Curs 7

Sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

Forma generală a sistemelor de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi este

$$\begin{cases} x_1' & = & f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ x_2' & = & f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ ... & ... & .... \\ x_n' & = & f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases} \tag{1}$$

unde t este variabilă independentă, iar funcţiile $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt funcţii necunoscute. Funcţiile $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt funcţii de t, continue pe domeniul de definicţie $I \subseteq \mathbb{R}$, iar funcţiile $f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt de asemenea continue pe domeniul de definiţie.

Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi

Forma generală a sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi este

$$\begin{cases} x_1' & = & a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + ... + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' & = & a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + ... + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ ... & ... & .... \\ x_n' & = & a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + ... + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{cases} \tag{2}$$

a_{ij} şi f_i sunt funcţii definite şi continue pe un interval $I \subseteq \mathbb{R}$, cu $i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$.

Dacă folosim notaţiile

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & ... & a_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & ... & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ ... \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

atunci sistemul (2) devine

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & ... & a_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & ... & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ ... \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

sistem echivalent cu

$$X' = A(t)X + f(t). \tag{3}$$

Dacă $f(t) = 0$, adică $f_1(t) = f_2(t) = ... = f_n(t) = 0$, atunci sistemul (3) devine

$$X' = A(t)X \tag{4}$$

şi se numeşte *sistem omogen de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi.*

Sisteme de ecuaţii diferenţiale omogene, liniare, de ordinul întâi, cu coeficienţi constanţi

Forma generală a sistemelor de ecuaţii diferenţiale omogene, liniare, de ordinul întâi, cu coeficienţi constanţi este

$$\begin{cases} x_1' &= & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ x_2' &= & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ ... & ... & .... \\ x_n' &= & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{5}$$

unde $x_1,\ x_2, ..., x_n$ sunt funcţii necunoscute care depind de t, iar $a_{ij},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$ sunt constante reale.

Pentru a rezolva sistemul (5) se caută soluţii de forma

$$x_1 = \alpha_1 e^{rt},\ x_2 = \alpha_2 e^{rt}, ..., x_n = \alpha_n e^{rt},$$

unde $\alpha_1,\ \alpha_2, ..., \alpha_n$ şi r sunt constante ce trebuie determinate.

Înlocuind în sistemul (5) obţinem

$$\begin{cases} r\alpha_1 e^{rt} &= & a_{11}\alpha_1 e^{rt} + a_{12}\alpha_2 e^{rt} + ... + a_{1n}\alpha_n e^{rt} \\ r\alpha_2 e^{rt} &= & a_{21}\alpha_1 e^{rt} + a_{22}\alpha_2 e^{rt}2 + ... + a_{2n}\alpha_n e^{rt} \\ ... & ... & .... \\ r\alpha_n e^{rt} &= & a_{n1}\alpha_1 e^{rt} + a_{n2}\alpha_2 e^{rt} + ... + a_{nn}\alpha_n e^{rt} \end{cases}$$

Împărţind fiecare ecuaţie prin e^{rt} şi trecând totul într-o parte, obţinem sistemul omogen de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} (a_{11} - r)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n &= & 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - r)\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n &= & 0 \\ .... & ... & ... \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + (a_{nn} - r)\alpha_n &= & 0 \end{cases} \tag{6}$$

Ne interesează soluţia nenulă a sistemului (6), deci cazul $\Delta = 0$, unde Δ reprezintă determinantul matricei sistemului. Avem

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & ... & a_{2n} \\ ... & .... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0.$$

Se obţine o ecuaţie de gradul n în r, ecuaţie ce se numeşte *ecuaţie caracteristică*. Din ecuaţia caracteristică se obţin n valori ale lui r, care pot fi reale sau complexe, egale sau diferite. Pentru fiecare r aflat ne întoarcem în sistemul (6) şi aflăm constantele $\alpha_1,\ \alpha_2, ..., \alpha_n$.

În continuare vom studia forma soluţiei sistemului de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi în funcţie de tipul rădăcinilor ecuaţiei caracteristice.

