Transformări geometrice în plan

Translația

Def Translația unei figuri geometrice reprezintă mișcarea tuturor componentelor ei pe o anumită distanță și direcție.
Această transformare e caracterizată de un vector $\vec{v} = (dx, dy)$. Astfel, când vrem să translatăm un punct $P(x, y)$ după $\vec{v}$ este de ajuns să facem operația $P' = P + \vec{v}$. Astfel, P' are coordonatele $P'(x+dx, y+dy)$.

Proprietăți

- păstrează distanțele
- păstrează orientarea poligoanelor
- păstrează unghiurile
- o dreaptă poate fi transformată în altă dreaptă paralelă cu prima.
- translații succesive reprezintă tot o translație.
- translația e comutativă.

Simetria

a) Simetria față de un punct

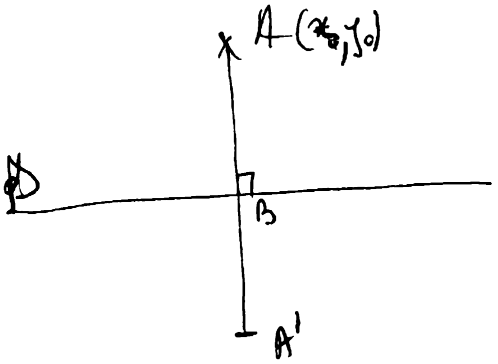
Def Un punct A îl are simetric pe A' față de un punct B dacă segmentul AA' are ca mijloc pe B.

Dacă avem un punct $A(x_0, y_0)$ căruia vrem să-i aflăm simetricul A' față de un punct de coordonate $B(x, y)$ atunci A' va avea coordonatele $(2x - x_0, 2y - y_0)$.

Proprietăți:

- păstrează distanțele
- păstrează orientarea poligoanelor
- păstrează unghiurile
- dreptele paralele vor fi transformate în drepte paralele
- simetriile după un punct nu comută.

b) Simetria față de o dreaptă



Simetricul punctului $A(x_0, y_0)$ față de dreapta Δ de ecuație $ax + by + c = 0$ are coordonatele $A'(x_0 + 2d\,u_1,\ y_0 + 2d\,u_2)$, unde

$$d = d(A, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$u_1 = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad u_2 = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Vom alege semnul minus dacă $ax_0 + by_0 + c > 0$ și semnul plus dacă $ax_0 + by_0 + c < 0$.

Proprietăți:

- păstrează distanțele
- nu păstrează orientarea poligoanelor
- păstrează unghiurile
- drepte paralele vor fi transformate în drepte paralele
- simetriile nu comută -

Rotația

Def Rotația este transformarea care rotește punctele în sens trigonometric în jurul unui punct numit centru de rotație după un unghi fixat numit unghi de rotație.

Dacă avem rotația de centru $C(x_0, y_0)$ și $\measuredangle\alpha$, atunci imaginea unui punct $P(x, y)$ va fi

$$P'\left(x_0 + (x - x_0)\cos\alpha - (y - y_0)\sin\alpha,\ y_0 + (x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha\right)$$

Proprietăți

- păstrează distanțele
- păstrează orientarea poligoanelor
- păstrează unghiurile
- drepte paralele vor fi transformate în drepte paralele
- dacă nu e o rotație trivială de $\measuredangle$ nul, atunci are ca punct fix centrul de rotație.
- în general rotațiile nu comută.

Omotetia

Def Omotetia este o transformare ce scalează obiectele în funcție de un centru de omotetie și un raport.

Un punct $P(x, y)$ transformat după o omotetie $H(O(x_0, y_0), k)$ va avea imaginea

$$P'\left(x_0 + k(x - x_0),\ y_0 + k(y - y_0)\right)$$

Proprietăți

- nu păstrează distanțele
- păstrează orientarea poligoanelor
- păstrează unghiurile
- are ca punct fix centrul de omotetie
- în general omotetiile nu comută.

