① Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ -2x, & x>0 \end{cases}$

Să se arate că f e bijectivă și să se determine f^{-1}.

Fie $x,y\in\mathbb{R}$ a.î. $f(x)=f(y)$

• Dacă $x,y\le 0 \Rightarrow x^2=y^2 \Leftrightarrow x^2-y^2=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)=0$

$\Rightarrow x-y=0$ sau $x+y=0$ imposibil,

$\Rightarrow x=y$

deoarece $x,y\le 0$

• Dacă $x,y>0 \Rightarrow -2x=-2y \Leftrightarrow x=y$

• Dacă $x\le 0$ și $y>0$ (sau $x>0$ și $y\le 0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2=-2y$ imposibil, deoarece $x^2\ge 0$ și $-2y<0$

$\Rightarrow f$ injectivă ①

Fie $y\in\mathbb{R}$ a.î. $f(x)=y$

• Dacă avem $y\ge 0 \Rightarrow x^2=y \Rightarrow x=-\sqrt{y}\le 0$ și avem $f(-\sqrt{y})=y$

• Dacă $y<0 \Rightarrow -2x=y \Rightarrow x=-\frac{y}{2}>0$ și avem $f(-\frac{y}{2})=y$

$\Rightarrow f$ surjectivă ②

Din ① și ② $\Rightarrow f$ bijectivă.

$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt{x}, & x\ge 0 \\ -\frac{x}{2}, & x<0 \end{cases}$

② Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x^2+1, & x\le 0 \\ -x+1, & x>0 \end{cases}$

Să se arate că f bijectivă și să se det. f^{-1}.

Fie $x,y\in\mathbb{R}$ a.î. $f(x)=f(y)$

• Dacă $x,y\le 0 \Rightarrow 2x^2+1=2y^2+1 \Rightarrow x^2=y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-y)(x+y)=0 \Rightarrow x=y$

• Dacă $x, y > 0 \Rightarrow -x + 1 = -y + 1 \Rightarrow x = y$

• Dacă $x \leq 0$ şi $y > 0 \Rightarrow 2x^2 + 1 = -y + 1 \Leftrightarrow 2x^2 = -y$, imposibil, deoarece $x^2 \geq 0$ şi $-y < 0$

$\Rightarrow f$ injectivă ①

Fie $y \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = y$

• Dacă $y > 0 \Rightarrow 2x^2 + 1 = y \Rightarrow 2x^2 = y - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{y-1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -\sqrt{\frac{y-1}{2}} \leq 0$ şi avem $f\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) = 2 \cdot \frac{y-1}{2} + 1 = y$

• Dacă $y \leq 0 \Rightarrow -x + 1 = y \Rightarrow -x = y - 1 \Rightarrow x = 1 - y > 0$ şi avem $f(1-y) = -1 + y + 1 = y$

$\Rightarrow f$ surjectivă ②

Din ① şi ② $\Rightarrow f$ bijectivă

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{x-1}{2}} & , x > 0 \\ 1 - x & , x \leq 0 \end{cases}$

③ Dacă r_1 şi r_2 sunt 2 relaţii de echivalenţă pe mţ. nevidă X, arătaţi că intersecţia lor este o relaţie de echivalenţă ($r_1 \cap r_2$)

(1) Reflexivitate: Fie $x \in X$

r_1, r_2 - reflexive $\Rightarrow \begin{cases} (x,x) \in r_1 \\ (x,x) \in r_2 \end{cases} \Rightarrow (x,x) \in r_1 \cap r_2$

(2) Simetria : $x, y \in X$

$(x,y) \in r_1 \cap r_2 \Rightarrow \left.\begin{cases} (x,y) \in r_1 \\ (x,y) \in r_2 \end{cases}\right\} \underline{\underline{r_1, r_2}}$ simetrice

$\Rightarrow \begin{cases} (y,x) \in r_1 \\ (y,x) \in r_2 \end{cases} \Rightarrow (y,x) \in r_1 \cap r_2$

(3) Tranzitivitate:

Fie $x, y, z \in X$

$(x,y) \in r_1 \cap r_2$ şi $(y,z) \in r_1 \cap r_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x,y) \in r_1 \\ (x,y) \in r_2 \\ (y,z) \in r_1 \\ (y,z) \in r_2 \end{cases} \xrightarrow{r_1, r_2 \text{ tranz.}} \begin{cases} (x,z) \in r_1 \\ (x,z) \in r_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x,z) \in r_1 \cap r_2$.

4 Fie $X = \{1, 2, 3, 4\}$ şi relaţiile binare: $s = \{(2,1), (2,4), (3,4)\}$ şi $r = \{(1,2), (2,2), (2,3), (3,4)\}$. Să se determine Dom s, Dom r, Ram s, Ram r, $s \circ r$, r^{-1}, s^{-1}, $r^{-1} \circ s^{-1}$, $s^{-1} \circ r^{-1}$.

Dom $s = \{2, 3\}$

Dom $r = \{1, 2, 3\}$

Ram $s = \{1, 4\}$

Ram $r = \{2, 3, 4\}$

$s \circ r = \{(1,1), (2,1), (2,4)\}$

$r^{-1} = \{(2,1), (2,2), (3,2), (4,3)\}$

$s^{-1} = \{(1,2), (4,2), (4,3)\}$

$r^{-1} \circ s^{-1} = \{(1,1), (1,2), (4,1), (4,2)\}$

$s^{-1} \circ r^{-1} = \{(1,1), (2,1), (1,4), (2,4)\}$

5 Fie $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Să se determine relaţia binară $r = \{(x,y) \in E \times E \mid x | y\}$ şi r^{-1}.

$r = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4), (5,5)\}$

$r^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (2,2), (4,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$

⑥ Arătați că relația de congruență modulo m este relație de echiv. folosind definiția.

(1) $\equiv (m)$ este reflexivă $\Leftrightarrow a \equiv a(m), \forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$\Rightarrow m \mid (a-a), \forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \mid 0$ (A), $\forall a \in \mathbb{Z}$.

(2) $\equiv (m)$ este simetrică $\Leftrightarrow a \equiv b(m) \Rightarrow m \mid (a-b)$
$\Rightarrow m \mid (b-a) \Leftrightarrow b \equiv a(m), \forall a,b \in \mathbb{Z}$. (A)

(3) $\equiv (m)$ este tranzitivă $\Leftrightarrow a \equiv b(m)$ și $b \equiv c(m)$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \mid (a-b) \\ m \mid (b-c) \end{cases} \Rightarrow m \mid (a - \cancel{b} + \cancel{b} - c) \Rightarrow m \mid (a-c) \Rightarrow$$

$\Rightarrow a \equiv c(m)$ (A)

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow \equiv (m)$ este relație de echivalență.

⑦ (Construcția lui $\mathbb{Z}$): Fie $\sim$ relație pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definită prin $(a,b) \sim (c,d)$, dacă $a+d = b+c$.
Ar. că $\sim$ este o relație de echivalență și că $\mathbb{N} \times \mathbb{N} /_{\sim}$ se identifică cu $\mathbb{Z}$ în mod normal.