1. Ecuaţia caracteristică are toate rădăcinile reale şi distincte

În această situaţie se înlocuieşte, pe rând, fiecare r în sistemul (6) şi se află α_i corespunzători. Atunci

$$X_{r_1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}e^{r_1 t} \\ \alpha_{12}e^{r_1 t} \\ ... \\ \alpha_{1n}e^{r_1 t} \end{pmatrix}, \quad X_{r_2} = \begin{pmatrix} \alpha_{21}e^{r_1 t} \\ \alpha_{22}e^{r_1 t} \\ ... \\ \alpha_{2n}e^{r_1 t} \end{pmatrix}, \quad X_{r_n} = \begin{pmatrix} \alpha_{n1}e^{r_1 t} \\ \alpha_{n2}e^{r_1 t} \\ ... \\ \alpha_{nn}e^{r_1 t} \end{pmatrix}$$

formează un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul (6). Deci soluţia generală a sistemului (6) este

$$X = c_1 X_{r_1} + c_2 X_{r_2} + ... + c_n X_{r_n}.$$

Exemplu

Să se rezolve sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} x_1' &= 3x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2' &= -x_1 + 5x_2 - x_3 \\ x_3' &= x_1 - x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

Rezolvare

Căutăm soluţii de forma

$$x_1 = \alpha_1 e^{rt}, \; x_2 = \alpha_2 e^{rt}, \; x_3 = \alpha_3 e^{rt}.$$

Atunci sistemul (6) devine

$$\begin{cases} (3-r)\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + (5-r)\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + (3-r)\alpha_3 &= 0 \end{cases}$$

Rezultă că ecuaţia caracteristică este

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3-r & -1 & 1 \\ -1 & 5-r & -1 \\ 1 & -1 & 3-r \end{vmatrix} = (r-2)(r-3)(r-6) = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt

$$r_1 = 2, \; r_2 = 3, \; r_3 = 6.$$

Acum, pentru fiecare r calculăm α_i corespunzători.

Pentru $r_1 = 2$, sistemul (6) devine

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{cases},$$

cu soluţia $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -\alpha_1$. Considerând $\alpha_1 = 1$, obţinem $\alpha_{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, deci

$$X_{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \cdot e^{2t} \\ 0 \cdot e^{2t} \\ -1 \cdot e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Pentru $r_2 = 3$, sistemul (6) devine

$$\begin{cases} -\alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 & = & 0 \end{cases},$$

cu soluţia $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Considerând $\alpha_1 = 1$, obţinem $\alpha_{r_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, deci $X_{r_2} = \begin{pmatrix} 1 \cdot e^{3t} \\ 1 \cdot e^{3t} \\ 1 \cdot e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$.

Pentru $r_2 = 6$, sistemul (6) devine

$$\begin{cases} -3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 & = & 0 \end{cases}$$

cu soluţia $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 = -2\alpha_1$, $\alpha_3 = \alpha_1$. Considerând $\alpha_1 = 1$, obţinem $\alpha_{r_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, deci $X_{r_3} = \begin{pmatrix} 1 \cdot e^{6t} \\ -2 \cdot e^{6t} \\ 1 \cdot e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{6t} \\ -2e^{6t} \\ e^{6t} \end{pmatrix}$.

Astfel, soluţia generală a sistemului este

$$X = c_1 X_{r_1} + c_2 X_{r_2} + c_3 X_{r_3} = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} e^{6t} \\ -2e^{6t} \\ e^{6t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t} \\ c_2 e^{3t} - 2c_3 e^{6t} \\ -c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t} \end{pmatrix},$$

de unde obţinem

$$\begin{array}{l} x_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t} \\ x_2 = c_2 e^{3t} - 2c_3 e^{6t} \\ x_3 = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t} \end{array}$$

2. Ecuaţia caracteristică are toate rădăcinile complexe şi distincte

Considerăm că rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt de forma $r_k = \alpha_k + i\beta_k$.

