Curs 5

APLICATII PRACTICE ALE ECUATIILOR DIFERENTIALE DE ORDINUL I IN FIZICA

Suprafata de echilibru a unui lichid aflat in rotatie

Un tub vertical in forma de cilindru (raza r) se invarte rapid cu viteza unghiulara constanta ω in jurul propriei axe. Aratati ca ecuatia determinata de intersectia suprafetei de rotatie a lichidului cu un plan care contine axa tubului este data de urmatoarea ecutie diferentiala ordinara:

$$x'(t) = \frac{\omega^2}{g} t$$

Demonstratie

Identificam datele problemei:

- necunoscuta este functie x=x(t)
- variabila independenta este t;
- x : {-r,r} – ℝ e inaltimea lichidului dintre axa cilindrului si si o distanta *t*

$$\frac{dx}{dt} = f(t)$$

Lichidul se ridica pe peretii tubului datorita actiunii fortei de inertie.

Observam ca in problema aceasta intervin doua forte: greutatea (G) si forta centrifuga (F_c), cu formulele:

$$\vec{G} = -mg \cdot \vec{j}$$
$$\vec{F_c} = m\omega^2 t \cdot \vec{i}$$

In care *m* reprezinta punctul de masa.

Forta $\vec{F}$ este perpendiculara pe planul tangent la suprafata lichidului datorita vitezei de rotatie, care este constanta. Ceea ce conduce la faptul ca unghiurile α si β sunt congruente. Astfel,

$$\alpha = \beta \Rightarrow tg\alpha = tg\beta$$

Deducem ecuatia ecuatie care descrie curba de rotatie de forma urmatoare:

$$x'(t) = \frac{\omega^2}{g} t \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega^2}{g} t$$

Prin integrare directa se obtine:

$$x(t) = \int \frac{\omega^2}{g} t dt = \frac{\frac{\omega^2}{g} t^2}{2} + c = \frac{\omega^2}{2g} t^2 + c$$

care este o ecutie diferentiala d eoridul intai direct integrabila.

Variatia presiunii atmosferice in raport cu altitutinea

Presiunea atmosferica p=p(h) a unei mase volumice de aer ρ la o temperatura T in raport cu inaltimea h, care a fost masurata incepand cu nivelul marii, unde presiunea este p(0)=p. Atunci, presiunea atmosferica este data de problema Cauchy

$$\begin{cases} p'(h) + \dfrac{M \cdot g}{R \cdot T(h)} p(h) = 0 \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

Demonstratie:

Identificam datele problemei:

$h - variabila\ independenta$

$p = p(h) - functia\ necunoscuta$

$T - temperatura\ masei\ volumice$

Putem porni rezolvarea problemei, pornind de la ecuatia fundamentala a hidrostaticii:

$$p' + \rho g = 0$$

Consideram aerul la un gaz perfect si, atunci

$$p \cdot v = n \cdot T \cdot R$$

In care stim ca n reprezinta numarul de moli de aer din volumul v si R e o constanta.

$$\rho = \frac{m}{v} = \frac{m \cdot p}{n \cdot T \cdot R}$$

Ecuatia folosita pentru descrierea presiunii va fi:

$$p' = \frac{m \cdot g}{T \cdot R} p$$

Pentru a putea arata ca presiunea atmosferica este data de problema Cauchy (4.3.1), distingem 2 cazuri:

- Cazul 1: consideram temperatura constanta si ecuatia devine:

$$p' = \frac{m \cdot g}{T \cdot R} p \text{ si, notand } \frac{m \cdot g}{T \cdot R} = k, \text{ atunci } p' = -kp.$$

(ecuatie cu variabile separabile)

Separam variabilele:

$$\frac{dp}{dh} = -kp(h) \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = -k\frac{1}{dh}$$

Trecem totul in membrul stang si integram ecuatia (4.3.4):

$$\int \frac{dp}{p} + \int \frac{k}{dh} = C \Leftrightarrow \ln(p) = -k\ln(h) + C \Leftrightarrow p(h) = C \cdot e^{-kh}$$

Folosim conditia initiala din problema Cauchy si solutia devine:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-kh}$$

Presiunea scade exponential in raport cu altitudinea.

