1. Să se verifice ineg C-B-S.

$$<\vec{x},\vec{y}>^2 \le <\vec{x},\vec{x}> \cdot <\vec{y},\vec{y}>$$

Dem. Dc $\vec{x}=\vec{0}$, (sau $\vec{y}=\vec{0}$) $\Rightarrow$ $<\vec{0},\vec{y}>^2 \le <\vec{0},\vec{0}>\cdot<\vec{y},\vec{y}>$

$0 \le 0$ (A)

Dacă $\vec{x},\vec{y}\in V\setminus\{\vec{0}\}$ Fie $g(t)=<\vec{x}-t\vec{y},\vec{x}-t\vec{y}> \Rightarrow g(t)\ge 0\ \forall t\in\mathbb{R}$

Dar $g(t) = <\vec{x},\vec{x}-t\vec{y}> - t<\vec{y},\vec{x}-t\vec{y}>$

$= <\vec{x},\vec{x}> - t<\vec{x},\vec{y}> - t<\vec{y},\vec{x}> + t^2<\vec{y},\vec{y}>$

$= t^2<\vec{y},\vec{y}> - 2t<\vec{x},\vec{y}> + <\vec{x},\vec{x}>$

Cum $g(t)\ge 0\ \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow \Delta\le 0$

$\Delta = 4<\vec{x},\vec{y}>^2 - 4\cdot<\vec{x},\vec{x}><\vec{y},\vec{y}> \le 0$

$\Rightarrow <\vec{x},\vec{y}>^2 - <\vec{x},\vec{x}>\cdot<\vec{y},\vec{y}> \le 0$

2. Să se dem. că $\|\vec{x}\| = \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>}$ este normă pe $\mathbb{R}^n$.

Dem.

a) $\|\vec{x}\|\ge 0\ \forall \vec{x}\in\mathbb{R}$

$\|\vec{x}\| = \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>}\ge 0\ \forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n$

$\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>}=0\ \forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$

b) $\|\alpha\vec{x}\| = \sqrt{<\alpha\vec{x},\alpha\vec{x}>} = \sqrt{\alpha^2<\vec{x},\vec{x}>} = |\alpha|\cdot\sqrt{<\vec{x},\vec{x}>} = |\alpha|\cdot\|\vec{x}\|$

c) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$

$\|\vec{x}+\vec{y}\| = \sqrt{<\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}>} = \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>+2<\vec{x},\vec{y}>+<\vec{y},\vec{y}>}$

$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = <\vec{x},\vec{x}>+2<\vec{x},\vec{y}>+<\vec{y},\vec{y}> = \|\vec{x}\|^2+2<\vec{x},\vec{y}>+\|\vec{y}\|^2$

$\le \|\vec{x}\|^2 + 2\sqrt{<\vec{x},\vec{x}>}\cdot\sqrt{<\vec{y},\vec{y}>}+\|\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2+2\cdot\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|+\|\vec{y}\|^2$

$= (\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|)^2$

$\Rightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$

3. Să se ortogonalizeze și apoi să se ortonormeze următoarele sisteme de vectori

a) $\{(1,1,0),(-1,2,1),(0,3,2)\}\subset\mathbb{R}^3$

b) $\{(-1,2,1),(3,0,1),(2,2,0)\}\subset\mathbb{R}^3$

4. Fie punctele $A(1,1,1)$, $B(-1,2,0)$, $C(4,-1,2)$, $D(0,1,2)$

a) Să se verifice dacă ~~dreptele~~ vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{DC}$ sunt perpendiculari, iar dacă nu sunt perpendiculari să se det măsura unghiului dintre ei.

b) Să se verifice dacă punctele A, B, C sunt coliniare, iar în caz contrar, să se determine aria ΔABC.

c) Să se verifice dacă punctele A, B, C, D sunt coplanare, iar în caz contrar să se afle volumul paralelipipedului determinat de aceste 4 puncte

5. Fie punctele $A(1,1,2)$, $B(-1,0,2)$, $C(3,1,-1)$, $D(0,1,1)$

a) Să se afle înălțimea din A a triunghiului ABC

b) Să se afle înălțimea tetraedrului determinat de punctele A, B, C, D.

6. Aceleași enunțuri din problemele 4 și 5 pt. punctele

a) $A(1,-1,0)$, $B(3,2,1)$, $C(0,1,1)$, $D(-1,1,2)$

b) $A(0,1,1)$, $B(1,1,3)$, $C(-1,0,2)$, $D(2,1,0)$