- 复流形的观点, 我们会继续追随 Griffiths 的脚步研究一些复投影空间内的代数簇理论.
- 代数几何的观点 (代数曲线).
- 代数数论的观点.$\mathfrak{M}(M)$ 是一个一元代数函数域.

这章我们会利用 Riemann-Roch 定理 (其实是利用亚纯函数) 来刻画超椭圆和非超椭圆的紧黎曼面以及低亏格的紧黎曼面. 我们会在这一章的最后增加一些最基础对 $\mathfrak{M}(M)$ 的讨论 (码字的时候太困了所以写的很少). 在下一章 Riemann-Roch 定理的应用中, 我们会关注嵌入定理, Weierstrass 点, Abel-Jacobi 定理, 紧 Riemann 面的 Jacobi 簇等 (总的来说就是会拖更很久的意思). 希望能够用满意的语言叙述出来. 除去《代数曲线》,Phillip A. Griffiths, 我们增添或者即将增添《紧黎曼曲面引论》, 伍鸿熙,《黎曼曲面》, S.K.Donaldson,《代数几何原理》, Griffiths, Harris 的内容.

在开始之前, 我们先需要一些函数存在性的引理:

Lemma 5.1. *M 为紧黎曼面,D 为某一 $\deg(D) \neq 2g-1$ 的因子, 则*

$$K^1(D) \cong \mathscr{L}(K - D) = 0, \quad l(D) = \deg(D) + 1 - g$$

注: 这里可以直接发现一个有趣的结果: 设 M 为紧致黎曼曲面, $p \in M$. 我们知道,

$$\mathbb{C}=l(0)=\mathscr{L}(p) \subset \mathscr{L}(2p) \subset \mathscr{L}(3p) \subset \cdots \subset \mathscr{L}((2g-1)p), \quad \dim \mathscr{L}((2g-1)p)=g.$$

因为 $l(ip)-l((i-1)p)=0$ 或 1 , 上式表明, 当 $g>0$ 时, 正好存在 g 个数

$$1=n_1<n_2 \cdots<n_g \leqslant 2g-1$$

使得 $l\left(n_i p\right)-\left(\left(n_i-1\right) p\right)=0, i=1, \cdots, g$. 我们之后会专门关注这个事情.

由引理可以得到以下推论:

(1) 任给 $p \in M$, 存在亚纯函数 f, 使得 f 以 p 为惟一极点, 且重数 $\leqslant g+1$;

(2) 任给 $p \in M$, 存在亚纯函数 f, 使得 f 以 p 为惟一零点, 且重数 $\leqslant g+1$;

(3) 任给 $p \neq q \in M$, 存在亚纯函数 f, 使得 $f(p) \neq f(q)$;

(4) 任给 $p \in M$, 存在亚纯函数 f, 使得 $f(p)=0$, 且 p 为单零点;

(5) 当 $g>1$ 时, 存在亚纯函数 f, 使得 f 的分歧覆盖叶数 $\leqslant g$.

5.1 亏格为 0 的情形

用 Riemann-Roch 提供的函数 (考察 $\mathscr{L}(p)$) 打到 $\mathbb{CP}^1$ 发现是全纯同构.

注: 对单连通的黎曼曲面, 双曲型 (存在非常值有界次调和函数) 全纯同构与 $\mathbb{D}$, 椭圆型 (紧致)$\mathbb{S}$, 抛物型 $\mathbb{C}$. 单值化定理我最开始读到的做法是用利用 Perron 方法和 Green 函数, 最大值原理处理问题 (非紧的情形就需要更多分析的手法).

5.2 亏格为 1 的情形

Theorem 27. *C 为亏格为 1 的紧黎曼面, 则可以表成 $\mathbb{CP}^2$ 的一条光滑三次代数曲线.*

对环面 $C=\mathbb{C}/\{m_1\omega_1+m_2\omega_2 | m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$, 我们已经证明了

$$C \rightarrow \mathbb{CP}^2$$

$$[\omega] \rightarrow [1, \mathscr{P}(\omega), \mathscr{P}'(\omega)]$$

为三次光滑曲线, 所以我们的目的是构造 $C \rightarrow \mathbb{CP}^2$ 的全纯单的映射.

首先由于对任一有效因子 D, 总有 $i(D)=0$(由于 $\deg(\omega)=2g-2=0$, 若否, 则必有极点).

Step 1: 我们先构造两个亚纯函数 x, y 对应之前的 $\mathscr{P}, \mathscr{P}'$. 并由此构造我们需要的全纯映射.

