Matricea asociată unui operator liniar

Def

Fie $T: U \to W$, o aplicație liniară și $\dim_K U = n$, $\dim_K W = m$.

Fie $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\} \subset U$ o bază a lui U și

$B' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots \vec{f}_m\} \subset W$ o bază a lui W

Matricea $A_T = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ care are pe coloane coordonatele vectorilor $T(\vec{e}_j)$, $j=\overline{1,n}$ exprimate în baza B' se numește matricea operatorului T în bazele B și B'.

$$A_T = \left(T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2) \dots T(\vec{e}_n)\right) \in M_{m,n}(K)$$

Ex Dacă $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$, atunci matricea asociată lui T în bazele canonice $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, $B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

deoarece:

$$T(\vec{e}_1) = T(1,0) = (1-0, 1+0, 1+3\cdot 0) = (1,1,1)$$
$$= (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1)$$
$$= 1\cdot \vec{e}'_1 + 1\cdot \vec{e}'_2 + 1\cdot \vec{e}'_3$$

$$T(\vec{e}_2) = T(0,1) = (0-2\cdot 1, 0+1, 0+3\cdot 1) = (-2,1,3)$$
$$= (-2,0,0) + (0,1,0) + (0,0,3)$$
$$= -2(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 3\cdot(0,0,1)$$
$$= -2\vec{e}'_1 + 1\cdot \vec{e}'_2 + 3\cdot \vec{e}'_3$$

Teoremă

Fie $T: U \to W$ o aplicație liniară și $\dim_k U = n$, $\dim_k W = m$.

Fie $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\} \subset U$ o bază a lui U

$B' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots \vec{f}_m\} \subset W$ o bază a lui W

și $A_T = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ matricea asociată lui T în raport cu aceste baze.

Dacă $\vec{x}_{[B]} = (x_1, x_2, \dots x_n)$ și $\left(T(\vec{x})\right)_{[B']} = (y_1, y_2, \dots y_m)$,

atunci

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A_T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Teoremă

Fie U și W două K-spații vectoriale finit dimensionale.

Fie B, B_1 două baze în U și B', B'_1 două baze în W.

Fie M_{BB_1} matricea de trecere de la baza B la B_1 și

$M_{B'B'_1}$ matricea de trecere de la baza B' la B'_1.

Dacă $T: U \to W$ este o aplicație liniară cu B_T matricea asociată lui T în raport cu bazele B_1 și B'_1, atunci

$$B_T = M^{-1}_{B_1, B'_1} \, A_T \, M_{BB'}$$

Ex

Fie operatorul $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2, 3x_1 + 2x_2)$

Să se scrie matricea atașată operatorului în bazele canonice ale lui $\mathbb{R}^2$ și $\mathbb{R}^3$, precum și în bazele $G = \{(1,0), (1,1)\}$; $H = \{(1,1,0), (0,1,0), (2,0,3)\}$

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Fie $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$
$B' = \{\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\}$ – bazele canonice ale lui $\mathbb{R}^2$, respectiv $\mathbb{R}^3$

$$B_T = M^{-1}_{B'H} \cdot A_T \cdot M_{BG}$$

$$M^{-1}_{B'H} = M_{HB'}$$

	$\vec{h}_1$	$\vec{h}_2$	$\vec{h}_3$	$\vec{e}\,'_1$	$\vec{e}\,'_2$	$\vec{e}\,'_3$
$\vec{e}\,'_1$	$\boxed{1}$	0	2	1	0	0
$\vec{e}\,'_2$	1	1	0	0	1	0
$\vec{e}\,'_3$	0	0	3	0	0	1
$\vec{h}_1$	1	0	2	1	0	0
$\vec{e}\,'_2$	0	$\boxed{1}$	-2	-1	1	0
$\vec{e}\,'_3$	0	0	3	0	0	1
$\vec{h}_1$	1	0	2	1	0	0
$\vec{h}_2$	0	1	-2	-1	1	0
$\vec{e}\,'_3$	0	0	$\boxed{3}$	0	0	1
$\vec{h}_1$	1	0	0	1	0	-2/3
$\vec{h}_2$	0	1	0	-1	1	2/3
$\vec{h}_3$	0	0	1	0	0	1/3

$$M_{HB'} = M^{-1}_{B'H}$$

$$M_{BG} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ -1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{4}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4/3 \\ 1 & 7/3 \\ 1 & 5/3 \end{pmatrix}$$

Legătura între operațiile cu aplicații liniare și matricele asociate:

Fie $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V_n, W_m)$. Atunci

1) $(T_1 + T_2)(\vec{x}) = (A_{T_1} + A_{T_2}) \cdot \vec{x}$

2) $(\alpha T)(\vec{x}) = (\alpha \cdot A_T) \cdot \vec{x}$

3) Dacă $T : V_n \to W_m$ este aplicație liniară bijectivă, atunci $A_{T^{-1}} = (A_T)^{-1}$.

