Lab Marți ①

Curs vineri → lab marți

Mulțimi și funcții

Aplicații recapitulative

- $f: A \to B \Rightarrow \operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in A\}$
- $f: A \to B$ s.n. injectivă $\Leftrightarrow \forall\, x, y \in A,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- $f: A \to B$ s.n. surjectivă $\Leftrightarrow \forall\, y \in B,\ \exists\, x \in A$ a.î. $f(x) = y$
- f bij $\Leftrightarrow f$ inj + f surj.

1. a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = n+5$

b) $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(n) = n^2+1$

c) $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ h(x) = 3x+1$

d) $k: \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ k(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \text{ par} \\ -\frac{x+1}{2}, & x \text{ impar} \end{cases}$

e) $l: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ l(x) = x^3 - 2$

f) $m: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ m(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ -x, & x > 0 \end{cases}$

Să se arate f, g, h sunt injective dar nu sunt surjective și funcțiile k, l, m sunt bijective

a) ~~f(m) = m+5~~

Fie $n, m \in \mathbb{N}$ a.î. $f(n) = f(m) \Rightarrow m+5 = n+5 \ |-5$

$\Rightarrow m = n \Rightarrow f$ injectivă

f nu e surjectivă deoarece pt $1 \in \mathbb{N}$ nu $\exists$ nu $n \in \mathbb{N}$ a.î. $f(n) = 1$

$n+5 = 1 \ |-5$

$n = -4 \notin \mathbb{N}$

d) Fie $x, y \in \mathbb{Z}$ a.î. $k(x) = k(y)$

• Dacă x, y ambele pare $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow x = y$

• Dacă x, y impare : $\frac{-x+1}{2} = \frac{-y+1}{2} \Rightarrow x = y$

• Dacă x par, y impar : $\frac{x}{2} = \frac{-y+1}{2}$ imposibil

$\Rightarrow$ k este injectivă (1)

k surjectiv; arătăm

Fie $y \in \mathbb{Z}$

• Dacă $y \geq 0 \Rightarrow k(y) = \frac{2y}{2} = y$

Dacă $y < 0$ pt. $x = 2y - 1 \in \mathbb{N}$,

$k(-2y-1) = \frac{-2y-1+1}{2} = y \Rightarrow k$ surj (2)

Din (1)+(2) k bijectiv.

e) $x^3 - y^3 = 0$

$(x-y)\underbrace{(x^2+xy+y^2)}_{\geq 0} = 0$

$x - y = 0 \Rightarrow x = y$ inj:

$y \in \mathbb{R} \Rightarrow$ ~~$f(x) = x^3 - 2 = y$~~ $f(x) = x^3 - 2$ $\Big\} \Rightarrow x^3 - 2 = y$

$x^3 = y + 2$

~~$x = \sqrt[3]{y+2}$~~

Cum $f(\sqrt[3]{y+2}) = y \Rightarrow f$ surj:

f) Fie $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. ~~$f(x) = f(y)$~~ $m(x) = m(y)$

• Dacă $x, y \leq 0 \Rightarrow x^2 = y^2$

$x^2 - y^2 = 0$

$(x-y)\underbrace{(x+y)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

2

• Dacă $x, y \geq 0 \Rightarrow -x = -y \Rightarrow x = y$

• Dacă $x \leq 0, y > 0 \Rightarrow x^2 = -y$ imposibil

Analog $x > 0, y \leq 0$ imposibil

$\Rightarrow$ ~~f este~~ ~~m~~ este inj. (1)

Fie $y \in \mathbb{R}$ $\quad$ ~~$f(x) = y$~~ $\Rightarrow x^2 = y$ $\xrightarrow{x \leq 0} -x = \sqrt{y} \Rightarrow x = -\sqrt{y}$.

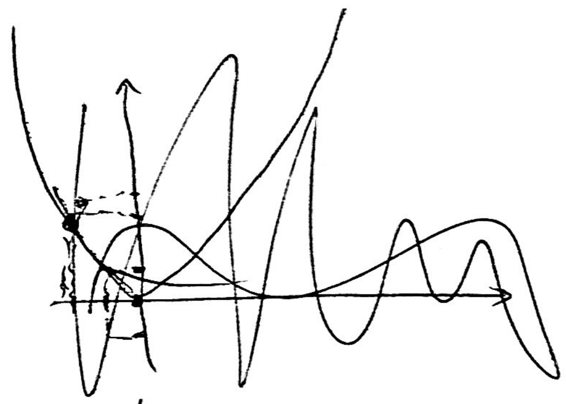
• Dacă $y \geq 0 \Rightarrow$ ~~$m(y) =$~~ $x = -\sqrt{y} \leq 0$ și $m(-\sqrt{y}) = (-\sqrt{y})^2 = y$.

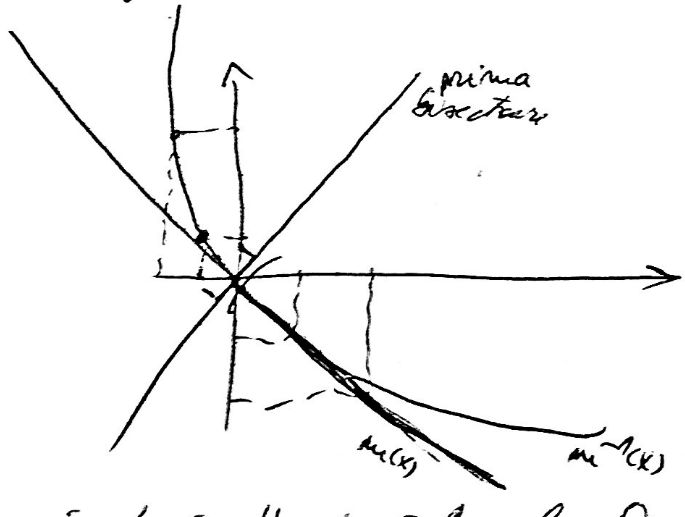
• Dacă $y \leq 0 \Rightarrow -y = x > 0$ și $m(-y) = -(-y) = y$

$\Rightarrow m$ este surj. (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ ~~m~~ este bijectivă

x	-2	-1	0	1	2
$m(x)$	4	1	0	-1	-2





OBS: că dacă $\parallel$ dusă la $Ox \cap G_m$ într-un unic punct $\Rightarrow m$ bij.

