1 Sintaxa limbajului

Vocabularul limbajului este $V \cup L \cup S$, unde

2 Sintaxa limbajului

Vocabularul limbajului este $V \cup L \cup S$, unde

> V este mulţimea propoziţiilor elementare; $V \neq \emptyset$. Convenim să notăm simbolurile din mulţimea V prin literele alfabetului latin;
>
> $L = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \urcorner\}$ este mulţimea conectivelor logice: conjuncţie, disjuncţie,implicaţie, echivalenţă şi negaţie;
>
> $S = \{(,)\}$ este mulţimea simbolurilor de punctuaţie.

Presupunem îndeplinite condiţiile $V \cap L = \emptyset$, $V \cap S = \emptyset$.

Convenim să numim asamblaje elementele mulţimii $A = (V \cup L \cup S)^*$. Pentru $\alpha \in A$ şi $x \in V \cup L \cup S$ indicăm prin $\alpha \langle x \rangle$ faptul că simbolul x apare cel puţin o dată printre simbolurile asamblajului α respectiv prin $\alpha \rangle x \langle$ situaţia contrară.

Structurile simbolice de interes în calculul cu propoziţii sunt formulele logice; mulţimea formulelor notată $FORM$; $FORM \subset A$ este definită de gramatica independentă de context $G = (N, T, \Re)$, unde:

$N = \{\langle formula \rangle, \langle propozitie \rangle, \langle conectiva \rangle\}$ este mulţimea neterminalelor, $T = V \cup L \cup S$ este mulţimea terminalelor şi $\Re$ este mulţimea regulilor de rescriere:

$$\Re = \left\{ \begin{array}{l} \langle formula \rangle \rightarrow \langle propozitie \rangle \mid (\urcorner \langle formula \rangle) \mid \\ \qquad\qquad\qquad (\langle formula \rangle \langle conectiva \rangle \langle formula \rangle), \\ \langle propozitie \rangle \rightarrow a \mid b \mid ..., \\ \langle conectiva \rangle \rightarrow \wedge \mid \vee \mid \rightarrow \mid \leftrightarrow \end{array} \right\}$$

Mulţimea formulelor este limbajul generat de gramatica G pentru simbolul de start $\langle formula \rangle$; $FORM = L(\langle formula \rangle)$. Convenim să reprezentăm formulele prin litere din alfabetul grec.

Exemplul 1.1.1. Fie asamblajul $\alpha = ((\urcorner((\urcorner a) \vee b)) \leftrightarrow (a \wedge (\urcorner b)))$. Considerăm următoarea schemă de derivare ; simbolul neterminal căruia este aplicată regula de rescriere este subliniat:

$$
\begin{aligned}
&\langle formula\rangle \Rightarrow \Big(\langle formula\rangle\ \underline{\langle conectiva\rangle}\ \langle formula\rangle\Big) \Rightarrow\\
&\Big(\underline{\langle formula\rangle} \leftrightarrow \langle formula\rangle\Big) \Rightarrow \Big((\neg\langle formula\rangle) \leftrightarrow \underline{\langle formula\rangle}\Big) \Rightarrow\\
&\Big((\neg\langle formula\rangle) \leftrightarrow \Big(\underline{\langle formula\rangle}\ \langle conectiva\rangle\ \langle formula\rangle\Big)\Big) \Rightarrow\\
&\Big((\neg\langle formula\rangle) \leftrightarrow \Big(a\underline{\langle conectiva\rangle}\ \langle formula\rangle\Big)\Big) \Rightarrow\\
&\Big((\neg\langle formula\rangle) \leftrightarrow \Big(a \wedge \underline{\langle formula\rangle}\Big)\Big) \Rightarrow\\
&\Big((\neg\langle formula\rangle) \leftrightarrow \Big(a \wedge \Big(\neg\underline{\langle formula\rangle}\Big)\Big)\Big) \Rightarrow\\
&\Big(\Big(\neg\underline{\langle formula\rangle}\Big) \leftrightarrow (a \wedge (\neg b))\Big) \Rightarrow\\
&\Big(\Big(\neg\Big(\langle formula\rangle\ \underline{\langle conectiva\rangle}\ \langle formula\rangle\Big)\Big) \leftrightarrow (a \wedge (\neg \underline{b}))\Big) \Rightarrow\\
&\Big(\Big(\neg\Big(\langle formula\rangle \vee \underline{\langle formula\rangle}\Big)\Big) \leftrightarrow (a \wedge (\neg \underline{b}))\Big) \Rightarrow\\
&\Big(\Big(\neg\Big(\underline{\langle formula\rangle} \vee b\Big)\Big) \leftrightarrow (a \wedge (\neg \underline{b}))\Big) \Rightarrow\\
&\Big(\Big(\neg\Big(\Big(\neg\underline{\langle formula\rangle}\Big) \vee b\Big)\Big) \leftrightarrow (a \wedge (\neg \underline{b}))\Big) \Rightarrow\\
&((\neg((\neg a) \vee b)) \leftrightarrow (a \wedge (\neg \underline{b}))) = \alpha
\end{aligned}
$$

deci $\alpha \in FORM$.

O modalitate similară pentru descrierea regulilor de bună formare pentru structurile simbolice din sortul $FORM$ este bazată pe noţiunea de SGF (Secvenţă Generativă Formule).

Definiţia 1.1.1. Secvenţa de asamblaje $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ este SGF, dacă pentru orice i, $1 \le i \le n$, este îndeplinită una dintre condiţiile:

ι) $\alpha_i \in V$,

$\iota\iota$) există $j, 1 \le j < i$, astfel încât, $\alpha_i = (\neg\alpha_j)$,

$\iota\iota\iota$) există j, k, $1 \le j, k < i$ şi există $\rho \in L \setminus \{\neg\}$, astfel încât
$\alpha_i = (\alpha_j \rho \alpha_k)$.

Observaţie Fie α asamblaj. Atunci, există $n \ge 1$ şi
$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ - SGF, astfel încât, $\alpha_n = \alpha$ dacă şi numai dacă $\alpha \in FORM$.

Exemplul 1.1.2. Pentru formula $\alpha = ((\neg((\neg a) \vee b)) \leftrightarrow (a \wedge (\neg b)))$, putem construi următorul SGF:

$$
\begin{gathered}
a, b, (\neg a), (\neg b), (a \wedge (\neg b)), ((\neg a) \vee b), (\neg((\neg a) \vee b)),\\
((\neg((\neg a) \vee b)) \leftrightarrow (a \wedge (\neg b))) = \alpha.
\end{gathered}
$$

Observaţii

1. Dacă $\alpha \in V$, atunci secvenţa α este SGF, deci $V \subset FORM$.

2. Dacă $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ este SGF, atunci pentru orice i, $1 \leq i \leq n$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i$ este SGF. Cu alte cuvinte, toate componentele unui SGF sunt formule.

3. Dacă $\alpha_1, ..., \alpha_n$ şi $\beta_1, ..., \beta_m$ sunt SGF, atunci $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_m$ este de asemenea SGF

4. Parantezarea rezultată pentru structurile simbolice din $FORM \setminus V$ permite identificarea conectivei principale corespunzătoare fiecărei formule care nu este propoziţie elementară. Într-adevăr, orice $\alpha \in FORM \setminus V$ este de unul şi numai de unul din tipurile: $\alpha = (\neg\beta)$ sau $\alpha = (\beta\rho\gamma)$ cu $\rho \in L \setminus \{\neg\}$. Dacă $\alpha = (\neg\beta)$, atunci conectiva principală a formulei α este "$\neg$" şi respectiv dacă $\alpha = (\beta\rho\gamma)$, atunci α are conectiva principală "ρ".

Reprezentarea neparantezată a structurilor simbolice din sortul $FORM$ poate fi obţinută pe baza arborilor de structură.

Definiţia 1.1.2. Arborele T, binar, direcţionat, cu rădăcină având vârfurile etichetate cu simboluri din mulţimea $V \cup L$ este arbore de structură dacă etichetele vârfurilor sunt astfel încât pentru orice vârf $n \in V(T)$,

ι) dacă $od(n) = 0$, atunci $\varphi(n) \in V$

$\iota\iota$) dacă $od(n) = 1$,atunci $\varphi(n) = \neg$

$\iota\iota\iota$) dacă $od(n) = 2$, atunci $\varphi(n) \in L \setminus \{\neg\}$

unde $\varphi(n)$ este eticheta vârfului n.

Spunem că T este arbore de structură pentru $\varphi(r)$ unde r este vârful rădăcină.

Fiecare formulă α poate fi reprezentată printr-un arbore de structură $T(\alpha)$. Construcţia arborelui $T(\alpha)$ poate fi realizată recursiv utilizând observaţia 4 astfel:

ι) dacă $\alpha \in V$, atunci $T(\alpha) : r$ si $\varphi(r) = \alpha$;

$\iota\iota$) dacă $\alpha = (\neg\beta)$, atunci

$$T(\alpha) : \begin{array}{c} r \\ \downarrow \\ T(\beta) \end{array}$$

unde $\varphi(r) = \neg$ şi $T(\beta)$ este arborele de structură al formulei β;

$\iota\iota\iota)$ dacă $\alpha = (\beta\rho\gamma)$ cu $\rho \in L \setminus \{\rceil\}$, atunci

$$T(\alpha): \quad \begin{array}{ccc} & r & \\ & \swarrow \searrow & \\ T(\beta) & & T(\gamma) \end{array},$$

unde $\varphi(r) = \rho$ şi $T(\beta), T(\gamma)$ sunt arborii de structură corespunzători formulelor β respectiv γ.

Exemplul 1.1.3. Fie $\alpha = ((\rceil((\rceil a) \vee b)) \leftrightarrow (a \wedge (\rceil b)))$.

Deoarece $\alpha = (\beta\rho\gamma)$ cu $\rho = \leftrightarrow, \beta = (\rceil((\rceil a) \vee b))$ şi $\gamma = (a \wedge (\rceil b))$ obţinem

$$T(\alpha): \quad \begin{array}{ccc} & r & \\ & \swarrow \searrow & \\ T(\beta) & & T(\gamma) \end{array}$$

unde $\varphi(r) = \leftrightarrow$

Deoarece $\beta = (\rceil \beta_1)$, unde $\beta_1 = ((\rceil a) \vee b)$,obţinem

$$T(\beta): \quad \begin{array}{c} n_1 \\ \downarrow \\ T(\beta_1) \end{array}, \quad \varphi(n_1) = \rceil.$$

Repetând aceleaşi argumente, obţinem,

$$T(\beta_1): \quad \begin{array}{ccc} & n_2 & \\ & \swarrow \searrow & \\ T(\beta_2) & & T(\beta_3) \end{array}, \varphi(n_2) = \vee, \beta_2 = (\rceil a), \beta_3 = b$$

$$T(\beta_2): \quad \begin{array}{c} n_3 \\ \downarrow \\ T(\beta_4) \end{array}, \varphi(n_3) = \rceil, T(\beta_4): n_4, \varphi(n_4) = a,$$

$$T(\beta_3): n_5, \varphi(n_5) = b,$$

$$T(\gamma): \quad \begin{array}{ccc} & n_6 & \\ & \swarrow \searrow & \\ T(\gamma_1) & & T(\gamma_2) \end{array}, \varphi(n_6) = \wedge, \gamma_1 = a, \gamma_2 = (\rceil b)$$

$$T(\gamma_1): n_7, \varphi(n_7) = a,$$

$$T(\gamma_2): \quad \begin{array}{c} n_8 \\ \downarrow \\ T(\gamma_3) \end{array}, \varphi(n_8) = \rceil, T(\gamma_3): n_9, \varphi(n_9) = b$$

Obţinem în final

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & r\left(\leftrightarrow\right) & & \\
 & & & \swarrow\searrow & & \\
 & & n_1\left(\rceil\right) & & n_6\left(\wedge\right) & \\
 & & \downarrow & & \swarrow\searrow & \\
T\left(\alpha\right): & & n_2\left(\vee\right) & n_7\left(a\right) & & n_8\left(\rceil\right) \\
 & & \swarrow\searrow & & & \downarrow \\
 & n_3\left(\rceil\right) & & n_5\left(b\right) & & n_9\left(b\right) \\
 & \downarrow & & & & \\
 & n_4\left(a\right) & & & &
\end{array}
$$

Pentru o structură simbolică α din sortul FORM, reprezentarea prin arborele de structură $T\left(\alpha\right)$ este unic determinată şi permite obţinerea unor reprezentări neambigui şi neparantezate pentru formulele limbajului calculului cu propoziţii şi anume reprezentarea $poloneză\ prefixată$ şi reprezentarea $poloneză\ prefixată$ introduse de către logicianul de origine poloneză J.Lukasiewicz. Reprezentarea conform regulilor de bună formare definite prin intermediul SGF este numită reprezentare $infixată$.

Definiţia 1.1.3. Fie gramatica independentă de context

$G_{prefix} = (N, T, \Re)$, unde

$N = \{\langle formula\rangle, \langle propozitie\rangle, \langle conectiva\rangle\}$

este mulţimea neterminalelor, $T = V \cup L$ este mulţimea terminalelor şi $\Re$ este mulţimea regulilor de rescriere:

$$
\Re = \left\{
\begin{array}{l}
\langle formula\rangle \rightarrow \langle propozitie\rangle \mid \rceil \langle formula\rangle \mid \\
\qquad\qquad\qquad \langle conectiva\rangle \langle formula\rangle \langle formula\rangle, \\
\langle propozitie\rangle \rightarrow a \mid b \mid ..., \\
\langle conectiva\rangle \rightarrow \wedge \mid \vee \mid\rightarrow\mid\leftrightarrow
\end{array}
\right\}
$$

Mulţimea reprezentărilor în scrierea $poloneză\ prefixată$ a formulelor este limbajul generat de gramatica G_{prefix} pentru simbolul de start $\langle formula\rangle$; $FORM_{prefix} = L\left(\langle formula\rangle\right)$.

Exemplul 1.1.4. Fie în G_{prefix} următoarea schemă de derivare, simbolul neterminal căruia este aplicată regula de rescriere fiind subliniat:

$$\langle formula\rangle \Rightarrow \underline{\langle conectiva\rangle} \langle formula\rangle \langle formula\rangle \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\ \leftrightarrow \underline{\langle formula\rangle}\,\langle formula\rangle \Rightarrow\leftrightarrow\ \rceil\,\langle formula\rangle\,\underline{\langle formula\rangle}\\
&\Rightarrow\ \leftrightarrow \rceil\,\langle formula\rangle\,\langle conectiva\rangle\,\underline{\langle formula\rangle}\,\langle formula\rangle\\
&\Rightarrow\ \leftrightarrow \rceil\,\langle formula\rangle\,\underline{\langle conectiva\rangle} a\,\langle formula\rangle\\
&\Rightarrow\ \leftrightarrow \rceil\,\langle formula\rangle \wedge a\underline{\langle formula\rangle}\\
&\Rightarrow\ \leftrightarrow \rceil\,\langle formula\rangle \wedge a\rceil\underline{\langle formula\rangle} \Rightarrow\leftrightarrow\ \rceil\underline{\langle formula\rangle} \wedge a\rceil b\\
&\Rightarrow\ \leftrightarrow \rceil\underline{\langle conectiva\rangle}\,\langle formula\rangle\,\langle formula\rangle \wedge a\rceil b\\
&\Rightarrow\ \leftrightarrow \rceil \vee \langle formula\rangle\,\underline{\langle formula\rangle} \wedge a\rceil b\\
&\Rightarrow\ \leftrightarrow \rceil \vee \underline{\langle formula\rangle} b \wedge a\rceil b \Rightarrow\leftrightarrow\ \rceil \vee \rceil\underline{\langle formula\rangle} b \wedge a\rceil b\\
&\Rightarrow\ \leftrightarrow \rceil \vee \rceil ab \wedge a\rceil b = \alpha_{prefix}\ ,
\end{aligned}
$$

deci $\alpha_{prefix} \in FORM_{prefix}$.

Structura simbolică α_{prefix} reprezentarea *poloneză prefixată* a formulei $\alpha = ((\rceil\,((\rceil a) \vee b)) \leftrightarrow (a \wedge (\rceil b)))$.

Definiţia 1.1.4 Fie gramatica independentă de context

$G_{postfix} = (N, T, \Re)$, unde

$N = \{\langle formula\rangle\,, \langle propozitie\rangle\,, \langle conectiva\rangle\}$

este mulţimea neterminalelor, $T = V \cup L$ este mulţimea terminalelor şi $\Re$ este mulţimea regulilor de rescriere:

$$
\Re = \left\{ \begin{array}{l}
\langle formula\rangle \rightarrow \langle propozitie\rangle \mid \langle formula\rangle\,\rceil \mid \\
\qquad\qquad\qquad \langle formula\rangle\,\langle formula\rangle\,\langle conectiva\rangle\,, \\
\langle propozitie\rangle \rightarrow a \mid b \mid ..., \\
\langle conectiva\rangle \rightarrow \wedge \mid \vee \mid \rightarrow \mid \leftrightarrow
\end{array} \right\}
$$

Mulţimea reprezentărilor în scrierea *poloneză postfixată* a formulelor este limbajul generat de gramatica $G_{postfix}$ pentru simbolul de start $\langle formula\rangle$; $FORM_{postfix} = L\left(\langle formula\rangle\right)$.

Exemplul 1.1.5. Fie în $G_{postfix}$ următoarea schemă de derivare, simbolul neterminal căruia este aplicată regula de rescriere fiind subliniat:

$$\langle formula\rangle \Rightarrow \langle formula\rangle\,\langle formula\rangle\,\underline{\langle conectiva\rangle}$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\ \underline{\langle formula\rangle}\,\langle formula\rangle \leftrightarrow\Rightarrow \langle formula\rangle\,\rceil\underline{\langle formula\rangle} \leftrightarrow\\
&\Rightarrow\ \langle formula\rangle\,\rceil\underline{\langle formula\rangle}\,\langle formula\rangle\,\langle conectiva\rangle \leftrightarrow\\
&\Rightarrow\ \langle formula\rangle\,\rceil a\,\langle formula\rangle\,\underline{\langle conectiva\rangle} \leftrightarrow\\
&\Rightarrow\ \langle formula\rangle\,\rceil a\underline{\langle formula\rangle} \wedge \leftrightarrow\\
&\Rightarrow\ \langle formula\rangle\,\rceil a\underline{\langle formula\rangle}\rceil\wedge \leftrightarrow\Rightarrow \underline{\langle formula\rangle}\rceil ab\rceil\wedge \leftrightarrow\\
&\Rightarrow\ \langle formula\rangle\,\langle formula\rangle\,\underline{\langle conectiva\rangle}\rceil ab\rceil\wedge \leftrightarrow\\
&\Rightarrow\ \langle formula\rangle\,\underline{\langle formula\rangle} \vee \rceil ab\rceil\wedge \leftrightarrow\Rightarrow \underline{\langle formula\rangle} b \vee \rceil ab\rceil\wedge \leftrightarrow\\
&\Rightarrow\ \underline{\langle formula\rangle}\rceil b \vee \rceil ab\rceil\wedge \leftrightarrow\Rightarrow a\rceil b \vee \rceil ab\rceil\wedge \leftrightarrow = \alpha_{postfix},
\end{aligned}
$$

deci $\alpha_{postfix} \in FORM_{postfix}$.

Structura simbolică $\alpha_{postfix}$ reprezentarea *poloneză postfixată* a formulei $\alpha = ((\neg((\neg a) \vee b)) \leftrightarrow (a \wedge (\neg b)))$.

Reprezentarea *poloneză prefixată* a unei formule $\alpha \in FORM$ este secvenţa de etichete corespunzătoare vârfurilor rezultate prin traversarea r-s-d (rădăcină-subarbore stâng- subarbore drept), respectiv reprezentarea *poloneză postfixata* rezultă prin traversarea s-d-r (subarbore stâng- subarbore drept- rădăcină) a arborelui de structură $T(\alpha)$.

Exemplul 1.1.6. Prin traversarea r-s-d a arborelui de structură al formulei $\alpha = ((\neg((\neg a) \vee b)) \leftrightarrow (a \wedge (\neg b)))$. rezultă secvenţa de vârfuri : $r, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9$, secvenţa etichetelor corespunzătoare lor fiind $\leftrightarrow \neg\vee\neg ab\wedge a\neg b\alpha$ deci reprezentarea α_{prefix}. Prin traversarea s-d-r a arborelui de structură rezultă secvenţa de vârfuri $n_4, n_3, n_5, n_2, n_1, n_7, n_9, n_8, n_6, r$, secvenţa etichetelor corespunzătoare lor fiind $a\neg b \vee \neg ab\neg\wedge \leftrightarrow$, deci reprezentarea $\alpha_{postfix}$.

Complexitatea structurală a formulelor este exprimată prin intermediul valorilor funcţiei adâncime.

Definiţia 1.1.4. Funcţia adâncime $\hbar$: FORM$\longrightarrow N$ este definită prin:

$$\begin{aligned} \alpha &\in FORM, \\ \hbar(\alpha) &= \begin{cases} 0, & \text{dacă } \alpha \in V \\ 1 + \hbar(\beta), & \text{dacă } \alpha = (\neg\beta) \\ 1 + \max\{\hbar(\beta), \hbar(\gamma)\}, & \text{dacă } \alpha = (\beta\rho\gamma), \rho \in L \setminus \{\neg\} \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplul 1.1.7. Conform *Definiţiei* 1.1.4., pentru $\alpha = ((\neg((\neg a) \vee b)) \leftrightarrow (a \wedge (\neg b)))$, obţinem

$$\hbar(\alpha) = 1 + \max\{\hbar(\beta), \hbar(\gamma)\},$$

unde $\beta = (\neg((\neg a) \vee b))$, $\gamma = (a \wedge (\neg b))$,

$$\begin{aligned} \hbar(\beta) &= 1 + \hbar(((\neg a) \vee b)) = 2 + \max\{\hbar((\neg a)), \hbar(b)\} \\ &= 2 + \max\{1 + \hbar(a), 0\} = 2 + \max\{1, 0\} = 3 \\ \hbar(\gamma) &= 1 + \max\{\hbar(a), \hbar((\neg b))\} = 1 + \max\{0, 1 + \hbar(b)\} = 2. \end{aligned}$$

Rezultă $\hbar(\alpha) = 4$.

Observaţie Pentru orice $\alpha \in FORM$,valoarea $\hbar(\alpha)$ exprimă numărul conectivelor logice (simbolurile din mulţimea L) care apar în structura simbolică α.De asemenea, $\hbar(\alpha)$ este înălţimea arborelui de structură corespunzător formulei α.

3 Abordarea axiomatică în formalizarea raţionamentelor

Modelarea raţionamentelor în contextul limbajului calculului cu propoziţii presupune alegerea unui sistem de axiome şi definirea unui sistem de demonstraţie în termenii unei mulţimi de reguli de inferenţă.

Fie a, b, c propoziţii elementare. Mulţimea axiomelor teoriei, notată $AXIOM$, este

$$AXIOM = \{\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, ..., \overline{\alpha_9}\},$$

unde

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha_1} &= (a \rightarrow (b \rightarrow a)) \\
\overline{\alpha_2} &= ((a \rightarrow (a \rightarrow b)) \rightarrow (a \rightarrow b)) \\
\overline{\alpha_3} &= ((a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c))) \\
\overline{\alpha_4} &= ((a \leftrightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b)) \\
\overline{\alpha_5} &= ((a \leftrightarrow b) \rightarrow (b \rightarrow a)) \\
\overline{\alpha_6} &= ((a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow a) \rightarrow (a \leftrightarrow b))) \\
\overline{\alpha_7} &= (((\urcorner a) \rightarrow (\urcorner b)) \rightarrow (b \rightarrow a)) \\
\overline{\alpha_8} &= ((a \vee b) \leftrightarrow ((\urcorner a) \rightarrow b)) \\
\overline{\alpha_9} &= ((a \wedge b) \leftrightarrow (\urcorner((\urcorner a) \vee (\urcorner b))))
\end{aligned}$$

Evident, $AXIOM \subset FORM$.

Definiţia 1.2.1. Se numeşte substituţie o mulţime finită de perechi $\sigma = \{\gamma_1 \mid a_1, ..., \gamma_n \mid a_n\}$, unde $\gamma_1, ..., \gamma_n \in FORM$, $a_1, ..., a_n \in V$ astfel încât pentru orice $i \neq j$, $a_i \neq a_j$ şi $\gamma_j \neq a_j$. Formulele $\gamma_1, ..., \gamma_n$ se numesc formule substituente, respectiv $a_1, ..., a_n$ se numesc propoziţii substituite. Notăm cu ε substituţia vidă, $\varepsilon = \emptyset$. Notăm cu $SUBST$ mulţimea substituţiilor.

Definiţia 1.2.2. Fie $\alpha \in FORM$, $\sigma \in SUBST$. Se numeşte rezultat al aplicării substituţiei σ formulei α, structura simbolică $\alpha\sigma$ calculată astfel:

$\alpha\sigma =$
if $\sigma = \varepsilon$ then α
 else if $\sigma = \{\gamma_1 \mid a_1, ..., \gamma_n \mid a_n\}$ then
  if $\alpha \in V \setminus \{a_1, ..., a_n\}$ then α
   else if $\alpha = a_i$ then γ_i
    else if $\alpha = (\urcorner\beta)$ then $(\urcorner\beta\sigma)$
     else if $\alpha = (\beta\rho\delta)$ pentru anume $\rho \in L \setminus \{\urcorner\}$
      then $(\beta\sigma\rho\delta\sigma)$.

Observaţie Pentru orice $\alpha \in FORM$, $\sigma \in SUBST$, $\alpha\sigma \in FORM$.

Dacă $\alpha \in AXIOM$, atunci $\alpha\sigma$ se numeşte exemplu de axiomă (instanţiere a axiomei α).

Exemplul 1.2.1. Fie

$$\begin{aligned} \alpha &= ((a \wedge b) \rightarrow c) \text{ şi} \\ \sigma &= \{((\neg a) \vee p) \mid a, c \mid b, (a \vee x) \mid p, b \mid q\}. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \alpha\sigma &= ((a \wedge b)\,\sigma \rightarrow c\sigma) = ((a\sigma \wedge b\sigma) \rightarrow c\sigma) \\ &= ((((\neg a) \vee p) \wedge c) \rightarrow c), \end{aligned}$$

deoarece $a\sigma = ((\neg a) \vee p)$, $b\sigma = c$, $c\sigma = c$.

Definiţia 1.2.3. Numim regulă de inferenţă orice relaţie

$\Re \subset FORM^p \times FORM^q$,

unde p, q sunt numere naturale; perechea (p, q) defineşte tipul relaţiei.

Dacă $(\{\alpha_1, ..., \alpha_p\}, \{\beta_1, ..., \beta_q\}) \in \Re$, spunem că $\{\beta_1, ..., \beta_q\}$ se deduce din $\{\alpha_1, ..., \alpha_p\}$ pe baza regulei de inferenţă $\Re$. Pentru simplificarea notaţiei, convenim să reprezentăm

$(\{\alpha_1, ..., \alpha_p\}, \{\beta_1, ..., \beta_q\}) \in \Re$ prin $\frac{\alpha_1, ..., \alpha_p}{\beta_1, ..., \beta_q}\Re$.

Mulţimile de formule $\{\alpha_1, ..., \alpha_p\}$ şi $\{\beta_1, ..., \beta_q\}$ sunt referite ca *premisă* şi respectiv *concluzie* ale regulei $\Re$.

Modelarea proceselor de raţionament în contextul limbajului calculului cu propoziţii este realizată pe baza a două reguli de inferenţă şi anume, regula substituţiei SUB de tip $(1, 1)$ şi regula modus ponens MP de tip $(2, 1)$, definite prin

$$\begin{aligned} SUB &= \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in FORM, \exists\sigma \in SUBST, \beta = \alpha\sigma\} \\ MP &= \{(\{\alpha, (\alpha \rightarrow \beta)\}, \beta) \mid \alpha, \beta \in FORM\} \end{aligned}$$

Dacă $\alpha \in AXIOM$ şi $\sigma \in SUBST$, convenim să numim $\alpha\sigma$ exemplu de axiomă α sau instanţiere a axiomei α.

Definiţia 1.2.4. Secvenţa de formule $\alpha_1, ..., \alpha_n$ este o demonstraţie formală dacă pentru orice i, $1 \leq i \leq n$ este îndeplinită una din condiţiile:

ι) α_i este instanţiere a unei axiome;

$\iota\iota$) $\exists j, \exists k$, $1 \leq j, k < i$, astfel încât $(\{\alpha_j, \alpha_k\}, \alpha_i) \in MP$.

Definiţia 1.2.5. Spunem că $\alpha \in FORM$ este formulă demonstrabilă (teoremă) şi notăm $\vdash \alpha$, dacă există $n \geq 1$ si $\alpha_1, ..., \alpha_n$ demonstraţie formală astfel încât $\alpha_n = \alpha$. Notăm cu T_h mulţimea teoremelor;

$$T_h = \{\alpha \mid \alpha \in FORM, \vdash \alpha\}.$$

Observaţie Dacă $\alpha_1, ..., \alpha_n$ şi $\beta_1, ..., \beta_m$ sunt demonstraţii formale, atunci $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_m$ este o demonstraţie formală. În consecinţă, putem include direct teoreme ca etape într-o demonstraţie formală.

Exemple

1.2.2. Pentru orice $\alpha \in FORM$, $\vdash (\alpha \rightarrow \alpha)$.

Intr-adevăr, următoarea secvenţă de formule este o demonstraţie formală pentru $(\alpha \rightarrow \alpha)$,

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) = \overline{\alpha_1}\{\alpha \mid a,\, \alpha \mid b\} \\
\beta_2 &= ((\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) = \overline{\alpha_2}\{\alpha \mid a,\, \alpha \mid b\} \\
\beta_3 &= (\alpha \rightarrow \alpha), \frac{\beta_1, \beta_2}{\beta_3} MP
\end{aligned}$$

1.2.3. Pentru orice $\alpha \in FORM$, $\vdash (\alpha \vee (\neg\alpha))$.

Considerăm demonstraţia formală

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= ((\alpha \vee (\neg\alpha)) \leftrightarrow ((\neg\alpha) \rightarrow (\neg\alpha))) = \overline{\alpha_8}\{\alpha \mid a,\ (\neg\alpha) \mid b\} \\
\beta_2 &= \left(\begin{array}{l} ((\alpha \vee (\neg\alpha)) \leftrightarrow ((\neg\alpha) \rightarrow (\neg\alpha))) \rightarrow \\ \qquad (((\neg\alpha) \rightarrow (\neg\alpha)) \rightarrow (\alpha \vee (\neg\alpha))) \end{array} \right) \\
&= \overline{\alpha_5}\{(\alpha \vee (\neg\alpha)) \mid a,\ ((\neg\alpha) \rightarrow (\neg\alpha)) \mid b\} \\
\beta_3 &= (((\neg\alpha) \rightarrow (\neg\alpha)) \rightarrow (\alpha \vee (\neg\alpha))) \qquad , \frac{\beta_1, \beta_2}{\beta_3} MP \\
\beta_4 &= ((\neg\alpha) \rightarrow (\neg\alpha)) \qquad , \vdash \beta_4 \\
\beta_5 &= (\alpha \vee (\neg\alpha)) \qquad , \frac{\beta_4, \beta_3}{\beta_5} MP
\end{aligned}$$

Observaţie Mulţimea teoremelor este nevidă.

Definiţia 1.2.6. Formula α este logic falsă dacă $(\neg\alpha) \in T_h$.

4 Deductibilitatea sub o familie de ipoteze

Frecvent, în cazul raţionamentelor, sunt implicate cunoştinţe suplimentare reprezentate prin formule care nu sunt în mod necesar demonstrabile. Formulele reprezentând cunoştinţe suplimentare sunt referite ca ipoteze, modelarea raţionamentelor în care ipotezele sunt acceptate ca etape ale procesului deductiv se realizează pe baza conceptelor de deductibilitate simplă şi respectiv globală sub o familie de ipoteze.

Definiţia 1.3.1. Fie $H \subset FORM$. Secvenţa de formule $\alpha_1, ..., \alpha_n$ este o H-secvenţă deductivă dacă pentru orice i, $1 \leq i \leq n$ este indeplinită una din condiţiile:

ι) $\alpha_i \in H \cup T_h$

$\iota\iota$) $\exists j, \exists k, 1 \leq j, k < i$ astfel încât $\frac{\alpha_j, \alpha_k}{\alpha_i} MP$.

Spunem că formula α este deductibilă sub ipotezele H, notat $H \vdash \alpha$, dacă există $n \geq 1$ şi există o H-secvenţă deductivă $\alpha_1, ..., \alpha_n$, astfel încât $\alpha_n = \alpha$.

Definiţia 1.3.2. Mulţimea $T(H) = \{\alpha \mid \alpha \in FORM, H \vdash \alpha\}$ este mulţimea de deductibilitate corespunzătoare mulţimii de ipoteze H.

Definiţia 1.3.3. Mulţimea de formule H este compatibilă dacă $T(H) \neq FORM$. Dacă $T(H) = FORM$, atunci H este incompatibilă.

Observaţii

1. Pentru orice $H \subset FORM, H \cup T_h \subset T(H)$
2. Dacă $H_1, H_2 \subset FORM$ si $H_1 \subset H_2$, atunci $T(H_1) \subset T(H_2)$
3. $T(\emptyset) = T(T_h) = T_h$
4. Pentru orice $H \subset FORM, T(T(H)) = T(H)$
5. Dacă $\alpha_1, ..., \alpha_n$ şi $\beta_1, ..., \beta_m$ sunt $H-$secvenţe deductive, atunci $\alpha_1, ..., \alpha_n$, $\beta_1, ..., \beta_m$ este de asemenea o $H-$secvenţă deductivă. În consecinţă, pentru simplificare putem conveni să includem direct formule din $T(H)$ ca etape într-o $H-$secvenţă deductivă.

Din observaţiile precedente, notând cu $\wp(FORM)$ mulţimea părţilor mulţimii $FORM$, rezultă că $\Im : \wp(FORM) \rightarrow \wp(FORM)$ este un operator de închidere şi cum pentru orice $H \subset FORM$, evident

$T_h \subset T(H)$, rezultă că T_h este cel mai mic punct fix al operatorului $\Im$ (în raport cu relaţia de incluziune).

Lema 1.3.1. Fie $H \subset FORM$. Pentru orice $\alpha \in FORM$, $\alpha \in T(H)$ dacă şi numai dacă există $H_0(\alpha) \subset H$, $H_0(\alpha)$ mulţime finită, astfel încât $\alpha \in T(H_0(\alpha))$.

Demonstraţie Evident, dacă $H_0(\alpha) \subset H$, $H_0(\alpha)$ mulţime finită, astfel încât $\alpha \in T(H_0(\alpha))$, cum $T(H_0(\alpha)) \subset T(H)$, obţinem $\alpha \in T(H)$.

Dacă $\alpha \in T(H)$, atunci există o $H-$secvenţă deductivă pentru α,fie aceasta $\alpha_1, ..., \alpha_n = \alpha$. Evident $\alpha_1 \in T_h \cup H$, deci

$\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \cap (T_h \cup H) \neq \emptyset$.

Notând $H_0(\alpha) = H \cap \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, rezultă imediat că $\alpha_1, ..., \alpha_n$ este o $H_0(\alpha)-$secvenţă deductivă deci $\alpha \in T(H_0(\alpha))$.

Observaţie Concluzia stabilită de lema 1.3.1 evidenţiază caracterul finit al proprietăţii de a fi deductibilă sub o familie de ipoteze.

Lema 1.3.2. Fie $H = \{\alpha\}$. Atunci

$$T(H) = \{\beta \mid \beta \in FORM, \vdash (\alpha \to \beta)\}.$$

Demonstraţie Pentru $\beta \in FORM$, notăm $\gamma = (\alpha \to \beta)$. Evident, dacă

$\beta = \alpha$, atunci secvenţa γ, α, β este o $H-$secvenţă deductivă, deci $\beta \in T(H)$.

Demonstrăm prin inducţie asupra lungimii H-secvenţei deductive că dacă $\beta \in T(H)$, atunci $\vdash \gamma$. Notăm cu $l(\beta)$ lungimea minimă a unei H-secvenţe deductive pentru β.

Dacă $l(\beta) = 1$, atunci β este H-secvenţă deductivă, deci $\beta = \alpha$ sau $\vdash \beta$.

Dacă $\beta = \alpha$, rezultă evident $\vdash (\alpha \to \beta)$ (exemplul 1).

Dacă $\vdash \beta$, atunci secvenţa

$$\beta, (\beta \to (\alpha \to \beta)) = \overline{\alpha_1}\{\beta \mid a, \alpha \mid b\}, (\alpha \to \beta)$$

este demonstraţie formală, deci $\vdash (\alpha \to \beta)$.

Presupunem că pentru orice $\beta \in FORM$, astfel încât $l(\beta) \leq n$, rezultă $\vdash (\alpha \to \beta)$. Fie $\beta \in FORM$ astfel încât, $l(\beta) \leq n+1$ şi fie $\beta_1, ..., \beta_n, \beta_{n+1} = \beta$ o H-secvenţă deductivă.

Deoarece pentru orice $p \leq n$, $\beta_1, ..., \beta_p$ este H-secvenţă deductivă, rezultă $\vdash (\alpha \to \beta_p)$, $1 \leq p \leq n$.

Dacă $\beta_{n+1} \in T_h \cup H$, evident rezultă $\vdash (\alpha \to \beta_{n+1})$, adică $\vdash (\alpha \to \beta)$.

Rămâne de analizat cazul în care β_{n+1} rezultă prin regula *modus ponens* aplicată unei perechi de formule de ranguri mai mici sau cel mult egale cu n. Fie i, j, astfel încât $1 \leq i, j \leq n$ şi $\beta_{j=}(\beta_i \to \beta_{n+1})$. Aplicând ipoteza inductivă, rezultă $\vdash (\alpha \to \beta_i)$ şi $\vdash (\alpha \to (\beta_i \to \beta_{n+1}))$.

Rezultă următoarea demonstraţie formală:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (\alpha \to \beta_i)\\
\gamma_2 &= (\alpha \to (\beta_i \to \beta_{n+1}))\\
\gamma_3 &= ((\alpha \to \beta_i) \to ((\beta_i \to \beta_{n+1}) \to (\alpha \to \beta_{n+1})))\\
&= \overline{\alpha_3}\,\{\alpha \mid a,\ \beta_i \mid b,\ \beta_{n+1} \mid c\}\\
\gamma_4 &= ((\beta_i \to \beta_{n+1}) \to (\alpha \to \beta_{n+1}))\,,\ \frac{\gamma_1,\gamma_3}{\gamma_4}MP\\
\gamma_5 &= \left(\begin{array}{l}(\alpha \to (\beta_i \to \beta_{n+1})) \to\\ (((\beta_i \to \beta_{n+1}) \to (\alpha \to \beta_{n+1})) \to (\alpha \to (\alpha \to \beta_{n+1})))\end{array}\right)\\
&= \overline{\alpha_3}\,\{\alpha \mid a,\ (\beta_i \to \beta_{n+1}) \mid b,\ (\alpha \to \beta_{n+1}) \mid c\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_6 &= (((\beta_i \to \beta_{n+1}) \to (\alpha \to \beta_{n+1})) \to (\alpha \to (\alpha \to \beta_{n+1})))\,,\\
&\qquad \frac{\gamma_2,\gamma_5}{\gamma_6}MP\\
\gamma_7 &= (\alpha \to (\alpha \to \beta_{n+1}))\,,\ \frac{\gamma_4,\gamma_6}{\gamma_7}MP\\
\gamma_8 &= ((\alpha \to (\alpha \to \beta_{n+1})) \to (\alpha \to \beta_{n+1})) = \overline{\alpha_2}\,\{\alpha \mid a,\ \beta_{n+1} \mid b\}\\
\gamma_9 &= (\alpha \to \beta_{n+1})\,,\ \frac{\gamma_7,\gamma_8}{\gamma_9}MP,
\end{aligned}$$

deci $\vdash (\alpha \to \beta_{n+1})$.

Unul dintre cele mai importante rezultate în deductibilitatea sub o familie de ipoteze este *teorema deducţiei* (Herbrand).

Teorema 1.3.1. (*Teorema deducţiei*)

Fie $H \subset FORM$, $\alpha, \beta \in FORM$.

Atunci, $H \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, dacă şi numai dacă $H \vdash (\alpha \to \beta)$.

Demonstraţie Presupunem că $H \vdash (\alpha \to \beta)$ deci $H \cup \{\alpha\} \vdash (\alpha \to \beta)$. Evident $\alpha, (\alpha \to \beta), \beta$ este o $H \cup \{\alpha\} -$ secvenţă deductivă, deci

$H \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

Demonstrăm prin inducţie asupra lungimii $H \cup \{\alpha\} -$ secvenţei deductive că, dacă β admite o $H \cup \{\alpha\} -$ secvenţă deductivă, atunci $H \vdash (\alpha \to \beta)$.

Dacă β admite o $H \cup \{\alpha\} -$ secvenţă deductivă de lungime $l(\beta) = 1$, atunci $\beta \in T_h \cup H \cup \{\alpha\}$.

1. Dacă $\beta = \alpha$, cum $\vdash (\alpha \to \alpha)$, rezultă $H \vdash (\alpha \to \alpha)$.

2. Dacă $\beta \in T_h$, atunci $\beta, (\beta \to (\alpha \to \beta))$, $(\alpha \to \beta)$ este o demonstraţie formală, deci $\vdash (\alpha \to \beta)$ ceea ce implică în particular

   $H \vdash (\alpha \to \beta)$.

3. Dacă $\beta \in H$, atunci $\beta, (\beta \to (\alpha \to \beta))$, $(\alpha \to \beta)$ este o H-secvenţă deductivă, deci $H \vdash (\alpha \to \beta)$.

Presupunem că proprietatea este adevărată pentru toate formulele ce admit $H \cup \{\alpha\}$ − secvenţe deductive de lungimi cel mult egale cu n.

Fie $\beta_1, ..., \beta_n, \beta_{n+1} = \beta$ o $H \cup \{\alpha\}$ − secvenţă deductivă. Evident, pe baza ipotezei inductive rezultă $H \vdash (\alpha \to \beta_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Dacă $\beta_{n+1} \in T_h \cup H \cup \{\alpha\}$, atunci pe baza argumentului precedent rezultă $H \vdash (\alpha \to \beta_{n+1})$.

Dacă β_{n+1} rezultă prin aplicarea regulei *modus ponens* formulelor β_i, β_j, cu $1 \leq i, j \leq n$, atunci $\beta_j = (\beta_i \to \beta_{n+1})$. In acest caz, se observă cu uşurinţă că secvenţa $\gamma_1 - \gamma_9$ din demonstraţia lemei precedente este o $H-$ secvenţă deductivă, deci $H \vdash (\alpha \to \beta_{n+1})$.

În cazul particular al mulţimilor finite de ipoteze, poate fi stabilit următorul corolar al teoremei deducţiei.

Corolar 1.3.1. Fie $H = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ o mulţime finită de ipoteze. Pentru orice $\beta \in FORM$, $H \vdash \beta$, dacă şi numai dacă

$$\vdash (\alpha_1 \to (\alpha_2 \to (... \to (\alpha_n \to \beta)))).$$

Demonstraţie Fie $\gamma_n = (\alpha_n \to \beta)$, $\gamma_k = (\alpha_k \to \gamma_{k+1})$ pentru
$k = n - 1, ..., 1$, deci $\gamma_1 = (\alpha_1 \to (\alpha_2 \to (... \to (\alpha_n \to \beta))))$.
Presupunem că $H \vdash \beta$, deci $\{\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}\} \cup \{\alpha_n\} \vdash \beta$.
Utilizând teorema deducţiei, obţinem

$$\{\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}\} \vdash (\alpha_n \to \beta) = \gamma_n.$$

Iterând acelaşi argument, obţinem
$\{\alpha_1, ..., \alpha_k\} \vdash (\alpha_{k+1} \to \gamma_{k+2}) = \gamma_{k+1}$; $k = n - 1, ..., 1$.

Pentru $k = 1$ rezultă $\{\alpha_1\} \vdash (\alpha_2 \to \gamma_3) = \gamma_2$, deci pe baza concluziei stabilite de *Lema* 1.3.2 obţinem $\vdash (\alpha_1 \to \gamma_2) = \gamma_1$.

Reciproc, dacă $\vdash \gamma_1 = (\alpha_1 \to \gamma_2)$, atunci din *Lema* 1.3.2. rezultă
$\{\alpha_1\} \vdash \gamma_2 = (\alpha_2 \to \gamma_3)$.
Din teorema deducţiei rezultă $\{\alpha_1, \alpha_2\} \vdash \gamma_3 = (\alpha_3 \to \gamma_4)$.
Iterând acelaşi argument, obţinem în continuare
$\{\alpha_1, ..., \alpha_k\} \vdash \gamma_{k+1} = (\alpha_{k+1} \to \gamma_{k+2})$, $k = 1, ..., n - 1$.

Pentru $k = n - 1$ rezultă $\{\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}\} \vdash \gamma_n = (\alpha_n \to \beta)$, din care pe baza teoremei deducţiei obţinem în final $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \beta$.

Corolarul teoremei deducţiei oferă o modalitate de a stabili că anumite formule sunt demonstrabile, şi anume permite reducerea problemei determinării unei demonstraţii formale la determinarea unei secvenţe deductive. In particular, deoarece o regulă de inferentă $\Re$ de tipul $(p, 1)$, $p \geq 1$

exprimă în fapt ideea că formula din partea de concluzie a regulei este "direct" deductibilă sub mulţimea de ipoteze reprezentată de mulţimea premisă, rezultă că $((\alpha_1, ..., \alpha_p), \beta) \in \Re$ poate fi reprezentată $\{\alpha_1, ..., \alpha_p\} \vdash \beta$, sau echivalent, pe baza corolarului teoremei deducţiei, $\vdash (\alpha_1 \to (\alpha_2 \to (... \to (\alpha_n \to \beta))))$.

În particular, deoarece pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$, avem $(\{\alpha, (\alpha \to \beta)\}, \beta) \in MP$, rezultă $\{\alpha, (\alpha \to \beta)\} \vdash \beta$ deci, pe baza corolarului teoremei deducţiei obţinem următoarele concluzii:

$$\begin{array}{l} \vdash (\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)), \\ \vdash ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)), \\ \{\alpha\} \vdash ((\alpha \to \beta) \to \beta), \\ \{(\alpha \to \beta)\} \vdash (\alpha \to \beta). \end{array}$$

In continuare vor fi stabilite câteva reguli (scheme) de inferenţă auxiliare a căror utilizare facilitează construirea demonstraţiilor formale şi a secvenţelor deductive.

Corolar 1.3.2. Dacă $\alpha, \beta \in FORM$, atunci $\{\alpha\} \vdash \beta$, dacă şi numai dacă $(\alpha \to \beta) \in T_h$.

Demonstraţie Evident $T_h = T(\emptyset)$, deci pentru $H = \emptyset$, din teorema deducţiei obţinem, $\emptyset \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ dacă şi numai dacă $\emptyset \vdash (\alpha \to \beta)$, adică $\{\alpha\} \vdash \beta$ dacă şi numai dacă $(\alpha \to \beta) \in T_h$.

5 Aplicaţii

5.1 1.4.1. Schema silogismului (RS).

Pentru orice
$\alpha, \beta, \gamma \in FORM$, $\{(\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma)\} \vdash (\alpha \to \gamma)$.
Deoarece

$$\vdash \overline{\alpha_3}\{\alpha \mid a,\ \beta \mid b,\ \gamma \mid c\} = ((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\beta \to \gamma)))$$

utilizând corolarul teoremei deducţiei, obţinem

$$\{(\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma)\} \vdash (\alpha \to \gamma).$$

Schema (regula) silogismului este reprezentată convenţional

$$\frac{(\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma)}{(\alpha \to \gamma)} RS.$$

5.2 1.4.2. Schema "trecerii" de la implicaţie la echivalenţă (IE).

Pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in FORM$,

$\{(\alpha \to \beta), (\beta \to \alpha)\} \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$.

Deoarece $\vdash \overline{\alpha_6}\{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\} = ((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to (\alpha \leftrightarrow \beta)))$ utilizând corolarul teoremei deducţiei, obţinem

$$\{(\alpha \to \beta), (\beta \to \alpha)\} \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta).$$

Schema trecerii de la implicaţie la echivalenţă este reprezentată

$$\frac{(\alpha \to \beta), (\beta \to \alpha)}{(\alpha \leftrightarrow \beta)} IE.$$

5.3 1.4.3. Schema permutării premiselor (PP).

Pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in FORM$, $\vdash ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma)))$.

Fie $H = \{\alpha, \beta, (\alpha \to (\beta \to \gamma))\}$. Evident, secvenţa

$$\alpha, (\alpha \to (\beta \to \gamma)), (\beta \to \gamma), \beta, \gamma$$

este o $H-$ secvenţă deductivă, deci $\{\alpha, \beta, (\alpha \to (\beta \to \gamma))\} \vdash \gamma$.

Aplicând teorema deducţiei, rezultă

$$\begin{array}{l} \{\beta, (\alpha \to (\beta \to \gamma))\} \vdash (\alpha \to \gamma), \\ \{(\alpha \to (\beta \to \gamma))\} \vdash (\beta \to (\alpha \to \gamma)), \\ \vdash ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))). \end{array}$$

Schema permutării premiselor este reprezentată

$$\frac{(\alpha \to (\beta \to \gamma))}{(\beta \to (\alpha \to \gamma))} PP.$$

5.4 1.4.4. Schemele "trecerii" de la echivalenţă la implicaţie (EI).

Deoarece pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$,

$$\overline{\alpha_4}\{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\} = ((\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\alpha \to \beta))$$

şi

$$\overline{\alpha_5}\{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\} = ((\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\beta \to \alpha))$$

rezultă $\{(\alpha \leftrightarrow \beta)\} \vdash (\alpha \to \beta)$ şi $\{(\alpha \leftrightarrow \beta)\} \vdash (\beta \to \alpha)$.

Schemele "trecerii" de la echivalenţă la implicaţie (EI) sunt reprezentate prin

$$\frac{(\alpha \leftrightarrow \beta)}{(\alpha \to \beta)} EI \qquad \text{respectiv} \qquad \frac{(\alpha \leftrightarrow \beta)}{(\beta \to \alpha)} EI.$$

5.5 1.4.5. Pentru orice

$\alpha, \beta \in FORM$, $\vdash ((\neg\alpha) \to (\alpha \to \beta))$.

Secvenţa

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \to (\alpha \to \beta)) = \overline{\alpha_7}\{\beta \mid a,\ \alpha \mid b\} \\
\gamma_2 &= ((\neg\alpha) \to ((\neg\beta) \to (\neg\alpha))) = \overline{\alpha_1}\{(\neg\alpha) \mid a,\ (\neg\beta) \mid b\}
\end{aligned}$$

$$\gamma_3 = ((\neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)),\ \frac{\gamma_2, \gamma_1}{\gamma_3} RS$$

este o demonstraţie formală, deci $\vdash ((\neg\alpha) \to (\alpha \to \beta))$.

În particular rezultă $\{(\neg\alpha), \alpha\} \vdash \beta$ pentru orice $\beta \in FORM$, deci pentru orice $\alpha \in FORM$, $T(\{(\neg\alpha), \alpha\}) = FORM$.

5.6 1.4.6. Schema dublei negaţii (DN).

Pentru orice

$\alpha \in FORM$, $\vdash (\alpha \leftrightarrow (\neg(\neg\alpha)))$.

Pentru $H = \{(\neg(\neg\alpha))\}$ şi $\beta \in T_h$ (de exemplu $\beta = (\alpha \to \alpha)$) fie $H-$ secvenţa deductivă,

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= ((\neg(\neg\alpha)) \to ((\neg\alpha) \to (\neg\beta))) \in T_h \text{ (aplicaţia 1.4.5)} \\
\gamma_2 &= (\neg(\neg\alpha)) \in H \\
\gamma_3 &= ((\neg\alpha) \to (\neg\beta)),\ \frac{\gamma_2, \gamma_1}{\gamma_3} MP \\
\gamma_4 &= (((\neg\alpha) \to (\neg\beta)) \to (\beta \to \alpha)) = \overline{\alpha_7}\{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\} \\
\gamma_5 &= (\beta \to \alpha),\ \frac{\gamma_3, \gamma_4}{\gamma 5} MP \\
\gamma_6 &= \beta \in T_h \\
\gamma_7 &= \alpha,\ \frac{\gamma_6, \gamma_5}{\gamma_7} MP.
\end{aligned}$$

Rezultă $\{(\neg(\neg\alpha))\} \vdash \alpha$, deci $\vdash ((\neg(\neg\alpha)) \to \alpha)$ pentru orice formulă α, ceea ce în particular implică

$$\vdash ((\neg(\neg(\neg\alpha))) \to (\neg\alpha))$$

Considerăm demonstraţia formală

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= ((\neg(\neg(\neg\alpha))) \to (\neg\alpha)) \in T_h \\
\delta_2 &= (((\neg(\neg(\neg\alpha))) \to (\neg\alpha)) \to (\alpha \to (\neg(\neg\alpha)))) = \\
&= \overline{\alpha_7}\{(\neg(\neg\alpha)) \mid a,\ \alpha \mid b\} \\
\delta_3 &= (\alpha \to (\neg(\neg\alpha))),\ \frac{\delta_1, \delta_2}{\delta_3} MP.
\end{aligned}$$

deci $\vdash (\alpha \to (\neg(\neg\alpha)))$, adică $\{\alpha\} \vdash (\neg(\neg\alpha))$.

Fie demonstraţia formală

$$\begin{aligned} \eta_1 &= ((\neg(\neg\alpha)) \to \alpha) \in T_h \\ \eta_2 &= (\alpha \to (\neg(\neg\alpha))) \in T_h \end{aligned}$$

$$\eta_3 = (\alpha \leftrightarrow (\neg(\neg\alpha))), \ \frac{\eta_1, \eta_2}{\eta_3} IE.$$

Din rezultatele stabilite obţinem schemele de inferenţă (DN) reprezentate prin $\frac{\alpha}{(\neg(\neg\alpha))} DN$ şi respectiv $\frac{(\neg(\neg\alpha))}{\alpha} DN$.

Observaţie Mulţimea formulelor false este nevidă. Într-adevăr, deoarece $T_h \neq \emptyset$, fie $\alpha \in T_h$. Evident, rezultă $(\neg(\neg\alpha)) \in T_h$, deci $(\neg\alpha)$ este formulă falsă. Convenim să notăm prin $\top$ o formulă demonstrabilă, respectiv prin $\perp$ o formulă falsă oarecare.

5.7 1.4.7. Schema negaţiei (NN).

Pentru orice

$\alpha, \beta \in FORM, \vdash ((\alpha \to \beta) \leftrightarrow ((\neg\beta) \to (\neg\alpha)))$.

Fie demonstraţia formală

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \overline{\alpha_7}\{\beta \mid a,\ \alpha \mid b\} = (((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \leftrightarrow (\alpha \to \beta)) \\ \delta_2 &= (((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \to (\alpha \to \beta)), \ \frac{\delta_1}{\delta_2} EI \end{aligned}$$

deci $\{((\neg\beta) \to (\neg\alpha))\} \vdash (\alpha \to \beta)$.

Obţinem astfel prima schemă de negaţie $\frac{((\neg\beta) \to (\neg\alpha))}{(\alpha \to \beta)} NN$.

Considerăm mulţimea de ipoteze $H = \{(\alpha \to \beta)\}$ şi $H-$ secvenţa deductivă

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (\alpha \to \beta) \in H \\ \eta_2 &= ((\neg(\neg\alpha)) \to \alpha) \in T_h \\ \eta_3 &= ((\neg(\neg\alpha)) \to \beta), \ \frac{\eta_2, \eta_1}{\eta_3} RS \\ \eta_4 &= (\beta \to (\neg(\neg\beta))) \in T_h \\ \eta_5 &= ((\neg(\neg\alpha)) \to (\neg(\neg\beta))), \ \frac{\eta_3, \eta_4}{\eta_5} RS \\ \eta_6 &= ((\neg\beta) \to (\neg\alpha)), \ \frac{\eta_5}{\eta_6} NN. \end{aligned}$$

Rezultă $\{(\alpha \to \beta)\} \vdash ((\neg\beta) \to (\neg\alpha))$, deci

$$\vdash ((\alpha \to \beta) \to ((\neg\beta) \to (\neg\alpha))),$$

din care obţinem cea de a doua schemă de negaţie $\frac{(\alpha\to\beta)}{(\urcorner\beta)\to(\urcorner\alpha)}NN.$

Aplicând corolarul teoremei deducţiei, rezultă

$$\vdash ((\alpha \to \beta) \to ((\urcorner\beta) \to (\urcorner\alpha))) .$$

În final, putem considera demonstraţia formală

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= (((\urcorner\beta) \to (\urcorner\alpha)) \to (\alpha \to \beta)) \\
\zeta_2 &= ((\alpha \to \beta) \to ((\urcorner\beta) \to (\urcorner\alpha))) \\
\zeta_3 &= (((\urcorner\beta) \to (\urcorner\alpha)) \leftrightarrow (\alpha \to \beta)) \,, \ \frac{\zeta_1, \zeta_2}{\zeta_3} IE.
\end{aligned}$$

5.8 1.4.8.

Pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$,

$$\vdash ((\alpha \to (\urcorner\beta)) \leftrightarrow (\beta \to (\urcorner\alpha))) .$$

Fie $H = \{(\alpha \to (\urcorner\beta))\}$. Considerăm $H-$ secvenţa deductivă

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= (\alpha \to (\urcorner\beta)) \in H \\
\zeta_2 &= ((\urcorner(\urcorner\alpha)) \to \alpha) \in T_h \\
\zeta_3 &= ((\urcorner(\urcorner\alpha)) \to (\urcorner\beta)) \,, \ \frac{\zeta_2, \zeta_1}{\zeta_3} RS \\
\zeta_4 &= (((\urcorner(\urcorner\alpha)) \to (\urcorner\beta)) \to (\beta \to (\urcorner\alpha))) \in T_h \\
\zeta_5 &= (\beta \to (\urcorner\alpha)) \,, \ \frac{\zeta_3, \zeta_4}{\zeta_5} MP
\end{aligned}$$

deci $\{(\alpha \to (\urcorner\beta))\} \vdash (\beta \to (\urcorner\alpha))$, adică

$$\vdash ((\alpha \to (\urcorner\beta)) \to (\beta \to (\urcorner\alpha))) .$$

Deoarece proprietatea a fost stabilită pentru orice formule α, β, rezultă

$$\vdash ((\beta \to (\urcorner\alpha)) \to (\alpha \to (\urcorner\beta))) ,$$

deci utilizând schema trecerii de la implicaţie la echivalenţă rezultă

$$\vdash ((\beta \to (\urcorner\alpha)) \leftrightarrow (\alpha \to (\urcorner\beta))) .$$

5.9 1.4.9. Schema rezoluţiei (REZ).

Pentru orice
$\alpha, \beta, \gamma \in FORM$, $\vdash ((\alpha \to \beta) \to (((\neg\alpha) \to \gamma) \to (\beta \vee \gamma)))$.
Fie $H = \{(\alpha \to \beta), ((\neg\alpha) \to \gamma)\}$ şi $H-$ secvenţa deductivă

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= ((\beta \vee \gamma) \leftrightarrow ((\neg\beta) \to \gamma)) = \overline{\alpha_8}\{\beta \mid a,\ \gamma \mid b\} \\
\delta_2 &= (((\neg\beta) \to \gamma) \to (\beta \vee \gamma)),\ \frac{\delta_1}{\delta_2}EI \\
\delta_3 &= (\alpha \to \beta) \in H \\
\delta_4 &= ((\alpha \to \beta) \to ((\neg\beta) \to (\neg\alpha))) \in T_h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_5 &= ((\neg\beta) \to (\neg\alpha)),\ \frac{\delta_3, \delta_4}{\delta_5}RS \\
\delta_6 &= ((\neg\alpha) \to \gamma) \in H \\
\delta_7 &= ((\neg\beta) \to \gamma),\ \frac{\delta_5, \delta_6}{\delta_7}RS \\
\delta_8 &= (\beta \vee \gamma),\ \frac{\delta_7, \delta_2}{\delta_8}RS.
\end{aligned}$$

Obţinem astfel $\{(\alpha \to \beta), ((\neg\alpha) \to \gamma)\} \vdash (\beta \vee \gamma)$, deci aplicând corolarul teoremei deducţiei, rezultă

$$\vdash ((\alpha \to \beta) \to (((\neg\alpha) \to \gamma) \to (\beta \vee \gamma)))$$

şi

$$\vdash (((\neg\alpha) \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\beta \vee \gamma))).$$

Schema rezoluţiei este reprezentată prin $\frac{(\alpha\to\beta),((\neg\alpha)\to\gamma)}{(\beta\vee\gamma)}REZ$.

5.10 1.4.10.

Pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$,

$$\vdash (\alpha \to (\alpha \vee \beta)), \qquad \vdash (\beta \to (\alpha \vee \beta)).$$

Pentru $H = \{\alpha\}$, considerăm secvenţa deductivă

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= ((\alpha \vee \beta) \leftrightarrow ((\neg\alpha) \rightarrow \beta)) = \overline{\alpha_8}\,\{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\} \\
\delta_2 &= (((\neg\alpha) \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta))\,,\ \frac{\delta_1}{\delta_2}EI \\
\delta_3 &= ((\neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \in T_h,\ \text{(aplicacţia 1.4.5)} \\
\delta_4 &= (\alpha \rightarrow ((\neg\alpha) \rightarrow \beta))\,,\ \frac{\delta_3}{\delta_4}PP \\
\delta_5 &= \alpha \in H \\
\delta_6 &= ((\neg\alpha) \rightarrow \beta)\,,\ \frac{\delta_5, \delta_4}{\delta_6}MP \\
\delta_7 &= ((\alpha \vee \beta) \leftrightarrow ((\neg\alpha) \rightarrow \beta)) = \overline{\alpha_8}\,\{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\} \\
\delta_8 &= (((\neg\alpha) \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta))\,,\ \frac{\delta_7}{\delta_8}EI \\
\delta_9 &= (\alpha \vee \beta)\,,\ \frac{\delta_6, \delta_8}{\delta_9}MP,
\end{aligned}$$

deci $\{\alpha\} \vdash (\alpha \vee \beta)$, din care rezultă $\vdash (\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta))$.

Fie demonstraţia formală

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= ((\alpha \vee \beta) \leftrightarrow ((\neg\alpha) \rightarrow \beta)) = \overline{\alpha_8}\,\{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\} \\
\eta_2 &= (((\neg\alpha) \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta))\,,\ \frac{\eta_1}{\eta_2}EI \\
\eta_3 &= (\beta \rightarrow ((\neg\alpha) \rightarrow \beta)) = \overline{\alpha_1}\,\{\beta \mid a, (\neg\alpha) \mid b\} \\
\eta_4 &= (\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta))\,,\ \frac{\eta_3, \eta_2}{\eta_4}RS
\end{aligned}$$

deci $\vdash (\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta))$.

5.11 1.4.11.

Pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$, $\vdash ((\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\beta \vee \alpha))$.

Fie $H = \{(\beta \vee \alpha)\}$. Considerăm $H-$ secvenţa deductivă

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= ((\alpha \vee \beta) \leftrightarrow ((\neg\alpha) \rightarrow \beta)) = \overline{\alpha_8}\,\{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\} \\
\delta_2 &= (((\neg\alpha) \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta))\,,\ \frac{\delta_1}{\delta_2}EI \\
\delta_3 &= ((\beta \vee \alpha) \leftrightarrow ((\neg\beta) \rightarrow \alpha)) = \overline{\alpha_8}\,\{\beta \mid a,\ \alpha \mid b\} \\
\delta_4 &= ((\beta \vee \alpha) \rightarrow ((\neg\beta) \rightarrow \alpha))\,,\ \frac{\delta_3}{\delta_4}EI \\
\delta_5 &= (\beta \vee \alpha) \in H \\
\delta_6 &= ((\neg\beta) \rightarrow \alpha)\,,\ \frac{\delta_5, \delta_4}{\delta_6}MP
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_7 &= (\alpha \to (\neg(\neg\alpha))) \in T_h \\
\delta_8 &= ((\neg\beta) \to (\neg(\neg\alpha))),\ \frac{\delta_6, \delta_7}{\delta_8} RS \\
\delta_9 &= (((\neg\beta) \to (\neg(\neg\alpha))) \to ((\neg\alpha) \to \beta)) = \overline{\alpha_7}\{\beta \mid a,\ (\neg\alpha) \mid b\} \\
\delta_{10} &= ((\neg\alpha) \to \beta), \frac{\delta_8, \delta_9}{\delta_{10}} MP \\
\delta_{11} &= (\alpha \vee \beta), \frac{\delta_{10}, \delta_2}{\delta_{11}} MP.
\end{aligned}$$

Rezultă $\{(\beta \vee \alpha)\} \vdash (\alpha \vee \beta)$, deci pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$,

$$\vdash ((\beta \vee \alpha) \to (\alpha \vee \beta)).$$

Deoarece $\vdash ((\beta \vee \alpha) \to (\alpha \vee \beta))$ şi $\vdash ((\alpha \vee \beta) \to (\beta \vee \alpha))$, utilizând schema (IE), obţinem $\vdash ((\beta \vee \alpha) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta))$.

5.12 1.4.12.

Pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$,

$$\vdash ((\alpha \wedge \beta) \to \alpha),\ \vdash ((\alpha \wedge \beta) \to \beta),\ \vdash ((\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha)).$$

Fie demonstraţia formală

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= ((\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta)))) = \overline{\alpha_9}\{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\} \\
\delta_2 &= ((\alpha \wedge \beta) \to (\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta)))),\ \frac{\delta_1}{\delta_2} EI \\
\delta_3 &= ((\neg\alpha) \to ((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))) \in T_h \\
\delta_4 &= \left(\begin{array}{l} ((\neg\alpha) \to ((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))) \to \\ \to ((\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta)) \to (\neg(\neg\alpha)))) \end{array}\right) \in T_h,\ \text{(aplicaţia 1.4.7)} \\
\delta_5 &= ((\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta)) \to (\neg(\neg\alpha)))),\ \frac{\delta_3, \delta_4}{\delta_5} MP \\
\delta_6 &= ((\neg(\neg\alpha)) \to \alpha) \in T_h \\
\delta_7 &= (\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta)) \to \alpha),\ \frac{\delta_5, \delta_6}{\delta_7} RS \\
\delta_8 &= ((\alpha \wedge \beta) \to \alpha),\ \frac{\delta_2, \delta_7}{\delta_8} RS,
\end{aligned}$$

deci $\vdash ((\alpha \wedge \beta) \to \alpha)$.

Analog, putem construi demonstraţia formală

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= ((\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\urcorner ((\urcorner \alpha) \vee (\urcorner \beta)))) = \overline{\alpha_9} \{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\} \\
\gamma_2 &= ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\urcorner ((\urcorner \alpha) \vee (\urcorner \beta)))),\ \frac{\gamma_1}{\gamma_2} EI \\
\gamma_3 &= ((\urcorner \beta) \rightarrow ((\urcorner \alpha) \vee (\urcorner \beta))) \in T_h \\
\gamma_4 &= \left(\begin{array}{l} ((\urcorner \beta) \rightarrow ((\urcorner \alpha) \vee (\urcorner \beta))) \rightarrow \\ \rightarrow ((\urcorner ((\urcorner \alpha) \vee (\urcorner \beta)) \rightarrow (\urcorner (\urcorner \beta)))) \end{array} \right) \in T_h, (\text{aplicaţia } 1.4.7) \\
\gamma_5 &= ((\urcorner ((\urcorner \alpha) \vee (\urcorner \beta)) \rightarrow (\urcorner (\urcorner \beta)))),\ \frac{\gamma_3, \gamma_4}{\gamma_5} MP \\
\gamma_6 &= ((\urcorner (\urcorner \beta)) \rightarrow \beta) \in T_h \\
\gamma_7 &= (\urcorner ((\urcorner \alpha) \vee (\urcorner \beta)) \rightarrow \beta),\ \frac{\gamma_5, \gamma_6}{\delta \gamma} RS \\
\gamma_8 &= ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta),\ \frac{\gamma_2, \gamma_7}{\gamma_8} RS,
\end{aligned}$$

deci $\vdash ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta)$.

Considerăm demonstraţia formală

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= ((\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\urcorner ((\urcorner \alpha) \vee (\urcorner \beta)))) = \overline{\alpha_9} \{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\} \\
\eta_2 &= ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\urcorner ((\urcorner \alpha) \vee (\urcorner \beta)))),\ \frac{\eta_1}{\eta_2} EI \\
\eta_3 &= (((\urcorner \beta) \vee (\urcorner \alpha)) \rightarrow ((\urcorner \alpha) \vee (\urcorner \beta))) \in T_h \\
\eta_4 &= \left(\begin{array}{l} (((\urcorner \beta) \vee (\urcorner \alpha)) \rightarrow ((\urcorner \alpha) \vee (\urcorner \beta))) \rightarrow \\ \rightarrow ((\urcorner ((\urcorner \alpha) \vee (\urcorner \beta)) \rightarrow (\urcorner ((\urcorner \beta) \vee (\urcorner \alpha))))) \end{array} \right) \in T_h \\
\eta_5 &= ((\urcorner ((\urcorner \alpha) \vee (\urcorner \beta)) \rightarrow (\urcorner ((\urcorner \beta) \vee (\urcorner \alpha))))),\ \frac{\eta_3, \eta_4}{\eta_5} MP \\
\eta_6 &= ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\urcorner ((\urcorner \beta) \vee (\urcorner \alpha)))),\ \frac{\eta_2, \eta_5}{\eta_6} RS \\
\eta_7 &= ((\beta \wedge \alpha) \leftrightarrow (\urcorner ((\urcorner \beta) \vee (\urcorner \alpha)))) = \overline{\alpha_9} \{\beta \mid a,\ \alpha \mid b\} \\
\eta_8 &= ((\urcorner ((\urcorner \beta) \vee (\urcorner \alpha))) \rightarrow (\beta \wedge \alpha)),\ \frac{\eta_7}{\eta_8} EI \\
\eta_9 &= ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\beta \wedge \alpha)),\ \frac{\eta_6, \eta_8}{\eta_9} RS.
\end{aligned}$$

Rezultă că pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$, $\vdash ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\beta \wedge \alpha))$, deci şi $\vdash ((\beta \wedge \alpha) \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$, şi în final, utilizând schema (IE), obţinem
$\vdash ((\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha))$.

5.13 1.4.13.

Pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$, $\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$.

Fie $H_1 = \{\alpha, \beta, (\beta \to (\neg\alpha))\}$ şi $\perp$ o formulă falsă. Demonstrăm că $H_1 \vdash \perp$.

Considerăm H_1- secvenţa deductivă

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \beta \in H_1 \\
\gamma_2 &= (\beta \to (\neg\alpha)) \in H_1 \\
\gamma_3 &= (\neg\alpha)\,,\ \frac{\gamma_1, \gamma_2}{\gamma_3} MP \\
\gamma_4 &= ((\neg\alpha) \to (\alpha \to \perp)) \in T_h,\ \text{(aplicaţia 1.4.5)} \\
\gamma_5 &= (\alpha \to \perp)\,,\ \frac{\gamma_3, \gamma_4}{\gamma_5} MP \\
\gamma_6 &= \alpha \in H_1 \\
\gamma_7 &= \perp,\ \frac{\gamma_6, \gamma_5}{\gamma_7} MP,
\end{aligned}$$

deci $H_1 \vdash \perp$.

Aplicând teorema deducţiei, rezultă $\{\alpha, \beta\} \vdash ((\beta \to (\neg\alpha)) \to \perp)$.

Notăm $H = \{\alpha, \beta\}$ şi construim $H-$ secvenţa deductivă

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= ((\beta \to (\neg\alpha)) \to \perp) \in T(H) \\
\eta_2 &= ((\neg\perp) \to (\neg(\beta \to (\neg\alpha))))\,,\ \frac{\eta_1}{\eta_2} NN \\
\eta_3 &= (\neg\perp) \in T_h \\
\eta_4 &= (\neg(\beta \to (\neg\alpha)))\,,\ \frac{\eta_3, \eta_2}{\eta_4} MP \\
\eta_5 &= ((\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta)))) = \overline{\alpha_9}\,\{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\} \\
\eta_6 &= ((\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))) \to (\alpha \wedge \beta))\,,\ \frac{\eta_5}{\eta_6} EI \\
\eta_7 &= (((\neg\alpha) \vee (\neg\beta)) \leftrightarrow ((\neg(\neg\alpha)) \to (\neg\beta))) = \\
&= \overline{\alpha_8}\,\{(\neg\alpha) \mid a,\ (\neg\beta) \mid b\} \\
\eta_8 &= (((\neg\alpha) \vee (\neg\beta)) \to ((\neg(\neg\alpha)) \to (\neg\beta)))\,,\ \frac{\eta_7}{\eta_8} EI \\
\eta_9 &= (((\neg(\neg\alpha)) \to (\neg\beta)) \to (\beta \to (\neg\alpha))) \in T_h \\
\eta_{10} &= (((\neg\alpha) \vee (\neg\beta)) \to (\beta \to (\neg\alpha)))\,,\ \frac{\eta_8, \eta_9}{\eta_{10}} RS
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{11} &= ((\neg(\beta \to (\neg\alpha))) \to (\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))))\,,\ \frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} NN \\
\eta_{12} &= (\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta)))\,,\ \frac{\eta_4, \eta_{11}}{\eta_{12}} MP \\
\eta_{13} &= (\alpha \wedge \beta)\,,\ \frac{\eta_{12}, \eta_6}{\eta_{13}} MP.
\end{aligned}$$

Obţinem astfel $\{\alpha, \beta\} \vdash (\alpha \wedge \beta)$, deci, aplicând teorema deducţiei rezultă $\vdash (\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$.

5.14 1.4.14.

Fie $H \subset FORM$. Atunci H este compatibilă dacă şi numai dacă pentru orice $\alpha \in FORM$ cel puţin una dintre mulţimile $H \cup \{\alpha\}, H \cup \{(\urcorner\alpha)\}$ este compatibilă.

Deoarece $H \subset H \cup \{\alpha\}$, $H \subset H \cup \{(\urcorner\alpha)\}$, obţinem $T(H) \subset T(H \cup \{\alpha\})$ şi $T(H) \subset T(H \cup \{(\urcorner\alpha)\})$.

Rezultă evident că, dacă cel puţin una dintre mulţimile $H \cup \{\alpha\}$, $H \cup \{(\urcorner\alpha)\}$ este compatibilă, atunci H este compatibilă.

Demonstrăm că H este incompatibilă dacă şi numai dacă $\perp \in T(H)$. Întradevăr, dacă $T(H) = FORM$, cum $\perp \in FORM$, rezultă evident $\perp \in T(H)$.

Presupunem $\perp \in T(H)$. Pentru $\beta \in FORM$ arbitrară, rezultă $H-$ secvenţa deductivă

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= (\perp \to ((\urcorner\beta) \to \perp)) = \overline{\alpha_1}\{\perp | a, (\urcorner\beta) \mid b\} \\
\gamma_2 &= \perp, \ \perp \in T(H) \\
\gamma_3 &= ((\urcorner\beta) \to \perp), \ \frac{\gamma_2, \gamma_1}{\gamma_3} MP \\
\gamma_4 &= (((\urcorner\beta) \to \perp) \to ((\urcorner \perp) \to \beta)) \in T_h, \ \text{(aplicaţia 1.4.8)} \\
\gamma_5 &= ((\urcorner \perp) \to \beta), \ \frac{\gamma_3, \gamma_4}{\gamma_5} MP \\
\gamma_6 &= (\urcorner \perp), (\urcorner \perp) \in T_h \\
\gamma_7 &= \beta, \ \frac{\gamma_6, \gamma_5}{\gamma_7} MP
\end{aligned}
$$

deci, $\beta \in T(H)$, ceea ce evident implică $T(H) = FORM$.

Fie $H \subset FORM$ astfel încât pentru orice $\alpha \in FORM$ cel puţin una dintre mulţimile $H \cup \{\alpha\}, H \cup \{(\urcorner\alpha)\}$ este compatibilă. Deoarece $T(H) \subset T(H \cup \{\alpha\}) \cap T(H \cup \{(\urcorner\alpha)\})$, rezultă $T(H) \neq FORM$, deci H este compatibilă.

Presupunem că H este compatibilă şi fie $\alpha \in FORM$ arbitrară. Dacă ambele mulţimi $H \cup \{\alpha\}, H \cup \{(\urcorner\alpha)\}$ sunt incompatibile, atunci aplicând teorema deducţiei rezultă $H \vdash (\alpha \to \perp)$, $H \vdash ((\urcorner\alpha) \to \perp)$. Obţinem astfel

$H-$ secvenţa deductivă

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= ((\neg\alpha) \rightarrow\perp) \in T(H) \\
\delta_2 &= (((\neg\alpha) \rightarrow\perp) \rightarrow ((\neg\perp) \rightarrow \alpha)) \in T_h, \text{ (aplicaţia 1.4.8)} \\
\delta_3 &= ((\neg\perp) \rightarrow \alpha), \ \frac{\delta_1, \delta_2}{\delta_3} MP \\
\delta_4 &= (\neg\perp) \in T_h \\
\delta_5 &= \alpha, \ \frac{\delta_4, \delta_3}{\delta_5} MP,
\end{aligned}$$

deci $\alpha \in T(H)$,adică H este incompatibilă, ceea ce este o contradicţie. În concluzie, cel puţin una dintre mulţimile $H \cup \{\alpha\}, H \cup \{(\neg\alpha)\}$ este în mod necesar compatibilă.

5.15 1.4.15.

Fie $\alpha, \beta \in FORM$. Dacă $\{(\alpha \rightarrow \beta), (\beta \rightarrow \alpha)\} \subset T_h$, atunci

$T(H \cup \{\alpha\}) = T(H \cup \{\beta\})$ pentru orice mulţime de formule H.

Demonstrăm $T(H \cup \{\alpha\}) \subset T(H \cup \{\beta\})$ prin inducţie asupra lungimii $H \cup \{\alpha\}-$ secvenţei deductive.

Fie γ astfel încât admite o $H \cup \{\alpha\}-$ secvenţă deductivă de lungime 1. Rezultă $\gamma \in T_h \cup H \cup \{\alpha\}$.

Evident, dacă $\gamma \in T_h \cup H$, atunci $\gamma \in T(H \cup \{\beta\})$.

Dacă $\gamma = \alpha$, atunci secvenţa $\beta, (\beta \rightarrow \alpha), \alpha$ este o $H \cup \{\beta\}-$ secvenţă deductivă, deci $\alpha \in T(H \cup \{\beta\})$.

Presupunem că pentru orice formulă γ ce admite o $H \cup \{\alpha\}-$ secvenţă deductivă de lungime cel mult egală cu n, rezultă $\gamma \in T(H \cup \{\beta\})$.

Fie $\gamma_1, ..., \gamma_n, \gamma_{n+1} = \gamma$ o $H \cup \{\alpha\}-$ secvenţă deductivă.

Evident, pentru orice $1 \leq k \leq n$, $\gamma_1, ..., \gamma_k$ este de asemenea $H \cup \{\alpha\}-$ secvenţă deductivă, deci conform ipotezei inductive rezultă $\gamma_k \in T(H \cup \{\beta\}), 1 \leq k \leq n$.

Dacă $\gamma_{n+1} \in T_h \cup H \cup \{\alpha\}$, atunci pe baza argumentului precedent obţinem $\gamma_{n+1} \in T(H \cup \{\beta\})$.

Dacă există $1 \leq i, j \leq n$ astfel ca $\gamma_j = (\gamma_i \rightarrow \gamma_{n+1})$, atunci secvenţa $\gamma_i, \gamma_j, \gamma_{n+1}$ este $H \cup \{\beta\}-$ secvenţă deductivă, deci $\gamma \in T(H \cup \{\beta\})$.

Incluziunea $T(H \cup \{\beta\}) \subset T(H \cup \{\alpha\})$ poate fi stabilită pe baza unui argument similar.

În particular, dacă $\{(\alpha \to \beta), (\beta \to \alpha)\} \subset T_h$ atunci
$T(H \cup \{(\neg\alpha)\}) = T(H \cup \{(\neg\beta)\})$ pentru orice mulţime de formule H.

Într-adevăr, utilizând rezultatul stabilit de aplicaţia 1.4.7., dacă
$\{(\alpha \to \beta), (\beta \to \alpha)\} \subset T_h$, atunci
$\{((\neg\alpha) \to (\neg\beta)), ((\neg\beta) \to (\neg\alpha))\} \subset T_h$, deci
$T(H \cup \{(\neg\alpha)\}) = T(H \cup \{(\neg\beta)\})$.

5.16 1.4.16.

Pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$,

$$\{((\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha) \vee \beta)), (((\neg\alpha) \vee \beta) \to (\alpha \to \beta))\} \subset T_h.$$

Pentru $H_1 = \{(\alpha \to \beta)\}$ considerăm următoarea H_1- secvenţă deductivă

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (\alpha \to \beta) \in H_1 \\
\gamma_2 &= ((\neg(\neg\alpha)) \to \alpha) \in T_h \\
\gamma_3 &= ((\neg(\neg\alpha)) \to \beta), \ \frac{\gamma_2, \gamma_1}{\gamma_3} RS
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_4 &= (((\neg\alpha) \vee \beta) \leftrightarrow ((\neg(\neg\alpha)) \to \beta)) = \overline{\alpha_8}\{(\neg\alpha) \mid a,\ \beta \mid b\} \\
\gamma_5 &= (((\neg(\neg\alpha)) \to \beta) \to ((\neg\alpha) \vee \beta)), \ \frac{\gamma_4}{\gamma_5} EI \\
\gamma_6 &= ((\neg\alpha) \vee \beta), \ \frac{\gamma_2, \gamma_5}{\gamma_6} MP.
\end{aligned}$$

Aplicând teorema deducţiei, rezultă $((\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha) \vee \beta)) \in T_h$.

Pentru $H_2 = \{((\neg\alpha) \vee \beta)\}$, fie H_2- secvenţa deductivă

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= ((\neg\alpha) \vee \beta) \in H_2 \\
\eta_2 &= (((\neg\alpha) \vee \beta) \leftrightarrow ((\neg(\neg\alpha)) \to \beta)) = \overline{\alpha_8}\{(\neg\alpha) \mid a,\ \beta \mid b\} \\
\eta_3 &= (((\neg\alpha) \vee \beta) \to ((\neg(\neg\alpha)) \to \beta)), \ \frac{\eta_2}{\eta_3} EI \\
\eta_4 &= ((\neg(\neg\alpha)) \to \beta), \ \frac{\eta_1, \eta_3}{\eta_4} MP \\
\eta_5 &= (\alpha \to (\neg(\neg\alpha))) \in T_h \\
\eta_6 &= (\alpha \to \beta), \ \frac{\eta_5, \eta_4}{\eta_6} RS
\end{aligned}$$

Aplicând teorema deducţiei, rezultă $(((\neg\alpha) \vee \beta) \to (\alpha \to \beta)) \in T_h$.

Rezultă $\{((\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha) \vee \beta)), (((\neg\alpha) \vee \beta) \to (\alpha \to \beta))\} \subset T_h$, deci pe baza concluziei stabilite de aplicaţia 1.4.15. obţinem

$$T(H \cup \{(\alpha \to \beta)\}) = T(H \cup \{((\neg\alpha) \vee \beta)\})$$

pentru orice mulţime de formule H.

6 Deductibilitate globală

Definiţia 1.5.1. Fie $H, \Gamma \subset FORM$. Spunem că mulţimea de formule Γ este global deductibilă pe baza mulţimii de ipoteze H, notat $H \vdash \Gamma$, dacă $H \cup \urcorner\Gamma \vdash\perp$ unde $\urcorner\Gamma = \{(\urcorner\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$. Mulţimea Γ convenim să fie referită prin termenul de "mulţime concluzie".

Lema 1.5.1. Pentru orice $H, \Gamma \subset FORM$ şi orice $\alpha \in FORM$,

ι) $H \vdash \{\alpha\}$ dacă şi numai dacă $H \vdash \alpha$

$\iota\iota$) $H \cup \{\alpha\} \vdash \Gamma$ dacă şi numai dacă $H \vdash \{(\urcorner\alpha)\} \cup \Gamma$

$\iota\iota\iota$) $H \vdash \Gamma \cup \{\alpha\}$ dacă şi numai dacă $H \cup \{(\urcorner\alpha)\} \vdash \Gamma$

Demonstraţie

ι) Presupunem $H \vdash \{\alpha\}$; utilizând teorema deducţiei, obţinem $H \vdash ((\urcorner\alpha) \rightarrow\perp)$. Considerăm următoarea $H-$ secvenţă deductivă,

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= ((\urcorner\alpha) \rightarrow\perp) \in T(H) \\
\delta_2 &= (((\urcorner\alpha) \rightarrow\perp) \rightarrow ((\urcorner\perp) \rightarrow \alpha)) \in T_h, \text{ (aplicaţia 1.4.8.)} \\
\delta_3 &= ((\urcorner\perp) \rightarrow \alpha), \ \frac{\delta_1, \delta_2}{\delta_3} MP \\
\delta_4 &= (\urcorner\perp) \in T_h \\
\delta_5 &= \alpha, \ \frac{\delta_4, \delta_3}{\delta_5} MP,
\end{aligned}$$

deci $H \vdash \alpha$.

Presupunem $H \vdash \alpha$; deci $H_1 \vdash \alpha$ unde $H_1 = H \cup \{(\urcorner\alpha)\}$. Considerăm H_1- secventa deductivă

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (\urcorner\alpha) \in H_1 \\
\gamma_2 &= \alpha \in T(H_1) \\
\gamma_3 &= ((\urcorner\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow\perp)) \in T_h \text{ (aplicaţia 1.4.5)} \\
\gamma_4 &= (\alpha \rightarrow\perp), \ \frac{\gamma_1, \gamma_3}{\gamma_4} MP \\
\gamma_5 &= \perp, \ \frac{\gamma_2, \gamma_4}{\gamma_5} MP,
\end{aligned}$$

deci $H \vdash \{\alpha\}$.

$\iota\iota$) Presupunem $H \cup \{\alpha\} \vdash \Gamma$, deci $H \cup \urcorner\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash\perp$. Aplicând teorema deducţiei, obţinem, $H \cup \urcorner\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow\perp)$. Fie $H \cup \urcorner\Gamma-$ secvenţa deductivă

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= (\alpha \rightarrow\perp) \in T\,(H \cup \urcorner\Gamma) \\
\delta_2 &= ((\alpha \rightarrow\perp) \rightarrow ((\urcorner\perp) \rightarrow (\urcorner\alpha))) \in T_h, \text{ (aplicaţia 1.4.7)} \\
\delta_3 &= ((\urcorner\perp) \rightarrow (\urcorner\alpha))\,, \ \frac{\delta_1, \delta_2}{\delta_3} MP \\
\delta_4 &= (\urcorner\perp) \in T_h \\
\delta_5 &= (\urcorner\alpha)\,, \ \frac{\delta_4, \delta_3}{\delta_5} MP
\end{aligned}$$

Rezultă $H \cup \urcorner\Gamma \vdash (\urcorner\alpha)$, deci utilizând (ι) , obţinem

$$H \cup \urcorner\Gamma \vdash \{(\urcorner\alpha)\}\,.$$

Obţinem astfel $H \cup \urcorner\Gamma \cup \{(\urcorner(\urcorner\alpha))\} \vdash\perp$, adică $H \cup \urcorner(\Gamma \cup (\urcorner\alpha)) \vdash\perp$, deci rezultă în final $H \vdash \Gamma \cup (\urcorner\alpha)$.

$\iota\iota\iota$) Evident $H \vdash \Gamma \cup \{\alpha\}$ implică $H \cup \urcorner\Gamma \cup \{(\urcorner\alpha)\} \vdash\perp$ adică $H \cup \{(\urcorner\alpha)\} \vdash \Gamma$. De asemenea, dacă $H \cup \{(\urcorner\alpha)\} \vdash \Gamma$, atunci

$H \cup \urcorner\Gamma \cup \{(\urcorner\alpha)\} \vdash\perp$, ceea ce poate fi scris $H \cup \urcorner(\Gamma \cup \{\alpha\}) \vdash\perp$, deci $H \vdash \Gamma \cup \{\alpha\}$. În concluzie, $H \vdash \Gamma \cup \{\alpha\}$ dacă şi numai dacă $H \cup \{(\urcorner\alpha)\} \vdash \Gamma$.

Corolarul 1.5.1. Pentru orice $H, \Gamma \subset FORM$, şi orice $\alpha \in FORM$,

ι) $H \cup \{(\urcorner\alpha)\} \vdash \Gamma$, dacă şi numai dacă $H \vdash \{\alpha\} \cup \Gamma$.

$\iota\iota$) $H \vdash \Gamma \cup \{(\urcorner\alpha)\}$, dacă şi numai dacă $H \cup \{\alpha\} \vdash \Gamma$.

Demonstraţie

ι) $H \cup \{(\urcorner\alpha)\} \vdash \Gamma$ dacă şi numai dacă $H \cup \{(\urcorner\alpha)\} \cup \urcorner\Gamma \vdash\perp$, dacă şi numai dacă $H \cup \urcorner(\Gamma \cup \{\alpha\}) \vdash\perp$, deci, dacă şi numai dacă $H \vdash \{\alpha\} \cup \Gamma$.

$\iota\iota$) $H \vdash \Gamma \cup \{(\urcorner\alpha)\}$, dacă şi numai dacă $H \cup \urcorner\Gamma \cup \{(\urcorner(\urcorner\alpha))\} \vdash\perp$, dacă şi numai dacă $T\,(H \cup \urcorner\Gamma \cup \{(\urcorner(\urcorner\alpha))\}) = FORM$.

Deoarece pentru orice formulă α,

$$\{(\alpha \rightarrow (\urcorner(\urcorner\alpha)))\,, ((\urcorner(\urcorner\alpha)) \rightarrow \alpha)\} \subset T_h,$$

utilizând rezultatul stabilit în aplicaţia 1.4.15, obţinem

$$T\,(H \cup \urcorner\Gamma \cup \{\alpha\}) = T\,(H \cup \urcorner\Gamma \cup \{(\urcorner(\urcorner\alpha))\})\,.$$

Rezultă $H \cup \urcorner\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash\perp$ deci $H \cup \{\alpha\} \vdash \Gamma$.

Observaţie Pe baza rezultatelor stabilite de *Lema* 1.5.1. şi corolarul ei, putem formula următoarea concluzie relativ la "transferul unei formule α

între mulţimea ipotezelor şi mulţimea concluzie" şi anume transferul poate fi realizat fie prin includerea formulei $(\urcorner\alpha)$ fie prin includerea formulei β dacă $\alpha = (\urcorner\beta)$.

Teorema 1.5.1 Fie $H \subset FORM$.

ι) $H \vdash \emptyset$, dacă şi numai dacă H este mulţime incompatibilă.

$\iota\iota$) $H \vdash \{\alpha, \beta\}$, dacă şi numai dacă $H \vdash (\alpha \vee \beta)$.

$\iota\iota\iota$) Pentru orice $n \geq 1$ şi $\beta_1, ..., \beta_n \in FORM$, $H \vdash \{\beta_1, ..., \beta_n\}$, dacă şi numai dacă $H \vdash \{\gamma_n\}$, unde $\gamma_1 = \beta_1,\ \gamma_k = (\gamma_{k-1} \vee \beta_k)$,
$2 \leq k \leq n$.

Demonstraţie

ι) Evident, $H \vdash \emptyset$, dacă şi numai dacă $H \vdash \perp$ deci, dacă şi numai dacă H este mulţime incompatibilă.

$\iota\iota$) Presupunem $H \vdash \{\alpha, \beta\}$ deci $H \cup \{(\urcorner\alpha), (\urcorner\beta)\} \vdash \perp$. Utilizând (ι), obţinem $H \cup \{(\urcorner\alpha)\} \vdash \beta$ deci, aplicând teorema deducţiei, rezultă $H \vdash ((\urcorner\alpha) \rightarrow \beta)$.

Considerăm $H-$ secvenţa deductivă

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= ((\alpha \vee \beta) \leftrightarrow ((\urcorner\alpha) \rightarrow \beta)) = \overline{\alpha_8}\{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\} \\
\delta_2 &= (((\urcorner\alpha) \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta)),\ \frac{\delta_1}{\delta_2} EI \\
\delta_3 &= ((\urcorner\alpha) \rightarrow \beta) \in T(H) \\
\delta_4 &= (\alpha \vee \beta),\ \frac{\beta_3, \delta_2}{\delta_4} MP,
\end{aligned}$$

deci $H \vdash \{(\alpha \vee \beta)\}$.

Presupunem $H \vdash (\alpha \vee \beta)$. Notând $H_1 = H \cup \{(\urcorner\alpha), (\urcorner\beta)\}$, obţinem H_1- secvenţa deductivă

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= ((\alpha \vee \beta) \leftrightarrow ((\urcorner\alpha) \rightarrow \beta)) = \overline{\alpha_8}\{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\} \\
\eta_2 &= ((\alpha \vee \beta) \rightarrow ((\urcorner\alpha) \rightarrow \beta)),\ \frac{\eta_1}{\eta_2} EI \\
\eta_3 &= (\alpha \vee \beta) \in T(H) \subset T(H_1) \\
\eta_4 &= ((\urcorner\alpha) \rightarrow \beta),\ \frac{\eta_2, \eta_3}{\eta_4} MP
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_5 &= (\neg\alpha) \in H_1 \\
\eta_6 &= \beta,\ \frac{\eta_5, \eta_4}{\eta_6} MP \\
\eta_7 &= ((\neg\beta) \to (\beta \to \perp)) \in T_h,\ (\text{aplicaţia } 1.1.5) \\
\eta_8 &= (\neg\beta) \in H_1 \\
\eta_9 &= (\beta \to \perp),\ \frac{\eta_8, \eta_7}{\eta_9} MP \\
\eta_{10} &= \perp,\ \frac{\eta_6, \eta_9}{\eta_{10}} MP,
\end{aligned}$$

deci $H \vdash \{\alpha, \beta\}$.

$\iota\iota\iota$) Demonstrăm prin inducţie după n că pentru orice $n \geq 2$ şi pentru orice $\beta_1, ..., \beta_n \in FORM$, $H \vdash \{\beta_1, ..., \beta_n\}$, dacă şi numai dacă $H \vdash \gamma_n$, unde $\gamma_1 = \beta_1$, $\gamma_k = (\gamma_{k-1} \vee \beta_k)$, $2 \leq k \leq n$.

Pentru $n = 2$, $\gamma_2 = (\gamma_1 \vee \beta_2) = (\beta_1 \vee \beta_2)$ şi conform ($\iota\iota$) proprietatea este verificată.

Presupunem că pentru orice k, $2 \leq k \leq n$, orice $H \subset FORM$, $\{\beta_1, ..., \beta_k\} \subset FORM$, $H \vdash \{\beta_1, ..., \beta_k\}$, dacă şi numai dacă $H \vdash \gamma_k$ unde $\gamma_1 = \beta_1, \gamma_j = (\gamma_{j-1} \vee \beta_j)$, $2 \leq j \leq k$.

Presupunem $H \vdash \{\beta_1, ...\beta_n, \beta_{n+1}\}$. Rezultă
$H \cup \{(\neg\beta_{n+1})\} \vdash \{\beta_1, ...\beta_n\}$ deci, aplicând ipoteza inductivă,
obţinem $H \cup \{(\neg\beta_{n+1})\} \vdash \gamma_n$.
În continuare, utilizând *Lema* 1.5.1. (ι), rezultă
$H \cup \{(\neg\beta_{n+1})\} \vdash \{\gamma_n\}$ şi conform corolarului aceleiaşi leme obţinem
$H \vdash \{\beta_{n+1}, \gamma_n\}$, deci $H \vdash (\gamma_n \vee \beta_{n+1})$, adică $H \vdash \gamma_{n+1}$.
Dacă $H \vdash \gamma_{n+1}$, atunci $H \vdash (\gamma_n \vee \beta_{n+1})$, ceea ce implică
$H \vdash \{\beta_{n+1}, \gamma_n\}$. Obţinem în continuare $H \cup \{(\neg\beta_{n+1})\} \vdash \{\gamma_n\}$ deci aplicând ipoteza inductivă $H \cup \{(\neg\beta_{n+1})\} \vdash \{\beta_1, ...\beta_n\}$ din care pe baza corolarului lemei 1.5.1 rezultă $H \vdash \{\beta_1, ...\beta_n, \beta_{n+1}\}$.

Observaţie Convenim să notăm $\gamma_n = \beta_j$.

Teorema 1.5.2. Fie $\Gamma \subset FORM$.

ι) $\emptyset \vdash \Gamma$ dacă şi numai dacă $\neg\Gamma$ este mulţime incompatibilă.

$\iota\iota$) $\{\alpha, \beta\} \vdash \Gamma$ dacă şi numai dacă $\{(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Gamma$.

$\iota\iota\iota$) Pentru orice $n \geq 2$ şi $\alpha_1, ..., \alpha_n \in FORM$, $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \Gamma$, dacă şi numai dacă $\{\delta_n\} \vdash \Gamma$, unde $\delta_1 = \alpha_1$, $\delta_k = (\delta_{k-1} \vee \alpha_k)$, $2 \leq k \leq n$.

Demonstraţie

ι) $\emptyset \vdash \Gamma$ dacă şi numai dacă $\neg\Gamma \vdash \perp$ deci, dacă şi numai dacă $\neg\Gamma$ este mulţime incompatibilă.

$\iota\iota$) Presupunem $\{\alpha,\beta\}\vdash\Gamma$, deci, aplicând rezultatul stabilit de *Lema* 1.5.1. rezultă $\urcorner\Gamma\vdash\{(\urcorner\alpha),(\urcorner\beta)\}$. Din $Teorema$1.5.1. ($\iota\iota$)
obţinem $\urcorner\Gamma\vdash((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta))$ deci $\urcorner\Gamma\cup(\urcorner((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta)))\vdash\perp$, adică

$$T\left(\urcorner\Gamma\cup(\urcorner((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta)))\right)=FORM.$$

Secvenţa

$$\begin{array}{rcll}\gamma_1&=&((\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow(\urcorner((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta))))=\overline{\alpha_9}\,\{\alpha\mid a,\,\beta\mid b\}&\\ \gamma_2&=&((\alpha\wedge\beta)\rightarrow(\urcorner((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta))))\,,&\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}EI\\ \gamma_3&=&((\urcorner((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta)))\rightarrow(\alpha\wedge\beta))\,,&\dfrac{\gamma_1}{\gamma_3}EI\end{array}$$

este o demonstraţie formală, deci

$$\{((\alpha\wedge\beta)\rightarrow(\urcorner((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta))))\,,((\urcorner((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta)))\rightarrow(\alpha\wedge\beta))\}\subset T_h.$$

Utilizând rezultatul stabilit de aplicaţia 1.4.15., obţinem

$$T\left(\urcorner\Gamma\cup\{(\urcorner((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta)))\}\right)=T\left(\urcorner\Gamma\cup\{(\alpha\wedge\beta)\}\right)$$

deci $T\left(\urcorner\Gamma\cup\{(\alpha\wedge\beta)\}\right)=FORM$. Rezultă $\urcorner\Gamma\cup\{(\alpha\wedge\beta)\}\vdash\perp$, adică $\{(\alpha\wedge\beta)\}\vdash\Gamma$.

Reciproc dacă $\{(\alpha\wedge\beta)\}\vdash\Gamma$ atunci $\urcorner\Gamma\cup\{(\alpha\wedge\beta)\}\vdash\perp$ deci

$$T\left(\urcorner\Gamma\cup\{(\alpha\wedge\beta)\}\right)=FORM.$$

Obţinem astfel $T\left(\urcorner\Gamma\cup\{(\urcorner((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta)))\}\right)=FORM$ deci
$\urcorner\Gamma\cup\{(\urcorner((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta)))\}\vdash\perp$, ceea ce implică $\urcorner\Gamma\vdash\{((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta))\}$.

Pe baza rezultatului stabilit de $Teorema$ 1.5.1. ($\iota\iota$) obţinem în continuare $\urcorner\Gamma\vdash\{((\urcorner\alpha),(\urcorner\beta))\}$, deci $\urcorner\Gamma\cup\{\alpha,\beta\}\vdash\perp$ din care rezultă $\{\alpha,\beta\}\vdash\Gamma$.

In concluzie, $\{\alpha\wedge\beta\}\vdash\Gamma$, dacă şi numai dacă $\{\alpha,\beta\}\vdash\Gamma$.

$\iota\iota\iota$) Demonstrăm prin inducţie că pentru orice $n\geq 2$ şi
$\alpha_1,...,\alpha_n\in FORM$, $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}\vdash\Gamma$, dacă şi numai dacă $\{\delta_n\}\vdash\Gamma$,
unde $\delta_1=\alpha_1,\delta_k=(\delta_{k-1}\wedge\alpha_k)\,,2\leq k\leq n$.

Pentru $n=2$ proprietatea este evident verificată. Presupunem că pentru orice $2\leq k\leq n$, orice $\Gamma\subset FORM$, $\{\alpha_1,...,\alpha_k\}\subset FORM$, $\{\alpha_1,...,\alpha_k\}\vdash\Gamma$, dacă şi numai dacă $\{\delta_k\}\vdash\Gamma$, unde $\delta_1=\alpha_1$,
$\delta_j=(\delta_{j-1}\wedge\alpha_j)\,,\,2\leq j\leq k$.

Fie $\{\alpha_1,...,\alpha_{n+1}\}\subset FORM$, $\Gamma\subset FORM$.

Presupunem $\{\alpha_1,...\alpha_n,\alpha_{n+1}\}\vdash\Gamma$. Utilizând rezultatul stabilit de *Lema* 1.5.1. obţinem $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}\vdash\Gamma\cup\{(\urcorner\alpha_{n+1})\}$, deci conform ipotezei inductive $\{\delta_n\}\vdash$

$\Gamma \cup \{(\neg\alpha_{n+1})\}$. Rezultă $\neg\Gamma \vdash \{(\neg\alpha_{n+1}), (\neg\delta_n)\}$ deci utilizând $Teorema$ 1.5.1 $(\iota\iota)$ obţinem $\neg\Gamma \vdash ((\neg\alpha_{n+1}) \vee (\neg\delta_n))$ ceea ce evident implică $\neg\Gamma \vdash \{((\neg\alpha_{n+1}) \vee (\neg\delta_n))\}$ şi deci

$$\neg\Gamma \cup \{(\neg((\neg\alpha_{n+1}) \vee (\neg\delta_n)))\} \vdash \perp .$$

Pe baza unui argument similar argumentului considerat la $(\iota\iota)$ obţinem $\neg\Gamma \cup \{(\delta_n \wedge \alpha_{n+1})\} \vdash \perp$ deci $\{(\delta_n \wedge \alpha_{n+1})\} \vdash \Gamma$ adică $\{\delta_{n+1}\} \vdash \Gamma$. Presupunem $\{\delta_{n+1}\} \vdash \Gamma$. Rezultă $\neg\Gamma \cup \{\delta_{n+1}\} \vdash \perp$ adică

$T(\neg\Gamma \cup \{\delta_{n+1}\}) = FORM.$

Deoarece

$$\{(\delta_{n+1} \to (\neg((\neg\alpha_{n+1}) \vee (\neg\delta_n)))), ((\neg((\neg\alpha_{n+1}) \vee (\neg\delta_n))) \to \delta_{n+1})\} \subset T_h$$

obţinem $T(\neg\Gamma \cup \{(\neg((\neg\alpha_{n+1}) \vee (\neg\delta_n)))\}) = FORM$,deci

$$\neg\Gamma \cup \{(\neg((\neg\alpha_{n+1}) \vee (\neg\delta_n)))\} \vdash \perp .$$

În continuare rezultă $\neg\Gamma \vdash \{((\neg\alpha_{n+1}) \vee (\neg\delta_n))\}$, deci pe baza rezultatului stabilit de $Teorema$ 1.5.1. $(\iota\iota)$, $\neg\Gamma \vdash \{(\neg\alpha_{n+1}), (\neg\delta_n)\}$. Evident, obţinem $\{\delta_n\} \vdash \Gamma \cup \{(\neg\alpha_{n+1})\}$, deci pe baza ipotezei inductive rezultă $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \Gamma \cup \{(\neg\alpha_{n+1})\}$, ceea ce în final implică $\{\alpha_1, ...\alpha_n, \alpha_{n+1}\} \vdash \Gamma$.

Observaţie Convenim să notăm $\delta_n = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Caracterizarea deductibilităţii globale în cazul particular când ambele mulţimi H, Γ sunt mulţimi finite este formulată de teorema următoare.

$Teorema$ 1.5.3. Fie $H = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, $\Gamma = \{\beta_1, ..., \beta_m\}$. Mulţimea Γ este global deductibilă sub mulţimea de ipoteze H, dacă şi numai dacă $\left\{\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right\} \vdash \bigvee\limits_{j=1}^{m} \beta_j$, unde $\delta_1 = \alpha_1$, $\delta_k = (\delta_{k-1} \wedge \alpha_k)$, $2 \leq k \leq n$, $\gamma_1 = \beta_1$, $\gamma_k = (\gamma_{k-1} \vee \beta_k)$, $2 \leq k \leq m$; $\delta_n = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$; $\gamma_m = \bigvee\limits_{j=1}^{m} \beta_j$.

Demonstraţie Utilizând proprietăţi anterior stabilite şi rezultatele formulate în $Teorema$ 1.5.1. şi $Teorema$ 1.5.2. obţinem $H \vdash \Gamma$, dacă şi numai dacă $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \gamma_m$,dacă şi numai dacă $\{\delta_n\} \vdash \gamma_m$, deci, dacă şi numai dacă $\left\{\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right\} \vdash \bigvee\limits_{j=1}^{m} \beta_j$.

Observaţie Utilizând concluzia stabilită de Corolarul 1.3.2., rezultă $\left\{\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right\} \vdash \bigvee\limits_{j=1}^{m} \beta_j$, dacă şi numai dacă $\left(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \to \bigvee\limits_{j=1}^{m} \beta_j\right) \in T_h$. Concluzia stabilită de

$Teorema 1.5.3.$ exprimă *principiul fundamental al programării logice* şi constituie baza unei clase importante de algoritmi de demonstrare automată.

Conform definiţiei, $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \{\beta_1, ..., \beta_m\}$, dacă şi numai dacă $\{\alpha_1, ..., \alpha_n, (\urcorner\beta_1), ..., (\urcorner\beta_m)\} \vdash \perp$.

Dacă notăm $\alpha_{n+k} = (\urcorner\beta_k)$, $1 \leq k \leq m$, obţinem $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash \{\beta_1, ..., \beta_m\}$, dacă şi numai dacă $\{\delta_{n+m}\} \vdash \perp$, unde $\delta_1 = \alpha_1$, $\delta_k = (\delta_{k-1} \wedge \alpha_k)$, $2 \leq k \leq n+m$.

Convenim să notăm

$$\delta_{n+m} = \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{m} (\urcorner\beta_j).$$

Să observăm că pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$, $\{\alpha\} \vdash \beta$, dacă şi numai dacă $(\alpha \to \beta) \in T_h$. Într-adevăr, dacă $(\alpha \to \beta) \in T_h$, atunci evident $\alpha, (\alpha \to \beta), \beta$ este $\{\alpha\}-$ secvenţă deductivă, deci $\{\alpha\} \vdash \beta$. Dacă $\{\alpha\} \vdash \beta$, atunci aplicând teorema deducţiei, rezultă $\emptyset \vdash (\alpha \to \beta)$, deci $(\alpha \to \beta) \in T(\emptyset) = T_h$.

Obţinem astfel $\{\delta_{n+m}\} \vdash \perp$, dacă şi numai dacă $(\delta_{n+m} \to \perp) \in T_h$.

Presupunem $(\delta_{n+m} \to \perp) \in T_h$ şi considerăm demonstraţia formală

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= (\delta_{n+m} \to \perp) \in T_h \\
\zeta_2 &= ((\delta_{n+m} \to \perp) \to ((\urcorner \perp) \to (\urcorner\delta_{n+m}))) \in T_h \\
\zeta_3 &= ((\urcorner \perp) \to (\urcorner\delta_{n+m})), \ \frac{\zeta_1, \zeta_2}{\zeta_3} MP
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_4 &= (\urcorner \perp) \in T_h \\
\zeta_5 &= (\urcorner\delta_{n+m}), \ \frac{\zeta_4, \zeta_3}{\zeta_5} MP,
\end{aligned}$$

deci $(\urcorner\delta_{n+m}) \in T_h$.

Dacă $(\urcorner\delta_{n+m}) \in T_h$, atunci pe baza demonstraţiei formale

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= (\urcorner\delta_{n+m}) \in T_h \\
\xi_2 &= ((\urcorner\delta_{n+m}) \to (\delta_{n+m} \to \perp)) \in T_h \\
\xi_3 &= (\delta_{n+m} \to \perp), \ \frac{\xi_1, \xi_2}{\xi_3} MP
\end{aligned}$$

obţinem $(\delta_{n+m} \to \perp) \in T_h$, deci $(\delta_{n+m} \to \perp) \in T_h$, dacă şi numai dacă $(\urcorner\delta_{n+m}) \in T_h$.

Rezultă astfel următoarea caracterizare a deductibilităţii globale în cazul în care mulţimea ipotezelor şi mulţimea concluzie sunt finite, $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \vdash$

$\{\beta_1, ..., \beta_m\}$, dacă şi numai dacă $\left\{\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right\} \vdash \bigvee\limits_{j=1}^{m} \beta_j$, dacă şi numai dacă $\left(\neg\left(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \wedge \bigwedge\limits_{j=1}^{m} (\neg\beta_j)\right)\right) \in T_h$, dacă şi numai dacă $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \wedge \bigwedge\limits_{j=1}^{m} (\neg\beta_j)$ este logic falsă.

Teorema 1.5.4. Pentru orice α, $\beta \in FORM$ şi H, Γ mulţimi de formule,

ι) $H \cup \{(\neg\alpha)\} \vdash \Gamma$, dacă şi numai dacă $H \vdash \Gamma \cup \{\alpha\}$ (*regula negaţie stânga*).

$\iota\iota$) $H \cup \{\alpha, \beta\} \vdash \Gamma$, dacă şi numai dacă $H \cup \{(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Gamma$ (*regula conjuncţie stânga*).

$\iota\iota\iota$) $H \cup \{(\alpha \vee \beta)\} \vdash \Gamma$, dacă şi numai dacă $H \cup \{\alpha\} \vdash \Gamma$ şi
$H \cup \{\beta\} \vdash \Gamma$ (*regula disjuncţie stânga*).

$\iota\upsilon$) $H \cup \{(\alpha \to \beta)\} \vdash \Gamma$, dacă şi numai dacă $H \cup \{\beta\} \vdash \Gamma$ şi
$H \vdash \Gamma \cup \{\alpha\}$ (*regula implicaţie stânga*).

υ) $H \vdash \Gamma \cup \{(\neg\alpha)\}$, dacă şi numai dacă $H \cup \{\alpha\} \vdash \Gamma$ (*regula negaţie dreapta*).

$\upsilon\iota$) $H \vdash \Gamma \cup \{(\alpha \wedge \beta)\}$, dacă şi numai dacă dacă şi numai dacă
$H \vdash \Gamma \cup \{\alpha\}$ şi $H \vdash \Gamma \cup \{\beta\}$ (*regula conjuncţie dreapta*).

$\upsilon\iota\iota$) $H \vdash \Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$, dacă şi numai dacă $H \vdash \Gamma \cup \{(\alpha \vee \beta)\}$ (*regula disjuncţie dreapta*).

$\upsilon\iota\iota\iota$) $H \vdash \Gamma \cup \{(\alpha \to \beta)\}$, dacă şi numai dacă $H \cup \{\alpha\} \vdash \Gamma \cup \{\beta\}$ (*regula implicaţie dreapta*).

Demonstraţie Afirmaţiile (ι) şi (υ) sunt stabilite de *Corolarul* 1.5.1.

$\iota\iota$) Presupunem $H \cup \{\alpha, \beta\} \vdash \Gamma$, deci $H \cup \neg\Gamma \vdash \{(\neg\alpha), (\neg\beta)\}$. Din *Teorema*1.5.1 rezultă $H \cup \neg\Gamma \vdash \{((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))\}$ deci
$H \cup \neg\Gamma \cup \{(\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta)))\} \vdash \perp$, adică
$T(H \cup \neg\Gamma \cup \{(\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta)))\}) = FORM$.
Deoarece

$$\{((\alpha \wedge \beta) \to (\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta)))), ((\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))) \to (\alpha \wedge \beta))\} \subset T_h,$$

pe baza proprietăţii stabilite de aplicaţia 1.4.15. rezultă

$$T(H \cup \neg\Gamma \cup \{(\alpha \wedge \beta)\}) = FORM,$$

deci $H \cup \neg\Gamma \cup \{(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \perp$, adică $H \cup \{(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Gamma$.

Reciproc, dacă $H \cup \{(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Gamma$, atunci $H \cup \neg\Gamma \cup \{(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \perp$, deci $T(H \cup \neg\Gamma \cup \{(\alpha \wedge \beta)\}) = FORM$.

Utilizând din nou concluzia aplicaţiei 1.4.15. obţinem
$T(H \cup \neg\Gamma \cup \{(\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta)))\}) = FORM$, deci
$H \cup \neg\Gamma \cup \{(\neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta)))\} \vdash \perp$, ceea ce implică
$H \cup \neg\Gamma \vdash \{((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))\}$.

În continuare, din teorema 1.5.1 rezultă $H \cup \neg\Gamma \vdash \{(\neg\alpha), (\neg\beta)\}$, deci $H \cup \neg\Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \vdash \perp$ din care obţinem în final $H \cup \{\alpha, \beta\} \vdash \Gamma$.

$\iota\upsilon$) Presupunem $H \cup \{(\alpha \to \beta)\} \vdash \Gamma$, deci $H \cup \neg\Gamma \cup \{(\alpha \to \beta)\} \vdash \perp$. Pe baza rezultatului stabilit de aplicaţia 1.4.16. obţinem

$$T(H \cup \neg\Gamma \cup \{((\neg\alpha) \vee \beta)\}) = FORM,$$

deci $H \cup \neg\Gamma \vdash \{(\neg((\neg\alpha) \vee \beta))\}$. Notăm $\Delta = H \cup \neg\Gamma$ şi fie $\Delta-$ secvenţa deductivă

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= (\neg((\neg\alpha) \vee \beta)) \in T(\Delta) \\
\delta_2 &= ((\beta \to ((\neg\alpha) \vee \beta))) \in T_h, \quad \text{(aplicaţia 1.4.10.)} \\
\delta_3 &= ((\beta \to ((\neg\alpha) \vee \beta)) \to ((\neg((\neg\alpha) \vee \beta)) \to (\neg\beta))) \in T_h, \\
&\quad \text{(aplicaţia 1.4.7.)} \\
\delta_4 &= ((\neg((\neg\alpha) \vee \beta)) \to (\neg\beta)), \quad \frac{\delta_2, \delta_3}{\delta_4} MP \\
\delta_5 &= (\neg\beta), \quad \frac{\delta_1, \delta_4}{\delta_5} MP.
\end{aligned}$$

Obţinem $H \cup \neg\Gamma \vdash (\neg\beta)$, deci $H \cup \neg\Gamma \vdash \{(\neg\beta)\}$, ceea ce implică $H \cup \neg\Gamma \cup \{\beta\} \vdash \perp$, deci $H \cup \{\beta\} \vdash \Gamma$.

Considerăm de asemenea $\Delta-$ secvenţa deductivă

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (\neg((\neg\alpha) \vee \beta)) \in T(\Delta) \\
\gamma_2 &= (((\neg\alpha) \to ((\neg\alpha) \vee \beta))) \in T_h, \quad \text{(aplicaţia 1.4.10.)} \\
\gamma_3 &= (((\neg\alpha) \to ((\neg\alpha) \vee \beta)) \to ((\neg((\neg\alpha) \vee \beta)) \to \alpha)) \in T_h, \\
&\quad \text{(aplicaţia 1.4.8.)} \\
\gamma_4 &= ((\neg((\neg\alpha) \vee \beta)) \to \alpha), \quad \frac{\gamma_2, \gamma_3}{\gamma_4} MP \\
\gamma_5 &= \alpha, \quad \frac{\gamma_1, \gamma_4}{\gamma_5} MP.
\end{aligned}$$

Obţinem $H \cup \neg\Gamma \vdash \alpha$, deci $H \cup \neg\Gamma \vdash \{\alpha\}$, ceea ce implică
$H \cup \neg\Gamma \cup \{(\neg\alpha)\} \vdash \perp$, deci $H \cup \neg(\Gamma \cup \{\alpha\}) \vdash \perp$,

adică $H \vdash \Gamma \cup \{\alpha\}$.

Dacă $H \cup \{\beta\} \vdash \Gamma$ şi $H \vdash \Gamma \cup \{\alpha\}$, atunci rezultă $H \cup \urcorner\Gamma \vdash \{\alpha\}$ şi $H \cup \urcorner\Gamma \vdash \{(\urcorner\beta)\}$, deci $H \cup \urcorner\Gamma \vdash \alpha$ şi $H \cup \urcorner\Gamma \vdash (\urcorner\beta)$.

Fie $\Omega = H \cup \urcorner\Gamma \cup \{(\alpha \to \beta)\}$, evident $\{\alpha, (\urcorner\beta)\} \subset T(\Omega)$. Considerăm $\Omega-$ secvenţa deductivă

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \alpha \in T(\Omega)\\
\theta_2 &= (\alpha \to \beta) \in \Omega\\
\theta_3 &= \beta, \quad \frac{\theta_1, \theta_2}{\theta_3} MP\\
\theta_4 &= (\urcorner\beta) \in T(\Omega)\\
\theta_5 &= ((\urcorner\beta) \to (\beta \to \perp)) \in T_h, \quad \text{(aplicaţia 1.4.5.)}\\
\theta_6 &= (\beta \to \perp), \quad \frac{\theta_4, \theta_5}{\theta_6} MP\\
\theta_7 &= \perp .
\end{aligned}$$

Rezultă $H \cup \urcorner\Gamma \cup \{(\alpha \to \beta)\} \vdash \perp$, deci $H \cup \{(\alpha \to \beta)\} \vdash \Gamma$.

$\nu\iota$) Presupunem $H \vdash \Gamma \cup \{(\alpha \wedge \beta)\}$, deci $H \cup \urcorner\Gamma \cup \{(\urcorner(\alpha \wedge \beta))\} \vdash \perp$.

Din demonstraţia formală

$$\begin{aligned}
\vartheta_1 &= ((\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\urcorner((\urcorner\alpha) \vee (\urcorner\beta)))) = \overline{\alpha_9}\{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\}\\
\vartheta_2 &= ((\alpha \wedge \beta) \to (\urcorner((\urcorner\alpha) \vee (\urcorner\beta)))), \quad \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} EI\\
\vartheta_3 &= (((\alpha \wedge \beta) \to (\urcorner((\urcorner\alpha) \vee (\urcorner\beta))))\\
&\to ((\urcorner(\urcorner((\urcorner\alpha) \vee (\urcorner\beta)))) \to (\urcorner(\alpha \wedge \beta)))) \in T_h\\
\vartheta_4 &= ((\urcorner(\urcorner((\urcorner\alpha) \vee (\urcorner\beta)))) \to (\urcorner(\alpha \wedge \beta))), \quad \frac{\vartheta_2, \vartheta_3}{\vartheta_4} MP\\
\vartheta_5 &= (((\urcorner\alpha) \vee (\urcorner\beta)) \to (\urcorner(\urcorner((\urcorner\alpha) \vee (\urcorner\beta))))) \in T_h,\\
&\quad \text{(aplicaţia 1.4.6.)}\\
\vartheta_6 &= (((\urcorner\alpha) \vee (\urcorner\beta)) \to (\urcorner(\alpha \wedge \beta))), \quad \frac{\vartheta_5, \vartheta_4}{\vartheta_6} RS\\
\vartheta_7 &= ((\urcorner((\urcorner\alpha) \vee (\urcorner\beta))) \to (\alpha \wedge \beta)), \quad \frac{\vartheta_1}{\vartheta_7} EI\\
\vartheta_8 &= (((\urcorner((\urcorner\alpha) \vee (\urcorner\beta))) \to (\alpha \wedge \beta))\\
&\to ((\urcorner(\alpha \wedge \beta)) \to (\urcorner(\urcorner((\urcorner\alpha) \vee (\urcorner\beta)))))) \in T_h\\
\vartheta_9 &= ((\urcorner(\alpha \wedge \beta)) \to (\urcorner(\urcorner((\urcorner\alpha) \vee (\urcorner\beta))))), \quad \frac{\vartheta_7, \vartheta_8}{\vartheta_9} MP
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vartheta_{10} &= ((\urcorner(\urcorner((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta))))\rightarrow((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta)))\in T_h \\
&\quad\text{(aplicaţia 1.4.6.)} \\
\vartheta_{11} &= ((\urcorner(\alpha\wedge\beta))\rightarrow((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta))), \quad \frac{\vartheta_9,\vartheta_{10}}{\vartheta_{11}}RS
\end{aligned}
$$

rezultă

$$\{(((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta))\rightarrow(\urcorner(\alpha\wedge\beta))),((\urcorner(\alpha\wedge\beta))\rightarrow((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta)))\}\subset T_h,$$

deci

$$T(H\cup\urcorner\Gamma\cup\{(\urcorner(\alpha\wedge\beta))\})=T(H\cup\urcorner\Gamma\cup\{((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta))\}).$$

Obţinem astfel $H\cup\urcorner\Gamma\cup\{((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta))\}\vdash\perp$, deci, aplicând teorema deducţiei, rezultă $H\cup\urcorner\Gamma\vdash(((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta))\rightarrow\perp)$.

Fie $H_1=H\cup\urcorner\Gamma\cup\{(\urcorner\alpha)\}$, $H_2=H\cup\urcorner\Gamma\cup\{(\urcorner\beta)\}$; evident,

$$H_j\vdash(((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta))\rightarrow\perp),\quad j=1,2.$$

Construim H_1- secvenţa deductivă

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= (\urcorner\alpha) \\
\gamma_2 &= ((\urcorner\alpha)\rightarrow((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta)))\in T_h, \quad \text{(aplicaţia 1.4.10.)} \\
\gamma_3 &= ((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta)), \quad \frac{\gamma_1,\gamma_2}{\gamma_3}MP \\
\gamma_4 &= (((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta))\rightarrow\perp)\in T(H_1) \\
\gamma_5 &= \perp, \quad \frac{\gamma_3,\gamma_4}{\gamma_5}MP,
\end{aligned}
$$

deci $H\cup\urcorner\Gamma\cup\{(\urcorner\alpha)\}\vdash\perp$, adică $H\vdash\Gamma\cup\{\alpha\}$.

Analog,

$$
\begin{aligned}
\eta_1 &= (\urcorner\beta) \\
\eta_2 &= ((\urcorner\beta)\rightarrow((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta)))\in T_h, \quad \text{(aplicaţia 1.4.10.)} \\
\eta_3 &= ((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta)), \quad \frac{\eta_1,\eta_2}{\eta_3}MP \\
\eta_4 &= (((\urcorner\alpha)\vee(\urcorner\beta))\rightarrow\perp)\in T(H_1) \\
\eta_5 &= \perp, \quad \frac{\gamma_3,\gamma_4}{\gamma_5}MP,
\end{aligned}
$$

deci $H\cup\urcorner\Gamma\cup\{(\urcorner\beta)\}\vdash\perp$, adică $H\vdash\Gamma\cup\{\beta\}$.

Reciproc, presupunem $H\vdash\Gamma\cup\{\alpha\}$ şi $H\vdash\Gamma\cup\{\beta\}$ deci
$H\cup\urcorner\Gamma\cup\{(\urcorner\alpha)\}\vdash\perp$ şi $H\cup\urcorner\Gamma\cup\{(\urcorner\beta)\}\vdash\perp$.

Aplicând teorema deducţiei, rezultă $H \cup \urcorner\Gamma \vdash ((\urcorner\alpha) \to\perp)$ şi $H \cup \urcorner\Gamma \vdash ((\urcorner\beta) \to\perp)$.

Considerăm $H \cup \urcorner\Gamma-$ secvenţa deductivă

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= ((\urcorner\alpha) \to\perp) \in T(H \cup \urcorner\Gamma)\\
\delta_2 &= (((\urcorner\alpha) \to\perp) \to ((\urcorner \perp) \to \alpha)) \in T_h, \quad \text{(aplicaţia 1.4.8.)}\\
\delta_3 &= ((\urcorner \perp) \to \alpha), \quad \frac{\delta_1, \delta_2}{\delta_3} MP\\
\delta_4 &= (\urcorner \perp) \in T_h\\
\delta_5 &= \alpha, \quad \frac{\delta_4, \delta_3}{\delta_5} MP\\
\delta_6 &= ((\urcorner\beta) \to\perp) \in T(H \cup \urcorner\Gamma)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_7 &= (((\urcorner\beta) \to\perp) \to ((\urcorner \perp) \to \beta)) \in T_h, \quad \text{(aplicaţia 1.4.8.)}\\
\delta_8 &= ((\urcorner \perp) \to \beta), \quad \frac{\delta_6, \delta_7}{\delta_8} MP\\
\delta_9 &= \beta, \quad \frac{\delta_4, \delta_8}{\delta_9} MP\\
\delta_{10} &= (\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))) \in T_h, \quad \text{(aplicaţia 1.4.13.)}\\
\delta_{11} &= (\beta \to (\alpha \wedge \beta)), \quad \frac{\delta_5, \delta_{10}}{\delta_{11}} MP\\
\delta_{12} &= (\alpha \wedge \beta), \quad \frac{\delta_9, \delta_{11}}{\delta_{12}} MP,
\end{aligned}
$$

deci rezultă $H \cup \urcorner\Gamma \vdash (\alpha \wedge \beta)$, adică $H \cup \urcorner\Gamma \vdash \{(\alpha \wedge \beta)\}$ din care obţinem în final $H \vdash \Gamma \cup \{(\alpha \wedge \beta)\}$.

$\nu\iota\iota$) Utilizând proprietăţile stabilite de *Teorema* 1.5.1., rezultă $H \vdash \Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$, dacă şi numai dacă $H \cup \urcorner\Gamma \vdash \{\alpha, \beta\}$, dacă şi numai dacă $H \cup \urcorner\Gamma \vdash \{(\alpha \vee \beta)\}$, dacă şi numai dacă $H \vdash \Gamma \cup \{(\alpha \vee \beta)\}$.

$\nu\iota\iota\iota$) Din aplicaţia 1.4.16. a rezultat

$$\{((\alpha \to \beta) \to ((\urcorner\alpha) \vee \beta)), (((\urcorner\alpha) \vee \beta) \to (\alpha \to \beta))\} \subset T_h.$$

Fie demonstraţia formală

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= ((\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha) \vee \beta)) \in T_h \\
\delta_2 &= (((\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha) \vee \beta)) \\
&\to ((\neg((\neg\alpha) \vee \beta)) \to (\neg(\alpha \to \beta)))) \in T_h \\
\delta_3 &= ((\neg((\neg\alpha) \vee \beta)) \to (\neg(\alpha \to \beta))), \quad \frac{\delta_1, \delta_2}{\delta_3} MP \\
\delta_4 &= (((\neg\alpha) \vee \beta) \to (\alpha \to \beta)) \in T_h \\
\delta_5 &= ((((\neg\alpha) \vee \beta) \to (\alpha \to \beta)) \\
&\to ((\neg(\alpha \to \beta)) \to (\neg((\neg\alpha) \vee \beta)))) \in T_h \\
\delta_6 &= ((\neg(\alpha \to \beta)) \to (\neg((\neg\alpha) \vee \beta))), \quad \frac{\delta_4, \delta_5}{\delta_6} MP.
\end{aligned}$$

Rezultă

$$\{((\neg((\neg\alpha) \vee \beta)) \to (\neg(\alpha \to \beta))), ((\neg(\alpha \to \beta)) \to (\neg((\neg\alpha) \vee \beta)))\} \subset T_h,$$

deci pentru orice mulţime de formule Δ

$$T(\Delta \cup \{(\neg((\neg\alpha) \vee \beta))\}) = T(\Delta \cup \{(\neg(\alpha \to \beta))\}).$$

Obţinem astfel, $H \vdash \Gamma \cup \{(\alpha \to \beta)\}$, dacă şi numai dacă
$H \cup \neg\Gamma \cup \{(\neg(\alpha \to \beta))\} \vdash \perp$ dacă şi numai dacă
$H \cup \neg\Gamma \cup \{(\neg((\neg\alpha) \vee \beta))\} \vdash \perp$ deci, dacă şi numai dacă
$H \cup \neg\Gamma \vdash \{((\neg\alpha) \vee \beta)\}$.

Utilizând rezultatul stabilit de *Teorema* 1.5.1., obţinem în continuare $H \cup \neg\Gamma \vdash \{((\neg\alpha) \vee \beta)\}$, dacă şi numai dacă
$H \cup \neg\Gamma \vdash \{(\neg\alpha), \beta\}$, deci, dacă şi numai dacă $H \cup \{\alpha\} \vdash \Gamma \cup \{\beta\}$.

Lema 1.5.2. Fie H, $\Gamma \subset FORM$. Dacă $H \cap \Gamma \neq \emptyset$, atunci $H \vdash \Gamma$.

Demonstraţie Fie $\alpha \in H \cap \Gamma$, deci $\{\alpha, (\neg\alpha)\} \subset H \cup \neg\Gamma$.

Considerăm următoarea $H \cup \neg\Gamma-$ secvenţă deductivă

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= ((\neg\alpha) \to (\alpha \to \perp)) \in T_h, \quad \text{(aplicaţia 1.4.5.)} \\
\gamma_2 &= (\neg\alpha) \in H \cup \neg\Gamma \\
\gamma_3 &= (\alpha \to \perp), \quad \frac{\gamma_2, \gamma_1}{\gamma_3} MP \\
\gamma_4 &= \alpha \in H \cup \neg\Gamma \\
\gamma_5 &= \perp, \quad \frac{\gamma_4, \gamma_3}{\gamma_5} MP.
\end{aligned}$$

Rezultă $H \cup \neg\Gamma \vdash \perp$, deci $H \vdash \Gamma$.