

# Probabilités et Statistiques I

Anne Broise

6 février 2016

## Première partie

# Espaces de Probailité

Quelques notions de dénombrement

## I.1 Cardinal d'un esemble fini

$\Omega$  un ensemble fini,  $A \subset \Omega$ .

**Définition 1.** La fonction indicatrice de  $A$  est la fonction notée  $1_A$ ,  $\chi_A$  ou  $\mathbb{1}_A$  telle que :

$$\begin{aligned} 1_A : \Omega &\rightarrow \{0, 1\} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

**Proposition 1.** Deux sous ensembles  $A$  et  $B$  de  $\Omega$  ont le même cardinal s'il existe une bijection entre  $A$  et  $B$ .

$$\#A = \#B \iff \forall x \in A, \exists! y \in B, \exists f \in B^A | f(x) = y$$

### I.1.1 Propriété des fonctions indicatrices

**Définition 2.** Le complémentaire de  $A$  dans  $\Omega$  est l'ensemble des points des points de  $\Omega$  qui ne sont pas dans  $A$ .

$$A^C = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega, \omega \notin A\} = \{\omega \in \Omega | 1_A(\omega) = 0\}$$

Une partie et son complémentaire forment une partition de  $\Omega$ .

**Définition 3.** On dit que  $(A_i)_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} \in \mathcal{P}(\Omega)^k$  est une partition de  $\Omega$  si

$$\bigcup_{i=1}^k A_i = \Omega \text{ et } \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$$

**Définition 4.** Il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $A$  est en bijection avec  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Cet entier  $n$  est unique et on l'appelle le cardinal de  $A$ . Noté :  $\#A$ .

Cela signifie qu'il est possible de numéroté les éléments de  $A$  par  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , et  $A$  est par exemple donné par :

$$k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mapsto a_k \in A$$

**Proposition 2.** Le cardinal de  $A$  vaut :

$$\#A = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{1}_A(\omega)$$

Cette somme est indépendante de la manière de numéroté l'ensemble.

**Proposition 3.** —

$$\mathbb{1}_{A^C} = 1 - \mathbb{1}_A$$

— Si  $A \cap B = \emptyset$ , alors

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$$

— Plus généralement :

$$\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$$

—

$$\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$$

—

$$\mathbb{1}_{A \times B}(x, y) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(y)$$

**Corollaire.** —

$$\#A^C = \#\Omega - \#A$$

—

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

**Démonstration.** Soit  $\omega \in \Omega$ .

Si  $\omega \in A$  alors  $\mathbb{1}_{A^C}(\omega) = 0$  et  $1 - \mathbb{1}_{A^C}(\omega) = 1 = \mathbb{1}_A(\omega)$ .

Si  $\omega \notin A$ , alors  $\omega \in A^C$  et la démonstration est identique.

Les deux fonctions  $\mathbb{1}_A$  et  $1 - \mathbb{1}_{A^C}$  sont donc égales sur  $\Omega$  et on a égalité.

*Trivialités. Á recopier qd le temps sera présent.*

## I.2 Cardinaux de quelques ensembles finis

**L'ensemble des  $p$ -uplets de  $\llbracket 1, n \rrbracket$**

$$\#(\llbracket 1, n \rrbracket^p) = n^p$$

Globalement :

$$\#(A^p) = (\#A)^p$$

**L'ensemble des parties de  $\llbracket 1, n \rrbracket$**  Il est en bijection avec  $\{0, 1\}^n$ . En effet, on a pour chacun des le choix ou non de le considérer dans une partie. Un  $n$ -uplet de  $\{0, 1\}^n$  correspond donc, à la partie où la  $i$ -ème coordonnée aura été prise si elle vaut 1, sinon laissée. C'est donc une bijection.

On a donc :

$$\#\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket) = 2^n$$

**Ensemble des permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$**  Une permutation est une bijection  $\sigma$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} \sigma : 1, n &\rightarrow 1, n \\ i &\mapsto \sigma(i) \end{aligned}$$

$$\forall i \neq j, f(i) \neq f(j)$$

Très souvent on note une permutation par son image :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$  ou  $(\sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(n))$ .

$$\mathfrak{S}_n = \{(x_1 \dots x_n), x_i \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j \iff x_i \neq x_j\} \# \mathfrak{S}_n = n!$$

**Ensemble des arrangements de  $p$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$**  Les arrangements sont une façon de ranger  $p < n$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

C'est aussi une injection de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Remarque.** Un arrangement n'est pas surjectif car  $\exists j_0 | \forall i, f(i) \neq j_0$ .

Il y a  $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$  éléments.

**Démonstration.** Principe des choix successifs.

**Ensemble des parties de  $p$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$**  Avec une partie de  $p$  éléments on peut construire  $p!$  arrangements. On a donc  $p!$  fois moins de parties que d'arrangements. Il y a donc

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

parties de  $p$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

On peut aussi démontrer par récurrence, mais on en a pas trop envie.

**Remarque.**  $\binom{n}{p}$  est aussi le nombre de solutions de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \epsilon_i \in \{0, 1\} & , \quad 1 \leq i \leq n \\ \sum_{i=1}^n \epsilon_i = p \end{cases}$$

En effet,  $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$  est en bijection avec  $\{0, 1\}^n$ .

