Probabilități și Statistică Matematică

Seminar 11.03.2021

E4. Să se demonstreze cu ajutorul funcțiilor generatoare relația:

$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

unde $\overline{C}_n^k$ reprezintă nr. combinărilor cu repetiție de n luate câte k.

• SOLUȚIE Pentru a rezolva acest exercițiu avem nevoie mai întâi de o definiție a acestor combinări și de o teoremă ce va fi folosită în cadrul rezolvării.

DEF4: Se num. comb. cu rep. de n luate câte k un sistem ordonat $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ de numere naturale cu $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$.

TEO1 Există o bijecție între nr. combinărilor cu repetiție de n luate câte k și mulț. sol. întregi poz. ale ec.: $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$.

Așadar pt. a calcula nr. comb. cu rep. de n luate câte k este suficient să calc. nr. soluțiilor ec. (13).

Fie $f(n,k)$ nr. acestor sol și fie $F_n(x) = \sum_{k\geq 0} f(n,k)x^k$ fct. gener. a lui $f(n,k)$. Vom împărți mulț sol. în 2 mulțimi. Prima mulțime va conține soluțiile pt. care $x_1 = 0$. Acestea vor fi în nr. de $f(n-1,k)$. În cea de-a 2-a mulțime vom avea soluțiile care au $x_1 \geq 1$. Dacă notăm $x_1' = x_1 - 1 (\geq 0)$, atunci fiecare din aceste soluții corespunde exact unei unei soluții de forma $x_1' + x_2 + \dots x_n = n-1$. Așadar nr. acestor soluții este $f(n, n-1)$.

Am obț um. form. de recurență: $f(n,k) = f(n-1,k) + f(n,k-1)$.

Asemenea exemplelor anterioare, pentru a lucra cu fct. generatoare vom înmulți relația de recurență cu x^k și vom însuma pentru $k \geq 1$. În plus avem condițiile inițiale $f(n,0) = 1$ și $f(1,n) = 1$. Avem:

$$\sum_{k\geq 1} f(n,k)x^k = \sum_{k\geq 1} f(n-1,k)x^k + \sum_{k\geq 1} f(n,k-1)x^k$$

$F_n(x) - 1 = F_{n-1}(x) - 1 + xF_n(x).$

$F_n(x) = F_{n-1}(x) + xF_n(x).$

Prin urmare $F_n(x) = \frac{1}{1-x} F_{n-1}(x)$. Din condițiile inițiale va rezulta $F_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n}$.

Nr. combinărilor cu rep. de n luate câte k va fi egal cu coeficientul lui x^k din descompunerea lui $\frac{1}{(1-x)^n}$. Vom utiliza rezultatul demonstrat în subsecțiunea urm. și avem $\sum_{k\geq 0}\binom{n+k-1}{k}x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$.

Se observă ușor că $\binom{n+k-1}{k}$ este coeficientul lui x^k din descompunerea lui $\frac{1}{(1-x)^n}$.

În concluzie, $\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$.