LOGICA MATEMATICA SI COMPUTATIONALA

(Teme pentru recapitulare și suport teoretic - abordare 2)

Cerință temă:

Să se rezolve exercițiile recapitulative marcate cu font colorat roșu (exercițiile 1, 2, 4, 6, 7, 8 și 9) din acest suport teoretic. Să să se încarce rezolvările pe platforma de elearning la cursul de *Logică matematică și computațională* în zona de teme cu denumirea *Tema1_curs_Nume_Prenume.*

În limbajul comun, prin propoziţie înţelegem o afirmaţie despre care putem decide dacă e adevărată sau falsă. Putem forma propoziţii compuse, cărora de asemenea le asociem o valoare de adevăr, folosind cuvinte precum şi, sau, nu, dacă şi numai dacă etc. Din punct de vedere matematic, o astfel de definiţie nu este satisfăcătoare, fiind necesară o abordare formală.

1.1 Formulele logicii propoziţiilor

Definiţia 1.1.1 a) **Simbolurile logicii propoziţiilor** sunt:

1. Parantezele: (şi).
2. Conectori (simbolurile operaţiilor logice): $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
3. Formule atomice $p, q, r, \ldots, x_1, x_2, \ldots$

b) O **formulă propoziţională** este un şir finit de simboluri ce satisface următoarele reguli:

1. Formulele atomice sunt formule.
2. Dacă A şi B sunt formule, atunci $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ sunt de asemenea formule.
3. Alte formule decât cele descrise mai sus nu există.

Observaţii 1.1.2 a) În limbaj comun, conectorii $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ se citesc *non, şi, sau, dacă ... atunci, dacă şi numai dacă*.

b) Uzual, pentru simplificarea scrierii, unele paranteze pot fi omise prin adoptarea unei ordini de prioritate a conectorilor: $\neg$, apoi $\wedge$ şi $\vee$, apoi $\rightarrow$ şi $\leftrightarrow$. De asemenea, pot fi omise parantezele exterioare.

Exemplul 1.1.3 1) Următoarele şiruri de simboluri sunt formule:
$(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow (\neg s))$,
$((p \vee (\neg q)) \vee r) \rightarrow (s \wedge (\neg s))$,
$((p \rightarrow q) \rightarrow r) \vee (s \wedge r)$,
$(\neg((p \wedge q) \vee (\neg r))) \rightarrow (t \vee p)$,
$((p \vee q) \rightarrow (p \vee r)) \leftrightarrow ((\neg q) \wedge (\neg p))$.

2) Următoarele şiruri de simboluri nu sunt formule:
$p\wedge \rightarrow q$, $p \rightarrow$, $pq \wedge t$, $p \wedge q \vee r\ p \wedge (q \rightarrow \wedge r)$, $(pq \wedge (r \wedge p \neg q)$.

Definiţia 1.1.4 a) Spunem că B **subformulă** a formulei A dacă B este obţinut în cursul construcţiei lui A.

b) Vorbim de **substituţie**, dacă în formula A o formulă atomică p sau o subformulă B este înlocuită cu formula C (notaţie $A(C/p)$ respectiv $A(C/B)$).

Exemplul 1.1.5 1) $p\wedge q$, $t\vee p$ sunt subformule ale formulei $(\neg((p\wedge q)\vee(\neg r))) \rightarrow (t\vee p)$, în timp ce $p \rightarrow (t\vee p)$ nu este.

2) Dacă $A = (\neg((p\wedge q)\vee(\neg r))) \rightarrow (t\vee p)$, atunci pentru $C = r\wedge s$ avem $A(C/p) = (\neg(((r\wedge s)\wedge q)\vee(\neg r))) \rightarrow (t \vee (r \wedge s))$ şi $A(C, p \wedge q) = (\neg((r \wedge s) \vee (\neg r))) \rightarrow (t \vee p)$.

1.2 Interpretarea formulelor propoziţionale

Definiţia 1.2.1 Fie $V = \{0, 1\}$ mulţimea **valorilor de adevăr**. Aici 0 corespunde *falsului*, iar 1 corespunde *adevărului.* O funcţie de n variabile $f : V^n \to V$ se numeşte **funcţie de adevăr**.

