Probabilitate și Statistică Matematică

Seminar 04.03.2021

• **Elemente de combinatorică**

1. Câte numere naturale de 3 cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{2,4,6,8\}$

$A_4^3 = 4! = 24$

2. Câte nr. nat. de 4 cifre se pot forma cu cifrele mulțimii $\{1,3,5,7,9\}$

$A_5^4 = 5! = 120$

3. Să se rezolve ecuația $C_n^8 = C_n^{10}$, $n \in N$, $n \geq 10$

$$\left.\begin{array}{l} C_n^m = C_n^{n-m} \\ C_n^8 = C_n^{10} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} m = 8 \\ n - m = 10 \end{array}\right\} \Leftrightarrow n = 18$$

4. Să se arate că $C_{17}^3 > C_{17}^{15}$

$$C_{17}^3 > C_{17}^{15} \Leftrightarrow \frac{17!}{3! \cdot 14!} > \frac{17!}{15! \cdot 2!} \Leftrightarrow 15! \cdot 2! > 14! \cdot 3! \Leftrightarrow 15 > 3\ (A)$$

5. Să se determine N, $x \geq 2$, a.î. $C_x^2 + A_x^2 = 30$

$$C_x^2 + A_x^2 = 30 \Leftrightarrow \frac{x!}{2! \cdot (x-2)!} + \frac{x!}{(x-2)!} = 30 \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-2)!} \cdot \frac{3}{2} = 30 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x(x-1) = 20 \Leftrightarrow x = 4$, $x \in N$.

5. Să se determine $C_{16}^0 + C_{16}^2 + \ldots + C_{16}^{16}$

$$C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^n \ (n \text{ par}) = 2^{n-1} \Leftrightarrow C_{16}^0 + C_{16}^2 + \ldots + C_{16}^{16} = 2^{15}$$

7. Să se determine $n \in N$, $n \geq 2$ a.î. $3C_n^1 + 2C_n^2 = 8$

$$3\frac{n!}{(n-1)!} + 2\frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 8 \Leftrightarrow 3n + n(n-1) = 8 \Leftrightarrow n(n+2) = 8 \Rightarrow n = 2.$$

8. Să se determine $x \in N$, $x \geq 3$ știind că $C_x^{x-1} + C_{x-1}^{x-3} \leq 9$.

$$\frac{x!}{(x-1)!} + \frac{(x-1)!}{(x-3)! \cdot 2} = x + \frac{1}{2}(x-2)(x-1) \leq 9 \Leftrightarrow 2x + x^2 - 3x + 2 \leq 18$$

$x(x-1) \le 16 \Leftrightarrow x \in \{3,4\}$

9. Să se arate că 11 divide numărul $C_{11}^1 + C_{11}^2 + \ldots + C_{11}^{10}$.

$$C_{11}^1 + C_{11}^2 + \ldots + C_{11}^{10} = 2^{11} - C_{11}^0 - C_{11}^{11} = 2^{11} - 2 = 2046 = 186\cdot 11 \,\vdots\, 11$$

10. Într-o clasă sunt 22 elevi, dintre care 12 fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei din 3 fete și 2 băieți.

12 f, 10 b

$$C_{12}^3 \cdot C_{10}^2 = \frac{12!}{9!\cdot 3!}\cdot\frac{10!}{8!\cdot 2!} = 25\cdot 33\cdot 12 = 9900$$

• <u>Binomul lui Newton</u>

1. Să se det. $a>0$, șt. că term. din mijloc al dezv. $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^{12}$ e $=1848$.

$$T_{k+1} = C_{12}^6 \left(\sqrt[3]{a}\right)^6 \left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^6 = 1848 \Leftrightarrow \frac{12!}{6!\cdot 6!}\cdot a^{\frac{1}{3}\cdot 6}\cdot a^{\frac{-1}{4}\cdot 6} = 1848 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 924\cdot a^{\frac{1}{2}} = 1848 \Leftrightarrow a^{\frac{1}{2}} = 2 \Leftrightarrow a = 4$$

2. Să se determine termenul care nu conține pe x din dezv. $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$.

$$T_{k+1} = C_9^k \left(x^2\right)^{9-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = C_9^k\, x^{18-2k}\, x^{-k} \Leftrightarrow x^{18-3k} = x^0 \Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow T_7 = C_9^7$$

3. Se cons. dezv. $\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{y}\right)^{49}$. Să se det. term. care îi conține pe x și y la aceeași putere.

