Probabilités et Statistiques I

Anne Broise

6 février 2016

Première partie
Espaces de Probailité

Quelques notions de dénombrement

I.1 Cardinal d'un esnemble fini

Ω un ensemble fini, $A \subset \Omega$.

Définition 1. *La fonction indicatrice de A est la fonction notée 1_A, χ_A ou $\mathbb{1}_A$ telle que :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_A : \Omega & \to & \{0,1\} \\ \omega & \mapsto & \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A \end{cases} \end{array}$$

Proposition 1. *Deux sous ensembles A et B de Ω ont le même cardinal s'il existe une bijection entre A et B.*

$$\#A = \#B \iff \forall x \in A, \exists! y \in B, \exists f \in B^A | f(x) = y$$

I.1.1 Propriété des fonctions indicatrices

Définition 2. *Le complémentaire de A dans Ω est l'ensemble des points des points de Ω qui ne sont pas dans A.*

$$A^C = \Omega \backslash A = \{\omega \in \Omega, \omega \notin A\} = \{\omega \in \Omega | \mathbb{1}_A(\omega) = 0\}$$

Une partie et son complémentaire forment une partition de Ω.

Définition 3. *On dit que* $(A_i)_{i\in[\![1,k]\!]} \in \mathcal{P}(\Omega)^k$ *est une partition de* Ω *si*

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega \text{ et } \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$$

Définition 4. *Il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* A *est en bijection avec* $[\![1,n]\!]$*. Cet entier* n *est unique et on l'appelle le cardinal de* A*. Noté :* $\#A$ *.*

Cela signifie qu'il est possible de numéroter les éléments de A par $\{a_1,\dots,a_n\}$, et A est par exemple donné par :

$$k \in [\![1,n]\!] \mapsto a_k \in A$$

Proposition 2. *Le cardinal de* A *vaut :*

$$\#A = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{1}_A(\omega)$$

Cette somme est indépendante de la manière de numéroter l'ensemble.

Proposition 3.

— $$\mathbb{1}_{A^C} = 1 - \mathbb{1}_A$$

— *Si* $A \cap B = \emptyset$*, alors*
$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$$

— *Plus généralement :*
$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$$

— $$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$$

— $$\mathbb{1}_{A\times B}(x,y) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(y)$$

Corollaire.

— $$\#A^C = \#\Omega - \#A$$

— $$\#(A\cup B) = \#A + \#B - \#(A\cap B)$$

Démonstration. *Soit* $\omega \in \Omega$.
Si $\omega \in A$ *alors* $\mathbb{1}_{A^C}(\omega) = 0$ *et* $1 - \mathbb{1}_{A^C}(\omega) = 1 = \mathbb{1}_A(\omega)$.
Si $\omega \notin A$*, alors* $\omega \in A^C$ *et la démonstration est identique.*
Les deux fonctions $\mathbb{1}_A$ *et* $1 - \mathbb{1}_A$ *sont donc égales sur* Ω *et on a égalité.*

Trivialités. Á recopier qd le temps sera présent.

I.2 Cardinaux de quelques ensembles finis

L'ensemble des p-uples de $[\![1, n]\!]$

$$\#([\![1, n]\!]^p) = n^p$$

Globalement :

$$\#(A^p) = (\#A)^p$$

L'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ Il est en bijection avec $\{0, 1\}^n$. En effet, on a pour chacun des le choix ou non de le considérer dans une partie. Un n-uplet de $\{0, 1\}^n$ correspond donc, à la partie où la i-ème coordonnée aura été prise si elle vaut 1, sinon laissée. C'est donc une bijection.

On a donc :

$$\#\mathcal{P}([\![1, n]\!]) = 2^n$$

Ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ Une permutation est une bijection σ de $[\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} \sigma : 1, n &\rightarrow 1, n \\ i &\mapsto \sigma(i) \end{aligned}$$

$\forall i \neq j, f(i) \neq f(j)$

Très souvent on note une permutation par son image : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ ou $(\sigma(1)\, \sigma(2)\, \dots\, \sigma(n))$.

$$\mathfrak{S}_n = \{(x_1\, \dots\, x_n), x_i \in [\![1, n]\!], i \neq j \iff x_i \neq x_j\} \# \mathfrak{S}_n = n!$$

Ensemble des arrangements de p éléments de $[\![1, n]\!]$ Les arrangemetns sont une façon de ranger $p < n$ éléments de $[\![1, n]\!]$.

C'est aussi une injection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Remarque. *Un arrangement n'est pas surjectif car* $\exists j_0 | \forall i, f(i) \neq j_0$.

Il y a $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ éléments.

Démonstration. *Principe des choix successifs.*

Ensemble des parties de p éléments de $[\![1,n]\!]$ Avec une partie de p éléments on peut construre $p!$ arrangements. On a donc $p!$ fois moins de parties que d'arrangements. Il y a donc

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

parties de p éléments de $[\![1,n]\!]$.

On peut aussi démontrer par récurrence, mais on en a pas trop envie.

Remarque. $\binom{n}{p}$ *est aussi le nombre de solutions de l'équation suivante :*

$$\left\{\begin{array}{ccc} \epsilon_i \in \{0,1\} & , & 1 \leq i \leq n \\ \sum_{i=1}^n \epsilon_i & = & p \end{array}\right.$$

En effet, $\mathcal{P}([\![1,n]\!])$ est en bijection avec $\{0,1\}^n$.