(1) $\sim$ reflexivă $\Leftrightarrow (a,b) \sim (a,b) \Leftrightarrow a+b = b+a$ (A), $\forall a,b \in \mathbb{N}$

(2) $\sim$ simetrică $\Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a+d = b+c \Rightarrow$
$\Rightarrow (c,d) \sim (a,b), \forall a,b,c,d \in \mathbb{N}$

(3) $\sim$ tranzitivă $\Leftrightarrow [(a,b) \sim (c,d)$ și $(c,d) \sim (e,f)] \Rightarrow \begin{cases} a+d = b+c \\ c+e = d+f \end{cases}$

$\oplus$ $a + \cancel{d} + \cancel{c} + e = b + \cancel{c} + \cancel{d} + f$
$\Rightarrow a+e = b+f$
$\Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \sim$ este relație de echivalență și avem bijecția: $[(a,b)] \longmapsto a-b : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

⑧ (Construcția lui $\mathbb{Q}$): Fie $\sim$ pe $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ definită prin $(a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow a\cdot d = c\cdot b$. Arătați că $\sim$ este o relație de echivalență și că $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*/_\sim$ se identifică în mod normal cu $\mathbb{Q}$.

(1) $\sim$ reflexivă $\Leftrightarrow (a,b)\sim(a,b) \Leftrightarrow a\cdot b = b\cdot a$ (A), $\forall a,b \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$

(2) $\sim$ simetrică $\Leftrightarrow (a,b)\sim(c,d) \Rightarrow a\cdot d = b\cdot c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b\cdot c = a\cdot d \Rightarrow (c,d)\sim(a,b)$

(3) $\sim$ tranzitivă $\Leftrightarrow (a,b)\sim(c,d)$ și $(c,d)\sim(e,f)$

$\Rightarrow \begin{cases} a\cdot d = b\cdot c \\ c\cdot f = d\cdot e \end{cases} \Big| \; a\cancel{d}\cancel{c}f = b\cancel{c}\cancel{d}e \Leftrightarrow a\cdot f = b\cdot e \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b)\sim(e,f)$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \sim$ relație de echivalență

și avem bijecția $[(a,b)] \longmapsto \frac{a}{b} : \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*/_\sim \to \mathbb{Q}$

⑨ (Construcția lui $\mathbb{R}$): Fie C mulțimea șirurilor Cauchy de nr. raționale. Pe C considerăm relația $\sim$ definită prin $(a_n)_{n\geq 1} \sim (b_n)_{n\geq 1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$. Arătați că $\sim$ e relația de echivalență și că $C/_\sim$ se identifică în mod normal cu $\mathbb{R}$.

(1) $\sim$ reflexivă $\Leftrightarrow (a_n)_{n\geq 1} \sim (a_n)_{n\geq 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a_n) = 0$ (A), $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(2) $\sim$ simetrică $\Leftrightarrow (a_n)_{n\geq 1} \sim (b_n)_{n\geq 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (b_n)_{n\geq 1} \sim (a_n)_{n\geq 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(3) $\sim$ tranzitivă $\Leftrightarrow (a_m)_{m\geq 1} \sim (b_m)_{m\geq 1}$ și

$(b_m)_{m\geq 1} \sim (c_m)_{m\geq 1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{m\to\infty} (a_m - b_m) = 0 \\ \lim\limits_{m\to\infty} (b_m - c_m) = 0 \end{cases}$$

$\oplus$ $\lim\limits_{m\to\infty} (a_m - \cancel{b_m} + \cancel{b_m} - c_m) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{m\to\infty} (a_m - c_m) = 0 \Rightarrow (a_m)_{m\geq 1} \sim (c_m)_{m\geq 1}$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \sim$ relație de echivalență și avem bijecția: $[(a_m)_{m\geq 1}] \mapsto \lim\limits_{m\to\infty} (a_m)_{m\geq 1} : C/_{\sim} \to \mathbb{R}$

(15) Care dintre următoarele relații pe $\mathbb{R}$ este relație de echivalență?

a) $x \alpha y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

(1) α reflexivă $\Leftrightarrow x \alpha x \Leftrightarrow x - x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 0 \in \mathbb{Z}$ (A), $\forall x \in \mathbb{R}$

(2) α simetrică $\Leftrightarrow x \alpha y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$, dar $y - x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ α nu e simetrică pentru $x, y \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ α nu e relație de echivalență pe $\mathbb{R}$, α simetrică pe $\mathbb{Z}$.

(3) α tranzitivă $\Leftrightarrow x \alpha y$ și $y \alpha z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y \in \mathbb{Z} \\ y - z \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\oplus$ $x - \cancel{y} + \cancel{y} - z \in \mathbb{Z}$

$x - z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \alpha z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \alpha$ rel. de echiv. pe $\mathbb{Z}$

b) $x \beta y \Leftrightarrow |x-y|<2$

(1) β reflexivă $\Leftrightarrow x \beta x \Leftrightarrow |x-x|<2 \Leftrightarrow 0<2$ (A), $\forall x \in \mathbb{R}$

(2) β simetrică $\Leftrightarrow x \beta y \Leftrightarrow |x-y|<2$ (F)

De ex: $|13-9|<2 \Leftrightarrow 4<2$ (F)

$\Rightarrow \beta$ nu e relație de echivalență.

c) $x \gamma y \Leftrightarrow x+y \in \mathbb{Z}$

(1) γ reflexivă $\Leftrightarrow x \gamma x \Leftrightarrow x+x \in \mathbb{Z}$ (A), $\forall x \in \mathbb{Z}$

(2) γ simetrică $\Leftrightarrow x \gamma y \Leftrightarrow x+y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y+x \in \mathbb{Z}$ (A) $\Rightarrow$

$\Rightarrow y \gamma x$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

(3) γ tranzitivă $\Leftrightarrow x \gamma y$ și $y \gamma z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y \in \mathbb{Z} \\ y+z \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\oplus$ $x+y+y+z \in \mathbb{Z}$ (A), $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow \gamma$ este relație de echivalență

④ Să se scrie un program care calculează nr. de relații pe o mulțime de n elemente.

```
#include<iostream>
#include<cmath>
using namespace std;
int main()
{ int n, nr=0;
  cout<<"n="; cin>>n;
  nr+= pow(2, n*n);
  cout<<nr;
  return 0;
}
```

```
    back(1);
    return 0;
}
```

(2) Să se scrie un program care să afișeze toate funcțiile surjective $f: A \to B$.

```
#include <iostream>
using namespace std;
int x[20], n, m;
void afisare()
{ for(int i=1; i<=n; i++)
    { cout<<"f("<<i<<")="<<x[i];
      cout<<"\n";
    }
  cout<<"\n";
}
int valid(int k)
{ int ok=1, i, ap[20]={0};
  for(i=1; i<=k; i++)
       ap[x[i]]=1;
  for(i=1; i<=m; i++)
       if(ap[i]==0) ok=0;
  return ok;
}
void back(int k)
{ for(int i=1; i<=m; i++)
    { x[k]=i;
      if(k==n)
        { if(valid(k))
            afisare();
```

```
        else back(k+1);
    }
}
int main()
{ cout<<"n, m="; cin>>n>>m;
  if(m>n) cout<<"Nu există funcții surjective";
  else back(1);
  return 0;
}
```

(12) Să se afișeze toate funcțiile strict crescătoare $f: A \to B$.

```
#include <iostream>
using namespace std;
int n, m, st[20];
void afișează()
{ for(int j=1; j<=n; j++)
      cout<<st[j]<<" ";
   cout<<"\n";
}
void back(int k)
{ int i;
  for(i=st[k-1]+1; i<=m; i++)
    { st[k]=i;
      if(k==n)
          afișează();
      else back(k+1);
    }
}
```

```
int main()
{ cout<<"n, m ="; cin>>n>>m;
  back(1);
  return 0;
}
```

(14) Scrieți un program care, pentru numărul natural n (citit de la tastatură), calculează indicatorul lui Euler.

