Probabilități și Statistică Matematică

Seminar 25.03.2021

Formula lui Bayes.

1. Un sortiment de marfă dintr-o unitate comercială provine de la trei fabrici diferite în proporții, respectiv 1/3 de la prima fabrică, 1/6 de la a doua fabrică și restul de la fabrica a treia. Produsele de la cele trei fabrici satisfac standardele de fabricație în proporție de 90%, 95% și respectiv 92%. Un client ia la întâmplare o bucată din sortimentul de marfă respectiv.

a) Care este probabilitatea ca produsul să satisfacă standardele de fabricație?

b) Care este probabilitatea ca produsul să fie defect și să provină de la prima fabrică?

Rezolvare

Considerăm A_i = „produsul provine de la fabrica i", $i=\overline{1,3}$

$$P(A_1)=\frac{1}{3};\quad P(A_2)=\frac{1}{6};\quad P(A_3)=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=1-\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Fie A = „produsul satisface standardele de fabricație"

$$P(A|A_1)=0{,}9;\quad P(A|A_2)=0{,}95;\quad P(A|A_3)=0{,}92$$

a) Folosind formula prob. totale obținem:

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A|A_1)+P(A_2)\cdot P(A|A_2)+P(A_3)\cdot P(A|A_3)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 0{,}9+\frac{1}{6}\cdot 0{,}95+\frac{1}{2}\cdot 0{,}92$$

$$=\frac{5{,}57}{6}=0{,}928$$

b) $$P(A_1|\bar{A}) \underset{=}{\text{BAYES}} \frac{P(A_1)\cdot P(\bar{A}|A_1)}{P(A_1)\cdot P(\bar{A}|A_1)+P(A_2)\cdot P(\bar{A}|A_2)+P(A_3)\cdot P(\bar{A}|A_3)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}1}{\frac{1}{3}\cdot 0{,}1+\frac{1}{6}\cdot 0{,}05+\frac{1}{2}\cdot 0{,}008}=\frac{0{,}2}{0{,}49}=0{,}408$$

2. În magazia unei uzine se găsesc piese de același fel provenite de la cele 3 secții ale uzinei. Se știe că prima secție produce 25% din totalul pieselor, a doua 35%, iar a treia 40% și că rebuturile sunt de 2%, 3% și 1% pt. fiecare secție.

a) Să se calc. prob. ca luând la întâmplare o piesă din magazie aceasta să fie necorespunzătoare.

b) Să se calc. prob. ca piesa obținută și care nu coresp. condițiilor standard să provină de la secția întâi.

Rezolvare

Fie A_i = „piesa provine de la uzina i", $i=\overline{1,3}$

$$P(A_1)=\frac{25}{100}\;;\quad P(A_2)=\frac{35}{100}\;;\quad P(A_3)=\frac{40}{100}\;;$$

a) Notăm A = „piesa este necoresp."

$$P(A|A_1)=\frac{2}{100}\;;\quad P(A|A_2)=\frac{3}{100}\;;\quad P(A|A_3)=\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow P(A)=P(A_1)\cdot P(A|A_1)+P(A_2)\cdot P(A|A_2)+P(A_3)\cdot P(A|A_3)$$

$$=\frac{25}{100}\cdot\frac{2}{100}+\frac{35}{100}\cdot\frac{3}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{1}{100}$$

$$=\frac{195}{10000}=0{,}0195$$

b) $$P(A_1|A)\overset{\text{Bayes}}{=}\frac{P(A_1)\cdot P(A|A_1)}{P(A_1)\cdot P(A|A_1)+P(A_2)\cdot P(A|A_2)+P(A_3)\cdot P(A|A_3)}=$$

$$=\frac{\frac{25}{100}\cdot\frac{2}{100}}{\frac{25}{100}\cdot\frac{2}{100}+\frac{35}{100}\cdot\frac{3}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{1}{100}}=0{,}256.$$

Scheme Probabilistice

1. Cons. trei urne cu următoarea compoziție: U_1 cont. 10 bile albe și 4 bile negre, U_2 cont. 5 bile albe și 3 bile negre, U_3 conține 2 bile albe și 6 bile negre. Care este probabilitatea ca, luând la întâmplare o bilă din fiecare urnă, să obținem 2 bile albe și una neagră?