O funcţie de adevăr de n variabile poate fi dată printr-un **tabel de adevăr**, care are $n + 1$ coloane şi 2^n linii. Primele n coloane conţin toate combinaţiile posibile ale variabilelor, iar ultima coloană conţine valorile corespunzătoare ale funcţiei.

De asemenea, o funcţie de adevăr poate fi vizualizată cu ajutorul diagramelor Euler-Venn sau cu ajutorul schemelor (circuitelor) cu contacte şi relee.

Definiţia 1.2.2 Cele mai frecvent utilizate funcţii de adevăr sunt **operaţiile logice fundamentale** corespunzătoare celor cinci conectori, pe care le definim mai jos cu ajutorul tabelelor de adevăr:

a) **Negaţia („non"):** $\neg p$, definită prin

p	$\neg p$
0	1
1	0

b) **Conjuncţia („şi"):** $p \wedge q$, definită prin

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

c) **Disjuncţia („sau"):** $p \vee q$, definită prin

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

d) **Implicaţia („dacă ... atunci"):** $p \to q$, definită prin

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

e) **Echivalenţa („dacă şi numai dacă"):** $p \leftrightarrow q$, definită prin

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Definiţia 1.2.3 Dacă A este o formulă şi $\mathcal{A}$ este mulţimea formulelor atomice din A, atunci o **interpretare** a lui A este o funcţie $\nu : \mathcal{A} \to V = \{0, 1\}$. Elementul $\nu(p) \in V$ se numeşte **valoarea de adevăr** a formulei atomice p.

Fie $A = A(p_1, \dots, p_n)$ o formulă ce conţine atomii $p_1, \dots, p_n$, şi fie ν o interpretare a lui A. Notăm cu $\tilde{A} : V^n \to V$ funcţia de adevăr corespunzătoare lui A, obţinută folosind funcţiile logice fundamentale. Atunci **valoarea de adevăr a formulei** A corespunzătoare interpretării ν este dată de:

$$H_\nu(A) := \tilde{A}(\nu(p_1), \dots, \nu(p_n)).$$

Exemplul 1.2.4 în tabelul de mai jos avem interpretările şi valorile de adevăr corespunzătoare pentru formula $A = A(p, q) = ((p \vee q) \wedge (\neg p)) \to q$ (punând în evidenţă şi câteva subformule):

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	A
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1

Vom vedea mai târziu că din Teorema 6.4.6 rezultă următoarea teoremă, pe care o vom folosi în exerciţiile de mai jos.

Teorema 1.2.5 *Orice funcţie de adevăr de $n \geq 1$ variabile poate fi exprimată numai cu ajutorul operaţiilor logice fundamentale.*

Exemplul 1.2.6 În afară de operaţiile logice fundamentale, menţionăm şi următoarele funcţii de adevăr:

1) **Adunarea şi înmulţirea modulo** 2, notate prin simbolurile $\oplus$ respectiv $\odot$.

2) **Funcţia lui Sheffer (non şi; not and):** $p \mid q = \neg(p \wedge q)$. Este adevărat, dacă cel mult unul din p sau q este adevărat.

3) **Funcţia lui Webb–Peirce (nici-nici; neither-nor; non sau; not or):** $p \downarrow q = (\neg p) \wedge (\neg q)$. Este adevărat, dacă niciunul din p şi q nu este adevărat.

4) **Disjuncţia exclusivă (sau-sau; xor):** $p \oplus q = \neg(p \leftrightarrow q)$. Este adevărat, dacă exact unul din p sau q este adevărat.

Exerciţiul 1 Să se întocmească tabelele de adevăr pentru funcţiile din exemplul de mai sus.

Exerciţiul 2 Să se verifice cu ajutorul tabelelor de adevăr următoarele egalităţi între funcţii:

1) $\neg p = 1 \oplus p$.

2) $p \wedge q = p \odot q$.