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{ int n, f, p=0, fi=1, nr;
  cout<<"n="; cin>>n;
  f=2;
  while(n>1)
  { p=1;
    nr=0;
    while(n%f==0)
     { n/=f;
       p*=f;
       nr++;
     }
    if(nr>0)
    { p/=f;
      fi*=(f-1)*p;
    }
    f++;
  }
  cout<<fi;
} return 0;
```

MONOIZI

① Notăm cu $J(x) = \{ f \mid f: X \to X,\ f \text{ inj.} \}$, unde X mt. nevidă. Să se arate că $(J(X), \circ)$ este un monoid.

Dacă $f, g: X \to X$ fct. injectivă, atunci $f \circ g$ funcție injectivă, deci $J(x)$ este parte stabilă în raport cu compunerea funcțiilor.

Compunerea este asociativă și are element neutru pe $1_X \in J(x)$, adică $f \circ 1_X = 1_X \circ f = f$, $\forall f \in J(X)$.

$\Rightarrow (J(x), \circ)$ monoid)

② Să se arate că:

a) $(\mathcal{P}(M), \cup)$ și $(\mathcal{P}(M), \cap)$ monoizi

b) $(\mathcal{P}(M), \cup) \simeq (\mathcal{P}(M), \cap)$

Sol:

a) „$\cup$", „$\cap$" sunt operații algebrice asociative, iar $E = \emptyset$, respectiv $E = M$ sunt elemente neutre în $(\mathcal{P}(M), \cup)$ și $(\mathcal{P}(M), \cap)$.

b) $f: (\mathcal{P}(M), \cap) \to (\mathcal{P}(M), \cup)$, $f(x) = C_X$ este bijectivă și este morfism:

$$\begin{cases} f(X \cap Y) = C(X \cap Y) = C_X \cup C_Y = f(x) \cup f(y) \\ f(M) = C_M = \emptyset \end{cases}$$

$\Rightarrow$ morfism.

③ Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție „$\circ$"

$x \circ y = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$

a) Să se arate că $(\mathbb{R}, \circ)$ monoid comutativ.

b) Să se arate că $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

c) Să se rezolve sistemul de ec. $\begin{cases} x \circ y \circ (-2) = 1 \\ x^5 + 31 = y^5 \end{cases}$

a) „∘" asociativă $\Leftrightarrow (x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z), \forall x,y,z\in\mathbb{R}$

(1) $(x\circ y)\circ z = (\sqrt[5]{x^5+y^5})\circ z = \sqrt[5]{(\sqrt[5]{x^5+y^5})^5+z^5} =$

$= \sqrt[5]{x^5+y^5+z^5}, \forall x,y,z\in\mathbb{R}$

(2) $x\circ(y\circ z) = x\circ(\sqrt[5]{y^5+z^5}) = \sqrt[5]{x^5+(\sqrt[5]{z^5+y^5})^5} =$

$= \sqrt[5]{x^5+y^5+z^5}, \forall x,y,z\in\mathbb{R}$

Din (1), (2) $\Rightarrow$ „∘" asociativă. (i)

„∘" comutativă $\Leftrightarrow x\circ y = y\circ x, \forall x,y\in\mathbb{R}$.

(1) $x\circ y = \sqrt[5]{x^5+y^5}, \forall x,y\in\mathbb{R}$

(2) $y\circ x = \sqrt[5]{y^5+x^5} = \sqrt[5]{x^5+y^5}, \forall x,y\in\mathbb{R}$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ „∘" comutativă. (ii)

„∘" admite element neutru $\Leftrightarrow \exists e\in\mathbb{R}$ a.î.

$x\circ e = e\circ x = x, \forall x\in\mathbb{R}$

$x\circ e = x, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \sqrt[5]{x^5+e^5} = x, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^5+e^5 = x^5 \mid -x^5 \Rightarrow e^5=0 \Rightarrow e=0\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ „∘" admite element neutru (iii)

Din (i), (ii), (iii) $\Rightarrow (\mathbb{R},\circ)$ monoid comutativ.

b) $\exists x'\in\mathbb{R}$ a.î. $x\circ x' = x'\circ x = e$.

$x\circ x' = e \Leftrightarrow \sqrt[5]{x^5+x'^5} = 0 \Rightarrow x^5+x'^5=0$

$\Leftrightarrow x^5 = -x'^5 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-x' \\ -x=-x' \\ -x=x' \\ x=x' \end{array}\right. \Rightarrow x'\in\mathbb{R} \Rightarrow U(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

c) $\begin{cases} x\circ y\circ(-2)=1 \\ x^5+31=y^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt[5]{x^5+y^5})\circ(-2)=1 \\ x^5+31=y^5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[5]{(\sqrt[5]{x^5+y^5})^5+(-2)^5}=1 \\ x^5+31=y^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[5]{x^5+y^5-32}=1 \\ x^5+31=y^5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^5+y^5-32=1 \\ x^5-y^5=-31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^5+y^5=33 \\ x^5-y^5=-31 \end{cases}$$

$$\oplus \quad 2x^5 = 2 \quad |:2$$

$$\Rightarrow x^5 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$x^5+y^5=33 \Leftrightarrow 1+y^5=33 \Rightarrow y^5=32 \Leftrightarrow y=2$$

Soluție: $x=1,\ y=2$.

(4) Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \middle| \ x \in \mathbb{R} \right\}$

a) Să se arate că $(M,\cdot)$ monoid comutativ

b) Să se determine $U(M)$

a) „$\cdot$" asociativă $\Leftrightarrow (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C),\ \forall A,B,C \in M$

(1) $(A\cdot B)\cdot C = \left[\begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-y & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1-y \end{pmatrix}\right] \cdot$

$\cdot \begin{pmatrix} 1-z & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy-x-y+1 & 0 & -2xy+x+y \\ 0 & 0 & 0 \\ -2xy+x+y & 0 & 2xy-x-y+1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1-z & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4xyz+2xy+2xz+2yz+1-z-x- & 0 & 4xyz-2xy-2xz-2yz+x+y+z \\ 0 & 0 & 0 \\ 4xyz-2xy-2xz-2yz+x+y+z & 0 & -4xyz+2xy+2xz+2yz-x-y-z+1 \end{pmatrix}, \forall x,y,z \in$

(2) $A\cdot(B\cdot C) = \begin{pmatrix} -4xyz+2xy+2xz+2yz-x-y-z+1 & 0 & 4xyz-2xy-2xz-2yz+x+y+z \\ 0 & 0 & 0 \\ 4xyz-2xy-2xz-2yz+x+y+z & 0 & -4xyz+2xy+2xz+2yz-x-y-z+1 \end{pmatrix}, \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

Din (1), (2) => „·" asociativă.

„·" comutativă <=> $A \cdot B = B \cdot A$, $\forall A, B \in M$

(1) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-y & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1-y \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2xy-x-y+1 & 0 & -2xy+x+y \\ 0 & 0 & 0 \\ -2xy+x+y & 0 & 2xy-x-y+1 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1-y & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2xy-x-y+1 & 0 & -2xy+x+y \\ 0 & 0 & 0 \\ -2xy+x+y & 0 & 2xy-x-y+1 \end{pmatrix}$

Din (1) și (2) => „·" comutativă

„·" admite element neutru <=> $A \cdot E = E \cdot A = A$, $\forall A \in M$.

$A \cdot E = A$, $\forall A \in M$.

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a(1-x)+gx & b(1-x)+hx & c(1-x)+ix \\ 0 & 0 & 0 \\ ax+g(1-x) & bx+h(1-x) & cx+i(1-x) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=1, \ g=0, \ d=0 \\ b=0, \ h=0, \ e=0 \\ c=0, \ i=1, \ f=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M \text{ pt. } x = 0.$$

$\Rightarrow$ „·" admite elem. neutru.

$\Rightarrow$ $(M, \cdot)$ - monoid comutativ

b) $\exists A' \in M$ a.î. $A \cdot A' = A' \cdot A = E$.

$A \cdot A' = E$

$A' = A^{-1}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A \text{ nu e inversabilă}$$

