Temă – Curs 9 Petculescu Mihai-Silviu

1. Să se scrie ec. carteziene și parametrice scalare ale dreptei ce trece prin punctul $M(-1,2,3)$ și are direcția vectorului director $\vec{v}=(-1,2,2)$.

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \Leftrightarrow \frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2} \text{ (ec. carteziene)}$$

$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{2}=t \Rightarrow \begin{cases} x+1=-t \\ y-2=2t \\ z-3=2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t-1,\ t\in R \\ y=2t+2 \quad \text{(ec. param. scalare)} \\ z=2t+3 \end{cases}$$

2. Să se scrie ec. carteziene și parametrice scalare ale dreptei ce trece prin punctul $M(0,1,5)$ și are direcția vectorului director $\vec{v}=(3,1,-2)$.

$$\frac{x-0}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{-2} \text{ (ec. carteziene)}$$

$$\frac{x-0}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{-2}=t \Rightarrow \begin{cases} x=3t \\ y-1=t \\ z-5=-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3t,\ t\in R \\ y=t+1 \quad \text{(ec. param. scalare).} \\ z=-2t+5 \end{cases}$$

3. Să se scrie ec. carteziene și parametrice scalare ale dreptelor ce trec prin punctele:

a) $A(2,-1,4)$, $B(-1,2,1)$.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-1-2}=\frac{y+1}{2+1}=\frac{z-4}{1-4} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{-3}$$

(ec. carteziene)

$$\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{-3}=t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=-3t \\ y+1=3t \\ z-4=-3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3t+2,\ t\in R. \\ y=3t-1 \\ z=-3t+4 \end{cases}$$

b) $A(0,1,5)$, $B(-1,2,0)$.

$$\frac{x-0}{-1-0}=\frac{y-1}{2-1}=\frac{z-5}{0-5} \Leftrightarrow \frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{-5} \text{ (ec. carteziene)}$$

Ec. parametrice: $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{-5}=t.$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y-1=t \\ z-5=-5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t,\ t\in R. \\ y=t+1 \\ z=-5t+5 \end{cases}$$

4. Să se determine ec. carteziene și parametrice ale dreptelor determinate de intersecțiile planelor:

a) $P_1: x+5y-z+4=0$; $P_2: -x+2y+3z-4=0$.

Căutăm un punct pe dreapta d.

$$\begin{cases} x+5y-z+4=0 \\ -x+2y+3z-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-z=-5y-4 \\ -x+3z=-2y+4 \end{cases} \text{„+"}$$

$$2z=-7y \Rightarrow z=\frac{-7y}{2}$$

$$x+\frac{7y}{2}=-5y-4 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow 2x+7y=-10y-8 \Leftrightarrow x=\frac{-17y-8}{2}$$

• Pentru $y=0 \Rightarrow x=\frac{-17\cdot 0-8}{2}=-4$; $z=\frac{-7\cdot 0}{2}=0 \Rightarrow M(-4,0,0)$.

Normalele celor 2 planuri sunt: $\vec{n_1}=(1,5,-1)$; $\vec{n_2}=(-1,2,3)$.

$$\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=15\vec{i}+2\vec{k}+\vec{j}+5\vec{k}+2\vec{i}-3\vec{j}$$
$$=17\vec{i}-2\vec{j}+7\vec{k}$$
$$\Rightarrow \vec{v}=(17,-2,7).$$

$\Rightarrow$ Ec carteziene sunt: $\frac{x+4}{17}=\frac{y-0}{-2}=\frac{z-0}{7} \Leftrightarrow \frac{x+4}{17}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}$

Ec. parametrice: $\frac{x+4}{17}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{7}=t \Rightarrow \begin{cases} x+4=17t \\ y=-2t \\ z=7t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=17t-4 \\ y=-2t \\ z=7t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

b) $P_1: 2x-y+z+5=0$; $P_2: -x+4y-z+3=0$.

Căutăm un punct pe dreapta d:

$$\begin{cases} 2x-y+z+5=0 \\ -x+4y-z+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+z=y-5 \\ -x-z=-4y-3 \end{cases} \text{„+"}$$

$$x=-3y-8.$$

$3y+8-z=-4y-3 \Rightarrow -z=-3y-8-4y-3$.