3) $p \vee q = p \oplus q \oplus p \odot q$.

4) $p \to q = 1 \oplus p \oplus p \odot q$.

5) $p \leftrightarrow q = 1 \oplus p \oplus q$.

Exerciţiul 3 1) Să se scrie toate funcţiile de adevăr de 1 respectiv 2 variabile.

2) Câte funcţii de adevăr de n variabile există?

Exerciţiul 4 Să se arate că orice funcţie de adevăr de $n \geq 1$ variabile poate fi exprimată numai cu ajutorul negaţiei şi conjuncţiei (sau numai cu ajutorul negaţiei şi disjuncţiei. Mai exact, să se verifice următoarele egalităţi:

1) $p \vee q = \neg((\neg p) \wedge (\neg q))$.

2) $p \wedge q = \neg((\neg p) \vee (\neg q))$.

3) $p \to q = \neg(p \wedge (\neg q)) = \neg p \vee q$.

4) $p \leftrightarrow q = (\neg(p \wedge (\neg q))) \wedge (\neg(q \wedge (\neg p)))$.

5) $p \oplus q = (p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q))$.

Exerciţiul 5 Să se arate că orice funcţie de adevăr de $n \geq 1$ variabile poate fi exprimată numai cu ajutorul negaţiei şi implicaţiei. Mai exact, să se scrie conjuncţia, disjuncţia şi echivalenţa cu folosind doar negaţia şi implicaţia.

Exerciţiul 6 Să se arate că orice funcţie de adevăr de $n \geq 1$ variabile poate fi exprimată numai cu ajutorul funcţiei lui Sheffer. Mai exact, să se verifice următoarele egalităţi:

1) $\neg p = p \mid p$.

2) $p \wedge q = (p \mid q) \mid (p \mid q)$.

3) $p \vee q = (p \mid p) \mid (q \mid q)$.

4) $p \to q = p \mid (q \mid q) = p \mid (p \mid q)$.

Exerciţiul 7 Să se arate că orice funcţie de adevăr poate fi exprimată numai cu ajutorul funcţiei lui Webb–Peirce. Mai exact, să se verifice următoarele egalităţi:

0) $p \downarrow q = \neg(p \vee q)$.

1) $\neg p = p \downarrow p$.

2) $p \wedge q = (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$.

3) $p \vee q = (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$.

4) $p \to q = ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$.

Definiţia 1.2.7 a) O formulă se numeşte **realizabilă** dacă are o interpretare pentru care valoarea de adevăr este 1.

b) Dacă nu există o astfel de interpretare formula se numeşte **contradicţie** (**identic falsă**) şi o notăm cu $\mathbf{0}$.

c) O formulă se numeşte **tautologie (identic adevărată)**, dacă pentru orice interpretare valoarea de adevăr este 1, şi atunci o notăm cu $\mathbf{1}$.

Definiţia 1.2.8 Introducem două *relaţii* între formule:

a) Dacă formula $A \to B$ este o tautologie, atunci spunem că formula B **rezultă** din formula A şi notăm $A \Rightarrow B$.

În teoremele din matematică folosim următoarele exprimări: *dacă* A*, atunci* B*;* A *este condiţie suficientă pentru* B*;* B *este condiţie necesară pentru* A.

b) Dacă formula $A \leftrightarrow B$ este o tautologie, atunci spunem că A este **echivalent** cu B, şi notăm $A \Leftrightarrow B$.

În teoremele din matematică folosim următoarele exprimări: A *este condiţie necesară şi suficientă pentru* B*;* B *dacă şi numai dacă* A*;* B *exact atunci când* A*;* A *este echivalent cu* B.

Exemplul 1.2.9 1) Pentru orice formulă A, formula $(\neg A) \vee A$ este tautologie şi $(\neg A) \wedge A$ contradicţie.

2) A este contradicţie dacă şi numai dacă $\neg A$ este tautologie.

3) A este tautologie dacă şi numai dacă $\neg A$ este contradicţie.

