PROBABILITĂȚI ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

Conf. univ. dr. COSTEL BĂLCĂU

2020

Cuprins

Evaluare Informatică

- Activitate laborator 30% (Aplicații din Temele de laborator)
- Activitate seminar: 20% (Aplicații din Temele de seminar)
- Teme de casă: 20% (Aplicații suplimentare)
- Colocviu final: 30% (Probă scrisă: aplicații)

Evaluare Matematică

- Activitate seminar: 30% (Aplicații din Temele de seminar)
- Teme de casă: 20% (Aplicații suplimentare)
- Examen final: 50% (Probă scrisă: aplicații)

Bibliografie

[1] C. Bălcău, *Combinatorică și teoria grafurilor*, Editura Universității din Pitești, Pitești, 2007.

[2] C. Bălcău, P. Radovici-Mărculescu, R. Georgescu, *Matematică aplicată în economie*, Editura Universității din Pitești, Pitești, 2010.

[3] C. Bălcău, R. Georgescu, M. Macarie, *Matematică aplicată în economie. Note de curs și seminar*, Editura Universității din Pitești, Pitești, 2016.

[4] D.P. Bertsekas, J.N. Tsitsiklis, *Introduction to Probability*, Athena Scientific, 2008.

[5] N. Boboc, *Analiză matematică*, Tipografia Universității din București, București, 1988.

[6] N. Breaz, L. Căbulea, A. Pitea, Gh. Zbăganu, R. Tudorache, I. Rasa, *Probabilități și statistică*, Editura StudIS, Iași, 2013.

[7] N. Breaz, M. Crăciun, P. Gașpar, M. Miroiu, I. Paraschiv-Munteanu, *Modelarea matematică prin Matlab*, Editura StudIS, Iași, 2013.

[8] G. Ciuprina, *Algoritmi numerici prin exerciții și implementări în Matlab*, Editura Matrix Rom, București, 2013.

[9] C. Costinescu, I. Mierluș-Mazilu, S.A. Popescu, *Probabilități și statistică tehnică: Abreviar teoretic, probleme rezolvate și probleme propuse*, Editura Conspress, București, 2005.

[10] R.G. Cowell, A.P. Dawid, S.L. Lauritzen, D.J. Spiegelhalter, *Probabilistic Networks and Expert Systems*, Springer, 2007.

[11] V. Craiu, *Teoria probabilităților cu exemple și probleme*, Editura Fundației "România de Mâine", București, 1997.

[12] I. Cuculescu, *Teoria probabilităților*, Editura ALL, București, 1998.

[13] K. Devlin, *Partida neterminată*, Editura Humanitas, București, 2015.

[14] J.H. Drew, D.L. Evans, A.G. Glen, L.M. Leemis, *Computational Probability. Algorithms and Applications in the Mathematical Sciences*, Springer, 2008.

[15] H.-O. Georgii, *Stochastics. Introduction to Probability and Statistics*, De Gruyter, 2008.

[16] J. Hromkovic, *Design and Analysis of Randomized Algorithms: Introduction to Design Paradigms*, Springer, 2005.

[17] M. Iosifescu, Gh. Mihoc, R. Theodorescu, *Teoria probabilităților și statistică matematică*, Editura Tehnică, București, 1967.

[18] M. Ivan, A. Pletea, T. Stihi, G. Cosovici, D. Inoan, *Matematică prin "Mathematica"*, Editura StudIS, Iași, 2013.

[19] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Springer, 2002.

[20] M. Keller, W. Trotter, *Applied Combinatorics*, Open Textbook Library, 2017.

[21] M. Lefebvre, *Applied Probability and Statistics*, Springer, 2006.

[22] M. Miroiu, V. Petrehuș, Gh. Zbăganu, *Inițiere în R pentru persoane cu pregătire matematică*, Editura StudIS, Iași, 2013.

[23] D.C. Montgomery, G.C. Runger, *Applied Statistics and Probability for Engineers*, John Wiley & Sons, 2003.

[24] C. Niculescu, *Probabilități și statistică*, Editura Universității din București, București, 2015.

[25] E. Petrișor, *Probabilități și statistică: Aplicații în economie și inginerie*, Editura Politehnica, Timișoara, 2005.

[26] G. Popovici, *Statistical lab using the R-system*, Editura Universității din București, București, 2011.

[27] V. Preda, C. Bălcău, *Entropy optimization with applications*, Editura Academiei Române, București, 2010.

[28] C.E. Rasmussen, C. Williams, *Gaussian Processes for Machine Learning*, MIT Press, 2006.

[29] H. Robbins, *A remark on Stirling's formula*, The American Mathematical Monthly, vol. 62, nr. 1 (1955), 26–29.

[30] G. Roussas, *An Introduction to Probability and Statistical Inference*, Elsevier, 2014.

[31] Gh. Toncu, *Programarea calculatoarelor și limbaje de programare: Introducere în mediul de programare Matlab*, Editura Ovidius University Press, Constanța, 2014.

[32] C. Tudor, *Teoria probabilităților*, Editura Universității din București, București, 2004.

Capitolul 1

Metode de numărare

1.1 Preliminarii

Vom prezenta metode și formule de numărare pentru cele mai cunoscute familii de obiecte combinatoriale: produs cartezian, submulțimi, aranjamente (fără repetiție, cu repetiție sau ordonate), combinări (fără repetiție sau cu repetiție), permutări (fără repetiție sau cu repetiție), compuneri și descompuneri ale unui număr natural, partiții ale unei mulțimi finite.

Reamintim câteva notații și noțiuni uzuale.

Definiția 1.1.1. *Fie A o mulțime finită. Numărul de elemente ale lui A, notat cu* $\mathrm{card}\,(A)$*, se numește* ***cardinalul*** *mulțimii A.*

Definiția 1.1.2. *Fie A un* ***alfabet*** *(adică o mulțime finită) și $n \in \mathbb{N}^*$. O secvență de forma*

$$a = a_1 a_2 \ldots a_n, \ \text{cu } a_1, a_2, \ldots, a_n \in A,$$

se numește ***cuvânt de lungime*** *n peste alfabetul A. Lungimea cuvântului a se notează cu $|a|$.*

Observația 1.1.1. Evident, cuvântul $a_1 a_2 \ldots a_n$ poate fi identificat cu vectorul $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Definiția 1.1.3. *Fie $m, n \in \mathbb{N}$. O* ***aranjare a*** *n* ***bile*** *(obiecte)* ***în*** *m* ***urne*** *(căsuțe) este o așezare a celor n bile în cele m urne astfel încât orice bilă este pusă într-o singură urnă. O aranjare se numește* ***cu repetiție*** *dacă orice urnă poate conține oricâte bile (dispuse una după alta), respectiv* ***fără repetiție*** *dacă orice urnă conține cel mult o bilă.* ***Bilele*** *pot fi* ***numerotate*** *(cu numere distincte două câte două) sau* ***identice*** *(nenumerotate).* ***Urnele*** *pot fi* ***numerotate*** *(cu numere distincte două câte două) sau* ***identice*** *(nenumerotate).* ***Urnele*** *se numesc* ***ordonate*** *când contează ordinea dintre bilele din aceeași urnă, respectiv* ***neordonate*** *în caz contrar.*

Definiția 1.1.4. *Fie $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$. Notăm*

$$[x]_n = \begin{cases} 1, \ \text{dacă } n = 0, \\ \underbrace{x(x-1)\ldots(x-n+1)}_{n \text{ factori}}, \ \text{dacă } n \geq 1, \end{cases} \quad [x]^n = \begin{cases} 1, \ \text{dacă } n = 0, \\ \underbrace{x(x+1)\ldots(x+n-1)}_{n \text{ factori}}, \ \text{dacă } n \geq 1. \end{cases}$$

$[x]_n$ se numește ***polinomul factorial descrescător*** *de gradul n, iar $[x]^n$ se numește* ***polinomul factorial crescător*** *de gradul n.*

Observația 1.1.2. Evident, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$ avem

$$[-x]^n = (-1)^n [x]_n, \ [-x]_n = (-1)^n [x]^n,$$
$$[x]^n = [x+n-1]_n, \ [x]_n = [x-n+1]^n.$$

1.2 Regula produsului

Definiția 1.2.1. ***Produsul cartezian*** *al mulțimilor* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *este mulțimea*

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Exemplul 1.2.1. $\{a, b\} \times \{+, -\} \times \{c\} = \{(a, +, c), (a, -, c), (b, +, c), (b, -, c)\}$.

Propoziția 1.2.1 (de numărare a produsului cartezian). *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$ *și* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *mulțimi finite. Atunci* $\text{card}\,(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \text{card}\,(A_1) \cdot \text{card}\,(A_2) \cdot \ldots \cdot \text{card}\,(A_n)$.

Demonstrație. Vom demonstra egalitatea din enunț prin inducție după n.

Pentru $n = 1$ egalitatea devine $\text{card}\,(A_1) = \text{card}\,(A_1)$.

Pentru $n = 2$, fie $A_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ și $A_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_q\}$. Avem

$$\begin{array}{rcllll} A_1 \times A_2 & = & \{(x_1, y_1), & (x_1, y_2), & \ldots, & (x_1, y_q), \\ & & (x_2, y_1), & (x_2, y_2), & \ldots, & (x_2, y_q), \\ & & \ldots & & & \\ & & (x_p, y_1), & (x_p, y_2), & \ldots, & (x_p, y_q)\} \end{array}$$

(p linii și q coloane), deci $\text{card}\,(A_1 \times A_2) = pq = \text{card}\,(A_1) \cdot \text{card}\,(A_2)$.

Presupunem adevărată egalitatea din enunț pentru orice k mulțimi finite, unde $k \geq 2$, și o demonstrăm pentru $k + 1$. Folosind asociativitatea produsului cartezian, egalitatea demonstrată pentru două mulțimi și ipoteza de inducție avem

$$\begin{aligned} \text{card}\,(A_1 \times \ldots \times A_k \times A_{k+1}) &= \text{card}\,(A_1 \times \ldots \times A_k) \cdot \text{card}\,(A_{k+1}) \\ &= \text{card}\,(A_1) \cdot \ldots \cdot \text{card}\,(A_k) \cdot \text{card}\,(A_{k+1}), \end{aligned}$$

deci demonstrația este încheiată. □

Formula anterioară rămâne valabilă, cu acceași demonstrație, și în următorul caz mai general, când mulțimile A_k depind de alegerea elementelor anterioare $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_{k-1} \in A_{k-1}$, dar au cardinal fixat.

Propoziția 1.2.2 (Regula produsului). *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$ *și* A_1 *o mulțime finită. Pentru fiecare* $a_1 \in A_1$ *se consideră câte o mulțime finită* $A_2(a_1)$. *Analog, pentru orice* $k \in \{3, \ldots, n\}$ *și pentru fiecare* $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2(a_1)$, $\ldots$, $a_{k-1} \in A_{k-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{k-2})$ *se consideră câte o mulțime finită* $A_k(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$. *Fie*

$$M = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2(a_1), a_3 \in A_3(a_1, a_2), \ldots, a_n \in A_n(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})\}.$$

Fie $m_1 = \text{card}\,(A_1)$. *Presupunem că pentru orice* $k \in \{2, \ldots, n\}$ *avem* $\text{card}\, A_k(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}) = m_k$, *pentru orice* $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2(a_1)$, $\ldots$, $a_{k-1} \in A_{k-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{k-2})$. *Atunci*

$$\text{card}\,(M) = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n.$$

Exemplul 1.2.2. Câte numere naturale de patru cifre au cifrele distincte? Câte dintre acestea sunt pare? Dar impare?

Soluție. Numerele naturale de patru cifre distincte au forma $\overline{abcd}$, cu

- $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ (9 posibilități),
- $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{a\}$ (9 posibilități, pentru orice a),

- $c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{a, b\}$ (8 posibilități, pentru orice a și b),
- $d \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{a, b, c\}$ (7 posibilități, pentru orice a, b și c),

deci numărul lor este $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.

Cele impare au forma $\overline{abcd}$, cu

- $d \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (5 posibilități),
- $a \in \{1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{d\}$ (8 posibilități, pentru orice d),
- $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{a, d\}$ (8 posibilități, pentru orice a și b),
- $c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{a, b, d\}$ (7 posibilități, pentru orice a, b și c),

deci numărul lor este $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2240$.

Astfel numărul celor pare este de $4536 - 2240 = 2296$. □

Corolarul 1.2.1 (de numărare a submulţimilor). *Fie A o mulțime finită și $\mathcal{P}(A)$ mulțimea tuturor submulțimilor (părților) lui A. Atunci* $\operatorname{card}(\mathcal{P}(A)) = 2^{\operatorname{card}(A)}$.

Demonstraţie. Fie $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm $\{0, 1\}^n = \underbrace{\{0, 1\} \times \ldots \times \{0, 1\}}_{\text{de } n \text{ ori}}$.

Definim funcțiile $\alpha : \mathcal{P}(A) \to \{0, 1\}^n$ și $\beta : \{0, 1\}^n \to \mathcal{P}(A)$ prin:

- $\forall B \in \mathcal{P}(A)$, $\alpha(B) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, unde $c_i = \begin{cases} 1, & \text{dacă } a_i \in B, \\ 0, & \text{dacă } a_i \notin B \end{cases}$
  ($(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ se numește *vectorul caracteristic* al submulțimii B);
- $\forall\, (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \{0, 1\}^n$, $\beta(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \{a_i | c_i = 1, i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

Funcțiile α și β sunt inverse una celeilalte, deci sunt bijective și $\operatorname{card}(\mathcal{P}(A)) = \operatorname{card}(\{0, 1\}^n) = 2^n$. □

Exemplul 1.2.3. Pentru $A = \{a, b, c\}$, corespondența *submulțimi* $\leftrightarrow$ *produs cartezian* din demonstrația anterioară este redată în următorul tabel:

$(c_1, c_2, c_3) \in \{0, 1\}^3$	$B \in \mathcal{P}(A)$
(0,0,0)	$\emptyset$
(0,0,1)	$\{c\}$
(0,1,0)	$\{b\}$
(0,1,1)	$\{b, c\}$
(1,0,0)	$\{a\}$
(1,0,1)	$\{a, c\}$
(1,1,0)	$\{a, b\}$
(1,1,1)	$\{a, b, c\}$

Deci A are $2^3 = 8$ submulțimi.

1.3 Aranjamente, combinări, permutări

Propoziția 1.3.1 (de numărare a aranjamentelor cu repetiție). *Fie $m, n \in \mathbb{N}$. Atunci*
numărul de cuvinte de lungime n peste un alfabet cu m litere
= numărul de aranjări cu repetiție a n bile numerotate în m urne numerotate și neordonate
= numărul de funcții ce pot fi definite pe o mulțime (fixată) cu n elemente, cu valori într-o mulțime (fixată) cu m elemente
$= m^n$
(cu convenția $0^0 = 1$).

Demonstrație. Fie $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ și $B = \{1, 2, \ldots, m\}$. Notăm mulțimile din enunț astfel:

$$\mathcal{C} = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) | c_i \in B \, \forall \, i\},$$

$\mathcal{A}$ = mulțimea aranjărilor cu repetiție a n bile numerotate $1, 2, \ldots, n$ în m urne numerotate $1, 2, \ldots, m$ și neordonate,

$$\mathcal{F} = \{f | f : A \to B\}.$$

Între aceste mulțimi definim următoarele corespondențe

$$\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{A}, \; \beta : \mathcal{A} \to \mathcal{C}, \; \gamma : \mathcal{C} \to \mathcal{F}, \; \delta : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$$

prin:

- $\forall \, (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathcal{C}$, $\alpha(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ = aranjarea dată de regula: se așează bila i în urna c_i, $\forall \, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
- $\forall \, \omega \in \mathcal{A}$, $\beta(\omega) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, unde c_i = urna în care se află bila i în aranjarea ω, $\forall \, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
- $\forall \, (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathcal{C}$, $\gamma(c_1, c_2, \ldots, c_n) = f$, unde $f(i) = c_i$, $\forall \, i \in A$;
- $\forall \, f \in \mathcal{F}$, $\delta(f) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, unde $c_i = f(i)$, $\forall \, i \in A$.

Evident, funcțiile α, β, γ și δ sunt bine definite. De asemenea avem

$$\begin{gathered} \alpha(\beta(\omega)) = \omega, \; \forall \, \omega \in \mathcal{A}, \\ \beta(\alpha(c_1, c_2, \ldots, c_n)) = (c_1, c_2, \ldots, c_n), \; \forall \, (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathcal{C}, \\ \gamma(\delta(f)) = f, \; \forall \, f \in \mathcal{F}, \\ \delta(\gamma(c_1, c_2, \ldots, c_n)) = (c_1, c_2, \ldots, c_n), \; \forall \, (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathcal{C}, \end{gathered}$$

deci funcțiile α și β sunt inverse una celeilalte, iar funcțiile γ și δ sunt de asemenea inverse una celeilalte. Rezultă că aceste funcții sunt bijective, deci

$$\operatorname{card}(\mathcal{C}) = \operatorname{card}(\mathcal{A}) = \operatorname{card}(\mathcal{F}).$$

Cum $\mathcal{C} = B^n$, conform Propoziției 1.2.1 avem $\operatorname{card}(\mathcal{C}) = m^n$, și astfel demonstrația este încheiată. □

Definiția 1.3.1. *Oricare obiecte din cele 3 tipuri numărate în propoziția anterioară se numesc **aranjamente cu repetiție** de m luate câte n. Prin abuz de limbaj, și numărul lor, adică m^n, se numește tot **aranjamente cu repetiție de** m **luate câte** n.*

Exemplul 1.3.1. Pentru $m = 2$ și $n = 3$, corespondențele *cuvinte* $\leftrightarrow$ *aranjări* $\leftrightarrow$ *funcții* din demonstrația anterioară sunt redate în următorul tabel:

$(c_1, c_2, c_3) \in \mathcal{C}$	$\omega \in \mathcal{A}$	$f \in \mathcal{F}$
(1,1,1)	$\{1,2,3\}\|\emptyset$	$f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 1$
(1,1,2)	$\{1,2\}\|\{3\}$	$f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 2$
(1,2,1)	$\{1,3\}\|\{2\}$	$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 1$
(1,2,2)	$\{1\}\|\{2,3\}$	$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 2$
(2,1,1)	$\{2,3\}\|\{1\}$	$f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 1$
(2,1,2)	$\{2\}\|\{1,3\}$	$f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 2$
(2,2,1)	$\{3\}\|\{1,2\}$	$f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 1$
(2,2,2)	$\emptyset\|\{1,2,3\}$	$f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 2$

unde $|$ reprezintă bara despărțitoare între urne. Deci avem $2^3 = 8$ aranjamente cu repetiție.

Propoziția 1.3.2 (de numărare a aranjamentelor). *Fie $m, n \in \mathbb{N}$. Atunci*
numărul de cuvinte de lungime n cu litere distincte peste un alfabet cu m litere
= numărul de aranjări fără repetiție a n bile numerotate în m urne numerotate
= numărul de funcții injective ce pot fi definite pe o mulțime (fixată) cu n elemente, cu valori într-o mulțime (fixată) cu m elemente
= $[m]_n$.

Demonstrație. Fie $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ și $B = \{1, 2, \ldots, m\}$. Notăm mulțimile din enunț astfel:

$$\mathcal{C}_1 = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) | c_i \in B\, \forall\, i,\ c_i \neq c_j\, \forall\, i \neq j\},$$

$\mathcal{A}_1$ = mulțimea aranjărilor fără repetiție a n bile numerotate $1, 2, \ldots, n$ în m urne numerotate $1, 2, \ldots, m$,

$$\mathcal{F}_1 = \{f | f : A \to B,\ f(i) \neq f(j)\, \forall\, i \neq j\}.$$

Între aceste mulțimi definim corespondențele

$$\alpha : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{A}_1,\ \beta : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{C}_1,\ \gamma : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{F}_1,\ \delta : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{C}_1$$

exact ca în demonstrația Propoziției 1.3.1.

Din nou aceste funcții sunt bine definite, α și β sunt inverse una celeilalte, iar γ și δ sunt inverse una celeilalte. Deci

$$\text{card}\,(\mathcal{C}_1) = \text{card}\,(\mathcal{A}_1) = \text{card}\,(\mathcal{F}_1).$$

Rămâne de demonstrat egalitatea $\text{card}\,(\mathcal{C}_1) = [m]_n$. Avem
$\mathcal{C}_1 = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) | c_1 \in \{1, \ldots, m\}, c_2 \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{c_1\},\ c_3 \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{c_1, c_2\}, \ldots, c_n \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{c_1, \ldots, c_{n-1}\}\}$, deci, aplicând *regula produsului*,

$$\text{card}\,(\mathcal{C}_1) = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1) = [m]_n.$$

□

Definiția 1.3.2. *Oricare obiecte din cele 3 tipuri numărate în propoziția anterioară se numesc **aranjamente (fără repetiție)** de m luate câte n. De asemenea și numărul lor, adică $[m]_n$, se numește tot **aranjamente (fără repetiție) de** m **luate câte** n și se mai notează cu A_m^n.*

Observația 1.3.1. Pentru $n > m$ avem

$$[m]_n = m \ldots (m-m) \ldots (m-n+1) = 0.$$

Exemplul 1.3.2. Pentru $m = 4$ și $n = 2$, corespondențele din demonstrația anterioară sunt redate în următorul tabel:

$(c_1, c_2) \in \mathcal{C}_1$	$\omega \in \mathcal{A}_1$	$f \in \mathcal{F}_1$
(1,2)	$\{1\}\|\{2\}\|\emptyset\|\emptyset$	$f(1) = 1, f(2) = 2$
(1,3)	$\{1\}\|\emptyset\|\{2\}\|\emptyset$	$f(1) = 1, f(2) = 3$
(1,4)	$\{1\}\|\emptyset\|\emptyset\|\{2\}$	$f(1) = 1, f(2) = 4$
(2,1)	$\{2\}\|\{1\}\|\emptyset\|\emptyset$	$f(1) = 2, f(2) = 1$
(2,3)	$\emptyset\|\{1\}\|\{2\}\|\emptyset$	$f(1) = 2, f(2) = 3$
(2,4)	$\emptyset\|\{1\}\|\emptyset\|\{2\}$	$f(1) = 2, f(2) = 4$
(3,1)	$\{2\}\|\emptyset\|\{1\}\|\emptyset$	$f(1) = 3, f(2) = 1$
(3,2)	$\emptyset\|\{2\}\|\{1\}\|\emptyset$	$f(1) = 3, f(2) = 2$
(3,4)	$\emptyset\|\emptyset\|\{1\}\|\{2\}$	$f(1) = 3, f(2) = 4$
(4,1)	$\{2\}\|\emptyset\|\emptyset\|\{1\}$	$f(1) = 4, f(2) = 1$
(4,2)	$\emptyset\|\{2\}\|\emptyset\|\{1\}$	$f(1) = 4, f(2) = 2$
(4,3)	$\emptyset\|\emptyset\|\{2\}\|\{1\}$	$f(1) = 4, f(2) = 3$

Deci avem $[4]_2 = 4 \cdot 3 = 12$ aranjamente.

