Functionale liniare

Fie V un $\mathbb{R}$- spațiu vectorial

Def O funcție $G : V \to \mathbb{R}$ s.n. funcțională
Funcționala G s.n <u>funcțională liniară</u> dacă:
a) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \Rightarrow G(\vec{x}+\vec{y}) = G(\vec{x}) + G(\vec{y})$
b) $\forall \vec{x} \in V$ și $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow G(\alpha\vec{x}) = \alpha G(\vec{x})$

Obs Orice funcțională este un operator (o aplicație), deoarece $\mathbb{R}|\mathbb{R}$ este spațiu vectorial.
Rezultatele prezentate pt operatori rămân valabile și pt. funcționale

Funcționale biliniare

Fie V și W două $\mathbb{R}$ spații vectoriale

Def Funcționala $G : V \times W \to \mathbb{R}$ s.n. <u>funcțională biliniară</u> dacă este liniară în ambele argumente:

liniară în primul argument
a) $\forall \vec{x}, \vec{x}' \in V, \forall \vec{y} \in W \Rightarrow G(\vec{x}+\vec{x}', \vec{y}) = G(\vec{x},\vec{y}) + G(\vec{x}',\vec{y})$
b) $\forall \vec{x} \in V, \alpha \in \mathbb{R}, \vec{y} \in W \Rightarrow G(\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha G(\vec{x},\vec{y})$

liniară în al 2-lea argument
c) $\forall \vec{x} \in V, \vec{y}, \vec{y}' \in W \Rightarrow G(\vec{x}, \vec{y}+\vec{y}') = G(\vec{x},\vec{y}) + G(\vec{x},\vec{y}')$
d) $\forall \vec{x} \in V, \vec{y} \in W, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow G(\vec{x}, \alpha\vec{y}) = \alpha G(\vec{x},\vec{y})$

(P) Funcționala G este biliniară dacă și numai dacă $\forall \vec{x}, \vec{x}' \in V, \vec{y}, \vec{y}' \in W$ și $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{R}$ avem

$$G(\alpha\vec{x}+\alpha'\vec{x}', \beta\vec{y}+\beta'\vec{y}') = \alpha\beta\, G(\vec{x},\vec{y}) + \alpha\beta'\, G(\vec{x},\vec{y}') + \alpha'\beta\, G(\vec{x}',\vec{y}) + \alpha'\beta'\, G(\vec{x}',\vec{y}')$$

Matricea asociată unei funcționale biliniare

Fie $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_m\} \in SB(V)$, cu $\dim V = m$ și
$F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots \vec{f}_n\} \in SB(W)$, cu $\dim W = n$.

pt $\vec{x} = (x_1, \dots x_m)$, $\vec{y} = (y_1, \dots y_n)$ avem

$$G(x,y) = G\left(\sum_{i=1}^{m} x_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{f}_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} G(\vec{e}_i, \vec{f}_j) x_i y_j$$

Not $a_{ij} = G(\vec{e}_i, \vec{f}_j)$ => expresia algebrică a funcționalei biliniare G

$$G(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

$$= (x_1, \dots x_m) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^t_{[E]} A_G \cdot Y_{[F]}$$

Ex

Fie $G : \mathbb{R}^2 \quad \mathbb{R}^3$ $\quad G(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_2 + 2x_3 y_2 + x_1 y_3 + 3x_2 y_1 + 5x_2 y_3 + x_3 y_3$

$$\Rightarrow A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Funcționale pătratice

Fie $V/\mathbb{R}$ un spațiu vectorial și $G : V \to V \to \mathbb{R}$ o funcțională biliniară și simetrică

Def Aplicația $g : V \to \mathbb{R}$, $g(\vec{x}) = G(\vec{x}, \vec{x})$, $\forall x \in V$ se numește funcțională pătratică asociată lui G.

2.9. *Funcționale pătratice*

Fie $V/\mathbf{R}$ spațiu vectorial și $G : V \times V \to \mathbf{R}$ o funcțională biliniară ș. simetrică.

2.85. Definiție: Aplicația $q : V \to \mathbf{R}$, $q(x) = G(x, x)$, $(\forall)\, x \in V$ se numește ***funcțională pătratică*** (asociată lui G).

Se observă că $q = G^{'}$, $\Delta = \{(x, x) \mid x \in V\}$.

Dacă $E = \{\ell_1, \ldots, \ell_n\} \in \mathcal{B}(V_n)$, atunci matricea $A = (a_{ij})$ cu $a_{ij} = G(\ell_i, \ell_j)$ $i, j = \overline{1,n}$, este matricea asociată formei pătratice în baza E (uneori în loc de funcțională pătratică se mai spune forma pătratică).Rangul lui A s.n. rangul lui q.