4) Dacă $A = p \wedge (\neg p)$, $B = p \vee (\neg p)$, $C = p \to p$, $D = p \to q$, $E = (\neg p) \vee q$, $F = p \leftrightarrow (\neg p)$, atunci B şi C sunt tautologii, A şi F sunt contradicţii, D şi E sunt realizabile. De asemenea, aceste perechi sunt echivalente.

Observaţii 1.2.10 Fie A o tautologie, p o formulă atomică şi B o subformulă a lui A. Atunci pentru orice formulă C, $A(C/p)$ is tautologie. Dacă $C \Leftrightarrow B$, atunci $A(C/B)$ este tautologie.

Teorema 1.2.11 Enumerăm câteva tautologii importante. Fie A, B, C formule propoziţionale.

1) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$, $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ (asociativitate),

2) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$, $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ (comutativitate),

3) $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$, $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$ (absorbţie),

4) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (distributivitate),

5) $A \wedge A \Leftrightarrow A$, $A \vee A \Leftrightarrow A$ (idempotenţă),

6) $A \wedge \mathbf{1} \Leftrightarrow A$, $A \vee \mathbf{0} \Leftrightarrow A$,

7) $A \wedge \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{0}$, $A \vee \mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{1}$,

8) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ (legea dublei negaţii),

9) $A \vee (\neg A) \Leftrightarrow \mathbf{1}$ (legea terţului exclus), $A \wedge (\neg A) \Leftrightarrow \mathbf{0}$ (legea contradicţiei),

10) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$, $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$ (legile lui De Morgan [1])

11) $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$ (legea echivalenţei),

12) $A \to B \Leftrightarrow (\neg A) \vee B$ (legea implicaţiei),

13) $A \to B \Leftrightarrow (\neg B) \to (\neg A)$ (legea contrapoziţiei),

14) $(A \wedge B) \to C \Leftrightarrow A \to (B \to C)$ (legea separării/reunirii premiselor),

15) $A \to (B \to C) \Leftrightarrow B \to (A \to C)$ (legea permutării premiselor),

Exerciţiul 8 Să se verifice tautologiile (1) – (15) din teorema de mai sus cu ajutorul tabelelor de adevăr.

1.3 Problema deciziei

Problema deciziei în logica propoziţiilor înseamnă găsirea unui algoritm care să stabilească dacă o formulă propoziţională este *tautologie, contradicţie, sau realizabilă* precum şi găsirea metodelor corecte de deducţie. Vom discuta trei metode, în principiu echivalente: a tabelelor de adevăr, a formelor normale şi a deducţiei formale bazate pe scheme de deducţie.

1.3.1 Metoda tabelului de adevăr

Am văzut deja în paragraful precedent această metodă, care este eficientă în cazul formulelor cu un număr mic de atomi.

[1] Augustus De Morgan (1806–1871), matematician şi logician britanic.

1.3.2 Metoda formelor normale

Definiţia 1.3.1 Fie $A = A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o formulă propoziţională.

a) A este o **conjuncţie elementară** dacă este o conjuncţie ce are ca factori atomi sau negaţii de atomi.

b) A este o **disjuncţie elementară** dacă este o disjuncţie ce are ca termeni atomi sau negaţii de atomi.

Exemplul 1.3.2 a) Formulele $A = x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3$, $B = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$, $C = \neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3$ sunt conjuncţii elementare.

b) Formulele $A = x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$, $B = x_1 \vee x_2 \vee x_3$, $C = \neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$ sunt disjuncţii elementare.

Definiţia 1.3.3 a) Formula $A = A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are **formă normală conjunctivă** (**FNC**), dacă este o conjuncţie de disjuncţii elementare, adică:

$$A = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m,$$

unde subformula $A_i = A_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o disjuncţie elementară, pentru orice $i = 1, 2, \ldots, m$.

b) Spunem că formula $B = B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are **formă normală disjunctivă** (**FND**), dacă este o disjuncţie de conjuncţii elementare, adică:

$$B = B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_m,$$

unde subformula $B_i = B_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o conjuncţie elementară, pentru orice $i = 1, 2, \ldots, m$.

