1 有限群表示论补充

群 G 的表示就是对（这里全部考虑复表示）线性空间 V, 考虑 $G \to \mathrm{GL}(V)$ 的群同态。这里考虑有限群，所以所有表示也是有限维的表示。

取定一组基后，就有 $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_{\dim V}(C)$ 这样可以定义表示的特征标。由群同态的性质可以知道，一个特征标对一个共轭类的取值是唯一的。我们称满足这样条件的函数为群上的类函数。之后我们会证明所有不可约表示的特征标构成 $R_{\mathbf{C}}(G)$ 的一组标准正交基。

正则表示：表示空间 $C(G)$（可以）取为全部 G 上 C 值函数.

G 在张量积上的表示：$(\rho, V), (\pi, W)$ 是两个表示，对张量积 $V \otimes W$, 定义 $(\rho \otimes \pi)(g)(v \otimes w) =$

Remark. 讲清楚这里线性空间张量积的定义：

定义 G 不变子空间，如果（因为在线性空间里面）在 G 的作用下为不变子空间。定义直和。Maschke 定理告诉我们，任意的不变子空间都有不变补空间。我们希望把表示分解为不可约子表示的直和。

Remark. 书上考虑构造 G 不变正定 Hermitian 二次型 (然后取正交补)：

$$< v_1, v_2 >_V = \frac{1}{|G|1} \sum_{g \in G} < g \cdot v_1, g \cdot v_2 >$$

定义 $\mathrm{Hom}(V, W)$ 上的表示：$(g \cdot u)(v) = g \cdot u(g^{-1} \cdot v)$ 我们需要说明这是一个群作用。并且有

$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) = \overline{\chi_V(g)}\chi_W(g)$$

Remark. 事实上有定义对偶表示 $W = C$, 则有 $\mathrm{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$，表示的张量积特征标是相乘的。这里是直接算。

定义 $\mathrm{Hom}_G(V, W)$.

Theorem 1 (*Schur* 引理)**.**

Proposition 1.1 (平均算子的相关性质)**.** 对平均算子 $M(u), u \in \mathrm{Hom}(V, W)$
(1)$M(u) \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$
(2)V, W 都不可约且不同构
(3)V, W 都不可约，同构
(4)$\phi \in R_{\mathbf{C}}(G), \sum_{g \in G} \phi(g)\rho_V(g)$ 是位似。

Theorem 2. 我们给 $R_{\mathbf{C}}(G)$ 一个标量积，下面说明三个事：
(1) 不可约特征标的标准正交性质（*Schur* 引理的体现）
(2) 构成基，所以 $|\mathrm{Irr}(G)| = |\mathrm{Conj}(G)|$
(3) 给出了 *maschke* 定理的 explicit 分解（实际上就是极小左理想的本原中心幂等元）*:*
(4) 不可约的判定以及正则表示的分解。

这里我有一个问题：

Proposition 1.2 (我猜的)**.** 对 $(\sigma_1, W_1), (\sigma_2, W_2)$. 设 $Irr(G) = \{V_1, V_2, \cdots, V_t\}$. 则

1° $W_j \cong (\chi_{W_j}, \chi_{V^i})V_i$ $(j = 1, 2)$;

2° $\dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(W_1, W_2) = \sum_{i=1}^{t}(\chi_{W_1}, \chi_{Vi})(\chi_{W_2}, \chi_{Vi})$

3° $\dim \mathrm{End}_{\mathrm{G}}(W) = \sum_{i=1}^{t}(\chi_W, \chi_{Vi})^2$

(ψ, W) 为群 $H < G$ 的一个 K 表示，我们称 $(K[G], K[H])$-双模 $K[G]$ 与左 $K[H]$-模 W 张量积:$K[G] \otimes_{K[H]} W$ 为 W 诱导模，记为 W^G, 表示称为诱导表示。

Remark. 这和其他书上的定义：是 G 在 $\mathrm{Ind}_H^G := \{\varphi : G \mapsto V, \varphi(hx) = h \cdot \varphi(x),\ \forall h \in H,\ \forall x \in G\}$ 表示一样。我们如下定义 G 在 Ind_H^G 表示:

算一下特征标和传递性。最重要的结果毫无疑问是 Frobenius 互反律和 Mackey 子群定理：

Theorem 3 (Frobenius 互反律)**.**

$$(\mathrm{Ind}_H^G \mu, \chi)_G = (\mu, \mathrm{Res}_G^H \chi)_H$$

由此很容易得到对有限群 G 的所有不可约复表示的次数的最大者（记为 $m(G)$）的估计：

Proposition 1.3.

$$\forall H < G, m(H) \leq m(G) \leq [G : H]m(H)$$

Remark. 或者你可以尝试构造同构（我还在理解这玩意，[3] 里有详细的描述）：$H < G, (\pi, V)$ 是 H 的表示，(τ, U) 是 G 的表示, 则有：

$$\mathrm{Hom}_G(U, \mathrm{Ind}_H^G V) \simeq \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_G^H U, V)$$

Example 1 ($GL_2(\mathbb{F}_q)$)**.**