$m^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$m^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

x	2	1	0	1	4
$m^{-1}(x)$	-2	-1	0	-1	-2

2. Fie fct. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=\begin{cases} x+3, & x \text{ par} \\ x-3, & x \text{ impar}\end{cases}$

a) f bij.

b) Să se det $f^{-1}(x)$

Fie $x, y \in \mathbb{Z}$ a.î. $f(x)=f(y)$

- Dacă x, y pare $\Rightarrow x+3=y+3 \Rightarrow x=y$
- Dacă x, y impar $\Rightarrow y-3=x-3 \Rightarrow x=y$
- Dacă x par, y impar $\Rightarrow x+3=y-3$ imposibil

Analog x impar, y par imposibil

$\Rightarrow f$ injectiv (1)

Fie $y \in \mathbb{Z}$

- Dacă y par $\Rightarrow x+3=y \Rightarrow x=y-3$ ~~im~~ nu par $f(y-3)=y-3+3=y$.
- Dacă y impar $\Rightarrow x-3=y \Rightarrow x=y+3$ par

$\Rightarrow f$ nu e surj.

---

y impar $\Rightarrow x+3=y \Rightarrow x=\underbrace{y-3}_{\text{par}}$ $f(y-3)=y$

y par $\Rightarrow x-3=y \Rightarrow x=y+3$ și $f(y+3)=y$

$\Rightarrow f$ surj (2)

Din 1 și 2 $\Rightarrow f$ bij

$f^{-1}:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ $f^{-1}(x)=\begin{cases} x+3, & x \text{ par} \\ x-3, & x \text{ impar}\end{cases}$

TEMĂ

*. 1. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -2x, & x > 0 \end{cases}$

Să se arate că f bij. și inversa sa

2. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x^2+1, & x \leq 0 \\ -x+1, & x > 0 \end{cases}$

3.

... sunt bijective

Lab Marți

(2)

Relații binare → Aplicații

(1) $X = \{1, 2, 3, 4\}$ și relații binare $s = \{(2,1), (2,4), (3,4)\}$
$\pi = \{(1,2), (2,2), (2,3), (3,4)\}$.

Dom π, Dom s, Ran π, Ran s, $s \circ \pi$, π^{-1}, s^{-1}, $\pi^{-1} \circ s^{-1}$,
$(s \circ \pi)^{-1}$.

$(s \circ \pi)$ → se ia primul π și apoi s

(2) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. rel. binară ~~$R = \{(x,y) \in E \times E /$~~

$R = \{(x,y) \in E \times E \mid x | y\}$ și R^{-1}

$R = \{(2,4), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,2), (3,3), (4,4)$
~~$R^{-1} = \{(4,2)$~~ $(5,5)\}$

$R^{-1} = \{(4,2), (1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), \dots\}$

(3) Relații de echivalență - Aplicații

Fie „~" o relație de echivalență

Dacă $a \in A$ mulțimea $[a] = \{b \in A / b \sim a\}$
s.n. clasa de echivalență

Mulțimea claselor de echivalență s.n. mulțimea factor a lui A modulo „~"

se notează $A/\sim = \{[a] / a \in A\}$

Surjecția $p : A \to A/\sim$, $p(a) = [a]$ → surjecție canonică

$s \circ \pi = \{(1,1), (1,4)$
$(1,2) : (2,1)(2,4)$
$(2,2) :$

1. Arătați că relația modulo n este relație de echivalență și ...
folosind definiția.

n = nr. nat. fixat, spunem că a, b sunt congruente modulo n și scriem $a \equiv b\ (n)$ dacă $n \vdots (a-b)$

$(\equiv)(n)$ este reflexivă dacă: $\forall a \in \mathbb{Z}$
1) $a \equiv a\ (n)$, $n \mid (a-a) \Rightarrow n \mid 0$, $\forall a \in \mathbb{Z}$

$(\equiv)(n)$ este simetrică dacă: $\forall a \in \mathbb{Z}$
2) $a \equiv b$ și $b \equiv a$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$

$n \mid (a-b)$ și $n \mid (b-a)$ $\forall a, b \in \mathbb{Z}$

$(\equiv)(n)$ tranzitivă dacă:
3) $a \equiv b$ și $b \equiv c$ $\Rightarrow a \equiv c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

$n \mid (a-b)$ și $n \mid (b-c) \Rightarrow n \mid ((a-b)+(b-c))$

$n \mid (a-\cancel{b}-c+\cancel{b})$

$n \mid (a-c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

TEMĂ

* ~~MATE~~: INFO: Se scrie un program care calculează nr. de relații pe o mulțime cu n elemente (este clar că pe o mulț. cu n elemente sunt 2^{n^2} relații.)

MATE: Care dintre urm. rel. pe $\mathbb{R}$ este relație de echiv.

a) $x \alpha y$ dacă $x - y \in \mathbb{Z}$

b) $x \beta y$ dacă $|x-y| \leq 2$

c) $x \delta y$ dacă $x+y \in \mathbb{Z}$

2 (Construcția lui $\mathbb{Z}$)

Fie $\sim$ rel. pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ def prin $(a,b) \sim (c,d)$ dacă $a+d = b+c$. Arătați că $\sim$ este o relație de echiv. și că $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ se identifică în mod normal cu $\mathbb{Z}$

Sol: 1) $\sim$ reflexivă $\Leftrightarrow$ $(a,b) \sim (a,b)$ $\Leftrightarrow$ $a+b = b+a$ adev. $\forall a, b \in \mathbb{N}$

2) $\sim$ simetrică $\Leftrightarrow$ $(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow (c,d) \sim (a,b)$

$\Rightarrow$ $a+d = b+c$ și $b+c = a+d$ adev. $\forall a,b,c,d \in \mathbb{N}$

3) $\sim$ este tranzitivă

$(a,b)\sim(c,d)$ $\quad$ $(c,d)\sim(e,f)$

$$\underline{a+d=b+c \quad \text{și} \quad c+f=d+e} \; (+)$$

$$a+\cancel{d}+\cancel{c}+f=b+\cancel{c}+\cancel{d}+e$$

$$a+f=b+e \Rightarrow (a,b)\sim(e,f)$$

$\Rightarrow$ „$\sim$" este în relație de echiv.

$\Rightarrow$ Avem bijecția $[(a,b)]\to a-b : \mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\sim}\longrightarrow\mathbb{Z}$

3 Construcția lui $\mathbb{Q}$

Fie $\sim$ rel. pe $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ $\quad$ $(a,b)\sim(c,d)$ ~~def. prin~~ dacă $a\cdot d=b\cdot c$. ~~Fi ca~~ Arătați că $\sim$ este o relație de echiv.