Observaţii 1.3.4 Orice formulă propoziţională A este logic echivalentă cu o FNC, respectiv cu o FND (nu neapărat unic determinată). Formula A se aduce la o FNC, respectiv la o FND, printr-un şir finit de echivalenţe logice, utilizând legile fundamentale ale logicii propoziţiilor, prezentate în Teorema 1.2.11, astfel:

1. Se exprimă formula A numai cu conectorii $\neg$, $\wedge$, $\vee$, folosind legea implicaţiei şi legea echivalenţei.

2. Se trece negaţia numai asupra atomilor, utilizând legile lui De Morgan şi legea dublei negaţii.

3. Se obţin conjuncţii de disjuncţii (pentru FNC), respectiv disjuncţii de conjuncţii (pentru FND), folosindu-se distributivitatea, absorbţia, idempotenţa, comutativitatea sau asociativitatea.

Exemplul 1.3.5 Fie $A = \neg x \to x \wedge y$. Aplicând cele de mai sus, obţinem

$$A = \neg x \to x \wedge y \Leftrightarrow \neg\neg x \vee (x \wedge y) \Leftrightarrow x \vee (x \wedge y)$$

şi am ajuns astfel la o FND. Mai departe, avem

$$x \vee (x \wedge y) \Leftrightarrow (x \vee x) \wedge (x \vee y)$$

şi obţinem o FNC. Folosind acum idempotenţa avem:

$$(x \vee x) \wedge (x \vee y) \Leftrightarrow x \wedge (x \vee y)$$

şi obţinem o altă FNC. Aplicând absorbţia, avem:

$$x \wedge (x \vee y) \Leftrightarrow x,$$

care este încă o FNC, dar o putem considera şi ca o FND.

Observaţii 1.3.6 Metoda formelor normale se aplică astfel. Fie $C = C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o formulă propoziţională şi fie $A = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m$ o FNC respectiv $B = B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_m$ o FND cu care C este logic echivalentă. Atunci:

a) C este tautologie dacă şi numai dacă în FNC A, pentru orice $i = 1, 2, \ldots, m$, A_i conţine cel puţin un atom împreună cu negaţia sa;

b) C este o contradicţie dacă şi numai dacă în FND B, pentru orice $i = 1, 2, \ldots, m$, B_i conţine cel puţin un atom împreună cu negaţia sa.

Exemplul 1.3.7 Să rezolvăm problema deciziei prin metoda formelor normale.

a) Fie $C = x \wedge \neg y \to x$. Aducem pe C la o formă normală:

$$C = x \wedge \neg y \to x \Leftrightarrow \neg(x \wedge \neg y) \vee x \Leftrightarrow (\neg x \vee \neg\neg y) \vee x \Leftrightarrow (\neg x \vee y) \vee x \Leftrightarrow \neg x \vee y \vee x.$$

Am obţinut formula $A = \neg x \vee y \vee x$, care poate fi privită şi ca FNC, dar şi ca FND. Considerând A ca FNC cu un singur factor, x apare împreună cu negaţia sa $\neg x$, deci φ este o tautologie.

b) Fie $C = \neg x \wedge (\neg x \vee y \to x)$. Aducem C la o formă normală:

$$C = \neg x \wedge (\neg x \vee y \to x) \Leftrightarrow \neg x \wedge (\neg(\neg x \vee y) \vee x) \Leftrightarrow \neg x \wedge ((\neg\neg x \wedge \neg y) \vee x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \neg x \wedge ((x \wedge \neg y) \vee x) \Leftrightarrow (\neg x \wedge x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge x)$$

Am obţinut FND $B = (\neg x \wedge x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge x)$. În fiecare termen al lui B, apare atomul x împreună cu negaţia sa $\neg x$, deci C este o contradicţie.

c) Fie $C = (x \to y) \wedge (y \to z)$. Aducem C la o formă normală:

$$C = (x \to y) \wedge (y \to z) \Leftrightarrow (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z).$$

Am obţinut FNC $A = (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z)$, şi vedem că C nu este tautologie. Determinăm şi o FND:

$$A = (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \Leftrightarrow (\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge z) \vee (y \wedge \neg y) \vee (y \wedge z).$$

Am obţinut FND $B = (\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge z) \vee (y \wedge \neg y) \vee (y \wedge z)$, din care citim că C nu este contradicţie, deci C este o formulă realizabilă.

