Probabilități și Statistică Matematică

Seminar 01.04.2021

Variabile aleatoare

1. Se consideră variabila aleatoare discretă $X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ p^2 & \frac{7}{4}p & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Care este probabilitatea ca X să ia o valoare mai mică sau egală cu 3?

$$X \text{ v.a} \iff \begin{cases} p \geq 0 \\ p^2 + \frac{7}{4}p + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow p = \frac{1}{4} \end{cases}$$

var I: $p(X \leq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{1}{16} + \frac{7}{16} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

sau

var II: $p(X \leq 3) = 1 - P(X=4) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

2. Determinați funcția de repartiție pt. variabila aleatoare X cu distribuția următoare $X: \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$.

$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{2} \\ 1/6, & 1/2 \leq x < 1 \\ 1/6 + 1/2 = 2/3, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \lambda(-x^2+1), & x \in [-1,1] \\ 0, & x \notin [-1,1] \end{cases}$

a) Să se determine valoarea parametrului $\lambda \in \mathbb{R}$, pt. care fct f este densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare continue X.

b) Pt. valoarea lui λ găsită la pct. anterior, să se calculeze fct de repartiție a variabilei aleatoare X și prob. ca X să ia valori între 0.2 și 0,5.

a) f densitate de repartiție $\overset{def}{\iff} \begin{cases} f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \lambda(-x^2+1)\,dx = \lambda\left(\frac{-x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{1} = \lambda\left(\frac{-1}{3}+1-\frac{1}{3}+1\right) =$$

$$= \lambda\cdot\frac{4}{3} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{4}$$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3(1-x^2)}{4}, & x\in[-1,1] \\ 0, & x\notin[-1,1] \end{cases}$

$$F_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x<-1 \\ \int_{-1}^{x} \dfrac{3(1-t^2)}{4}\,dt, & x\in[-1,1] \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{x} \frac{3(1-t^2)}{4}\,dt = \frac{3}{4}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{x} = \frac{3}{4}\left(x-\frac{x^3}{3}+1-\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3x-x^3+3-1}{3} =$$

$$= \frac{-x^3+3x+2}{4},\ x\in[-1,1]$$

• $P(x\in[0,2;\,0,5]) = ?$

var I: $P(1/5 \le x \le 1/2) = P(x\le 1/2) - P(x<1/5) = F_X(1/2) - F_X(1/5)$

$$= \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\frac{1}{2}+2}{4} - \frac{-\left(\frac{1}{5}\right)^3+3\cdot\frac{1}{5}+2}{4} = \dots$$

sau

var II: $P(x\in[1/5,1/2]) = \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}} \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{1/5}^{1/2} =$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}-\frac{1}{5}+\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{3}\right) = \dots$$

TEMĂ

1. Fie variabila aleat. discretă $X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ p & p^2 & p & p^2 & p^2 \end{pmatrix}$

a) Să se det p.

b) Să se calc. fct de rep. a lui X

c) Să se calc. prob: $p(x<1)$; $p(X<3)$; $p(X>4)$; $p(1,5<X<3,2)$.

a) X v.a.d $\Leftrightarrow \begin{cases} p\ge 0 \\ p+p^2+p+p^2+p^2 = 1 \Rightarrow 2p+3p^2 = 1 \Leftrightarrow 3p^2+2p-1=0 \end{cases}$

$\Delta = 4-4\cdot3\cdot(-1) = 16$

$p = \frac{-2+4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

b) $X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

$F_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/3, & 1 \le x < 2 \\ 4/9, & 2 \le x < 3 \\ 7/9, & 3 \le x < 4 \\ 8/9, & 4 \le x < 5 \\ 1, & x \ge 5 \end{cases}$

c) $P(X < 1) = 0$

$P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = 4/9$

$P(X > 4) = P(X = 5) = 1/9$

$P(1,5 < X < 3,2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 4/5.$

2. Det. const $a \in \mathbb{R}$ a.î. care fct. f dată mai jos este dens. de rep. și apoi să se det fct. de rep. coresp. $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1/2] \\ a - \frac{2x}{3}, & x \in (1/2, 2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

• f dens. de repart $\overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(a - \frac{2x}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left(ax - \frac{x^2}{3}\right) \Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{1}{4} + \frac{6a - 5}{4} = \frac{3a - 2}{2} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$

• $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1/2] \\ \frac{4 - 2x}{3}, & x \in (\frac{1}{2}, 2] \\ 0, & x < 0 \text{ sau } x > 2 \end{cases}$

$F_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$

$= \begin{cases} \int_0^x 2t\,dt, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \int_x^2 \frac{4-2x}{3} dt, & x \in [\frac{1}{2}, 2] \\ 0, & x < 0 \mid x > 2 \end{cases}$

$\int_0^x 2t\,dt = t^2 \Big|_0^x = x^2, x \in [0, \frac{1}{2}]$

$\int_x^2 \frac{4-2t}{3} dt = \frac{1}{3}(4 - t^2) \Big|_x^2 = \frac{-1}{3}(4 - x^2), x \in (\frac{1}{2}, 2]$