证明. 取 $p \in C$. 又取 $D=2p \in \operatorname{Div}(C)$. 由上一段的讨论知:

$$l(D)=d-g+i(D)+1=2$$

故 $\mathscr{L}(D)$ 中必有以 p 为奇点 (阶不超过 2) 的亚纯函数. 易知这样的亚纯函数必以 p 为二阶极点. 事实上, 由 Riemann-Roch 定理知

$$l(p) = 1 - 1 + 0 + 1 = 1,$$

即 $\mathscr{L}(p)$ 中只有常值函数.

设 $x \in \mathscr{L}2p$. 则在 p 点附近,

$$x = \frac{c_2}{t^2} + \frac{c_1}{t} + h_1(t),$$

其中 t 为 p 点附近局部坐标, $t(p) = 0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $c_2 \neq 0; h_1(t)$ 全纯. 适当地改变 p 点附近的局部坐标可以使 c_1 消失. 事实上, 设 $\omega \in Q^1(C)$, 在局部坐标 t 下, $\omega = g(t)\mathrm{d}t$, 其中 $g(0) \neq 0$. 令

$$z_1 = \int_0^z g(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$\mathrm{d}z_1|_{z_1=0} = g(0) \neq 0.$$

这意味着 z_1 可以作为 p 点附近的局部坐标. 在此局部坐标下, $\omega = \mathrm{d}z_1$. 注意到 $x\omega$ 除了 p 之外无其它极点, 由留数定理即知,

$$0 = \mathrm{Res}(x\omega) = \tilde{c}_1.$$

所以 (多做一步变换), 我们得到

$$x = \frac{1}{z^2} + h(z) \quad (z = \tilde{c}_2^{-1/2} z_1)$$

取定 $\omega \in \Omega^1(C)$. 令 $y = \frac{\mathrm{d}x}{\omega}$. 定义映射:

$$\begin{aligned} f : C &\to \mathbb{CP}^2, \\ q &\mapsto [1, x(q), y(q)] \\ (p &\mapsto [0, 0, 1]). \end{aligned}$$

Step 2: 现在证明 $f(C)$ 落在 $\mathbb{CP}^2$ 中的一条三次曲线上. 视 x 为由 C 到 $\mathbb{CP}^1$ 的全纯映射, 则 $x^{-1}(\infty) = 2p$. 故

$$\deg x = 2.$$

因此 x 在其分歧点的分歧指数都不超过 2. 设 R 为 x 的分歧因子, 则 R 中每个点的系数只能是 1. 由 Riemann-Hurwitz 公式 (=4) 知除点 p 之外 x 还有三个两两不同分歧点, 即

$$R = p_1 + p_2 + p_3 + p,$$

设 $x\,(p_i) = a_i \quad (i = 1, 2, 3)$.

对于一个亚纯函数, 我们用 $(a)_0,(a)_\infty$ 表示零点和极点集合. 由 y 的构造知

$$(y)_0=(\mathrm{d}x)_{0,}\quad (y)_\infty=(\mathrm{d}x)_\infty$$

因此, $(y)_0$ 及 $(y)_\infty$ 只可能含有 x 的奇点, 即 p_1,p_2,p_3,p. 现在我们计算 $(y)_0$ 及 $(y)_\infty$.

设 $z_i(i=1,2,3)$ 为 p_i 附近的局部坐标,

$$z_i\left(p_i\right)=0.\ ,\quad x-a_i=z_i^2h_i\left(z_i\right),$$

其中 h_i 为全纯函数, 且 $h_i(0)\neq 0$. 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x&=2z_ih_i\left(z_i\right)\mathrm{d}z_i+z_i^2h_i'\left(z_i\right)\mathrm{d}z_i\\&=z_i\left(2h_i\left(z_i\right)+z_ih_i'\left(z_i\right)\right)\mathrm{d}z_i.\end{aligned}$$

由于

$$\left.\left(2h_i\left(z_i\right)+z_ih_i'\left(z_i\right)\right)\right|_{z_i=0}=2h_i(0)\neq 0,$$

故 $\mathrm{d}x$ 以 p_i 为零点. 在 p 点显然 $\mathrm{d}x$ 为三阶极点. 故有

$$(y)_0=p_1+p_2+p_3,\quad (y)_\infty=3p,\quad (y)=p_1+p_2+p_3-3p.$$

现考虑 $\mathbb{CP}^1$ 上的亚纯函数

$$g(x)=\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)\left(x-a_3\right).$$

