Aplicatii rezolvate – Variabile aleatoare multidimensionale-

Aplicatia 1:

• Se consideră vectorul aleator discret (X,Y) cu repartiția dată în tabelul:

$X \backslash Y$	2	6
1	0.20	0.10
3	0.05	0.15
4	0.45	0.05

a) Să se determine repartiția variabilelor X și Y;

b) Să se stabilească dacă X și Y sunt independente sau nu;

c) calculați coeficientul de corelație $\rho(X,Y)$;

SOLUȚIE:

a) Variabila X are repartiția:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \text{ unde } \begin{cases} p_1 = 0,20 + 0,10 = 0,30 \\ p_2 = 0,05 + 0,15 = 0,20 \\ p_3 = 0,45 + 0,05 = 0,50 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0,30 & 0,20 & 0,50 \end{pmatrix}}$$

Variabila Y are repartiția:

$$Y : \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix} \text{ unde } \begin{cases} q_1 = 0,20 + 0,05 + 0,45 = 0,70 \\ q_2 = 0,10 + 0,15 + 0,05 = 0,30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0,70 & 0,30 \end{pmatrix}}$$

b)

$X \setminus Y$	2	6	p_i
1	0.20	0.10	0.30
3	0.05	0.15	0.20
4	0.45	0.05	0.50
q_j	0.70	0.30	1

Pentru verificarea independenței variabilelor X și Y efectuăm un control, de exemplu:

$$P(X=1)\cdot P(Y=2) = 0,30\cdot 0,70 = 0,21$$

iar $P[(X=1)\cap(Y=2)] = 0,20$

cum $0,21 \neq 0,20 \Rightarrow$ X și Y sunt dependente

c). $E(X) = 1\cdot 0,30 + 3\cdot 0,20 + 4\cdot 0,50 = 2,90$

$E(X^2) = 1\cdot 0,30 + 9\cdot 0,20 + 16\cdot 0,50 = 10,1$

$var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 10,1 - 8,41 = 1,69$

- $E(Y) = 2\cdot 0,70 + 6\cdot 0,30 = 3,20$

$E(Y^2) = 4\cdot 0,70 + 36\cdot 0,30 = 13,6$

$var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 13,6 - (3,20)^2 = 3,36$

- $E(X\cdot Y) = 1\cdot(2\cdot 0,20 + 6\cdot 0,10) + 3\cdot(2\cdot 0,05 + 6\cdot 0,15$
  $+ 4\cdot(2\cdot 0,45 + 6\cdot 0,05) \Rightarrow E(X\cdot Y) = 8,80$

- $cov(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$

  $\Rightarrow cov(X,Y) = 8,80 - 2,90\cdot 3,20 \Rightarrow cov(X,Y) = -0.48$

- $\rho(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)\cdot var(Y)}}$

  $\Rightarrow \rho(X,Y) = \dfrac{-0,48}{\sqrt{1,69\cdot 3,36}} \simeq -0,201$

Aplicatia 2:

- Fie vectorul aleator (X,Y) cu densitatea de probabilitate $f(x,y) = \begin{cases} ax^2y, & (x,y) \in [0,1] \times [0,2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

a) Să se determine constanta a;

b) Să se calculeze funcția de repartiție $F(x,y)$ și funcțiile de repartiție marginale $F_X(x)$ și $F_Y(y)$

SOLUȚIE:

a) $\begin{cases} \int_0^1 \int_0^2 f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Leftrightarrow a\int_0^1 x^2dx \int_0^2 y\,dy = 1 \\ f(x,y) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2a}{3} = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

