

Seminar02

Aplicații ale ecuațiilor diferențiale (cu variabile separate / separabile)

Seminar02

Aplicații ale ecuațiilor diferențiale (cu variabile separate / separabile)

Enunțuri

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

Rezolvare

- Exercițiu 1.
Exercițiu 2.
Exercițiu 3.
Exercițiu 4.

Enunțuri

1.

Fie $x(t)$ populația unei anumite specii la momentul t și fie $r = b - d$ rata de creștere ($r > 0$), ce reprezintă diferența între rata natalității (b) și rata mortalității (d). Dacă această populație este izolată, adică nu există nici o imigrație sau emigrare netă, atunci $\frac{dx}{dt}$ (rata de schimbare a populației) este egală cu $x(t)$. În modelul cel mai simplist se consideră rata $r = \text{constant}$. \Rightarrow Ecuația diferențială care guvernează creșterea populației este $\dot{x} = rx, r = b - d > 0$.
(**modelul Malthus**)

În cazul în care populația speciei date este x_0 la timpul t_0 , atunci acest model e descris de problema Cauchy: $\dot{x} = r \cdot x, x(0) = x_0 \Rightarrow x_{PC} = x_0 e^{(b-d)t}, (r = b - d)$

2.

În cazul în care populația devine foarte mare, trebuie luat în considerare faptul că membrii individuali vor fi în competiție unii cu alții pentru spațiul de locuit limitat, resursele naturale și produsele alimentare disponibile. Astfel, trebuie adăugat un termen de concurență.

$$\Rightarrow \dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), x(0) = x_0 \quad (\text{Modelul logistic Verhulst})$$

unde:

- x - reprezintă numărul de indivizi ai populației,
- $r > 0$ - rata de creștere,
- $K > 0$ - reprezintă un plafon biologic (o capacitate de hrană și alte condiții necesare vieții) a mediului în care trăiește acea populație. (populația maximă ce poate exista)

$$\Rightarrow \text{soluția generală } x(t) = \frac{kC \cdot e^{rt}}{1 + C e^{rt}}$$

3.

Alt model folosit în dinamica populației este $\frac{dx}{dt} = r \cdot x \cdot \ln \frac{k}{x}, r > 0$ (**Modelul Gompertz**)

- x - numărul de indivizi ai populației,
- $r > 0$ - rata de creștere
- $k > 0$ - reprezintă populația maximă pe care o poate susține o anumită regiune

$$\Rightarrow x = k \cdot e^{-ce^{-rt}}$$

4.

Modelul de selecție hibridă (folosit în genetică)

$$\frac{dx}{dt} = kx(1-x)(a-4x), x(0) = \frac{1}{n}.$$

- x - populație
- a, b, k - constante ce depind de caracteristică genetică studiată

$$\Rightarrow \text{soluție generală } \frac{x^{a-b}(a-bx)^b}{(1-x)^a} = ce^{a(a-b)kt}$$

Rezolvare

Exercițiu 1.

① $x' = rx, x(0) = x_0$

$\frac{dx}{dt} = r \cdot x$ (ec. cu var. separabile)

$\frac{dx}{x} = r dt \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \int r dt$

$\ln x = rt + C \Rightarrow x = e^{rt+C} = e^{rt} \cdot e^C$

$x_{\text{gd}} = C \cdot e^{rt}$ (sol. generală)

$x(0) = C e^{r \cdot 0} \Rightarrow \boxed{C = x_0} \Rightarrow x_{\text{pc}}(t) = x_0 \cdot e^{rt}$

Exercițiu 2.

