Laborarator 9 – Probabilități și Statistică Matematică

ESTIMAREA ARIILOR SI A VOLUMELOR

Aria discului unitate este π. Acoperim discul cu un patrat de dimensiuni 2 pe 2 si estimam numarul π folosind 10000, 50000 si 100000 valori uniforme aleatoare. Comparam apoi rezultatele cu valoarea cunoscuta a lui π = 3.14159265358... Discul unitate este inlcus ın [−1,1]×[−1,1].

Urmatoarea functie estimeaza π utilizand N numere aleatoare.

```
disc area = function(N)
 { N_C = 0;
for(i in 1:N) {
 x = runif(1, -1, 1);
y = runif(1, -1, 1);
if(x*x + y*y <= 1)
 N_C = N_C + 1;
}
return(4*N C/N); }
 }
```

Daca am estimat o valoare α_{actual}prin metoda Monte Carlo si obtinem α_{MC}, putem masura eroarea facuta (aceea de a folosi α_{MC} ın loc de α_{actual}) ın cel putin doua moduri:

• Eroarea absoluta: $\varepsilon_{abs} = |\alpha_{MC} - \alpha_{actual}|$.

• Eroarea relativa: $\varepsilon_{rel} = \frac{|\alpha_{MC} - \alpha_{actual}|}{|\alpha_{actual}|.}$. Aceasta avaloare poate fi scrisa si procentual, obtinand eroarea procentuala: $\varepsilon_{per} = \varepsilon_{rel} \cdot 100\%$.

Aplicatii:

1. Estimati volumul sferei unitate (care este 4π/3) folosind esantioane de numere aleatoare de dimensuni diferite.

2. Estimati aria urmatoarei elipse (care este 2π) $E = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

INTEGRAREA MONTE CARLO

1. ***Estimati valoarea urmatoarei integrale folosind 20000 si apoi 50000 de valori aleatoare uniforme (determinati 30 astfel de aproximari pentru fiecare din cele doua dimensiuni si calculati cate o medie si cate o deviatie standard).***

$$\int_0^{10} e^{-u^2/2}\,du.$$

Urmatoarea functie ofera o estimare pentru un esantion de dimensiune N:

```
MC integration = function(N) {
 sum = 0;
for(i in 1:N) {
 u = runif(1, 0, 10);
 sum = sum + exp(-u*u/2;
}
 return(10*sum/N);
}
```

Putem calcula o medie pentru k = 30 astfel de aproximari si deviatia standard corespunzatoare folosind urmatoarea functie.

```
MC_integr_average= function(k, N) {

for(i in 1:k)

estimates[i] = MC_integration(N);

 print(mean(estimates));

print(sd(estimates)); }
```

In urma executiei acestei functii obtinem:

```
> MC_integr_average(30, 20000)

 [1] 1.249768

[1] 0.02327472

> MC integr average(30, 50000)

 [1] 1.253072

 [1] 0.01373724
```

2. ***Estimati valoarea urmatoarei integrale folosind 20000 si apoi 50000 de valori aleatoare uniforme (determinati 30 astfel de aproximari pentru fiecare din cele doua dimensiuni si calculati cate o medie si cate o deviatie standard), utilizand metoda MC ımbunatatita, anume cu distributia exponentiala (λ = 1)***

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\,du.$$ ***(Valoarea exacta acestei integrale este √π/2 ≈= 0.8862269)***

Mai ıntai, urmatoarea functie ofera o estimare pentru un esantion de dimensiune N

```
MC_improved_integration = function(N) {
 sum = 0;
for(i in 1:N) {
u = rexp(1, 1);
sum = sum + exp(-u*u)/exp(-u); }
return(sum/N); }
```

Putem calcula o medie pentru k = 30 astfel de aproximari si deviatia standard corespunzatoare folosind urmatoarea functie.

```
MC_imprvd_integr_average= function(k, N) {
 for(i in 1:k)
estimates[i] = MC_improved_integration(N);
print(mean(estimates));
 print(sd(estimates)); }
```

In urma executiei acestei functii obtinem

```
> MC_imprvd_integr_average(30, 20000)
 [1] 0.8858024
 [1] 0.002743676
 > MC_imprvd_integr_average(30, 50000)
[1] 0.8861285
[1] 0.00213069
```

Aplicatii:

1. Estimati valoarile urmatoarelor integrale si comparati rezultatul cu valorile exacte (daca sunt date):

(a) $\int_0^{\pi} cos^2 x\, dx$ = π/ 2

(b) $\int_0^3 e^x \;\; dx \; = \; 19.08554$

2. Estimati valoarile urmatoarelor integrale si comparati rezultatul cu valorile exacte si calculati erorile absolute si relative corespunzatoare

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \; \pi/2$

(b) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} \; = \; ln2/2$

3. Estimati valoarea urmatoarei integrale utilizand metoda MC ımbunatatita, cu distributia exponentiala (λ = 1,N = 40000)

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} = \sqrt{\pi/2.}$$

Comparati rezultatul cu valoarea exacta si calculati erorile absolute si relative corespunzatoare. Determinati apoi 30 astfel de aproximari si calculati o medie si o deviatie standard.