$$\begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a(1-x)+gx & b(1-x)+hx & c(1-x)+ix \\ 0 & 0 & 0 \\ ax+g(1-x) & bx+h(1-x) & cx+i(1-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(1-x)+gx = 1 & \Rightarrow \underline{a=1,\ g=1} \\ b(1-x)+hx = 0 & \Rightarrow b=0,\ h=0 \\ c(1-x)+ix = 0 & \Rightarrow \underline{c=0,\ i=0} \\ d=0,\ f=0,\ e=0 \\ ax+g(1-x) = 0 & \Rightarrow \underline{a=0,\ g=0} \\ cx+i(1-x) = 1 & \Rightarrow \underline{c=1,\ i=1} \end{cases} \Rightarrow \text{contradicție}$$

$\Rightarrow$ A nu e inv. $\Rightarrow U(M) = \emptyset$

GRUPURI

① Fie (X,d) un spațiu metric, iar $Izom\, X = \{ f \in S(X) \mid d(f(x), f(y)) = d(x,y), \forall x,y \in X \}$

Să se arate că izometriile lui X sunt subgrup al lui $S(X)$.

1) Evident $1_X \in Izom(X)$

2) Fie $f,g \in Izom(X)$ și $x,y \in X$.

Avem: $d((f \circ g)(x), (f\circ g)(y)) =$
$= d(f(g(x)), f(g(y))) =$
$= d(g(x), g(y)) = d(x,y)$.
$\Rightarrow f \circ g \in Izom(X)$

3) $f^{-1} \in Izom(X)$, deoarece $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) =$
$= d(f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))) = d(x,y)$.

Din 1), 2), 3) $\Rightarrow Izom(X) \le S(X)$.

② Fie (X,d) un spațiu metric, $Y \subset X$, iar $S_X(Y) = \{ f \in Izom(X) \mid f(Y) = Y \}$

↳ grupul de simetrie al lui Y în raport cu X

Să se arate că $S_X(Y) \le Izom(X)$.

Fie $f,g \in S_X(Y)$, adică $f(Y) = g(Y) = Y$.

Atunci $(f\circ g^{-1})(Y) = f(g^{-1}(Y)) = f(Y) = Y$.

Am demonstrat că $f\circ g^{-1} \in S_X(Y)$
$\Rightarrow S_X(Y) \le Izom(X)$.

③ Fie $(G,\cdot)$ un grup și H o submulțime finită a lui G. Să se arate că $H \le G \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow H$ este parte stabilă a lui G.

Presupunem că submulțimea finită H este parte stabilă: Fie $h \in H$. Atunci $\{h^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subset H$ și cum H este finită $\Rightarrow \exists\, i<j$ cu $h^i = h^j$, adică $h^{i-j} = e$ (elem. neutru al lui G) $\Rightarrow$
$\Rightarrow e \in H$. De asemenea, dacă $h \neq e$, atunci $j-i > 1$ și cum $h^{-1} = h^{j-i-1} \in H \Rightarrow$
$\Rightarrow H \leq G$.

④ Fie A un inel unitar, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Notăm $GL_n(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(A) \mid \det M \in U(A^*)\}$,
$SL_n(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(A) \mid \det M = 1\}$
Să se demonstreze că $GL_n(A)$ este grup la înmulțirea matricelor, iar $SL_n(A) \trianglelefteq GL_n(A)$

Dacă $M, N \in GL_n(A) \Rightarrow \det M, \det N \in U(A^*)$ și cum $\det(M \cdot N) = \det M \cdot \det N. \Rightarrow$
$\Rightarrow M \cdot N \in GL_n(A)$
Evident $I_n \in GL_n(A)$, iar dacă $M \in GL_n(A)$, cum $\det(M^{-1}) = (\det M)^{-1}$
$\Rightarrow \det(M^{-1}) \in U(A^*) \Rightarrow M^{-1} \in GL_n(A)$
$\Rightarrow (GL_n(A), \cdot)$ grup.
Dacă $M, N \in SL_n(A) \Leftrightarrow \det M = \det N = 1$. și deoarece $\det(MN^{-1}) = \det M \cdot (\det N)^{-1} = 1 \cdot 1^{-1} = 1$.
$\Rightarrow MN^{-1} \in SL_n(A)$
$\Rightarrow SL_n(A) \trianglelefteq GL_n(A)$

⑤. Dacă H, K grupuri. Să se arate că
$H \times \{1\} \trianglelefteq H \times K$.
Fie $(x, 1) \in H \times \{1\}$ și $(y, z) \in H \times K$.
$x, y \in H$, $z \in K$.
Atunci $(y, z)^{-1}(x, 1)(y, z) = (y^{-1}, z^{-1})(x, 1)(y, z) =$

$= (y^{-1}xy, z^{-1}z) = (\underbrace{y^{-1}xy}_{\in H}, 1) \in H \times \{1\}$

⑥ Pe mț. M se consideră legea de compoziție $M \times M \to M$; $(x,y) \to x \circ y$. Să se studieze dacă $(M, \circ)$ este un grup în cazurile:

a) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = x + y + 3$.

b) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = xy - 10x - 10y + 110$.

c) $M = \mathbb{C}$, $x \circ y = ixy$.

a) „$\circ$" asociativă $\Leftrightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$

(1) $(x \circ y) \circ z = (x + y + 3) \circ z = x + y + 3 + z + 3 =$
$= x + y + z + 6$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$

(2) $x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z + 3) = x + y + z + 3 + 3 =$
$= x + y + z + 6$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ „$\circ$" asociativă.

„$\circ$" comutativă $\Leftrightarrow x \circ y = y \circ x$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

(1) $x \circ y = x + y + 3$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

(2) $y \circ x = y + x + 3$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ „$\circ$" comutativă.

„$\circ$" admite element neutru $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{Z}$ a.î.
$x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

$x \circ e = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x + e + 3 = x \mid -x \Rightarrow e + 3 = 0 \Rightarrow e = -3 \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ „$\circ$" admite element neutru, $e = -3$

„$\circ$" are toate elementele simetrizabile $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists x' \in \mathbb{Z}$ a.î. $x \circ x' = x' \circ x = e$.

$x \circ x' = e \Leftrightarrow x + x' + 3 = -3 \mid -3 \Rightarrow x + x' = -6 \Rightarrow$
$\Rightarrow x' = -x - 6 \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (\mathbb{Z}, \circ)$ grup.

b) „$\circ$" asociativă $\Leftrightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

(1) $(x \circ y) \circ z = (xy - 10x - 10y + 110) \circ z = (xy - 10x - 10y + 110) z -$
$- 10(xy - 10x - 10y + 110) - 10z + 110 =$
$= xyz - 10xz - 10yz + 110z - 10xy + 100x + 100y - 1100 -$
$- 10z + 110 = xyz - 10xz - 10yz - 10xy + 100x + 100y +$
$+ 100z - 990 = xyz - 10(xz + yz + xy) + 100(x + y + z) - 990,$
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

(2) $x \circ (y \circ z) = x \circ (yz - 10y - 10z + 110) = x(yz - 10y - 10z +$
$+ 110) - 10x - 10(yz - 10y - 10z + 110) + 110 =$
$= xyz - 10xy - 10xz + 110x - 10x - 10yz + 100y + 100z -$
$- 1100 + 110 = xyz - 10(xy + xz + yz) + 100(x + y + z) - 990,$
$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ „$\circ$" asociativă.

„$\circ$" comutativă $\Leftrightarrow x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(1) $x \circ y = xy - 10x - 10y + 110, \forall x, y \in \mathbb{R}$

(2) $y \circ x = yx - 10y - 10x + 110, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ „$\circ$" comutativă.