<u>Ex</u> Să se determine inversa aplicației liniare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 - 3x_2)$, în cazul în care T este aplicație liniară bijectivă.

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

A_T inversabilă $\Leftrightarrow T$ bijectivă

$\det A_T = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \Rightarrow$, $A_T^{t} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A_T)^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix} = A_{T^{-1}}$$

$$\Rightarrow T^{-1}(\vec{x}) = \left(\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2, \quad \frac{2}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 \right)$$

Temă

Să se determine inversele următoarelor aplicații liniare:

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$

b) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

Vectori și valori proprii

Def

Fie $T: V \to V$ un endomorfism.

Un scalar $\lambda \in K$ se numește valoare proprie pentru T dacă există $\vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq \vec{0}_V$ a.î. $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$.

Vectorul $\vec{v}$ s.n. vector propriu al endomorfismului T.

Obs

Mulțimea tuturor vectorilor proprii corespunzători valorii proprii λ este un subspațiu al lui V, notat cu V_λ și numit subspațiul propriu asociat valorii proprii λ.

$$V_\lambda = \{ \vec{v} \in V / T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \}$$

$m_\lambda = \dim_K V_\lambda$ se numește multiplicitatea geometrică a valorii proprii λ.

Obs

Valorile proprii corespunzătoare unui endomorfism se determină rezolvând ec.

$$\det(A_T - \lambda I_n) = 0. \quad \text{(ecuație caracteristică)}$$

Vectorii proprii corespunzători unei valori proprii λ sunt soluțiile ec. vectoriale

$$(A_T - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0}. \quad \text{(polinom caracteristic)}$$

Ex Să se determine valorile și vectorii proprii aplicației liniare $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1)$

Rezolvare

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_T - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A_T - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1$

Pt. $\lambda_1 = 1$, vectorii proprii se determină rezolvând ecuația

$$(A_T - \lambda_1 I_2)\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow (A_T - 1 \cdot I_2)\vec{u} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 3u_1 - 2u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 3u_1 - 2u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = \frac{3}{2} u_1$

Fie $u_1 = 2 \Rightarrow$ Un vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este $\vec{u}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Pt. $\lambda_2 = -1$, vectorii proprii se determină rezolvând ec.

$$(A_T - \lambda_2 I_2) \cdot \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow (A_T + 1 \cdot I_2) \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2u_1 \\ 3u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 2u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0$
$u_2 \in \mathbb{R}$

Fie $u_2 = 1 \Rightarrow$ Un vector propriu coresp. val. proprii $\lambda_2 = -1$ este $\vec{u}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Prop Vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte două câte două, sunt liniar independenți.

Lemă

Dacă operatorul $T: V \to V$ are n vectori proprii liniar independenți, atunci există o bază în care matricea asociată lui T are forma diagonală

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Def O aplicație liniară este diagonalizabilă dacă există o bază în care matricea sa are forma diagonală.
O matrice pătratică A este diagonalizabilă dacă există o matrice T inversabilă a.î. $T^{-1} \cdot A \cdot T$ are formă diagonală.

Ex Fie $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 3x_3,\ 2x_2 - x_3,\ -x_3)$
Să se determine valorile și vectorii proprii coresp. lui T.

Rez

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Valorile proprii le găsim rezolvând ec. caracteristice

$$\det(A_T - \lambda I_3) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1$ (valori proprii distincte)

Pt. $\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} u_2 + 3u_3 \\ u_2 - u_3 \\ -2u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_2 + 3u_3 = 0 \\ u_2 - u_3 = 0 \\ -2u_3 = 0. \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_3 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_1 \in \mathbb{R} \end{matrix}$

Un vector propriu $\vec{u}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pt. $\lambda_2 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -u_1 + u_2 + 3u_3 \\ -u_3 \\ -3u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -u_1 + u_2 + 3u_3 = 0 \\ -u_3 = 0 \\ -3u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u_3 = 0 \\ u_1 = u_2 \end{matrix}$

Un vector propriu $u_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pt. $\lambda_3 = -1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2u_1 + u_2 + 3u_3 \\ 3u_2 - u_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2u_1 + u_2 + 3u_3 = 0 \\ 3u_2 - u_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow u_3 = 3u_2$

$2u_1 + u_2 + 9u_2 = 0 \Rightarrow 2u_1 = -10u_2 \Rightarrow u_1 = -\frac{10}{2}u_2 = -5u_2$

Un vector propriu îl obținem pt. $u_2 = 1 \Rightarrow \vec{u}_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Calculăm $T^{-1} A \cdot T$

$\det T = 3$

$$T^{t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad T^{*} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$