Aplicație privind forma normală Skolem

Să se stabilească forma normală Skolem pentru formula α redată prin:

$$\alpha = \left(\exists x \, \forall y \, R_{xy} \rightarrow \forall y \, \exists z \, (R_{yz} \wedge T_{ya}) \right), \quad \text{unde} \quad R, T \in PS, \; r(R) = r(T) = 2, \; a \in CS$$

$$x, y, z \in V$$

substituție a lui y cu w

Etapele de transformare a formulei α pentru stabilirea F.N.Skolem

1) Renotarea variabilelor pentru care avem cuantificări multiple:

$$\alpha_1 = \exists x \, \forall y \, R_{xy} \rightarrow \forall w \, \exists z \, (R_{wz} \wedge T_{wa})$$

// substituirea variabile y cuantificată multipla prin variabile $w \in V$.

2) Stabilirea formei normale prenex (conform cu șablonul $Q_1 x_1 \, Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \, B$)

2.1.) $\alpha_2 = \neg \left(\exists x \, \forall y \, R_{xy} \right) \vee \forall w \, \exists z \, (R_{wz} \wedge T_{wa})$

// $(\alpha \rightarrow \theta) \equiv (\neg \alpha \vee \theta)$

2.2.) $\alpha_3 = \left(\forall x \, \exists y \, \neg R_{xy} \right) \vee \left(\forall w \, \exists z \, (R_{wz} \wedge T_{wa}) \right)$

// $\neg(\exists x \, B) \equiv \forall x \, \neg B; \; \neg(\forall x \, B) \equiv \exists x \, \neg B$

2.3.) $\alpha_4 = \forall x \, \exists y \, \forall w \, \exists z \, \left(\neg R_{xy} \vee (R_{wz} \wedge T_{wa}) \right)$

// $(\forall x \, \alpha) \, \rho \, \theta \equiv \forall x \, (\alpha \, \rho \, \theta)$, dacă $x \notin \theta$

$\rho \in \{\vee, \exists\}$ $\rho \in \{\wedge, \vee\}$

3) Aplicarea lemei de normalizare Skolem

$$\alpha_5 = \forall x \, \forall w \, \exists z \, \left(\neg R_{xy} \vee (R_{wz} \wedge T_{wa}) \right) \{ f x \mid y \} = \forall x \, \forall w \, \exists z \, \left(\neg R_{x \, fx} \vee (R_{wz} \wedge T_{wa}) \right),$$

cu $r(f) = 1, \; f \in FS$

$$\alpha_6 = \forall x \, \forall w \, \left(\neg R_{x \, fx} \vee (R_{wz} \wedge T_{wa}) \right) \{ g x w \mid z \} = \forall x \, \forall w \, \left(\neg R_{x \, fx} \vee (R_{w \, gxw} \wedge T_{wa}) \right)$$

unde $r(g) = 2, \; g \in FS$

4) Forma normală conjunctivă FNC

$$\alpha_7 = \forall x \, \forall w \, \left((\neg R_{x \, fx} \vee R_{w \, gxw}) \wedge (\neg R_{x \, fx} \vee T_{wa}) \right)$$