Propoziția 1.3.3 (de numărare a permutărilor). *Fie $n \in \mathbb{N}$. Atunci*
numărul de cuvinte ce conțin exact o dată fiecare literă a unui alfabet cu n litere
= numărul de aranjări fără repetiție a n bile numerotate în n urne numerotate
= numărul de funcții bijective ce pot fi definite pe o mulțime (fixată) cu n elemente, cu valori într-o mulțime (fixată) tot cu n elemente
$= n!$.

Demonstrație. E suficient să luăm $m = n$ în Propoziția 1.3.2 și să folosim faptul că că o funcție $f : \{a_1, \ldots, a_n\} \to \{b_1, \ldots, b_n\}$ este bijectivă dacă și numai dacă este injectivă. Evident,

$$[n]_n = n(n-1)\ldots 1 = n!.$$

□

Definiția 1.3.3. *Oricare obiecte din cele 3 tipuri numărate în propoziția anterioară se numesc **permutări (fără repetiție)** de ordinul n. De asemenea și numărul lor, adică $n!$, se numește tot **permutări (fără repetiție) de** n.*

Exemplul 1.3.3. Pentru $n = 3$, permutările mulțimii $\{1, 2, 3\}$ sunt:

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$

Deci avem $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ permutări.

Propoziția 1.3.4 (de numărare a aranjamentelor ordonate). *Fie $m,\ n \in \mathbb{N}$. Atunci numărul de aranjări cu repetiție a n bile numerotate în m urne numerotate și ordonate este egal cu $[m]^n$.*

Demonstrație. Vom construi o corespondență bijectivă între aranjările din enunț și aranjamentele (fără repetiție) de $m + n - 1$ luate câte n. Notăm

$\mathcal{A}_2$ = mulțimea aranjărilor cu repetiție a n bile numerotate $1, 2, \ldots, n$ în m urne numerotate $1, 2, \ldots, m$ și ordonate,

$$\mathcal{C}_2 = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) | c_i \in \{1, 2, \ldots, m + n - 1\}\ \forall\, i,\ c_i \neq c_j\ \forall i \neq j\}.$$

Orice aranjare $\omega \in \mathcal{A}_2$ se reprezintă sub forma

$$\omega : (i_1, \ldots, i_{n_1})|(i_{n_1+1}, \ldots, i_{n_1+n_2})| \ldots |(i_{n_1+\ldots+n_{m-1}+1}, \ldots, i_{n_1+\ldots+n_{m-1}+n_m}),$$

unde $(i_1, \ldots, i_{n_1})$ reprezintă bilele din urna 1, $(i_{n_1+1}, \ldots, i_{n_1+n_2})$ reprezintă bilele din urna 2, ..., $(i_{n_1+\ldots+n_{m-1}+1}, \ldots, i_{n_1+\ldots+n_{m-1}+n_m})$ reprezintă bilele din urna m, cu $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$, iar cele $m-1$ bare verticale sunt despărțitoare între urne.

Astfel cele n bile împreună cu cele $m-1$ bare despărțitoare sunt situate pe $n+m-1$ poziții.

Definim corespondențele $\varphi : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{C}_2$ și $\psi : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{A}_2$ prin:

- $\forall\, \omega \in \mathcal{A}_2$, $\varphi(\omega) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, unde c_i = poziția pe care se află bila i în aranjarea ω (incluzând pozițiile bilelor și ale barelor despărțitoare), $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$;

- $\forall (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathcal{C}_2$, $\psi(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \omega$, unde ω este aranjarea dată de regula: bila i se așează pe poziția c_i (din cele $n+m-1$ poziții ale bilelor și ale barelor despărțitoare), $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, iar pe restul de $n+m-1-n = m-1$ poziții se scriu barele despărțitoare.

De exemplu, pentru $m = 3$, $n = 4$ și aranjarea

$$\begin{array}{lccccccccccccccc} \omega_0 : (& 2 & , & 1 &) & \mid & (& 3 &) & \mid & (& 4 &) \\ & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & \end{array}$$

(numerele de sub bile și bare fiind pozițiile acestora) avem $\varphi(\omega_0) = (2, 1, 4, 6)$ și, reciproc, $\psi(2, 1, 4, 6) = \omega_0$.

Evident, funcțiile φ și ψ sunt bine definite și inverse una celeilalte, deci sunt bijective și astfel obținem

$$\operatorname{card}(\mathcal{A}_2) = \operatorname{card}(\mathcal{C}_2).$$

Cum, conform Propoziției 1.3.2, avem

$$\operatorname{card}(\mathcal{C}_2) = [m+n-1]_n,$$

iar conform Observației 1.1.2 avem

$$[m+n-1]_n = [m]^n,$$

obținem $\operatorname{card}(\mathcal{A}_2) = [m]^n$. □

Definiția 1.3.4. *Obiectele numărate în propoziția anterioară se numesc* ***aranjamente ordonate*** *de m luate câte n. De asemenea și numărul lor, adică $[m]^n$, se numește tot* ***aranjamente ordonate de m luate câte n****.*

Exemplul 1.3.4. Pentru $m = 3$ și $n = 2$, corespondențele din demonstrația anterioară sunt redate în următorul tabel:

$(c_1, c_2) \in \mathcal{C}_2$	$\omega \in \mathcal{A}_2$
(1,2)	$(1,2)\vert\emptyset\vert\emptyset$
(1,3)	$(1)\vert(2)\vert\emptyset$
(1,4)	$(1)\vert\emptyset\vert(2)$
(2,1)	$(2,1)\vert\emptyset\vert\emptyset$
(2,3)	$\emptyset\vert(1,2)\vert\emptyset$
(2,4)	$\emptyset\vert(1)\vert(2)$
(3,1)	$(2)\vert(1)\vert\emptyset$
(3,2)	$\emptyset\vert(2,1)\vert\emptyset$
(3,4)	$\emptyset\vert\emptyset\vert(1,2)$
(4,1)	$(2)\vert\emptyset\vert(1)$
(4,2)	$\emptyset\vert(2)\vert(1)$
(4,3)	$\emptyset\vert\emptyset\vert(2,1)$

Deci avem $[3]^2 = 3 \cdot 4 = 12$ aranjamente ordonate.

Propoziția 1.3.5 (de numărare a combinărilor). *Fie $m, n \in \mathbb{N}$. Atunci*
numărul de cuvinte strict crescătoare de lungime n peste un alfabet (ordonat) cu m litere
= numărul de aranjări fără repetiție a n bile identice în m urne numerotate
= numărul de funcții strict crescătoare ce pot fi definite pe o mulțime (ordonată) cu n elemente, cu valori într-o mulțime (ordonată) cu m elemente
= numărul de submulțimi cu n elemente ale unei mulțimi cu m elemente
$= \dfrac{[m]_n}{n!} \stackrel{def}{=} \dbinom{m}{n}$.

Demonstrație. Fie $A = \{1, 2, \dots, n\}$ și $B = \{1, 2, \dots, m\}$. Notăm mulțimile din enunț astfel:

$$\mathcal{C}_3 = \{(c_1, c_2, \dots, c_n) | c_i \in B \,\forall\, i,\ c_i < c_{i+1} \,\forall\, i\},$$

$\mathcal{A}_3$ = mulțimea aranjărilor fără repetiție a n bile identice în m urne numerotate $1, 2, \dots, m$,

$$\mathcal{F}_3 = \{f | f : A \to B,\ f(i) < f(j) \,\forall\, i < j\},$$

$$\mathcal{S}_3 = \{S | S \subseteq B,\ \operatorname{card}(S) = n\}.$$

Între aceste mulțimi definim corespondențele

$$\alpha : \mathcal{C}_3 \to \mathcal{A}_3,\ \beta : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{C}_3,\ \gamma : \mathcal{C}_3 \to \mathcal{F}_3,\ \delta : \mathcal{F}_3 \to \mathcal{C}_3$$

exact ca în demonstrația Propoziției 1.3.1, precum și $\mu : \mathcal{C}_3 \to \mathcal{S}_3$, $\nu : \mathcal{S}_3 \to \mathcal{C}_3$ definite prin:

- $\forall\, (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathcal{C}_3,\ \mu(c_1, c_2, \dots, c_n) = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$;
- $\forall\, \{c_1, c_2, \dots, c_n\} \in \mathcal{S}_3$ cu $c_1 < c_2 < \dots < c_n$, $\nu(\{c_1, c_2, \dots, c_n\}) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Din nou toate aceste funcții sunt bine definite, iar β, δ și ν sunt inversele lui α, γ și, respectiv, μ. Deci toate cele 6 funcții sunt bijective și astfel

$$\operatorname{card}(\mathcal{C}_3) = \operatorname{card}(\mathcal{A}_3) = \operatorname{card}(\mathcal{F}_3) = \operatorname{card}(\mathcal{S}_3).$$

Rămâne de demonstrat egalitatea $\operatorname{card}(\mathcal{C}_3) = \dbinom{m}{n}$.

Permutând fiecare combinare $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathcal{C}_3$ în toate cele $n!$ moduri posibile, obținem fără repetare toate aranjamentele din mulțimea

$$\mathcal{C}_1 = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in B \,\forall\, i,\ a_i \neq a_j \,\forall i \neq j\}.$$

Deci $\operatorname{card}(\mathcal{C}_3) \cdot n! = \operatorname{card}(\mathcal{C}_1)$. Dar, conform Propoziției 1.3.2, $\operatorname{card}(\mathcal{C}_1) = [m]_n$, deci $\operatorname{card}(\mathcal{C}_3) = \dfrac{[m]_n}{n!} = \dbinom{m}{n}$. □

Definiția 1.3.5. *Oricare obiecte din cele 4 tipuri numărate în propoziția anterioară se numesc* ***combinări (fără repetiție)*** *de m luate câte n. De asemenea și numărul lor, adică $\dbinom{m}{n}$, se numește tot* ***combinări (fără repetiție) de*** *m* ***luate câte*** *n și se mai notează cu C_m^n.*

Observația 1.3.2. Pentru $n > m$ avem $\dbinom{m}{n} = 0$, deoarece $[m]_n = 0$.

Pentru $n \leq m$ avem

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!},$$

deoarece $[m]_n = m(m-1)\dots(m-n+1) = \dfrac{m!}{(m-n)!}$.

Exemplul 1.3.5. Pentru $m = 5$ și $n = 3$, corespondențele din demonstrația anterioară sunt redate în următorul tabel:

$(c_1, c_2, c_3) \in \mathcal{C}_3$	$\omega \in \mathcal{A}_3$	$f \in \mathcal{F}_3$	$S \in \mathcal{S}_3$
(1,2,3)	$\{o\}\|\{o\}\|\{o\}\|\emptyset\|\emptyset$	$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$	$\{1, 2, 3\}$
(1,2,4)	$\{o\}\|\{o\}\|\emptyset\|\{o\}\|\emptyset$	$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 4$	$\{1, 2, 4\}$
(1,2,5)	$\{o\}\|\{o\}\|\emptyset\|\emptyset\|\{o\}$	$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 5$	$\{1, 2, 5\}$
(1,3,4)	$\{o\}\|\emptyset\|\{o\}\|\{o\}\|\emptyset$	$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 4$	$\{1, 3, 4\}$
(1,3,5)	$\{o\}\|\emptyset\|\{o\}\|\emptyset\|\{o\}$	$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 5$	$\{1, 3, 5\}$
(1,4,5)	$\{o\}\|\emptyset\|\emptyset\|\{o\}\|\{o\}$	$f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 5$	$\{1, 4, 5\}$
(2,3,4)	$\emptyset\|\{o\}\|\{o\}\|\{o\}\|\emptyset$	$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4$	$\{2, 3, 4\}$
(2,3,5)	$\emptyset\|\{o\}\|\{o\}\|\emptyset\|\{o\}$	$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5$	$\{2, 3, 5\}$
(2,4,5)	$\emptyset\|\{o\}\|\emptyset\|\{o\}\|\{o\}$	$f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 5$	$\{2, 4, 5\}$
(3,4,5)	$\emptyset\|\emptyset\|\{o\}\|\{o\}\|\{o\}$	$f(1) = 3, f(2) = 4, f(3) = 5$	$\{3, 4, 5\}$

unde simbolul "o" reprezintă o bilă. Deci avem

$$\binom{5}{3} = \frac{[5]_3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10 \text{ combinări.}$$

Exemplul 1.3.6. Pentru $m = 4$ și $n = 3$, corespondența *aranjamente* $\leftrightarrow$ *permutările combinărilor* din demonstrația anterioară și din algoritmul anterior este redată în următorul tabel:

Combinare	Permutare	Aranjament
(1,2,3)	(1,2,3)	(1,2,3)
	(1,3,2)	(1,3,2)
	(2,1,3)	(2,1,3)
	(2,3,1)	(2,3,1)
	(3,1,2)	(3,1,2)
	(3,2,1)	(3,2,1)
(1,2,4)	(1,2,3)	(1,2,4)
	(1,3,2)	(1,4,2)
	(2,1,3)	(2,1,4)
	(2,3,1)	(2,4,1)
	(3,1,2)	(4,1,2)
	(3,2,1)	(4,2,1)

Combinare	Permutare	Aranjament
(1,3,4)	(1,2,3)	(1,3,4)
	(1,3,2)	(1,4,3)
	(2,1,3)	(3,1,4)
	(2,3,1)	(3,4,1)
	(3,1,2)	(4,1,3)
	(3,2,1)	(4,3,1)
(2,3,4)	(1,2,3)	(2,3,4)
	(1,3,2)	(2,4,3)
	(2,1,3)	(3,2,4)
	(2,3,1)	(3,4,2)
	(3,1,2)	(4,2,3)
	(3,2,1)	(4,3,2)

Deci avem $\binom{4}{3} \cdot 3! = [4]_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ aranjamente.

Propoziția 1.3.6 (de numărare a combinărilor cu repetiție). *Fie* $m, n \in \mathbb{N}$. *Atunci*
numărul de cuvinte crescătoare de lungime n *peste un alfabet (ordonat) cu* m *litere*
$=$ *numărul de aranjări cu repetiție a* n *bile identice în* m *urne numerotate*
$=$ *numărul de funcții crescătoare ce pot fi definite pe o mulțime (ordonată) cu* n *elemente, cu valori într-o mulțime (ordonată) cu* m *elemente*
$$= \frac{[m]^n}{n!} \stackrel{def}{=} \left(\!\!\binom{m}{n}\!\!\right).$$

Demonstrație. Fie $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ și $B = \{1, 2, \ldots, m\}$. Notăm mulțimile din enunț astfel:

$$\mathcal{C}_4 = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) | c_i \in B\, \forall\, i,\ c_i \leq c_{i+1}\, \forall\, i\},$$

$\mathcal{A}_4 =$ mulțimea aranjărilor cu repetiție a n bile identice în m urne numerotate $1, 2, \ldots, m$,

$$\mathcal{F}_4 = \{f | f : A \to B,\ f(i) \leq f(j)\, \forall\, i < j\}.$$

Între aceste mulțimi definim corespondențele

$$\alpha : \mathcal{C}_4 \to \mathcal{A}_4,\ \beta : \mathcal{A}_4 \to \mathcal{C}_4,\ \gamma : \mathcal{C}_4 \to \mathcal{F}_4,\ \delta : \mathcal{F}_4 \to \mathcal{C}_4$$

exact ca în demonstrația Propoziției 1.3.1.

Din nou aceste funcții sunt bine definite, iar β și δ sunt inversele lui α și, respectiv, γ. Deci toate cele 4 funcții sunt bijective și astfel

$$\operatorname{card}(\mathcal{C}_4) = \operatorname{card}(\mathcal{A}_4) = \operatorname{card}(\mathcal{F}_4).$$

Rămâne de demonstrat egalitatea $\operatorname{card}(\mathcal{A}_4) = \left(\!\!\binom{m}{n}\!\!\right)$.

Numerotând cu $1, 2, \ldots, n$ cele n bile pentru fiecare combinare cu repetiție $\omega \in A_4$, în toate cele $n!$ moduri posibile, obținem fără repetare toate aranjamentele ordonate din mulțimea $\mathcal{A}_2$ definită în demonstrația Propoziției 1.3.4.

Deci $\operatorname{card}(\mathcal{A}_4) \cdot n! = \operatorname{card}(\mathcal{A}_2)$. Dar, conform Propoziției 1.3.4, $\operatorname{card}(\mathcal{A}_2) = [m]^n$, deci $\operatorname{card}(\mathcal{A}_4) = \dfrac{[m]^n}{n!} = \left(\!\!\binom{m}{n}\!\!\right)$. □

Definiția 1.3.6. *Oricare obiecte din cele 3 tipuri numărate în propoziția anterioară se numesc* ***combinări cu repetiție*** *de m luate câte n. De asemenea și numărul lor, adică $\left(\!\!\binom{m}{n}\!\!\right)$, se numește tot* ***combinări cu repetiție de*** *m* ***luate câte*** *n.*

Observația 1.3.3. Evident, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ avem

$$\left(\!\!\binom{m}{n}\!\!\right) = \frac{[m]^n}{n!} = \frac{[m+n-1]_n}{n!} = \binom{m+n-1}{n},$$
$$\binom{m}{n} = \frac{[m]_n}{n!} = \frac{[m-n+1]^n}{n!} = \left(\!\!\binom{m-n+1}{n}\!\!\right).$$

De asemenea, pentru $m \geq 1$ avem

$$\left(\!\!\binom{m}{n}\!\!\right) = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!},$$

deoarece $[m]^n = m(m+1)\ldots(m+n-1) = \dfrac{(m+n-1)!}{(m-1)!}$.

Exemplul 1.3.7. Pentru $m = 3$ și $n = 4$, corespondențele din demonstrația anterioară sunt redate în următorul tabel:

$(c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathcal{C}_4$	$\omega \in \mathcal{A}_4$	$f \in \mathcal{F}_4$
(1,1,1,1)	$o\,o\,o\,o\vert\emptyset\vert\emptyset$	$f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 1$
(1,1,1,2)	$o\,o\,o\vert o\vert\emptyset$	$f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 2$
(1,1,1,3)	$o\,o\,o\vert\emptyset\vert o$	$f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 3$
(1,1,2,2)	$o\,o\vert o\,o\vert\emptyset$	$f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 2$
(1,1,2,3)	$o\,o\vert o\vert o$	$f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 3$
(1,1,3,3)	$o\,o\vert\emptyset\vert o\,o$	$f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 3$
(1,2,2,2)	$o\vert o\,o\,o\vert\emptyset$	$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 2, f(4) = 2$
(1,2,2,3)	$o\vert o\,o\vert o$	$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 2, f(4) = 3$
(1,2,3,3)	$o\vert o\vert o\,o$	$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 3$
(1,3,3,3)	$o\vert\emptyset\vert o\,o\,o$	$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 3, f(4) = 3$
(2,2,2,2)	$\emptyset\vert o\,o\,o\,o\vert\emptyset$	$f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 2, f(4) = 2$
(2,2,2,3)	$\emptyset\vert o\,o\,o\vert o$	$f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 2, f(4) = 3$
(2,2,3,3)	$\emptyset\vert o\,o\vert o\,o$	$f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 3$
(2,3,3,3)	$\emptyset\vert o\vert o\,o\,o$	$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 3, f(4) = 3$
(3,3,3,3)	$\emptyset\vert\emptyset\vert o\,o\,o\,o$	$f(1) = 3, f(2) = 3, f(3) = 3, f(4) = 3$

unde simbolul "o" reprezintă o bilă. Deci avem

$$\left(\!\!\binom{3}{4}\!\!\right) = \frac{[3]^4}{4!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$$

combinări cu repetiție.

Propoziția 1.3.7 (de numărare a permutărilor cu repetiție). *Fie $m, n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ și $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$. Atunci*

numărul de cuvinte de lungime n ce pot fi formate peste un alfabet cu m litere astfel încât litera numărul i să apară de exact n_i ori pentru orice $i \in \{1, \dots, m\}$

= numărul de aranjări cu repetiție a n bile numerotate în m urne numerotate și neordonate astfel încât urna numărul i să conțină exact n_i bile pentru orice $i \in \{1, \dots, m\}$

= numărul de funcții ce pot fi definite pe o mulțime cu n elemente și cu valori într-o mulțime cu m elemente $\{b_1, \dots, b_m\}$ astfel încât $f^{-1}(b_i)$ are exact n_i elemente pentru orice $i \in \{1, \dots, m\}$

$= \dfrac{n!}{n_1!n_2!\dots n_m!} \overset{def}{=} \dbinom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m}$.