将 g 看作 C 上的函数 (即 x^*g), 则

$$(g)_0=2p_1+2p_2+2p_3,\quad (g)_\infty=6p.$$

这因为在 $p_i(i=1,2,3)$ 附近 $x-a_i=z_i^2h_i\left(z_i\right)$, 故 g 以 p_i 为二阶零点; 而在 p 点附近每个 $(x-a_i)$ 都以之为二阶零点. 所以我们可以注意到 g 的因子恰为 y^2 的 (计重数). 由紧性, 故有 $\frac{y^2}{g}=a\in\mathbb{C}$, 不妨设 $y^2=g(x)$. 这说明了 C 在 f 下的象落在

$$C'=\{[1,x,y]\in\mathbb{CP}^2|y^2-g(x)=0\}\cup\{[0,0,1]\}$$

Step 3: 说明单的.

Step 4: 说明 $f(C)=C'$. 由于 $y^2-g(x)=0$ 仿射方程不可约, 故 C' 是连通的, 同时由于是紧的 (连续映射) 故是闭的. 而 f 的全纯保证是开映射.

Step 5: 证明 C' 是光滑的. 直接开导! 若 $\frac{\partial F}{\partial\xi^i}(i=1,2,3)$ 均为零且 $F=0$(根据光滑的定义我们需要否定掉这一个可能性), 则根据射影方程:

$$F=\xi^0\left(\xi^2\right)^2-\left(\xi^1-a_1\xi^0\right)\left(\xi^1-a_2\xi^0\right)\left(\xi^1-a_3\xi^0\right)=0.$$

我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \xi^0} =&\left(\xi^2\right)^2+a_1\left(\xi^1-a_2\xi^0\right)\left(\xi^1-a_3\xi^0\right)\\&+a_2\left(\xi^1-a_1\xi^0\right)\left(\xi^1-a_3\xi^0\right)\\&+a_3\left(\xi^1-a_1\xi^1\right)\left(\xi^1-a_2\xi^0\right)\\\frac{\partial F}{\partial \xi^1} =&-\left(\xi^1-a_2\xi^0\right)\left(\xi^1-a_3\xi^0\right)\\&-\left(\xi^1-a_1\xi^0\right)\left(\xi^1-a_3\xi^0\right)\\&-\left(\xi^1-a_1\xi^0\right)\left(\xi^1-a_2\xi^0\right)\\\frac{\partial F}{\partial \xi^2} =&2\xi^0\xi^2.\end{aligned}$$

$$2\xi^0\xi^2=0.$$

故将此式代人 $F=0$, 即有

$$\left(\xi^1-a_1\xi^0\right)\left(\xi^1-a_2\xi^0\right)\left(\xi^1-a_3\xi^0\right)=0.$$

至少有俩是 0, 发现必须有 $\xi^0=\xi^1=\xi^2=0$. 这是不可能的. □

注 1: 这个做法非常标准, 对一般情形的处理我就做的简洁一些了.

注 2: 另外一个证法是葛老师上课讲的, 也是书上有的.

如果 $g\geqslant 1$, 设 $\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_g\}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一组标准正交基, 令

$$G=\sum_{i=1}^{g}\phi_i\otimes\bar{\phi}_i,$$

则 G 为 M 上非退化度量且与标准正交基的选取无关, 称为 Bergman 度量. 特别地, 如果 $g=1$, 则 Bergman 度量为平坦度量, 从而 M 的复迭空间同构于 $\mathbb{C}$. 这就说明, 亏格为 1 的紧黎曼面必和某个黎曼环面 $\mathbb{C}/\Lambda$ 同构.

5.3 典范映射

对于 $g\geq 2$ 的紧黎曼面, 我们关注它到 $\mathbb{CP}^{g-1}$ 的特殊形式的全纯映射. 取全纯微分空间的一组基, 定义:

$$\varphi:\ C\to\mathbb{CP}^{g-1}$$

$$p\mapsto[\omega_1(p),\ldots,\omega_g(p)]$$

如果我们记局部的表示形如: $\omega_i=f_i(z)\mathrm{d}z$, 则有

$$p\mapsto[f_1(p),\ldots,f_g(p)]$$

需要注意到这个定义是与局部坐标的选取无关且是合理的 (不全为 0). 事实上, 对该 p 有全部的取值都为 0. 那么

$$\Omega^1(p)=\Omega^1(C),\quad i(p)=g$$

由于 Riemann-Roch 定理知 存在非常值的亚纯函数 f, $f^{-1}(\infty)=p$. 这给了一个到 $\mathbb{CP}^1$ 的同构, 矛盾. 我们可以注意到: φ 是非退化的; 如果典范映射不是单射, 则 C 为超椭圆型的黎曼曲面 (存在重数为 2 的亚纯函数, 若不存在我们称是超椭圆的.)(推论: 亏格为 2 的紧致黎曼曲面均为超椭圆型的.)