„$\circ$" admite element neutru $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{R}$ a.î. $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$x \circ e = x \quad, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow xe - 10x - 10e + 110 = x \quad, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow xe - 10e = x + 10x - 110 \quad, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow e(x - 10) = 11x - 110, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow e(x - 10) = 11(x - 10) \quad, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow e = 11 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ „$\circ$" admite el. neutru, $e = 11$.

Elemente simetrizabile

$\exists x' \in \mathbb{R}$ a.î. $x \circ x' = x' \circ x = e$

$x \circ x' = e \iff xx' - 10x - 10x' + 110 = 11 \iff$

$\iff xx' - 10x' = 11 - 110 + 10x$

$\iff x'(x-10) = 10x - 99$

$\Rightarrow x' = \dfrac{10x-99}{x-10} \in \mathbb{R} \setminus \{10\}$

$\forall x' \in \mathbb{R} \setminus \{10\} \Rightarrow 10$ nu e simetrizabil $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ nu avem toate elementele simetrizabile $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\mathbb{R}, \circ)$ nu e grup.

e) $M = \mathbb{C}$, $x \circ y = ixy$

„$\circ$" asociativă $\iff (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{C}$

(1) $(x \circ y) \circ z = (ixy) \circ z = i \cdot ixy \cdot z = -xyz, \forall x, y, z \in \mathbb{C}$

(2) $x \circ (y \circ z) = x \circ (iyz) = i \cdot x \cdot iyz = -xyz, \forall x, y, z \in \mathbb{C}$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ „$\circ$" asociativă.

„$\circ$" comutativă $\iff x \circ y = y \circ x$, $\forall x, y \in \mathbb{C}$

(1) $x \circ y = ixy, \forall x, y \in \mathbb{C}$

(2) $y \circ x = iyx, \forall x, y \in \mathbb{C}$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ „$\circ$" comutativă.

„$\circ$" admite element neutru $\iff \exists e \in \mathbb{R}$ a.î. $x \circ e = e \circ x = x, \forall x$

$x \circ e = x$, $\forall x \in \mathbb{C}$

$ixe = x \Rightarrow ie = 1 \Rightarrow e = \frac{1}{i} \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ „$\circ$" admite element neutru , $e = \frac{1}{i} = i^{-1}$

Elemente simetrizabile:

$\exists x' \in \mathbb{R}$ a.î. $x \circ x' = x' \circ x = e$

$x \circ x' = e \iff ixx' = \frac{1}{i} \Rightarrow xx' = \frac{1}{i^2} = 1 \Rightarrow x' = \frac{1}{x} \in \mathbb{C}^*$

$\Rightarrow$ ~~nu~~ Avem toate el. simetriz. $\Rightarrow (\mathbb{C}, \circ)$ nu e grup.

(7) Să se determine subgrupurile lui $\mathbb{Z}_6$ și $\mathbb{Z}_{12}$.

$$\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$$

Divizorii naturali ai lui 6 sunt: $\{1, 2, 3, 6\}$

Subgrupurile căutate sunt:

$$1\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_6$$

$$2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\} = \langle \hat{2} \rangle$$

$$3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{3}\} = \langle \hat{3} \rangle$$

$$6\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\hat{0}\}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}_6 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\} \arrow[dr, dash] & & \{\hat{0}, \hat{3}\} \arrow[dl, dash] \\
 & \{\hat{0}\} &
\end{tikzcd}$$

$$\mathbb{Z}_{12} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{11}\}$$

Div. naturali ai lui 12: $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$$1\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{12}$$

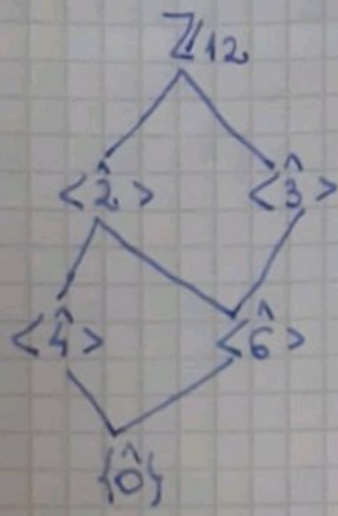
$$2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{8}, \hat{10}\} = \langle \hat{2} \rangle$$

$$3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{3}, \hat{6}, \hat{9}\} = \langle \hat{3} \rangle$$

$$4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{8}\} = \langle \hat{4} \rangle$$

$$6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{6}\} = \langle \hat{6} \rangle$$

$$12\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{\hat{0}\}$$



⑧ Fie $m \in \mathbb{N}$. Să se arate că $U_m = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^m = 1\}$
$T = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$ sunt subgrupuri ale grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Fie $z_1, z_2 \in U_m \Leftrightarrow z_1^m \cdot z_2^m = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Deoarece } (z_1 \cdot z_2^{-1})^m = z_1^m \cdot z_2^{-m} = 1 \\ \Rightarrow z_1 \cdot z_2^{-1} \in U_m \end{array}\right\} \Rightarrow U_m \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$$

Fie $z_1, z_2 \in T \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| = 1$

$|z_1 \cdot z_2^{-1}| = |z_1| \cdot |z_2^{-1}| = 1 \Rightarrow z_1 z_2^{-1} \in T \Rightarrow$

$\Rightarrow T \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$

⑨ Arătați că $z = \cos(\sqrt{2}\pi) + i\sin(\sqrt{2}\pi)$ este un element de ordin ∞ al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

Presupunem că $(\exists)\, k \in \mathbb{N}^*$ a.î. $z^k = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(\sqrt{2}\pi k) + i\sin(\sqrt{2}\pi k) = 1$.

$\Rightarrow (\exists)\, h \in \mathbb{Z}$ a.î. $\sqrt{2}k\pi = 2h\pi \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{h}{k} \in \mathbb{Q}$

(contradicție)

$\Rightarrow \operatorname{ord}(z) = +\infty$.

(10) Fie grupul $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, $n \geq 0$ și $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$. Arătați că ε este element de ordin m al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

$$\varepsilon^m = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1 + 0 = 1.$$

Dacă $\varepsilon^k = 1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varepsilon^k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2k\pi}{m} = 2\pi t, \ t \in \mathbb{Z}$

$\frac{k}{m} = t \Rightarrow k = m \cdot t \Rightarrow m \mid k \Rightarrow ord(\varepsilon) = m.$

(11) Determinați elementele de ord. 6 ale grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

Fie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

Cum $\{x \mid 0 \leq x \leq 6 \text{ și } (x,6) = 1\} = \{1, 5\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Nr. complexe de ordin 6 sunt:

$\varepsilon^1 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$\varepsilon^5 = \cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} =$

$= \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$

(12) Scrieți un program C/C++ care pt $m \in \mathbb{N}^*$ citit de la tastatură generează subgrupurile lui $\mathbb{Z}_m$.

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{ int m, d;
  cout<<"m="; cin>>m;
  for(d=1; d<=m; d++)
  { if(m%d==0)
    { if(d==m) cout<<"<0>"<<endl;
```

```
else
  if(d==-1) cout<<"Z"<<m<<endl;
  else cout<<"<"<<d<<">"<<endl;
  }
 }
 return 0;
}
```