Demonstrație. Fie $A = \{1, 2, \dots, n\}$ și $B = \{1, 2, \dots, m\}$. Notăm mulțimile din enunț astfel:

$$\mathcal{C}_5 = \{(c_1, c_2, \dots, c_n) | c_i \in B\ \forall\, i,\ \mathrm{card}\,(\{i | c_i = j\}) = n_j\ \forall\, j \in \{1, \dots, m\}\},$$

$\mathcal{A}_5 =$ mulțimea aranjărilor cu repetiție a n bile numerotate $1, \dots, n$ în m urne numerotate $1, 2, \dots, m$ și neordonate astfel încât urna i conține exact n_i bile $\forall\, i$,

$$\mathcal{F}_5 = \{f | f : A \to B,\ \mathrm{card}\,(f^{-1}(i)) = n_i\ \forall\, i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Între aceste mulțimi definim corespondențele

$$\alpha : \mathcal{C}_5 \to \mathcal{A}_5,\ \beta : \mathcal{A}_5 \to \mathcal{C}_5,\ \gamma : \mathcal{C}_5 \to \mathcal{F}_5,\ \delta : \mathcal{F}_5 \to \mathcal{C}_5$$

exact ca în demonstrația Propoziției 1.3.1.

Din nou aceste funcții sunt bine definite, iar β și δ sunt inversele lui α și, respectiv, γ. Deci toate cele 4 funcții sunt bijective și astfel

$$\mathrm{card}\,(\mathcal{C}_5) = \mathrm{card}\,(\mathcal{A}_5) = \mathrm{card}\,(\mathcal{F}_5).$$

Rămâne de demonstrat egalitatea $\operatorname{card}(\mathcal{A}_5) = \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}$.

Pentru aceasta, numărăm aranjările din $\mathcal{A}_5$ folosind *regula produsului* astfel:

- alegem cele n_1 bile (din totalul de n) ce sunt așezate în urna 1, rezultă $\binom{n}{n_1}$ moduri posibile;
- pentru fiecare alegere de mai sus, alegem cele n_2 bile (din restul de $n - n_1$) ce sunt așezate în urna 2, rezultă $\binom{n-n_1}{n_2}$ moduri posibile, deci obținem $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}$ moduri posibile de alegere a bilelor din urnele 1 și 2;
- ...
- pentru fiecare alegere de mai sus, alegem cele n_m bile (din restul de $n - n_1 - \ldots - n_{m-1}$) ce sunt așezate în urna m; rezultă $\binom{n-n_1-\ldots-n_{m-1}}{n_m}$ moduri posibile, deci obținem $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\ldots\binom{n-n_1-\ldots-n_{m-1}}{n_m}$ moduri de alegere a bilelor din urnele $1, 2, \ldots, m$.

Astfel

$$
\begin{aligned}
\operatorname{card}(\mathcal{A}_5) &= \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\ldots\binom{n-n_1-\ldots-n_{m-1}}{n_m} \\
&= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-n_1-\ldots-n_{m-1})!}{n_m!(n-n_1-\ldots-n_m)!} \\
&= \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!},
\end{aligned}
$$

deoarece $(n - n_1 - \ldots - n_m)! = 0! = 1$. □

Definiția 1.3.7. *Oricare obiecte din cele 3 tipuri numărate în propoziția anterioară se numesc* ***permutări cu repetiție (anagrame)*** *de n luate câte $n_1, n_2, \ldots, n_m$. De asemenea și numărul lor, adică $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}$, se numește tot* ***permutări cu repetiție de*** *n* ***luate câte*** *$n_1, n_2, \ldots, n_m$.*

Observația 1.3.4. Luând $n_1 = n_2 = \ldots = n_m = 1$ obținem $n = m$ și $\binom{n}{1, 1, \ldots, 1} = n!$, deci permutările (fără repetiție) sunt un caz particular al permutărilor cu repetiție. Pe de altă parte, luând $m = 2$ obținem $\binom{n}{n_1, n_2} = \frac{n!}{n_1!n_2!}$, deci și combinările (fără repetiție) sunt un caz particular al permutărilor cu repetiție.

Exemplul 1.3.8. Pentru $m = 3$ și $n_1 = 2, n_2 = n_3 = 1$, deci $n = 4$, corespondențele din demonstrația anterioară sunt redate în următorul tabel:

$(c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathcal{C}_5$	$\omega \in \mathcal{A}_5$	$f \in \mathcal{F}_5$
(1,1,2,3)	$\{1,2\}\|\{3\}\|\{4\}$	$f(1)=1, f(2)=1, f(3)=2, f(4)=3$
(1,1,3,2)	$\{1,2\}\|\{4\}\|\{3\}$	$f(1)=1, f(2)=1, f(3)=3, f(4)=2$
(1,2,1,3)	$\{1,3\}\|\{2\}\|\{4\}$	$f(1)=1, f(2)=2, f(3)=1, f(4)=3$
(1,2,3,1)	$\{1,4\}\|\{2\}\|\{3\}$	$f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3, f(4)=1$
(1,3,1,2)	$\{1,3\}\|\{4\}\|\{2\}$	$f(1)=1, f(2)=3, f(3)=1, f(4)=2$
(1,3,2,1)	$\{1,4\}\|\{3\}\|\{2\}$	$f(1)=1, f(2)=3, f(3)=2, f(4)=1$
(2,1,1,3)	$\{2,3\}\|\{1\}\|\{4\}$	$f(1)=2, f(2)=1, f(3)=1, f(4)=3$
(2,1,3,1)	$\{2,4\}\|\{1\}\|\{3\}$	$f(1)=2, f(2)=1, f(3)=3, f(4)=1$
(2,3,1,1)	$\{3,4\}\|\{1\}\|\{2\}$	$f(1)=2, f(2)=3, f(3)=1, f(4)=1$
(3,1,1,2)	$\{2,3\}\|\{4\}\|\{1\}$	$f(1)=3, f(2)=1, f(3)=1, f(4)=2$
(3,1,2,1)	$\{2,4\}\|\{3\}\|\{1\}$	$f(1)=3, f(2)=1, f(3)=2, f(4)=1$
(3,2,1,1)	$\{3,4\}\|\{2\}\|\{1\}$	$f(1)=3, f(2)=2, f(3)=1, f(4)=1$

Deci avem

$$\binom{4}{2,1,1} = \frac{4!}{2!1!1!} = 12 \text{ permutări cu repetiție.}$$

1.4 Compuneri și descompuneri ale unui număr natural

Definiția 1.4.1. *Fie $n, m \in \mathbb{N}$. O **compunere** a lui n este o scriere de forma*

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m,$$

unde $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ și contează ordinea dintre termenii $n_1, n_2, \ldots, n_m$.

Propoziția 1.4.1 (de numărare a compunerilor unui număr natural). *Fie $n, m \in \mathbb{N}$. Atunci:*

a) numărul de compuneri ale lui n cu m termeni este egal cu $\left(\!\binom{m}{n}\!\right)$;

b) numărul de compuneri ale lui n cu m termeni nenuli este egal cu $\binom{n-1}{m-1}$.

Demonstrație. a) Fie mulțimile

$$\mathcal{N} = \{(n_1, n_2, \ldots, n_m) | n_i \in \mathbb{N}\, \forall\, i,\ n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n\},$$

$\mathcal{A}$ = mulțimea aranjărilor cu repetiție a n bile identice în m urne numerotate $1, 2, \ldots, m$.

Definim corespondențele $\alpha : \mathcal{N} \to \mathcal{A}$, $\beta : \mathcal{A} \to \mathcal{N}$ prin:

- $\forall (n_1, \ldots, n_m) \in \mathcal{N}$, $\alpha(n_1, \ldots, n_m) = \omega$, unde ω este aranjarea dată de regula: în urna i se așează exact n_i bile, $\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$;
- $\forall\, \omega \in \mathcal{A}$, $\beta(\omega) = (n_1, \ldots, n_m)$, unde n_i = numărul de bile din urna i în aranjarea ω, $\forall\, i \in \{1, \ldots, m\}$.

Evident, funcțiile α și β sunt bine definite și inverse una celeilalte, deci sunt bijective și astfel obținem

$$\text{card}\,(\mathcal{N}) = \text{card}\,(\mathcal{A}) = \left(\!\binom{m}{n}\!\right)$$

(conform Propoziției 1.3.6).

b) Fie mulțimile

$$\mathcal{N}_1 = \{(n_1, n_2, \ldots, n_m) | n_i \in \mathbb{N}^*\, \forall\, i,\ n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n\},$$

$$\mathcal{N}_2 = \{(t_1, t_2, \ldots, t_m) | t_i \in \mathbb{N}\, \forall\, i,\ t_1 + t_2 + \ldots + t_m = n - m\}.$$

Definim corespondențele $\varphi : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$, $\psi : \mathcal{N}_2 \to \mathcal{N}_1$ prin:

- $\forall(n_1,\ldots,n_m)\in\mathcal{N}_1,\ \varphi(n_1,\ldots,n_m)=(n_1-1,\ldots,n_m-1)$;
- $\forall(t_1,\ldots,t_m)\in\mathcal{N}_2,\ \psi(t_1,\ldots,t_m)=(t_1+1,\ldots,t_m+1)$.

Evident, funcțiile φ și ψ sunt bine definite și inverse una celeilalte, deci sunt bijective, și astfel obținem

$$\operatorname{card}(\mathcal{N}_1)=\operatorname{card}(\mathcal{N}_2).$$

Conform punctului a) avem $\operatorname{card}(\mathcal{N}_2)=\left(\!\!\binom{m}{n-m}\!\!\right)$, deci

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(\mathcal{N}_1) &= \left(\!\!\binom{m}{n-m}\!\!\right)=\frac{[m]^{n-m}}{(n-m)!}=\frac{m(m+1)\ldots(n-1)}{(n-m)!}\\ &= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}=\binom{n-1}{m-1}\end{aligned}$$

și demonstrația este încheiată. □

Exemplul 1.4.1. Pentru $n=4$ și $m=3$ compunerile sunt

$$\begin{aligned}4 &= 0+0+4=0+1+3=0+2+2=0+3+1=0+4+0\\ &= 1+0+3=1+1+2=1+2+1=1+3+0=2+0+2\\ &= 2+1+1=2+2+0=3+0+1=3+1+0=4+0+0.\end{aligned}$$

Corespondențele de la punctul a) din demonstrația anterioară sunt redate în următorul tabel:

$(n_1,n_2,n_3)\in\mathcal{N}$	$\omega\in\mathcal{A}$
(0,0,4)	$\emptyset\vert\emptyset\vert o\ o\ o\ o$
(0,1,3)	$\emptyset\vert o\vert o\ o\ o$
(0,2,2)	$\emptyset\vert o\ o\vert o\ o$
(0,3,1)	$\emptyset\vert o\ o\ o\vert o$
(0,4,0)	$\emptyset\vert o\ o\ o\ o\vert\emptyset$
(1,0,3)	$o\vert\emptyset\vert o\ o\ o$
(1,1,2)	$o\vert o\vert o\ o$
(1,2,1)	$o\vert o\ o\vert o$
(1,3,0)	$o\vert o\ o\ o\vert\emptyset$
(2,0,2)	$o\ o\vert\emptyset\vert o\ o$
(2,1,1)	$o\ o\vert o\vert o$
(2,2,0)	$o\ o\vert o\ o\vert\emptyset$
(3,0,1)	$o\ o\ o\vert\emptyset\vert o$
(3,1,0)	$o\ o\ o\vert o\vert\emptyset$
(4,0,0)	$o\ o\ o\ o\vert\emptyset\vert\emptyset$

unde simbolul "o" reprezintă o bilă. Deci avem $\left(\!\!\binom{3}{4}\!\!\right)=\dfrac{3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=15$ compuneri.

Ddintre acestea $\binom{4-1}{3-1}=\binom{3}{2}=3$ sunt compuneri cu termenii nenuli, iar corespondențele de la punctul b) din demonstrația anterioară sunt redate în următorul tabel:

$(n_1,n_2,n_3)\in\mathcal{N}_1$	$(t_1,t_2,t_3)\in\mathcal{N}_2$
(1,1,2)	(0,0,1)
(1,2,1)	(0,1,0)
(2,1,1)	(1,0,0)

Definiția 1.4.2. *O* ***partiție (descompunere)*** *a numărului $n \in \mathbb{N}^*$ este o scriere de forma*

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k,$$

unde $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}^*$ ($k \in \mathbb{N}^*$) și nu contează ordinea dintre termenii $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Observația 1.4.1. Deoarece într-o partiție ca mai sus nu contează ordinea dintre termeni, putem presupune că aceștia sunt scriși în ordine crescătoare (sau, analog, în ordine descrescătoare).

Definiția 1.4.3. *Fie $n, k \in \mathbb{N}^*$. Notăm cu $P(n,k)$ numărul de partiții ale lui n cu k termeni, iar cu $P(n)$ numărul tuturor partițiilor lui n.*

Exemplul 1.4.2. Numărul $n = 6$ are partițiile

$$\begin{aligned} 6 &= 6 = 1+5 = 2+4 = 3+3 = 1+1+4 = 1+2+3 = 2+2+2 \\ &= 1+1+1+3 = 1+1+2+2 = 1+1+1+1+2 = 1+1+1+1+1+1, \end{aligned}$$

deci $P(6,1) = 1$, $P(6,2) = 3$, $P(6,3) = 3$, $P(6,4) = 2$, $P(6,5) = 1$, $P(6,6) = 1$ și $P(6) = 11$.

Propoziția 1.4.2. *Fie $n, k \in \mathbb{N}^*$. Atunci numărul de aranjări cu repetiție a n bile identice în k urne identice și nevide este egal cu $P(n,k)$.*

Demonstrație. Notăm
$\mathcal{A}(n,k)$ = mulțimea aranjărilor cu repetiție a n bile identice în k urne identice și nevide,

$$\mathcal{P}(n,k) = \{(n_1, \ldots, n_k) | n_i \in \mathbb{N}^* \, \forall\, i,\ n_1 \leq \ldots \leq n_k,\ n_1 + \ldots + n_k = n\}.$$

Definim corespondențele $\varphi : \mathcal{A}(n,k) \to \mathcal{P}(n,k)$ și $\psi : \mathcal{P}(n,k) \to \mathcal{A}(n,k)$ prin:

- $\forall\, \omega \in \mathcal{A}(n,k)$, $\varphi(\omega) = (n_1, \ldots, n_k)$, unde n_i = numărul de bile așezate în urna i în aranjarea ω, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$;
- $\forall\, (n_1, \ldots, n_k) \in \mathcal{P}(n,k)$, $\psi(n_1, \ldots, n_k) = \omega$, unde aranjarea ω este dată de regula: în urna i se așează n_i bile, $\forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$.

Evident funcțiile φ și ψ sunt bine definite și inverse una celeilalte, deci

$$\text{card}\,(\mathcal{A}(n,k)) = \text{card}\,(\mathcal{P}(n,k)) = P(n,k).$$

□

Exemplul 1.4.3. Pentru $n = 7$ și $k = 3$ partițiile sunt

$$7 = 1+1+5 = 1+2+4 = 1+3+3 = 2+2+3.$$

Corespondențele din demonstrația anterioară sunt redate în următorul tabel:

$(n_1, n_2, n_3) \in \mathcal{P}(7,3)$	$\omega \in \mathcal{A}(7,3)$
(1,1,5)	*o*|*o*|*o o o o o*
(1,2,4)	*o*|*o o*|*o o o o*
(1,3,3)	*o*|*o o o*|*o o o*
(2,2,3)	*o o*|*o o*|*o o o*

unde simbolul ”*o*” reprezintă o bilă. Deci avem $P(7,3) = 4$ partiții.

Propoziția 1.4.3. *Fie $n, k \in \mathbb{N}^*$. Avem:*

$$P(n,1) = P(n,n) = 1;$$
$$P(n,k) = 0 \ \forall\, k > n.$$

Demonstrație. Relațiile din enunț sunt evidente, conform Definiției 1.4.2, deoarece singura partiție a lui n cu un termen este $n = n$, singura partiție a lui n cu n termeni este $n = 1 + 1 + \ldots + 1$ și nu există partiții ale lui n cu $k > n$ termeni (fiecare termen fiind cel puțin egal cu 1, suma lor este $n_1 + \ldots + n_k \geq k$, deci nu poate fi egală cu n). □

Corolarul 1.4.1. *Avem*

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} P(n,k), \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrație. Conform Definiției 1.4.3 și Propoziției 1.4.3 avem

$$P(n) = \sum_{k=1}^{\infty} P(n,k) = \sum_{k=1}^{n} P(n,k),$$

restul termenilor fiind egali cu 0. □

Propoziția 1.4.4 (relația de recurență a numerelor $P(n,k)$). *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ avem*

$$P(n,k) = P(n-k,1) + P(n-k,2) + \ldots + P(n-k,k).$$

Demonstrație. Notăm din nou

$$\mathcal{P}(n,k) = \{(n_1, \ldots, n_k) | n_i \in \mathbb{N}^* \,\forall\, i,\ n_1 \leq \ldots \leq n_k,\ n_1 + \ldots + n_k = n\},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Definim corespondențele

$$\alpha : \mathcal{P}(n,k) \to \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{P}(n-k,i) \text{ și } \beta : \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{P}(n-k,i) \to \mathcal{P}(n,k)$$

prin:

- $\forall\, (n_1, \ldots, n_k) \in \mathcal{P}(n,k),\ \ \alpha(n_1, \ldots, n_k) = (n_j - 1, \ldots, n_k - 1)$, unde

  $$j = \min\{i | n_i \geq 2,\ \ i \in \{1, \ldots, k\}\}$$

  (există j, deoarece $k \leq n-1$);

- $\forall\, i \in \{1, \ldots, k\}$, $\forall\, (n_1, \ldots, n_i) \in \mathcal{P}(n-k,i)$,

  $$\beta(n_1, \ldots, n_i) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{\text{de } k-i \text{ ori}}, n_1 + 1, \ldots, n_i + 1).$$

Interpretarea acestor funcții este următoarea: aplicarea funcției α unei partiții a lui n cu k termeni constă în micșorarea cu 1 a fiecărui termen și eliminarea termenilor care astfel devin egali cu zero, obținându-se o partiție a lui $n-k$ cu cel mult k termeni. Reciproc, aplicarea funcției β unei partiții a lui $n-k$ cu cel mult k termeni constă în mărirea cu 1 a fiecărui termen și adăugarea de termeni egali cu 1 pentru a obține k termeni, astfel obținându-se o partiție a lui n cu k termeni.

Funcțiile α și β sunt bine definite și inverse una celeilalte, deci

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{P}(n,k)\right) = \operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{k}\mathcal{P}(n-k,i)\right).$$

Cum mulțimile $\mathcal{P}(n-k,1),\dots,\mathcal{P}(n-k,k)$ sunt evident disjuncte două câte două, rezultă că $P(n,k) = \sum\limits_{i=1}^{k} P(n-k,i)$. □

Corolarul 1.4.2. *Dacă $n,k\in\mathbb{N}^*$ și $\frac{n}{2}\le k\le n-1$, atunci*

$$P(n,k) = P(n-k).$$

Demonstrație. Folosind Propozițiile 1.4.4 și 1.4.3 și Corolarul 1.4.2 avem

$$\begin{aligned}P(n,k) &= P(n-k,1)+\ldots+P(n-k,n-k)+\ldots+P(n-k,k)\\ &= P(n-k,1)+\ldots+P(n-k,n-k) = P(n-k).\end{aligned}$$

□

Corolarul 1.4.3. *Fie $n,m\in\mathbb{N}^*$. Atunci numărul de aranjări cu repetiție a n bile identice în m urne identice este*

$$\sum_{k=1}^{m} P(n,k) = P(n+m,m).$$

Demonstrație. Numărând aranjările din enunț după numărul k de urne nevide și aplicând Propozițiile 1.4.2 și 1.4.4 obținem concluzia dorită. □

Corolarul 1.4.4. *Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Atunci numărul de aranjări cu repetiție a n bile identice în n urne identice este egal cu $P(n)$.*

Demonstrație. Se utilizează Corolarele 1.4.3 și 1.4.1. □

Observația 1.4.2. Relația de recurență din Propoziția 1.4.4, împreună cu condițiile inițiale din Propoziția 1.4.3, permit calculul tuturor numerelor $P(n,k)$, deci și al numerelor $P(n)$, conform Corolarului 1.4.1.

De exemplu, tabelul numerelor $P(n,k)$ și $P(n)$ pentru $n\le 7$ (și $k\le 7$) este:

$P(n,k)$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$P(n)$
$n=1$	1	0	0	0	0	0	0	1
$n=2$	1	1	0	0	0	0	0	2
$n=3$	1	1	1	0	0	0	0	3
$n=4$	1	2	1	1	0	0	0	5
$n=5$	1	2	2	1	1	0	0	7
$n=6$	1	3	3	2	1	1	0	11
$n=7$	1	3	4	3	2	1	1	15

Numerele $P(n,k)$ nenule, aflate doar pe diagonala principală și sub această diagonală (adică $1\le k\le n$) formează **triunghiul numerelor** $P(n,k)$.

1.5 Partiţii ale unei mulţimi finite

Definiţia 1.5.1. *O **partiţie a unei mulţimi** nevide A este o scriere de forma*

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k,$$

unde submulţimile (părţile, clasele) $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) sunt nevide şi disjuncte două câte două, şi nu contează ordinea dintre aceste submulţimi. Considerăm că singura partiţie a mulţimii vide este partiţia cu zero submulţimi.

Definiţia 1.5.2. *Fie $n, k \in \mathbb{N}$.*
*a) **Numărul lui Stirling de speţa a doua**, notat cu $S(n,k)$, reprezintă numărul de partiţii ale unei mulţimi cu n elemente în k părţi.*
*b) **Numărul lui Bell**, notat cu B_n, reprezintă numărul tuturor partiţiilor unei mulţimi cu n elemente.*

Exemplul 1.5.1. Mulţimea $A = \{a, b, c\}$ are partiţiile $A = \{a, b, c\} = \{a, b\} \cup \{c\} = \{a, c\} \cup \{b\} = \{a\} \cup \{b, c\} = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$, deci $S(3, 1) = 1$, $S(3, 2) = 3$, $S(3, 3) = 1$ şi $B_3 = 5$.

