Curs 3

Ecuaţii diferenţiale de ordinul I integrabile prin cvadraturi (continuare)

8. Ecuaţii diferenţiale de tip Bernoulli

Ecuaţiile diferenţiale de tip Bernoulli sunt de forma

$$x' + A(t)x = B(t)x^{\alpha}, \quad \alpha \neq \{0,1\},\ A(\cdot),\ B(\cdot) : I \to \mathbb{R} \text{ funcţii continue}$$

Algoritmul de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale de tip Bernoulli este:

- Se împarte ecuaţia la x^{α} şi se obţine

$$\frac{x'}{x^{\alpha}} + A(t)\frac{x}{x^{\alpha}} = B(t) \Leftrightarrow x' \cdot x^{-\alpha} + A(t)x^{1-\alpha} = B(t).$$

- Se face schimbarea de funcţie $y = x^{1-\alpha}$ şi se obţine

$$y' = (1-\alpha)x' \cdot x^{-\alpha} \Leftrightarrow x' \cdot x^{-\alpha} = \frac{y'}{1-\alpha}.$$

- Se înlocuieşte în ecuaţia iniţială şi se obţine

$$\frac{y'}{1-\alpha} + A(t)y = B(t) \Leftrightarrow y' + (1-\alpha)A(t)y = (1-\alpha)B(t),$$

  care este o ecuaţie diferenţială afină.

Exemplu

$x' - 2tx = 3tx^2$

Rezolvare

Avem o ecuaţie diferenţială de tip Bernoulli cu $\alpha = 2$.
Împărţim ecuaţia la x^2 şi obţinem:

$$\frac{x'}{x^2} - 2t\frac{x}{x^2} = 3t \Leftrightarrow x' \cdot x^{-2} - 2tx^{-1} = 3t.$$

Facem schimbarea de variabilă $y = x^{1-2} = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, de unde rezultă $y' = -\dfrac{1}{x^2}x'$.

Înlocuim în ecuaţia iniţială şi obţinem $-y' - 2ty = 3t$, ecuaţie echivalentă cu ecuaţia diferenţială afină

$$y' + 2ty = -3t.$$

Pentru a rezolva ecuaţia diferenţială afină aplicăm metoda variaţiei constantei.

Rezolvăm mai întâi ecuaţia omogenă

$$y' + 2ty = 0.$$

Avem

$$y' = -2ty \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -2tdt \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int 2tdt \Leftrightarrow \ln|y| = -t^2 + c \Leftrightarrow y = e^{-t^2+c},$$

deci

$$y_o = ce^{-t^2}.$$

Variem constanta şi obţinem $y(t) = c(t)e^{-t^2}$, apoi înlocuim în ecuaţia afină, de unde rezultă

$$c'(t)e^{-t^2} + c(t)e^{-t^2}(-2t) + 2tc(t)e^{-t^2} = -3t \Leftrightarrow c'(t)e^{-t^2} = -3t \Leftrightarrow c'(t) = -3te^{t^2},$$

deci am obţinut o ecuaţie diferenţială direct integrabilă a cărei soluţie este

$$c(t) = -3\int te^{t^2}dt = -\frac{3}{2}e^{t^2} + c_1.$$

Înlocuind pe $c(t)$ astfel obţinut în y_o obţinem soluţia particulară

$$\varphi_0 = \left(-\frac{3}{2}e^{t^2} + c_1\right)e^{-t^2} = -\frac{3}{2} + c_1e^{-t^2}.$$

Rezultă că soluţia generală a ecuaţiei afine este

$$y = y_o + \varphi_0 = ce^{-t^2} - \frac{3}{2} + c_1e^{-t^2} = -\frac{3}{2} + ce^{-t^2}.$$

Ţinând cont de expresia lui x în funcţie de y rezultă că soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{-\frac{3}{2} + ce^{-t^2}}.$$

9. Ecuaţii diferenţiale de tip Riccati

Ecuaţiile diferenţiale de tip Riccati sunt de forma

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x^2 + B(t)x + f(t), \quad A(\cdot),\ B(\cdot),\ f(\cdot) : I \to \mathbb{R} \text{ funcţii continue}$$

Pentru a afla soluţia generală a ecuaţiei de tip Riccati trebuie să se cunoască o soluţie particulară. Dacă nu este dată explicit o astfel de soluţie, atunci se poate tatona o soluţie particulară căutând-o de forma funcţiilor $A(t)$, $B(t)$ sau $f(t)$.

