(2)

Baza și dimensiune.

Fie V un K- spațiu vectorial. Orice submulțime finită $S = \{ \vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots v_n \}$ a lui V se numește sistem de vectori sau familie finită de vectori din V.

Def
Fie $S = \{ \vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots \vec{v_n} \} \subset V$ un sistem de vectori, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Sistemul S s.n. liniar independent dacă din orice combinație liniară egală cu zero rezultă toți coeficienții ecuației nuli!

$$\text{Din } \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \dots + \alpha_n \vec{v_n} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

2. Sistemul S s.n. liniar dependent dacă nu este liniar independent i.e.
există scalarii $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$, nu toți nuli a.î.

$$\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \dots + \alpha_n \vec{v_n} = \vec{0}$$

3. Sistemul S s.n. sistem de generatori pentru V dacă, pentru orice $v \in V$ există scalarii $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$, nu toți nuli, a.î.

$$v = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \dots + \alpha_n \vec{v_n}$$

4. Sistemul S s.n. bază a spațiului vectorial V dacă S este și liniar independent și sistem de generatori.

Lema Dacă $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$ este o bază, iar $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots \vec{x}_p\}$ este un sistem liniar independent, atunci $p \leq n$.

Prop Dacă $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n\}$ și $\{v'_1, v'_2 \dots v'_m\}$ sunt două baze finite ale unui spațiu vectorial V, atunci ele au același nr. de elemente, adică $m = n$.

Def Spațiul vectorial V s.n. <u>finit dimensional</u> dacă are o bază finită $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$. În acest caz nr. n se numește <u>dimensiunea</u> spațiului V și se notează cu $\dim V$.

Ex

1. Să se verifice dacă sistemul de vectori $S = \{\underbrace{(1,2,1)^T}_{\vec{v}_1}, \underbrace{(3,1,-2)^T}_{\vec{v}_2}, \underbrace{(1,1,2)^T}_{\vec{v}_3}\}$ este liniar independent.

Fie combinația liniară $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_n = \vec{0}$

$\Rightarrow \alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(3,1,-2) + \alpha_3(1,1,2) = (0,0,0)$

$(\alpha_1, 2\alpha_1, \alpha_1) + (3\alpha_2, \alpha_2, -2\alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, 2\alpha_3) = (0,0,0)$

$(\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 + 3 - 1 + 2 - 12 = -10 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Sistemul are sol. unică $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$\Rightarrow$ Sistemul de vectori S este liniar independent.

2. Să se dem. că urm. sistem de vectori este linear dependent

$S' = \{ \underbrace{(1,2,1)^T}_{\vec{v_1}}, \underbrace{(3,1,4)^T}_{\vec{v_2}}, \underbrace{(2,-1,3)^T}_{\vec{v_3}} \}$

Fie $\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \alpha_3 \vec{v_3} = 0$

$\alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(3,1,4) + \alpha_3(2,-1,3) = (0,0,0)$

$(\alpha_1, 2\alpha_1, \alpha_1) + (3\alpha_2, \alpha_2, 4\alpha_2) + (2\alpha_3, -\alpha_3, 3\alpha_3) = (0,0,0)$

$(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3) = (0,0,0)$

$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & +3 \end{vmatrix} = \cancel{+3} + 16 - \cancel{3} - 2 + 4 - 18 = 0$

$\Rightarrow$ Sistemul are o infinitate de soluții (admite și soluții nenule $\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$

$\Rightarrow$ Sistemul de vectori S' este liniar dependent.

3. Să se verifice dacă urm. sistem de vectori este sistem de generatori.

$S = \{ \underbrace{(1,2,1)^T}_{\vec{v_1}}, \underbrace{(3,1,-2)^T}_{\vec{v_2}}, \underbrace{(1,1,2)^T}_{\vec{v_3}} \} \subset \mathbb{R}^3$

Verificăm dacă $\forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ $\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, nu toți nuli a.î. $\vec{v} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \alpha_3 \vec{v_3}$. Considerăm $\vec{v} = (x,y,z)$

$\alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(3,1,-2) + \alpha_3(1,1,2) = (x,y,z)$

$(\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3) = (x,y,z)$

$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = x \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = y \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = z \end{cases}$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$

$\Rightarrow$ Sistemul are sol. ($\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nu toți nuli), $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$, deci $\forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}$ avem $\vec{v} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \alpha_3 \vec{v_3}$

$\Rightarrow S$ - sistem de generatori.