Propoziţia 1.5.1. *Fie $n, k \in \mathbb{N}$. Atunci numărul de aranjări cu repetiţie a n bile numerotate în k urne identice, neordonate şi nevide este egal cu $S(n,k)$.*

Demonstraţie. Fie $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Notăm
$\mathcal{A}(n,k) =$ mulţimea aranjărilor cu repetiţie a n bile numerotate $1, \ldots, n$ în k urne identice, neordonate şi nevide,

$$\mathcal{S}(n,k) = \{\{A_1, \ldots, A_k\} | A_i \neq \emptyset \, \forall \, i, \ A_i \cap A_j = \emptyset \, \forall \, i \neq j, \ A = A_1 \cup \ldots \cup A_k\}.$$

Definim corespondenţele $\varphi : \mathcal{A}(n,k) \to \mathcal{S}(n,k)$ şi $\psi : \mathcal{S}(n,k) \to \mathcal{A}(n,k)$ prin:

- $\forall \, \omega \in \mathcal{A}(n,k)$, $\varphi(\omega) = \{A_1, \ldots, A_k\}$, unde $A_i =$ mulţimea bilelor aşezate în urna i la aranjarea ω, $\forall \, i \in \{1, \ldots, k\}$;
- $\forall \, \{A_1, \ldots, A_k\} \in \mathcal{S}(n,k)$, $\psi(\{A_1, \ldots, A_k\}) = \omega$, unde aranjarea ω este dată de regula: în urna i se aşează bilele din mulţimea A_i, $\forall \, i \in \{1, \ldots, k\}$.

Evident, funcţiile φ şi ψ sunt bine definite şi inverse una celeilalte, deci

$$\text{card}\,(\mathcal{A}(n,k)) = \text{card}\,(\mathcal{S}(n,k)) = S(n,k).$$

□

Exemplul 1.5.2. Pentru $n = 4$ şi $k = 3$ corespondenţele din demonstraţia anterioară sunt redate în următorul tabel:

$\{A_1, A_2, A_3\} \in \mathcal{S}(4,3)$	$\omega \in \mathcal{A}(4,3)$
$\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$	$\{1,2\}\|\{3\}\|\{4\}$
$\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$	$\{1,3\}\|\{2\}\|\{4\}$
$\{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$	$\{1,4\}\|\{2\}\|\{3\}$
$\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$	$\{1\}\|\{2,3\}\|\{4\}$
$\{\{1\},\{2,4\},\{3\}\}$	$\{1\}\|\{2,4\}\|\{3\}$
$\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$	$\{1\}\|\{2\}\|\{3,4\}$

Deci avem $S(4, 3) = 6$ partiţii.

Corolarul 1.5.1. *Fie $n, m \in \mathbb{N}$. Atunci numărul de aranjări cu repetiție a n bile numerotate în m urne identice și neordonate este egal cu* $\sum_{k=0}^{m} S(n,k)$.

Demonstrație. Numărând aranjările din enunț după numărul k de urne nevide și aplicând propoziția anterioară obținem concluzia. □

Propoziția 1.5.2. *Avem:*

$$S(0,0) = 1;\ \ S(n,0) = 0\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*;$$
$$S(n,1) = S(n,n) = 1\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*;$$
$$S(n,k) = 0\ \ \forall\, k > n,\ \ n,k \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație. Relațiile din enunț sunt evidente, conform Definiției 1.5.1. De exemplu, $\{1,\ldots,n\} = \{1,\ldots,n\}$ este singura partiție a mulțimii $\{1,\ldots,n\}$ cu o parte, deci $S(n,1) = 1$, iar $\{1,\ldots,n\} = \{1\} \cup \ldots \cup \{n\}$ este singura partiție cu n părți, deci $S(n,n) = 1$. □

Corolarul 1.5.2. *Avem $B_0 = 1$ și $B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k),\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.*

Demonstrație. Evident $B_0 = S(0,0) = 1$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, conform Definiției 1.5.2 și Propoziției 1.5.2 avem

$$B_n = \sum_{k=1}^{\infty} S(n,k) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k),$$

restul termenilor fiind egali cu 0. □

Corolarul 1.5.3. *Fie $n \in \mathbb{N}$. Atunci numărul de aranjări cu repetiție a n bile numerotate în n urne identice și neordonate este egal cu B_n.*

Demonstrație. Se utilizează Corolarele 1.5.1 și 1.5.2. □

Propoziția 1.5.3 (relația de recurență a numerelor $S(n,k)$).

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k),\ \forall\, n,k \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrație. Notăm din nou

$$\mathcal{S}(n,k) = \{\{A_1,\ldots,A_k\} | A_i \neq \emptyset\, \forall\, i,\ A_i \cap A_j = \emptyset\, \forall\, i \neq j,\ A = A_1 \cup \ldots \cup A_k\},$$

pentru orice $n,k \in \mathbb{N}^*$. Definim corespondențele

$$\alpha : \mathcal{S}(n,k) \to \mathcal{S}(n-1,k-1) \cup \{1,\ldots,k\} \times \mathcal{S}(n-1,k),$$
$$\beta : \mathcal{S}(n-1,k-1) \cup \{1,\ldots,k\} \times \mathcal{S}(n-1,k) \to \mathcal{S}(n,k),$$

prin:

- $\forall\, \{A_1,\ldots,A_k\} \in \mathcal{S}(n,k)$, $\alpha(\{A_1,\ldots,A_k\}) =$

$$= \begin{cases} \{A_1,\ldots,A_k\} \setminus \{A_i\}, & \text{dacă } n \in A_i \text{ și } A_i = \{n\}, \\ (i,\ \{A_1,\ldots,A_i \setminus \{n\},\ldots,A_k\}), & \text{dacă } n \in A_i \text{ și } A_i \neq \{n\}; \end{cases}$$

- $\forall\, \{A_1,\ldots,A_{k-1}\} \in \mathcal{S}(n-1,k-1)$,

$$\beta(\{A_1,\ldots,A_{k-1}\}) = \{A_1,\ldots,A_{k-1},\{n\}\},$$

- $\forall\, (i, \{A_1, \ldots, A_k\}) \in \{1, \ldots, k\} \times \mathcal{S}(n-1, k)$,

$$\beta(i, \{A_1, \ldots, A_k\}) = \{A_1, \ldots, A_i \cup \{n\}, \ldots, A_k\}.$$

Interpretarea acestor definiții este următoarea: aplicarea funcției α unei partiții a mulțimii $\{1, \ldots, n\}$ în k părți constă în eliminarea elementului n, astfel obținându-se o partiție a mulțimii $\{1, \ldots, n-1\}$ în $k-1$ sau în k părți, după cum n este sau nu singur într-o parte. Reciproc, aplicarea funcției β constă în adăugarea elementului n, fie singur într-o parte, fie la oricare din cele k părți.

Funcțiile α și β sunt bine definite și inverse una celeilalte, deci

$$\text{card}\,(\mathcal{S}(n,k)) = \text{card}\,\left(\mathcal{S}(n-1,k-1) \cup \{1, \ldots, k\} \times \mathcal{S}(n-1,k)\right),$$

adică $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$. □

Observația 1.5.1. Relația de recurență de mai sus împreună cu condițiile inițiale $S(0,0) = 1$, $S(0,k) = 0\ \forall\, k \geq 1$, $S(n,0) = 0\ \forall\, n \geq 1$ (din Propoziția 1.5.2) permit calculul tuturor numerelor $S(n,k)$, deci și al numerelor B_n, conform Corolarului 1.5.2. De exemplu, tabelul numerelor $S(n,k)$ și B_n pentru $n \leq 6$ (și $k \leq 6$) este:

$S(n,k)$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	B_n
$n=0$	1	0	0	0	0	0	0	1
$n=1$	0	1	0	0	0	0	0	1
$n=2$	0	1	1	0	0	0	0	2
$n=3$	0	1	3	1	0	0	0	5
$n=4$	0	1	7	6	1	0	0	15
$n=5$	0	1	15	25	10	1	0	52
$n=6$	0	1	31	90	65	15	1	203

Numerele $S(n,k)$ nenule, aflate doar pe diagonala principală și sub această diagonală ($1 \leq k \leq n$) formează **triunghiul numerelor lui Stirling de speța a doua**.

1.6 Spații măsurabile, măsuri finite

Definiția 1.6.1. *Un **spațiu măsurabil** este o pereche $(\Omega, \mathcal{B})$, unde Ω este o mulțime iar $\mathcal{B}$ este o familie nevidă de submulțimi (părți) ale lui Ω având următoarele două proprietăți:*

1) dacă $A \in \mathcal{B}$, atunci $\Omega \setminus A \in \mathcal{B}$;

2) dacă $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}$, atunci $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$.

*$\mathcal{B}$ se numește **corp borelian (σ-corp, σ-algebră)** pe Ω.*

Propoziția 1.6.1. *Fie $(\Omega, \mathcal{B})$ un spațiu măsurabil. Atunci au loc următoarele proprietăți:*

1) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{B}$;

2) dacă $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}$, atunci $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$;

3) dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), atunci $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{B}$ și $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{B}$;

4) dacă $A, B \in \mathcal{B}$, atunci $A \setminus B \in \mathcal{B}$.

Demonstrație. 1) Fie $A \in \mathcal{B}$ (există, deoarece $\mathcal{B} \neq \emptyset$). Atunci $\Omega \setminus A \in \mathcal{B}$ (proprietatea 1) din Definiția 1.6.1). Luând $A_1 = \Omega \setminus A$, $A_i = A \; \forall\, i \geq 2$ și aplicând proprietatea 2) din Definiția 1.6.1, rezultă că $(\Omega \setminus A) \cup A \in \mathcal{B}$, adică $\Omega \in \mathcal{B}$. Conform proprietății 1) din Definiția 1.6.1 obținem că $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{B}$.

2) Folosim că $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \setminus [\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (\Omega \setminus A_i)]$ și proprietățile 1) și 2) din Definiția 1.6.1.

3) Luăm $A_i = A_1 \; \forall\, i \geq n+1$ și aplicăm proprietatea 2) din Definiția 1.6.1 și proprietatea 2) din această propoziție.

4) Folosim că $A \setminus B = A \cap (\Omega \setminus B)$ și folosim proprietatea 1) din Definiția 1.6.1 și proprietatea 3) din această propoziție. □

Definiția 1.6.2. *Fie $(\Omega, \mathcal{B})$ un spațiu măsurabil. O* ***măsură finită*** *pe spațiul $(\Omega, \mathcal{B})$ este o funcție $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty)$ având următoarele două proprietăți:*

1) $\mu(\emptyset) = 0$;

2) dacă submulțimile $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}$ sunt disjuncte două câte două, atunci $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Propoziția 1.6.2. *Fie μ o măsură finită pe spațiul măsurabil $(\Omega, \mathcal{B})$. Dacă submulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sunt disjuncte două câte două, atunci $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.*

Demonstrație. Luând $A_i = \emptyset \; \forall\, i \geq n+1$ și aplicând proprietățile 2) și 1) din Definiția 1.6.2 obținem

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i),$$

deoarece $\mu\left(A_i\right) = \mu(\emptyset) = 0 \; \forall\, i \geq n+1$. □

1.7 Principiul includerii și excluderii

În această secțiune vom prezenta un principiu important de numărare și câteva aplicații ale sale.

Teorema 1.7.1 (Principiul includerii și excluderii, formula lui Poincaré).

a) Fie μ o măsură finită pe spațiul măsurabil $(\Omega, \mathcal{B})$. Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, atunci

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

b) Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt mulțimi finite $(n \in \mathbb{N}^*)$, atunci

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \operatorname{card}\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right).$$

Demonstrație. a) Folosim metoda inducției matematice. Pentru $n = 1$ egalitatea din enunț devine $\mu(A_1) = \mu(A_1)$. Pentru $n = 2$ trebuie să demonstrăm că

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2).$$

Într-adevăr, folosind proprietățile măsurii date de Definiția 1.6.2 și Propoziția 1.6.2 avem

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \cup A_2) &= \mu(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) \\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2). \end{aligned}$$

Presupunem acum adevărată egalitatea din enunț pentru orice n mulțimi $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n \in \mathcal{B}$, unde $n \geq 2$, și o demonstrăm pentru $n+1$ mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1} \in \mathcal{B}$. Folosind proprietățile măsurii, egalitatea de mai sus și ipoteza de inducție avem

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) &= \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + \mu(A_{n+1}) - \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) + \mu(A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k < n+1} \mu(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) + (-1)^{1-1} \sum_{i_1 = n+1} \mu(A_{i_1}) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k = n+1} \mu(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k < n+1} \mu(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k = n+1} \mu(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n+1} \mu(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}),
\end{aligned}$$

și astfel demonstrația prin inducție este încheiată.

b) Fie $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ și $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ mulțimea tuturor submulțimilor lui Ω. Evident, $(\Omega, \mathcal{B})$ este un spațiu măsurabil, iar funcția

$$\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty),\ \mu(A) = \text{card}\,(A)\ \forall\, A \in \mathcal{B}$$

este o măsură finită pe acest spațiu, deci aplicând formula de la punctul a) obținem egalitatea din enunț. $\square$

Corolarul 1.7.1 (de numărare a deranjamentelor). *Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci numărul permutărilor $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ cu proprietatea că $\sigma(i) \neq i\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ (numite **permutări fără puncte fixe** sau **deranjamente**) este*

$$D(n) = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right).$$

Demonstrație. Fie

$$A = \{\sigma | \sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\},\ \sigma(i) \neq \sigma(j)\ \forall\, i \neq j\}$$

mulțimea permutărilor de ordinul n, și fie

$$A_i = \{\sigma \in A | \sigma(i) = i\},\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Pentru orice $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ avem

$$A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} = \{\sigma \in A | \sigma(i_1) = i_1, \ldots, \sigma(i_k) = i_k\},$$

deci, conform Propoziției 1.3.3,

$$\text{card}\,(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = (n-k)!,$$

deoarece orice permutare $\sigma \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ este bine determinată de restricția sa

$$\overline{\sigma} : \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\} \to \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\},\ \overline{\sigma}(i) = \sigma(i)\ \forall\, i,$$

care este o permutare de ordinul $n-k$. Aplicând Principiul includerii și excluderii și Propoziția 1.3.3 avem

$$\begin{aligned}
D(n) &= \text{card}\,(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \text{card}\,(A) - \text{card}\,(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \\
&= \text{card}\,(A) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \text{card}\,(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\
&= n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} (n-k)! \\
&= n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (n-k)! \binom{n}{k} \\
&= n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (n-k)! \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= n! \left(1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} \right).
\end{aligned}$$

Am utilizat faptul că o sumă de forma $\sum\limits_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$ are $\binom{n}{k}$ termeni (conform Propoziției 1.3.5). □

Corolarul 1.7.2 (de numărare a funcțiilor surjective). *Fie $m, n \in \mathbb{N}$. Atunci numărul de cuvinte de lungime n ce conțin toate literele unui alfabet cu m litere*
= numărul de funcții surjective definite pe o mulțime cu n elemente, cu valori într-o mulțime cu m elemente
= numărul de aranjări cu repetiție a n bile numerotate în m urne numerotate, neordonate și nevide (adică orice urnă conține cel puțin o bilă)
$= m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \ldots + (-1)^m \binom{m}{m} 0^n \stackrel{def}{=} s_{n,m}.$

Demonstrație. Egalitatea dintre numerele de cuvinte, de funcții și de aranjări din enunț se obține cu aceleași corespondențe bijective din Propoziția 1.3.1. Rămâne de demonstrat că numărul de funcții surjective $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ este egal cu $s_{n,m}$.

Fie

$$A = \{f | f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}\}$$

și fie

$$A_i = \{f \in A | i \notin \text{Im}(f)\},\ \forall\, i \in \{1, \ldots, m\},$$

unde $\text{Im}(f) = \{f(x) | x \in \{1, \ldots, n\}\}$ reprezintă imaginea funcției f.

Pentru orice $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$ avem

$$A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} = \{f \in A | i_1, \ldots, i_k \notin \mathrm{Im}(f)\},$$

deci, conform Propoziției 1.3.1,

$$\mathrm{card}\,(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = (m-k)^n,$$

deoarece orice funcție $f \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ este bine determinată de restricția sa

$$\overline{f} : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\},\ \overline{f}(x) = f(x)\,\forall\, x \in \{1, \ldots, n\}.$$

Mulțimea funcțiilor surjective $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ este $A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$. Aplicând Principiul includerii și excluderii și Propoziția 1.3.1 avem

$$\begin{aligned}
\mathrm{card}\,(A \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i) &= \mathrm{card}\,(A) - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} \mathrm{card}\,(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\
&= m^n - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} (m-k)^n \\
&= m^n - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} (m-k)^n \binom{m}{k} = s_{n,m}.
\end{aligned}$$

□

Propoziția 1.7.1. *Fie $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$. Atunci*

$$s_{n,m} = \sum_{(n_1, \ldots, n_m) \in \mathcal{N}^*} \binom{n}{n_1, \ldots, n_m},$$

unde $\mathcal{N}^* = \{(n_1, \ldots, n_m) | n_i \in \mathbb{N}^*\ \forall\, i,\ n_1 + \ldots + n_m = n\}$.

Demonstrație. Conform corolarului anterior, $s_{n,m}$ reprezintă numărul de aranjări cu repetiție a n bile numerotate în m urne numerotate, neordonate și nevide. Numărăm aceste aranjări după numerele $(n_1, \ldots, n_m) \in \mathcal{N}^*$, unde n_i reprezintă numărul de bile așezate în urna i, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$. Pentru $(n_1, \ldots, n_m)$ arbitrar fixat, conform Propoziției 1.3.7 avem $\binom{n}{n_1, \ldots, n_m}$ astfel de aranjări.

Luând $(n_1, \ldots, n_m)$ variabil obținem egalitatea din enunț. □

Propoziția 1.7.2 (formula explicită a numerelor $S(n, k)$). *Fie $n, k \in \mathbb{N}$. Atunci*

$$\begin{aligned}
S(n,k) &= \frac{1}{k!} s_{n,k} \\
&= \frac{1}{k!} \left(k^n - \binom{k}{1} (k-1)^n + \binom{k}{2} (k-2)^n - \ldots + (-1)^k \binom{k}{k} 0^n \right).
\end{aligned}$$

Demonstrație. Conform Propoziției 1.5.1, $S(n, k)$ reprezintă numărul de aranjări cu repetiție a n bile numerotate în k urne identice, neordonate și nevide.

Dacă pentru fiecare din aceste $S(n, k)$ aranjări numerotăm urnele cu numere distincte din mulțimea $\{1, \ldots, n\}$, în toate cele $n!$ moduri posibile, obținem, fără repetare, toate aranjările cu repetiție a n bile numerotate în k urne numerotate, neordonate și nevide. Conform Corolarului 1.7.2, numărul acestora este $s_{n,k}$, deci

$$k! S(n,k) = s_{n,k}.$$

Formula din enunț rezultă acum din formula de numărare din Corolarul 1.6.2. □

Corolarul 1.7.3. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci*

$$S(n,2) = 2^{n-1} - 1,\ S(n,3) = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2},$$

$$S(n,4) = \frac{4^{n-1} - 3^n + 3 \cdot 2^{n-1} - 1}{6}.$$

Demonstraţie. Luăm $k = 2$, $k = 3$ și, respectiv, $k = 4$ în propoziția anterioară. □

1.8 Formula binomului lui Newton și extinderi

Teorema 1.8.1 (formula binomului lui Newton).

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstraţie. Deoarece $(x+y)^n = (y+x)^n$, a doua egalitate este o consecință imediată a primei egalități. Demonstrăm această primă egalitate în trei etape.

1) Presupunem că $x, y \in \mathbb{N}$. Conform Propoziției 1.3.1, $(x+y)^n =$ numărul de aranjări cu repetiție a n bile numerotate $1, \ldots, n$ în $x + y$ urne numerotate $1, \ldots, x + y$ și neordonate.

Numărăm altfel aceste aranjări, și anume după numărul k de bile așezate în primele x urne. Evident, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Pentru k arbitrar fixat numărăm aranjările astfel:

- alegem cele k bile (din totalul de n) ce sunt așezate în primele x urne; rezultă $\binom{n}{k}$ moduri posibile;
- pentru fiecare alegere de mai sus, aranjăm cele k bile în primele x urne; rezultă x^k moduri posibile (conform Propoziției 1.3.1);
- pentru fiecare alegere și fiecare aranjare de mai sus, aranjăm cele $n - k$ bile rămase în ultimele y urne; rezultă y^{n-k} moduri posibile (conform Propoziției 1.3.1).

Deci obținem $\binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ aranjări ale celor n bile în cele $x + y$ urne, pentru k fixat.

Luând acum k variabil obținem că numărul total de aranjări este egal cu $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, deci are loc egalitatea din enunț.

2) Presupunem că $x \in \mathbb{R}$ și $y \in \mathbb{N}$. Considerând polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P(X) = (X+y)^n - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k y^{n-k},$$

conform etapei 1) rezultă că $P(X) = 0\ \forall\, X \in \mathbb{N}$. Cum $\operatorname{grad} P \leq n$, rezultă că polinomul P este identic nul, deci $P(x) = 0$, adică are loc egalitatea din enunț.

3) Fie acum $x, y \in \mathbb{R}$. Considerând polinomul $Q \in \mathbb{R}[Y]$,

$$Q(Y) = (x+Y)^n - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k Y^{n-k},$$

conform etapei 2) avem $Q(Y) = 0\ \forall\, Y \in \mathbb{N}$. Cum $\operatorname{grad} Q \leq n$, rezultă din nou că polinomul Q este identic nul, deci $Q(y) = 0$, adică are loc egalitatea din enunț. □

Observația 1.8.1. O altă demonstrație, elementară, a formulei binomului lui Newton se obține prin inducție după n.

