

Aplicații ale ec. dif. (cu variabile separate, cu variabile separabile)

1. Fie $x(t)$ populația unei anumite specii la momentul t și fie $r = b - d$ rata de creștere ($r > 0$), ce reprezintă diferența între rata natalității (b) și rata mortalității (d). Dacă această populație este izolată, adică nu există nici o imigrație sau emigrație netă, atunci $\frac{dx}{dt}$ (rata de schimbare a populației) este egală cu $r \cdot x(t)$. În modelul cel mai simplu se consideră rata $r = \text{constant}$.

\Rightarrow Ec. dif. care guvernează creșterea populației este
(modelul Malthus)

$$\dot{x} = r x, \quad r = b - d > 0.$$

În cazul în care populația speciei date este x_0 la timpul t_0 atunci acest model e descris de problema Cauchy.

$$\dot{x} = r x, \quad x(0) = x_0$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 e^{rt} \quad (r = b - d)$$

2. ~~Se~~ În cazul în care populația devine foarte mare, trebuie luat în considerare faptul că membrii individuali vor fi în competiție unii cu alții pentru spațiul de locuit limitat, resursele materiale și produsele alimentare disponibile. Astfel, trebuie adăugat un termen de concurență.

$$\Rightarrow \dot{x} = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad x(0) = x_0, \quad (\text{Modelul logistic Verhulst})$$

unde x reprez. nr. de indivizi ai populației, $r > 0$ rata de creștere, $K > 0$ - reprezintă un plafon biologic (o capacitate de hrană și alte condiții necesare vieții) a mediului în care trăiește această populație. (populația maximă ce poate exista)

$$\Rightarrow \text{Sol. generală } x(t) = \frac{K e^{rt}}{1 + C e^{rt}}$$

3. Alt model folosit în dinamica populației este

$$\frac{dx}{dt} = r x \ln \frac{K}{x}, \quad r > 0 \quad (\text{Modelul Gompertz},$$

x - nr. de indivizi ai populației

$r > 0$ - rata de creștere

$K > 0$ - reprezintă populația maximă pe care o poate susține o anumită regiune

$$\Rightarrow x = K \cdot e^{-C e^{-rt}}$$

4. Modelul de selecție hibridă (folosit în genetica)

$$\frac{dx}{dt} = kx(1-x)(a-bx), \quad x(0) = \frac{1}{n}$$

x - populație

a, b, k - constante ce depind de caracteristica genetică studiată

$$\Rightarrow \text{sol. generale} \quad \frac{x^{a+b} (a-bx)^b}{(1-x)^a} = C e^{a(a-b)kt}$$