

Teste de evaluare



Testul 1

1. S-a amestecat un pachet de 10 cărți de joc numerotate 1, 2, ..., 10. Care este probabilitatea ca deasupra să fie cartea 1? 2 puncte
2. Într-un lot de 100 piese 5 sunt defecte. Se alege la întâmplare 5 piese din lot. Care este probabilitatea ca printre piesele alese să fie cel puțin una defectă? 2 puncte
3. Patru trăgători trag asupra unei ținte. Primul atinge ținta cu probabilitatea $\frac{2}{3}$, al doilea cu probabilitatea $\frac{3}{4}$, al treilea cu probabilitatea $\frac{4}{5}$, iar al patrulea cu probabilitatea $\frac{5}{6}$. Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă exact de trei ori? 2 puncte
4. Se consideră următorul joc: se aruncă un zar și un jucător primește 2 puncte dacă apare fața 1; primește 4 puncte dacă apare fața 2 sau fața 3; primește 5 puncte dacă apare fața 4; pierde 6 puncte dacă apare una din fețele 5 sau 6. Se consideră că zarul este corect. Să se determine tabloul distribuției acestei variabile aleatoare. 2 puncte

Se acordă două puncte din oficiu.

(Timp de lucru: 60 minute)



Testul 2

1. La un joc participă doi jucători. Partida (și miza pusă în joc) este câștigată de jucătorul care câștigă trei jocuri. Dacă din motive de forță majoră jocul se întrerupe la scorul 2-1 cum trebuie împărțită miza? (Se admite că în fiecare joc șansele sunt egale). 2 puncte
2. O urnă conține patru bile albe dintre care două numerotate cu 1 și două numerotate cu 2 și cinci bile negre dintre care trei numerotate cu 1 și două cu 2. Din această urnă se extrage o bilă. Să se determine probabilitățile evenimentelor:
 - a) A : bila extrasă să fie albă
 - b) B : bila extrasă poartă numărul 1
 - c) C : bila extrasă să poarte numărul 2 dacă s-a realizat evenimentul A.2 puncte
3. Tabelul de mai jos conține rezultatele obținute într-o cursă athletică de 100 m de către 40 de participanți. 2 puncte

Timpul (s)	Număr de alergători	Timpul (s)	Număr de alergători
10,5 - 10,7	1	11,5 - 11,7	7
10,7 - 10,9	1	11,7 - 11,9	6
10,9 - 11,1	2	11,9 - 12,1	5
11,1 - 11,3	5	12,1 - 12,3	4
11,3 - 11,5	7	12,3 - 12,5	2

Se se alcătuiască tabela cu valorile centrale ale claselor, cu frecvențele relative și cu frecvențele cumulate. Să se determine câți alergători au realizat timpuri mai bune de 11,7 s. Care este procentul de alergători care au realizat timpuri mai bune de 11,5 s.

4. O variabilă aleatoare relativă probabilității P poate lua valorile 1, 2, 3, 4, 5 cu probabilitățile 2 puncte
 $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$.

1) Să se calculeze:

- a) $P(x < 2)$;
- b) $P(x < 4)$;
- c) $P(x < 1)$.

2) Să se calculeze funcția de repartiție și să se reprezinte grafic.

Se acordă două puncte din oficiu.

(Timp de lucru: 60 minute)



Testul 3

1. Dintr-un loc de piese prelucrate într-o zi la un strung se extrag deodată patru piese. Să notăm cu A 2 puncte
 evenimentul cu toate cele patru piese extrase să fie bune și cu B evenimentul ca cel puțin o piesă să
 fie rebut. Ce fel de evenimente sunt:

- a) $A \cup B$;
- b) $A \cap B$?

2. Cele 26 litere ale alfabetului scrise pe un cartonaș sunt introduse într-o urnă. Se cere probabilitatea 2 puncte
 ca extrăgând la întâmplare de patru ori câte un cartonaș și așezându-le în ordinea extragerii să
 obținem cuvântul PACE.