证明. 不妨设 $p\neq q\in C$, $\varphi(p)=\varphi(q)$. 由于 Riemann-Roch 定理, 注意到

$$\Omega^1(p+q)=\Omega^1(p)$$

知 $\mathscr{L}(p+q)$ 中存在重数为 2 的亚纯函数 f. □

注: 在对超椭圆型的黎曼曲面的定义中, 我们说如果存在重数为 2 的亚纯函数, 这意味着它可以被表示为 $\mathbb{CP}^1$ 的一个双叶分支覆盖. 我们说明了典范曲线 (即将被定义) 可以由曲面内蕴地定义, 这里有一个普遍的结果: 典范曲线的任意射影不变量反映黎曼曲面的内在结构. 我们会继续认识这个原理.

定义典范曲线: 对 $g\geq 2$ 的紧非超椭圆黎曼面, 典范映射的像集是典范曲线. 我们可以证明:

Theorem 28. *非超椭圆型的紧黎曼面的典范映射都是全纯嵌入 (injective immersion) 且典范曲线是光滑的.*

其实是可以直接证明的, 不过为了以后方便, 我们用一个拓展一些的概念和结果. 设 M 为黎曼曲面, $f_0,f_1,\cdots,f_n$ 为 M 上的非零亚纯函数, 用如下方式定义全纯映射

$$M\to\mathbb{C}P^n:\ (f_0:f_1:\cdots:f_n):$$

任取 $p\in M$, 如果 p 不是任何 f_i 的极点, 也不是 f_i 的公共零点, 则令

$$(f_0:f_1:\cdots:f_n)(p)=[f_0(p),f_1(p),\cdots,f_n(p)].$$

显然, 上式在 p 附近都可以如此定义, 并且在 p 附近这样定义的映射是全纯的; 如果 p 为某个 f_i 的极点或为 f_i 的公共零点, 取

$$\nu=\min\{\nu_p(f_0),\nu_p(f_1),\cdots,\nu_p(f_n)\}.$$

取 p 附近的局部坐标映射 z, 使得 $z(p)=0$. 定义

$$(f_0:f_1:\cdots:f_n)(p))=\left[\left(z^{-\nu}f_0\right)(p),\left(z^{-\nu}f_1\right)(p),\cdots,\left(z^{-\nu}f_n\right)(p)\right].$$

易见, 这个定义与坐标映射的选取无关, 并且在 p 附近都可以这样定义, 定义出来的映射还是全纯的.

Proposition 5.1. *设 $f_0,f_1,\cdots,f_n$ 为黎曼曲面 M 上的非零亚纯函数, 在 $p\in M$ 附近全纯. 如果存在 $i\neq j$, 使得 $f_i(p)\neq 0,\nu_p(f_j)=1$. 则 p 是如上构造的全纯映射的一个非奇异点.*

证明. 不失一般性, 假设 $f_0(p) \neq 0, \nu_p(f_1) = 1$. 选取 p 附近的局部坐标 $z, z(p) = 0$. 记 $f = (f_0 : f_1 : \cdots : f_n)$, 则由 f 的构造, $f(p) \in U_0$, 其中

$$U_0 = \{[z_0, z_1, \cdots, z_n] \in \mathbb{C}P^n \mid z_0 \neq 0\}$$

在 U_0 上取坐标映射 ϕ:

$$\phi([z_0, z_1, \cdots, z_n]) = (z_1/z_0, z_2/z_0, \cdots, z_n/z_0)$$

考虑 f 在坐标映射 z 及 ϕ 下的局部表示可知 p 为非奇异点. □

回到原问题. 只要说明典范映射 φ 处处非退化即可. 任取 $p \in M$, 我们已经知道 $i(0) = g, i(p) = g - 1$. 下面说明 $i(2p) = g - 2$. 事实上, 由定义易见

$$i(2p) \leqslant i(p) \leqslant i(2p) + 1$$

另一方面, 由 Riemann-Roch 公式,

$$l(2p) = i(2p) + 3 - g$$

如果 $i(2p) = g - 1$, 则 $l(2p) = 2$, 从而 $l(2p)$ 中存在非常值亚纯函数, 这和非超椭圆型的相矛盾. 因此只能 $i(2p) = g - 2$.

