

# Probabilități și Statistică Matematică

Examen 13.05.2021

## ◆ Seleție și Statistică

Se presupune că un aparat de măsurare este utilizat pentru a citi o distanță de 12 ori. Se obțin valorile:

0.20, 0.70, 0.35, 0.25, 0.73, 0.20, 0.70, 0.20, 0.25, 0.20, 0.30, 0.35

Datele sunt redate în tabelul de mai jos:

0.70	0.73	0.20	0.25	0.30	0.35
2	1	4	2	1	2

Obținem deci:

$$X: \begin{pmatrix} 0.70 & 0.73 & 0.20 & 0.25 & 0.30 & 0.35 \\ 2/12 & 1/12 & 4/12 & 2/12 & 1/12 & 2/12 \end{pmatrix}$$

Amplitudinea este  $0.35 - 0.70 = 0.25$ .

Mediana este o valoare situată între a 6-a și a 7-a, adică media aritm.

$$\frac{0.20 + 0.25}{2} = 0.225.$$

Moda (val. modală) este 0.20.

Media de selecție (media aritmetică) este  $\bar{X} = \sum_{i=1}^6 f_i x_i = 0.22$  (E)

$$(E) \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^6 n_i x_i}{12}$$

Dispersia (sau variația) empirică este dată de formula

$$\sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{12} \sum_{i=1}^6 n_i (x_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^6 f_i (x_i - \bar{X})^2 = 0.00643,$$

deci abaterea empirică este  $\sigma = \sqrt{\sigma^2} \approx 0.0802$ .

De altă parte dispersia empirică modificată este numărul

$$(\sigma^*)^2 = \frac{12}{11} \sigma^2 = \frac{12}{11} \cdot 0.00643 = 0.0070244.$$

În plus abaterea empirică modificată este

$$\sigma^* \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(\sigma^*)^2} \approx 0.083877$$

Mai trebuie făcut graficul poligonului frecvențelor relative.

Se poate scrie și funcția empirică de repartiție  $F(x)$  (pe în roșu).

2. Se presupune că un aparat de măsurare este utilizat pentru a citi o distanță de 20 de ori. Datele sunt redate în tabelul de mai jos:

22.7	25.4	22.0	20.5	22.5
22.3	24.2	24.7	23.5	23.7
25.5	24.7	23.7	22.0	23.8
23.8	24.4	23.7	23.8	22.6

Aceste citiri reprez. mult de date. O primă analiză a lor din punct. de vedere numeric poate fi făcută calculând amplitudinea. Vedem din tabel ca amplitudinea este  $25.5 - 20.5 = 5.0$

Pă com. în cont datele de mai sus puse în ordine cresc.

20.5	22.0	22.0	22.3	22.5
22.6	22.7	23.7	23.7	23.5
23.7	23.8	23.8	23.8	24.2
24.4	24.7	24.7	25.4	25.5

Putem determina imediat mediana. În cazul nostru mediana este dată de o valoare situată între a 7-lea și a 11-a valoare, adică mediana este

$$\frac{23.5 + 23.7}{2} \text{ (ne poate considera drept mediană și una dintre cele 2 valori).}$$

Moda este 23.8 (val. cu frec. cea mai mare)

Varianțibila empirică (de selecție)  $X^*$  va avea tabloul:

$X^*$ :	20.5	22.0	22.3	22.5	22.6	22.7	23.7	23.5	23.7	23.8
	0.05	0.7	0.05	0.05	0.05	0.05	0.1	0.05	0.05	0.15

  

	24.2	24.7	25.4	25.5
	0.05	0.7	0.05	0.05

momentul empiric de ordin 1 (sau m. emp. sau m.arit) este dat de:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sum_{i=1}^{15} f_i x_i = 0.05 \cdot 20.5 + 0.7 \cdot 22.0 + 0.05 \cdot 22.3 + 0.05 \cdot 22.5 + 0.05 \cdot 22.6 + \\ &\quad 0.05 \cdot 22.7 + 0.7 \cdot 23.7 + 0.05 \cdot 23.5 + 0.05 \cdot 23.7 + 0.15 \cdot 23.8 + \\ &\quad 0.05 \cdot 24.2 + 0.05 \cdot 24.4 + 0.1 \cdot 24.7 + 0.05 \cdot 25.4 + 0.05 \cdot 25.5 \\ &= 23.475 \end{aligned}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{15} n_i x_i}{20} = \frac{20.5 + 2 \cdot 22.0 + 22.3 + 22.5 + 22.6 + 22.7 + 2 \cdot 23.7 + 23.5 + 23.7 + 3 \cdot 23.8}{20}$$

$$+ \frac{24.2 + 24.4 + 2 \cdot 24.7 + 25.4 + 25.5}{20} = \frac{468.5}{20} = 23.475. \quad (x_i - \text{val. din tab.})$$

Ecivalent  $\bar{x}$  este media aritmetică a tuturor valorilor citite (valori ce se pot repeta),  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20}$ .