b) Avem $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$

- Dacă $x<0$ sau $y<0 \Rightarrow f(x,y)=0 \Rightarrow F(x,y)=0$
- Dacă $x>1$ și $y>2 \Rightarrow F(x,y)=1$
- Dacă $(x,y) \in [0,1] \times [0,2]$ avem:
  $F(x,y) = \int_0^x\int_0^y \frac{3}{2}u^2v\,du\,dv = \frac{3}{2}\int_0^x u^2du\int_0^y v\,dv = \frac{x^3y^2}{4}$
- Dacă $x \in [0,1]$ și $y>2$ avem:
  $F(x,y) = \int_0^x\int_0^2 \frac{3}{2}u^2v\,du\,dv = \frac{3}{2}\int_0^x u^2du\int_0^2 v\,dv = x^3$
- Dacă $x>1$ și $y \in [0,2]$ obținem:
  $F(x,y) = \int_0^1\int_0^y \frac{3}{2}u^2v\,du\,dv = \frac{3}{2}\int_0^1 u^2du\int_0^y v\,dv = \frac{y^2}{4}$

$$\Rightarrow F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x<0 \text{ sau } y<0 \\ \frac{x^3y^2}{4}, & (x,y) \in [0,1] \times [0,2] \\ x^3, & x \in [0,1],\ y>2 \\ \frac{y^2}{4}, & x>1,\ y \in [0,2] \\ 1, & x>1,\ y>2 \end{cases}$$

Funcțiile de repartiție marginale sunt:

$$F_X(x) = F(x,\infty) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x^3, & x \in [0,1] \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = F(\infty,y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ \frac{y^2}{4}, & y \in [0,2] \\ 1, & y>2 \end{cases}$$

Aplicatia 3:

Fie vectorul aleator (X,Y) cu densitatea de probabilitate $f(x,y)=\begin{cases} k(x+y+1), & x\in[0,1], y\in[0,2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

a) Să se determine constanta k;

b) Să se determine densitățile marginale;

c) Să se cerceteze dacă X și Y sunt independente sau nu;

d) Să se calculeze coeficientul de corelație între X și Y;

SOLUȚIE:

a) Din condiția $f(x,y)\geq 0 \Rightarrow k\geq 0$

$$\int_0^1\int_0^2 f(x,y)\,dx\,dy=1 \Leftrightarrow k\int_0^1\int_0^2 (x+y+1)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\int_0^1 \left(xy+\frac{y^2}{2}+y\right)\Big|_0^2 dx = 1$$

$$\Rightarrow k\int_0^1 (2x+4)\,dx = 1 \Rightarrow k\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big|_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow k=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{5}(x+y+1), & x\in[0,1], y\in[0,2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

b) • $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{5}\int_0^2 (x+y+1)\,dy = \frac{2x+4}{5}$, $x \in [0,1]$

$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x+4}{5}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

• $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \frac{1}{5}\int_0^1 (x+y+1)\,dx = \frac{2y+3}{10}$, $y \in [0,2]$

$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2y+3}{10}, & y \in [0,2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

c) X și Y nu sunt independente deoarece:

$f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$

d) • $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx =$

$= \frac{1}{5}\int_0^1 x(2x+4)\,dx = \frac{8}{15}$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \frac{1}{5}\int_0^1 x^2(2x+4)\,dx = \frac{11}{30}$

$var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{11}{30} - \frac{64}{225} = \frac{37}{450}$

• $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy =$

$= \frac{1}{10}\int_0^2 y(2y+3)\,dy = \frac{17}{15}$

$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\,dy = \frac{1}{10}\int_0^2 y^2(2y+3)\,dy = \frac{8}{15}$

$var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{8}{5} - \frac{289}{225} = \frac{71}{225}$

• $E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y)\,dx\,dy =$

$= \frac{1}{5}\int_0^1 dx \int_0^2 xy(x+y+1)\,dy = \frac{1}{5}\int_0^1 \left(2x^2 + \frac{14}{3}x\right)dx = \frac{9}{15}$

• $cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y) = \frac{9}{15} - \frac{8}{15} \cdot \frac{17}{15} = \frac{-1}{225}$

$\Rightarrow \rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X) \cdot var(Y)}} = \frac{\frac{-1}{225}}{\sqrt{\frac{37}{450} \cdot \frac{71}{225}}} = -0{,}02758$