3. Zece elevi dintre care 5 fete și 5 băieți sunt așezați la întâmplare câte doi într-o bancă. Se cere 2 puncte
 probabilitatea ca în fiecare bancă să fie un băiat și o fată.

4. Puterea instalată a grupurilor electrogene în KW dintr-un județ în anii 2000-2004 este dată în 2 puncte
 tabelul:

Anii	KW	%
2000	12 281	19,68
2001	62 779	100,59
2002	61 396	98,38
2003	62 172	99,62
2004	62 408	100

Procentele au fost calculate luându-se ca bază anul 2004.

Să se alcătuiască diagrama care reprezintă situația în procente pe ani a puterii instalate a grupurilor electrogene.

(Timp de lucru: 60 minute)

Se acordă din oficiu două puncte



Testul 4

1. Considerăm trei urne cu următoarea compoziție:

Urna	Nr. bile albe	Nr. bile negre
U_1	10	4
U_2	5	3
U_3	2	6

Care este probabilitatea ca luând la întâmplare câte o bilă din fiecare urnă să obținem 2 bile albe și una neagră?

2 puncte

2. Din 100 mere, 10 sunt stricate. Care este probabilitatea ca scoțând 5 mere la întâmplare să scoatem și mere stricate?

2 puncte

3. Se aruncă două zaruri A și B ale căror fețe sunt numerotate de la 1 la 6. Punctele a și b obținute la aruncarea celor două zaruri, le asociem ecuația de gradul II: $x^2 + ax + b = 0$. Să se calculeze probabilitatea următoarelor evenimente:

2 puncte

a) ecuația are două rădăcini reale; b) ecuația are două rădăcini întregi.

4. La un concurs de frumusețe măsurându-se greutatea unui grup de 10 concurente s-au obținut următoarele date în kg: 51; 52; 59; 49; 57; 50; 55; 48; 46; 47.

2 puncte

a) Să se alcătuiască tabelul statistic cu frecvențele și apoi diagrama cu batoane;

b) Să se alcătuiască histograma și să se reprezinte și prin alte procedee grafice rezultatele din tabel.

Se acordă din oficiu două puncte.

(Timp de lucru: 60 minute)



Teme de investigare

1. O companie de asigurări de automobile face un bilanț al cheltuielilor intervenite. Printre dosarele sale cu accidente:

- 85% dintre dosare antrenează cheltuieli pentru reparații materiale;
- 20% dintre dosare antrenează cheltuieli pentru vătămări corporale;
- 12% dintre dosare antrenează cheltuieli atât pentru reparații materiale cât și pentru vătămări corporale.

Fie evenimentele următoare:

R = „dosarul tratat antrenează cheltuieli pentru reparații materiale”,

D = „dosarul tratat antrenează cheltuieli pentru vătămări corporale”.

I. Folosind notațiile R și D , să se exprime cele trei procentaje ale enunțului în termeni de probabilități.

II. Calculați probabilitatea ca un dosar:

a) să antreneze cheltuieli pentru reparații materiale și vătămări corporale;

b) să antreneze doar cheltuieli pentru reparații materiale;

c) să antreneze doar cheltuieli pentru vătămări corporale;

d) să nu antreneze nici cheltuieli pentru reparații materiale și nici cheltuieli pentru vătămări corporale.

III. Se constată că 40% din dosarele tratată corespund excesului de viteză și dintre acestea 60% antrenează cheltuieli pentru vătămări corporale.

a) Se alege un dosar. Care este probabilitatea ca acest dosar să corespundă excesului de viteză și să se antreneze cheltuieli pentru vătămări corporale?

b) Se aleg cinci dosare la întâmplare. Care este probabilitatea ca cel puțin un dosar să corespundă excesului de viteză și să antreneze cheltuieli pentru vătămări corporale?