În această situaţie se înlocuieşte, pe rând, fiecare r_k cu $\beta_k > 0$ în sistemul (6) şi se află α_k corespunzători. Atunci

$$X_{r_k} = \begin{pmatrix} \alpha_{k1} e^{\gamma_k t}(\cos \beta_k t + i \sin \beta_k t) \\ \alpha_{k2} e^{\gamma_k t}(\cos \beta_k t + i \sin \beta_k t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{kn} e^{\gamma_k t}(\cos \beta_k t + i \sin \beta_k t) \end{pmatrix}, \; k = \overline{1, \frac{n}{2}}$$

şi

$$\widetilde{X}_{r_k} = \begin{pmatrix} \alpha_{k1}e^{\gamma_k t}\cos\beta_k t \\ \alpha_{k2}e^{\gamma_k t}\cos\beta_k t \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{kn}e^{\gamma_k t}\cos\beta_k t \end{pmatrix}, \ \widetilde{\widetilde{X}}_{r_k} = \begin{pmatrix} \alpha_{k1}e^{\gamma_k t}\sin\beta_k t \\ \alpha_{k2}e^{\gamma_k t}\sin\beta_k t \\ \dots \\ \alpha_{kn}e^{\gamma_k t}\sin\beta_k t \end{pmatrix}, \ k = \overline{1, \frac{n}{2}}$$

formează un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul (6). Soluţia generală a sistemului (6) este

$$X = c_1\widetilde{X}_{r_1} + c_2\widetilde{\widetilde{X}}_{r_1} + c_3\widetilde{X}_{r_2} + c_4\widetilde{\widetilde{X}}_{r_2} + \dots + c_{n-1}\widetilde{X}_{r_{\frac{n}{2}}} + c_n\widetilde{\widetilde{X}}_{r_{\frac{n}{2}}}.$$

Exemplu

Să se rezolve sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} x' &= -9y \\ y' &= 4x \end{cases}$$

Rezolvare

Căutăm soluţii de forma

$$x = \alpha_1 e^{rt}, \ y = \alpha_2 e^{rt}.$$

Atunci sistemul (6) devine

$$\begin{cases} r\alpha_1 - 9\alpha_2 &= 0 \\ 4\alpha_1 - r\alpha_2 &= 0 \end{cases}$$

Rezultă că ecuaţia caracteristică este

$$\Delta = \begin{vmatrix} -r & -9 \\ 4 & -r \end{vmatrix} = r^2 + 36 = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt $r = \pm 6i$.

Avem r de forma $\alpha + i\beta$ cu $\alpha = 0$ şi $\beta = 6$. Înlocuind pe r în sistemul (6) obţinem

$$\begin{cases} -6i\alpha_1 - 9\alpha_2 &= 0 \\ 4\alpha_1 - 6i\alpha_2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2i\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0,$$

de unde rezultă $\alpha_2 = \dfrac{-2i\alpha_1}{3}$.

Dacă luăm $\alpha_1 = 3$, atunci $\alpha_2 = -2i$, deci

$$X_r = \begin{pmatrix} 3 \\ -2i \end{pmatrix} \cdot e^{0\cdot t}(\cos 6t + i\sin 6t) = \begin{pmatrix} 3(\cos 6t + i\sin 6t) \\ -2i(\cos 6t + i\sin 6t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cos 6t \\ 2\sin 6t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 3\sin 6t \\ -2\cos 6t \end{pmatrix},$$

de unde rezultă $\widetilde{X}_r = \begin{pmatrix} 3\cos 6t \\ 2\sin 6t \end{pmatrix}$ şi $\widetilde{\widetilde{X}}_r = \begin{pmatrix} 3\sin 6t \\ -2\cos 6t \end{pmatrix}$, deci

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\widetilde{X}_r + c_2\widetilde{\widetilde{X}}_r = c_1\begin{pmatrix} 3\cos 6t \\ 2\sin 6t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3\sin 6t \\ -2\cos 6t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3c_1 \cos 6t + 3c_2 \sin 6t \\ 2c_1 \sin 6t - 2c_2 \cos 6t \end{pmatrix},$$

deci soluţia sistemului este

$$\begin{aligned} x &= 3c_1 \cos 6t + 3c_2 \sin 6t \\ y &= 2c_1 \sin 6t - 2c_2 \cos 6t \end{aligned}$$