Exerciţiul 9 Să se aducă la formă normală conjunctivă şi la formă normală disjunctivă şi să se rezolve problema deciziei pentru formulele:

1) $((x \to y) \to (z \to \neg x)) \to (\neg y \to \neg z)$.
2) $((((x \to y) \to \neg x) \to \neg y) \to \neg z) \to z$.
3) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to \neg z) \to (x \to \neg y))$.
4) $(\neg x \to \neg y) \to ((y \wedge z) \to (x \wedge z))$.
5) $((x \to y) \to \neg x) \to (x \to (y \wedge x))$.
6) $\neg((x \wedge y) \to \neg x) \wedge \neg((x \wedge y) \to \neg y)$.
7) $(z \to x) \to (\neg(y \vee z) \to x)$.
8) $\neg((x \wedge y) \to x) \vee (x \wedge (y \vee z))$.
9) $\neg(x \wedge (y \vee z)) \to \neg((x \wedge y) \vee z)$.

1.3.3 Scheme de deducţie

Definiţia 1.3.8 Spunem că formula propoziţională B este **consecinţă** a mulţimii de formule $\Sigma = \{A_1, \dots, A_n\}$ (unde $n \geq 0$), dacă orice interpretare care face $A_1, \dots, A_n$ adevărate, face şi formula B adevărată.

Notăm aceasta prin

$$A_1, \dots, A_n \models B \qquad \text{sau} \qquad \Sigma \models B \qquad \text{sau} \qquad \frac{A_1, \dots, A_n}{B}$$

şi o numim **schemă de deducţie (inferenţă)**. Formulele $A_1, \dots, A_n$ se numesc **premise**, iar B se numeşte **concluzie**.

Este evident din definiţie că avem $A_1, \dots, A_n \models B$ exact când formula

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \to B$$

este tautologie, adică are loc relaţia $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B$.

Mai general, dacă $\Gamma = \{B_1, \dots, B_m\}$ este o mulţime de formule, atunci notăm $\Sigma \models \Gamma$ dacă $\Sigma \models B_j$ pentru orice $j = 1, \dots, m$.

Observaţii 1.3.9 1) Dacă în particular $n = 0$ (adică $\Sigma = \emptyset$), atunci înseamnă că B este tautologie (respectiv fiecare formulă din Γ este tautologie).

2) Are loc $\Sigma \models \Gamma$ dacă şi numai dacă formula $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \to (B_1 \wedge \dots \wedge B_m)$ este tautologie.

3) Are loc proprietatea de *reflexivitate* $A \models A$, deoarece formula $A \to A$ este tautologie, pe baza legii implicaţiei şi a legii terţului exclus. Mai general, dacă $\Gamma \subseteq \Sigma$ sunt mulţimi de formule, atunci $\Sigma \models \Gamma$.

Exemplul 1.3.10 Prezentăm mai jos câteva scheme de deducţie ale logicii clasice (aristotelice[2]). Ele pot fi verificate uşor cu ajutorul tabelelor de adevăr şi sunt frecvent utilizate în demonstrarea teoremelor din matematică. Să observăm că unele variante se obţin din altele înlocuind o formulă cu negaţia ei.

1. **Moduri clasice de argumentare.**
   (a) $\frac{A,\ A \to B}{B}$ **(modus ponendo ponens** sau pe scurt **modus ponens (MP))**[3]

[2]Aristotel (384–322 BC), filosof grec. Contribuţiie sale la Logică sunt colectate în *Organon*.
[3]modul de a afirma prin afirmare

(b) $\frac{\neg A,\ \neg A \to \neg B}{\neg B}$ **(modus tollendo tollens)** [4]

(c) $\frac{\neg A,\ \neg A \to B}{B}$ **(modus tollendo ponens)**

(d) $\frac{A,\ A \to \neg B}{\neg B}$ **(modus ponendo tollens)**

2. **Reductio ad absurdum.**

   (a) $\frac{B,\ \neg A \to \neg B}{A}$; $\frac{\neg B,\ \neg A \to B,}{A}$; $\frac{B,\ A \to \neg B}{\neg A}$; $\frac{\neg B,\ A \to B}{\neg A}$.