Presupunem că se ştie o soluţie particulară, pe care o notăm cu ψ_0, deci

$$\psi_0' = A(t)\psi_0^2 + B(t)\psi_0 + f(t).$$

Se face schimbarea de funcţie $x = y + \psi_0$ şi obţinem

$$\begin{aligned} x' = y' + \psi_0' &= A(t)(y+\psi_0)^2 + B(t)(y+\psi_0) + f(t) \\ &= A(t)y^2 + 2A(t)y\psi_0 + A(t)\psi_0^2 + B(t)y + B(t)\psi_0 + f(t). \end{aligned}$$

Deci

$$y' = A(t)y^2 + 2A(t)y\psi_0 + B(t)y = A(t)y^2 + [2A(t)\psi_0 + B(t)]y.$$

Am obţinut astfel o ecuaţie diferenţială de tip Bernoulli cu $\alpha = 2$, care se rezolvă după algoritmul de rezolvare a ecuaţiilor de tip Bernoulli.

Exemplu

$$x' = 2tx^2 - x - \frac{t+1}{t^2}, \quad \psi_0(t) = \frac{1}{t}$$

Rezolvare

Avem o ecuaţie diferenţială de tip Riccati, cu $A(t) = 2t$, $B(t) = -1$, $f(t) = -\dfrac{t+1}{t^2}$, deci facem schimbarea de variabilă $x = y + \dfrac{1}{t}$. Obţinem

$$\begin{aligned} x' = y' - \frac{1}{t^2} &= 2t\left(y + \frac{1}{t}\right)^2 - \left(y + \frac{1}{t}\right) - \frac{t+1}{t^2} \\ &= 2ty^2 + 2t \cdot \frac{2}{t}y + 2t \cdot \frac{1}{t^2} - y - \frac{1}{t} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

Rezultă ecuaţia diferenţială de tip Bernoulli cu $\alpha = 2$

$$y' = 2ty^2 + 3y.$$

Împărţim ultima ecuaţie prin y^2, obţinem

$$y'y^{-2} = 2t + 3y^{-1} \tag{0.0.1}$$

şi facem schimbarea de necunoscută $z = y^{-1}$, de unde rezultă $z' = -y^{-2}y'$ şi, înlocuind în ecuaţia (0.0.1) avem $-z' = 2t + 3z$, adică ecuaţia diferenţială afină

$$z' = -3z - 2t \tag{0.0.2}$$

Rezolvăm ecuaţia afină prin metoda variaţiei constantei. Mai întâi rezolvăm ecuaţia omogenă $z' = -3z$ şi obţinem

$$\frac{dz}{dt} = -3z \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = -3dt \Leftrightarrow \int \frac{dz}{z} = -3\int dt \Leftrightarrow \ln|z| = -3t + c \Leftrightarrow |z| = e^{-3t+c},$$

de unde obţinem soluţia ecuaţiei omogene

$$z_o = ce^{-3t}.$$

Acum variem constanta, deci $z(t) = c(t)e^{-3t}$. Înlocuind în ecuaţia afină (0.0.2) avem

$$c'(t)e^{-3t} - 3c(t)e^{-3t} = -3c(t)e^{-3t} - 2t \Leftrightarrow c'(t)e^{-3t} = -2t,$$

de unde obţinem ecuaţia direct integrabilă

$$c'(t) = -2te^{3t}.$$

Integrând, obţinem

$$c(t) = -2\int te^{3t}dt = -2\int t\left(\frac{1}{3}e^{3t}\right)' dt = -2\left(\frac{1}{3}te^{3t} - \int \frac{1}{3}e^{3t}dt\right) = \frac{-2}{3}te^{3t} + \frac{2}{9}e^{3t} + c_1.$$