$\Rightarrow -z=-7y-11 \Rightarrow \boxed{z=7y+11}$

Pentru $y=1 \Rightarrow x=-11, z=18 \Rightarrow M(-11,1,18)$

Normalele celor 2 planuri sunt: $\vec{n_1}=(2,-1,1)$, $\vec{n_2}=(-1,4,-1)$.

$$\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}=\vec{i}+8\vec{k}-\vec{j}-\vec{k}-4\vec{i}+2\vec{j}=-3\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{v}=(-3,1,7).$$

Ec. parametrice: $\frac{x+11}{-3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-18}{7}=t \Rightarrow \begin{cases} x+11=-3t \\ y-1=t \\ z-18=7t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3t-11,\ t\in\mathbb{R} \\ y=t+1 \\ z=7t+18 \end{cases}$

5. Să se determine distanța de la $M(-1,2,4)$ la dreapta de ec. $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+1}{1}$.

$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+1}{1}=t \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1,\ t\in\mathbb{R}. \\ y=4t+2 \\ z=t-1 \end{cases}$

Pentru $t=0 \Rightarrow x=-1, y=2, z=-1 \Rightarrow M_1(-1,2,-1)$.

$\overrightarrow{MM_1}=(x_{M_1}-x_M, y_{M_1}-y_M, z_{M_1}-z_M)=(-1+1, 2-2, -1-4)=(0,0,-5)$

Vectorul director al dreptei d este $\vec{v}=(3,4,1)$

$\overrightarrow{MM_1}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-15\vec{j}+20\vec{i}=20\vec{i}-15\vec{j}$

$\|\overrightarrow{MM_1}\times\vec{v}\|=\sqrt{20^2+(-15)^2}=\sqrt{400+225}=\sqrt{625}=25.$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{3^2+4^2+1^2}=\sqrt{9+16+1}=\sqrt{26}$

$\Rightarrow d(M,d)=\frac{\|\overrightarrow{MM_1}\times\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}=\frac{25}{\sqrt{26}}=\frac{25\sqrt{26}}{26}$

6. Să se determine distanța de la $M(1,2,-3)$ la dreapta de ec. $\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}$

$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}=t \Rightarrow \begin{cases} x=4t+2,\ t\in\mathbb{R}. \\ y=t-1 \\ z=2t+1 \end{cases}$

Pentru $t=0 \Rightarrow x=2, y=-1, z=1 \Rightarrow M_1(2,-1,1)$

$\overrightarrow{MM_1}=(2-1,-1-2,1+3)=(1,-3,4)$.

Vectorul director al dreptei este $\vec{v}=(4,1,2)$.

$\overrightarrow{MM_1}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-6\vec{i}+\vec{k}+16\vec{j}+12\vec{k}-4\vec{i}-2\vec{j}$
$=-10\vec{i}+14\vec{j}+13\vec{k}$

$\left.\begin{array}{l} \|\overrightarrow{MM_1}\times\vec{v}\|=\sqrt{(-10)^2+14^2+13^2}=\sqrt{100+196+169}=\sqrt{465} \\ \|\vec{v}\|=\sqrt{4^2+1^2+2^2}=\sqrt{16+1+4}=\sqrt{21} \end{array}\right\} \Rightarrow d(M,d)=\frac{\sqrt{465}}{\sqrt{21}}$

7. Să se determine unghiul dintre dreptele d_1, d_2 dacă:

a) d_1: este dreapta care trece prin punctele $A(1,2,-3)$, $B(0,1,4)$.

d_2: este dreapta de intersecție a planurilor

$P_1: 2x-y+z+4=0;\quad P_2: -x+y-z-3=0.$

Dreapta d_1 are ca ec: $\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-2}{1-2}=\frac{z+3}{4+3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ vectorul director este $\vec{v_1}=(-1,-1,7)$.

Căutăm un punct pe dreapta d_2:

$\begin{cases} 2x-y+z+4=0 \\ -x+y-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=-z-4 \\ -x+y=z+3 \quad \text{"+"} \end{cases}$ $\quad x=-1$ $\quad \Leftrightarrow \begin{cases} -2-y=-z-4 \\ 1+y=z+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y=-z-2 \\ y=z+2. \end{cases}$

Pentru $x=-1,\ y=1 \Rightarrow z=3 \Rightarrow M(-1,1,3)$.