## I.3 Exercices d'exemple

### I.3.1 $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$

C'est l'ensemble des parties de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Donc :

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

### I.3.2 Binôme de Newton

On cherche à montrer que

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

On a :

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= (a+b) \times (a+b) \times (a+b) \dots \\ &= \sum_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{0, 1\}^n} a^{\epsilon_1} b^{1-\epsilon_1} \times \dots \times a^{\epsilon_n} b^{1-\epsilon_n} \\ &= \sum_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{0, 1\}^n} a^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n} b^{n - (\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n)} \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p} \end{aligned}$$

$$\text{I.3.3} \quad \sum_{p=0}^k \binom{n}{p} \binom{m}{k-p} = \binom{n+m}{k}$$

$n, m$  fixés,  $k \in \llbracket 0, m+n \rrbracket$ .

$\binom{m+n}{k}$  est le nombre de solutions  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{m+n}) \in \{0, 1\}^{n+m}$ .

$$k = \sum_{i=1}^{n+m} \epsilon_i = \sum_{i=1}^n \epsilon_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} \epsilon_i$$

Or, il y a  $\binom{n}{p}$  solutions à  $\sum_{i=1}^n \epsilon_i = p$  et  $\binom{m}{k-p}$  solutions à  $\sum_{i=n+1}^{n+m} \epsilon_i = k-p$ .  
On a donc :

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{p=0}^k \binom{n}{p} \binom{m}{k-p}$$

## Deuxième partie

# Introduction

On a besoin de définir un espace de probabilités quand le résultat d'une expérience est aléatoire ou dépend d'un aléa.

## II.1 Définitions

### II.1.1 L'univers

**Définition 5** (L'univers  $\Omega$ ). *C'est un ensemble qui rassemble toutes les informations liés à une expérience aléatoire donnée.*

On a :  $\Omega \neq \emptyset$ .

**Exemple.** *On jette un dé à six faces.*

*On peut prendre  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{\text{numéros de la face}\}$ .  $\Omega$  n'est cependant pas unique.*

Grilles de loto, peut être gros, position d'une particule suivant un mouvement brownien ( $\Omega = (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{R}}$ ,  $\#\Omega = \aleph_2$ ).

Cadre du cours :  $\#\Omega = k \in \mathbb{N}$ . Étude des probabilités discrètes.

**Définition 6** (Les évènements). *Ce sont les parties ou sous-ensembles de  $\Omega$ .*

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\text{l'ensemble des évènements de } \Omega\}$$

*Deux évènements sont dits incompatibles si leurs ensembles associés sont disjoints.*

**Définition 7** (Partition de  $\Omega$ ). *C.f. ??.*

## II.1.2 Probabilité

Pour  $\Omega$  fini,  $\omega \in \Omega$ , on peut noter la fréquence d'apparition de  $\omega$ .

**Définition 8** (Germe de probabilité). *On appelle germe de probabilité, défini sur  $\Omega$  (fini), une application :*

$$p : \Omega \rightarrow [0, 1] \mid \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \Omega, 0 \leq p(\omega) \leq 1 \\ \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1 = \sum_{i=1}^{\#\Omega} p(\omega_i) \end{aligned}$$

**Définition 9.** *La probabilité  $\mathbb{P}$  associée au germe de probabilité  $p$  défini sur  $\Omega$  est l'application :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ E &\mapsto \sum_{\omega \in E} p(\omega) \end{aligned}$$

**Remarque.**

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

**Remarque.** *On a :*

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{1}_E(\omega) p(\omega)$$

**Proposition 4.**  *$A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ , alors :*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

**Remarque.** *La proposition caractérise  $\mathbb{P}$  et  $p$ , i.e. si  $\mathbb{P}$  vérifie la proposition alors on sait définir le germe  $p$  par :*

$$p(\omega) = \mathbb{P}[\{\omega\}]$$

*et  $\mathbb{P}$  est unique.*

### II.1.3 Espaces de probabilités

C'est la donnée d'un espace de probabilités  $(\mathbb{P}, \Omega)$  ou  $(p, \Omega)$ .

**Définition 10** (Probabilité uniforme). *Une probabilité uniforme est la probabilité définie par le germe constant :*

$$\forall \omega \in \Omega, p(\omega) = \varpi, \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \#\Omega \times \varpi = 1 \iff \varpi = \frac{1}{\#\Omega}$$

Dans le cas où la probabilité définie est uniforme, alors :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

## II.2 Probabilités produit

Problème : on a deux espaces de probabilité, par exemple  $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$  et  $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$  pour deux lois différentes.

**Définition 11.** *On se donne deux espaces  $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$  et  $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$ .  $\mathbb{P}_{|_2^1}$  est associée au germe  $p_{|_2^1}$  sur  $\Omega_1 \times \Omega_2$  défini par :*

$$p_{|_2^1}(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1) \times p_2(\omega_2)$$

*L'espace  $(\Omega, \mathbb{P}_{|_2^1})$  où  $\mathbb{P}_{|_2^1}$  associée à  $p_{|_2^1}$  s'appelle l'espace probabilité produit.*

*$\mathbb{P}_{|_2^1}$  s'appelle la probabilité produit de  $\mathbb{P}_1$  et de  $\mathbb{P}_2$*

**Démonstration.** *Montrons que  $p_{|_2^1}$  est un germe de probabilités.*

- $\forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2, p_1(\omega_1) \in [0, 1] \wedge p_2(\omega_2) \in [0, 1] \implies p_{|_2^1}(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1) \times p_2(\omega_2) \in [0, 1]$
- $\sum_{\omega \in \Omega} p_{|_2^1}(\omega) = \left( \sum_{\omega_1 \in \Omega_1} p_1(\omega_1) \right) \times \left( \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} p_2(\omega_2) \right) = 1 \times 1 = 1$