1) $\sim$ este o ~~relație~~ reflexivă

$(a,b)\sim(a,b)$

$a\cdot b=b\cdot a$ adev. pt. $\forall\ a,b\in$ ~~ZxN~~ $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$

2) $\sim$ este simetrică

$(a,b)\sim(c,d)$ $\quad$ $(c,d)\sim(a,b)$

$ad=bc$ și $cb=da$, adev pt. $\forall\ a,b,c,d \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$

3) $\sim$ este tranzitivă

$(a,b)\sim(c,d)$ $\quad$ $(c,d)\sim(e,f)$

$$\underline{ad=bc \qquad cf=de} \; (\cdot)$$

$$adcf=bcde \quad |:d,\ :c$$

$$af=be \Rightarrow (a,b)\sim(e,f)$$

Din 1, 2, 3 $\Rightarrow$ „$\sim$" relația de echivalență

bijecția $[(a,b)]\to\frac{a}{b} : \mathbb{Z}\times\mathbb{N}/_{\sim}\longrightarrow\mathbb{Q}$

3)

4) Construcția lui $\mathbb{R}$

Fie C mulțimea numerelor Cauchy de nr. raționale. Pe C considerăm relația $\sim$ def. prin $(a_n)_{n\geq 1} \sim (b_n)_{n\geq 1} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$

Arătați că $\sim$ este o rel. de echiv. și că $C/\sim$ se identifică în mod natural cu $\mathbb{R}$.

~~Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ s.n. șir Cauchy dacă ...~~

1) $\sim$ reflexivă $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n-a_n)=0$

2) $\sim$ simetrică $\Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)}_{=0} \Rightarrow \lim(b_n-a_n)=0$

3) $\sim$ tranzitivă $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0\\ \lim_{n\to\infty}(b_n-c_n)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n-c_n)=0$

Din 1, 2, 3 $\Rightarrow \sim$ rel. de echiv.

Și avem bijecția $[(a_n)_{n\geq 1}] \longmapsto \lim_{n\to\infty} a_n : C/\sim \longrightarrow \mathbb{R}$

5) Să se arate că dacă ρ_1 și ρ_2 sunt 2 relații de echiv. pe X atunci $\rho_1 \cap \rho_2$ este o relație de echiv. pe X

1) $\rho_1 \cap \rho_2$ este reflexivă:

Fie $x \in X$

Cum ρ_1, ρ_2 sunt reflexive $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}(x,x)\in\rho_1\\ (x,x)\in\rho_2\end{array}\right\} \Rightarrow \in \rho_1\cap\rho_2$

2) Cum ρ_1, ρ_2 sunt simetrice

$(x,y) \in \rho_1\cap\rho_2 \Rightarrow \in \rho_1$ și $\in \rho_2$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}(y,x)\in\rho_1\\ (y,x)\in\rho_2\end{array}\right\} \Rightarrow (y,x)\in\rho_1\cap\rho_2$

... mai mare element.

tranzitivitate:

Fie $(x, y, z) \in \mathbb{Z}$ cu $(x,y) \in \rho_1 \cap \rho_2$ şi $(y,z) \in \rho_1 \cap \rho_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{(x,y) \in \rho_1} & (1) \\ (x,y) \in \rho_2 & (3) \\ \underline{(y,z) \in \rho_1} & (2) \\ (y,z) \in \rho_2 & (4) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Din } 1,2 \Rightarrow (x,z) \in \rho_1 \\ \text{Din } 3,4 \Rightarrow (x,z) \in \rho_2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,z) \in \rho_1 \cap \rho_2$$

Algebră

Aplicații - relații de ordine

• O relație binară pe X s.n. rel. de ordine pe aceeași X dacă este simultan:

1) reflexivă $\Leftrightarrow x\rho x, \forall x\in X$

2) tranzitivă $\Leftrightarrow x\rho y$ și $y\rho z \Rightarrow x\rho z, \forall x,y,z\in X$

3) antisimetrică $\Leftrightarrow x\rho y$ și $y\rho x \Rightarrow x=y$

• O mulțime X pe care este def. o rel. de ordine $\leq$ se not. cu $(X,\leq)$ și se numește mulțime ordonată

Fie $(X,\leq)$ o mulț. ordonată. Un element x_0 s.n.:

- cel mai mic (primul) element al mulțimii X dacă $x_0\leq x$ pt. $\forall x\in X$

- element minimal al mulț. X dacă pt. $\forall x\in X$ cu $x\leq x_0$ avem $x=x_0$.

- cel mai mare (ultimul) element al mulț. X dacă $x\leq x_0$ pt. $\forall x\in X$

- element maximal al mulț. X dacă pt. $\forall x\in X$ cu $x_0\leq x$ avem $x=x_0$.

1) Fie $X=\{\{1\},\{1,2\},\{2,3,4\},\{6\}\}$ coordonată prin incluziune.

- elementele maximale și minimale.
- $\exists$ un cel mai mare element.

Sol: Elementele minimale sunt: $\{1\},\{2,3,4\},\{6\}$

de ex. $\{1\}$ este el. minimal al lui X deoarece singurul el. $A\in X$ pt. care $A\subset\{1\}$ este chiar $A=\{1\}$

$\{1,2\}$ nu este deoarece $\{1\}\subset\{1,2\}$.

Elem. maximale sunt: $\{1,2\}$, $\{2,3,4\}$, $\{6\}$ (4).

De ex: $\{1,2\}$ este el. max. a mulț. X ~~decarece~~ pt. $A \subset$, $A = \{1,2\}$. (N

Dacă X ar avea un cel mai mare element A atunci ar trebui să avem toate el. $\{1,2,3,4,5,6\} \subset A$, ceea ce nu are loc pt. niciun el. al lui X

(2) Dați ex. de o mulțime ordonată care are el. minimale dar nu are un cel mai mic element.

Sol: Fie $X = \{\{1,3\}, \{2,5\}, \{1,4\}, \{2\}\}$ pe care o considerăm ordonată prin incluziune:

De exp. $A = \{1,3\}$ este un element minimal al mulț. X dar X nu are un ~~cel~~ cel mai mic element. Într-adevăr dacă $B \in X$ este cel mai mic element, $B \subset \bigcap_{A \in X} A = \emptyset$ cu $B \in X \Rightarrow B = \emptyset \in X$ contradicție.

(3) Dați ex. de o mulț. ordonată care are el. maximale dar nu are un cel mai mare element.

Sol: Fie $X = \{\{1\}, \{2\}, \{2,5\}, \{1,6\}\}$ ordonată prin incluziune.

De ex. $A = \{2,5\}$ este un el. maximal al mulț. X dar X nu are un cel mai mare element.

Într-adevăr dacă $B \in X$ este cel mai mare el., atunci $B \subset \bigcup_{A \in X} A = \{1,2,5,6\}$ contradicție.

(4). Dați ex. de o rel. de ordine ρ pe mulț. $\mathbb{N}$ a.î. $(\mathbb{N}, \rho)$ este latice care nu este complet.

