

Probabilités et Statistiques I

Anne Broise

6 février 2016

Première partie

Espaces de Probabilité

Quelques notions de dénombrement

1 Cardinal d'un ensemble fini

Ω un ensemble fini, $A \subset \Omega$.

Définition 1. La fonction indicatrice de A est la fonction notée 1_A , χ_A ou $\mathbb{1}_A$ telle que :

$$\begin{aligned} 1_A : \Omega &\rightarrow \{0, 1\} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 1. Deux sous ensembles A et B de Ω ont le même cardinal s'il existe une bijection entre A et B .

$$\#A = \#B \iff \forall x \in A, \exists! y \in B, \exists f \in B^A | f(x) = y$$

1.1 Propriété des fonctions indicatrices

Définition 2. Le complémentaire de A dans Ω est l'ensemble des points de Ω qui ne sont pas dans A .

$$A^C = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega, \omega \notin A\} = \{\omega \in \Omega | 1_A(\omega) = 0\}$$

Une partie et son complémentaire forment une partition de Ω .

Définition 3. On dit que $(A_i)_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} \in \mathcal{P}(\Omega)^k$ est une partition de Ω si

$$\bigcup_{i=1}^k A_i = \Omega \text{ et } \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$$

Définition 4. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que A est en bijection avec $\llbracket 1, n \rrbracket$. Cet entier n est unique et on l'appelle le cardinal de A . Noté : $\#A$.

Cela signifie qu'il est possible de numéroté les éléments de A par $\{a_1, \dots, a_n\}$, et A est par exemple donné par :

$$k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mapsto a_k \in A$$

Proposition 2. Le cardinal de A vaut :

$$\#A = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{1}_A(\omega)$$

Cette somme est indépendante de la manière de numéroté l'ensemble.

Proposition 3. —

$$\mathbb{1}_{A^C} = 1 - \mathbb{1}_A$$

— Si $A \cap B = \emptyset$, alors

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$$

— Plus généralement :

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$$

—

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$$

—

$$\mathbb{1}_{A \times B}(x, y) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(y)$$

Corollaire. —

$$\#A^C = \#\Omega - \#A$$

—

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega$.

Si $\omega \in A$ alors $\mathbb{1}_{A^C}(\omega) = 0$ et $1 - \mathbb{1}_{A^C}(\omega) = 1 = \mathbb{1}_A(\omega)$.

Si $\omega \notin A$, alors $\omega \in A^C$ et la démonstration est identique.

Les deux fonctions $\mathbb{1}_A$ et $1 - \mathbb{1}_{A^C}$ sont donc égales sur Ω et on a égalité.

Trivialités. Á recopier qd le temps sera présent.

2 Cardinaux de quelques ensembles finis

L'ensemble des p -uplets de $\llbracket 1, n \rrbracket$

$$\#(\llbracket 1, n \rrbracket^p) = n^p$$

Globalement :

$$\#(A^p) = (\#A)^p$$

L'ensemble des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ Il est en bijection avec $\{0, 1\}^n$. En effet, on a pour chacun des le choix ou non de le considérer dans une partie. Un n -uplet de $\{0, 1\}^n$ correspond donc, à la partie où la i -ème coordonnée aura été prise si elle vaut 1, sinon laissée. C'est donc une bijection.

On a donc :

$$\#\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket) = 2^n$$

Ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ Une permutation est une bijection σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \sigma : 1, n &\rightarrow 1, n \\ i &\mapsto \sigma(i) \end{aligned}$$

$$\forall i \neq j, f(i) \neq f(j)$$

Très souvent on note une permutation par son image : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$
ou $(\sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(n))$.

$$\mathfrak{S}_n = \{(x_1 \dots x_n), x_i \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j \iff x_i \neq x_j\} \# \mathfrak{S}_n = n!$$

Ensemble des arrangements de p éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ Les arrangements sont une façon de ranger $p < n$ éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

C'est aussi une injection de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Remarque. *Un arrangement n'est pas surjectif car $\exists j_0 \mid \forall i, f(i) \neq j_0$.*

Il y a $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ éléments.

Démonstration. *Principe des choix successifs.*

Ensemble des parties de p éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ Avec une partie de p éléments on peut construire $p!$ arrangements. On a donc $p!$ fois moins de parties que d'arrangements. Il y a donc

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

parties de p éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On peut aussi démontrer par récurrence, mais on en a pas trop envie.

Remarque. $\binom{n}{p}$ est aussi le nombre de solutions de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \epsilon_i \in \{0, 1\} & , \quad 1 \leq i \leq n \\ \sum_{i=1}^n \epsilon_i = p \end{cases}$$

En effet, $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ est en bijection avec $\{0, 1\}^n$.

3 Exercices d'exemple

3.1 $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$

C'est l'ensemble des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Donc :

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

3.2 Binôme de Newton

On cherche à montrer que

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

On a :

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= (a+b) \times (a+b) \times (a+b) \dots \\ &= \sum_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{0,1\}^n} a^{\epsilon_1} b^{1-\epsilon_1} \times \dots \times a^{\epsilon_n} b^{1-\epsilon_n} \\ &= \sum_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{0,1\}^n} a^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n} b^{n - (\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n)} \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p} \end{aligned}$$

$$\mathbf{3.3} \quad \sum_{p=0}^k \binom{n}{p} \binom{m}{k-p} = \binom{n+m}{k}$$

n, m fixés, $k \in \llbracket 0, m+n \rrbracket$. FUUUUUUUUUU