Normalele celor 2 planuri sunt: $\vec{n_1}=(2,-1,1)$, $\vec{n_2}=(-1,1,-1)$,

$$\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\vec{i}+2\vec{k}-\vec{j}-\vec{k}-\vec{i}+2\vec{j}=\vec{j}+\vec{k} \Rightarrow \vec{v}=(0,1,1).$$

$\Rightarrow$ Ec dreptei d_2 este: $\frac{x+1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{1} \Rightarrow$ vect. director este $\vec{v_2}=(0,1,1)$.

$$\cos\theta=\frac{\langle v_1,v_2\rangle}{\|\vec{v_1}\|\cdot\|\vec{v_2}\|}$$

$\langle\vec{v_1},\vec{v_2}\rangle=(-1)\cdot0+(-1)\cdot1+7\cdot1=-1+7=6$

$\|\vec{v_1}\|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+7^2}=\sqrt{1+1+49}=\sqrt{51}$

$\|\vec{v_2}\|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow \cos\theta=\frac{6}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{51}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{51}}{17}$

$\Rightarrow \theta=\arccos\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{51}}{17}\right)$

d) $d_1: \frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-5}{3}$

$d_2 \begin{cases} x=2+t \\ y=1-3t \\ z=-2+t \end{cases}$ Vectorul director al dreptei d_1 este $\vec{v_1}=(3,1,3)$

$d_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{1} \Rightarrow \vec{v_2}=(1,-3,1)$.

$$\cos\theta=\frac{\langle\vec{v_1},\vec{v_2}\rangle}{\|\vec{v_1}\|\cdot\|\vec{v_2}\|}$$

$\langle\vec{v_1},\vec{v_2}\rangle=3\cdot1+1\cdot(-3)+3\cdot1=3-3+3=3$

$\|\vec{v_1}\|=\sqrt{3^2+1^2+3^2}=\sqrt{9+1+9}=\sqrt{19}$

$\|\vec{v_2}\|=\sqrt{1^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$

$\Rightarrow \cos\theta=\frac{3}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{19}}=\frac{3\sqrt{11}\cdot\sqrt{19}}{11\cdot19}$

$\Rightarrow \theta=\arccos\left(\frac{3\sqrt{11}\cdot\sqrt{19}}{11\cdot19}\right)$

8. Să se determine unghiul dintre dreapta de ec. $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-2+t \\ z=3+5t \end{cases}$ și planul care trece prin punctele $A(2,1,3)$, $B(0,1,4)$, $C(1,0,1)$.

Ec. dreptei este: $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{5} \Rightarrow \vec{v}=(4,1,5)$.

Ec. planului:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 0-2 & 1-1 & 4-3 \\ 1-2 & 0-1 & 1-3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow 2(z-3) - (y-1) + (x-2) - 4(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow 2z - 6 - y + 1 + x - 2 - 4y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x - 5y + 2z - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -5, 2)$

$\langle \vec{n}, \vec{v} \rangle = 1 \cdot 4 + (-5) \cdot 1 + 2 \cdot 5 = 4 - 5 + 10 = 9$

$\|\vec{n}\| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 25 + 4} = \sqrt{30}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 1 + 25} = \sqrt{42}$

$\sin \alpha = \dfrac{\langle \vec{n}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \dfrac{9}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{42}} = \dfrac{3\sqrt{30} \cdot \sqrt{42}}{140} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\dfrac{3\sqrt{30} \cdot \sqrt{42}}{140}\right)$

9. Să se determine unghiul dintre dreapta determinată de intersecția planelor de ec: $2x + y - z + 3 = 0$ și $-x + 3y + z - 2 = 0$ cu P de ec: $x - 4y + z - 3 = 0$.

$\vec{n} = (1, -4, 1)$

Căutăm un punct pe dreaptă:

$\begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ -x + 3y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = z - 3 \\ -x + 3y = -z + 2 \quad ,,+" \end{cases}$

$x + 4y = -1 \Rightarrow x = -1 - 4y$

$1 + 4y + 3y = -z + 2 \Rightarrow 1 + 7y = -z + 2 \Leftrightarrow z = -7y + 1$

Pentru $y = 1 \Rightarrow x = -5, z = -6 \Rightarrow M(-5, 1, -6)$

Normalele celor 2 planuri sunt: $\vec{n_1} = (2, 1, -1)$; $\vec{n_2} = (-1, 3, 1)$

$\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 6\vec{k} + \vec{j} + \vec{k} + 3\vec{i} - 2\vec{j} = 4\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{v} = (4, -1, 7)$.

$\Rightarrow$ Ec. dreptei este $\dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+6}{7} \Rightarrow \vec{v} = (4, -1, 7)$.

$\langle \vec{n}, \vec{v} \rangle = 1 \cdot 4 + (-4) \cdot (-1) + 1 \cdot 7 = 4 + 4 + 7 = 15$.

$\|\vec{n}\| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 1 + 49} = \sqrt{66}$

$\sin \alpha = \dfrac{15}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{66}} = \dfrac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{66}}{2 \cdot 66} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\dfrac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{66}}{2 \cdot 66}\right)$