Introducere

Definiție

Fie $B = \{0, 1\}$.
Se numește *algebră booleană* *un sistem* $(B, \vee, \wedge, -)$ *unde:*

1. $\vee : B \times B \to B$ *se numește disjuncție (sumă logică);*
2. $\wedge : B \times B \to B$ *se numește conjuncție (produs logic);*
3. $- : B \to B$ *se numește negație.*

Tabelele de adevăr ale acestor operații sunt:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\overline{A}$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

Proprietăți și axiome ale unei algebre booleene

- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, (\forall)a, b, c \in B$ (asociativitate)
- $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c, (\forall)a, b, c \in B$ (asociativitate)
- $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a, (\forall)a, b \in B$ (comutativitate)
- $a \vee 0 = a, (\forall)a \in B$ (0 elem. neutru față de $\vee$)
- $a \wedge 1 = a, (\forall)a \in B$ (1 elem. neutru față de $\wedge$)
- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), (\forall)a, b, c \in B$ (distributivitate)
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), (\forall)a, b, c \in B$ (distributivitate)
- $a \vee \overline{a} = 1, (\forall)a \in B$
- $a \wedge \overline{a} = 0, (\forall)a \in B$
- $a \vee a = a, a \wedge a = a(\forall)a \in B$ (idempotența)
- $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b},\ \overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$ (legile lui De Morgan)

Funcții booleene

Definiție

Fie $B = \{0, 1\}$ *și* $n \in \mathbb{N}^*$. *O funcție* $f : B^n \to B$ *se numește funcție booleană.*

Observație

O funcție booleană poate fi reprezentată în modul următor:

x_1	x_2	...	x_n	$f(x_1, x_2..., x_n)$
0	...	*0*	*0*	b_1
0	...	*0*	*1*	b_2
...				...
0	...	*1*	*1*	b_{2^n-1}
1	...	*1*	*1*	b_{2^n}

$b_k \in B, k \in \{1, ..., 2^n\}$

Funcții booleene

Definiție

Se numește *produs elementar* *un produs de variabile sau negații ale lor.*

Definiție

Se numește *sumă elementară* *o sumă de variabile sau negații ale lor.*

Observație

- *Condiția necesară și suficientă pentru ca o sumă elementară să fie identic adevărată (să aibă valoarea 1) este ca aceasta să conțină cel puțin doi termeni, unul fiind negația celuilalt.*
- *Condiția necesară și suficientă pentru ca un produs elementar să fie identic fals (să aibă valoarea 0) este ca acesta să conțină cel puțin doi termeni, unul fiind negația celuilalt.*

Funcții booleene

Definiție

Se numește formulă în algebra propozițională, orice propoziție compusă obținută din propoziții elementare prin aplicarea operațiilor logice.

Definiție

Se numește formă normală disjunctivă (FND) a unei formule, o formulă echivalentă care este o sumă de produse elementare ce conține aceleași variabile ca și formula inițială.

Definiție

Se numește formă normală conjunctivă (FNC) a unei formula, o formulă echivalentă care este un produs de sume elementare ce conține aceleași variabile ca și formula inițială.

Funcții booleene

Definiție

Se numește ***formă normală disjunctivă perfectă*** *(FNDP) a unei formule, o formă normală disjunctivă care satisface condițiile:*

- *nu conține doi termeni identici;*
- *niciun termen nu conține doi factori identici;*
- *niciun termen nu conține simultan un factor și negația lui;*
- *în fiecare termen sunt prezente toate variabilele direct sau prin negația lor*

Exemplu

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1x_2x_3$$

Funcții booleene

Definiție

Se numește *formă normală conjunctivă perfectă* *(FNCP) a unei formule, o formă normală conjunctivă care satisface condițiile:*

- *nu conține doi factori identici;*
- *niciun factor nu conține doi termeni identici;*
- *niciun factor nu conține simultan un termen și negația lui;*
- *în fiecare factor sunt prezente toate variabilele direct sau prin negația lor*

Exemplu

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Funcții booleene

Definiție

O funcție booleană este în formă canonică disjunctivă (FCD), dacă $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \vee f(i_1, i_2, ..., i_n) x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n}$, *unde* $i_k \in \{0, 1\}, x_k^0 = \overline{x_k},\ x_k^1 = x_k, k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Observație