由此在黎曼曲面上存在全纯微分以 p 为单零点. 因此, 在定义典范映射时, 我们可以选取 $\mathcal{H}$ 的基, 使得 $\omega_1(p) \neq 0$, ω_2 以 p 为单零点. 由前一个引理的证明即知 p 为典范映射的非奇异点. 这就证明了我们的断言.

注: 典范曲线的重要性来自 Riemann–Roch 公式的几何解释.

5.4 超椭圆型的紧 Riemann 面

我们来考虑超椭圆型的黎曼曲面在 $\mathbb{CP}^2$ 中的实现问题.

Theorem 29. *任何亏格为 g 超椭圆紧黎曼面都可以表示成一条次数为 $2g+2$ 的平面代数曲线.*

证明. Step 1: 取亚纯函数 $x : M \to \mathbb{CP}^1$ 其重数为 2. 由 Riemann-Hurwitz 公式知 x 的分歧点由 $2g + 2$ 个不同的点构成, 设为 $\{p_i\}_{i=1}^{2g+2}$. 不妨设 $q_1 \neq q_2$ 为 x 的极点, 记 $x(p_i) = a_i$.

Step 2: 同样定义 j 为 C 上的对合映射 (交换同一个点在 x 下的两个原象). 考虑 j^* 在 $\Omega^1(C)$ 上的作用:$\omega \mapsto -\omega$.

Step 3: 考虑 $D = (g + 1)(p + q) \in \mathrm{Div}(C)$. 我们可以取到亚纯函数 $y \in \mathscr{L}(D)$, 使得

$$j^*(y) = -y$$

Step 4: 我们断言 $y^2 = cg(x),\ c \in \mathbb{C},\ c \neq 0$. 由 $j(p_i) = p_i$ 及上式知 $y(p_i) = 0, i = 1, \cdots, 2g+2$. 由 $y \in \mathscr{L}(D)$ 知

$$2g+2 = \deg \sum_{i=1}^{2g+2} p_i \leq \deg(y)_0 = \deg(y)_\infty \leq \deg(D = 2g+2$$

由此可以看出

$$(y) = p_1 + p_2 + \cdots + p_{2g+2} - (g+1)(q_1 + q_2).$$

另一方面, 直接的计算表明, 亚纯函数

$$g = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{2g+2})$$

诱导的因子满足等式

$$(g) = 2p_1 + 2p_2 + \cdots + 2p_{2g+2} - (2g+2)(q_1 + q_2).$$

这是因为 $(x - a_i)_\infty = p + q,\ x - a_i = z_i^2 h_i(z_i)$.

这说明 $(y^2) = (g)$. Step 4 得证.

Step 5: 定义全纯映射 $f = (1 : x : y) : M \to \mathbb{C}P^2$, 定义

$$C' = \{y^2 - cg(x) = 0\} \cup \{[0,0,1]\}$$

可以说明 f 是单的且 $f(M) = C'$. 于 $g = 1$ 情况不同的是,C' 在 $[0,0,1]$ 处是奇异的. □

注: 反过来, 任给 $2g+2$ 个两两不同的复数, 令

$$C' = \left\{ y^2 - \prod_{i=1}^{2g+2} (x - a_i) = 0 \right\} \cup [0,0,1] \subset \mathbb{CP}^2$$

则 C' 的正则化就是亏格为 g 的超椭圆紧黎曼面.

下面我们通过如上构造的亚纯函数 x, y 给出超椭圆型曲面的全纯微分的一组基. 构造

$$\omega_1 = \frac{\mathrm{d}x}{y}, \omega_2 = \frac{x\mathrm{d}x}{y}, \cdots, \omega_g = \frac{x^{g-1}\mathrm{d}x}{y}$$

显然 $\{\omega_i\}$ 关于 $\mathbb{C}$ 线性无关, 下面说明它们没有极点. 事实上,

$$(x) = q_1' + q_2' - q_1 - q_2.(\text{俩零点俩极点})$$

则 x 的分歧点 $\{p_i\}$ 为 $\mathrm{d}x$ 的单零点, q_1, q_2 为 $\mathrm{d}x$ 的双极点. (还是根据 $x - a_i = z_i^2 h_i(z_i)$ 一样算, h_i 全纯且 $h_i(0) \neq 0$). 事实上 (极点的时候算一下吧), 取极点的局部坐标 z, 在 $\mathbb{CP}^1$ 上无穷远点附近选取通常的局部坐标 u , 即有 $u = 1/x$. 我们有

$$u = zh(z),$$

其中 $h(z)$ 全纯,$h(0) \neq 0$. 于是

$$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{(h(z) + zh'(z))\,\mathrm{d}z}{z^2 h(z)^2}$$

