Curs 9

Ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniare şi neomogene cu coeficienţi constanţi (continuare)

5. Funcţia f este de forma $f(t) = e^{\alpha t}\left(P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)\sin\beta t\right)$

Fie
$$f(t) = e^{\alpha t}\left(P_1(t)\cos\beta t + P_2(t)\sin\beta t\right) \tag{1}$$
unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, iar $P_1(t)$ şi $P_2(t)$ sunt polinoame.

În această situaţie, în funcţie de valorile lui α şi β, avem următoarele cazuri posibile:

Dacă $\alpha + i\beta$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţia (1) are o soluţie particulară de forma
$$x_p = e^{\alpha t}\left(Q_1(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin\beta t\right),$$
unde $Q_1(t)$ şi $Q_2(t)$ sunt polinoame de gradul $m = max\{gradP_1(t), gradP_2(t)\}$, ai căror coeficienţi se determină prin identificare înlocuind soluţia x_p în ecuaţia (1).

Dacă $\alpha + i\beta$ este rădăcină multiplă de ordinul p a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţia (1) are o soluţie particulară de forma
$$x_p = t^p e^{\alpha t}\left(Q_1(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin\beta t\right),$$
unde $Q_1(t)$ şi $Q_2(t)$ sunt polinoame de gradul $m = max\{gradP_1(t), gradP_2(t)\}$, ai căror coeficienţi se determină prin identificare înlocuind soluţia x_p în ecuaţia (1).

Exemple

a) Să se afle soluţia generală a ecuaţiei
$$x'' - 5x' + 6x = e^{2t}(\sin t + t\cos t).$$

b) Să se afle soluţia generală a ecuaţiei
$$x'' + 9x = t\sin 3t + \cos 3t.$$

6. Funcţia f este de forma $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + ... + f_m(t)$

Dacă funcţia f este de forma $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + ... + f_m(t)$, unde $f_1(t),\ f_2(t), ..., f_m(t)$ sunt funcţii care au una din formele prezentate în secţiunile anterioare, atunci se determină pentru fiecare $f_i,\ i \in \{1, 2, ..., m\}$, o soluţie particulară $x_{p_1},\ x_{p_2}, ..., x_{p_m}$. Soluţia generală a ecuaţiei nemomogene este $x(t) = x_o + x_{p_1} + x_{p_2} + ... + x_{p_n}$.

Exemple

Să se afle soluţia generală a ecuaţiei
$$x'' - 9x = e^{3t}\cos t + te^{-3t} + t^2.$$