Deoarece $A = (a_{ij})$ este simetrică, forma pătratică se poate scrie astfel:

$$
\begin{aligned}
q(x) = a_{11} x_1^2 &+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots\ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \\
&+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots\ldots + 2a_{2n}x_2x_n + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ a_{jj}x_j^2 + 2a_{jj+1}x_jx_{j+1} + \ldots\ldots + 2a_{jn}x_jx_n + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$+ a_{nn}x_n^2 \quad = {}^t x A x.$

unde x este matricea coloana a coordonatelor lui x in baza E

Dacă notăm: $S_j = a_{jj}x_j^2 + 2\sum_{r=j+1}^{n} a_{jr}x_j x_r,\ j=\overline{1,n}$ atunci $q(x) = \sum_{j=1}^{n} S_j$. (13`)

2.86. Definiție: Funcționala G din care provine funcționala pătratică q se numeşte ***funcționala polară*** a funcționalei pătratice q.

2.87. Observații: 1° Avem: Dacă se cunoaşte funcționala pătratică q, atunci $G(x, y) = 1/2[q(x + y) - q(x) - q(y)]$. (Rezultă imediat ținând seama că $G(x + y, x + y) = G(x, x) + G(x, y) + + G(y, x) + G(y, y)$).

2° Dacă C este matricea de trecere de la E la E', atunci in baza E' $q(x) = {}^t x B x$ unde $B = {}^t C A C$ (E şi $E' \in b(V_n)$).

2.88. Definiție: O funcțională pătratică q are expresia sub ***formă canonică*** (sau ***patratică***) dacă $(\exists)\ \alpha_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1,n}$ astfel încât:

$$q(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2. \qquad (14)$$

unde ultimii n-r dintre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sunt zero.

Baza în care are loc această scriere, se numeşte ***bază canonică*** pentru funcționala q.

Matricea A asociată lui q în forma canonică, are forma diagonală, adică:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

- **Reducerea unei funcționale pătratice la forma canonică**

2.89. Teoremă: Dacă $q : V_n \to \mathbf{R}$ este o funcțională pătratică pe V_n, atunci există o bază în V_n, față de care q(x) are formă canonică.

Demonstrația acestei teoreme depăşeşte scopul propus. Şi de fapt este suficient că ştim că pentru orice funcțională pătratică există o formă pătratică. Ne interesează mai mult cum se construiesc asemenea baze.

- **Metode de reducere la forma canonică.**

Metoda I (Metoda lui Gauss)

Această metodă permite construirea unei baze în raport cu care q(x) va avea formă canonică. Mai precis avem

2.90. Teorema: Pentru orice funcțională pătratică $q : V_n \to \mathbf{R}$

$$q(x)=\sum_{i,j}^{n} a_{ij}x_i x_j \text{ , } x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{15}$$

se poate construi o bază $\mathscr{B}=\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ în care

$$q(x)=\alpha_1\xi_1^2+\alpha_2\xi_2^2+\ldots+\alpha_n\xi_n^2,\ x_B={}^t(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n). \tag{16}$$

n-r(r = rang q) dintre coeficienţii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sunt zero ~~sunt nuli~~

Demonstraţie: Fie $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \in \mathcal{B}(V_n)$ si $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V_n$.

Cazul 1 $(\exists)\ i \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încât $a_{ii} \neq 0$.

Presupunem $a_{11} \neq 0$ (altfel se schimbă ordinea termenilor). Atunci:

$$q(x)=a_{11}\left(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\right)^2+q_1(x) \text{ } (q_1(x) \text{ nu conţine termeni cu } x_1).$$

Din (13`) rezultă că S_j conţine toţi termenii cu x_j, $j=\overline{1,n}$. Adunăm la S_1, dacă este nevoie, o expresie S_1' astfel încât $S_1+S_1'=a_{11}\left(x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{11}}x_j\right)^2$. Atunci $q_1(x)=q(x)-S_1-S_1'$. Astfel se vede că $q_1(x)$ nu conţine termeni în care intră x_1.

Acum facem transformarea:

$$\begin{cases} \xi_1=x_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_2 \\ y_2=x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n=x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \ldots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{17}$$

Prin transformarea de coordonate (17) noile coordonate ale lui x sunt $x_{E1}={}^t(\xi_1, y_2, \ldots, y_n)$. E_1 fiind baza în care x are aceste coordonate.