   (b) $\frac{(\neg A) \to B,\ (\neg A) \to (\neg B)}{A}$; $\frac{A \to B,\ A \to (\neg B)}{\neg A}$.

3. **Contrapoziţie.**

$$\frac{A \to B}{\neg B \to \neg A}$$

4. **Silogism ipotetic.**

$$\frac{A \to B, B \to C}{A \to C}$$

5. **Silogism disjunctiv.**

$$\frac{A \vee B,\ \neg A}{B}$$

6. **Metoda analizei cazurilor.**

$$\frac{B \vee C,\ B \to A,\ C \to A}{A}$$

Exerciţiul 10 Să se verifice validitatea schemelor de deducţie de mai sus cu ajutorul tabelelor de adevăr, respectiv folosind metoda formelor normale.

Observaţii 1.3.11 Prezentăm câteva proprietăţi generale ale schemelor de deducţie, care sunt utile în demonstrarea teoremelor din matematică:

1. Dacă $A_1, \dots, A_n \models B_j$ (pentru orice $j = 1, \dots, m$) şi $B_1, \dots, B_m \models C$, atunci $A_1, \dots, A_n \models C$ (aceasta este proprietatea de *tranzitivitate*, care generalizează silogismul ipotetic).

2. Dacă $A_1 \models A_2, \dots, A_{n-1} \models A_n$, şi $A_n \models A_1$, atunci formulele $A_1, \dots, A_n$ sunt echivalente (aceasta este **metoda demonstraţiei ciclice**).

3. $\Sigma \cup \{A\} \models B$ dacă şi numai dacă $\Sigma \models A \to B$.

Exerciţiul 11 Să se demonstreze proprietăţile de mai sus.

Observaţii 1.3.12 Multe demonstraţii din matematică devin mai uşoare dacă înlocuim o schemă dată cu una echivalentă.

1. **Demonstraţie directă**: înlocuim $\frac{A}{B \to C}$ cu $\frac{A, B}{C}$ (adică *reunim premisele*).

2. **Demonstraţie prin contrapoziţie**: înlocuim $\frac{A,\ B}{C}$ cu $\frac{A,\ \neg C}{\neg B}$.

3. **Demonstraţie indirectă (reducere la absurd)**: în loc de $\frac{A}{B}$ arătăm că $A \wedge (\neg B)$ este contradicţie.

Exerciţiul 12 Să se demonstreze echivalenţa schemelor de deducţie de mai sus.

[4] modul de a nega prin negare

1.3.4 Deducţie formală

O altă abordare a problemei deciziei se bazează pe manipularea simbolurilor pornind de la câteva axiome şi scheme de deducţie şi nu face apel la interpretarea formulelor. Vom vedea că metoda deducţiei formale este echivalentă cu cea bazată pe tabele de adevăr.

1.3.13 Prezentăm aici pe scurt *calculul lui Hilbert.*[5] (Există şi alte abordări, cum ar fi *calculul secvenţial al lui Gentzen.*) Această metodă porneşte cu următoarele date:

- câteva tautologii speciale, numite **axiomele logicii propoziţiilor**.

  A1: $A \to (B \to A)$

  A2: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

  A3: $((\neg B) \to (\neg A)) \to (((\neg B) \to A) \to B))$, unde A, B, C sunt formule arbitrare;

- schema de deducţie **Modus Ponens (MP)**, adică $\frac{A, A \to B}{B}$.

Exerciţiul 13 Să se verifice că formulele **A1**, **A2** şi **A3** de mai sus sunt tautologii, folosind metoda tabelelor de adevăr, respectiv metoda formelor normale.