Sol: Def: latice: o mulțime ordonată $(A, \leq)$ s.n. latice dacă pt. $\forall$ 2 elemente $a, b \in A$ există sup. și inf.

Not: $a \vee b$ = sup. dintre a și b;
$a \wedge b$ = inf. dintre a și b;
Evident că $\forall$ mulțime ordonată este o latice
(ρ este totală dacă $\forall x, y \in A$ avem fie $x \rho y$ sau $y \rho x$)

O latice A se zice completă dacă $\forall$ submulțime nevidă a lui A are sup și inf. în A.

Considerăm relația de divizibilitate pe $\mathbb{N}$: „ / "

$(\mathbb{N}, /)$ este o latice deoarece pt. $a, b \in \mathbb{N}$ avem
$a \vee b = (a, b)$ = ~~cle~~ cel mai mare div. com.
$a \wedge b = [a, b]$ = cel m. m. mult. com.

Incompletitudinea $(\mathbb{N}, /)$ $\Rightarrow$ de ex. că nr. $1, 2, \dots, n$ nu au un c.m.m.m.c. Acesta ar trebui să fie cel mai mare → contradicție

TEMĂ

* (1). Pe $\mathbb{R}$ definim relația binară ρ prin $x \rho y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N}$. Să se arate că ρ este o relație de ordine care nu este totală.

(2). Se poate stabili o funcție f definită pe $A = \{4, 5, 6, 14\}$ cu valori în $B = \{2, 3, 5, 7\}$ dată de legea „$f(x)$ este divizor a lui x"?

③. Dați ex. de o relație de ordine pe $\mathbb{Z}$ a.î. aceasta să fie bine ordonată.

Aplicații - legi de compoziție

①. Să se studieze dacă urm. asocieri sunt operații algebrice.

a) pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x,y) \to$ c.m.m.d.c. (x,y)

b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(x,y) \to$ c.m.m.d.c (x,y)

c) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $\left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) \to \frac{mp}{nq}$

d) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $\left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) \to \frac{mq}{np}$.

e) "$*$": $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $\left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) \to \frac{m+p}{n+q}$

Sol: a) Nu este o funcție, deci nu constituie o op. alg. pe $\mathbb{Z}$ deoarece cel mai m.d.c. a ~~...~~ 2 nr. întregi nu este bine determinat. Astfel ~~cel~~ c.m.m.d.c a lui $-4, 6$ este atât 2 cât și -2.

b) Da, este o op. alg. pe $\mathbb{N}$ ~~deoa~~ deoarece c.m.m.d.c ~~...~~ al $\forall$ perechi de nr. nat. este un nr. nat. bine determinat.

c) Este o op. alg. pe $\mathbb{Q}$ ~~deoarece~~ și anume op. de înmulțire a nr. raționale.

d) Nu este o funcție deoarece perechea $\left(\frac{1}{2}, \frac{0}{1}\right)$ din $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ are corespondent nedefinit $\frac{1}{0}$ în $\mathbb{Q}$.

d) Nu este o op. alg. pe $\mathbb{Q}$. Într-adevăr fie

$\frac{1}{2} * \frac{3}{4} = \frac{1+3}{2\cdot 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, dar $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \rightarrow \frac{1}{2} * \frac{3}{4} = \frac{2}{4} * \frac{3}{4}$

$= \frac{2+3}{4\cdot 4} = \frac{5}{16} \rightarrow$ contradicție, $\frac{1}{2} \neq \frac{5}{16}$

Concluzie: Existența acestei situații rezidă din faptul că el. lui $\mathbb{Q}$ sunt clase de echivalență. Iar asocierea „$*$" care a fost   asupra unor repr. arbitrari aleși în fiecare clasă de echiv. printr-o pereche   depinde de alegerea acestor reprezentanți.

TEMĂ

$*$ ① Considerăm: $(\mathbb{N}, \cdot)$:

a) $x * y = x+1$

b) $x * y = x$

c) $x * y = xy+1$

d) $x * y = 0$

e) $x * y = \max(x, y)$

Precizați dacă ele sunt asociative, com. sau posedă element neutru.

② Dați ex. de op. alg. care să arate că axiomele de asociativitate, comutativitate și de existență elementului neutru sunt independente.

Sol. a) - „$*$" comutativă $\Leftrightarrow$ $x*y=y*x$, $\forall x,y\in N$

$$\left.\begin{array}{l} x*y=x+1 \\ y*x=y+1 \end{array}\right\} \Rightarrow x+1\neq y+1 \quad \not\forall x,y\in N \Rightarrow$$ „$*$" nu este comutativă

- „$*$" asociativă

$(x*y)*z=x*(y*z)$, $\forall x,y,z\in N$

$$\left.\begin{array}{l} (x*y)*z=(x+1)*z=x+1+1=x+2 \\ x*(y*z)=x*(y+1)=x+1=x+1 \end{array}\right\} \Rightarrow x+2\neq x+1$$

$\Rightarrow$ „$*$" nu este asociativă

- „$*$" element neutru, $\exists e\in N$ a.î.

$x*e=e*x=x$, $\forall x\in N$

$x*e=x+1 \Rightarrow x+1=x \Rightarrow 1=0$ Fals, $\forall x\in N$

$e*x=e+1 \Rightarrow e+1=x$ $\not\forall x\in N$

$e=x-1$, $\forall x\in N$

$\Rightarrow$ „$*$" nu are el. neutru.

Lab 0

1) Fie M o mulțime cu n el. $n \in N^*$. Să se det. nr. legilor de comp. ce pot definite pe M

Sol: $|M| = n$, $n \in N^*$

A defini o l.c. pe M este același lucru cu a construi o fct. $f: M \times M \to M$

$|M| = n$

$|M \times M| = n^2$ $\Big\} \Rightarrow$ n^{n^2} moduri

2). Fie M o mulț. cu n el., $n \in N^*$. Să se det.

a) nr. legilor de compoziție comutative ce pot fi def. pe M.

b) Nr. legilor de compoziție cu el. neutru ce pot fi def. pe M.

Sol. a) Not $M = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

A da o lege de comp. comutativă pe M este același lucru cu a construi o fct. $f: M \times M \to M$ cu $f(x,y) = f(y,x)$ ~~...~~ pt. $x, y \in M$

Sau aceasta este tot una cu a da o funcție

$g: \{(x_i, x_j) \mid 1 \le i \le j \le n\} \to M$ (n el)

are $\frac{n(n+1)}{2}$ elemente

$\Rightarrow$ nr. căutat este $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

b) Dacă $e \in M$ atunci a def. pe M o l.c. cu este același lucru cu a construi o fct.

$$x * e = e * x = x$$

$$~~x * x = e~~$$

$f : M \times M \longrightarrow M$ cu $f(x, e) = f(e, x) = x, \forall x \in M$

Același lucru cu a da o aplicație

$$g : \{(x, y) / x, y \in M \setminus \{e\}\} \longrightarrow M$$

ceea ce se poate face în $n^{(n-1)^2}$.

