Seminar05

Aplicatii ale ecuatiilor diferentiale (continuare)

1.

Ecuaţia diferenţială pentru familia curbelor definite de ecuaţia exponenţială $y = e^{x+c}$ este $y' - y = 0$.

Rezolvare: Prin diferenţierea ecuaţiei în raport cu x obţinem $y' = e^{x+c}$.

Putem elimina cu uşurinţă parametrul c din sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} y' = e^{x+c} \\ y = e^{x+c} \end{cases}$$

de unde rezultă $y' = y$, $y' - y = 0$, care este o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile.

2.

Ecuaţia diferenţială pentru familia de parabole definite de ecuaţia $y = x^2 - cx$ este $y'x + y = 3x^2$.

Rezolvare: Diferenţiem ecuaţia implicită şi obţinem $y' = 2x - c$.

Scriem această ecuaţie împreună cu ecuaţia algebrică originală şi eliminăm parametrul c.

$$\begin{cases} y' = 2x - c \\ y = x^2 - cx \end{cases}$$

Observăm că $c = y' - 2x$ din prima ecuaţie şi înlocuim în a doua ecuaţie $y = x^2 - (y' - 2x)x \iff y = x^2 - y'x + 2x^2$.

Am obţinut o ecuaţie diferenţială implicită corespunzătoare familiei de curbe place $y'x + y = 3x^2$ care este o ecuaţie afină.

Rezolvare

Exerciţiu 01 & 02

1. $y' - y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int dx$$

$$\ln|y| = x + C$$

$$|y| = e^{x+C}$$

$$y = e^{x+C}$$

2. $y = x^2 - cx$

$$y' = 2x - c \Rightarrow c = 2x - y'$$

$$y = x^2 - x(2x - y')$$

$$y = x^2 - 2x^2 + xy'$$

$$\boxed{xy' = y + x^2}$$

$$y' = \frac{y}{x} + x = \frac{1}{x}y + x$$

Etapa 1 $\quad y' = \frac{1}{x}y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + C$$

$$\boxed{y_0 = Cx}$$

Etapa 2 $\quad \varphi_0 = C(x)\cdot x$

$$(C(x)\cdot x)' = \frac{C(x)\cdot x}{x} + x$$

$$C'(x)x + \cancel{C(x)} = \cancel{C(x)} + x$$

$$C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = \int 1\,dx \Rightarrow$$

$$C(x) = x + C_1$$

$$\boxed{\varphi_0} = (C_1 + x)\cdot x = \boxed{C_1 x + x^2}$$

$$y = y_0 + \varphi_0 = Cx + x^2$$