Teorema 1.8.2 (formula multinomului lui Newton). *Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$ avem*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{(n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \mathcal{N}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m},$$

unde $\mathcal{N} = \{(n_1, n_2, \ldots, n_m) | n_i \in \mathbb{N} \, \forall \, i, \ n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n\}$.

Demonstrație. Procedăm analog ca la demonstrația teoremei anterioare. Pentru $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{N}$ egalitatea rezultă numărând cele $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n$ aranjări cu repetiție a n bile numerotate $1, \ldots, n$ în $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ urne numerotate și neordonate, după numerele $(n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \mathcal{N}$, unde n_1 reprezintă numărul de bile așezate în primele x_1 urne, n_2 reprezintă numărul de bile așezate în următoarele x_2 urne, ..., n_m reprezintă numărul de bile așezate în ultimele x_m urne.

Extinderea la $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ se face treptat: $x_1 \in \mathbb{R}, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{N}$, apoi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_3, \ldots, x_m \in \mathbb{N}, \ldots$, în final $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$, de fiecare dată obținându-se că polinomul definit prin diferența dintre cei doi membri ai egalității din enunț și având necunoscuta x_1, apoi $x_2, \ldots$, în final x_m, este identic nul (deoarece din nou are gradul cel mult n și orice număr natural este rădăcină, conform etapei anterioare). $\square$

Observația 1.8.2. Conform Propoziției 1.4.1, suma din teorema de mai sus are $\left(\!\binom{m}{n}\!\right)$ termeni.

Observația 1.8.3. Luând $m = 2$ în formula multinomului se obține formula binomului lui Newton. Datorită acestor formule, combinările $\binom{n}{k}$ se numesc și **numere binomiale**, iar permutările cu repetiție $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ se numesc și **numere multinomiale**.

Următoarea definiție extinde definiția combinărilor.

Definiția 1.8.1. *Fie $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$. Numărul*

$$\binom{x}{n} = \frac{[x]_n}{n!}$$

*se numește **combinări de x luate câte n**, iar numărul*

$$\left(\!\binom{x}{n}\!\right) = \frac{[x]^n}{n!}$$

*se numește **combinări cu repetiție de x luate câte n**.*

Exemplul 1.8.1. Avem

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)}{3!} = \frac{1}{16}, \quad \left(\!\binom{\frac{1}{2}}{3}\!\right) = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)(\frac{1}{2} + 2)}{3!} = \frac{5}{16}.$$

Teorema 1.8.3. *Avem*

$$(1 + x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k, \ \forall \, x \in (-1, 1), \ \forall \, r \in \mathbb{R}.$$

Demonstrație. Pentru $r \in \mathbb{N}$ egalitatea poate fi obținută luând $y = 1$ în formula binomului lui Newton și folosind că

$$\binom{r}{k} = \frac{[r]_k}{k!} = 0 \, \forall \, k > r.$$

Fie acum $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Funcția $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x)^r$ este indefinit derivabilă, derivata de ordinul k fiind $f^{(k)}(x) = r(r-1)\dots(r-k+1)(1+x)^{r-k}$.

Seria de puteri asociată funcției f în punctul $x_0 \in (-1, 1)$ este

$$\sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} x^k = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} (1 + x_0)^{r-k} x^k.$$

Raza de convergență a acestei serii de puteri este

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{r}{k}(1 + x_0)^{r-k}}{\binom{r}{k+1}(1 + x_0)^{r-k-1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k + 1)(1 + x_0)}{r - k} \right| = 1 + x_0.$$

Pentru orice compact $[-a, a] \subseteq (-1, 1)$ obținem că $\rho = 1 + x_0 \geq 1 - a > 0 \; \forall \, x_0 \in [-a, a]$. Conform teoriei seriilor de puteri (a se vedea, de exemplu, [5] Cor.13 pag. 273), rezultă că funcția f este analitică, deci

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \; \forall x \in (-1, 1).$$

Cum $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \dbinom{r}{k}$, obținem egalitatea din enunț. □

Teorema 1.8.4 (formulele lui Vandermonde). *Avem:*

i) $[x + y]_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_k [y]_{n-k}, \; \forall \, x, y \in \mathbb{R}, \; \forall \, n \in \mathbb{N}$;

ii) $\dbinom{x+y}{n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}, \; \forall \, x, y \in \mathbb{R}, \; \forall \, n \in \mathbb{N}$;

iii) $\displaystyle\sum_{k=-m}^{n} \binom{x}{m+k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{m+n}, \; \forall \, x, y \in \mathbb{R}, \; \forall \, m, n \in \mathbb{N}.$

Demonstrație. Demonstrația formulei de la punctul i) este analogă celei a binomului lui Newton, înlocuind aranjările cu repetiție de bile numerotate în urne numerotate și neordonate cu aranjările fără repetiție de bile numerotate în urne numerotate, și aplicând astfel Propoziția 1.3.2 în locul Propoziției 1.3.1. Remarcăm că diferența dintre cei doi membri ai egalității date este din nou un polinom de grad cel mult n, atât în variabila x cât și în variabila y.

Formula de la punctul ii) se obține ușor din cea de la punctul i):

$$\binom{x+y}{n} = \frac{1}{n!}[x + y]_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} [x]_k [y]_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}.$$

Formula de la punctul iii) rezultă ușor din cea de la punctul ii), schimbând variabila de sumare k cu $l = m + k$:

$$\sum_{k=-m}^{n} \binom{x}{m+k}\binom{y}{n-k} = \sum_{l=0}^{m+n} \binom{x}{l}\binom{y}{m+n-l} = \binom{x+y}{m+n}.$$

□

Definiția 1.8.2. *Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, definim* $\binom{x}{n} = 0$.

Observația 1.8.4. Cu Definiția 1.8.2, formula iii) din teorema anterioară poate fi scrisă sub forma:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{x}{m+k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{m+n}.$$

Teorema 1.8.5 (formulele lui Nörlund). *Avem:*

i) $[x+y]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]^k [y]^{n-k}, \ \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$;

ii) $\left(\!\binom{x+y}{n}\!\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\!\binom{x}{k}\!\right) \left(\!\binom{y}{n-k}\!\right), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N}$;

iii) $\sum_{k=m-x}^{y-n} \binom{x+k}{m}\binom{y-k}{n} = \binom{x+y+1}{m+n+1}, \ \forall\, x, y, m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Demonstrația formulei de la punctul i) este din nou analogă celei a binomului lui Newton, înlocuind acum aranjările cu repetiție de bile numerotate în urne numerotate și neordonate cu aranjările cu repetiție de bile numerotate în urne numerotate și ordonate, și aplicând astfel Propoziția 1.3.4 în locul Propoziției 1.3.1. Remarcăm din nou că diferența dintre cei doi membri ai egalității date este un polinom de grad cel mult n, atât în variabila x cât și în variabila y.

Formula de la punctul ii) se obține ușor din cea de la punctul i):

$$\left(\!\binom{x+y}{n}\!\right) = \frac{[x+y]^n}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}[x]^k[y]^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\!\binom{x}{k}\!\right) \left(\!\binom{y}{n-k}\!\right).$$

Pentru demonstrarea formulei de la punctul iii) vom utiliza următoarele **formule de trecere între combinări și combinări cu repetiție**

$$\binom{x}{n} = \frac{[x]_n}{n!} = \frac{[x-n+1]^n}{n!} = \left(\!\binom{x-n+1}{n}\!\right), \ \forall\, x, n \in \mathbb{N},\ n \le x+1, \tag{1.8.1}$$

$$\left(\!\binom{x}{n}\!\right) = \frac{[x]^n}{n!} = \frac{[x+n-1]_n}{n!} = \binom{x+n-1}{n}, \ \forall\, x, n \in \mathbb{N},\ (x, n) \neq (0, 0), \tag{1.8.2}$$

precum și **formulele combinărilor complementare**

$$\binom{x}{n} = \binom{x}{x-n}, \ \forall\, x, n \in \mathbb{N}, \tag{1.8.3}$$

$$\left(\!\binom{x}{n}\!\right) = \left(\!\binom{n+1}{x-1}\!\right), \ \forall\, x, n \in \mathbb{N},\ x \neq 0. \tag{1.8.4}$$

Aceste formule pot fi ușor obținute folosind scrierile

$$\binom{x}{n} = \frac{x!}{n!(x-n)!}, \quad \left(\!\binom{x}{n}\!\right) = \binom{x+n-1}{n} = \frac{(x+n-1)!}{n!(x-1)!}.$$

Folosind succesiv formulele (1.8.1), (1.8.4), schimbarea de variabilă $l = x + k - m$, formula de la punctul ii), (1.8.2) și (1.8.3) avem

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m-x}^{y-n} \binom{x+k}{m}\binom{y-k}{n} &= \sum_{k=m-x}^{y-n} \left(\!\!\binom{x+k-m+1}{m}\!\!\right)\left(\!\!\binom{y-k-n+1}{n}\!\!\right) \\
&= \sum_{k=m-x}^{y-n} \left(\!\!\binom{m+1}{x+k-m}\!\!\right)\left(\!\!\binom{n+1}{y-k-n}\!\!\right) \\
&= \sum_{l=0}^{x+y-m-n} \left(\!\!\binom{m+1}{l}\!\!\right)\left(\!\!\binom{n+1}{x+y-m-n-l}\!\!\right) \\
&= \left(\!\!\binom{m+n+2}{x+y-m-n}\!\!\right) \\
&= \binom{x+y+1}{x+y-m-n} = \binom{x+y+1}{m+n+1}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.8.6 (formulele multinomiale ale lui Vandermonde și Nörlund). *Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$ avem*

i) $[x_1 + x_2 + \ldots + x_m]_n = \displaystyle\sum_{(n_1,n_2,\ldots,n_m)\in\mathcal{N}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} [x_1]_{n_1}[x_2]_{n_2}\ldots[x_m]_{n_m}$,

ii) $[x_1 + x_2 + \ldots + x_m]^n = \displaystyle\sum_{(n_1,n_2,\ldots,n_m)\in\mathcal{N}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} [x_1]^{n_1}[x_2]^{n_2}\ldots[x_m]^{n_m}$,

unde $\mathcal{N} = \{(n_1, n_2, \ldots, n_m) | n_i \in \mathbb{N}\, \forall\, i,\ n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n\}$.

Demonstrație. Se procedează analog ca la demonstrația Teoremei 1.8.2, înlocuind aranjările cu repetiție de bile numerotate în urne numerotate și neordonate cu aranjările fără repetiție de bile numerotate în urne numerotate pentru prima formulă (Vandermonde), respectiv cu aranjările cu repetiție de bile numerotate în urne numerotate și ordonate pentru cea de-a doua formulă (Nörlund). □

Prezentăm în continuare câteva consecințe imediate ale formulelor lui Newton, Vandermonde și Nörlund.

Corolarul 1.8.1. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:*

a) numărul de compuneri ale lui n cu cel mult n termeni este

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\!\!\binom{m}{n}\!\!\right) = \binom{2n}{n+1};$$

b) numărul de compuneri ale lui n cu termeni nenuli este

$$\sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} = 2^{n-1}.$$

Demonstrație. a) Aplicând Propoziția 1.4.1, formula (1.8.2) și formula iii) a lui Nörlund, numărul cerut este

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\!\!\binom{m}{n}\!\!\right) = \sum_{m=1}^{n} \binom{m+n-1}{n}\binom{n-m}{0} = \binom{2n}{n+1}.$$

b) Aplicând Propoziția 1.4.1 și formula binomului lui Newton, numărul cerut este

$$\sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}=\sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}\cdot 1^{m-1}\cdot 1^{n-m}=(1+1)^{n-1}=2^{n-1}.$$

□

Corolarul 1.8.2. *Fie $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$. Atunci:*

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}=\binom{m+n}{m}$;

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}=\frac{n+1}{n-m+1}$.

Demonstrație. a) Utilizăm formula combinărilor complementare și formula iii) a lui Vandermonde:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{m-k}=\binom{m+n}{m}.$$

b) Utilizăm formula

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

(ce poate fi ușor verificată utilizând, de exemplu, scrierea cu factoriale), formula combinărilor complementare și formula iii) a lui Nörlund:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}} &= \frac{1}{\binom{n}{m}}\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}=\frac{1}{\binom{n}{m}}\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{k}{0}\\ &= \frac{1}{\binom{n}{m}}\binom{n+1}{n-m+1}=\frac{m!(n-m)!}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{(n-m+1)!m!}\\ &= \frac{n+1}{n-m+1}.\end{aligned}$$

□

Propoziția 1.8.1. *Avem*

$$x^n=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)[x]_k,\ \ \forall\, x\in\mathbb{R},\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Demonstrație. Procedăm analog ca la demonstrația binomului lui Newton și a formulelor lui Vandermonde și Nörlund, considerând două etape.

1) Presupunem că $x \in \mathbb{N}$, $x \leq n$. Conform Propoziției 1.3.1, x^n reprezintă numărul de aranjări cu repetiție a n bile numerotate $1, \ldots, n$ în x urne numerotate $1, \ldots, x$ și neordonate. Numărăm altfel aceste aranjări, și anume după numărul k de urne nevide. Evident $k \in \{0, \ldots, x\}$. Pentru k arbitrar fixat numărăm aranjările astfel:

- alegem cele k urne nevide (din totalul de x); rezultă $\binom{x}{k}$ moduri posibile;
- pentru fiecare alegere de mai sus, aranjăm cele n bile în aceste k urne nevide, rezultă $s_{n,k}$ moduri posibile (conform Corolarului 1.7.2).

Deci obținem $\binom{x}{k} s_{n,k}$ aranjări a celor n bile în cele x urne, pentru k fixat. Luând acum k variabil obținem că numărul total de aranjări este egal cu $\sum\limits_{k=0}^{x} \binom{x}{k} s_{n,k}$, deci

$$x^n = \sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} s_{n,k}.$$

Cum $\binom{x}{k} = \frac{[x]_k}{k!}$, iar $s_{n,k} = k!S(n,k)$ (conform Propoziției 1.7.2), obținem că $x^n = \sum\limits_{k=0}^{x} S(n,k)[x]_k$.

Cum $n \geq x$ și $[x]_k = 0 \ \forall\, k > x$ rezultă că $x^n = \sum\limits_{k=0}^{n} S(n,k)[x]_k$.

2) Fie acum $x \in \mathbb{R}$. Considerând polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n} S(n,k)[X]_k,$$

conform etapei 1) rezultă că $P(X) = 0 \ \forall\, X \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Cum $\operatorname{grad} P \leq n$, rezultă că polinomul P este identic nul, deci $P(x) = 0$, adică are loc egalitatea din enunț. $\square$

1.9 Serii și funcții generatoare

Definiția 1.9.1. *a)* ***Seria generatoare*** *a șirului numeric $(a_n)_{n\geq n_0}$ este seria formală de puteri $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n X^n$, iar* ***funcția generatoare*** *a acestui șir este dată de suma seriei, adică $F(X) = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n X^n$.*

b) ***Seria generatoare*** *a șirului numeric dublu $(a_{n,k})_{n\geq n_0, k\geq k_0}$ este seria formală dublă de puteri $\sum\limits_{n\geq n_0}\sum\limits_{k\geq k_0} a_{n,k} X^n Y^k$, iar* ***funcția generatoare*** *a acestui șir dublu este dată de suma seriei duble, adică*

$$F(X,Y) = \sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{k=k_0}^{\infty} a_{n,k} X^n Y^k.$$

Observația 1.9.1. Domeniul de definiție al funcției generatoare este, desigur, domeniul de convergență al seriei generatoare corespondente.

Metoda funcțiilor generatoare este fundamentată de următorul rezultat binecunoscut relativ la seriile de puteri (a se vedea, de exemplu, [5] Prop. 6 și 2, pag. 258, 256).

Lema 1.9.1. *Dacă $(a_n)_{n\geq n_0}$ și $(b_n)_{n\geq n_0}$ sunt două șiruri numerice având funcțiile generatoare $F(X) = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n X^n$ și $G(X) = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n X^n$, atunci avem echivalența*

$$a_n = b_n, \forall n \geq n_0 \Longleftrightarrow F(X) = G(X),\ \forall X \in (0, \varepsilon),$$

unde $(0, \varepsilon)$ este un interval pe care ambele serii sunt convergente, $\varepsilon > 0$.

Pe baza acestei leme se obține următoarea metodă, numită **metoda funcțiilor (seriilor) generatoare** pentru demonstrarea unor identități de forma $a_n = b_n, \forall n \geq n_0$:

- se calculează funcția generatoare $F(X) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n X^n$ a șirului din membrul stâng al identității date;
- se calculează funcția generatoare $G(X) = \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n X^n$ a șirului din membrul drept al identității date;
- se obține că $F(X) = G(X)$ pe un interval $(0, \varepsilon)$ pe care ambele serii sunt convergente, cu $\varepsilon > 0$;
- se concluzionează că identitatea dată este adevărată.

Observația 1.9.2. Metoda se aplică și pentru șiruri numerice duble sau, mai mult, multidimensionale, putând fi utilizată cu succes pentru demonstrarea unor identități combinatoriale cu enunțuri mai mult sau mai puțin "prietenoase".

Teorema 1.9.1 (funcțiile generatoare ale combinărilor). *Avem:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^k = (1+X)^n,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall X \in \mathbb{R}; \tag{1.9.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^n = \frac{X^k}{(1-X)^{k+1}},\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall X \in (-1,1); \tag{1.9.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^n Y^k = \frac{1}{1-X-XY},\ \forall\, X, Y \in \left(0, \frac{1}{2}\right); \tag{1.9.3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) X^k = \frac{1}{(1-X)^n},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall X \in (-1,1); \tag{1.9.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) X^n = \frac{X}{(1-X)^{k+1}},\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \forall X \in (-1,1). \tag{1.9.5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) X^n Y^k = \frac{1-Y}{1-X-Y},\ \forall\, X, Y \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{1.9.6}$$

Demonstrație. Deoarece $\binom{n}{k} = 0$ pentru orice $k > n$, egalitatea (1.9.1) rezultă imediat conform formulei binomului lui Newton. Egalitatea (1.9.4) poate fi demonstrată, de exemplu, prin derivarea sumei seriei geometrice. Ea este evidentă pentru $n = 0$, iar pentru $n \geq 1$, condițiile de derivare termen cu termen a unei serii de puteri fiind îndeplinite (a se vedea, de exemplu, [5] Cor. 5, pag.

258), avem:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-X)^n} &= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{1}{1-X}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)!}\left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\right)^{(n-1)} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(X^k\right)^{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=n-1}^{\infty}\left(X^k\right)^{(n-1)} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=n-1}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+2)X^{k-n+1} \\
&= \sum_{k=n-1}^{\infty}\binom{k}{n-1}X^{k-n+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{n-1}X^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{k}X^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)X^k.
\end{aligned}$$

La ultimele două egalități am utilizat formulele (1.8.3) și (1.8.2). O altă demonstrație a egalității (1.9.4) se obține utilizând formula

$$\begin{aligned}
\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) &= \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k\frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!} \\
&= (-1)^k\binom{-n}{k}
\end{aligned}$$

și Teorema 1.8.3:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)X^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}(-X)^k = (1-X)^{-n}.$$

Folosind formulele (1.8.1)-(1.8.4) și egalitatea (1.9.4) putem obține ușor egalitățile (1.9.2) și (1.9.5):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}X^n &= \sum_{n=k}^{\infty}\left(\!\!\binom{n-k+1}{k}\!\!\right)X^n = X^k\sum_{n=k}^{\infty}\left(\!\!\binom{k+1}{n-k}\!\!\right)X^{n-k} \\
&= X^k\sum_{n=0}^{\infty}\left(\!\!\binom{k+1}{n}\!\!\right)X^n = \frac{X^k}{(1-X)^{k+1}}; \\
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)X^n &= X\sum_{n=1}^{\infty}\left(\!\!\binom{k+1}{n-1}\!\!\right)X^{n-1} \\
&= X\sum_{n=0}^{\infty}\left(\!\!\binom{k+1}{n}\!\!\right)X^n = \frac{X}{(1-X)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Folosind egalitățile (1.9.1) și, respectiv, (1.9.4), precum și suma seriei geometrice, putem obține ușor egalitățile (1.9.3) și (1.9.6):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}X^nY^k &= \sum_{n=0}^{\infty}X^n(1+Y)^n = \frac{1}{1-X-XY}; \\
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)X^nY^k &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{(1-Y)^n} = \frac{1}{1-\frac{X}{1-Y}} = \frac{1-Y}{1-X-Y}.
\end{aligned}$$

Demonstrația teoremei este astfel încheiată. □

Propoziția 1.9.1. *Pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, avem*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\!\!\binom{m}{k}\!\!\right) = (-1)^n \binom{m-1}{n}.$$

Demonstrație. Vom aplica metoda funcțiilor generatoare. Notăm

$$a_{n,m} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\!\!\binom{m}{k}\!\!\right) \text{ și } b_{n,m} = (-1)^n \binom{m-1}{n}.$$

Folosind Teorema 1.9.1 și suma seriei geometrice avem

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} X^n Y^m &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} X^n \sum_{m=1}^{\infty} \left(\!\!\binom{m}{k}\!\!\right) Y^m \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^k}{(1-X)^{k+1}} \cdot \frac{Y}{(1-Y)^{k+1}} \\
&= \frac{Y}{(1-X)(1-Y)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-X}{(1-X)(1-Y)} \right)^k \\
&= \frac{Y}{(1-X)(1-Y)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{X}{(1-X)(1-Y)}} = \frac{Y}{1 - Y + XY}
\end{aligned} \tag{1.9.7}$$

(pentru orice $X, Y \in (0,1)$ cu $\frac{X}{(1-X)(1-Y)} < 1$).