$$(2) \quad x' = r x \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad x(0) = x_0$$

$$\frac{dx}{dt} = r x \cdot \frac{K-x}{K} \quad (\text{ec. cu var. separabile})$$

$$\frac{1}{x(K-x)} dx = \frac{r}{K} dt$$

$$\int \frac{1}{x(K-x)} dx = \int \frac{r}{K} dt$$

$$\frac{1}{x(K-x)} = \frac{\frac{K}{x}}{K} + \frac{\frac{K}{K-x}}{K} = \frac{AK - Ax + Bx}{x(K-x)} = \frac{(-A+B)x + AK}{x(K-x)}$$

$$-A+B=0 \Rightarrow A=B \Rightarrow B=\frac{1}{K}$$

$$AK=1 \Rightarrow A=\frac{1}{K}$$

$$\frac{1}{x(K-x)} = \frac{\frac{1}{K}}{x} + \frac{\frac{1}{K}}{K-x} = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{K-x} \right)$$

$$\frac{1}{K} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{K-x} \right) dx = \frac{r}{K} dt \quad | \cdot K$$

$$\ln x + (-\ln(K-x)) = rt + C$$

$$\ln \frac{x}{K-x} = rt + C$$

$$\frac{x}{K-x} = e^{rt+C} = \frac{C \cdot e^{rt}}{1}$$

$$\frac{x}{K-x+x} = \frac{C e^{rt}}{1 + C e^{rt}} \Rightarrow x(t) = \frac{K \cdot C e^{rt}}{1 + C e^{rt}}$$

$$x(0) = \frac{KC}{1+C} = x_0 \Leftrightarrow KC = x_0 + x_0 C$$

$$(K-x_0)C = x_0$$

$$C = \frac{x_0}{K-x_0}$$

$$x_{PC} = \frac{K \cdot \frac{x_0}{K-x_0} \cdot e^{rt}}{1 + \frac{x_0}{K-x_0} \cdot e^{rt}}$$

Exercițiu 3.

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = rx \ln \frac{K}{x}, \quad x(0) = x_0$$

$$\frac{1}{x \ln \frac{K}{x}} dx = r dt$$

$$\int \frac{1}{x (\ln K - \ln x)} dx = \int r dt$$

$$u(x) = \ln x$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$-\int \frac{-1}{\ln K - u} \cdot u' dx = r \int dt$$

$$-\ln(\ln K - \ln x) = rt + C$$

$$\ln(\ln K - \ln x) = -rt + C$$

$$\ln K - \ln x = e^{-rt+C} = C \cdot e^{-rt}$$

$$\ln \frac{K}{x} = C \cdot e^{-rt}$$

$$\frac{K}{x} = e^{C e^{-rt}} \Rightarrow x = \frac{K}{e^{C e^{-rt}}}$$

$$x(0) = \frac{K}{e^C} = x_0 \Rightarrow e^C = \frac{K}{x_0}$$

$$\Rightarrow C = \ln \frac{K}{x_0}$$

$$x_{PC}(t) = \frac{K}{e^{(\ln \frac{K}{x_0}) \cdot e^{-rt}}} = \frac{K}{\left(e^{\ln \frac{K}{x_0}}\right)^{e^{-rt}}}$$

$$= \frac{K}{\left(\frac{K}{x_0}\right)^{e^{-rt}}}$$

Exercițiu 4.

$$\textcircled{c) } \frac{dx}{dt} = kx(1-x)(a-bx), x_0 = \frac{1}{a}$$

$$\frac{dx}{x(1-x)(a-bx)} = k dt$$

$$\int \frac{1}{x(1-x)(a-bx)} dx = \int k dt$$

$$\frac{1}{x(1-x)(a-bx)} = \frac{\cancel{(bx)} \cancel{(a-bx)}}{x \cancel{(a-bx)} \cancel{(1-x)}} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{a-bx}$$

$$1 = A(1-x)(a-bx) + Bx(a-bx) + Cx(1-x)$$

$$x=1 \Rightarrow B(a-b)=1 \Rightarrow B = \frac{1}{a-b}$$

$$x = \frac{a}{b} \Rightarrow C \cdot \frac{a}{b} \left(1 - \frac{a}{b}\right) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\frac{a}{b} \left(\frac{b-a}{b}\right)} = \frac{b^2}{a(b-a)}$$

$$x=0 \Rightarrow A \cdot a = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{a}$$