Înlocuind pe $c(t)$ în soluţia ecuaţiei omogene rezultă

$$\varphi_0 = \left(\frac{-2}{3}te^{3t} + \frac{2}{9}e^{3t} + c_1\right)e^{-3t} = \frac{-2}{3}t + \frac{2}{9} + c_1e^{-3t},$$

deci soluţia generală a ecuaţiei afine este

$$z = z_o + \varphi_0 = ce^{-3t} - \frac{2}{3}t + \frac{2}{9} + c_1e^{-3t} = ce^{-3t} - \frac{2}{3}t + \frac{2}{9}.$$

Cum $z = \dfrac{1}{y}$ rezultă

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{-\frac{2}{3}t + \frac{2}{9} + ce^{-3t}} = x - \frac{1}{t},$$

deci

$$x = \frac{1}{t} + \frac{1}{-\frac{2}{3}t + \frac{2}{9} + ce^{-3t}}.$$

10. Ecuaţii cu diferenţiale exacte

Ecuaţiile cu diferenţiale exacte sunt de forma

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)},$$

sau, echivalent,

$$P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0, \tag{0.0.3}$$

cu $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue şi $Q(t,x) \neq 0$.

Definiţia 1. Dacă $F(\cdot,\cdot) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este derivabilă astfel încât

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} & = & P(t,x) \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} & = & Q(t,x) \end{cases}$$

atunci F se numeşte *integrală primă* pentru ecuaţia (0.0.3).

Observaţia 1. Ecuaţiei (0.0.3) i se poate ataşa o formă diferenţiabilă

$$d\omega = P(t,x)dt + Q(t,x)dx,$$

de unde rezultă că ecuaţia diferenţială (0.0.3) este echivalentă cu $d\omega = 0$.

Definiţia 2. Forma diferenţiabilă $d\omega$ se numeşte *formă diferenţiabilă exactă* dacă şi numai dacă există o funcţie $F : D \to \mathbb{R}$ derivabilă astfel încât

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} & = & P(t,x) \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} & = & Q(t,x) \end{cases}$$

Observaţia 2. Cum

$$dF(t,x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)dx$$

rezultă

$$d\omega = dF(t,x).$$

În acest caz F este o integrală primă pentru ecuaţia (0.0.3).

În continuare vom studia cazurile:

- $\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)$
- $\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) \neq \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)$

I. Cazul $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{t},\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{t}}(\mathbf{t},\mathbf{x})$.

Propoziţia 1. *Dacă D este un domeniu simplu conex, $P, Q \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$ şi forma diferenţiabilă $\omega(t,x)$ este închisă (i.e. $\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)$ pe D) atunci soluţia generală a ecuaţiei cu diferenţiale exacte este dată sub forma implicită de $F(t,x) = c$, unde*

$$F(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(\tau, x_0)d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t,\sigma)d\sigma$$

Demonstraţie. Cum $\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)$, $\forall (t,x) \in D$, rezultă că ecuaţia diferenţială (0.0.3) este cu diferenţiale totale exacte. Ştim că

$$d\omega = P(t,x)dt + Q(t,x)dx,$$

deci

$$\omega = \int_{(t_0,x_0)}^{(t,x)} \left(P(t,x)dt + Q(t,x)dx\right),$$

care este o integrală curbilinie, deci nu depinde de drum. Rezultă că

$$\omega = \int_{t_0}^{t} P(\tau, x_0)d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t,\sigma)d\sigma$$

Dar $d\omega = dF = 0$, deci $F = \omega = c$, de unde rezultă

$$F(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(\tau, x_0)d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t,\sigma)d\sigma = c.$$

