Notiţe Curs

2.6 Scheme probabiliste

Schema binomială

Propoziția 2.6.1 (**Schema binomială, schema bilei întoarse** sau **schema lui Bernoulli**). *Fie* $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ *un câmp de probabilitate și* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Dacă* $A_1, \ldots, A_n$ *sunt evenimente independente egal probabile,* $p = P(A_i)$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ *(p se numește* ***probabilitatea de succes****), și* $q = P(\overline{A}_i) = 1 - p$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, *(q se numește* ***probabilitatea de insucces****), atunci probabilitatea să se realizeze exact k din aceste n evenimente este*

$$\boxed{P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k}, \ \forall k \in \{0, \ldots, n\}.}$$

În particular, dacă dintr-o urnă ce conține a bile albe și b bile negre $(a, b \in \mathbb{N}^*)$ *se extrag, la întâmplare, n bile, cu întoarcere (fiecare bilă extrasă este reintrodusă în urnă înainte de extragerea următoarei bile), atunci probabilitatea ca numărul de bile albe extrase să fie egal cu k este*

$$\boxed{P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k}, \ \forall k \in \{0, \ldots, n\}, \quad \textit{unde } p = \frac{a}{a+b}, \ q = 1 - p = \frac{b}{a+b}.}$$

Probe Bernoulli

Definiția 2.6.1. *Probele (repetările) unei experiențe aleatoare având două rezultate posibile, evenimentele numite generic* ***succes și insucces****, ale căror probabilități nu depind de probă (adică probabilitatea de succes este aceeași pentru fiecare probă), iar rezultatele probelor sunt evenimente independente, se numesc* ***probe Bernoulli****.*

Schema multinomială

Propoziția 2.6.2 (**Schema multinomială**). *Fie* $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. *Dintr-o urnă ce conține câte* a_i *bile de culoarea i pentru orice* $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ $(a_i \in \mathbb{N}^*, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, r\})$ *se extrag, la întâmplare, n bile, cu întoarcere. Atunci probabilitatea să se extragă câte* k_i *bile de culoarea i pentru orice* $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, *unde* $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$, *este*

$$\boxed{P_{n;k_1,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!} \cdot p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r},}$$

unde $\boxed{p_i = \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \ldots + a_r},}$ $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$.

Schema binomială generatizată / Schema lui Poisson

Propoziţia 2.6.3 (**Schema binomială generalizată** sau **schema lui Poisson**). *Fie* $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ *un câmp de probabilitate și* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Dacă* $A_1, \ldots, A_n$ *sunt evenimente independente,* $p_i = P(A_i)$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, *și* $q_i = P(\overline{A}_i) = 1 - p_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, *atunci probabilitatea să se realizeze exact* k *din aceste* n *evenimente este egală cu coeficientul lui* x^k *din dezvoltarea polinomului*

$$\boxed{(p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2) \ldots (p_n x + q_n),}$$

pentru orice $k \in \{0, \ldots, n\}$.

Schema hipergeometrică / Schema bilei neîntoarse

Propoziţia 2.6.4 (**Schema hipergeometrică** sau **schema bilei neîntoarse**). *Dacă dintr-o urnă ce conține* a *bile albe și* b *bile negre* $(a, b \in \mathbb{N}^*)$ *se extrag, la întâmplare,* n *bile* $(n < a + b)$, *fără întoarcere (orice bilă extrasă nu mai este reintrodusă în urnă), atunci probabilitatea ca numărul de bile albe extrase să fie egal cu* k *este*

$$\boxed{\widetilde{P}_{n,k} = \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}, \ \forall k \in \{0, \ldots, n\}, \ n - b \leq k \leq a.}$$

Schema hipergeometrică generalizată

$\sim a+b$

Propoziţia 2.6.5 (**Schema hipergeometrică generalizată**). *Fie* $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. *Dintr-o urnă ce conține câte* a_i *bile de culoarea* i *pentru orice* $i \in \{1, \ldots, r\}$ $(a_i \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1, \ldots, r\})$ *se extrag, la întâmplare,* n *bile, fără întoarcere,* $n \leq a_1 + \ldots + a_r$. *Atunci probabilitatea să se extragă câte* k_i *bile de culoarea* i *pentru orice* $i \in \{1, \ldots, r\}$, *unde* $k_i \in \{0, \ldots, a_i\}$, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$, $k_1 + \ldots + k_r = n$, *este*

$$\boxed{\widetilde{P}_{n;k_1,\ldots,k_r} = \frac{C_{a_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot C_{a_r}^{k_r}}{C_{a_1+\ldots+a_r}^{k_1+\ldots+k_r}}.}$$

Observaţia 2.6.3

Luând $r = 2$ în **schema hipergeometrică generalizată**, regăsim **schema hipergeometrică**.

Exemplu 2.6.1

Exemplul 2.6.1. O urnă conține 10 bile albe și 6 bile negre. Se extrag 8 bile. Care este probabilitatea ca exact 5 din bilele extrase să fie albe (deci restul de 3 bile extrase să fie negre), dacă extragerea este cu întoarcere? Dar dacă extragerea este fără întoarcere?

Soluție. În cazul extragerii cu întoarcere, aplicând schema bilei întoarse obținem că probabilitatea cerută este

$$P_{8,5} = C_8^5 \cdot \left(\frac{10}{16}\right)^5 \cdot \left(\frac{6}{16}\right)^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 = 56 \cdot \frac{5^5 \cdot 3^3}{8^8} = \frac{590625}{2097152}.$$

În cazul extragerii fără întoarcere, aplicând schema bilei neîntoarse obținem că probabilitatea cerută este

$$\widetilde{P}_{8,5} = \frac{C_{10}^5 \cdot C_6^3}{C_{16}^8} = \frac{\dfrac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \dfrac{6!}{3! \cdot 3!}}{\dfrac{16!}{8! \cdot 8!}} = \frac{56}{143}.$$

□

Exemplu 2.6.2

Exemplul 2.6.2. Jocul *LOTO 6/49* constă în extragerea a 6 numere dintr-o urnă ce conține 49 de bile, numerotate 1, 2, ..., 49. Extragerea este fără întoarcere (adică orice bilă extrasă nu mai este reintrodusă în urnă). Câștigurile acordate la acest joc sunt de trei categorii:

- *categoria I*, pentru jucătorii ce au jucat (pe o aceeași variantă) toate cele 6 numere extrase;
- *categoria a II-a*, pentru jucătorii ce au jucat (pe o aceeași variantă) 5 din cele 6 numere extrase;
- *categoria a III-a*, pentru jucătorii ce au jucat (pe o aceeași variantă) 4 din cele 6 numere extrase.

Să se calculeze:

a) probabilitatea ca un jucător ce a jucat o *variantă simplă*, constând în 6 numere, să obțină un câștig de categoria I;

b) probabilitatea ca un jucător ce a jucat o variantă simplă să obțină un câștig de categoria a II-a;

c) probabilitatea ca un jucător ce a jucat o variantă simplă să obțină un câștig de categoria a III-a;

d) probabilitatea ca un jucător ce a jucat o *variantă combinată* constând în 7 numere, să obțină un câștig de categoria I;

e) probabilitatea ca un jucător ce a jucat o variantă combinată constând în 7 numere, să obțină un câștig de categoria a II-a;

f) probabilitatea ca un jucător ce a jucat o variantă combinată constând în 7 numere, să obțină un câștig de categoria a III-a.