Din (17) se observă că matricea de trecere de la E la E_1 este:

$$C_1=\begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}^{-1} \text{ cu } \det C_1=1.$$

Astfel în baza $\mathscr{E}_1$, $q(x)=a_{11}\xi_1^2+q_1(x)$ unde:

$$q_1(x)=a^1_{22}y_2^2+a^1_{23}y_2y_3+\ldots+a^1_{nn}y_n^2.$$

Se repetă raţionamentul de mai sus pentru $q_1(x)$ şi se obţine $q_2(x)$ în care componentele x_1 şi x_2 nu apar.

În concluzie, după cel mult n – 1 paşi, obţinem o bază $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ în V_n faţă de care funcţionala pătratică are forma canonică

$q(x)=\alpha_1\xi_1^2+\alpha_2\xi_2^2+\ldots+\alpha_r\xi_r^2$ $(r<n)$

Numărul r := rang q şi vom vedea că r = rang A, A fiind matricea asociată lui q. Dacă r<n, spunem că

Cazul 2. $a_{ii} = 0$ $(\forall)$ $i = \overline{1,n}$. Presupunem $a_{12} \neq 0$ (altfel se schimbă ordinea termenilor). Se face transformarea:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = y_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{\text{not. } D \ \det(D)=2\neq 0} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Prin această transformare se trece de la baza E la o bază E_1, matricea de trecere fiind D. Astfel $q(x) = 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2 + \dots\dots$

Acum se aplică cazul 1.

2.91. Exemplu. Să se scrie sub formă canonică următoarea funcţională pătratică:

$$q(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 6x_1x_3 + 10x_2x_3 - x_3^2$$

Rezolvare: Varianta I de calcul

$$\begin{aligned} q(x) = 2x_1 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 &= S_1 \\ +3x_2^2 + 10x_2x_3 &= S_2; \\ -x_3^2 &= S_3 \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q(x) = 2(x_1 - x_2 - \frac{3}{2}x_3)^2 + 4x_2x_3 + x_2^2 - \frac{11}{2}x_3^2.$$

Rezultă $q_1(x) = 4x_2x_3 + x_2^2 - \frac{11}{2}x_3^2$.

Acum avem:

$$\begin{aligned} q_1(x) = x_2^2 + 4x_2x_3 &= S_1^{(1)} \\ -\frac{11}{2}x_3^2 &= S_2^{(1)} \end{aligned}; \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix} = \boxed{1}(x_2 + 2x_3)^2 \boxed{-\frac{19}{2}} x_3^2.$$

Pentru că această ultimă formă este sumă de pătrate, algoritmul se opreşte aici.

Facem notaţia:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 - x_2 - \frac{3}{2}x_3 \\ \xi_2 &= x_2 + 2x_3 \\ \xi_3 &= x_3 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Pentru că $x_E = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ şi $x_{\mathscr{B}} = {}^t(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, rezultă că matricea de trecere de la baza E la baza $\mathscr{B}$ este:

$$C=\begin{pmatrix}1 & -1 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

Vectorii bazei $\mathscr{B}$ vor fi daţi de coloanele acestei matrici.

Varianta II de calcul. Aceasta constă în a aplica metoda de eliminare incompletă matricei asociate formei pătratice.

$$A=\begin{pmatrix}[2] & -2 & -3\\ -2 & 3 & 5\\ -3 & 5 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -\frac{3}{2}\\ 0 & [1] & 2\\ 0 & 2 & -\frac{11}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & \left[-\frac{19}{2}\right]\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & \frac{-3}{2}\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=C^{-1}$$

2.92. Exemplu. Să se scrie sub formă canonică următoarea funcţională pătratică: $q(x) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 4x_1x_3 - 4x_1x_4 + 6x_2x_3 - 8x_3x_4$.

Vom aplica varianta II.

$$A=\begin{pmatrix}[2] & 0 & 2 & -2\\ 0 & -5 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 0 & -4\\ -2 & 0 & -4 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & [-5] & 3 & 0\\ 0 & 3 & -2 & -2\\ 0 & 0 & -2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & \left[-\frac{1}{5}\right] & -2\\ 0 & 0 & -2 & -2\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 10\\ 0 & 0 & 0 & [18]\end{pmatrix}\to\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{C^{1}}.$$

$$\xi=C^{-1}x\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \xi_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\xi_1 = x_1 + x_3 - x_4\\ \xi_2 = x_2 - \frac{3}{5}x_3\\ \xi_3 = x_3 + 10x_4\\ \xi_4 = x_4\end{cases}$$

Deci:

$$q(x) = [2](x_1 + x_3 - x_4)^2 + [-5](x_2 - \frac{3}{5}x_3)^2 + \left[-\frac{1}{5}\right](x_3 + 10x_4)^2 + [18]x_4^2.$$