□

În concluzie, dacă $\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)$, atunci soluţia este $F(t,x) = c$, unde

$$F(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(\tau, x_0)d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t,\sigma)d\sigma = c.$$

Exemplu

$(t+x+1)dt + (t-x^2+3)dx = 0$

Rezolvare

Avem $P(t,x) = t+x+1$ şi $Q(t,x) = t-x^2+3$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) &= 1 \\ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x) &= 1 \end{cases}$$

deci $\dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) = \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x)$. Astfel soluţia sub formă implicită este $F(t,x) = c$, unde

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \int_{t_0}^{t} P(\tau, x_0)d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t,\sigma)d\sigma \\ &= \int_{t_0}^{t} (\tau + x_0 + 1)d\tau + \int_{x_0}^{x} t - \sigma^2 + 3)d\sigma \\ &= \left(\frac{\tau^2}{2} + x_0\tau + \tau\right)\Bigg|_{t_0}^{t} + \left(t\sigma - \frac{\sigma^3}{3} + 3\sigma\right)\Bigg|_{x_0}^{x} \\ &= \frac{t^2}{2} + x_0 t + t - \frac{t_0^2}{2} - x_0 t_0 - t_0 + tx - \frac{x^3}{3} + 3x - tx_0 + \frac{x_0^3}{3} - 3x_0 \\ &= \frac{t^2}{2} + t + tx - \frac{x^3}{3} + 3x + c, \end{aligned}$$

deci soluţia în formă implicită este:

$$\frac{t^2}{2} + t + tx - \frac{x^3}{3} + 3x = c.$$

Observaţia 3. Se obţine acelaşi rezultat dacă se consideră $t_0 = x_0 = 0$.

Într-adevăr, dacă considerăm

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \int_{0}^{t} P(\tau, 0)d\tau + \int_{0}^{x} Q(t,\sigma)d\sigma \\ &= \int_{0}^{t} (\tau + 0 + 1)d\tau + \int_{0}^{x} t - \sigma^2 + 3)d\sigma \\ &= \left(\frac{\tau^2}{2} + \tau\right)\Bigg|_{0}^{t} + \left(t\sigma - \frac{\sigma^3}{3} + 3\sigma\right)\Bigg|_{0}^{x} \\ &= \frac{t^2}{2} + t + tx - \frac{x^3}{3} + 3x, \end{aligned}$$

deci soluţia în formă implicită este:

$$\frac{t^2}{2} + t + tx - \frac{x^3}{3} + 3x = c.$$

II. Cazul $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) \neq \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{t}}(\mathbf{t}, \mathbf{x})$.

În această situaţie se caută o funcţie μ, numită *factor integrant*, astfel încât înmulţind ecuaţia (0.0.3) cu μ, aceasta să devină o ecuaţie cu diferenţiale totale exacte.
Deci

$$\mu(t,x)P(t,x)dt + \mu(t,x)Q(t,x)dx = 0.$$

Notând $P^*(t,x) = \mu(t,x)P(t,x)$ şi $Q^*(t,x) = \mu(t,x)Q(t,x)$ avem

$$\frac{\partial P^*}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial Q^*}{\partial t}(t,x),$$

relaţie echivalentă cu

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot P(t,x) + \cdot \mu(t,x) = \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot Q(t,x) + \frac{\partial Q}{\partial t} \cdot \mu(t,x),$$

adică

$$\left[\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right] \mu(t,x) = \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot Q(t,x) - \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot P(t,x). \tag{0.0.4}$$

S-a obţinut astfel o ecuaţie cu derivate parţiale, care, uneori este destul de dificilă. De aceea, pentru simplificarea calculelor factorul integrant μ se consideră numai funcţie de t sau numai funcţie de x. Astfel, avem:

- Pentru $\mu = \mu(t)$ rezultă $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$, deci ecuaţia (0.0.4) devine ecuaţia diferenţială de ordinul I
$$\left[\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right] \mu(t,x) = \frac{d\mu}{dt} \cdot Q(t,x).$$

