Curs 1

ECUAŢII DIFERENŢIALE ORDINARE

Definiţii.

Definiţia 1. Fie un interval $I \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, un domeniu $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (i.e. mulţime deschisă şi conexă) şi o funcţie continuă $F : I \times D \to \mathbb{R}$. O ecuaţie de forma

$$F(t, x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

unde $t \in I$ este o variabilă independentă, $x : I \to \mathbb{R},\ x = x(t),\ x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ este funcţia necunoscută, iar $x, x', \cdots, x^{(n)}$ sunt derivatele funcţiei x, se numeşte *ecuaţie diferenţială ordinară* de ordinul n dacă derivata $x^{(n)}$ intervine efectiv.

Observaţia 1. Dacă ecuaţia (1) poate fi rezolvată în raport cu $x^{(n)}$, atunci ecuaţia

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}), \tag{2}$$

unde $f \in \mathcal{C}^0(J \times D_1, \mathbb{R})$, $J \subset I$, $D_1 \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte *forma normală* a ecuaţiei diferenţiale (1).

Observaţia 2. Dacă $t \in \mathbb{R}$ atunci ecuaţia diferenţială se numeşte *ecuaţie diferenţială ordinară* (notăm, pe scurt, e.d.o.)

Definiţia 2. O funcţie $\varphi : I_1 \subset I \to \mathbb{R}$ care posedă derivate până la ordinul n inclusiv, se numeşte *soluţie* pe intervalul $I_1 \subset I$ a ecuaţiei diferenţiale (1), respectiv (2), dacă

$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{(n)}(t)) = 0,\ \forall\ x \in I_1,$$

respectiv

$$\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{(n-1)}(t)),\ \forall\ x \in J_1 \subset J.$$

Definiţia 3. Dacă $\varphi : I_1 \to \mathbb{R}$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale (1), atunci curba

$$\Gamma = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 |\ x = \varphi(t),\ \forall t \in I_1\right\}$$

se numeşte *curbă integrală, traiectorie* sau *orbită* a ecuaţiei.

Definiţia 4. Soluţia ecuaţiei diferenţiale de ordinul n (1) sau (2) care depinde de n constante arbitrare se numeşte *soluţie generală* a ecuaţiei.

Definiţia 5. Orice soluţie obţinută din soluţia generală prin particularizarea constantelor se numeşte *soluţie particulară.*

Definiţia 6. O soluţie a unei ecuaţii diferenţiale care nu se poate obţine din soluţia generală prin particularizarea constantelor se numeşte *soluţie singulară.*

Definiţia 7. Fie e.d.o. de ordinul n (1). Acea soluţie a ecuaţiei (1) care satisface condiţiile iniţiale

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \cdots, x^{n-1}(t_0) = x_{n-1},$$

unde $t_0 \in I$ este fixat, iar $x_0,\ x_1, \cdots, x_{n-1}$ sunt date se numeşte *problemă Cauchy* pentru e.d.o. dată.

Ecuaţii diferenţiale de ordinul I pe $\mathbb{R}^n$

Fie $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, $D_n \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi $\overrightarrow{f}(\cdot,\cdot) : I \times D_n \to \mathbb{R}^n$ un câmp vectorial din D_n.

Definiţia 8. Orice legătură $F(\cdot,\cdot,\cdot) : I \times D_n \times \Omega_n \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ între t, $\overrightarrow{x}$ şi $\overrightarrow{x}'$ se numeşte *ecuaţie diferenţială de ordinul I* pe $\mathbb{R}^n$.

Observaţia 3. Forma generală a unei ecuaţii diferenţială de ordinul I este

$$F(t, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}') = 0, \quad (t, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

iar forma normală explicită este

$$\overrightarrow{x}' = \overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{x})$$

În continuare vom folosi notaţia $x' = \dfrac{dx}{dt}$.

Definiţia 9. Se numeşte *soluţie ordinară* (în sens clasic) pentru ecuaţia diferenţială

$$\frac{dx}{dt} = \overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{x}) \tag{3}$$

o funcţie $\overrightarrow{\varphi}(\cdot) : I_1 \subset I \to \mathbb{R}$ care îndeplineşte condiţiile

i)$\overrightarrow{\varphi}(\cdot)$ este derivabilă
ii) graficul funcţiei $\overrightarrow{\varphi}(\cdot)$ este o submulţime a lui I
iii) $\dfrac{d\overrightarrow{x}}{dt} = \overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{x})$ $\forall t \in I_1$.