$$T_{k+1} = C_{49}^k \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{49-k}\left(\sqrt{y}\right)^k \Leftrightarrow x^{\frac{2(49-k)}{3}}\cdot y^{\frac{k}{2}} = x^z y^z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{3}(98-2k) \\ z = \frac{k}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3}(98-2k) = \frac{k}{2} \Leftrightarrow 196 - 4k = 3k \Leftrightarrow k = 28$$

$$T_{29} = C_{49}^{28}\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{49-28}\left(\sqrt{y}\right)^{28} = C_{49}^{28}\cdot x^{14}\cdot y^{14}$$

4. Să se det. term. care nu-l conține pe x, din dezv $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{200}$, $x>0$.

$$T_{k+1} = C_{200}^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{200-k}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k \Leftrightarrow x^{\frac{1}{3}(200-k)}\cdot x^{\frac{-1}{2}k} = x^0 \Leftrightarrow \frac{-1}{6}k(200-k) = 0$$

$\Leftrightarrow k = \{0, 200\}$

5. Să se det. nr. term. raționali din dezvoltarea $\left(3+\sqrt[3]{3}\right)^{10}$

$$T_{k+1} = C_{10}^k (3)^{10-k}\left(\sqrt[3]{3}\right)^k \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{3}k} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow k \in \{0,3,6,9\} \Rightarrow 4 \text{ term. raț.}$$

6. Să se det nr. term. rat. din dezv. binomului $(\sqrt{2}+1)^5$.

$T_{k+1}=C_5^k (\sqrt{2})^{5-k} 1^k \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}(5-k)} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow k\in\{1,3,5\} \Rightarrow 3$ term. rat.

7. Să se det. nr. term. rat. ai dezv. $(\sqrt[4]{5}+1)^{100}$.

$T_{k+1}=C_{100}^k (\sqrt[4]{5})^{100-k}\cdot 1^k \Leftrightarrow 5^{\frac{100-k}{4}} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow k\in\{0,4,\dots,100\} \Leftrightarrow 26$ t. rat.

8. Să se det. nr. term. irat. ai dezvoltării $(\sqrt{3}+1)^9$.

$T_{k+1}=C_9^k (\sqrt{3})^{9-k}\cdot 1^k \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2}(9-k)} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow k\in\{1,3,5,7,9\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5$ t. rat. $\Rightarrow 5$ t. irat.

9. Suma coef. binom. ai dezv. $(2-5x)^n$ este egală cu 32. Să se det. term. de rang 4.

$T_4 = C_n^3\, 2^{n-3} (-5x)^3$.

- Probabilități

1. Se cons. mulț. $A=\{1,2,\dots,10\}$. Să se det. nr. subm. cu 3 el. ale lui A, care conțin el 1.

$9\cdot 8 = 72$

2. Să se det. prob. că, alegând un nr. $\overline{ab}$ din mulțimea nr. naturale de 2 cifre, să avem $a\neq b$.

$P=\frac{81}{90}=\frac{9}{10}$ $\{11,\dots,99\}$

3. Să se det. prob. ca, alegând un nr. din mulț nr. nat de 2 cifre, acesta să fie pătrat perfect.

$P=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$ $\{16,25,36,49,64,81\}$

4. Să se det. prob ca, alegând un nr. din mulț nr. nat. de 3 cifre, acesta să aibă exact 2 cifre egale.

$P=\frac{243}{900}=\frac{27}{100}$

5. Să se det prob ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea nr. nat de 2 cifre, să avem $a + b = 4$.

$p = \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$; $\{13, 22, 31, 40\}$

6. Care este prob ca, alegând un nr. K din mult $\{0,1,2,\dots,7\}$, nr. C_K^7 să fie prim.

Pt $K = 1$ și $k = 6$ $\Leftrightarrow$ $C_6^7 = C_1^7 = 7$ ce e prim.

$p = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

7. Să se det. prob. ca, alegând un nr. din mult nr. nat de 3 cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.

2	0	0
4	2	2
6	4	4
8	6	6
	8	8

$4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$

$p = \frac{100}{900} = \frac{1}{9}$.

8. Să se det. prob ca, alegând un el. din mult $\{1,2,3,\dots,40\}$, nr. $2^{n+2} \cdot 6^n$ să fie pătrat perfect.

$p = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$, $\{2,4,\dots,40\}$

9. Să se det prob ca, alegând un nr. din mult $\{10,11,\dots 40\}$ suma cif. lui să fie div. cu 3.

$p = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$, $\{12,15,18,21,24,27,30,33,36,39\}$

10. Fie mult $M = \{1,2,3,4,5,6\}$. Să se det. prob ca, alegând una dintre subm. mult M, aceasta să aibă 2 elem.

$p = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$;