- Pentru $\mu = \mu(x)$ rezultă $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$, deci ecuaţia (0.0.4) devine ecuaţia diferenţială de ordinul I
$$\left[\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right] \mu(t,x) = -\frac{d\mu}{dx} \cdot P(t,x).$$

Observaţia 4. În cazul în care nu există factor integrant de forma $\mu(t)$ sau $\mu(x)$, factorul integrant de poate alege şi de forma $\mu(t \pm x)$, $\mu(t^2 \pm x^2)$, $\mu(t,x)$, $\mu\left(\frac{t}{x}\right)$, etc.

Exemplu

$$\left(2tx + t^2x + \frac{1}{3}x^3\right) dt + (t^2 + x^2)dx = 0$$

Rezolvare

Avem $P(t,x) = 2tx + t^2x + \dfrac{1}{3}x^3$ şi $Q(t,x) = t^2 + x^2$, deci

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) & = & 2t + t^2 + x^2 \\ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x) & = & 2t \end{array}\right. \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x}(t,x) \neq \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)$$

Căutăm un factor integrant de forma $\mu = \mu(t)$, deci

$$\mu(t)\left(2tx + t^2 + \frac{1}{3}x^3\right)dt + \mu(t)(t^2+x^2)dx = 0$$

astfel încât $\dfrac{\partial P^*}{\partial x}(t,x) = \dfrac{\partial Q^*}{\partial t}(t,x)$, unde

$$P^*(t,x) = \mu(t)\left(2tx + t^2 + \frac{1}{3}x^3\right) \text{ şi } Q^*(t,x) = \mu(t)(t^2+x^2)dx.$$

Avem

$$\frac{\partial P^*}{\partial x}(t,x) = \mu(t)\cdot(2t+t^2+x^2) \text{ şi } \frac{\partial Q^*}{\partial t}(t,x) = \frac{d\mu}{dt}\cdot(t^2+x^2) + 2t\cdot\mu(t),$$

deci

$$\mu(t)\cdot(2t+t^2+x^2) = \frac{d\mu}{dt}\cdot(t^2+x^2) + 2t\cdot\mu(t) \Leftrightarrow \frac{d\mu}{dt}(t^2+x^2) = \mu(t)(t^2+x^2),$$

de unde se obţine ecuaţia diferenţialăcu variabile separabile

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu(t).$$

Obţinem

$$\frac{d\mu}{\mu} = dt \Leftrightarrow \int\frac{d\mu}{\mu} = \int dt \Leftrightarrow \ln|\mu| = t + c \Leftrightarrow |\mu| = e^{t+c} \Leftrightarrow \mu = ce^t.$$

Vom considera $c = 1$, deci $\mu(t) = e^t$, de unde se obţine

$$P^*(t,x) = e^t\left(2tx + t^2x + \frac{1}{3}x^2\right) \text{ şi } Q^*(t,x) = e^t(t^2+x^2).$$

Se obţine astfel soluţia sub formă implicită

$$F(t,x) = \int_{t_0}^{t} e^\tau\left(2\tau x_0 + \tau^2 x_0 + \frac{1}{3}x_0^2\right)d\tau + \int_{x_0}^{x} e^t(t^2+\sigma^2)d\sigma = c.$$

Considerând $(t_0, x_0) = (0, 0)$, obţinem

$$\begin{aligned}
F(t,x) &= \int\limits_0^x e^t t^2 d\sigma + \int_0^x e^t \sigma^2 d\sigma \\
&= e^t t^2 \int\limits_0^x d\sigma + e^t \int_0^x \sigma^2 d\sigma \\
&= e^t t^2 \sigma\Big|_0^x + e^t \frac{\sigma^3}{3}\Bigg|_0^x \\
&= e^t t^2 x + e^t \frac{x^3}{3}
\end{aligned}$$

deci soluţia în formă implicită este:

$$e^t x \left(t^2 + \frac{x^3}{3} \right) = c.$$