C

Conice

Def Se numește conică în $\mathbb{R}^2$ o mulțime Γ de puncte (x,y) din $\mathbb{R}^2$ ale căror coordonate verifică o ecuație de forma

$$g(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0,$$

cu $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,j \in \{0,1,2\}$

Numerele reale

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I = a_{11} + a_{22}$$

se numesc invarianții metrici ai conicei.

Cu ajutorul acestora se poate preciza natura și genul conicei.

Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow$ conică degenerată

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ conică nedegenerată

Dacă $\delta < 0 \Rightarrow$ conică de tip hiperbolic

$\delta = 0 \Rightarrow$ conică de tip parabolic

$\delta > 0 \Rightarrow$ conică de tip eliptic

Teoremă La o rotație sau translație în $\mathbb{R}^2$ a sistemului de coordonate, valoarea expresiilor Δ, δ, și I nu se schimbă.

(I) Centrul unei conice se află rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{2} g'_x(x,y) \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{1}{2} g'_y(x,y) \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{20} = 0 . \end{cases}$$

Def

Punctul $C(x_0, y_0)$ s.n. centru al conicei Γ dacă $\forall P(x,y) \in \Gamma \Rightarrow P'(2x_0 - x, 2y_0 - y) \in \Gamma$.

Obs Din punct de vedere geometric punctul C este centrul unei conice Γ dacă pentru orice punct P de pe conică simetricul său față de punctul C ~~se~~ află tot pe conica Γ. Din acest motiv, dacă există, centrul unei conice Γ se mai numește și centrul de simetrie al conicei Γ.

Def

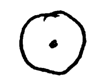
Tangenta la conică dusă dintr-un punct $M(x_0, y_0)$ oarecare din plan s.n. polară acelui punct.

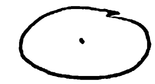
Ec. polarei lui $M(x_0, y_0)$ în raport cu o conică Γ este

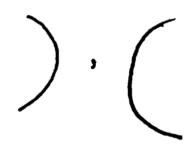
$$a_{11}xx_0 + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}yy_0 + a_{10}(x+x_0) + a_{20}(y+y_0) + a_{00} = 0 .$$

Dacă punctul M este pe curbă, atunci polara se numește tangenta.

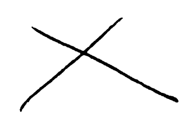
Obs Utilizând roto-translația care realizează trecerea de la reperul cartezian $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ la un reper cartezian adecvat orientat pozitiv (numit reper canonic sau natural) față de care ecuația $g(x,y)=0$ să aibă forma cea mai simplă posibilă (numită ecuație redusă sau canonică) rezultă că Γ este echivalentă cu una dintre următoarele mulțimi:

Cerc: $x^2+y^2=r^2$ sau $\left((x-a)^2+(y-b)^2=r^2\right)$ 
Cerc de centru (a,b) și rază r

Elipsă: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 

Hiperbolă: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 

Parabolă: $y^2=2px$ 

Pereche de drepte concurente: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ 

Pereche de drepte paralele: $x^2-a^2=0$ 

Pereche de drepte confundate: $x^2=0$ 

Punct: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$

Mulțimea vidă: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+1=0$ sau $x^2+a^2=0$.

Pentru determinarea formei canonice se poate proceda astfel:

- Se determină valorile și vectorii proprii ortonormați ai matricei simetrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.
- Se notează cu T matricea formată cu coordonatele vectorilor proprii așezați pe coloane.
- Aplicăm rotația

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

care reduce forma pătratică la forma diagonală $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$, unde λ_1, λ_2 sunt valorile proprii.
- Dacă este cazul, se mai face o translație.