Termenii în care $f(i_1, i_2, \ldots, i_n) = 0$ *nu se mai scriu deoarece 0 este element neutru pentru disjuncție.*

Exemplu

Fie funcția $f : B^3 \to B$ *dată prin tabela de adevăr*

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Pentru fiecare valoare 1 *a lui* f *se va insera un termen corespunzător:*

- $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0 \to \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} = 1$;
- $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1 \to \overline{x_1}x_2x_3 = 1$;

Exemplu

- $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0 \to x_1 x_2 \overline{x_3} = 1;$
- $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1 \to x_1 \overline{x_2} x_3 = 1;$

FCD a lui f: $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3}.$

Exemplu

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

FCD a lui f: $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\ \overline{x_2} x_3 \vee x_1\ \overline{x_2}\ \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3.$

Funcții booleene

Definiție

O funcție booleană este în formă canonică conjunctivă (FCC) dacă $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \wedge f(i_1, i_2, ..., i_n) \vee x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n}$, *unde* $i_k \in \{0, 1\}, x_k^0 = \overline{x_k},\ x_k^1 = x_k, k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Observație

Factorii în care $f(i_1, i_2, \ldots, i_n) = 1$ *nu se mai scriu deoarece 1 este element neutru pentru conjuncție.*

Exemplu

Fie funcția $f : B^3 \to B$ *dată prin tabela de adevăr*

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Pentru fiecare valoare 0 *a lui* f *se va insera un termen corespunzător:*

- $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1 \to x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} = 0$;
- $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0 \to x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 = 0$;

Exemplu

- $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0 \rightarrow \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 = 0$;
- $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1 \rightarrow \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} = 0$;

FCC a lui f:
$f = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$.

Exemplu

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

FCC a lui f:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$$

Funcții booleene

Definiție

Fie $f : B^n \to B$ *o funcție booleană de* n *variabile. Atunci* f *se numește* ***minterm*** *dacă* $(\exists)!(x_1, ...x_n) \in B^n$ *a.î.* $f(x_1, ...x_n) = 1$.

Observație

- *Există* 2^n *mintermi pentru* n *variabile.*
- *Mintermii sunt de fapt produse logice ale tuturor variabilelor din domeniul unei funcții booleene, cu proprietatea ca variabilele care iau valoarea 0 sunt negate în argumentul în care funcția ia valoarea 1.*

Exemplu

Pentru $n = 3$*, mintermii posibili sunt:* $x_1x_2x_3$, $x_1x_2\overline{x_3}$, $x_1\overline{x_2}x_3$, $\overline{x_1}x_2x_3$, $x_1\overline{x_2}\ \overline{x_3}$, $\overline{x_1}x_2\overline{x_3}$, $\overline{x_1}\ \overline{x_2}x_3$, $\overline{x_1};\overline{x_2}\ \overline{x_3}$.
De exemplu, un minterm poate fi $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$.
Pentru $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1) \rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = 1$.

Funcții booleene

Definiție

Fie $f : B^n \to B$ *o funcție booleană de* n *variabile. Atunci* f *se numește* *maxterm* *dacă* $(\exists)!(x_1, ...x_n) \in B^n$ *a.î.* $f(x_1, ...x_n) = 0$.

Observație

- *Exista* 2^n *maxtermi pentru* n *variabile.*
- *Maxtermii sunt de fapt sume logice ale tuturor variabilelor din domeniul unei funcții booleene, cu proprietatea ca variabilele care iau valoarea 1 sunt negate în argumentul în care funcția ia valoarea 0.*

Exemplu

Pentru $n = 3$*, maxtermii posibili sunt:* $x_1 \vee x_2 \vee x_3$, $x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$, $x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$, $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$, $x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$, $\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}$, $\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3$, $\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$.
De exemplu, un maxterm poate fi $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3$.
Pentru $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0) \to f(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Funcții booleene

Observație

- *Mintermii sunt produse elementare, iar maxtermii sunt sume logice elementare.*
- *Orice funcție booleană, cu excepția funcției constante 0, poate fi scrisă sub formă canonică disjunctivă (FCD).*
- *Orice funcție booleană, cu excepția funcției constante 1, poate fi scrisă sub formă canonică conjunctivă (FCC).*
- *Pentru o funcție booleană dată, formele canonice sunt unice.*
- *Funcțiile booleene pot descrie funcționarea unui sistem de elemente care pot la un moment dat să se afle într-una din două stări posibile.*