Inele și corpuri

① Să se rezolve ec. $3x^2-4x+1=0$ în $\mathbb{Z}_5$ și $\mathbb{Z}_{11}$.

Ec. are sol. în $K \Leftrightarrow (\exists)\, u \in K$ a.î. $b^2-4ac=u^2$ și sol. sunt: $x_{1,2}=(-b\pm u)\cdot 2a^{-1}$.

$\mathbb{Z}_5$: $u^2=\hat{1}-\hat{4}\cdot\hat{3}\cdot\hat{1}=\hat{1}-\hat{2}=\hat{4}$

$\Rightarrow x_{1,2}=(\hat{4}\pm\hat{2})\cdot\hat{2}\cdot\hat{3}^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1=(\hat{4}+\hat{2})\cdot\hat{1}=\hat{1} \\ x_2=(\hat{4}-\hat{2})\cdot\hat{1}=\hat{2} \end{cases}$

$\mathbb{Z}_{11}$: $u^2=\hat{5}-\hat{4}\cdot\hat{3}\cdot\hat{1}=5-\hat{1}=\hat{4} \Rightarrow x_{1,2}=(\hat{4}\pm\hat{2})\cdot\hat{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\hat{6}\cdot\hat{2}=\hat{1} \\ x_2=\hat{2}\cdot\hat{2}=\hat{4} \end{cases}$

② Fie J un inel unitar. J s.n. inel Boole dacă $x^2=x$, $\forall x\in J$.

Ar. că:

a) Dacă J este inel Boole, atunci J este comutativ și $2x=0$.

b) Singurul inel Boole integru este $\mathbb{Z}_2$.

Sol:

a) $2=0 \cdot (-1)^2=-1 \Rightarrow 1=-1 \Rightarrow 1+1=0$

Deci $2x=0$, $\forall x\in J$

Fie $x,y\in J \Rightarrow (x+y)^2=x^2+xy+yx+y^2$
$\Rightarrow (x+y)^2=x+y$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + xy + yx + y^2 = x + y$

$\Rightarrow xy + yx = 0 \Rightarrow xy = -yx \Rightarrow xy = yx$

b) Din $x^2 = x$, $\forall x \in I$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ sau $x = 1 \Rightarrow I \cong \mathbb{Z}_2$.

③ Fie I un inel unitar şi $M = \{x \in I \mid x = x^2\}$ a.m mulţimea elementelor sale idempotente.

Să se arate că dacă M mulţime finită, atunci M are un nr. par de elemente.

Dacă $x \in M \Rightarrow 1 - x \in M$

$(1-x)^2 = 1 - x \Leftrightarrow 1 - 2x + x^2 = 1 - 2x + x = 1 - x$

$\Rightarrow$ elem. lui M se pot grupa în perechi de forma $(x, 1-x)$. (elem. din oricare astfel de perechi sunt distincte)

Dacă $(\exists)\, x_0 \in M$ a.î. $x_0 = 1 - x_0 \mid \cdot x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0^2 = x_0 - x_0^2 \Leftrightarrow x_0 = x_0 - x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = 0$ (contradicţie)

Not. cu n nr. perechilor de tipul descris mai sus din $M \Rightarrow M$ are un nr. par de elem. ($2 \cdot n$ elem)

④ Fie I un inel comutativ finit, cu $1 \neq 0$.

Să se calc. produsul elem. idempotente nenule din inelul I.

Este clar că: $1^2 = 1 \Rightarrow 1$ este el. idempotent nenul.

$\Rightarrow$ Avem 2 cazuri:

$\begin{cases} ① \text{ Singurul el. idempotent nenul este } 1 \Rightarrow p = 1. \\ ② \ \exists \text{ cel puțin un idempotent nenul } \neq 1 \end{cases}$

Fie x un astfel de elem. $\Rightarrow 1-x$ este idempotent nenul.

Dar $x(1-x) = x - x^2 = x - x = 0 \Rightarrow p = 0$.

⑤ Se consideră inelul $\mathbb{Z}_m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.

Să se det. elementele și să se calculeze nr. acestora. Ar. că elem. $\hat{a} \in N(\mathbb{Z}_m) \Leftrightarrow a = p_1 p_2, \dots, p_m \mathbb{Z}$, unde $p_1, p_2, \dots, p_m$ factorii primi.

Avem $a \in N(\mathbb{Z}_m) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*$ a.î. $a^k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m \mid a^k$.

Deci dacă $p_i \mid a^k$, $\forall i = \overline{1,m} \Rightarrow$

$\Rightarrow p_1 \dots p_m \mid a$. Fie $a \in p_1 p_2 p_3 \dots p_m \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \exists b \in \mathbb{Z}$ a.î. $a = p_1 p_2 \dots p_m b$.

Fie $k \in \mathbb{N}$ a.î. $k \geq \alpha_1$, $\forall i = \overline{1,m}$, α_i este exponentul lui p_i în descompunerea lui m.

$\Rightarrow m \mid a^k \Rightarrow a^k = 0$

Prin urmare, $N(\mathbb{Z}_m) = p_1 p_2 \dots p_m \mathbb{Z}_m \Rightarrow$

$\Rightarrow |N(\mathbb{Z}_m)| = |p_1 p_2 \dots p_m \mathbb{Z}_m / m\mathbb{Z}| = m / p_1 p_2 \dots p_m$

⑥ Să se determine $U(\mathbb{Z}[i\sqrt{5}])$.

Fie $N : \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \to \mathbb{N}$ def. prin $N(a + bi\sqrt{5}) = a^2 + 5b^2$

Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \Rightarrow N(\alpha) N(\beta) = N(\alpha\beta)$

$\Rightarrow \alpha \in U(\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]) \Leftrightarrow N(\alpha) = 1 \Rightarrow a^2 + 5b^2 = 1$

Deoarece a, b nr. întregi $\Rightarrow 5b^2 = 1$, pt $b \neq 0$

$\Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = \pm 1$

$\Rightarrow U(\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]) = \{\pm 1\}$

(7) Fie R un inel unitar. R s.n ideal Boole dacă $x^2 = x$, $\forall x \in R$.

Să se arate că $Spec(R) = Max(R)$

Fie $P \in Spec(R)$. Există un $M \in Max(R)$ a.î. $P \subseteq M$

Dacă sunt diferite $\Rightarrow$ există un element $x \in M - P$, dar $x^2 = x \Rightarrow x(1-x) = 0 \Rightarrow 1-x \in P \Rightarrow$

$\Rightarrow 1-x \in M \Rightarrow 1 \in M$ (contradicție)

Deci $P = M \in Max(R)$

(8) Determinați $Z(H)$, unde H este corpul cuaternionilor.

Vom arăta că $Z(H) \simeq \mathbb{C}$.

Fie $A = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \in Z(H) \Rightarrow Ai = iA \Rightarrow$

$\Rightarrow -vi = iv \Rightarrow v = 0$

Din $Aj = jA \Rightarrow u = \bar{u}$, $u \in A \Rightarrow A = u \cdot I_2$.