Ecuaţii diferenţiale de ordinul I pe $\mathbb{R}$

Dacă $n = 1$ atunci ecuaţia se numeşte *ecuaţie diferenţială de ordinul I.* În acest caz avem $f(\cdot,\cdot) : I \times J \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{4}$$

Soluţia ordinară pentru (4) este o funcţie $\varphi(\cdot) : I_1 \subset I \to \mathbb{R}$ astfel încât
i)$\varphi(\cdot)$ derivabilă
ii) $\{(t, \varphi) \mid t \in I_1\} \subset I \times J$
iii) $\varphi'(t) = f(t, x)$ $\forall t \in I_1$.

Definiţia 10. Fie $f(t, x_0) = 0$ pentru orice $t \in I$. Atunci $\varphi_0(t) \equiv x_0,\ t \in T$ se numeşte *soluţie staţionară.*

Definiţia 11. Dacă soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul I, $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$ se poate calcula cu ajutorul primitivelor funcţiilor elementare, atunci ecuaţia se numeşte *integrabilă elementar* sau *integrabilă prin cvadraturi.*

Definiţia 12 (Problema Cauchy)**.** Fie ecuaţia diferenţială $x'(t) = f(t,x)$ şi $(t_0, x_0) \in I \times D_1$ un punct fixat. Determinarea acelei soluţii a ecuaţiei care satisface condiţia iniţială $x(t_0) = x_0$ reprezintă *problema Cauchy.*

Teorema 1. *Fie* $t_0,\ x_0 \in \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R}_+^*,\ D = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$ *şi* $f \in \mathcal{C}^0(D, \mathbb{R})$*. Atunci problema Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = f(t,x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

admite celpuţin o soluţie.

Definiţia 13. Se spune că funcţia $f : I \times D \to \mathbb{R}^n$ este *lipschitziană* în raport cu $x \in D$ dacă şi numai dacă există o constantă $M > 0$ astfel încât

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq M \|x_1 - x_2\|,\ \forall x_1, x_2 \in D, t \in I.$$

Teorema 2 (Teorema de existenţă şi unicitate a problemei Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul I)**.** *Fie ecuaţia diferenţială de ordinul I*

$$x'(t) = f(t,x) \tag{5}$$

cu condiţia iniţială

$$x(t_0) = x_0, \tag{6}$$

unde f este o funcţie continuă pe intervalul închis

$$D = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b],\ a, b > 0$$

şi lipschitziană în raport cu x.

În aceste condiţii există o unică soluţie $\varphi : [t_0 - h, t_0 + h] \to \mathbb{R},\ h > 0$ a ecuaţiei (5) care satisface condiţia $\varphi(t_0) = x_0$.

Ecuaţii diferenţiale de ordinul I integrabile prin cvadraturi

1. Ecuaţii diferenţiale direct integrabile

O ecuaţie diferenţială direct integrabilă este de forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t), \quad f(\cdot) : I \to \mathbb{R} \text{ continuă}$$

Soluţia acestei ecuaţii este:

$$x(t) = \int f(t)dt = F(t) + c$$

Soluţia problemei Cauchy este:

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau.$$

Exemple

a) $\dfrac{dx}{dt} = t, \quad x(0) = 1$

Rezolvare

Avem o problemă Cauchy pentru o ecuaţie direct integrabilă a cărei soluţie este

$$x(t) = \int t\ dt = \frac{t^2}{2} + c.$$

Avem $x(0) = c = 1$, deci $c = 1$, de unde rezultă soluţia problemei Cauchy

$$x_{PC}(t) = \frac{t^2}{2} + 1.$$

b) $x'(t) = 1 + \sin t + \cos 2t$

Rezolvare

Ecuaţia este direct integrabilă, deci soluţia este

$$x(t) = \int (1 + \sin t + \cos 2t)\ dt = \int 1\ dt + \int \sin t\ dt + \int \cos 2t\ dt = t - \cos t + \frac{1}{2}\sin 2t + c.$$

2. Ecuaţii diferenţiale cu variabile separate

Ecuaţiile diferenţiale cu variabile separate sunt de forma

$$A(t)dt + B(x)dx = 0, \quad A(\cdot) : I \to \mathbb{R},\ B(\cdot) : D \to \mathbb{R} \text{ funcţii continue.}$$

Această ecuaţie poate fi scrisă, echivalent, ca

$$B(x)dx = -A(t)dt.$$

Soluţia acestei ecuaţii este

$$\int B(x)dx = -\int A(t)dt,$$

sau, pentru problema Cauchy

$$\int_{x_0}^{x} B(\sigma)d\sigma = -\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau.$$