由于

$$(h(z) + zh'(z))\big|_{z=0} \neq 0, \quad h(z)^2\big|_{z=0} \neq 0,$$

因此是二阶的. 由此

$$(\mathrm{d}x) = \sum_{i=1}^{2g+2} p_i - 2\,(q_1 + q_2)$$

从而有:

$$\begin{aligned}
(\omega_i) &= i \cdot x + (\mathrm{d}x) - (y) \\
&= i\,(q_1' + q_2' - q_1 - q_2) + \sum_{i=1}^{2g+2} p_i - 2\,(q_1 + q_2) - \sum_{i=1}^{2g+2} p_i + (g+1)\,(q_1 + q_2) \\
&= i\,(q_1' + q_2') + (g - i - 1)\,(q_1 + q_2) \geqslant 0
\end{aligned}$$

因此当 $0 \leqslant i \leqslant g-1$ 时 ω_i 为全纯微分.

这样我们就给出了一组很优美的基. 在这组基下典范映射的表达式:

$$t \mapsto [1, x(t), \cdots, x(t)^{g-1}]$$

注: 同构的意义在于每个 g 亏格的超椭圆紧黎曼面被

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_{2g+2})\}$$

在 $\mathbb{CP}^1$ 的线性同构意义下分类. 这里的等价类是: 若存在 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, 使得

$$\frac{aa_i + b}{ca_i + b} = b_i \quad \forall i$$

5.5 亏格为 3 的情形

Definition 7 (超平面截口)**.**

设 C 是 $\mathbb{CP}^n$ 中一条光滑的代数曲线, H 是由方程

$$L(\xi) = \sum_{i=0}^{n} l_i \xi^i = 0$$

定义的一个超平面, 且 H 中不含任一不可约分支. 则 C 的超平面截口是指依下述步骤所得到的 $\mathrm{Div}(C)$ 中的一个元素: 取一个一般的线性函数

$$L'(\xi) = \sum_{i=0}^{n} l_i' \xi^i$$

(所谓 $L'(\xi)$ 是一个一般的线性函数, 意为

$$\{L'=0\}\cap C\cap\{L=0\}$$

为空集), 则

$$\frac{L}{L'}\in\mathfrak{M}\left(\mathbb{CP}^n\right),\quad \left.\frac{L}{L'}\right|_C\in\mathfrak{M}(C)$$

C 的超平面截口 (记为 $H\cdot C$) 即为 $\left.\frac{L}{L'}\right|_C$ 在 C 上的全部零点 (重数考虑在内), 即

$$H\cdot C=\left(\left.\frac{L}{L'}\right|_C\right)_0$$

定义曲线的次数: $\deg\ C=\deg(H\cdot C)$. 容易说明这个定义与超平面的选取无关, 当 $n=2$ 时,H 是射影平面中不含 C 的不可约曲线分支的直线. 由 Bezout 定理可知这里的曲线次数定义与平面曲线次数的定义一致.

下面把亏格 $g>1$ 的非超椭圆紧黎曼面与典范曲线等同起来 (将曲面当作 $\mathbb{CP}^{g-1}$ 中的光滑曲线), 因为典范映射是单的.

Proposition 5.2. *设 C 是亏格为 g 的典范曲线, 则*

$$\deg\ C=2g-2.$$

有这个结果, 我们容易说明亏格为 3 的典范曲线是光滑的四次平面代数曲线.

注: 我们注意到几乎所有的四次齐次方程给出的平面代数曲线都是光滑的 (Sard theorem), 光滑曲线的亏格都是 3(根据亏格公式). 按照上面的同构关系可以算出来维数 (6). 然后算一下超椭圆的紧黎曼面的维数 (5). 所以几乎所有的亏格为 3 的紧黎曼面都是典范曲线. (这是一个非常不严谨的叙述, 不过书上就是这么说的. 希望以后我可以把这段话说好.) 之后会告诉读者, 亏格 $g\geq 3$ 的几乎所有的紧 Riemann 曲面的确是非超椭圆的.