Acum prin morfismul $f : \mathbb{C} \to H$,

$f(u) = u \cdot I_2 \Rightarrow Z(H) \simeq \mathbb{C}$.

(9) Ar. că polinomul $F(x) = (x^2+2)^n + 5(x^{2n-1} + 10x^n + 5)$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[x]$.

$f = x^2 + 2$

$p = 5$

$g = x^{2n-1} + 10x^n + 5$

Atunci $\bar{f} = x^2 + \hat{2}$ este ireductibil în $\mathbb{Z}_5[x]$.

(neavând răd. în $\mathbb{Z}_5$), iar $\bar{g} = x^{2n-1}$ nu se divide prin $x^2 + \hat{2}$ în $\mathbb{Z}_5[x]$.

Deci polinomul $F(x)$ ireductibil în $\mathbb{Z}[x]$.

$$g: \underbrace{\{(x_i, x_j) \mid 1 \le i < j \le n\}}_{\frac{n(n+1)}{2} \text{ elem.}} \to \underbrace{M}_{n \text{ elem.}}$$

$\Rightarrow n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ legi de compoziție.

b) Dacă $e \in M$, atunci a defini pe M o lege de compoziție cu el. neutru e este același lucru cu a da o fct. $f: M \times M \to M$, $f(x, e) = f(e, x) = x$, $\forall x \in M$.

Acesta este același lucru cu a da o aplicație

$$g: \underbrace{\{(x, y) \mid x, y \in M \setminus \{e\}\}}_{n^2 - 2n + 1 \text{ el.}} \to \underbrace{M}_{n \text{ el.}}$$

$\Rightarrow n^{(n-1)^2}$ legi de compoziție, dar orice element al lui M poate fi ales ca element neutru. Și cum el. neutru e unic $\Rightarrow$

$\Rightarrow n \cdot n^{n^2 - 2n + 1} = n^{n^2 - 2n + 2}$ legi de comp. cu element neutru.

10 Fie M o mt. cu n elem., $n \in \mathbb{N}^*$. Să se det. nr. legilor de compoziție ce pot fi definite pe M, care sunt în același timp comutative și cu el. neutru.

Ținând cont de problema anterioară, deducem că nr. căutat este $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ legi de compoziție pe M ce admit drept elem. neutru un element fixat al lui M.

$\Rightarrow n^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot n = n^{\frac{n^2 - n + 2}{2}}$.

⑪ Să se scrie un program care să afișeze toate fct. injective $f: A \to B$.

```
#include <iostream>
using namespace std;
int x[20], n, m;
void scriere ()
{ for(int i = 1; i<= n; i++)
    { cout << "f(" << i << ")= " << x[i];
      cout << "\n";
    }
   cout << "\n";
}
int valid (int k)
{ for(int i = 1; i<k ; i++)
     if( x[k] = = x[i])  return 0;
     return 1;
}
void back (int k)
{ int i;
   for (i = 1; i < = m; i++)
   { x[k] = i;
     if (valid (k))
        if( k = = n) scriere();
        else
             back (k+1);
   }
}
int main()
{ cout<< "n= "; cin>>n; cout << "m= "; cin>>m;
  if(n>m) cout<< "Nu există funcții injective
```

① Fie $X = \{\{1\}, \{1,2\}, \{2,3,4\}, \{6\}\}$ ord. prin incluz.
Să se determine elementele maximale și minimale.
Există un cel mai mare element?

El. minimale: $\{1\}, \{2,3,4\}, \{6\}$.

El. maximale: $\{1,2\}, \{2,3,4\}, \{6\}$

Dacă X ar avea cel mai mare element A, atunci ar trebui să avem $\{1,2,3,4,6\} \subset A$, ceea ce nu are loc pt. niciun element al lui X.

② Dați exemplu de o mulț. ordonată care are elemente minimale, dar nu are un cel mai mic element.

$X = \{\{1\}, \{2\}, \{2,5\}, \{1,4\}\}$ ordonată prin incluziune.

De ex. $A = \{1\}$ este un element minimal al mulț. X, dar X nu are un cel mai mic element.
Într-adevăr, dacă $B \in X$ este cel mai mic element al lui X, atunci $B \subset \bigcap_{A \in X} A$ $B \subset \emptyset \Rightarrow B = \emptyset \notin X$ (contradicție)

③ Dați ex. de o mulț. ordonată care are elemente maximale, dar nu are un cel mai mare element.

$X = \{\{1\}, \{2\}, \{2,5\}, \{1,6\}\}$ ord. prin incluziune
De ex. $A = \{2,5\}$ element maximal al mulț. X, dar X nu are un cel mai mare element.
Dacă $B \in X$ cel mai mare element, atunci
$B \subset \bigcup_{A \in X} A \Rightarrow B = \{1,2,5,6\} \notin X$ (contradicție)

④ Dați ex. de o relație de ordine ρ pe mț. $\mathbb{N}$ a.î. $(\mathbb{N}, \rho)$ este o latice care nu este completă.

Considerăm relația de divizibilitate "|" pe $\mathbb{N}$ (care este rel. de ordine)

(1) "|" antisimetrică $\Leftrightarrow$ $x | y$ și $y | x \Rightarrow x = y$, $\forall x, y \in \mathbb{N}$

(2) "|" reflexivă $\Rightarrow$ $x | x$ (A), $\forall x \in \mathbb{N}$.

(3) "|" tranzitivă $\Rightarrow$ $x | y$ și $y | z \Rightarrow x | z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow$ "|" este rel. de ordine pe $\mathbb{N}$.

$(\mathbb{N}, |)$ este o latice, deoarece pt. $\forall a, b \in \mathbb{N}$ avem:

$$\begin{cases} a \vee b = (a, b) & (\text{cmmmdc}) \\ a \wedge b = [a, b] & (\text{cmmmmc}) \end{cases}$$

Incompletitudinea lui $(\mathbb{N}, |)$ $\Rightarrow$ de ex. că mț. $\{1, 2, \ldots, n\}$ nu au un c.m.m.dc în $\mathbb{N}$, acesta ar trebui să fie mai mare decât toate (contradicție)

⑤ Pe $\mathbb{R}$ definim relația binară ρ prin $x \rho y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N}$. Să se arate că ρ este o relație de ordine care nu este totală.

(1) antisimetrică: $x \rho y$ și $y \rho x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y \in \mathbb{N} \\ y - x \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow x = y, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

(2) reflexivă: $x \rho x \Leftrightarrow x - x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 0 \in \mathbb{N}$ (A), $\forall x \in \mathbb{R}$.

(3) tranzitivă: $x \rho y$ și $y \rho z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y \in \mathbb{N} \\ y - z \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\oplus \quad x - \cancel{y} + \cancel{y} - z \in \mathbb{N} \Rightarrow x - z \in \mathbb{N} \Rightarrow x \rho z$$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow$ ρ este o relație de ordine.

~~#~~ ρ nu este totală $\Leftrightarrow$ deoarece, dacă $x \rho y$ $\Rightarrow x - y \in \mathbb{N}$. De exemplu, pentru $x = 2, y = 5$

$\Rightarrow 2-3 \in \mathbb{N}$ (F).

⑥ Se poate stabili o f.ct. $f: A=\{4,5,6,14\} \to$
$\to B=\{2,3,5,7\}$ dată de legea $f(x)$ este divizor al lui x?

