Probabilités et Statistiques I

Anne Broise

6 février 2016

Première partie
Espaces de Probailité

Quelques notions de dénombrement

1 Cardinal d'un esnemble fini

Ω un ensemble fini, $A \subset \Omega$.

Définition 1. *La fonction indicatrice de A est la fonction notée 1_A, χ_A ou $\mathbb{1}_A$ telle que :*

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : \Omega &\to \{0,1\} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 1. *Deux sous ensembles A et B de Ω ont le même cardinal s'il existe une bijection entre A et B.*

$$\#A = \#B \iff \forall x \in A, \exists! y \in B, \exists f \in B^A | f(x) = y$$

1.1 Propriété des fonctions indicatrices

Définition 2. *Le complémentaire de A dans Ω est l'ensemble des points des points de Ω qui ne sont pas dans A.*

$$A^C = \Omega \backslash A = \{\omega \in \Omega, \omega \notin A\} = \{\omega \in \Omega | \mathbb{1}_A(\omega) = 0\}$$

Une partie et son complémentaire forment une partition de Ω.

Définition 3. *On dit que* $(A_i)_{i\in[\![1,k]\!]} \in \mathcal{P}(\Omega)^k$ *est une partition de* Ω *si*

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega \text{ et } \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$$

Définition 4. *Il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* A *est en bijection avec* $[\![1, n]\!]$*. Cet entier* n *est unique et on l'appelle le cardinal de* A*. Noté :* $\#A$ *.*

Cela signifie qu'il est possible de numéroter les éléments de A par $\{a_1, \ldots, a_n\}$, et A est par exemple donné par :

$$k \in [\![1, n]\!] \mapsto a_k \in A$$

Proposition 2. *Le cardinal de* A *vaut :*

$$\#A = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{1}_A(\omega)$$

Cette somme est indépendante de la manière de numéroter l'ensemble.

Proposition 3.

— $$\mathbb{1}_{A^C} = 1 - \mathbb{1}_A$$

— *Si* $A \cap B = \emptyset$*, alors*
$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$$

— *Plus généralement :*
$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$$

— $$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$$

— $$\mathbb{1}_{A\times B}(x, y) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(y)$$

Corollaire.

— $$\#A^C = \#\Omega - \#A$$

— $$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

Démonstration. *Soit* $\omega \in \Omega$.
Si $\omega \in A$ *alors* $\mathbb{1}_{A^C}(\omega) = 0$ *et* $1 - \mathbb{1}_{A^C}(\omega) = 1 = \mathbb{1}_A(\omega)$.
Si $\omega \notin A$*, alors* $\omega \in A^C$ *et la démonstration est identique.*
Les deux fonctions $\mathbb{1}_A$ *et* $1 - \mathbb{1}_A$ *sont donc égales sur* Ω *et on a égalité.*

Trivialités. Á recopier qd le temps sera présent.

2 Cardinaux de quelques ensembles finis

L'ensemble des p-uples de $[\![1, n]\!]$

$$\#([\![1, n]\!]^p) = n^p$$

Globalement :

$$\#(A^p) = (\#A)^p$$

L'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ Il est en bijection avec $\{0, 1\}^n$. En effet, on a pour chacun des le choix ou non de le considérer dans une partie. Un n-uplet de $\{0, 1\}^n$ correspond donc, à la partie où la i-ème coordonnée aura été prise si elle vaut 1, sinon laissée. C'est donc une bijection.

On a donc :

$$\#\mathcal{P}([\![1, n]\!]) = 2^n$$

Ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ Une permutation est une bijection σ de $[\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} \sigma : 1, n &\to 1, n \\ i &\mapsto \sigma(i) \end{aligned}$$

$\forall i \neq j, f(i) \neq f(j)$

Très souvent on note une permutation par son image : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ ou $(\sigma(1)\,\sigma(2)\,\dots\,\sigma(n))$.

$$\mathfrak{S}_n = \{(x_1 \dots x_n), x_i \in [\![1, n]\!], i \neq j \iff x_i \neq x_j\}\#\mathfrak{S}_n = n!$$

Ensemble des arrangements de p éléments de $[\![1, n]\!]$ Les arrangemetns sont une façon de ranger $p < n$ éléments de $[\![1, n]\!]$.

C'est aussi une injection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Remarque. *Un arrangement n'est pas surjectif car* $\exists j_0 | \forall i, f(i) \neq j_0$.

Il y a $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ éléments.

Démonstration. *Principe des choix successifs.*

Ensemble des parties de p éléments de $[\![1, n]\!]$ Avec une partie de p éléments on peut construre $p!$ arrangements. On a donc $p!$ fois moins de parties que d'arrangements. Il y a donc

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

parties de p éléments de $[\![1, n]\!]$.

On peut aussi démontrer par récurrence, mais on en a pas trop envie.

Remarque. $\binom{n}{p}$ *est aussi le nombre de solutions de l'équation suivante :*

$$\begin{cases} \epsilon_i \in \{0,1\} & , \quad 1 \leq i \leq n \\ \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i & = \quad p \end{cases}$$

En effet, $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$ *est en bijection avec* $\{0,1\}^n$.

3 Exercices d'exemple

3.1 $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$

C'est l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$. Donc :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

3.2 Binôme de Newton

On cherche à montrer que

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

On a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b) \times (a+b) \times (a+b) \dots \\
&= \sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n) \in \{0,1\}^n} a^{\epsilon_1} b^{1-\epsilon_1} \times \dots \times a^{\epsilon_n} b^{1-\epsilon_n} \\
&= \sum_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n) \in \{0,1\}^n} a^{\epsilon_1+\dots+\epsilon_n} b^{n-(\epsilon_1+\dots+\epsilon_n)} \\
&= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}
\end{aligned}$$

3.3 $\sum_{p=0}^{k}\binom{n}{p}\binom{m}{k-p}=\binom{n+m}{k}$

n,m fixés, $k \in [\![0, m+n]\!]$.
$\binom{m+n}{k}$ est le nombre de solutions $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{m+n}) \in \{0,1\}^{n+m}$.

$$k = \sum_{i=1}^{n+m} \epsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} \epsilon_i$$

Or, il y a $\binom{n}{p}$ solutions à $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i = p$ et $\binom{m}{k-p}$ solutions à $\sum_{i=n+1}^{n+m} \epsilon_i = k-p$.
On a donc :

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{p}\binom{m}{k-p}$$