5.6 亏格为 4 的情形

我们也是先做一些一般的讨论. 设 C 为 $\mathbb{CP}^n$ 中的一条光滑代数曲线. 设

$$H=\left\{\xi^0=0\right\},\quad D=H\cdot C\in\mathrm{Div}(C).$$

我们知道 $\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathscr{L}(kD)$ 以及 $\mathbb{C}\left[\xi^0,\xi^1,\cdots,\xi^n\right]$ 都是分次环. 设

$$r\left(F_k(\xi)\right)=\left.\frac{F_k(\xi)}{\left(\xi^0\right)^k}\right|_C\in\mathscr{L}(kD).$$

将 r 进行线性扩张, 它保持分次乘法, 所以 r 是分次环同态

$$r:\mathbb{C}\left[\xi^0,\xi^1,\cdots,\xi^n\right]\longrightarrow\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathscr{L}(kD).$$

若 C 是典范曲线, 则 r 是满映射 (在这里不给予证明. 读者可以参看 P.Griffiths 著《Principle of Algebraic Geometry》第 253 页 Noether 定理). 设 C 是亏格为 g 的典范曲线。用 S^k 表示 $\mathbb{C}[\xi^0, \xi^1, \cdots, \xi^{g-1}]$ 中 k 次齐次多项式组成的 Abel 群. 沿用上面的记号 r, 令

$$r_k = r|_{S^k}$$

$$\text{则} \quad r_k : \ S^k \longrightarrow \mathscr{L}(kD)$$

是 Abel 群同态. 我们有

$$r_k\left(F_k(\xi)\right) = \left.\frac{F_k(\xi)}{\left(\xi^0\right)^k}\right|_C = \frac{F\left(\omega_1, \cdots, \omega_g\right)}{\omega_1^k},$$

其中 $\omega_1, \cdots, \omega_g$ 为 $\Omega^1(C)$ 的一组基. 记 $I_k = \ker\ r_k$. 由于 r_k 是满射, 故

$$\begin{aligned}\dim I_k &= \dim S^k - \dim \mathscr{L}(kD)\\ &= \dim S^k - l(kD),\end{aligned}$$

dim 表示作为复数域的线性空间维数. 由 Riemann-Roch 定理我们容易得到:

$$l(D) = g. \quad l(kD) = (2k-1)(g-1) \quad (k \geq 2).$$

注意到:

$$\dim S^k = \begin{pmatrix} k+g-1 \\ g-1 \end{pmatrix}$$

因此

$$\dim I_k = \begin{pmatrix} k+g-1 \\ g-1 \end{pmatrix} - (2k-1)(g-\delta), \quad \delta\text{区分 } 0,1$$

Proposition 5.3. *亏格为 4 的典范曲线是 $\mathbb{CP}^3$ 中一个二次曲面和三次曲面的交.*

证明. 首先把它嵌入 $\mathbb{CP}^3$ 中.

我们给出构造. 所谓一个 k 次齐次多项式

$$F_k\left(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3\right) \in I_k,$$

意即

$$\frac{F_k\left(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\right)}{\omega_1^k} = 0$$

也就是 $F_k\left(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$ 在 C 上取值为零. 通过计算维数可以得到:

$$\dim I_2 = 1, \quad \dim I_3 = 5,$$

所以存在一个二次齐次多项式和五个线性无关的三次齐次多项式在 C 上取值为零. 以 $F\left(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3\right)$ 表示在 C 上取值为零的二次齐次项式, 则 $\xi^0 F, \xi^2 F, \xi^2 F, \xi^3 F$ 为四个在 C

上取值为零的线性无关的三次齐次多项式. 因此还应有一个与 $\{\xi^i F \mid i=0,1,2,3\}$ 线性无关的三次齐次多项式在 C 上取值为零, 记为 $G(\xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3)$. 设

$$Q=\{F(\xi^0,\xi^1;\xi^2,\xi^3)=0\}$$
$$V=\{G(\xi^0,\xi^1,\xi^2;\xi^3)=0\}$$

显然 $C\subset Q\cap V$. 下证: $C=Q\cap V$.

Step 1: Q 是不可约的. 只需要考察 I_1.

Step 2: Q 与 V 没有公共的曲面分量 (若有即为 Q). 这直接来自于 G 的构造.

Step 3: 我们说明存在超平面 $H_0\subset\mathbb{CP}^3$, 使得 $H_0\cap Q$, $H_0\cap V$ 没有公共的曲线分量. 借助 $\mathbb{CP}^3$ 中的坐标变换, 不妨假设

$$H_0=\left\{\xi^3=0\right\}=\mathbb{CP}^2,$$

则 $H_0\cap Q$ 和 $H_0\cap V$ 分别是 $\mathbb{CP}^2$ 中的二次、三次曲线. 由 Bezout 定理, 有

$$\#\left(H_0\cap(Q\cap V)\right)=6.$$

根据曲线次数的定义, 就有

$$\deg(Q\cap V)=6.$$

现设 $Q\cap V=C+C'$. 注意到

$$\deg C=2g-2=2\times4-2=6,$$

故有 $degC'=0$. 所以 $Q\cap V=C$. □

注: 我们之后会在 Riemann count 再讨论到这个事情.