Dar orice el. al mulțimii M. poate fi ales ca el. neutru și cum el. neutru este unic. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow n^1 \cdot n^{n^2 - 2n + 1} = n^{n^2 - 2n + 2}$$

(B) Fie M cu n el., $n \in \mathbb{N}^*$. Să se det. nr. l.c. ce pot fi def. pe M care sunt com. și cu el. neutru.

Ținând cont de problema anterioară

nr. căutat este $n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (nr. l.c. pe M com. ce admit drept el. neutru un element fixat a lui M) luate de n ori,

adică $n \cdot n^{\frac{n(n-1)}{2}} = n^{\frac{n^2 - n + 2}{2}}$

TEMĂ

(1). MaH + Info : Fie $a, b \in \mathbb{N}$;

$A = \{1, 2, \ldots, a\}$

$B = \{1, 2, \ldots b\}$

$f : A \longrightarrow B$

Probați af. urm.:

a) Nr al fct. de la A la B este b^a ?

b) Dacă $a \leq b$, atunci nr. N, al fct injective de la A la B este $A_b^a = \frac{b!}{(b-a)!}$

În particular nr. permutărilor unei mulțimi cu n el. este n!

c) Dacă $a \geq b$, nr. N_s al surjecțiilor de la A la B este $b^a - C_b^1(b-1)^a + C_b^2(b-2)^a + \ldots + (-1)^{b-1} C_b^{b-1}$

d) Dacă $a \leq b$ nr. N_n al fct. strict cresc. de la A la b este C_b^a

e) Nr N_c al fct. crescătoare de la A la B este C_{a+b-1}^a

TmPro: Să se scrie un program care ~~...~~ $f: A \to B$.
a) Să se afișeze toate fct injective (tabel de variație a fct)
b) Să se afișeze toate fct surj $f: A \to B$
(———)
c) Calc. nr. fct. injective

d) strict. crescatoare
e) cresc.

(2) $n \geq 1$ Fie $\varphi(n)$ = nr. întregi pozitivi $\leq n$ și primi cu n (fct φ s.n. indicatorul lui Euler) Arătați că $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$ unde $p_1, p_2, \ldots, p_s$ sunt factori primi ai lui n.

Info: $n \in \mathbb{N}^*$ calculează indicatorul lui Euler.

Ex: $n = 24 = 2^3 \cdot 3$

$p_1 = 2$

$p_2 = 3$

$\Rightarrow \varphi(n) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 24 = \frac{1}{3} \cdot 24 = 8$

~~Sol n/pr prime d.~~

$\varphi(24) = 4 \, (5, 7, 11, 13, 17, 19, 23)$

③ Să se scrie un program pt. o mulț. de n el. dat.

a) Nr. l.c. ce pot fi def. pe M

b) M .... comutative

c) .... el. neutru

d) .... comutative și el. neutru

④ Să se scrie un prog. care calculează nr. lui Catalan.

$T_n = C_{n-2}^{n-1} / n$ = nr. de moduri în care se pot pune paranteze într-un produs neasociativ $a_1 a_2 \dots a_n$

Să se dem. că:

$T_n = T_1 T_{n-1} + T_2 T_{n-2} + \dots + T_{n-1} T_1$

Aplicații monoizi

Dacă $(M, *)$ monoid cu el. neutru e și H este o submulțime a lui M, spunem că $(H, *)$ este un submonoid al lui $(M, *)$ dacă:

1) H parte stabilă a lui M

2) $e \in H$

Fie $(M, \cdot)$ și $(M', \cdot)$ 2 monoizi având el. neutru e resp e', o aplicație $\varphi: M \to M'$ cu prop.

1) $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, $\forall x, y \in M$

2) $\varphi(e) = e'$

s.n. morfism de monoizi

Un morfism de monoizi $\varphi: (M, \cdot) \to (M', \cdot)$ s.n. izomorfism de monoizi $\Leftrightarrow$ este morfism bijectiv.

Not: $M \overset{\sim}{=} M$
$\downarrow$
izomorf.

Ⓔ. Not. cu $I(X) = \{f \mid f: X \to X, f$ injectivă$\}$ unde X este o mulț. nevidă. Să se arate că $(I(X), \circ)$ este un monoid.

Sol. Dacă $f, g: X \to X$ sunt fct. inj atunci $f \circ g$ este fct. inj. deci $I(X)$ este parte stabilă în raport cu compunerea.

„$\circ$" este asociativă și are el. neutru pe $1_X \in I(X)$ $f \circ 1_X = 1_X \circ f = f$, $\forall f \in I(X)$

Prin urmare $(i(X), \cdot)$ monoid.

(2) Să se arate că:

a) $(P(M), \cup)$ și $(P(M), \cap)$ sunt monoizi

b) $(P(M), \cup)$ este izomorf $(P(M), \cap)$

<u>Sol</u>:

$\cup$ și $\cap$ sunt operații algebrice asociative, iar $E = \emptyset$ respectiv $E = M$ sunt el. neutru în $(P(M), \cap)$ și $(P(M), \cup)$ deci ele 2 sunt monoizi.

b) $f : (P(M), \cap) \to (P(M), \cup)$, $f(x) = C(x)$ este bijectivă și este morfism.

$f(x \cap y) = C(x \cap y) = C(x) \cup C(y) = f(x) \cup f(y)$ (1)

$f(M) = C(M) = \emptyset$ (2)

Din 1 și 2 $\to$ f morfism + f bijectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow (P(M), \cap) \simeq (P(M), \cup)$

<u>TEMA</u>

(1) pe $\mathbb{R}$ se consideră l.c. „$\circ$": $x \circ y = \sqrt[5]{x^5 + y^5}$

a) Să se arate că $(\mathbb{R}, \circ)$ este monoid comutativ.

b) Să se arate că $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

c) Să se rezolve sistemul de ec. $\begin{cases} x \circ y \circ (-2) = 1 \\ x^5 + 31 = y^5 \end{cases}$

$U(\mathbb{R}) \to$ mulțimea elementelor inversabile ale lui $\mathbb{R}$.

Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \mid x \in R \right\}$

a) Să se arate că $(M, \cdot)$ monoid comutativ.

b) Să se det $U(M)$.

$$\begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-e & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 1-e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1-x)(1-e)+xe & 0 & e(1-x)+x(1-e) \\ 0 & 0 & 0 \\ x(1-e)+(1-x)e & 0 & xe+(1-x)(1-e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

$(1-x)(1-e)+xe = 1-x$

$\cancel{1}-e-\cancel{x}+xe+xe = \cancel{1-x}$

$\cancel{2ex}$ $2ex-e=0$

$e(2x-1)=0$

$e=0.$

Lab 5

ALGEBRĂ

Aplicații: grupuri

Ex: de grupuri:

1) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ grupuri abeliene în raport cu „+".

2) $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ grupuri abeliene în rap. cu „·".

3) Pt. $n \geq 2$, $\mathbb{Z}_n \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{n-1}\}$

Clasa de ~~resturi~~ modulo n este un grup față de +

iar $U(\mathbb{Z}_n) = \{\hat{x} \mid x \in \mathbb{Z}, (x, n) = 1\}$ este grup față de „·"

4) Fie M o mulțime, Mult $S(M) = \{f : M \to M \mid f \text{ bij}\}$ formează față de compunerea fct. un grup numit grupul numit grupul permutărilor mulțimii M.

5) S_n, ~~izomorfisme~~ izometrie a planului euclidian $\mathbb{R}^2$ o fct.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ care păstrează distanțele, adică distanța

$d(f(\mathbb{R}), f(\mathbb{Q})) = d(P, Q)$, $\forall P, Q \in \mathbb{R}^2$ unde

$A((x_1, y_1); (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}$

Not M = ... compl ... f : M × ...

Dacă ... ...

$H \trianglelefteq G$ urm. afirmații

$H \leq G$ pt un grup G și

Sunt echivalente:

a) $H \leq G$;

b) $1 \in H$, $x, y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H$, $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

3) $x, y \in H \Rightarrow x y^{-1} \in H$

Un subgrup al lui G ~~s.n.~~ s.n. subgrup normal al lui G dacă: $\forall x \in G$ și $h \in H$ avem $xhx^{-1} \in H$

Not $H \trianglelefteq G \rightarrow H$ subgrup normal a lui G.

Aplicații:

1. Fie (X, d) s.m. gr. izometric, iar

$\text{izom } X = \{ f \in S(X) \mid d(f(x), f(y)) = d(x, y) \ \forall x, y \in X \}$

Să se arate că $\text{izom} X \leq S(X)$

Sol: 1) Evident $1_X \in \text{izom } X$

Examen 2) Fie $f, g \in \text{izom}(X)$ și $x, y \in X$

$d((f \circ g)(x), (f \circ g)(y)) = d(f(g(x)), f(g(y))) =$

$= d(g(x), g(y)) \Rightarrow f \circ g \in \text{izom}(X)$

3) $f^{-1} \in \text{izom}(X)$ deoarece

$d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))) =$

$= d(x, y)$

$1 + 2 + 3 \Rightarrow \text{izom}(X) \leq S(X)$

ordinul ~~lui~~ ... deoarece $x^{-1}(yx)x = y^x$ deduce ...

2. Fie (X,d) un sp. metric $Y \subset X$, iar
$S_X(Y) = \{f \in \mathrm{Izom}(X) / f(Y) = Y\}$
grup de simetrie al lui Y în raport cu X
Să se arate că $S_X(Y) \leq \mathrm{Izom}(X)$

Sol. Fie f și $g \in S_X(Y)$, adică $f(y) = g(y) = y$
Atunci $(f \circ g)^{-1}(Y) = f(g^{-1}(y)) = f(y) = y$
am dem. că $(f \circ g)^{-1} \in S_X(Y)$
$\Rightarrow S_X(Y) \leq \mathrm{Izom}(X)$

TEMĂ.

* Pe M se consideră legea de compoziție
$M \times M \to M$, $(x,y) \to x \circ y$. Să se studieze dacă $(M, \circ)$ este un grup comutativ.
  a) $M = \mathbb{Z}$, $x \circ y = x + y + 3$
  b) $M = \mathbb{R}$, $x \circ y = xy - 10x - 10y + 110$
  c) $M = \mathbb{C}$, $x \circ y = i x y$

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup și H o submulțime finită a lui G. Să se arate că H este un subgrup al lui G $\Leftrightarrow$ H este parte stabilă a lui G.

Sol. Pp. că mulțimea finită H a lui G este parte stabilă. Fie $h \in H$
Adică $\{h^n \mid n \in \mathbb{N}^{*}\} \subset H$

3

și cum H este finită $\Rightarrow \exists\, i < j$ cu $h^i = h^j$

adică $h^{j-i} = e$ (e elem. neutru al lui G)

$\Rightarrow e \in H$ și, asemenea, dacă $h \neq e$,

atunci $j - i > 1$ și cu $h^{-1} = h^{j-i-1} \in H \Rightarrow H$ subgrup

Q. Fie A un inel unitar, $n \in N$, $n \geq 2$

Not $GL_n(A) = \{M \in M_n(A) \mid det(M) \in U(A^*)\}$

$SL_n(A) = \{M \in M_n(A) \mid det(M) = 1\}$

Să se ~~det~~ dem. că $GL_n(A)$ este grup la „·" matricilor

iar $SL_n(A) \trianglelefteq GL_n(A)$

OBS: $GL_n(A) \rightarrow$ grup liniar general de grad n peste inelul A

$SL_n(A) \rightarrow$ grupul special

Sol:

Dacă $M, N \in GL_n(A) \Rightarrow det(M), det(N) \in U(A^*)$ și cum $det(M \cdot N) = det(M) \cdot det(N) \Rightarrow$

$\Rightarrow M \cdot N \in GL_n(A)$

Evident $I_n \in GL_n(A)$, iar dacă $M \in GL_n(A)$ cum $det(M^{-1}) = (det\ M)^{-1} \Rightarrow M^{-1} \in U(A^*) \rightarrow$

$\Rightarrow M^{-1} \in GL_n(A) \Rightarrow (GL_n(A), \cdot)$ este grup

Dacă $M, N \in SL_n(A) \Rightarrow det(M) = det(N) = 1$

și deoarece $det(M \cdot N^{-1}) = det(M)\, det(N^{-1}) = 1 \cdot 1^{-1} = 1$

4. Fie G un grup și $x, y \in G$. Să se arate ordinul lui $ord(xy) = ord(yx)$ și $ord(x) =$

Sol. Deoarece $x^{-1}(yx)x = yx$ deducem că

Sol. Dacă $M, N \in GL_n(A)$ → grup general liniar de ordin n

$\Rightarrow \det M, \det N \in U(A^*)$ și cum $\det(MN) = \det M \cdot \det N$

$\Rightarrow M \cdot N \in GL_n(A)$

Evident $I_n \in GL_n(A)$, iar dacă am $M \in GL_n(A)$

cum $\det(M^{-1}) = [\det(M)]^{-1} \Rightarrow \det M^{-1} \in U(A^*) \Rightarrow M^{-1} \in GL_n$

$(GL_n(A), \cdot)$ ~~e~~ grup.

