EDP

(1)

Integrale prime

Fie sistemul de ec. dif. neliniare de ordinul întâi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots x_n) \end{cases} \quad (1)$$

în care funcțiile $f_1, f_2, \dots f_n$ sunt funcții reale de clasă C^1 definite pe $J \times \Delta$, unde $J \subset \mathbb{R}$ este un interval deschis, iar $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ este un domeniu.

Fie condițiile inițiale

$$x_1(t_0) = x_1^{(0)}, \quad x_2(t_0) = x_2^{(0)} \quad \dots \quad x_n(t_0) = x_n^{(0)}.$$

Atunci sistemul (1) admite o soluție unică, soluție ce depinde de condiția inițială de forma

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)}) \\ x_2 = \varphi_2(t, t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)}) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t, t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)}) \end{cases} \quad (2)$$

Sistemul (2) se poate rezolva unic în raport cu valorile inițiale $x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \dots x_n^{(0)}$ și se obține

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = \overline{\varphi}_1(t_0, t, x_1, x_2, \dots x_n) \\ x_2^{(0)} = \overline{\varphi}_2(t_0, t, x_1, x_2, \dots x_n) \\ \dots \\ x_n^{(0)} = \overline{\varphi}_n(t_0, t, x_1, x_2, \dots x_n) \end{cases} \quad (3)$$

Cum datele inițiale se pot alege arbitrar în interiorul lui D, notându-le în (3) cu constantele arbitrare $C_1, C_2, \dots C_n$, obținem

$$\begin{cases} \psi_1(t, x_1, x_2, \dots x_n) = C_1 \\ \psi_2(t, x_1, x_2, \dots x_n) = C_2 \\ \dots \\ \psi_n(t, x_1, x_2, \dots x_n) = C_n \end{cases} \quad (4)$$

unde $\psi_i(t, x_1, x_2, \dots x_n) = \overline{\varphi}_i(t_0, t, x_1, \dots x_n)$, iar t_0 este dat

Relațiile (4) pot fi rezolvate în mod unic în raport cu variabilele $x_1, x_2, \dots x_n$, deci

$$\begin{cases} x_1 = \overline{\Phi}_1(t, C_1, C_2 \dots C_n) \\ x_2 = \overline{\Phi}_2(t, C_1, C_2 \dots C_n) \\ \dots \\ x_n = \overline{\Phi}_n(t, C_1, C_2 \dots C_n) \end{cases} \quad (5)$$

Relațiile (5) reprezintă soluția generală sub formă implicită a sistemului (1)

Obs. În loc de soluție generală se utilizează și termenul de ansamblu de integrale prime sau integrală generală a sistemului

Def

Se numeşte <u>integrală primă</u> a sistemului de ecuaţii diferenţiale (1) orice relaţie obţinută rezolvând în raport cu constantele arbitrare soluţia lui generală.

Obs Oricare din relaţiile (4) este o integrală primă a sistemului (1).

Obs

Datorită existenţei şi unicităţii soluţiei unei probleme Cauchy, rezolvarea în raport cu constantele arbitrare a relaţiilor (5) este întotdeauna posibilă.

Def Funcţia $\Psi(t, x_1, x_2, \dots x_n) : J \times \Delta \to \mathbb{R}$ este o integrală primă a sistemului (1) pe o submulţime deschisă Ω a mulţimii $J \times \Delta$, dacă $\Psi \in C^1(\Omega)$ nu este constantă, dar este constantă pe soluţiile sistemului (1)., i. e.

$$\Psi(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t) \dots \varphi_n(t)) = C$$

de-a lungul oricărei traiectorii $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots x_n = \varphi_n(t)$ a sistemului (1).

Obs Un sistem de ec. dif. ordinare de ordinul întâi admite o infinitate de integrale prime.

Teoremă

Rezolvarea sistemului (1) este echivalentă cu obţinerea a n integrale prime independente.

Def

Se spune că n funcții $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$ sunt independente funcțional dacă

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \dots x_n)} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Obs

Cunoașterea unei singure integrale prime a sistemului (1) reduce rezolvarea sistemului la n-1 ecuații cu n-1 funcții necunoscute

De exemplu, dacă se cunoaște $\varphi_1(t, x_1, x_2, \dots x_n) = C$, atunci se poate exprima una din funcțiile necunoscute, cum ar fi x_n în funcție de $t, x_1, \dots x_{n-1}$ și C

$$x_n = \Phi_1(t, x_1, x_2, \dots x_{n-1}, C)$$

Inlocuind în primele n-1 ecuații ale sistemului (1) obținem un sistem de n-1 ecuații diferențiale cu n-1 funcții necunoscute.

Obs

Sistemul (1) este echivalent cu sistemul

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \dots = \frac{dx_n}{f_n}$$

Ex
a) Fie sistemul $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$

Să se determine o integrală primă

Rez
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dt = \frac{dx_1}{x_2} \\ dt = \frac{dx_2}{-x_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{-x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{-x_1} \Leftrightarrow -x_1 dx_1 = x_2 dx_2$$

$$-\frac{x_1^2}{2} = \frac{x_2^2}{2} + c$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = C.$$

$$\Rightarrow \varphi(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$$

b) Să se determine soluția generală a sistemului de ec. diferențiale sub formă normală

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y}{(y-x)^2} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{(y-x)^2} \end{cases}, \quad x + y \neq 0$$

Rez. $\frac{dx}{y} = \frac{dt}{(y-x)^2} = \frac{dy}{x}$

Căutăm două combinații care să poată furniza două integrale prime independente.

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Leftrightarrow x\,dx = y\,dy$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + c$$

$$\boxed{\frac{x^2-y^2}{2} = c_1} \Leftrightarrow x^2-y^2 = c_1$$

$$\Rightarrow \varphi_1(t,x,y) = x^2-y^2$$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dx-dy}{y-x} = \frac{dt}{(y-x)^2}$$

$$\Rightarrow dx-dy = \frac{dt}{y-x} \Leftrightarrow dt = (y-x)(dx-dy)$$

$$dt = (y-x)\,d(x-y)$$

$$dt = -(x-y)\,d(x-y)$$

$$t = -\frac{(x-y)^2}{2} + c_2$$

$$\boxed{2t+(x-y)^2 = c_2}$$

$$\Rightarrow \varphi_2(t,x,y) = 2t+(x-y)^2$$

(*)

$\Rightarrow$ Soluția generală a sistemului sub formă implicită este dată de

$$\begin{cases} x^2-y^2 = c_1 \\ 2t+(x-y)^2 = c_2 \end{cases} \qquad \frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)} \neq 0\ ?$$

(*) Verificăm dacă integralele prime găsite sunt independente funcțional

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y)} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2(x-y) & -2(x-y) \end{vmatrix}$$

$$= 4(x-y) \begin{vmatrix} x & -y \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4(x-y)(-x+y) = -4(x-y)^2 \neq 0$$

$\Rightarrow \varphi_1, \varphi_2$ funcțional independente