Conice

Def

Se numește conică în $\mathbb{R}^2$ o mulțime Γ de puncte (x,y) din $\mathbb{R}^2$ ale căror coordonate verifică o ecuație de forma

$$g(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0,$$

cu $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,j \in \{0,1,2\}$

Numerele reale

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I = a_{11} + a_{22}$$

se numesc invarianții metrici ai conicei.

Cu ajutorul acestora se poate preciza natura și genul conicei.

Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow$ conică degenerată

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ conică nedegenerată

Dacă $\delta < 0 \Rightarrow$ conică de tip hiperbolic

$\delta = 0 \Rightarrow$ conică de tip parabolic

$\delta > 0 \Rightarrow$ conică de tip eliptic

Teoremă

La o rotație sau translație în $\mathbb{R}^2$ a sistemului de coordonate, valoarea expresiilor Δ, δ, și I nu se schimbă.

→ Dacă $\delta \neq 0 \Rightarrow$ conică cu centru

$\delta = 0 \Rightarrow$ conică fără centru

(I) Centrul unei conice se află rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{2} g'_x(x,y) \equiv \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{1}{2} g'_y(x,y) \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{20} = 0. \end{cases}$$

<u>Def</u> Punctul $C(x_0, y_0)$ s.n. centru al conicei Γ dacă $\forall P(x,y) \in \Gamma \Rightarrow P'(2x_0 - x, 2y_0 - y) \in \Gamma$.

<u>Obs</u> Din punct de vedere geometric punctul C este centrul unei conice Γ dacă pentru orice punct P de pe conică simetricul său față de punctul C se află tot pe conica Γ. Din acest motiv, dacă există, centrul unei conice Γ se mai numește și <u>centrul de simetrie</u> al conicei Γ.

<u>Def</u> Tangenta la conică dusă dintr-un punct $M(x_0, y_0)$ oarecare din plan s.n. polară acelui punct.

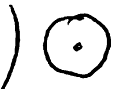
Ec. polarei lui $M(x_0, y_0)$ în raport cu o conică Γ este

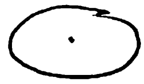
$$a_{11}xx_0 + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}yy_0 + a_{10}(x + x_0) + a_{20}(y + y_0) + a_{00} = 0.$$

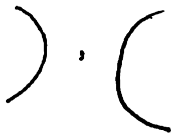
Dacă punctul M este pe curbă, atunci polara se numește tangenta.

Obs

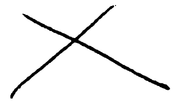
Utilizând roto-translația care realizează trecerea de la reperul cartezian $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ la un reper cartezian adecvat orientat pozitiv (numit reper canonic sau natural) față de care ecuația $g(x,y)=0$ să aibă forma cea mai simplă posibilă (numită ecuație redusă sau canonică) rezultă că Γ este echivalentă cu una dintre următoarele mulțimi:

Cerc: $x^2+y^2=r^2$ sau $\left((x-a)^2+(y-b)^2=r^2\right)$ 
Cerc de centru (a,b) și rază r

Elipsă: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 

Hiperbolă: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 

Parabolă: $y^2=2px$ 

Pereche de drepte concurente: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ 

Pereche de drepte paralele: $x^2-a^2=0$ 

Pereche de drepte confundate: $x^2=0$ 

Punct: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$

Mulțimea vidă: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+1=0$ sau $x^2+a^2=0$.

Pentru determinarea formei canonice se poate proceda astfel:

- Se determină valorile și vectorii proprii ortonormați ai matricei simetrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.
- Se notează cu T matricea formată cu coordonatele vectorilor proprii așezați pe coloane.
- Aplicăm rotația
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$
care reduce forma pătratică la forma diagonală $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$, unde λ_1, λ_2 sunt valorile proprii.
- Dacă este cazul, se mai face o translație.