Dacă $M, N \in SL_n(A)$ → grup special

$\Rightarrow \det(M) = \det N = 1$ și deoarece $\det MN^{-1} = \det M \cdot (\det N)^{-1} =$

$= ~~\det M~~ \cdot 1 \cdot 1^{-1} = 1 \cdot 1 = 1$

$\Rightarrow MN^{-1} \in SL_n(A) \Rightarrow SL_n(A) \trianglelefteq GL_n(A)$

5. H, K sunt grupuri să se arate că $H \times \{1\} \trianglelefteq H \times K$

Sol: Fie $(x, 1) \in H \times \{1\}$ și $(y, z) \in H \times K$

$x, y \in H$, $z \in K$

Atunci $(y, z)^{-1}(x, 1)(y, z) = (y^{-1}, z^{-1})(x, 1)(y, z) =$

$= (y^{-1}xy, z^{-1}z) = (y^{-1}xy, 1) \in H \times \{1\}$

Aplicații morfisme de grupuri

Ex. 1) $f: (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, $f(n) = 2^n$
morf. de grupuri

* 2) $g: (\mathbb{R}, +) \to ((0, \infty), \cdot)$, $g(x) = 2^x$, izomorfism

TEMA

TEMĂ:

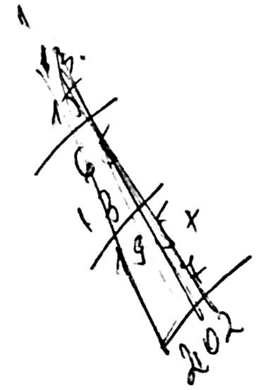
A ①. Pe mulț. $(-1,1)$ considerăm op. $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$

Ar. că $((-1,1), *)$ este un grup izomorf cu $((0,\infty), \cdot)$

Sol. Fie $f:(0,\infty) \to (-1,1)$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Verific că cond.

$f(xy) = f(x)\cdot f(y)$ $\forall\, x,y>0$

$$\frac{xy-1}{xy+1} = \cancel{x+1}$$



$$\frac{xy-1}{xy+1} = \frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{y-1}{y+1}$$

$$\frac{xy-1}{xy+1} = \frac{xy-x-y+1}{xy+x+y+1}$$

$$\frac{xy-1}{xy+1} = \frac{y(x-1)-(x-1)}{y(x+1)+(x+1)}$$

$$\frac{xy-1}{xy+1} = \frac{(x-1)(y-1)}{(y+1)(x+1)}$$

$\cancel{f(xy) = \frac{x-1}{x+1}}$ $\quad (xy+1)(x-1)(y-1) = (xy-1)(y+1)(x+1)$

$(xy+1)(xy-x-y+1) = (xy-1)(xy+x+y+1)$

$\cancel{x^2y^2} - x^2y - xy^2 + xy + xy - \cancel{x} - \cancel{y} + 1 = \cancel{x^2y^2} + x^2y + xy^2 + \cancel{xy} - \cancel{xy} - x - y - 1$

$\cancel{2x^2}$ $\quad \cancel{xy(y-xy)}$

$xy(1-x) + xy(1-y) + 1 = xy(x+y) - 1$

$xy(1-x+1-y) + 1 = xy(x+y) - 1 \quad /:$

$$\frac{xy(1-x+1-y)+1}{xy(x+y)-1} = 1$$

Las 6

ALGEBRA

Aplicații - ordinul unui element într-un grup

• Fie G un grup. Not ordinul lui (G) sau $|G|$

Nr. elementelor ~~grupului~~ grupului G dacă G are un nr. ~~infinit~~ de elem. n spunem că $ord(G) = +\infty$ dacă G are o infinitate de elemente.

• Pt un el $x \in G$ definim ordinul lui x

$\rightarrow ord(x) = \min\{n \mid n \in \mathbb{N}^*, x^n = 1\}$

$\rightarrow$ În caz contrar $ord(x) = +\infty$

el. neutru

• Dacă G este un grup finit, atunci pt. $\forall x \in G \setminus \{1\}$

divide

$ord(x) \mid (G)$

divide

①. Fie G un grup și $x, y \in G$. Să se arate că ordinul ~~lui~~ $ord(xy) = ord(yx)$ și $ord(x) = ord(x^{-1})$

Sol: Deoarece $x^{-1}(yx)x = yx$ deducem că pt. $\forall n \in \mathbb{N}$

$, x^{-1}(xy)^n x = (yx)^n \Rightarrow$

compus compus

$\Rightarrow (yx)^n = 1 \Rightarrow ord(xy) = ord(yx)$

Faptul că $ord(x) = ord(x)^{-1} \rightarrow$ din echivalența

$x^k = 1 \Leftrightarrow x^{-k} = 1, \forall k \in \mathbb{N}^*$

2. Fie G un grup și $x, y \in G$ cu $ord(x)$, $ord(y)$ finite și prime între ele, iar $xy = yx$. Să se arate că $ord(xy) = ord(x) \cdot ord(y)$.

<u>Sol</u>:

Fie $ord(x) = n_1$

$ord(y) = n_2$

$(n_1, n_2) = 1$.

Avem $(xy)^{n_1 n_2} = x^{n_1 n_2} y^{n_1 n_2} = (x^{n_1})^{n_2} (y^{n_1})^{n_2}$

Fie $n \in \mathbb{N}$ a.î. $(xy)^n = 1$, atunci

$x^n = y^{-n}$ și $x^{n n_2} = (y^{n_2})^{-n} = 1 \Rightarrow n_1 | n n_2$

$\Rightarrow$ și avem $(n_1, n_2) = 1 \Rightarrow n_1 | n$

Analog $\Rightarrow n_2 | n$

$\Rightarrow n_1 n_2 | n$

Am obținut echivalența $(xy)^n = 1 \iff n_1 \cdot n_2 = n$

$\Rightarrow ord(xy) = n_1 \cdot n_2 = ord(x) \cdot ord(y)$

3. Să se det. subgrupurile lui $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 1$.

<u>Aplicație pt. $\mathbb{Z}_6$</u>

<u>Sol</u>, Fie n un nr. întreg pozitiv, $\mathbb{Z}_n$ fiind un grup abelian $\forall$ subgrup în $\mathbb{Z}_n$ este subgrup normal în $\mathbb{Z}_n$.