Obs Cum sistemul de vectori S din exemplele 1 și 3 este liniar independent și sistem de generatori $\Rightarrow$ S - bază

S - bază cu 3 vectori $\Rightarrow \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Exemplu

În $\mathbb{R}^n / \mathbb{R}$, sistemul de vectori

$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\}$ formează o bază, numită **bază canonică**, cu
$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots 0)^T$$
$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots 0)^T$$
$$\vec{e}_n = (0, 0, \dots 1)^T$$

Obs Într-o bază, coordonatele unui vector sunt unice.

Prop. Fie $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_m\}$ un sistem de vectori din spațiul vectorial real n-dimensional $\mathbb{R}^n$ și fie $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_m\} \subset M_{n,m}(\mathbb{R})$ matricea având drept coloane acești vectori. Atunci:

a) B este liniar independent dacă și numai dacă rang $A = m$,

b) B este sistem de generatori dacă și numai dacă rang $A = n$

c) B este bază dacă și numai dacă $m = n$ și $\det A \neq 0$.

Ex Să se verifice dacă în spațiul vectorial real $\mathbb{R}^3$ sistemul de vectori

$B = \{(1, 0, 5)^T, (2, 1, 3)^T, (-1, 2, 3)^T\}$ este:

a) liniar independent

b) sistem de generatori

c) bază

$B \subset \mathbb{R}^3$ Dimensiunea sp. vectorial este $n=3$, iar card $B = m = 3$.

Matricea atașată sistemului de vectori este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3+10+5-6 = 12 \neq 0$$

a) $\det A \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 3 = m \Rightarrow B$ - l.i.

b) $\operatorname{rang} A = 3 = n \Rightarrow B$ - sistem de generatori

c) Din a) și b) $\Rightarrow B$ - bază.

Ex. (Temă)

Să se verifice dacă următoarele sisteme sunt liniar independente, sisteme de generatori, baze.

a) $B_1 = \{(1,0,5)^T, (3,1,2)^T, (2,3,1)^T\} \subset \mathbb{R}^3$

b) $B_2 = \{(-1,5,0)^T, (-3,2,1)^T, (-2,1,3)^T\} \subset \mathbb{R}^3$

c) $B_3 = \{(1,0,7)^T, (5,1,3)^T, (4,1,-4)\} \subset \mathbb{R}^3$

d) $B_4 = \{(1,1,3)^T, (2,3,7)^T\} \subset \mathbb{R}^3$

e) $B_5 = \{(2,1,5)^T, (-3,1,7)^T\} \subset \mathbb{R}^3$

Ex

Să se determine coordonatele vectorului $\vec{x} = (5,7,8)^T$ în baza

$$S = \{(1,2,1)^T, (3,1,-2)^T, (1,1,2)^T\} \subset \mathbb{R}^3$$

Căutăm $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ a.î. $\vec{x} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \alpha_3 \vec{v_3}$

$\alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(3,1,-2) + \alpha_3(1,1,2) = (5,7,8)$

$(\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3) = (5,7,8)$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 5 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 7 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 8 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Sistemul are sol. unică

$\Rightarrow \alpha_1 = \dfrac{\Delta_{\alpha_1}}{\Delta}$, $\Delta_{\alpha_1} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 8 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 14 + 24 - 8 + 10 - 42 = -20$

$\Rightarrow \alpha_1 = \dfrac{-20}{-10} = 2$

$\alpha_2 = \dfrac{\Delta_{\alpha_2}}{\Delta}$, $\Delta_{\alpha_2} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 14 + 16 + 5 - 7 - 8 - 20 = 0$

$\Rightarrow \alpha_2 = \dfrac{0}{-10} = 0$

$\alpha_3 = \dfrac{\Delta_{\alpha_3}}{\Delta}$, $\Delta_{\alpha_3} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 20 + 21 - 5 + 14 - 48 = -30$

$\alpha_3 = \dfrac{-30}{-10} = 3$

$\Rightarrow$ Coordonatele lui $\vec{x}$ în baza B sunt $\vec{x}_B = (2, 0, 3)$

Ex (Temă)

1. Să se determine coordonatele vectorului $\vec{x} = (-9, 4, -1)^T$ în baza $B = \{(3,1,2)^T, (-1,2,1)^T, (4,-1,1)^T\}$

2. Să se verifice dacă sistemul de vectori
$B = \{(1, 0, -2)^T, (3, -1, 2)^T, (-1, 2, 1)^T\} \subset \mathbb{R}^3$
formează o bază și în caz afirmativ să se determine coordonatele vectorului $\vec{x} = (-6, 4, -5)^T$ în această bază.