2. Alcătuiți și voi o problemă asemănătoare (sau nu) pentru o companie de asigurări imobiliare, unde s-au încheiat asigurări fie pentru inundații, fie pentru incendii, pentru cutremure, pentru furturi sau pentru toate tipurile de pagube.

Scurtă privire asupra teoriei probabilităților

Dacă aritmetica a apărut din necesitatea omului de a număra (pentru a cunoaște numărul membrilor tribului, numărul de capete dintr-o turmă etc.), iar mai târziu geometria, după cum o arată chiar numele său, din necesitatea de a măsura pământul, calculul probabilităților a apărut din practica jocurilor de noroc.

Din punct de vedere cronologic teoria probabilităților nu se găsește nici printre cele mai vechi domenii ale matematicii, nici printre cele mai noi. Desigur, jocurile de noroc se practică de mii de ani. Dar evaluarea șanselor de câștig ale unui jucător într-un anumit moment al jocului s-a făcut multă vreme intuitiv sau pe baza experienței acumulate la mesele de joc.

O dată cu apariția jocurilor de noroc din ce în ce mai complicate și cu răspândirea obiceiului de a juca, au apărut probleme de evaluare a șanselor tot mai multe și mai dificile, probleme a căror rezolvare depășea capacitatea de a raționa a jucătorilor de rând și care au atras asupra lor atenția unor oameni care posedau din plin această capacitate. Și când spunem aceasta ne gândim la Pascal, Fermat, Huygens, Bernoulli și alți oameni de știință iluștri.

Și astfel, probleme care s-au născut la masa de joc au fost transferate pe masa de lucru a unor savanți. Primele discuții mai serioase de calculul probabilităților* datează de ceva mai bine de 300 de ani.

Odată acest pas făcut, calculul probabilităților s-a dezvoltat vertiginos, atât pe plan teoretic, cât și din punctul de vedere al aplicațiilor și în ciuda obârșiei sale a pătruns rapid în cele mai variate domenii ale activității și cunoașterii umane.

Iată ce spune Laplace în acest sens: "Este remarcabil faptul că o știință care a început cu analizarea jocurilor de noroc, a devenit cea mai importantă metodă a cunoașterii omenești".

Și acum o scurtă privire istorică asupra începuturilor teoriei probabilităților. Primele preocupări mai serioase în această direcție au fost declanșate de problemele pe care cavalerul de Méré - om de spirit și amator de jocuri de noroc - i le-a prezentat lui Pascal în 1654.

În acea perioadă se practica un joc cu mult mai vechi în care "banca" paria la mize egale, cu orice jucător că acesta va obține cel puțin o dată fața cu șase puncte în patru aruncări ale unui zar. Se știa din experiență că acest joc este defavorabil pentru jucător, dar nu din cale afară. Se poate arăta printr-un calcul destul de simplu că în cazul unui zar "corect" banca câștiga în medie de 671 de ori din 1296 de pariuri.

Se părea că șansele de a obține cel puțin o dublă de șase în 24 de aruncări ale unei perechi de zaruri sunt egale cu acelea de a obține un șase în patru aruncări ale unui zar, deoarece la aruncarea a două zaruri sunt de șase ori mai multe cazuri posibile, iar jucătorului i se oferă de șase ori mai multe aruncări. Cavalerul de Méré a prezentat această problemă lui Pascal (1632-1662) care a arătat că lucrurile nu stau așa (vom vedea cum) și că jocul este ușor favorabil jucătorului dacă banca mizează pe 24 de aruncări, dar că este ușor favorabil băncii dacă se joacă pe 25 de aruncări.

O altă problemă pe care cavalerul de Méré a pus-o lui Pascal era o problemă cunoscută mai demult și stârnise multe controverse.