- **Cazul 2**: Consideram ca temperatura nu ar fi constanta, caz in care aerul respecta legea transformarilor abatice:

$$p \cdot v^{\gamma} = K \quad unde\,\gamma\; este\; dat\; si\; \gamma \neq 1$$

Se obtine rezultatul urmator:

$$v = \left(\frac{K}{p}\right)^{1/\gamma}$$

Folosind $p \cdot v = n \cdot T \cdot R$ se ajunge la urmatoarea relatie:

$$T \cdot R = v\frac{p}{n} = \left(\frac{K}{p}\right)^{1/\gamma} \cdot \frac{p}{n} = \frac{K^{1/\gamma} \cdot p^{1-\frac{1}{\gamma}}}{n}$$

Rezultatul problemei se reduce la scrierea si rezolvarea urmatoarei probleme Cauchy:

$$\begin{cases} p'(h) = -\dfrac{m \cdot g}{K^{1/\gamma}} p^{1/\gamma}(h) \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

Folosind urmatoarea notatie: $k_1 = \frac{m \cdot g}{K^{1/\gamma}}$ si, problema Cauchy $p(0) = p_0$, obtinem

$$\begin{cases} p'(h) = -k_1 \cdot p^{1/\gamma}(h) \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

Se rezolva ecuatia $p'(h) = -k_1 \cdot p^{1/\gamma}(h)$ prin separarea variabilelor si integrare:

$$\frac{dp}{dh} = -k_1 p^{1/\gamma}(h) \Leftrightarrow p^{1-\frac{1}{\gamma}} dp = -k_1 dh, integrand \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int p^{1-\frac{1}{\gamma}} dp = \int -k_1 dh \Rightarrow p^{1-\frac{1}{\gamma}}(h) = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)(-k_1 h + C)$$

$$p(h) = \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)(-k_1 h + C)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Folosind condtia initiala $\boldsymbol{p(0) = p_0}$, se obtine:

$$p(h) = \left[p_0^{(\gamma-1)/\gamma} - \frac{\gamma-1}{\gamma} k_1 h\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Aceasta ecuatie ne arata ca presiunea este invers proportionala cu altitudinea,adica, atunci cand altitudinea creste, presiunea scade.

Altitudinea maxima la care exista atmosfera este:

$$h_M = \frac{\gamma \cdot p_0^{(\gamma-1)/\gamma}}{\gamma - 1}$$

Viteza de racire a unui corp, aflat intr-un mediu cu o anumita temperatura, este proportionala cu diferenta dintre temperatura corpului respectiv si temperatura mediului in care se afla.

Demonstratie:

Identificam datele problemei:

- x(t) – temperatura tavii masurata la timpul t;

- t – momentul la care se face masuratoarea;

- x_0 – temperatura din interiorul bucatariei;.

Propozitia, de mai sus se poate scrie in felul urmator:

$$x'(t) = (x(t) - x_0) \cdot k$$

Unde k este o constanta.

Notam $x(t) - x_0 = y$ si rezulta ca:

$$y' = y \cdot k$$

Separam variabilele si rezolvam ecuatia:

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = kdt \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int kdt \Rightarrow lny = kt + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C \cdot e^{kt}$$

Revenind la notatia lui y, rezulta ca:

$$x(t) - x_0 = C \cdot e^{kt} \Rightarrow x(t) = C \cdot e^{kt} + x_0$$

Exemplu de Problema: *O tava de prajituri tocmai a fost scoasa din cuptor si s-a constat ca temperatura ei este de 100^0C si scade pana la temperatura de 60^0C in doar 20 de minute. Stiind ca temperatura din interiorul bucatariei este de 20^0C, aflati peste cat timp tava va ajunge la temperatura de 25^0C.*

Rezolvare

Putem determina x(t) tinand cont de datele problemei:

$$x_0 = 20°C,$$

$$x(0) = 100°C,$$

$$x(20) = 60°C$$

$$\begin{cases} x(0) = C + x_0 \\ x(20) = Ce^{20k} + x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C + 20 = 100 \\ Ce^{20k} + 20 = 60 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = 80°C \\ e^{20k} = \frac{40°C}{80°C} \end{cases} \Rightarrow e^{20k} = \frac{1}{2} \Rightarrow 20k = -ln2 \Rightarrow k = \frac{-0.69}{20} \Rightarrow k = -0.03$$

$$x(t) = 80e^{-\frac{3}{100}t} + 20$$

$$25 = 20 + 80e^{-\frac{3}{100}t} \Rightarrow e^{-\frac{3}{100}t} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16} \Rightarrow -\frac{3t}{100} = ln\left(\frac{1}{16}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3t}{100} = 2.77 = \frac{277}{100}$$

$$\Rightarrow t = \frac{277}{100} \cdot \frac{100}{3} \Rightarrow t \sim 92.3°C$$