I.3 Exercices d'exemple

I.3.1 $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p}$

C'est l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$. Donc :

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

I.3.2 Binôme de Newton

On cherche à montrer que

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} (a+b)^n & = & (a+b) \times (a+b) \times (a+b) \dots \\ & = & \displaystyle\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)\in\{0,1\}^n} a^{\epsilon_1} b^{1-\epsilon_1} \times \dots \times a^{\epsilon_n} b^{1-\epsilon_n} \\ & = & \displaystyle\sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)\in\{0,1\}^n} a^{\epsilon_1+\dots+\epsilon_n} b^{n-(\epsilon_1+\dots+\epsilon_n)} \\ & = & \displaystyle\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p} \end{array}$$

I.3.3 $\sum_{p=0}^{k}\binom{n}{p}\binom{m}{k-p} = \binom{n+m}{k}$

n,m fixés, $k \in [\![0, m+n]\!]$.
$\binom{m+n}{k}$ est le nombre de solutions $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{m+n}) \in \{0,1\}^{n+m}$.

$$k = \sum_{i=1}^{n+m} \epsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} \epsilon_i$$

Or, il y a $\binom{n}{p}$ solutions à $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i = p$ et $\binom{m}{k-p}$ solutions à $\sum_{i=n+1}^{n+m} \epsilon_i = k - p$.
On a donc :

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p}\binom{m}{k-p}$$

Deuxième partie
Introduction

On a besoin de définir un espace de probabilités quand le résultat d'une expérience est aléatoire ou dépend d'un aléa.

II.1 Définitions

II.1.1 L'univers

Définition 5 (L'univers Ω)**.** *C'est un ensemble qui rassemble toutes les informations liés à une expérience aléatoire donnée.*

On a : $\Omega \neq \emptyset$.

Exemple. *On jette un dé à six faces.*

On peut prendre $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{$*numéros de la face*$\}$. Ω *n'est cependant pas unique.*

Grilles de loto, peut être gros, position d'une particule suivant un mouvement brownien ($\Omega = (\mathbb{R}^3)^{\mathbb{R}}, \#\Omega = \aleph_2$).

Cadre du cours : $\#\Omega = k \in \mathbb{N}$. Étude des probabilités discrètes.

Définition 6 (Les évènements)**.** *Ce sont les* parties *ou* sous-ensembles *de* Ω.

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\textit{l'ensemble des évènements de } \Omega\}$$

Deux évènements sont dits incompatibles si leurs ensembles associés sont disjoints.

Définition 7 (Partition de Ω). *C.f.* **??**.

II.1.2 Probabilité

Pour Ω fini, $\omega \in \Omega$, on peut noter la fréquence d'apparition de ω.

Définition 8 (Germe de probabilité). *On appelle* germe de probabilité*, défini sur Ω (fini), une application :*

$$p : \Omega \to [0,1] | \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

Autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, 0 \leq p(\omega) \leq 1$$
$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1 = \sum_{i=1}^{\#\Omega} p(\omega_i)$$

Définition 9. *La probabilité $\mathbb{P}$ associée au germe de probabilité p défini sur Ω est l'application :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ E & \mapsto & \sum_{\omega \in E} p(\omega) \end{array}$$

Remarque.

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Remarque. *On a :*

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{1}_E(\omega) p(\omega)$$

Proposition 4. *$A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors :*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Remarque. *La proposition caractérise $\mathbb{P}$ et p, i.e. si $\mathbb{P}$ vérifie la proposition alors on sait définir le germe p par :*

$$p(\omega) = \mathbb{P}[\{\omega\}]$$

et $\mathbb{P}$ est unique.

II.1.3 Espaces de probabilités

C'est la donnée d'un espace de probabilités $(\mathbb{P}, \Omega)$ ou (p, Ω).

Définition 10 (Probabilité uniforme)**.** *Une* probabilité uniforme *est la probabilité définie par le germe constant :*

$$\forall \omega \in \Omega, p(\omega) = \varpi, \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \#\Omega \times \varpi = 1 \iff \varpi = \frac{1}{\#\Omega}$$

Dans le cas où la probabilité définie est uniforme, alors :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

II.2 Probabilités produit

Problème : on a deux espaces de probabilité, par exemple $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ et $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$ pour deux lois différentes.

Définition 11. *On se donne deux espaces* $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ *et* $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$*.* $\mathbb{P}_{|^1_2}$ *est associée au germe* $p_{|^1_2}$ *sur* $\Omega_1 \times \Omega_2$ *défini par :*

$$p_{|^1_2}(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1) \times p_2(\omega_2)$$

L'espace $(\Omega, \mathbb{P}_{|^1_2})$ *où* $\mathbb{P}_{|^1_2}$ *associée à* $p_{|^1_2}$ *s'appelle l'*espace probabilité produit.

$\mathbb{P}_{|^1_2}$ *s'appelle la probabilité produit de* $\mathbb{P}_1$ *et de* $\mathbb{P}_2$

Démonstration. *Montrons que* $p_{|^1_2}$ *est un germe de probabilités.*

— $\forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2, p_1(\omega_1) \in [0, 1] \wedge p_2(\omega_2) \in [0, 1] \implies p_{|^1_2}(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1) \times p_2(\omega_2) \in [0, 1]$

— $\sum_{\omega \in \Omega} p_{|^1_2}(\omega) = \left(\sum_{\omega_1 \in \Omega_1} p_1(\omega_1)\right) \times \left(\sum_{\omega_2 \in \Omega_2} p_2(\omega_2)\right) = 1 \times 1 = 1$

II.3 Indépendance et probabilités conditionnelles

II.3.1 Indépendance

Définition 12 (Indépendance de deux évènements)**.** *Soit* $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace de probabilités, A,B, deux évènements.*

On dit que A et B sont indépendants si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Définition 13 (Indépendance de n évènements)**.** *Soit* $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ *une famille d'évènements de* Ω*.*

On dit que $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ *sont indépendants si :*

$$\forall P \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket), \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in P} A_i\right) = \prod_{i \in P} \mathbb{P}(A_i)$$