Exemple

a) $x\ dx + t\ dt = 0$

Rezolvare

Avem o ecuaţie diferenţială cu variabile separate, de unde obţinem

$$x\ dx = -t\ dt \Leftrightarrow \int x\ dx = -\int t\ dt \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + c \Leftrightarrow x^2 = -t^2 + c,$$

deci

$$x = \pm\sqrt{-t^2 + c}, \text{cu} - t^2 + c > 0.$$

b) $\frac{1}{x}dx - \frac{t}{t^2-1}dt = 0,\ x > 0, t > 1, \quad x(2) = 3$

Rezolvare

Avem o problemă Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială cu variabile separate, deci

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{t}{t^2-1}dt \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}\ln(t^2-1) + c \Leftrightarrow 2\ln x = \ln(t^2-1) + \ln c$$

$$\Leftrightarrow \ln x^2(t) = \ln c(t^2-1) \Leftrightarrow x^2(t) = c(t^2-1) \Leftrightarrow x(t) = \sqrt{c(t^2-1)},\ c(t^2-1) > 0.$$

Ţinând cont de condiţia iniţială, avem

$$x(2) = \sqrt{c(2^2-1)} = 3 \Leftrightarrow 3c = 9,$$

de unde se obţine $c = 3$, deci soluţia problemei Cauchy este

$$x(t) = \sqrt{3(t^2-1)}.$$

3. Ecuaţii diferenţiale cu variabile separabile

O ecuaţie diferenţială cu variabile separabile are forma

$$A_1(t)B_1(x)dt + A_2(t)B_2(t) = 0,$$

unde $A_1(\cdot), A_2(\cdot) : I \to \mathbb{R},\ B_1(\cdot), B_2(\cdot) : D \to \mathbb{R}$ funcţii continue. Această ecuaţie poate fi scrisă, echivalent, ca

$$A_2(t)B_2(x)dx = -A_1(t)B_1(x)dt \Leftrightarrow \frac{B_2(x)}{B_1(x)}dx = -\frac{A_1(t)}{A_2(t)}dt.$$

Integrând în dreapta în raport cu x şi în stânga în raport cu t, obţinem

$$\int \frac{B_2(x)}{B_1(x)}dx = -\int \frac{A_1(t)}{A_2(t)}dt,$$

sau

$$\int_{x_0}^{x} \frac{B_2(\sigma)}{B_1(\sigma)}d\sigma = -\int_{t_0}^{t} \frac{A_1(\tau)}{A_2(\tau)}d\tau.$$

Exemple

a) $2t^2x\ dx = (2 - x^2)dt,\ |x| < \sqrt{2}$

Rezolvare

Avem o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile, deci o să separăm variabilele. Vom obţine:

$$\frac{2x}{2-x^2}dx = \frac{1}{t^2}dt \Leftrightarrow \int \frac{2x}{2-x^2}dx = \int \frac{1}{t^2}dt \Leftrightarrow -\ln(2-x^2) = -\frac{1}{t} + c \Leftrightarrow \ln(2-x^2) = \frac{1}{t} + c$$

$$\Leftrightarrow 2 - x^2 = e^{\frac{1}{t}+c} = ce^{\frac{1}{t}} \Leftrightarrow x^2 = 2 - ce^{\frac{1}{t}},$$

de unde

$$x = \pm\sqrt{2 - ce^{\frac{1}{t}}},\ 2 - ce^{\frac{1}{t}} > 0.$$

b) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1+x^2}{xt},\ t > 0, \quad x(1) = -1$

Rezolvare

Avem o problemă Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile, deci o să separăm variabilele. Vom obţine:

$$\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{t}dt \Leftrightarrow \int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{t}dt \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln t + c \Leftrightarrow \ln(1+x^2) = \ln t^2 + \ln c,$$

de unde rezultă

$$1 + x^2 = ct^2 \Leftrightarrow x^2 = ct^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{ct^2 - 1},\ ct^2 - 1 > 0.$$

Pentru problema Cauchy avem:

$$x(1) = -\sqrt{c-1} = -1 \Leftrightarrow \sqrt{c-1} = 1 \Leftrightarrow c - 1 = 1,$$

deci $c = 2$, de unde soluţia problemei Cauchy este

$$x_{PC}(t) = -\sqrt{2t^2 - 1}.$$