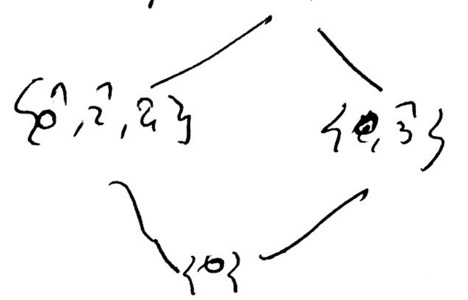
Deoarece $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Avem:

Dacă notăm familia unui grup G atunci $(L(G); \subseteq)$ latice completă

$\uparrow$

latice

Laticea pt. $\mathbb{Z}_6$ este.



4. Să se afle subgr. lui $\mathbb{Z}_{12}$

$\mathbb{Z}_{12} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{11}\}$

Divizorii lui 12 sunt: $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

subgrupurile căutate sunt:

$1\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{12}$

$2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{8}, \hat{10}\} = (\hat{2})$

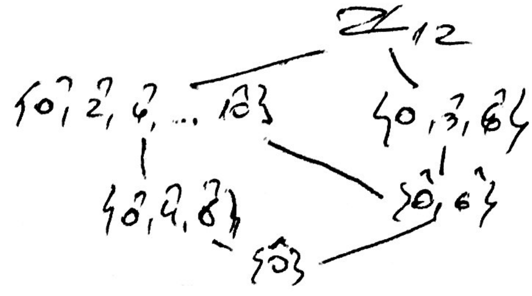
$3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{3}, \hat{6}, \hat{9}\} = (\hat{3})$

$4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{8}\} = (\hat{4})$

$6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{6}\} = (\hat{6})$

$12\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{0\}$

Laticea $\mathbb{Z}_{12}$ este



Conform teoremei corespondenței că $\forall$ subgrup a lui $\mathbb{Z}_n$ este de forma $H/n\mathbb{Z}$, H subgrup al lui $\mathbb{Z}$, care conține ~~p...~~ pe $n\mathbb{Z}$

$H = d\mathbb{Z}$ unde d este un nr. nat. cu $d | n$

!!! Deci orice subgrup a lui $\mathbb{Z}_n$ este de forma $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, unde d este un divizor natural a lui n.

Conform primei teoreme de izomorfism avem

$\mathbb{Z}_n/(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ este $\cancel{d}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

$\cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ și ~~ordd~~.

$\text{ord}\, |\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}| \cong |\mathbb{Z}_n| \cdot |d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| =$

$= n \cdot |d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| \Rightarrow |d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = \frac{n}{d}$

- $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$

Divizorii nat. ai lui 6 sunt 1, 2, 3, 6.

Subgrupurile căutate sunt:

$1\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_6$

$2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\} = (\hat{2})$

$3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{3}\} = (\hat{3})$

$6\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \text{[illegible]}\}$

5. Fie G un grup finit. Să se arate că G are un element de ordinul 2. d.d. $|G|$ par.

Sol: Conform T. Lagrange $\Rightarrow$ dacă G are un el. de ordinul 2. $\Rightarrow |G| = $ par

Reciproc: pp. că $|G| =$ par, dacă G ar avea el. de ordin 2 atunci pt. $\forall$ $x \neq u$, $\exists$ un $x \neq x^{-1}$ și atunci putem scrie G este $= \{e\} \cup \{x \in G \mid x \neq x^{-1}\}$
$\Rightarrow$ G are un nr. impar de elemente.

Mulțimile care intră în reuniune au câte 2 elemente și sunt sau disjuncte sau egale.
$\Rightarrow$ au un nr. egal de elemente.

6. Să se determine elem. de ordin 8 din $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$ și elementele ~~din~~ ordin 4 din $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$

Sol:

Obs. dacă ~~g și h~~ G și H sunt grupuri și $g \in G$ și $h \in H$ sunt elem. de ordin finit, atunci el. de forma $(g, h) \in G \times H$ are ordinul $[ord(g), ord(h)]$
Aceasta deoarece $(g,h)^p = (e_G, e_H)$

$\Leftrightarrow \quad g^p = e_G$ și $h^p = e_H$

$\Leftrightarrow \quad ord(g) \mid p$ și $ord(h) \mid p$

$\uparrow$
divide

$\Rightarrow$ afirmația de mai sus

Atunci o pereche oarecare $(g,h) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$ are ordinul 8 dacă $[n,m]=8$, unde $n = ord(g)$)

$\uparrow$

c.m.m.m.c.

$m = ord(h)$

Dar $n \mid 6$ și $m \mid 10$. este imposibil $[n,m]=8$ ⇒ nu $\exists$ el. de ordin 8.

$(g,h) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$

$[n,m]=4$ $\qquad n = ord(g)$, $m = ord(h)$

$n \mid 12$, $m \mid 15$

$1,2,3,4,6,12.$ $\qquad 1,3,5,15$

$[4,1]=4 \Rightarrow n=4,\ m=1$

Singurele el. de ordinul 4 din $\mathbb{Z}_{12}$ sunt: ~~...~~ clasa lui $\hat{3}$ și clasa lui $\hat{9}$.

În grupul generat de $\mathbb{Z}_{12}$ și $\mathbb{Z}_{15}$ $\exists$ 2 el. de ordinul 4 și anume $(\hat{3},\hat{0})$, $(\hat{9},\hat{0})$

⑦. Dați exemple de un grup G cu înmulțirea și de 2 el. x și $y \in G$ a.î.

a) $ord(x)$ și $ord(y)$ sunt finite, dar $ord(xy)$ e infinit

b) $ord(xy)$ finit dar $ord(x)$ și $ord(y)$ infinite

Sol: a) În grupul $GL_2(\mathbb{R})$ al matricelor inversabile de ordin 2 cu elem. reale, considerăm elementele:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = y^2 = I_2 \Rightarrow ord(y) = ord(x) = 2.$$

$x \cdot y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și nu există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(xy)^n = I_2 \Rightarrow ord(xy) = +\infty$

b) ? * ~~TEMA~~

⑧. Dați exemple de un el. x și de 2 grupuri G și G_1 a.î. $ord(x) < +\infty$ în G și $ord(x) = +\infty$ în G_1

Sol: Fie $x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ și grupurile $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ și $(\mathbb{C}, +)$.

- deoarece $x^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ și $x^3 = 1$

~~$ord(x) = 3(\mathbb{C}^*, \cdot)$~~

$ord(x) = 3$ în $(\mathbb{C}, \cdot)$

- deoarece $x \neq 0$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow ord(x) = +\infty$ în $(\mathbb{C}, +)$