Aplicatii rezolvate – Variabile aleatoare – Momentele variabilelor aleatoare-

I. Variabile aleatoare discrete:

- Se consideră v.a. discretă

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ p & p^2 & p & p^2 & p^2 \end{pmatrix}$$

a) Să se determine p;

b) Să se calculeze funcția de repartiție a lui X

c) Să se calculeze probabilitatea $P(X<3)$;

d) Să se calculeze media, dispersia și deviația standard de lui X.

SOLUȚIE:

a) $\begin{cases} p \geq 0 \\ p + p^2 + p + p^2 + p^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3p^2 + 2p - 1 = 0$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$p_1, p_2 = \frac{-2 \pm 4}{6} \left\langle \begin{array}{l} p_1 = -1 \\ p_2 = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

Dar $p \geq 0 \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} !$$

b) $F(x) = P(X \le x)$. Deci:

- dacă $x \le 1 \Rightarrow F(x) = 0$
- dacă $x \in (1, 2] \Rightarrow F(x) = p = \frac{1}{3}$
- dacă $x \in (2, 3] \Rightarrow F(x) = p + p^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$
- dacă $x \in (3, 4] \Rightarrow F(x) = p + p^2 + p = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$
- dacă $x \in (4, 5] \Rightarrow F(x) = p + p^2 + p + p^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$
- dacă $x \ge 5 \Rightarrow F(x) = 1$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{1}{3}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{4}{9}, & 2 < x \le 3 \\ \frac{7}{9}, & 3 < x \le 4 \\ \frac{8}{9}, & 4 < x \le 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

c) $P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{4}{9}$

d) $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

- Media lui X este: $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{9} + 5 \cdot \frac{1}{9}$

$$\Rightarrow \boxed{E(X) = \frac{23}{9}} \;!$$

- Dispersia lui X este determinată astfel:

$$E(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{9} + 9 \cdot \frac{1}{3} + 16 \cdot \frac{1}{9} + 25 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \frac{75}{9} \Rightarrow \boxed{E(X^2) = \frac{25}{3}}$$

Acum $\mathrm{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{25}{3} - \left(\frac{23}{9}\right)^2$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{var}(X) = \frac{146}{81}} \;!$$

- Deviația standard a lui X este:

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{var}(X)} = \sqrt{\frac{146}{81}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma(X) = \frac{\sqrt{146}}{9}} \;!$$

II. Variabile aleatoare continue:

Aplicatia 1:

• Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0; \frac{1}{2}] \\ a - \frac{2x}{3}, & x \in (\frac{1}{2}; 2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

a) Să se determine valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția f este densitate de repartiție a unei v.a. continue X;

b) Pentru valoarea lui a găsită la punctul anterior, să se calculeze funcția de repartiție a v.a. X și probabilitatea ca X să ia valori între $0,2 \div 0,4$.

SOLUȚIE:

a) f este densitate de repartiție a unei v.a. continue X

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{1/2} (2x)dx + \int_{1/2}^{2} \left(a - \frac{2x}{3}\right)dx = 1$$

$$\Rightarrow x^2 \Big|_0^{1/2} + \left(ax - \frac{x^2}{3}\right)\Big|_{1/2}^{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{2}{3}(2-x), & x \in (\frac{1}{2}, 2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

b) Funcția de repartiție a v.a. X este:

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2, & x\in[0,\frac{1}{2}] \\ \frac{1}{4} + \int_{1/2}^{x} \frac{2}{3}(2-t)\,dt, & x\in(\frac{1}{2},2] \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

$$\text{Deci } F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x^2, & x\in[0,\frac{1}{2}] \\ \frac{4x-x^2-1}{3}, & x\in(\frac{1}{2},2] \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

$$P(x\in[0.2,\,0.4]) = \int_{0.2}^{0.4} f(x)\,dx = \int_{0.2}^{0.4} 2x\,dx = x^2\Big|_{0.2}^{0.4} = 0,12$$

<u>Aplicatia 2:</u>

Fie X o v.a. continuă $X: \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & x\in[1,3] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Determinați $E(x)$, $E(x^2)$, $var(x)$, $\sigma(x)$.

Soluție:

$$E(x) = \int_1^3 x f(x)\,dx = \frac{x^3}{12}\Big|_1^3 = \frac{13}{6}$$

$$E(x^2) = \int_1^3 x^2 f(x)\,dx = \frac{x^4}{16}\Big|_1^3 = 5$$

$$var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = 5 - \frac{169}{36} = \frac{11}{36}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{var(x)} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$