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m} X^n Y^m &= \sum_{m=1}^{\infty} Y^m \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m-1}{n} (-X)^n \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} Y^m (1-X)^{m-1} = \frac{Y}{1 - Y(1-X)} = \frac{Y}{1 - Y + XY}
\end{aligned} \tag{1.9.8}$$

(pentru orice $X, Y \in (0,1)$).

Din relațiile (1.9.7) și (1.9.8), conform metodei funcțiilor generatoare rezultă egalitatea din enunț. □

Observația 1.9.3. Reamintim că sumele duble pot fi permutate când au termenii nenegativi sau când măcar una din sume are un număr finit de termeni (nenuli).

Propoziția 1.9.2 (funcțiile generatoare ale numerelor $P(n,k)$ și $P(n)$). *Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Avem:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(n,k) X^n = \frac{X^k}{(1-X)(1-X^2)\dots(1-X^k)}, \ \forall X \in (0,1);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) X^n = \frac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^3)\dots}, \ \forall X \in (0,1),$$

cu convenția $P(0) = 1$.

Demonstrație. Folosind suma seriei geometrice

$$\frac{1}{1-X^k} = 1 + X^k + X^{2k} + X^{3k} + \ldots,\ \ \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall\, X \in (-1,1),$$

rezultă că

$$\frac{X^k}{(1-X)(1-X^2)\ldots(1-X^k)} = (X^0 + X^1 + X^{1+1} + X^{1+1+1} + \ldots)\cdot$$
$$\cdot\,(X^0 + X^2 + X^{2+2} + X^{2+2+2} + \ldots)\cdot\ldots\cdot(X^k + X^{k+k} + X^{k+k+k} + \ldots).$$

Coeficientul lui X^n $(n \geq k)$ în dezvoltarea din membrul drept este egal cu numărul scrierilor de forma

$$n = \underbrace{1+\ldots+1}_{\text{de } m_1 \text{ ori}} + \underbrace{2+\ldots+2}_{\text{de } m_2 \text{ ori}} + \ldots + \underbrace{k+\ldots+k}_{\text{de } m_k \text{ ori}},$$

unde $m_1, m_2, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$, $m_k \geq 1$, adică cu numărul de partiții ale lui n cu cel mai mare termen egal cu k. Notând cu $Q(n,k)$ acest număr, rezultă că

$$\frac{X^k}{(1-X)(1-X^2)\ldots(1-X^k)} = \sum_{n=k}^{\infty} Q(n,k)X^n. \tag{1.9.9}$$

Demonstrăm în continuare că

$$P(n,k) = Q(n,k),\ \ \forall\, n,k \in \mathbb{N}^*,\ \ k \leq n, \tag{1.9.10}$$

și astfel, folosind și faptul că $P(n,k) = 0\ \forall\, n < k$, se obține prima egalitate din enunț. Pentru a demonstra egalitatea (1.9.10) notăm din nou

$$\mathcal{P}(n,k) = \{(n_1,\ldots,n_k) | n_i \in \mathbb{N}^*\ \forall\, i,\ n_1 \leq \ldots \leq n_k,\ n_1 + \ldots + n_k = n\},$$

$$\mathcal{Q}(n,k) = \{(t_1,\ldots,t_j) | j \in \mathbb{N}^*,\ t_i \in \mathbb{N}^*\ \forall\, i,\ t_1 \leq \ldots \leq t_j = k,\ t_1 + \ldots + t_j = n\}.$$

Definim corespondențele $\alpha : \mathcal{P}(n,k) \to \mathcal{Q}(n,k)$ și $\beta : \mathcal{Q}(n,k) \to \mathcal{P}(n,k)$ prin:

- $\forall\,(n_1,\ldots,n_k) \in \mathcal{P}(n,k)$, $\alpha(n_1,\ldots,n_k) = (t_1,\ldots,t_j)$, unde $j = n_k$ și

$$t_i = \text{card}\Big(\{l | l \in \{1,\ldots,k\},\ n_l \geq j+1-i\}\Big),\ \forall i \in \{1,\ldots,j\};$$

- $\forall\,(t_1,\ldots,t_j) \in \mathcal{Q}(n,k)$, $\beta(t_1,\ldots,t_j) = (n_1,\ldots,n_k)$, unde $k = t_j$ și

$$n_i = \text{card}\Big(\{l | l \in \{1,\ldots,j\},\ t_l \geq k+1-i\}\Big),\ \forall i \in \{1,\ldots,k\}.$$

De exemplu, pentru partiția

$$35 = 1+1+2+2+2+4+4+5+7+7$$

din $\mathcal{P}(35,10)$ avem

$$\alpha(1,1,2,2,2,4,4,5,7,7) = (2,2,3,5,5,8,10) \in \mathcal{Q}(35,10)$$

și, reciproc,

$$\beta(2,2,3,5,5,8,10) = (1,1,2,2,2,4,4,5,7,7) \in \mathcal{P}(35,10).$$

Interpretarea acestor definiții este următoarea: dacă reprezentăm partițiile de forma

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k \text{ cu } n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_k$$

prin tablouri numite **diagrame Ferrers** în care pe linia 1 avem n_k bile, pe linia 2 avem n_{k-1} bile,$\ldots$, pe ultima linie avem n_1 bile, liniile fiind aliniate la stânga, atunci aplicarea oricăreia din funcțiile α sau β constă în simetrizarea față de diagonala principală a acestor tablouri.

Pentru exemplul anterior, diagrama Ferrers asociată partiției $(1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 5, 7, 7)$ este

$$\begin{array}{cccccccl}
\text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \qquad \text{(7 bile)} \\
\text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \qquad \text{(7 bile)} \\
\text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & & & \qquad \text{(5 bile)} \\
\text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & & & & \qquad \text{(4 bile)} \\
\text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & & & & \qquad \text{(4 bile)} \\
\text{o} & \text{o} & & & & & & \qquad \text{(2 bile)} \\
\text{o} & \text{o} & & & & & & \qquad \text{(2 bile)} \\
\text{o} & \text{o} & & & & & & \qquad \text{(2 bile)} \\
\text{o} & & & & & & & \qquad \text{(1 bilă)} \\
\text{o} & & & & & & & \qquad \text{(1 bilă)}
\end{array}$$

deci simetrica sa față de diagonala principală (liniile devin coloane) este diagrama

$$\begin{array}{cccccccccc}
\text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} \\
\text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & & \\
\text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & & & & & \\
\text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & \text{o} & & & & & \\
\text{o} & \text{o} & \text{o} & & & & & & & \\
\text{o} & \text{o} & & & & & & & & \\
\text{o} & \text{o} & & & & & & & &
\end{array}$$

care este chiar diagrama Ferrers asociată partiției

$$(2, 2, 3, 5, 5, 8, 10) = \alpha(1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 5, 7, 7).$$

Funcțiile α și β sunt bine definite și inverse una celeilalte, deci sunt bijective și astfel avem

$$\text{card}\,(\mathcal{P}(n, k)) = \text{card}\,(\mathcal{Q}(n, k)),$$

adică $P(n, k) = Q(n, k)$. Demonstrația primei egalități din enunț este încheiată.

Demonstrăm acum cea de-a doua egalitate din enunț. Folosind din nou suma seriei geometrice, avem

$$\frac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^3)\ldots} = (X^0 + X^1 + X^{1+1} + \ldots)\cdot$$
$$\cdot\,(X^0 + X^2 + X^{2+2} + \ldots) \cdot (X^0 + X^3 + X^{3+3} + \ldots) \cdot \ldots.$$

Coeficientul lui X^0 din această dezvoltare este 1, iar pentru $n \geq 1$ coeficientul lui X^n din această dezvoltare este egal cu numărul scrierilor de forma

$$n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{\text{de } m_1 \text{ ori}} + \underbrace{2 + \ldots + 2}_{\text{de } m_2 \text{ ori}} + \underbrace{3 + \ldots + 3}_{\text{de } m_3 \text{ ori}} + \ldots,$$

unde $m_1, m_2, m_3, \ldots \in \mathbb{N}$, adică cu numărul $P(n)$ al tuturor partițiilor lui n. Deci

$$\frac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^3)\ldots} = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)X^n.$$

□

Propoziția 1.9.3 (funcția generatoare a numerelor $S(n,k)$). *Fie $k \in \mathbb{N}$. Avem:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)X^n = \frac{X^k}{(1-X)(1-2X)\dots(1-kX)}, \ \forall\, k \geq 1, \ \forall X \in \left(0, \frac{1}{k}\right);$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n,0)X^n = 1, \ \forall X \in \mathbb{R}.$$

Demonstrație. A doua egalitate din enunț este evidentă, deoarece $S(0,0) = 1$ și $S(n,0) = 0\, \forall n \geq 1$.

Pentru a demonstra prima egalitate, pentru orice $k \in \mathbb{N}$ notăm cu

$$F_k(X) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)X^n$$

funcția generatoare a numerelor $(S(n,k))_{n\in\mathbb{N}}$. Folosind faptul că $S(n,k) = 0\, \forall\, n < k$ și relația de recurență a numerelor $S(n,k)$ (Propoziția 1.5.3), avem, pentru orice $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} F_k(X) &= \sum_{n=k}^{\infty} S(n,k)X^n = \sum_{n=k}^{\infty} \left[S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)\right] X^n \\ &= X\sum_{n=k}^{\infty} S(n-1,k-1)X^{n-1} + kX\sum_{n=k}^{\infty} S(n-1,k)X^{n-1} \\ &= XF_{k-1}(X) + kXF_k(X). \end{aligned}$$

Deci

$$F_k(X) = \frac{X}{1-kX}F_{k-1}(X), \ \forall\, k \geq 1.$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} F_k(X) &= \frac{X}{1-kX} \cdot \frac{X}{1-(k-1)X}F_{k-2}(X) \\ &= \dots \\ &= \frac{X}{1-kX} \cdot \frac{X}{1-(k-1)X} \cdot \ldots \cdot \frac{X}{1-X}F_0(X). \end{aligned}$$

Cum $F_0(X) = 1$ (a doua egalitate din enunț), obținem

$$F_k(X) = \frac{X^k}{(1-X)(1-2X)\dots(1-kX)}, \ \forall\, k \geq 1.$$

$\square$

Capitolul 2

Definiții și formule de calculul ale probabilităților

2.1 Definiția clasică a probabilității

Definiția 2.1.1. *Numim* ***experiență (experiență aleatoare, experiment, experiment aleator)*** *o acțiune ce poate fi repetată în anumite condiții date. Fiecare repetare a unei experiențe aleatoare se numește* ***probă****. Rezultatul unei experiențe aleatoare se numește* ***eveniment (eveniment aleator)****.* ***Evenimentul sigur*** *este un eveniment ce se realizează cu siguranță la fiecare efectuare a experienței.* ***Evenimentul imposibil****, notat cu $\emptyset$, este un eveniment ce nu se realizează la nicio efectuare a experienței.*

Definiția 2.1.2 (Operații cu evenimente). *Fie A și B două evenimente.*

1. *Notăm cu $A \cup B$ evenimentul ce se realizează dacă și numai dacă A sau B se realizează.*
2. *Notăm cu $A \cap B$ evenimentul ce se realizează dacă și numai dacă A și B se realizează.*
3. *Notăm cu $A \setminus B$ evenimentul ce se realizează dacă și numai dacă A se realizează și B nu se realizează.*
4. *Notăm cu $\overline{A}$ evenimentul ce se realizează dacă și numai dacă A nu se realizează. $\overline{A}$ se numește* ***evenimentul contrar evenimentului*** *A.*
5. *Spunem că A* ***implică*** *B și notăm $A \subseteq B$ dacă B se realizează ori de câte ori A se realizează.*
6. *Spunem că A și B sunt* ***incompatibile*** *dacă $A \cap B = \emptyset$.*
7. *Spunem că A și B sunt* ***compatibile*** *dacă $A \cap B \neq \emptyset$.*
8. *Spunem că evenimentul A este* ***elementar*** *dacă pentru orice eveniment $C \subseteq A$ rezultă că $C = \emptyset$ sau $C = A$.*
9. *Un eveniment elementar A se numește* ***favorabil (caz favorabil)*** *pentru evenimentul B dacă $A \subseteq B$.*

Definiția 2.1.3. *Fie A un eveniment rezultat în urma efectuării unei experiențe. Dacă această experiență se efectuează (în condiții identice) de n ori, $n \in \mathbb{N}^*$, și evenimentul A se realizează în exact k din aceste efectuări, atunci numărul*

$$f_n(A) = \frac{k}{n}$$

se numește ***frecvența relativă a evenimentului*** *A.*

Definiția 2.1.4 (Definiția clasică a probabilității). *Fie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ mulțimea tuturor evenimentelor elementare posibile la efectuarea unei experiențe, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Presupunem că aceste evenimente elementare sunt egal posibile (egal probabile), adică au aceeași șansă de realizare. Fie $A \subseteq \Omega$ un eveniment arbitrar și k numărul evenimentelor elementare favorabile evenimentului A. Atunci valoarea*

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

*se numește **probabilitatea evenimentului** A.*

Observația 2.1.1. Conform definiției anterioare, formula probabilității evenimentului A poate fi scrisă sub forma

$$P(A) = \frac{\text{numărul cazurilor (evenimentelor elementare) favorabile lui } A}{\text{numărul tuturor cazurilor (evenimentelor elementare) posibile}}.$$

Exemplul 2.1.1. Să se calculeze probabilitatea ca la aruncarea unui zar să apară un număr par.

Soluție. Evenimentele elementare (cazurile posibile) sunt

$$\omega_i : \text{ "apare fața cu numărul } i\text{" }, \ i \in \{1, \ldots, 6\}.$$

Evenimentul sigur este $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$. Evenimentul

$$A : \text{ "apare un număr par"}$$

este

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$$

(cazurile favorabile fiind ω_2, ω_4 și ω_6), deci are probabilitatea

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

□

2.2 Definiția axiomatică a probabilității

Definiția 2.2.1 (Definiția axiomatică a probabilității). *Un **câmp de probabilitate** este un triplet $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, unde*

- *Ω este o mulțime numită **spațiu de selecție**;*
- *$(\Omega, \mathcal{B})$ este un spațiu măsurabil, elementele corpului borelian $\mathcal{B}$ numindu-se **evenimentele** câmpului de probabilitate;*
- *$P : \mathcal{B} \to [0, \infty)$ este o funcție cu proprietățile*

$$\begin{cases} P(\Omega) = 1, \\ (A_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}, \ A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall i \neq j \Rightarrow P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i). \end{cases}$$

*P se numește **probabilitate (numărabil aditivă)** pe spațiul măsurabil $(\Omega, \mathcal{B})$. Pentru orice $A \in \mathcal{B}$, $P(A)$ se numește **probabilitatea evenimentului** A.*

Definiția 2.2.2. *O mulțime A se numește* ***numărabilă*** *dacă există o funcție bijectivă $f : \mathbb{N} \to A$.*

Definiția 2.2.3. *O mulțime se numește* ***discretă*** *(sau* ***cel mult numărabilă****) dacă este finită sau numărabilă.*

Propoziția 2.2.1 (Câmpul de probabilitate al lui Laplace). *Fie Ω o mulțime finită și nevidă, $\mathcal{P}(\Omega)$ mulțimea tuturor submulțimilor (părților) lui Ω și fie funcția*

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty),\ P(A) = \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)},\ \forall A \in \mathcal{P}(\Omega).$$

Atunci $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ este un câmp de probabilitate.

Demonstrație. Evident, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ este un spațiu măsurabil și $P(\Omega) = \dfrac{\operatorname{card}(\Omega)}{\operatorname{card}(\Omega)} = 1$.

Fie acum $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ a.î. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$. Cum mulțimea $\mathcal{P}(\Omega)$ este finită, rezultă că există $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $A_i = \emptyset$, $\forall i > n$, deci $\operatorname{card}(A_i) = 0$, $\forall i > n$. Atunci

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \frac{\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{card}(A_i)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{card}(A_i)}{\operatorname{card}(\Omega)}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

deci P este o probabilitate pe spațiul măsurabil $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. □

Observația 2.2.1. Probabilitatea construită în propoziția anterioară este exact cea dată în Definiția 2.1.4, deci definiția axiomatică a probabilității extinde definiția clasică a probabilității.

Propoziția 2.2.2. *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate. Atunci probabilitatea P este o măsură finită pe spațiul măsurabil $(\Omega, \mathcal{B})$.*

Demonstrație. Conform Definiției 1.6.2, este suficient să arătăm că $P(\emptyset) = 0$. Într-adevăr, avem

$$1 = P(\Omega) = P\left(\Omega \cup \bigcup_{i=2}^{\infty} \emptyset\right) = P(\Omega) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset),$$

deci $\sum\limits_{i=2}^{\infty} P(\emptyset) = 0$, de unde rezultă că $P(\emptyset) = 0$. □

Propoziția 2.2.3 (Proprietăți ale probabilității). *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate. Atunci:*

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. *Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sunt disjuncte două câte două, atunci*
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i);$$
3. *Pentru orice $A, B \in \mathcal{B}$ a.î. $A \cap B = \emptyset$ avem $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;*

4. *Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, atunci*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

(formula lui Poincaré)*;*

5. *Pentru orice $A, B \in \mathcal{B}$ avem $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;*

6. *Pentru orice $A, B \in \mathcal{B}$ a.î. $A \subseteq B$ avem $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$;*

7. *Pentru orice $A, B \in \mathcal{B}$ a.î. $A \subseteq B$ avem $P(A) \le P(B)$;*

8. *Pentru orice $A, B \in \mathcal{B}$ avem $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \bigcap B)$;*

9. *$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, $\forall A \in \mathcal{B}$, unde $\overline{A} = \Omega \setminus A$;*

10. *$0 \le P(A) \le 1$, $\forall A \in \mathcal{B}$.*

Demonstrație. Proprietatea 1 rezultă din propoziția anterioară. Proprietățile 2 și 4 rezultă din Propoziția 1.6.2, respectiv din Teorema 1.7.1. Proprietățile 3 și 5 sunt cazuri particulare ale Proprietăților 2, respectiv 4, pentru $n = 2$.

6. Fie $A, B \in \mathcal{B}$ a.î. $A \subseteq B$. Avem $A \cup (B \setminus A) = B$ și $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Aplicând Proprietatea 3 avem $P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$, deci $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

7. Fie $A, B \in \mathcal{B}$ a.î. $A \subseteq B$. Conform Proprietății 6 și Definiției 2.2.1 avem $P(B) - P(A) = P(B \setminus A) \ge 0$, deci $P(A) \le P(B)$.

8. Fie $A, B \in \mathcal{B}$. Avem $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$ și $A \cap B \subseteq B$, deci aplicând Proprietatea 6 avem $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$.

9. Fie $A \in \mathcal{B}$. Aplicând Proprietatea 6 avem $P(\overline{A}) = P(\Omega \setminus A) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$.

10. Fie $A \in \mathcal{B}$. Conform Definiției 2.2.1 avem $P(A) \ge 0$ și $P(\overline{A}) \ge 0$. Aplicând Proprietatea 9 avem $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \le 1$. □

Definiția 2.2.4. *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate.*

a) Mulțimea vidă, $\emptyset$, se numește ***evenimentul imposibil****.*

b) Dacă $A \in \mathcal{B}$, atunci $\overline{A} = \Omega \setminus A$ se numește ***evenimentul contrar evenimentului*** *A.*

c) Fie $A, B \in \mathcal{B}$. Evenimentele A și B se numesc ***incompatibile*** *dacă $A \cap B = \emptyset$, respectiv* ***compatibile*** *dacă $A \cap B \ne \emptyset$.*

Propoziția 2.2.4 (Proprietăți de continuitate ale probabilității). *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate și $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}$.*

1. *Dacă $A_1 \supseteq A_2 \ldots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \ldots$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$;*

2. *Dacă $A_1 \subseteq A_2 \ldots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \ldots$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.*

Demonstrație. 1. Fie $A_1 \supseteq A_2 \ldots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \ldots$. Deoarece

$$A_1 = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1})\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right),$$

iar evenimentele reunite sunt disjuncte două câte două, rezultă că

$$P(A_1) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \setminus A_{n+1}) + P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

deci

$$\begin{aligned}P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= P(A_1) - \sum_{n=1}^{\infty} (P(A_n) - P(A_{n+1}))\\ &= P(A_1) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (P(A_k) - P(A_{k+1}))\\ &= P(A_1) - \lim_{n\to\infty} (P(A_1) - P(A_n))\\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_n).\end{aligned}$$

2. Fie $A_1 \subseteq A_2 \ldots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \ldots$, deci $\overline{A}_1 \supseteq \overline{A}_2 \ldots \supseteq \overline{A}_n \supseteq \overline{A}_{n+1} \supseteq \ldots$. Folosind proprietățile evenimentelor contrare și relația de la punctul 1 avem

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} (1 - P(\overline{A}_n)) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(\overline{A}_n) = 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right) = P\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n}\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

□

2.3 Evenimente independente

Definiția 2.3.1. *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate și $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Evenimentele $A_1, \ldots, A_n$ se numesc **independente** dacă*

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}),\ \forall k \geq 2,\ \forall \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}.$$

Observația 2.3.1. Numărul relațiilor de egalitate din definiția anterioară este egal cu

$$\sum_{k=2}^{n} C_n^k = 2^n - C_n^0 - C_n^1 = 2^n - n - 1.$$

Observația 2.3.2. Conform definiției anterioare, două evenimentele A și B sunt independente dacă și numai dacă

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Trei evenimentele A, B și C sunt independente dacă și numai dacă

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),\ P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C),\ P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) \text{ și}$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Observația 2.3.3. Evident, dacă evenimentele $A_1, \ldots, A_n$ sunt independente și $\{B_1, \ldots, B_m\} \subseteq \{A_1, \ldots, A_n\}$, $m \geq 2$, atunci evenimentele $B_1, \ldots, B_m$ sunt de asemenea independente.