5.7 Algebraic aspects: 亚纯函数域

我们有一种强烈的感受: 亚纯函数完全给出了紧黎曼曲面的刻画. 这一节的目标在于说明亚纯函数域的同构等价于黎曼曲面的同构. 用 S.K.Donaldson 的话说,the AMAZING SYNTHESIS which surely overwhelmed each one of us as graduate students

设 K 为复系数域. 如果存在 $f\in K$, 使得 f 对于 $\mathbb{C}$ 是超越元素, 且 $[K:\mathbb{C}(f)]<\infty$, 则称 K 为一元代数函数域.

Theorem 30. *$\mathfrak{M}(M)$ 是一个一元代数函数域. 进一步的, 如果 f 是 M 上有 n 个极点的亚纯函数, 则*

$$[\mathfrak{M}(M):\mathbb{C}(f)]=n$$

这个证明非常标准, 我就不码了. 具体的例子:

$$[\mathfrak{M}(\mathbb{CP}^1):\mathbb{C}(z)]=1,\quad [\mathfrak{M}(\mathbb{C}/\Lambda):\mathbb{C}(\mathscr{P})]=2.$$

我们可以把这个结果进行推广, 这个推广涉及初等对称函数的构造. 设 $z: M \to N$ 为紧致黎曼曲面之间的非常值全纯映射, 因此 z 为分歧覆盖, 其重数记为 n. 设 f 为 M 上的亚纯函数, 我们构造 N 上 n 个亚纯函数 $c_i(f), i = 1, \cdots, n$ 如下: 设 $q \in N$ 不是 z 的分歧值, 取其开邻域 V, 使得

$$z^{-1}(V) = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n,$$

其中 U_i 为 M 中互不相交的开集, 且 $z: U_i \to V$ 为全纯同构, 令 $f_i = f \circ \left(z|_{U_i}\right)^{-1}$, f_i 为 V 上亚纯函数. 考虑关于变量 x 的 n 次多项式

$$\prod_{i=1}^{n} (x - f_i) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n,$$

其系数 $c_i = c_i(f)$ 是关于 f_i 的初等对称多项式.c_i 的定义与邻域 V 选取无关, 且可延拓为 N 上的亚纯函数. 任给 $g \in \mathfrak{M}(N)$, 复合函数 $z^*g = g \circ z$ 为 M 上亚纯函数. 因此, $z^*\mathfrak{M}(N)$ 可以看成 $\mathfrak{M}(M)$ 子域.

$$f^n + (z^*c_1) f^{n-1} + \cdots + (z^*c_{n-1}) f + z^*c_n = 0.$$

这说明 $\mathfrak{M}(M)$ 是 $z^*\mathfrak{M}(N)$ 的代数扩张, 且扩张次数不超过 n. 另一方面, 容易构造 M 上的亚纯函数 f 保证关于 $z^*\mathfrak{M}(N)$ 极小多项式的次数不小于 n. 因此我们有:

Theorem 31. *设 $z: M \to N$ 为紧致黎曼曲面之间的非常值全纯映射,z 的重数为 n, 则*

$$[\mathfrak{M}(M) : z^*\mathfrak{M}(N)] = n.$$

显然, 当 $N = \mathbb{S}$ 时, $z^*\mathfrak{M}(N) = \mathbb{C}(z)$, 因此这个结果是前面定理的推广. 下面我们会考虑域上的赋值, 重要的定理是:

Theorem 32. *v 为亚纯函数域 $\mathfrak{M}(M)$ 上的一个赋值, 则存在 (唯一) 的 $p \in M$, 使得 $v = v_p$. 这里的 v_p 就是最开始定义的函数在一个点处的阶.*

我相信这个定理是正确的, 但是梅加强书上的证明肯定是不严谨的, 具体怎么说明我也在考虑这样我们可以由每个域同态 $\mathfrak{M}(N) \to \mathfrak{M}(M)$, 由 M 上的赋值 v_p 定义 N 上的赋值, 而这个赋值又对应唯一的一个 $h(p)$. 我们可以说明这个 h 是一个全纯的映射. 这就完成了我们的证明.