Determinanți. Sisteme de ecuații liniare. (Recapitulare)

Determinanți

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Ex. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1) - 3\cdot 1 = -2-3 = -5$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \underset{\text{Regula Sarrus}}{=} a\cdot e\cdot i + d\cdot h\cdot c + g\cdot b\cdot f - c\cdot e\cdot g - f\cdot h\cdot a - i\cdot b\cdot d$$

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix}$$

Ex: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\,(-5) + 1\cdot 1\cdot(-3) + 3\cdot 1\cdot 2 - (-3)\cdot 0\cdot 3 - 2\cdot 1\cdot 2 - (-5)\cdot 1\cdot 1$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}$$

$= 0 - 3 + 6 - 0 - 4 + 5$

$= 4$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \underset{\text{Desv. după o linie (coloană)}}{=} a\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Ex

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} \underset{\text{Desv. după a 2-a linie}}{=} 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (-1)\cdot(-5+3) - 2(2-3) = (-1)\cdot(-2) - 2(-1)$

$= 2 + 2 = 4$

Rezolvarea sistemelor cu 2 ec și 2 nec.

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases} \quad (1)$$

Sist. (1) se poate rezolva cu ajutorul metodelor:

- met. substituției
- met. reducerii
- met. determinanților.

Ex

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

- Met. substituției.

Aflăm pe x din a 2-a ec. și înlocuim în prima.

$x = 2y \Rightarrow 2 \cdot 2y + 3y = 7 \Leftrightarrow 4y + 3y = 7 \Leftrightarrow 7y = 7$

$\Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2. \quad \Rightarrow S = \{(2,1)\}$

- Met. reducerii

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -x + 2y = 0 \quad |\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$/ \quad 7y = 7$$

$$y = 1$$

$-x + 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow S = \{(2,1)\}$

- Met. determinanților (Reg. Cramer)

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - (-3) = 4 + 3 = 7 \neq 0 \Rightarrow$ sist. are sol. unică

$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{7} = 2$

$y = \frac{\Delta y}{\Delta}, \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-7) = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1$

$\Rightarrow S = \{(2,1)\}$

Rezolvarea sistemelor cu 3 ec. și 3 necunoscute

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (2)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

I Dacă $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ sistemul are soluție unică
(⟺ sistemul e compatibil determinat)
(⟺ sistemul e de tip Cramer)

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

unde $\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

II Dacă $\Delta = 0$ atunci
- sistemul are o infinitate de soluții (⟺ sist. e compatibil nedeterminat)
- sau
- sistemul nu are sol. (e incompatibil)

Se caută un minor $\neq 0$.
Pp. că minorul diferit de zero este $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_p$

Se scrie sistemul obținut prin păstrarea liniilor și coloanelor ce ajută la scrierea minorului:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 - a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 - a_{23}z \end{cases} \quad (3)$$

x, y - nec. principale
z — nec. secundară

Verificăm dacă soluția obținută din rezolvarea sist (3) este soluție și pentru a 3-a ec. a sistemului (2).
Astfel, calculăm determinantul caracteristic, obținut prin bordarea minorului ales cu coloana termenilor liberi și linia coresp. celei de-a 3-a ec.

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Dacă $\Delta_c = 0 \Rightarrow$ sistemul e compatibil nedeterminat (are o infinitate de soluții)

Dacă $\Delta_c \neq 0 \Rightarrow$ sist. e incompatibil (nu are sol.)

Ex

a) $\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ -x + 3y + z = 1 \\ 4x + y - 3z = 9 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -18 + 1 + 4 + 12 - 2 - 3 = -6 \neq 0.$$

$\Rightarrow$ sist. are sol. unică

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 9 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -45 + 9 - 1 + 27 - 5 + 3 = -12$

$\Rightarrow x = \frac{-12}{-6} = 2$

$y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 9 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 20 + 9 + 4 - 18 - 15 = -6$

$\Rightarrow y = \frac{-6}{-6} = 1$

$z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 54 + 4 - 5 - 60 - 2 + 9 = 0$

$\Rightarrow z = \frac{0}{-6} = 0$

$\Rightarrow S = \{(2, 1, 0)\}$

h) $\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ -x+3y+z=1 \\ 3x-2y-2z=4 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -12+3-2+9+4-2=0$$

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6+1=7$$

$\begin{cases} 2x+y=5+z \\ -x+3y=1-z \quad | \cdot 2 \end{cases}$

$$\Delta_e = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 24+3+10-45+4+4=0$$

$\Rightarrow$ sistemul are o infinitate de sol

$\begin{cases} 2x+y=5+z \\ -2x+6y=2-2z \end{cases}$

$7y=7-z$

$y=\frac{7-z}{7} \Rightarrow -x+3\cdot\frac{7-z}{7}=1-z$

$-x = {}^{7)}1 - {}^{7)}z - \frac{21-3z}{7}$

$-x=\frac{7-7z-21+3z}{7}$

$-x=\frac{-14-4z}{7} \Rightarrow x=\frac{14+4z}{7}$

Not. $z=\alpha \Rightarrow x=\frac{14+4\alpha}{7}$, $y=\frac{7-\alpha}{7}$

$\Rightarrow S=\left\{\left(\frac{14+4\alpha}{7}, \frac{7-\alpha}{7}, \alpha\right) \mid \alpha\in\mathbb{R}\right\}$

c) $\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ -x+3y+z=1 \\ 3x-2y-2z=1 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=5+z \\ -x+3y=1-z \end{cases}$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6+3+10-45+4+1$$

$= -21 \neq 0$

$\Rightarrow$ sistem incompatibil

Rezolvarea sistemelor liniare

Vom exemplifica pentru un sistem cu 3 ec., 3 nec., celelalte sist. rezolvându-se asemănător.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

I. Dacă $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ sistemul are sol. unică $x=y=z=0$

II. Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow$ sistemul are o infinitate de sol (sist. are și soluții nenule)