Observația 2.3.4. Dacă evenimentele $A_1, \ldots, A_n$ sunt independente, $1 \leq m_1 < m_2 < \ldots < m_p < n$, $p \in \mathbb{N}^*$ și $B_1 = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{m_1}$, $B_2 = A_{m_1+1} \cap A_{m_1+2} \cap \ldots \cap A_{m_2}$, ..., $B_{p+1} = A_{m_p+1} \cap A_{m_p+2} \cap \ldots \cap A_n$, atunci evenimentele $B_1, B_2, \ldots, B_{p+1}$ sunt de asemenea independente.

Observația 2.3.5. Evident, dacă evenimentele $A_1, \ldots, A_n$ sunt independente, atunci orice două evenimente A_i și A_j cu $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ sunt independente.

Reciproca nu este adevărată. De exemplu, considerând câmpul de probabilitate al lui Laplace pe mulțimea $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ și evenimentele

$$A_1 = \{0, 1\},\ A_2 = \{0, 2\},\ A_3 = \{0, 3\}$$

avem

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$
$$P(A_1 \cap A_2) = P(\{0\}) = \frac{1}{4} = P(A_1) \cdot P(A_2),$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(\{0\}) = \frac{1}{4} = P(A_1) \cdot P(A_3),$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(\{0\}) = \frac{1}{4} = P(A_2) \cdot P(A_3),$$

deci A_1, A_2 și A_3 sunt independente două câte două, dar

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\{0\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3),$$

deci evenimentele A_1, A_2 și A_3 nu sunt independente.

Propoziția 2.3.1 (formula înmulțirii probabilităților pentru evenimente independente). *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate. Dacă $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ sunt evenimente independente, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Demonstrație. Egalitatea din enunț se obține direct din Definiția 2.3.1 luând $\{i_1, \ldots, i_k\} = \{1, \ldots, n\}$. □

Observația 2.3.6. Reciproca afirmației din propoziția anterioară este evident adevărată pentru $n = 2$, dar nu este adevărată pentru $n \geq 3$. De exemplu, considerând câmpul de probabilitate al lui Laplace pe mulțimea $\Omega = \{1, 2, \ldots, 8\}$ și evenimentele

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4\},\ A_2 = \{1, 2, 3, 5\},\ A_3 = \{1, 6, 7, 8\}$$

avem

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\{1\}) = \frac{1}{8} = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3),$$

dar

$$P(A_1 \cap A_2) = P(\{1, 2, 3\}) = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{4} = P(A_1) \cdot P(A_2),$$

deci evenimentele A_1, A_2 și A_3 nu sunt independente.

Propoziția 2.3.2. *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate. Dacă $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ sunt evenimente independente, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $B_i \in \{A_i, \overline{A}_i\}$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, atunci și evenimentele $B_1, \ldots, B_n$ sunt independente.*

Demonstrație. Deoarece intersecția evenimentelor și înmulțirea probabilităților sunt comutative și asociative, este suficient să demonstrăm că evenimentele $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_m, A_{m+1}, \ldots, A_n$ sunt independente pentru orice $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Vom utiliza metoda inducției după m.

Pentru $m = 0$ afirmația este chiar ipoteza că evenimentele $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ sunt independente.

Presupunem afirmația adevărată pentru p, unde $p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, adică evenimentele $B_1 = \overline{A}_1, \ldots, B_p = \overline{A}_p, B_{p+1} = A_{p+1}, \ldots, B_n = A_n$ sunt independente și o demonstrăm pentru $p+1$, deci trebuie să arătăm că și evenimentele $B'_1 = B_1, \ldots, B'_p = B_p, B'_{p+1} = \overline{B}_{p+1}, B'_{p+2} = B_{p+2}, \ldots, B'_n = B_n$ sunt independente. Fie $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ cu $k \geq 2$. Avem două cazuri.

Cazul 1. $p+1 \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$. Atunci, evident

$$P(B'_{i_1} \cap \ldots \cap B'_{i_k}) = P(B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_k}) = P(B_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(B_{i_k}) = P(B'_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(B'_{i_k}).$$

Cazul 2. $p+1 \in \{i_1, \ldots, i_k\}$. Folosind din nou comutativitatea și asociativitatea intersecției și înmulțirii, putem presupune că $p+1 = i_1$. Atunci avem

$$\begin{aligned} P(B'_{i_1} \cap B'_{i_2} \cap \ldots \cap B'_{i_k}) &= P(\overline{B}_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_k}) \\ &= P\left((B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_k}) \setminus (B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_k})\right) \\ &= P(B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_k}) - P(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_k}) \\ &= P(B_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(B_{i_k}) - P(B_{i_1}) \cdot P(B_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(B_{i_k}) \\ &= (1 - P(B_{i_1})) \cdot P(B_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(B_{i_k}) \\ &= P(\overline{B}_{i_1}) \cdot P(B_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(B_{i_k}) \\ &= P(B'_{i_1}) \cdot P(B'_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(B'_{i_k}). \end{aligned}$$

Rezultă că evenimentele $B'_1, \ldots, B'_n$ sunt independente și astfel demonstrația este încheiată. $\square$

2.4 Probabilități condiționate

Propoziția 2.4.1. *Fie* $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ *un câmp de probabilitate și* $A \in \mathcal{B}$ *un eveniment a.î.* $P(A) > 0$. *Atunci funcția*

$$P_A : \mathcal{B} \to [0, \infty),\ P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},\ \forall B \in \mathcal{B}, \tag{2.4.1}$$

este o probabilitate pe spațiul măsurabil $(\Omega, \mathcal{B})$.

Demonstrație. Evident, $P_A(\Omega) = \dfrac{P(A \cap \Omega)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$.

Fie acum $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}$ a.î. $A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall i \neq j$, deci $(A \cap A_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}$ și $(A \cap A_i) \cap (A \cap A_j) = \emptyset,\ \forall i \neq j$. Avem

$$\begin{aligned} P_A\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \frac{P\left(A \cap \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)}{P(A)} = \frac{P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i)\right)}{P(A)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A \cap A_i)}{P(A)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A \cap A_i)}{P(A)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P_A(A_i), \end{aligned}$$

deci P_A este o probabilitate pe spațiul măsurabil $(\Omega, \mathcal{B})$. $\square$

Definiția 2.4.1. *În contextul propoziției anterioare,* P_A *se numește* ***probabilitate condiționată de evenimentul*** A, *iar pentru orice eveniment* $B \in \mathcal{B}$ *valoarea* $P_A(B)$ *se numește* ***probabilitatea evenimentului*** B ***condiționată de evenimentul*** A. *Formula (2.4.1) se numește* ***formula probabilității condiționate****. Vom utiliza și notația*

$$P(B|A) = P_A(B).$$

Observația 2.4.1. Probabilitatea condiționată $P_A(B)$ reprezintă probabilitatea de realizare a evenimentului B știind că s-a realizat evenimentul A.

Exemplul 2.4.1. Se aruncă un zar.

a) Cunoscând că numărul obținut este mai mic decât 5, care este probabilitatea ca acest număr să fie impar?

b) Cunoscând că numărul obținut este impar, care este probabilitatea ca acest număr să fie mai mic decât 5?

Soluție. Considerăm câmpul de probabilitate al lui Laplace pe mulțimea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$ dată de evenimentele elementare (cazurile posibile)

$$\omega_i: \text{ "apare fața cu numărul } i\text{"}, \; i \in \{1, \ldots, 6\}.$$

Fie evenimentele

$$A: \text{"apare un număr mai mic decât 5"},$$

$$B: \text{"apare un număr impar"},$$

adică

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \; B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}.$$

a) Probabilitatea cerută este $P_A(B)$. Avem $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Dar $P(A) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$, iar $A \cap B = \{\omega_1, \omega_3\}$, deci $P(A \cap B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$. Obținem că

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

b) Probabilitatea cerută este $P_B(A)$. Avem $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Dar $P(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, deci

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}.$$

□

Propoziția 2.4.2. *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate și $A, B \in \mathcal{B}$ a.î. $P(A) > 0$. Atunci evenimentele A și B sunt independente dacă și numai dacă $P_A(B) = P(B)$.*

Demonstrație. Evident, avem echivalențele: A și B sunt independente $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $\Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$. □

Propoziția 2.4.3 (formula înmulțirii probabilităților). *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate și fie evenimentele $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ astfel încât*

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right) > 0.$$

Atunci

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right) = P\left(A_1\right) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P\left(A_3|A_1 \cap A_2\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right).$$

Demonstrație. Deoarece $A_1 \supseteq A_1 \cap A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}$, avem

$$P\left(A_1\right) \geq P\left(A_1 \cap A_2\right) \geq \ldots \geq P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right) > 0,$$

deci probabilitățile condiționate din enunț sunt bine definite.

Utilizând formula probabilității condiționate avem

$$\begin{aligned}&P\left(A_1\right)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P\left(A_3|A_1\cap A_2\right)\cdot\ldots\cdot P\left(A_n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}\right)\\&=P\left(A_1\right)\cdot\frac{P\left(A_1\cap A_2\right)}{P\left(A_1\right)}\cdot\frac{P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\right)}{P\left(A_1\cap A_2\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{P\left(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\right)}{P\left(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}\right)}\\&=P\left(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\right).\end{aligned}$$

□

Observația 2.4.2. Dacă evenimentele $A_1,\ldots,A_n$ sunt independente, atunci conform Propozițiilor 2.4.3 și 2.4.2 formula înmulțirii probabilităților devine

$$\begin{aligned}P\left(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\right)&=P\left(A_1\right)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P\left(A_3|A_1\cap A_2\right)\cdot\ldots\cdot P\left(A_n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1}\right)\\&=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot\ldots\cdot P(A_n),\end{aligned}$$

deci regăsim formula din Propoziția 2.3.1.

Exemplul 2.4.2. Jocul *LOTO 6/49* constă în extragerea a 6 numere dintr-o urnă ce conține 49 de bile, numerotate $1,2,\ldots,49$. Extragerea este fără întoarcere (adică orice bilă extrasă nu mai este reintrodusă în urnă). Să se calculeze:

a) probabilitatea ca toate cele 6 numere extrase să fie divizibile cu 5;

b) probabilitatea ca primele 3 numere extrase să fie pare, iar ultimele 3 numere extrase să fie impare;

c) probabilitatea ca exact 3 din numerele extrase să fie pare.

Soluție. a) Metoda 1. Vom utiliza formula clasică a probabilităților.

Notând cu $i_1,i_2,\ldots,i_6$ cele 6 bile extrase, în această ordine, mulțimea cazurilor posibile este

$$\left\{(i_1,i_2,\ldots,i_6)\mid i_1,i_2,\ldots,i_6\in\{1,2,\ldots,49\},\ i_j\neq i_k,\ \forall\, j\neq k\right\},$$

deci conform Propoziției 1.3.2 numărul de cazuri posibile este egal cu A_{49}^6, iar mulțimea cazurilor favorabile este

$$\left\{(i_1,i_2,\ldots,i_6)\mid i_1,i_2,\ldots,i_6\in\{5,10,15,\ldots,45\},\ i_j\neq i_k,\ \forall\, j\neq k\right\},$$

deci numărul de cazuri favorabile este egal cu A_9^6. Astfel probabilitatea cerută este

$$P=\frac{A_9^6}{A_{49}^6}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}=\frac{1}{166474}.$$

Metoda 2. Vom utiliza formula înmulțirii probabilităților.

Fie evenimentele

$$A_i:\text{ "al } i\text{-lea număr extras este divizibil cu 5"},$$

unde $i\in\{1,2,\ldots,6\}$. Probabilitatea cerută este

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_6).$$

Conform Propoziției 2.4.3 avem

$$\begin{aligned}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_6)&=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot P(A_4|A_1\cap A_2\cap A_3)\cdot\\&\quad\cdot P(A_5|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)\cdot P(A_6|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5).\end{aligned}$$

Calculăm probabilitățile din membrul drept al acestei egalități:

- $P(A_1) = \dfrac{9}{49}$ (deoarece, la extragerea primului număr, dintre cele 49 de numere exact 9 sunt divizibile cu 5);
- $P(A_2|A_1) = \dfrac{8}{48}$ (deoarece dacă primul număr extras este divizibil cu 5, au rămas 48 de numere dintre care exact 8 sunt divizibile cu 5);
- $P(A_3|A_1 \cap A_2) = \dfrac{7}{47}$ (deoarece dacă primele două numere extrase sunt divizibile cu 5, au rămas 47 de numere dintre care exact 7 sunt divizibile cu 5);
- $P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \dfrac{6}{46}$ (deoarece dacă primele trei numere extrase sunt divizibile cu 5, au rămas 46 de numere dintre care exact 6 sunt divizibile cu 5);
- $P(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \dfrac{5}{45}$;
- $P(A_6|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \dfrac{4}{44}$.

Deci probabilitatea cerută este

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6) = \frac{9}{49} \cdot \frac{8}{48} \cdot \frac{7}{47} \cdot \frac{6}{46} \cdot \frac{5}{45} \cdot \frac{4}{44} = \frac{1}{166474}.$$

Metoda 3. Vom utiliza din nou formula clasică a probabilităților.

Deoarece extragerea este fără întoarcerea bilelor în urnă și se dorește ca toate cele 6 bile extrase să fie divizibile cu 5, rezultă că nu contează ordinea extragerii acestora, deci putem presupune că sunt extrase simultan. Notând cu $\{i_1, i_2, \ldots, i_6\}$ mulțimea celor 6 bile extrase, mulțimea cazurilor posibile este acum

$$\{\{i_1, i_2, \ldots, i_6\} \mid \{i_1, i_2, \ldots, i_6\} \subseteq \{1, 2, \ldots, 49\}\},$$

deci conform Propoziției 1.3.5 numărul de cazuri posibile este egal cu C_{49}^6, iar mulțimea cazurilor favorabile este acum

$$\{\{i_1, i_2, \ldots, i_6\} \mid \{i_1, i_2, \ldots, i_6\} \subseteq \{5, 10, 15, \ldots, 45\}\},$$

deci numărul de cazuri favorabile este egal cu C_9^6. Astfel probabilitatea cerută este

$$P = \frac{C_9^6}{C_{49}^6} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6!} \cdot \frac{6!}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} = \frac{1}{166474}.$$

b) Deoarece de această dată se dorește ca primele 3 bile extrase să fie pare iar celelalte impare, rezultă că acum contează ordinea extragerii bilelor, deci nu mai putem presupune că sunt extrase simultan. Astfel metoda 3 de la punctul a) este inoperabilă! Putem utiliza, în schimb, celelalte două metode.

Metoda 1. Cu notațiile de la metoda 1 de la punctul a), mulțimea cazurilor posibile rămâne aceeași, iar mulțimea cazurilor favorabile este acum

$$\begin{aligned}\{(i_1, i_2, \ldots, i_6) \mid\ & i_1, i_2, i_3 \in \{2, 4, 6, \ldots, 48\},\ i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_1, \\ & i_4, i_5, i_6 \in \{1, 3, 5, \ldots, 49\},\ i_4 \neq i_5 \neq i_6 \neq i_4\},\end{aligned}$$

deci, folosind regula produsului, numărul de cazuri favorabile este egal cu $A_{24}^3 \cdot A_{25}^3$. Astfel probabilitatea cerută este

$$P = \frac{A_{24}^3 \cdot A_{25}^3}{A_{49}^6} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} = \frac{115}{6909}.$$

Metoda 2. Vom utiliza din nou formula înmulțirii probabilităților.
Fie evenimentele

$$B_i : \text{"al } i\text{-lea număr extras este par"}, \ i \in \{1, 2, \ldots, 6\}.$$

Probabilitatea cerută este

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B}_4 \cap \overline{B}_5 \cap \overline{B}_6).$$

Conform Propoziției 2.4.3 avem

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B}_4 \cap \overline{B}_5 \cap \overline{B}_6) = P(B_1) \cdot P(B_2|B_1) \cdot P(B_3|B_1 \cap B_2) \cdot P(\overline{B}_4|B_1 \cap B_2 \cap B_3) \cdot \\ \cdot P(\overline{B}_5|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B}_4) \cdot P(\overline{B}_6|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B}_4 \cap \overline{B}_5).$$

Calculăm probabilitățile din membrul drept al acestei egalități:

- $P(B_1) = \dfrac{24}{49}$ (deoarece, la extragerea primului număr, dintre cele 49 de numere exact 24 sunt pare);
- $P(B_2|B_1) = \dfrac{23}{48}$ (deoarece dacă primul număr extras este par, au rămas 48 de numere dintre care exact 23 sunt pare);
- $P(B_3|B_1 \cap B_2) = \dfrac{22}{47}$ (deoarece dacă primele două numere extrase sunt pare, au rămas 47 de numere dintre care exact 22 sunt pare);
- $P(\overline{B}_4|B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \dfrac{25}{46}$ (deoarece dacă primele trei numere extrase sunt pare, au rămas 46 de numere dintre care exact 25 sunt impare);
- $P(\overline{B}_5|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B}_4) = \dfrac{24}{45}$ (deoarece dacă primele trei numere extrase sunt pare iar al patrulea impar, au rămas 45 de numere dintre care exact 24 sunt impare);
- $P(\overline{B}_6|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B}_4 \cap \overline{B}_5) = \dfrac{23}{44}$ (deoarece dacă primele trei numere extrase sunt pare iar al patrulea și al cincilea sunt impare, au rămas 44 de numere dintre care exact 23 sunt impare).

Deci probabilitatea cerută este

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B}_4 \cap \overline{B}_5 \cap \overline{B}_6) = \frac{24}{49} \cdot \frac{23}{48} \cdot \frac{22}{47} \cdot \frac{25}{46} \cdot \frac{24}{45} \cdot \frac{23}{44} = \frac{115}{6909}.$$

c) Deoarece de această dată se dorește ca 3 bile extrase să fie pare, indiferent de ordinea în care sunt extrase, iar celelalte impare, rezultă că acum nu contează ordinea extragerii bilelor, deci putem presupune că sunt extrase simultan. Astfel metoda 3 de la punctul a) este cea mai indicată. Totusi, putem utiliza și celelalte două metode, analizând toate ordinile posibile pentru extragerea bilelor pare, respectiv impare.

Metoda 1. Cu notațiile de la metoda 1 de la punctul a), mulțimea cazurilor posibile rămâne aceeași, iar mulțimea cazurilor favorabile este acum

$$\{(i_1, i_2, \ldots, i_6) \mid i_1, i_2, \ldots, i_6 \in \{1, 2, \ldots, 49\}, \ i_j \neq i_k, \ \forall\, j \neq k, \\ \operatorname{card}(\{i_1, i_2, \ldots, i_6\} \cap \{2, 4, \ldots, 48\}) = 3\},$$

deci numărul de cazuri favorabile este egal cu $C_6^3 \cdot A_{24}^3 \cdot A_{25}^3$ (deoarece trebuie aleși cei 3 indici j_1, j_2, j_3 pentru care bilele $i_{j_1}, i_{j_2}, i_{j_3}$ sunt pare, iar pentru fiecare din cele C_6^3 alegeri se aleg bilele $i_{j_1}, i_{j_2}, i_{j_3}$

din cele 24 de bile pare și celelalte trei bile din cele 25 de bile impare). Astfel probabilitatea cerută este

$$P = \frac{C_6^3 \cdot A_{24}^3 \cdot A_{25}^3}{A_{49}^6} = \frac{20 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} = \frac{2300}{6909}.$$

Metoda 2. Cu notațiile de la metoda 2 de la punctul b), probabilitatea cerută este acum

$$P = P\Bigg(\bigcup_{\substack{\{j_1,j_2,j_3\} \subseteq \{1,2,\ldots,6\} \\ \{j_4,j_5,j_6\} = \{1,2,\ldots,6\} \setminus \{j_1,j_2,j_3\}}} (B_{j_1} \cap B_{j_2} \cap B_{j_3} \cap \overline{B}_{j_4} \cap \overline{B}_{j_5} \cap \overline{B}_{j_6}) \Bigg).$$

Evenimentele reunite sunt incompatibile două câte două deci

$$P = \sum_{\substack{\{j_1,j_2,j_3\} \subseteq \{1,2,\ldots,6\} \\ \{j_4,j_5,j_6\} = \{1,2,\ldots,6\} \setminus \{j_1,j_2,j_3\}}} P(B_{j_1} \cap B_{j_2} \cap B_{j_3} \cap \overline{B}_{j_4} \cap \overline{B}_{j_5} \cap \overline{B}_{j_6}).$$

Suma are $C_6^3 = 20$ termeni, iar conform metodei 2 de la punctul b) fiecare termen este egal cu $\frac{115}{6909}$, deci

$$P = 20 \cdot \frac{115}{6909} = \frac{2300}{6909}.$$

Metoda 3. Vom utiliza din nou formula clasică a probabilităților.

Am vazut că putem presupune că bilele sunt extrase simultan. Cu notațiile de la metoda 3 de la punctul a), mulțimea cazurilor posibile rămâne aceeași, iar mulțimea cazurilor favorabile este acum

$$\{\{i_1, i_2, \ldots, i_6\} \mid \{i_1, i_2, i_3\} \subseteq \{2, 4, \ldots, 48\},\ \{i_4, i_5, i_6\} \subseteq \{1, 3, \ldots, 49\}\},$$

deci, folosind regula produsului, numărul de cazuri favorabile este egal cu $C_{24}^3 \cdot C_{25}^3$. Astfel probabilitatea cerută este

$$P = \frac{C_{24}^3 \cdot C_{25}^3}{C_{49}^6} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{3!} \cdot \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!} \cdot \frac{6!}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} = \frac{2300}{6909}.$$

□

2.5 Formula probabilității totale și formula lui Bayes

Propoziția 2.5.1 (formula probabilității totale). *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate, I o mulțime cel mult numărabilă de indici și $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$ a.î.*

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall i \neq j,$$

și $P(A_i) > 0$, $\forall i \in I$. Atunci pentru orice $B \in \mathcal{B}$ are loc egalitatea

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i) P_{A_i}(B).$$

Demonstrație. Utilizând formula probabilității condiționate avem

$$\sum_{i \in I} P(A_i) P_{A_i}(B) = \sum_{i \in I} P(A_i) \cdot \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)} = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B). \tag{2.5.1}$$

Dar evenimentele $(A_i)_{i\in I}$ sunt incompatibile (disjuncte) două câte două și $A_i \cap B \subseteq A_i, \forall i \in I$, de unde rezultă că și evenimentele $(A_i \cap B)_{i\in I}$ sunt incompatibile (disjuncte) două câte două, deci

$$\sum_{i\in I} P(A_i \cap B) = P\left(\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)\right) = P\left(\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B\right) = P(\Omega \cap B) = P(B). \tag{2.5.2}$$

Din (2.5.1) și (2.5.2) rezultă egalitatea din enunț. □

Următorul rezultat extinde formula probabilității totale la cazul în care probabilitățile evenimentelor A_i pot sa fie și zero.