2.93. Exemplu. Să se găsească forma canonică pentru umătoarea funcţională pătratică: $q(x) = x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Aici avem $a_{ii} = 0$, $(\forall)\ i = \overline{1,3}$. Şi facem schimbarea:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow q(x) = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 + 6y_2y_3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = y_1 + y_3 \\ \xi_2 = y_2 - 3y_3 \\ \xi_3 = y_3 \end{cases}.$$

Deci $q(x) = [1]\,\xi_1^2 + [-1]\,\xi_2^2 + [9]\,\xi_3^2 = (y_1 + y_3)^2 - (y_2 - 3\,y_3)^2 + 9y_3^2 = \frac{1}{4}(x_1 + + x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{4}(-x_1 + x_2 - 6x_3)^2 + 9x_3^2$.

Metoda II (Metoda lui Jacobi)

Prezentăm fără demonstraţie teorema pe care se bazează metoda lui Jacobi.

Fie $A = (a_{ij})$ matricea asociată funcţionalei pătratice $q : V_n \to \mathbb{R}$ într-o bază B a lui V_n şi $(\Delta_i)_{i=\overline{1,n}}$ determinanţii principali ai lui A.

2.94. Teoremă. Dacă $\Delta_i \neq 0$, $(\forall)\ i = \overline{1,n}$, atunci există o bază a lui V_n în care $q(x)$ are forma canonică următoare:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} \xi_i^2,\ x = (\xi_1, \ldots, \xi_n),\ \Delta_0 = 1. \tag{18}$$

2.95. Exemplu. Folosind metoda lui Jacobi să se determine forma canonică a funcţionalei pătratice:

$$q(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 6x_1x_3 + 10x_2x_3 - x_3^2.$$

Matricea asociată este:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta_0 = 1 \\ \Delta_1 = |2| = 2 \end{matrix};\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -19.$$

Rezultă: $q(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}\xi_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}\xi_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2}\xi_3^2 = \frac{2}{1}\xi_1^2 + \xi_2^2 - \frac{19}{2}\xi_3^2$.

Metoda lui Jacobi are dezavantajul că nu ne dă în această fază expresiile lui ξ_1, ξ_2 şi ξ_3 care se pot găsi, dar mai complicat. Aceşti ξ sunt aceiaşi cu cei de la Metoda lui Gauss.

2.96 Definiţie: Dacă:

- p_+ = numărul coeficienţilor strict mai mari ca zero,
- p_- = numărul coeficienţilor strict mai mici ca zero,
- p_0 = numărul coeficienţilor egali cu zero ($p_0 = r - (p_+ + p_-)$),

atunci tripletul (p_+ , p_-, p_0) se numeşte ***signatura funcţionalei pătratice.***

$$q(x) = \sum_1^r \alpha_i \xi_i^2$$

Prezentăm, fără demonstraţie, următoarea

2.97. Teoremă (legea inerţiei) : Signatura funcţionalei pătratice este invariabilă la schimbarea bazei faţă de care ea are o formă canonică.

2.98. Definiţie: O funcţională pătratică $q : V_n \to \mathbf{R}$ este:

(a) *pozitiv (negativ) definită* dacă $q(x) > 0$ $(q(x) < 0)$, $(\forall) \in V_n \setminus \{0\}$

(b) *semipozitiv (seminegativ) definită* dacă $q(x) \geq 0$ $(q(x) \leq 0$, $(\forall) \in V_n$;

(c) *nedefinită* dacă $(\exists)$ $x, x' \in V_n$ astfel încât $q(x) > 0$ şi $q(x') < 0$.

Din cele de mai sus rezultă că dacă $q(x) = \alpha_1\xi_1^2 + \alpha_2\xi_2^2 + \ldots + \alpha_r\xi_r^2$, atunci ea este:

(a') pozitiv (negativ) definită dacă $\alpha_i > 0$ $(\alpha_i < 0)$ $(\forall)$ $i = \overline{1,r}$,

(b') semipozitiv (seminegativ) definită dacă $\alpha_i \geq 0$ $(\alpha_i \leq 0)$ $(\forall)$ $i = \overline{1,r}$ şi

(c') nedefinită dacă $(\exists)$ $i \neq j$ cu $\alpha_i > 0$ şi $\alpha_j < 0$.

Metoda lui Jacobi ne permite să obţinem o condiţie necesară şi suficientă ca o funcţională pătratică să fie pozitiv (negativ) definită. Astfel avem:

2.99. Teoremă. (Criteriul lui Sylvester). Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) q este pozitiv (negativ) definită;

(b) $\Delta^k > 0$ $[\Delta^*_k = (-1)^k \Delta_k > 0]$ $(\forall)$ $k = \overline{1,n}$.