Algèbre

Étienne Fouvry

6 février 2016

Première partie

Groupe, anneaux, idéaux, corps.

I.1 Groupe

Définition 1 (Loi de composition interne)**.** *Est appelée loi de composition interne toute application φ :*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : X \times X & \to & X \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array}$$

On insère souvent un symbole à la place de φ :

$$\varphi(x,y) = x * y \in X$$

L'addition usuelle est une loi de composition interne dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^k$.
La composition ($\circ$) est une loi de composition interne sur $\mathcal{F}(E,E)$.
Soit $X = \mathcal{P}(E)$. L'union ($\cup$), l'intersection ($\cap$) sont des lois de composition interne.

Le produit scalaire $a.b := \begin{cases} (\mathbb{K}^n)^2 \to \mathbb{K} \\ (a,b) \mapsto \sum_{i=0}^n a_i b_i \end{cases}$ n'est pas une loi de composition interne.

Définition 2 (Groupe)**.** *Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$.*

On dit que $(G,*)$ est un groupe si :
— $*$ admet un élément neutre
— $*$ est associative

— *Pour tout élément de G il en existe un inverse pour $*$.*

$(\mathbb{Z},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{C},+),(\mathbb{Q}^*,\times),(\mathbb{R}^*,\times),(\mathbb{C}^*,\times),(\{\pm 1\},\times)$ sont tous des groupes, mais $(\mathbb{Z}^*,\times)$ n'en est pas un.
0 n'a jamais d'inverse.
$(\mathcal{B}(E)=\{\text{bijections de } E\},\circ)$ est un groupe.
$(\mathbb{D},+)$ est un groupe additif. $(\mathbb{D}\setminus\{0\},\times)$ n'en est pas un.

Définition 3 (Commutativité)**.** *$*$ sur X non vide est dite commutative si*

$$\forall x,y\in X, x*y=y*x$$

Définition 4 (Groupe abélien)**.** *Un groupe $(G,*)$ où $*$ est commutative est dit* groupe commutatif *ou* groupe abélien*.*

$(\mathcal{GL}(\mathbb{R}^2),\circ)$ est non abélien.

Notation additive Lors qu'un groupe $(E,+)$ est abélien, alors il est usuel de noter son élément neutre 0 et les inverses $-x$.

Définition 5 (Sous-groupe)**.** *Soit $(G,*)$ un groupe, $H\subseteq G$, $H\neq\emptyset$.*
$(H,*)$ est un sous-groupe de G si $*$ est interne à H et $(H,*)$ est un groupe.

$(\mathbb{Z},+)$ est un sous-groupe $(\mathbb{C},+)$.

Caractérisation Soit $(G,*)$ un groupe, $H\subseteq G$, $H\neq\emptyset$. Alors $(H,*)$ est un sous-groupe si $\begin{cases}\forall x,y\in H, x*y\in H\\ \forall x\in H, x^{-1}\in H\end{cases}$ ou $\forall x,y\in H, xy^{-1}\in H$.

Proposition 1 (Unicité de l'élément neutre)**.** *Soit $(G,*)$ un groupe. Alors il existe un unique élément neutre e.*

Démonstration.

$$\forall x\in G: x*e=e*x=e'*x=x*e'=x$$
$$\begin{cases}xe &= xe'\\ ex &= e'x\end{cases} \iff x^{-1}xe=x^{-1}xe' \iff e=e'$$

□

Proposition 2 (Unicité de l'inverse)**.** *Soit $(G,*)$ un groupe. Alors $\forall x\in G, \exists! x^{-1}: x*x^{-1}=x^{-1}*x=e$.*

Définition 6 (Groupe produit)**.** *Soient $(G,*)$, $(G',*')$ deux groupes.*
Alors on définit le groupe produit par : $(G\times G', *\times *'=\square)$

I.1.1 Morphisme de groupes

Définition 7. *Soient* $(G, *)$*,* $(G', *')$ *deux groupes.*

On appelle morphisme de $(G, *)$ *dans* $(G', *')$ *une application* $\varphi : G \to G'$ *telle que*

$$\forall x, y \in G, \varphi(x * y) = \varphi(x) *' \varphi(y)$$

On a alors $\varphi(1_G) = 1_{G'}$ et $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.