1. Care dintre următoarele funcții sunt asimpotic pozitive?

$$\begin{aligned}
&a)\ \ f_1(n) = \sqrt{\frac{n-7}{10n-n^2}} \\
&b)\ \ f_2(n) = \frac{n^2-1}{sin(\frac{n\cdot\pi}{2})} \\
&c)\ \ f_3(n) = \frac{2+\sqrt{n^2-16}-n}{ln(n^2-10n+25)} \\
&d)\ \ f_4(n) = (100-n!)\cdot 2^{50-n}
\end{aligned}$$

Rezolvare:

a) Funcția $f_1 : D \to \mathbb{R}$, $f_1(n) = \sqrt{\frac{n-7}{10n-n^2}}$, unde $D = \{n \in \mathbb{R} \mid n > 7\ si\ n < 10\}$, nu este aimptotic pozitivă deoarece nu există A (finită) astfel încât $D = N \setminus A$.

b) Funcția $f_2 : D \to \mathbb{R}$, $f_2(n) = \frac{n^2-1}{sin(\frac{n\cdot\pi}{2})}$, unde $D = N$, nu este asimpotic pozitivă deoarece nu există A (finită) astfel încât $D = N \setminus A$.

c) Funcția $f_3 : D \to \mathbb{R}$, $f_3(n) = \frac{2+\sqrt{n^2-16}-n}{ln(n^2-10n+25)}$, unde $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 7\}$, este asimptotic pozitivă, deoarece $D = N \setminus A$ cu $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (mulțime finită) și $f_3(n) > 0,\ \forall\, n \geq 7$.

d) Funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f_4(n) = (100-n!)\cdot 2^{50-n}$, unde $D = N$, nu este aimptotic pozitivă deoarece nu există A (finită) astfel încât $D = N \setminus A$.

2. Demonstrați că:

$$\begin{aligned}
&a)\ \ n\cdot lnn = O(n^2) \\
&a)\ \ n\sqrt{n} = \Omega(n\cdot lnn) \\
&a)\ \ n! = \Omega(e^n) \\
&a)\ \ n! = O(n^n)
\end{aligned}$$

Rezolvare:

a) Întrucât $lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot lnn}{n^2} = lim_{n\to\infty} \frac{lnn}{n} = 0$ (n tinde mai rapid la ∞) și $0 \in [0, +\infty)$ $\implies n\cdot lnn = O(n^2)$

b) Deoarece $lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\sqrt{n}}{n\cdot lnn} = lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{lnn} = \infty$ ($\sqrt{n}$ tinde mai rapid la ∞) și $\infty \in (0, +\infty]$ $\implies n\sqrt{n} = \Omega(n\cdot lnn)$.

c) Deoarece $lim_{n\to\infty} \frac{n!}{e^n} = \infty$ ($n!$ tinde mai rapid la ∞) și $\infty \in (0, +\infty] \implies n! = \Omega(e^n)$.

d) Întrucât $lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ ($n!$ tinde mai rapid la ∞) și $0 \in [0, +\infty) \implies n! = O(n^n)$.