Seminar06

Aplicații ale ecuațiilor diferențiale de ordinul I (continuare)

1. Variante ale modelului Verhulst

$$a)\; \dot{x} = rx^2(1-\frac{x}{K}),\; x(0)=x_0,\; r,K>0$$
$$b)\; \dot{x} = rx(1-\frac{x^2}{K}),\; x(0)=x_0,\; r,K>0$$

2. Dinamica unei populații care trebuie recoltată

Există situaţii în care anumite specii sunt recoltate. De exemplu, o plantă, a cărei dinamică este guvernată de o lege logistică, este mâncată de cornute. Dacă adăugăm un termen de recoltare la ecuaţia diferenţială logistică, obţinem $\dot{x} = x(a-bx) - h(x)$, unde a şi b sunt parametri pozitivi, iar $h(x)$ reprezintă rata de recoltare a plantelor. De cele mai multe ori, rata de recolatre este modelată de o funcţie de forma $\dot{x} = rx(1-\frac{x}{K}) - Ex$, (*) unde r, A şi E sunt constante pozitive, Ex reprezintă producţia recoltată pe unitatea de timp, iar E este o mărime a efortului depus.
Ecuația (*) se poate scrie astfel $\frac{dx}{dt} = \frac{r}{K}x(K-\frac{K}{r}E-x)$ (ecuaţie cu variabile separabile)

Rezolvare

Exerciţiu 1. a)

① a) $x' = rx^2\left(1-\frac{x}{k}\right)$

$x(0) = x_0$

$$\frac{dx}{dt} = rx^2\left(1-\frac{x}{k}\right)$$

$$\frac{dx}{x^2\left(1-\frac{x}{k}\right)} = r\,dt$$

$$\int \frac{1}{x^2\left(1-\frac{x}{k}\right)}dx = r\int dt$$

$$\int \frac{1}{x^2\cdot\frac{k-x}{k}}dx = rt + C$$

$$k\int \frac{1}{x^2(k-x)}dx = rt + C$$

$$\int \frac{1}{x^2(k-x)}dx$$

$$\frac{1}{x^2(k-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{k-x} \quad \Big|\cdot x^2 \quad \Big|\cdot k-x$$

$$\frac{1}{k-x} = Ax + B + \frac{Cx^2}{k-x} \qquad \left(x=0 \Rightarrow B = \frac{1}{k}\right)$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{A(k-x)}{x} + \frac{B(k-x)}{x^2} + C \qquad \left(x=k \Rightarrow C = \frac{1}{k^2}\right)$$

$$\frac{1}{x^2(k-x)} = \frac{Akx - Ax^2 + Bk - Bx + Cx^2}{x^2(k-x)} = \frac{(C-A)x^2 + (Ak-B)x + Bk}{x^2(k-x)}$$

$C - A = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{k^2}$

$Ak - B = 0$

$Bk = 1$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2(k-x)}dx = \int \left(\frac{\frac{1}{k^2}}{x} + \frac{\frac{1}{k}}{x^2} + \frac{\frac{1}{k^2}}{k-x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{k^2}\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{k}\int \frac{1}{x^2}dx + \frac{1}{k^2}\int \frac{1}{k-x}dx$$

$$= \frac{1}{k^2}\ln|x| - \frac{1}{kx} + \frac{1}{k^2}\ln(k-x)$$

$$\frac{1}{k^2}\ln|x| - \frac{1}{kx} + \frac{1}{k^2}\ln|k-x| = rt + C \quad \Big|\cdot k^2$$

$$\ln|x| - \frac{k}{x} + \ln(k-x) = k^2rt + C$$

$$\ln x(k-x) - \frac{k}{x} = k^2rt + C$$

$x(0) = x_0$

$$\ln x_0(k-x_0) - \frac{k}{x_0} = C$$

$$\Rightarrow x_{pc} = \ln(x(k-x)) - \frac{k}{x} = k^2rt + \ln x_0(x - x_0) - \frac{k}{x_0}$$

Exerciţiu 1. b)

① b) $x' = rx\left(1-\frac{x^2}{k}\right)$
$x(0) = x_0$

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1-\frac{x^2}{k}\right) = rx\cdot\frac{k-x^2}{k} = \frac{r}{k}x(k-x^2)$$

$$\frac{dx}{x(k-x^2)} = \frac{r}{k}dt$$

$$\int\frac{1}{x(k-x^2)}dx = \frac{r}{k}\int dt$$

$$\int\frac{1}{x(k-x^2)}dx$$

$$\frac{1}{x(k-x^2)} = \frac{1}{x(\sqrt{k}-x)(\sqrt{k}+x)}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{\sqrt{k}-x} + \frac{C}{\sqrt{k}+x} \quad \Big| x \quad \Big| \sqrt{k}-x$$

$$\frac{1}{k-x^2} = A + \frac{Bx}{\sqrt{k}-x} + \frac{Cx}{\sqrt{k}+x} \quad \left(x=0,\ A=\frac{1}{k}\right)$$

$$\frac{1}{x(\sqrt{k}+x)} = \frac{A(\sqrt{k}+x)}{x} + B + \frac{C(\sqrt{k}-x)}{\sqrt{k}+x} \quad \left(x=\sqrt{k} \Rightarrow B = 1/2k\right.$$

$$\frac{1}{x(k-x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{\sqrt{k}-x} + \frac{C}{\sqrt{k}+x} \quad \Big| \cdot\sqrt{k}+x$$

$$\frac{1}{x(\sqrt{k}-x)} = \frac{A(\sqrt{k}+x)}{x} + \frac{B(\sqrt{k}+x)}{\sqrt{k}-x} + C \quad \left(x=-\sqrt{k} \Rightarrow C = -\frac{1}{2k}\right)$$

$$\int\frac{1}{x(k-x^2)}dx = \int\left(\frac{\frac{1}{k}}{x} + \frac{\frac{1}{2k}}{\sqrt{k}-x} - \frac{\frac{1}{2k}}{\sqrt{k}+x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{k}\int\frac{1}{x}dx - \frac{1}{2k}\int\frac{-1}{\sqrt{k}-x}dx - \frac{1}{2k}\int\frac{1}{\sqrt{k}+x}dx$$

$$= \frac{1}{k}\ln x - \frac{1}{2k}\ln|\sqrt{k}-x| - \frac{1}{2k}\ln|\sqrt{k}+x|$$

$$= \frac{1}{2k}\left(\ln x^2 - \ln|\sqrt{k}-x| - \ln|\sqrt{k}+x|\right) = \frac{1}{2k}\ln\frac{x^2}{k-x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2k}\ln\frac{x^2}{k-x^2} = \frac{r}{k}t + C \quad \Big| \cdot k \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{k-x^2} = rt + C$$