Dispersia (sau varianța) empirică este dată de formula

$$\sigma^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{15} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{15} f_i (x_i - \bar{x})^2$$

Este util să scriem mai întâi un tabel cu dif.  $x_i - \bar{x}$  și  $(x_i - \bar{x})^2$

$x_i$	fre. abs. $n_i$	fre. rel. $f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
20.5	1	0.05 = 1/20	-2.975	8.4972
22.0	2	0.1 = 2/20	-1.475	2.0022
22.3	1	0.05 = 1/20	-1.175	1.2432
22.5	1	0.05 = 1/20	-0.975	0.8372
22.6	1	0.05 = 1/20	-0.875	0.6642
22.7	1	0.05 = 1/20	-0.775	0.5112
23.1	2	0.1 = 2/20	-0.375	0.0592
23.5	1	0.05 = 1/20	0.085	0.0072
23.7	1	0.05 = 1/20	0.285	0.0812
23.8	3	0.15 = 3/20	0.385	0.1482
24.2	1	0.05 = 1/20	0.785	0.6762
24.4	1	0.05 = 1/20	0.985	1.97
24.7	2	0.1 = 2/20	1.285	1.6512
25.4	1	0.05 = 1/20	1.985	3.9402
25.5	1	0.05 = 1/20	2.085	4.3472
20		$n = 20/20$		

Deci, calculând obț. val. dispersiei empirice  $\sigma^2 = 7.4832$ , iar abaterea medie pătratică este  $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{7.4832} = 1.2778$ .

De de altă parte dispersia empirică mod este numărat:

$$(s^*)^2 = \frac{n}{n-1} \sigma^2 = \frac{20}{19} \cdot 7.4832 = 7.5672.$$

În plus abaterea empirică modificată este:

$$\sigma^* \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(s^*)^2} = 1.2494.$$

2. În toate tabele și formulele de mai sus putem lăsa toate valorile  $x_i$ , chiar dacă se repetă (deci  $n = 20$  în acest caz). Atunci frecvența relativă a fiecărei

valorii va fi aceeași  $f_i = 1/20 = 0.05$  și în consecință valorii va fi aceeași  $n_i = 1$ . Formula pentru  $s^2$  devine

$$s^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2$$

$$\begin{aligned} (s^*)^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i \bar{x} + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2}{n-1} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x} \cdot \bar{x} + n\bar{x}^2}{n-1} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i^2 - 20\bar{x}^2}{n-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (s^*)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

## ◆ TEMĂ

La o stație meteorologică temperaturile (în grade Celsius) înregistrate în ultimii 8 ani, la 12:00 pe 1 august au fost: 30, 24, 35, 36, 32, 23, 37, 37.

1. Det. rep. temp.
2. Calc. amplitudinea, media și dispersia de selecție, precum și felul empiric de repartiție a selecției.
3. Det. disp. de selecție corectată.

### Rezolvare

$$X^*: \begin{pmatrix} 23 & 24 & 30 & 37 & 32 & 35 & 36 & 37 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Amplitudinea: } 37 - 23 = 14$$

$$\text{Mediana: } \frac{37+32}{2} = 34,5$$

$$\text{Moda: } 37$$

$$\text{Media de selecție: } \bar{x} = \frac{23+24+30+37+32+35+36+37}{8} = 32$$

$$\begin{aligned} \text{Dispersia empirică: } s^2 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 n_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^8 f_i (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{8} [(23-32)^2 + (24-32)^2 + (30-32)^2 + (32-32)^2 + (35-32)^2 + \\ &\quad + (36-32)^2 + (37-32)^2] = \frac{192}{8} = 24. \end{aligned}$$

$$\text{Dispersia modificată: } \frac{192}{7} = 27,42$$