Definiţia 1.3.14 Fie acum $A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 0$) formule propoziţionale. O **deducţie** din formulele $A_1, \dots, A_n$ (numite **premise** sau **ipoteze**) este un şir finit $E_1, \dots, E_k$ de formule astfel încât pentru orice $i = 1, \dots, k$ avem:

(1) E_i este axiomă, sau

(2) există l astfel încât $E_i = A_l$, sau

(3) E_i se obţine din E_j, E_l ($j, l < i$) folosind schema (MP).

Definiţia 1.3.15 a) Spunem că formula B **deductibilă** din formulele $A_1, \dots, A_n$ (notaţie: $A_1, \dots, A_n \vdash B$), dacă B este ultimul termen al unei deducţii din formulele $A_1, \dots, A_n$. Dacă $n = 0$, atunci notăm $\vdash B$.

Definiţia se generalizează imediat la cazul a două mulţimi de formule Σ şi Γ; notăm $\Sigma \vdash \Gamma$ dacă $\Sigma \vdash B$ pentru orice $B \in \Gamma$.

b) Spunem că mulţimea de formule Σ este **contradictorie**, dacă există o formulă A, astfel ca $\Sigma \vdash A$ şi $\Sigma \vdash \neg A$. Altfel, spunem că Σ este **consistentă**.

Exemplul 1.3.16 a) Să se arate că $\vdash A \to A$.

1. $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ A2
2. $A \to ((A \to A) \to A)$ A1
3. $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ 1,2 MP
4. $A \to (A \to A)$ A1
5. $A \to A$ 3,4 MP

b) Să se arate că $A \to B,\ B \to C \vdash A \to C$.

1. $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$ A1
2. $B \to C$ Ipoteză
3. $A \to (B \to C)$ 1,2 MP
4. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ A2
5. $(A \to B) \to (A \to C)$ 4,3 MP
6. $A \to B$ Ipoteză
7. $A \to C$ 5,6 MP

c) Să se arate că $A,\ \neg A \vdash B$.

1. $\neg A$ Ipoteză

[5] David Hilbert (1862–1943), matematician german. Între multele sale contribuţii, a fost unul din fondatorii teoriei demonstraţiei şi un susţinător al teoriei mulţimilor create de Georg Cantor.

2. $(\neg A) \to ((\neg B) \to (\neg A))$ A1

3. $(\neg B) \to (\neg A)$ 1,2 MP

4. A Ipoteză

5. $A \to ((\neg B) \to A)$ A1

6. $(\neg B) \to A$ 4,5 MP

7. $((\neg B) \to (\neg A)) \to (((\neg B) \to A) \to B)$ A3

8. $((\neg B) \to A) \to B$ 3,7 MP

9. B 6,8 MP

Vedem că această metodă nu e foarte uşor de aplicat. Următoarele observaţii simplifică oarecum lucrurile.

Observaţii 1.3.17 a) Dacă $\Sigma \vdash B$ şi $\Sigma \vdash B \to C$, atunci $\Sigma \to C$.
b) Dacă $\Sigma \subseteq \Delta$ şi $\Sigma \vdash B$, atunci $\Delta \vdash B$.
c) Dacă $\Sigma \vdash \Gamma$ şi $\Gamma \vdash B$, atunci $\Sigma \vdash B$.
d) Dacă $\Sigma \vdash B \wedge \neg B$, atunci $\Sigma \vdash C$ pentru orice formulă C .
e) (*Teorema lui Herbrand*[6]*, 1930*): $\Sigma \vdash B \to C$ dacă şi numai dacă $\Sigma \cup \{B\} \vdash C$.

Exemplul 1.3.18 Pentru a arăta că $A \to B, B \to C \vdash A \to C$ este suficient de arătat că $A,\ A \to B,\ B \to C \vdash C$. Pentru aceasta, avem:

1. A Ipoteză

2. $A \to B$ Ipoteză

3. B 1,2 MP

4. $B \to C$ Ipoteză

5. C 3,4 MP.

[6]Jacques Herbrand (1908–1931), matematician francez.