Quaternion - Rezumat

• Definiție : numere hipercomplexe non-comutative.

— se obțin din numere complexe prin extinderea cu încă 2 axe de numere, asemănător cum $\mathbb{C}$ s-a obținut din $\mathbb{R}$.

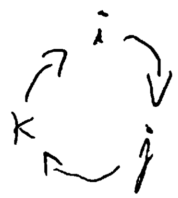
• Obs: * axele de numere sunt perpendiculare unele cu altele.

• Notații: cele 3 axe de numere auxiliare se notează cu i, j, k.

<u>Relația dintre cele 3 axe ~~ste~~ cu $\mathbb{R}$ este</u> $\boxed{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1}$ (1)

·	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

SAU



Ex: $ij = k$ iar $ji = -k$

$jk = i$ $\quad kj = -i$

$ki = j$ $\quad ik = -j$

* Toate aceste relații pot fi deduse din (1)

$ijk = -1$

$i^2 jk = -i$ etc..

$-jk = -i$

$jk = i$

• <u>Forme de scriere</u>

$q = a + bi + cj + dk$ sau $q = (a, b, c, d) \in H$ (mulțimea quaternionilor)

• <u>Operațiile de „+" și „·"</u>.

Fie $q_1 = a + bi + cj + dk$

$q_2 = e + fi + gj + hk$

$q_1 + q_2 = (a+e) + (b+f)i + (c+g)j + (d+h)k$

$q_1 \cdot q_2 = a(e + fi + gj + hk) + bi(e + fi + gj + hk) + cj(e + fi + gj + hk) + dk(e + fi + gj + hk)$

$$q_1 \cdot q_2 = ae + afi + agj + ahk$$
$$+ bei + bfi^2 + bgij + bhik$$
$$+ cej + cfji + cgj^2 + chjk$$
$$+ dek + dfki + dgkj + dhk^2$$

$$q_1 \cdot q_2 = ae + afi + agj + ahk$$
$$+ bei - bf + bgk - bhj$$
$$+ cej - cfk - cg + chi$$
$$+ dek + dfj - dgi - dh$$

Precizări

- scrierea sumei sub formă de matrice nu a fost întâmplătoare, se va ajuta în determinarea formei unui quaternion în $M_4(R)$
- elementele „imaginare" i, j, k se poziționează la final, în ordinea în care apar, deoarece produsul lor nu este comutativ

• Scrierea sub formă de matrice reală $(M_4(R))$

- Una dintre cele 2 scrieri sub formă de matrice, în M_4 cu toate valorile din R.

- Începem de la produsul a 2 quaternioni

$$q_1 \cdot q_2 \Rightarrow (ae + afi + agj + ahk + bei - bf + bgk - bhj + cej - cfk - cg + chi + dek + dfj - dgi - dh)$$

$$\cancel{(ae - bf - cg - dh + bei + afi - dgi + chi + cej + dfj + agj - bhj + dek - cfk + bgk + ahk)}$$

$$\begin{bmatrix} ae - bf - cg - dh \\ af + be + ch - dg \\ ag - bh + ce + df \\ ah + bg - cf + de \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ j \\ k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ae - bf - cg - dh \\ be + af - dg + ch \\ ce + df + ag - bh \\ de - cf + bg + ah \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}$$

3| Forma matriceală $4\times4^*$ $\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$

* – Una dintre cele 48 de posibile variante posibile (scrierea în $M_4(\mathbb{R})$ nu este unică, nu prea știu cum se obțin celelalte cazuri, dar toate variantele sunt echivalente $\Longleftrightarrow$ respectă proprietățile)

Pentru $q(a,b,c,d)$ avem variabilele:

- $1=(1,0,0,0) \Longleftrightarrow 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$

- $i=(0,1,0,0) \Longleftrightarrow i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- $j=(0,0,1,0) \Longleftrightarrow j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $k=(0,0,0,1) \Longleftrightarrow k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Reprezentare în $M_2(\mathbb{C})$

- Pentru a înțelege această formă, este necesar să stabilim niște proprietăți ale numerelor complexe (Cayley-Dickson construction)
  - $\forall z\in\mathbb{C}$ poate fi scris ca o pereche ordonată (a,b) cu $a,b\in\mathbb{R}$.
  - Înmulțirea: $(a,b)(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2$$
$$= (ac-bd)+(ad+bc)i$$

  - Notăm cu $(a,b)^*$ conjugatul numărului complex z.

4

• $(a,b)^* = (a^*, -b) = (a, -b)$ $(a \in \mathbb{R}$, deci $a^* = a)$.

$z = a + bi \Leftrightarrow \bar{z} = a - bi$

• Pentru construirea quaternionilor ne bazăm pe o generalizare a formulelor anterioare, mai precis:

$$(a,b)(c,d) = (ac - bd^*, ad + bc^*)$$

* – Nu știu de unde au scos generalizarea, dar pentru numere din R se păstrează proprietățile oferite de formula inițială

** – Una dintre posibilități, se mai regăsește și $(a,b)(c,d) = (ac - db^*, a^*d + cb)$.

Scrierea unui nr. complex ca matrice.

$$(a+bi)(c+di) = \underbrace{ac - bd}_{} + (\underbrace{ad + bc}_{})i$$

– Plasăm cei 2 coeficienți într-o matrice de forma:

$$\begin{bmatrix} ac - bd \\ da + bc \end{bmatrix}$$ se poate fi scrisă astfel: $$\begin{bmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}}_{} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

(Forma matriceală a nr. compl.)

Scrierea quaternionilor în $M_2(\mathbb{C})$

• La fel ca mai sus, prin generalizare, s-a dedus formula $\begin{bmatrix} a & -b \\ b^* & a^* \end{bmatrix}$ din care scoatem variabilele:

$1 = (1,0) \rightarrow 1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $i = (i,0) \rightarrow i = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

$j = (0,1) \rightarrow j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; $k = (0,i) \rightarrow k = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \overset{?}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

ambii parametri sunt nr. complexe, de forma (a,b).

$$(a+bi, c+di) \rightarrow \begin{bmatrix} a+bi, & -c-di \\ c-di, & a-bi \end{bmatrix} \overset{?}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} a+bi, & c+di \\ -c+di, & a-bi \end{bmatrix}$$

? – nu știu ce proprietate au aplicat să ajungă la forma aia, cumva au înmulțit cu −1 pe diagonala secundară, dar nu mă depășește.