Este vorba de problema "împărțirii mizei" sau "problema punctelor". Mai precis, dacă un joc se întrerupe din motive obiective înainte de sfârșitul său, cum trebuie împărțită miza pusă în joc în funcție de situația existentă în momentul întreruperii? Pascal a precizat că pentru ca împărțirea să fie echitabilă, partea care revine fiecărui jucător trebuie să fie proporțională cu probabilitatea ca el să fi câștigat jocul dacă acesta ar fi fost dus până la capăt. Apoi pe câteva exemple particulare el a arătat cum trebuie făcută această împărțire.

Curând după aceea Pascal a început să corespundă în legătură cu aceste probleme cu Fermat (1601-1665). Nu după mult timp se arată interesat în aceste chestiuni și Christian Huygens (1629-1695) care se deplasează la Paris special pentru a discuta aceste probleme. Marele pas fusese făcut.



Christian Huygens
(1629-1695)

Preocupări pe linia evaluării unor probabilități au existat și înainte de anul 1654. Astfel pe la mijlocul secolului al XVI-lea Cardano a scris "Liber de Ludo Alcae" (Cartea despre jocul de zaruri) care însă a fost publicată abia în 1663.

De asemenea, la începutul secolului al XVII-lea, Galilei se arată interesat în studiul erorilor de măsurare. Tot în acea perioadă apar și primele preocupări de teoria asigurărilor. Dar toate acestea nu au condus la un studiu sistematic al probabilităților. Într-un fel, era firesc ca acest studiu să pornească de la analizarea jocurilor de noroc, întrucât acestea oferă modele dintre cele mai simple și posibilități nelimitate de repetare a experiențelor.

O dată stârnit interesul de lucrările lui Pascal, Fermat și Huygens, teoria probabilităților cunoaște o dezvoltare vertiginoasă.

Au urmat apoi lucrările lui J. Bernoulli (1654-1705) care dă prima formă a legii numerelor mari, generalizată mai târziu de Poisson, Borel, Cantelli, Kolmogorov.

Moivre (1667-1754) face primele observații asupra legii normale, care va fi studiată ulterior temeinic de Gauss (1777-1855). Prin lucrările lui Laplace (1749-1827) teoria probabilităților ia o mare răspândire. În afara de lucrările cu caracter teoretic, acesta a fost preocupat și de aplicațiile calculului probabilităților, limitate în acel timp la demografie, asigurări și teoria erorilor de observație. Laplace, întrevedea însă, aplicațiile teoriei probabilităților în domenii mult mai vaste.

Următoarea perioadă de dezvoltare este dominată de lucrările lui Cebâșev (1821-1894), Leapunov (1857-1918), Markov (1856-1922), care au adus contribuții importante în așanumita teoremă centrală a teoriei probabilităților și au inaugurat studiul variabilelor aleatoare dependente.

În această perioadă, sfera aplicațiilor teoriei probabilităților s-a mărit, cuprinzând și științele naturii, în special fizica.

Perioada modernă începe cu axiomatizarea acestei discipline, în deceniul al treilea al secolului XX, de către A. N. Kolmogorov. Contribuții în acest domeniu au mai adus, în ordine cronologică, S. Bernestein, Mises, Borel, Cantelli, Glivenko, Onicescu, de Finetti și alții.

Necesitatea axiomatizării a apărut și din considerații de ordin practic, deoarece aplicațiile din ce în ce mai importante ale teoriei probabilităților în fizică, biologie și celelalte ramuri ale științei, în inginerie și în problemele militare, economie și filozofie, aveau nevoie de un instrument matematic abstract, general, cu noțiuni de bază bine precizate.

În afară de dezvoltarea teoretică a teoriei probabilităților și statisticii matematice, s-au extins continuu și continuă să se extindă domeniile de aplicabilitate ale acestora. În zilele noastre unele dintre aceste domenii de aplicare au început să se contureze ca teorii de sine stătătoare. Amintim doar câteva din acestea: teoria informației, teoria fiabilității, teoria așteptării, controlul statistic al calității.