Da, de exemplu $f(x)=\left[\frac{x}{2}\right]$

$f(4)=\left[\frac{4}{2}\right]=2$

$f(5)=\left[\frac{5}{2}\right]=2$

$f(6)=\left[\frac{6}{2}\right]=3$

$f(14)=\left[\frac{14}{2}\right]=7$

⑦ Considerăm următoarele operații algebrice pe $\mathbb{N}$:

a) $x*y=x+1$

b) $x*y=x$

c) $x*y=xy+1$

d) $x*y=0$

e) $x*y=\max(x,y)$.

Precizați dacă ele sunt asociative, comutative sau posedă element neutru.

a) „$*$" asociativă $\Leftrightarrow (x*y)*z = x*(y*z)$, $(\forall)\, x,y,z \in \mathbb{N}$

(1) $(x*y)*z = (x+1)*z = x+1+1 = x+2$, $\forall\, x,y,z \in \mathbb{N}$

(2) $x*(y*z) = x*(y+1) = x+1$, $\forall\, x,y,z \in \mathbb{N}$

Din (1), (2) $\Rightarrow$ „$*$" nu e asociativă.

„$*$" comutativă $\Leftrightarrow x*y = y*z$, $\forall\, x,y \in \mathbb{N}$

(1) $x*y = x+1$, $\forall\, x,y \in \mathbb{N}$.

(2) $y*x = y+1$, $\forall\, x,y \in \mathbb{N}$

Din (1), (2) $\Rightarrow$ „$*$" nu e comutativă.

„$*$" admite element neutru $\Leftrightarrow \exists\, e \in \mathbb{N}$ a.î.
$x*e = e*x = x$, $\forall x \in \mathbb{N}$.

(1) $x*e = x \Leftrightarrow x+1 = x$ (F)

(2) $e*x=x \Leftrightarrow e+1=x \Rightarrow e=x-1, \forall x\in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Din (1) și (2) $\Rightarrow$ „*" nu admite el. neutru.

b) „*" asociativă $\Leftrightarrow (x*y)*z=x*(y*z), \forall x,y,z\in \mathbb{N}$

(1) $(x*y)*z = x*z = x \quad, \forall x,y,z\in \mathbb{N}$

(2) $x*(y*z) = x*y=x \quad, \forall x,y,z\in \mathbb{N}$.

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ „*" asociativă.

„*" comutativă $\Leftrightarrow x*y=y*x \quad, \forall x,y\in \mathbb{N}$

(1) $x*y=x \quad, \forall x,y\in \mathbb{N}$

(2) $y*x=y \quad, \forall x,y\in \mathbb{N}$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ „*" nu e comutativă

„*" admite element neutru $\Leftrightarrow \exists e\in \mathbb{N}$ a.î.

$x*e=e*x=x, \forall x\in \mathbb{N}$.

(1) $x*e=x \Leftrightarrow x=x$ (A)

(2) $e*x=x \Leftrightarrow x=x$ (A)

Din (1) și (2) admite element neutru.

c) „*" asociativă $\Leftrightarrow (x*y)*z=x*(y*z), \forall x,y,z\in \mathbb{N}$

(1) $(x*y)*z = (xy+1)*z=(xy+1)\cdot z+1=$

$= xyz+z+1 \quad, \forall x,y,z\in \mathbb{N}$

(2) $x*(y*z) = x*(yz+1) = x(yz+1)+1=$

$= xyz+x+1 \quad, \forall x,y,z\in \mathbb{N}$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ „*" nu e asociativă.

„*" comutativă $\Leftrightarrow x*y=y*x \quad, \forall x,y\in \mathbb{N}$

(1) $x*y=xy+1, \forall x,y\in \mathbb{N}$

(2) $y*x=yx+1=xy+1, \forall x,y\in \mathbb{N}$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ „*" este comutativă

„*" admite element neutru $\Leftrightarrow \exists e\in \mathbb{N}$ a.î.

$x*e=e*x=x, \forall x\in \mathbb{N}$

$x*e=x \Leftrightarrow xe+1=x \Rightarrow xe=x-1 \Rightarrow e=\frac{x-1}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ „$*$" nu admite elem. neutru.

d) „$*$" asociativă $\Leftrightarrow (x*y)*z = x*(y*z), \forall x,y,z \in \mathbb{N}$

(1) $(x*y)*z = 0*z = 0 \quad , \forall x,y,z \in \mathbb{N}$

(2) $x*(y*z) = x*0 = 0 \quad , \forall x,y,z \in \mathbb{N}$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ „$*$" asociativă.

„$*$" comutativă $\Leftrightarrow x*y = y*x \quad , \forall x,y \in \mathbb{N}$

(1) $x*y = 0 \quad , \forall x,y \in \mathbb{N}$

(2) $y*x = 0 \quad , \forall x,y \in \mathbb{N}$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ „$*$" comutativă

„$*$" admite elem. neutru $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{N}$ a.î.

$e*x = x*e = x \quad , \forall x \in \mathbb{N}$

$x*e = x \Leftrightarrow 0 = x$ (F)

$\Rightarrow$ „$*$" nu admite elem. neutru.

e) „$*$" asociativă $\Leftrightarrow (x*y)*z = x*(y*z) \quad , \forall x,y,z \in \mathbb{N}$

(1) $(x*y)*z = \begin{cases} x*z & , \text{dacă } x>y \\ y*z & , \text{dacă } y>x \end{cases} =$

$= \begin{cases} x & , \text{dacă } x>y \text{ și } x>z \\ z & , \text{dacă } x>y \text{ și } x<z \\ y & , \text{dacă } y>x \text{ și } y>z \\ z & , \text{dacă } y>x \text{ și } z>y. \end{cases}$

(2) $x*(y*z) = \begin{cases} x*y & , \text{dacă } y>z \\ x*z & , \text{dacă } z>y \end{cases} =$

$= \begin{cases} x & , \text{dacă } y>z \text{ și } x>y \\ y & , \text{dacă } y>z \text{ și } y>x \\ x & , \text{dacă } z>y \text{ și } x>z \\ z & , \text{dacă } z>y \text{ și } z>a \end{cases}$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ „$*$" nu e asociativă

„$*$" comutativă $\Leftrightarrow x * y = y * x$, $\forall x, y \in \mathbb{N}$

(1) $x * y = \begin{cases} x, \text{ dacă } x > y \\ y, \text{ dacă } x < y \end{cases}$, $\forall x, y \in \mathbb{N}$

(2) $y * x = \begin{cases} y, \text{ dacă } x < y \\ x, \text{ dacă } x > y \end{cases}$, $\forall x, y \in \mathbb{N}$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ „$*$" comutativă.

„$*$" admite element neutru $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{N}$ a.î. $x * e = e * x = x$, $\forall x \in \mathbb{N}$

$x * e = x \Leftrightarrow \begin{cases} x, \text{ dacă } x > e \\ e, \text{ dacă } e < x \end{cases}$

$\Rightarrow$ „$*$" nu admite element neutru.

(8) Fie M o mulț. cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine nr. legilor de compoziție ce pot fi definite pe M.

$f : M \times M \to M$

$|M| = n$, $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |M \times M| = n^2$

$\Rightarrow n^{n^2}$ moduri.

(9) Fie M o mulț. cu n elem., $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine:

a) nr. legilor de compoziție comutative ce pot fi definite pe M.

b) nr. legilor de compoziție ce pot fi definite pe M; $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

<u>Sol</u>: a) A da o lege comutativă pe M este același lucru cu a construi o aplicație

$f : M \times M \to M$, $f(x, y) = f(y, x)$, $\forall x, y \in M$.

Dar aceasta este tot una cu a da o aplicație: