Laborator 02 - TEMA   Tetculescu Mihai-Ziloiu

1. Să se rezolve următoarele ecuații diferențiale direct integrabile:

b) $x'(t) = \frac{1}{t^2-1}$ (ecuație direct integrabilă)

$x(t) = \int \frac{1}{t^2-1}\,dt = \int \frac{1}{(t+1)(t-1)}\,dt$

$\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} = \frac{t+1-t+1}{(t-1)(t+1)} = \frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(t-1)(t+1)}$

$x(t) = \int \frac{1}{(t+1)(t-1)}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\,dt = \frac{\ln(|t-1|)}{2} - \frac{\ln(|t+1|)}{2} + C$

$x(t) = \frac{\ln(|t-1|) - \ln(|t+1|)}{2} + C$

c) $x'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ (ecuație direct integrabilă)

$x(t) = \int \left(\frac{1}{1+t^2}\right)dt = \operatorname{arctg}(t) + C$

$x(-1) = \operatorname{arctg}(-1) + C = -2 \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} + C = -2 \Rightarrow C = \frac{-(8+3\pi)}{4}$

$x_{PC}(t) = \operatorname{arctg}(t) - \frac{8+3\pi}{4}$

d) $x'(t) = \sin t + 4t^2$ (ecuație direct integrabilă)

$x(t) = \int (\sin t + 4t^2)\,dt = \int \sin t\,dt + 4\int t^2\,dt = -\cos(t) + 4\frac{t^3}{3} + C$

$x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^3}{9} - \frac{\sqrt{2}}{2} + C \Rightarrow C = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{9+4\pi^3}{27}$

$x_{PC}(t) = -\cos(t) + 4\frac{t^3}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{9+4\pi^3}{27}$

2. Să se rezolve următoarele ecuații diferențiale cu variabile separate:

a) $\frac{1}{1+t^2}\,dt + \frac{1}{x}\,dx = 0,\ x > 0,\ t \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{-1}{x}\,dx$ (ecuație cu variabile separate)

$\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = -\int \frac{1}{x}\,dx \Leftrightarrow \operatorname{arctg}(t) + C = -\ln|x|.$

$-\ln|x| = \operatorname{arctg}(t) + C$

$-e^{\ln|x|} = e^{\operatorname{arctg}(t)} + e^{C}$

$-x = e^{\operatorname{arctg}(t)} + C \Leftrightarrow x = -e^{\operatorname{arctg}(t)} + C$

b) $dx + \frac{1}{t^2-9}\,dt = 0,\ t > 3,\ x \in \mathbb{R}$

$dx = -\frac{1}{t^2-9}\,dt$ (ecuație cu variabile separate)

$\int dx = -\int \frac{1}{t^2-9}\,dt \Leftrightarrow x = -\int \frac{1}{(t+3)(t-3)}\,dt = -\frac{1}{6}\int \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3}\right)dt =$

$= -\frac{1}{6}\cdot\left(\ln|t-3|-\ln|t+3|\right)+\mathcal{C} = \frac{-(\ln|t-3|-\ln|t+3|)}{6}+\mathcal{C}$

$\frac{^{t+3)}1}{t-3} - \frac{^{t-3)}1}{t+3} = \frac{t+3-t+3}{(t-3)(t+3)} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(t+3)(t-3)}$

d) $\sin t\,dt - \cos x\,dx = 0,\quad x\in[0,\pi]$

$x(0)=\frac{\pi}{2}$

$\sin t\,dt = \cos x\,dx$ (ecuație cu variabile separate)

$\int \cos x\,dx = \int \sin t\,dt \Leftrightarrow \sin x = -\cos t + \mathcal{C} \Leftrightarrow x = \arcsin(-\cos t + \mathcal{C})$

$x(0)=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arcsin(1+\mathcal{C}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 1+\mathcal{C} = 1 \Leftrightarrow C=0$

$x_{PC}(t) = \arcsin(-\cos t)$

3. Să se rezolve următoarele ecuații diferențiale cu variabile separabile:

a) $(t+1)\cdot x'(t) = 2x-3.$

$\frac{1}{2x-3}dx = \frac{1}{t+1}dt$ (ecuație cu var. separabile)

$\int \frac{1}{2x-3}dx = \int \frac{1}{t+1}dt \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln|2x-3| = \ln|t+1| + \mathcal{C}$

$\ln(|2x-3|)^{\frac{1}{2}} = \ln|t+1| + \mathcal{C} \;|\, e$

$\sqrt{2x-3} = t+1+\mathcal{C}$

$x = \frac{t^2+2t+4}{2} + \mathcal{C} = \frac{(t+2)^2}{2} + \mathcal{C}$

d) $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{1+t}(1-x),\; t>-1,\; x>1$

$x(0)=5$

$\frac{1}{1-x}dx = \frac{t}{1+t}dt$ (ecuație cu var. separabile)

$\int \frac{1}{1-x}dx = \int \frac{1}{1+t}dt \Leftrightarrow -\ln(1-x) = \ln(t+1) + \mathcal{C}$

$\ln(1-x) = -\ln(t+1) + \mathcal{C}$

$x = t+2+\mathcal{C}$

$x(0)=5 \Leftrightarrow 0+2+\mathcal{C} = 5 \Leftrightarrow C=3$

$x_{PC}(t) = t+5$