Schema lui Poisson $\Rightarrow$ coef lui X^2 din polinomul Q:

$Q = (p_1X + q_1)(p_2X + q_2)(p_3X + q_3)$, unde:

- $p_1 = \frac{5}{7} \Leftrightarrow q_1 = \frac{2}{7}$
- $p_2 = \frac{5}{8} \Leftrightarrow q_2 = \frac{3}{8}$
- $p_3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow q_3 = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow Q = \left(\frac{5}{7}x + \frac{2}{7}\right)\left(\frac{5}{8}x + \frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right)$

$\Rightarrow$ coef lui x^2 este $\frac{25}{56}$.

2. Se aruncă un zar de 5 ori. Se cere probabilitatea ca fața cu 1 punct să apară de 2 ori și de 3 ori să nu apară.

Schema lui Bernoulli $\Rightarrow p = \frac{1}{6} \Rightarrow q = \frac{5}{6}$; $n=5$, $k=2$

$\Rightarrow P_{5,2} = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{3888}$

3. Se aruncă un zar de 7 ori. Se cere probabilitatea ca fața cu 2 puncte să apară exact de 3 ori.

Schema lui Bernoulli $\Rightarrow p = \frac{1}{6} \Leftrightarrow q = \frac{5}{6}$; $n=7$, $k=3$

$\Rightarrow P_{7,3} = C_7^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{21875}{279936} = \frac{5^5 \cdot 7}{6^7}$.

4. Se aruncă un zar de 5 ori. Care este probabilitatea ca exact de 2 ori să apară fața cu un punct și exact de 2 ori să apară fața cu 2 puncte.

Schema Multinomială: $n=5$, $r=3 \Rightarrow k_1=2, k_2=2, k_3=1$

$p_1 = 1/6$, $p_2 = 1/6$, $p_3 = 2/3$

$\Rightarrow P_{5,3,2,1} = \frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{324}$

5. La o tombolă sunt 400 bilete dintre care 4 câștigătoare. O persoană cumpără 10 bilete. Care este probabilitatea să nu se găsească niciun bilet câștigător.

Schemă Hipergeometrică $\Rightarrow a_1 = 4,\ a_2 = 396$

$n = 10,\ k = 0$

$$\Rightarrow P = \frac{C_4^0 \cdot C_{396}^0}{C_{400}^{10}} \simeq \frac{1}{1{,}28 \cdot 10^{19}}$$

6. O urnă conține 7 bile albe, 7 bile negre și 6 bile verzi. Se extrag 9 bile. Care este probabilitatea să obținem câte 3 de fiecare culoare?

Schemă Hipergeometrică $\Rightarrow a_1 = 7,\ a_2 = 7,\ a_3 = 6$

$n_1 = 3,\ n_2 = 3,\ n_3 = 3$

$$\Rightarrow P = \frac{C_7^3 \cdot C_7^3 \cdot C_6^3}{C_{20}^9} = 0{,}145.$$

Probleme propuse

1. Formula probabilității totale

Fie într-un câmp de probabilitate $A_1, A_2, \dots, A_n$ o partiție a mulțimii evenimentelor elementare (un sistem complet de evenimente) și B un alt eveniment. Să se demonstreze formula:

$$P(B) = P_{A_1}(B)\,P(A_1) + P_{A_2}(B)\,P(A_2) + \dots + P_{A_n}(B)\,P(A_n).$$

Soluție

Fie E mulț. evenim. elem. Ținând cont de faptul că $E = A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n$ sunt incompatibile, obținem:

$$P(B) = P(B \cap E) = P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)) = P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)) =$$

$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

$$= P_{A_1}(B)\,P(A_1) + \dots + P_{A_n}(B)\,P(A_n).$$

4. Formula lui Bayes

Fie $(E, \mathcal{P}(E), P)$ un câmp de prob. și $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{P}(E)$ un sist. complet de evenimente (partiție a spațiului de selecție E). Să se arate că pt. orice eveniment $X \in \mathcal{P}(E)$:

$$P(A_k \mid X) = \frac{P(X \mid A_k)\,P(A_k)}{P(X \mid A_1)\,P(A_1) + \dots + P(X \mid A_n)\,P(A_n)}, \quad k = \overline{1,n}$$

Soluție

$$P(A_k \mid X) = \frac{P(X \mid A_k) \cdot P(A_k)}{P(X)} \overset{\text{f. prob. tot}}{=} \frac{P(X \mid A_k)\,P(A_k)}{P(X \mid A_1)\,P(A_1) + \dots + P(X \mid A_n)\,P(A_n)}.$$