Corolarul 2.5.1. *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate, I o mulțime cel mult numărabilă de indici și $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}$ a.î. $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$. Atunci pentru orice $B \in \mathcal{B}$ are loc egalitatea*

$$P(B) = \sum_{\substack{i\in I\\ P(A_i)>0}} P(A_i)P_{A_i}(B).$$

Demonstrație. Procedăm analog demonstrației propoziției anterioare. Utilizând formula probabilității condiționate avem

$$\sum_{\substack{i\in I\\ P(A_i)>0}} P(A_i)P_{A_i}(B) = \sum_{\substack{i\in I\\ P(A_i)>0}} P(A_i)\cdot\frac{P(A_i\cap B)}{P(A_i)} = \sum_{\substack{i\in I\\ P(A_i)>0}} P(A_i \cap B). \tag{2.5.3}$$

De asemenea, avem

$$P(B) = P(\Omega \cap B) = P\left(\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B\right) = P\left(\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)\right) = \sum_{i\in I} P(A_i \cap B) = \sum_{\substack{i\in I\\ P(A_i)>0}} P(A_i \cap B) \tag{2.5.4}$$

(deoarece pentru $P(A_i) = 0$, cum $A_i \cap B \subseteq A_i$, avem și $P(A_i \cap B) = 0$). Din (2.5.4) și (2.5.3) rezultă egalitatea din enunț. □

În cazul particular când mulțimea I este finită, formula probabilității totale este dată de următorul rezultat.

Corolarul 2.5.2. *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate și $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ a.î.*

$$\Omega = A_1 \cup \ldots \cup A_n,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall i \neq j,$$

și $P(A_i) > 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Atunci pentru orice $B \in \mathcal{B}$ are loc egalitatea

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B).$$

Lema 2.5.1 (Teorema lui Bayes). *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate și $A, B \in \mathcal{B}$ a.î. $P(A) > 0$ și $P(B) > 0$. Atunci*

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$

Demonstrație. Utilizând formula probabilității condiționate avem

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}{P(B)} = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$

□

Propoziția 2.5.2 (Formula lui Bayes). *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate, I o mulțime cel mult numărabilă de indici și $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$ a.î.*

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i, \ A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall i \neq j,$$

și $P(A_i) > 0, \ \forall i \in I$. Atunci pentru orice $B \in \mathcal{B}$ a.î. $P(B) > 0$ au loc egalitățile

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum\limits_{k \in I} P(A_k)P_{A_k}(B)}, \ \forall i \in \ I.$$

Demonstrație. Utilizând lema anterioară și formula probabilității totale avem

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum\limits_{k \in I} P(A_k)P_{A_k}(B)},$$

pentru orice $i \in I$. □

În cazul particular când mulțimea I este finită, formula lui Bayes este dată de următorul rezultat.

Corolarul 2.5.3. *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate și $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ a.î.*

$$\Omega = A_1 \cup \ldots \cup A_n, \ A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall i \neq j,$$

și $P(A_i) > 0, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Atunci pentru orice $B \in \mathcal{B}$ a.î. $P(B) > 0$ au loc egalitățile

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B)}, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Exemplul 2.5.1. Într-un magazin se găsește un același articol provenit de la 3 furnizori F1, F2 și F3, în proporție de 40%, 25%, respectiv 35%. Se cunoaște că probabilitatea ca un articol să fie defect este de 0,01 pentru cele provenite de la furnizorul F1, de 0,02 pentru cele provenite de la furnizorul F2 și tot de 0,02 pentru cele provenite de la furnizorul F3.

a) Să se calculeze probabilitatea ca un articol (ales aleator) din magazin să fie defect.

b) Să se calculeze probabilitatea ca un articol (ales aleator) din magazin să provină de la furnizorul F1, știind că el este defect.

c) Să se calculeze probabilitatea ca un articol (ales aleator) din magazin să fie defect, știind că el provine de la furnizorul F2 sau de la furnizorul F3.

Soluție. Considerăm evenimentele

A_1 : "articolul ales provine de la furnizorul F1",

$$A_2: \text{"articolul ales provine de la furnizorul F2"},$$

$$A_3: \text{"articolul ales provine de la furnizorul F3"},$$

$$B: \text{"articolul ales este defect"}.$$

Conform datelor problemei, avem:

$$P(A_1) = 40\% = 0{,}4,\ P(A_2) = 25\% = 0{,}25,\ P(A_3) = 35\% = 0{,}35,$$

$$P_{A_1}(B) = 0{,}01,\ P_{A_2}(B) = P_{A_3}(B) = 0{,}02.$$

a) Probabilitatea cerută este $P(B)$. Aplicând formula probabilității totale avem

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B) \\ &= 0{,}4 \cdot 0{,}01 + 0{,}25 \cdot 0,02 + 0{,}35 \cdot 0,02 = 0{,}016. \end{aligned}$$

b) Probabilitatea cerută este $P_B(A_1)$. Aplicând Formula lui Bayes avem

$$P_B(A_1) = \frac{P(A_1)P_{A_1}(B)}{P(B)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}01}{0{,}016} = 0{,}25.$$

c) Probabilitatea cerută este $P_{A_2 \cup A_3}(B)$. Aplicând formula probabilității condiționate și utilizând faptul că evenimentele A_2 și A_3 sunt incompatibile avem

$$\begin{aligned} P_{A_2 \cup A_3}(B) &= \frac{P(B \cap (A_2 \cup A_3))}{P(A_2 \cup A_3)} = \frac{P((B \cap A_2) \cup (B \cap A_3))}{P(A_2 \cup A_3)} \\ &= \frac{P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3)}{P(A_2) + P(A_3)} = \frac{P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B)}{P(A_2) + P(A_3)} \\ &= \frac{0{,}25 \cdot 0{,}02 + 0{,}35 \cdot 0{,}02}{0{,}25 + 0{,}35} = 0{,}02. \end{aligned}$$

□

2.6 Scheme probabiliste

Propoziția 2.6.1 (**Schema binomială**, **schema bilei întoarse** sau **schema lui Bernoulli**). *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate și $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $A_1, \ldots, A_n$ sunt evenimente independente egal probabile, $p = P(A_i)$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ (p se numește* ***probabilitatea de succes****), și $q = P(\overline{A}_i) = 1 - p$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, (q se numește* ***probabilitatea de insucces****), atunci probabilitatea să se realizeze exact k din aceste n evenimente este*

$$P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k},\ \forall k \in \{0, \ldots, n\}.$$

În particular, dacă dintr-o urnă ce conține a bile albe și b bile negre ($a, b \in \mathbb{N}^*$) se extrag, la întâmplare, n bile, cu întoarcere (fiecare bilă extrasă este reintrodusă în urnă înainte de extragerea următoarei bile), atunci probabilitatea ca numărul de bile albe extrase să fie egal cu k este

$$P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k},\ \forall k \in \{0, \ldots, n\}, \quad \textit{unde } p = \frac{a}{a+b},\ q = 1 - p = \frac{b}{a+b}.$$

Demonstrație. Probabilitatea cerută este

$$P_{n,k} = P\Bigg(\bigcup_{\substack{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,2,\ldots,n\}\\ \{i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_n\}=\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}}} (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \overline{A}_{i_{k+2}} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_n})\Bigg).$$

Evenimentele reunite sunt incompatibile două câte două deci

$$P_{n,k} = \sum_{\substack{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,2,\ldots,n\}\\ \{i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_n\}=\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}}} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \overline{A}_{i_{k+2}} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_n}).$$

Conform ipotezei și Propoziției 2.3.2, evenimentele intersectate sunt independente, deci utilizând formula înmulțirii probabilităților pentru evenimente independente avem

$$P_{n,k} = \sum_{\substack{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,2,\ldots,n\}\\ \{i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_n\}=\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}}} P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}) \cdot P(\overline{A}_{i_{k+1}}) \cdot P(\overline{A}_{i_{k+2}}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_{i_n}).$$

Suma are C_n^k termeni, iar conform ipotezei fiecare termen este egal cu $p^k q^{n-k}$, deci

$$P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Cazul particular al extragerii de bile se obține din cazul general, considern̂d evenimentele

$$A_i : \text{"a } i\text{-a bilă extrasă este albă"}, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

pentru care, conform definiției clasice a probabilității, avem $P(A_i) = \dfrac{a}{a+b} = p$ și $P(\overline{A}_i) = \dfrac{b}{a+b} = 1 - p = q$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. □

Definiția 2.6.1. *Probele (repetările) unei experiențe aleatoare având două rezultate posibile, evenimentele numite generic* ***succes*** *și* ***insucces****, ale căror probabilități nu depind de probă (adică probabilitatea de succes este aceeași pentru fiecare probă), iar rezultatele probelor sunt evenimente independente, se numesc* ***probe Bernoulli****.*

Propoziția 2.6.2 (Schema multinomială). *Fie $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Dintr-o urnă ce conține câte a_i bile de culoarea i pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ ($a_i \in \mathbb{N}^*$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}$) se extrag, la întâmplare, n bile, cu întoarcere. Atunci probabilitatea să se extragă câte k_i bile de culoarea i pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, unde $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$, este*

$$P_{n;k_1,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!} \cdot p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r},$$

unde $p_i = \dfrac{a_i}{a_1 + a_2 + \ldots + a_r}$, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$.

Demonstrație. Considerăm evenimentele

$$A_j^{(i)} : \text{"a } j\text{-a bilă extrasă are culoarea } i\text{"}, \ \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, r\},$$

pentru care, conform definiției clasice a probabilității, avem

$$P(A_j^{(i)}) = \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \ldots + a_r} = p_i, \ \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}. \tag{2.6.1}$$

Probabilitatea cerută este

$$P_{n;k_1,\ldots,k_r} = P\Bigg(\bigcup_{\{j_1^{(1)},\ldots,j_{k_1}^{(1)}\}\cup\{j_1^{(2)},\ldots,j_{k_2}^{(2)}\}\cup\ldots\cup\{j_1^{(r)},\ldots,j_{k_r}^{(r)}\}=\{1,\ldots,n\}} (A^{(1)}_{j_1^{(1)}} \cap \ldots \cap A^{(1)}_{j_{k_1}^{(1)}} \cap$$

$$\cap A^{(2)}_{j_1^{(2)}} \cap \ldots \cap A^{(2)}_{j_{k_2}^{(2)}} \cap \ldots \cap A^{(r)}_{j_1^{(r)}} \cap \ldots \cap A^{(r)}_{j_{k_r}^{(r)}})\Bigg).$$

Evenimentele reunite sunt incompatibile două câte două, iar evenimentele intersectate sunt independente, deci

$$P_{n;k_1,\ldots,k_r} = \sum_{\{j_1^{(1)},\ldots,j_{k_1}^{(1)}\}\cup\{j_1^{(2)},\ldots,j_{k_2}^{(2)}\}\cup\ldots\cup\{j_1^{(r)},\ldots,j_{k_r}^{(r)}\}=\{1,\ldots,n\}} \Big(P(A^{(1)}_{j_1^{(1)}}) \cdot \ldots \cdot P(A^{(1)}_{j_{k_1}^{(1)}}) \cdot$$

$$\cdot P(A^{(2)}_{j_1^{(2)}}) \cdot \ldots \cdot P(A^{(2)}_{j_{k_2}^{(2)}}) \cdot \ldots \cdot P(A^{(r)}_{j_1^{(r)}}) \cdot \ldots \cdot P(A^{(r)}_{j_{k_r}^{(r)}})\Big).$$

Conform Propoziției 1.3.7, suma are $\dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$ termeni, iar conform (2.6.1) fiecare termen este egal cu $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_r^{k_r}$, deci $P_{n;k_1,\ldots,k_r} = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!} \cdot p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_r^{k_r}$. □

Observația 2.6.1. Luând $r = 2$ în schema multinomială, regăsim schema binomială.

Propoziția 2.6.3 (**Schema binomială generalizată** sau **schema lui Poisson**). *Fie* $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ *un câmp de probabilitate și* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$*,* $n \in \mathbb{N}^*$*. Dacă* $A_1, \ldots, A_n$ *sunt evenimente independente,* $p_i = P(A_i)$*,* $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$*, și* $q_i = P(\overline{A}_i) = 1 - p_i$*,* $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$*, atunci probabilitatea să se realizeze exact* k *din aceste* n *evenimente este egală cu coeficientul lui* x^k *din dezvoltarea polinomului*

$$(p_1x + q_1)(p_2x + q_2)\ldots(p_nx + q_n),$$

pentru orice $k \in \{0, \ldots, n\}$*.*

Demonstrație. Pe de o parte, procedând analog demonstrației schemei binomiale, probabilitatea cerută este

$$\begin{aligned}
&P\Bigg(\bigcup_{\substack{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,2,\ldots,n\} \\ \{i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_n\}=\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}}} (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \overline{A}_{i_{k+2}} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_n})\Bigg) \\
&= \sum_{\substack{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,2,\ldots,n\} \\ \{i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_n\}=\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}}} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \overline{A}_{i_{k+2}} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_n}) \\
&= \sum_{\substack{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,2,\ldots,n\} \\ \{i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_n\}=\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}}} P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}) \cdot P(\overline{A}_{i_{k+1}}) \cdot P(\overline{A}_{i_{k+2}}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}_{i_n}) \\
&= \sum_{\substack{\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,2,\ldots,n\} \\ \{i_{k+1},i_{k+2},\ldots,i_n\}=\{1,2,\ldots,n\}\setminus\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}}} p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k}q_{i_{k+1}}q_{i_{k+2}}\ldots q_{i_n}. \qquad (2.6.2)
\end{aligned}$$

Pe de altă parte, în dezvoltarea polinomului $(p_1x + q_1)(p_2x + q_2)\ldots(p_nx + q_n)$, termenii care conțin pe x^k se obțin înmulțind membrii de forma p_ix din oricare k paranteze cu membrii de forma q_i din restul de $n - k$ paranteze, deci acești termeni sunt cei care au forma

$$(p_{i_1}x)(p_{i_2}x)\ldots(p_{i_k}x)q_{i_{k+1}}q_{i_{k+2}}\ldots q_{i_n} = p_{i_1}p_{i_2}\ldots p_{i_k}q_{i_{k+1}}q_{i_{k+2}}\ldots q_{i_n}x^k,$$

unde $i_1, i_2, \ldots, i_k$ sunt numerele de ordine ale celor k paranteze din care se înmulțesc membrii de forma $p_i x$, iar $i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n$ sunt numerele de ordine ale celorlalte $n-k$ paranteze (din care se înmulțesc membrii de forma q_i). Prin adunare, coeficientul lui x^k din dezvoltarea polinomului dat este egal cu suma (2.6.2), deci cu probabilitatea cerută. $\square$

Observația 2.6.2. Luând $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$ în schema binomială generalizată, regăsim schema binomială.

Propoziția 2.6.4 (**Schema hipergeometrică** sau **schema bilei neîntoarse**). *Dacă dintr-o urnă ce conține a bile albe și b bile negre ($a, b \in \mathbb{N}^*$) se extrag, la întâmplare, n bile ($n \leq a+b$), fără întoarcere (orice bilă extrasă nu mai este reintrodusă în urnă), atunci probabilitatea ca numărul de bile albe extrase să fie egal cu k este*

$$\widetilde{P}_{n,k} = \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}, \ \forall k \in \{0, \ldots, n\}, \ n-b \leq k \leq a.$$

Demonstrație. Considerăm că bilele albe sunt numerotate cu $1, 2, \ldots, a$, iar bilele negre cu $a+1$, $a+2$, …, $a+b$.

Vom utiliza formula clasică a probabilităților. Notând cu $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ mulțimea celor n bile extrase, mulțimea cazurilor posibile este

$$\{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \mid \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \ldots, a+b\}\},$$

deci conform Propoziției 1.3.5 numărul de cazuri posibile este egal cu C_{a+b}^n, iar mulțimea cazurilor favorabile este

$$\{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \mid \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, a\}, \ \{i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n\} \subseteq \{a+1, a+2, \ldots, a+b\}\},$$

deci, aplicând regula produsului, numărul de cazuri favorabile este egal cu $C_a^k \cdot C_b^{n-k}$. Astfel probabilitatea cerută este $\widetilde{P}_{n,k} = \dfrac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$. $\square$

Propoziția 2.6.5 (**Schema hipergeometrică generalizată**). *Fie $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Dintr-o urnă ce conține câte a_i bile de culoarea i pentru orice $i \in \{1, \ldots, r\}$ ($a_i \in \mathbb{N}^*$, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$) se extrag, la întâmplare, n bile, fără întoarcere, $n \leq a_1 + \ldots + a_r$. Atunci probabilitatea să se extragă câte k_i bile de culoarea i pentru orice $i \in \{1, \ldots, r\}$, unde $k_i \in \{0, \ldots, a_i\}$, $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$, $k_1 + \ldots + k_r = n$, este*

$$\widetilde{P}_{n;k_1,\ldots,k_r} = \frac{C_{a_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot C_{a_r}^{k_r}}{C_{a_1+\ldots+a_r}^{k_1+\ldots+k_r}}.$$

Demonstrație. Considerăm că bilele de culoarea 1 sunt numerotate cu $1, 2, \ldots, a_1$, bilele de culoarea 2 cu a_1+1, a_1+2, …, a_1+a_2, ș.a.m.d, bilele de culoarea r cu $a_1+\ldots+a_{r-1}+1$, $a_1+\ldots+a_{r-1}+2$, …, $a_1+\ldots+a_{r-1}+a_r$. Vom utiliza din nou formula clasică a probabilităților. Notând cu $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ mulțimea celor n bile extrase, mulțimea cazurilor posibile este

$$\{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \mid \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq \{1, 2, \ldots, a_1 + \ldots + a_r\}\},$$

deci conform Propoziției 1.3.5 numărul de cazuri posibile este egal cu $C_{a_1+a_2+\ldots+a_r}^n$, iar mulțimea cazurilor favorabile este

$$\Big\{\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \mid \{i_1, i_2, \ldots, i_{k_1}\} \subseteq \{1, 2, \ldots, a_1\},$$
$$\{i_{k_1+1}, i_{k_1+2}, \ldots, i_{k_1+k_2}\} \subseteq \{a_1+1, a_1+2, \ldots, a_1+a_2\}, \ldots,$$
$$\{i_{k_1+\ldots+k_{r-1}+1}, \ldots, i_n\} \subseteq \{a_1+\ldots+a_{r-1}+1, \ldots, a_1+\ldots+a_{r-1}+a_r\}\Big\},$$

deci, aplicând regula produsului, numărul de cazuri favorabile este egal cu $C_{a_1}^{k_1} \cdot C_{a_2}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{a_r}^{k_r}$. Astfel probabilitatea cerută este $\widetilde{P}_{n;k_1,\ldots,k_r} = \dfrac{C_{a_1}^{k_1} \cdot C_{a_2}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{a_r}^{k_r}}{C_{a_1+a_2+\ldots+a_r}^n} = \dfrac{C_{a_1}^{k_1} \cdot C_{a_2}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{a_r}^{k_r}}{C_{a_1+a_2+\ldots+a_r}^{k_1+k_2+\ldots+k_r}}$. $\square$

Observația 2.6.3. Luând $r = 2$ în schema hipergeometrică generalizată, regăsim schema hipergeometrică.

Exemplul 2.6.1. O urnă conține 10 bile albe și 6 bile negre. Se extrag 8 bile. Care este probabilitatea ca exact 5 din bilele extrase să fie albe (deci restul de 3 bile extrase să fie negre), dacă extragerea este cu întoarcere? Dar dacă extragerea este fără întoarcere?

Soluție. În cazul extragerii cu întoarcere, aplicând schema bilei întoarse obținem că probabilitatea cerută este

$$P_{8,5} = C_8^5 \cdot \left(\frac{10}{16}\right)^5 \cdot \left(\frac{6}{16}\right)^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^3 = 56 \cdot \frac{5^5 \cdot 3^3}{8^8} = \frac{590625}{2097152}.$$

În cazul extragerii fără întoarcere, aplicând schema bilei neîntoarse obținem că probabilitatea cerută este

$$\widetilde{P}_{8,5} = \frac{C_{10}^5 \cdot C_6^3}{C_{16}^8} = \frac{\dfrac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot \dfrac{6!}{3! \cdot 3!}}{\dfrac{16!}{8! \cdot 8!}} = \frac{56}{143}.$$

□

Exemplul 2.6.2. Jocul *LOTO 6/49* constă în extragerea a 6 numere dintr-o urnă ce conține 49 de bile, numerotate 1, 2, ..., 49. Extragerea este fără întoarcere (adică orice bilă extrasă nu mai este reintrodusă în urnă). Câștigurile acordate la acest joc sunt de trei categorii:

- *categoria I*, pentru jucătorii ce au jucat (pe o aceeași variantă) toate cele 6 numere extrase;
- *categoria a II-a*, pentru jucătorii ce au jucat (pe o aceeași variantă) 5 din cele 6 numere extrase;
- *categoria a III-a*, pentru jucătorii ce au jucat (pe o aceeași variantă) 4 din cele 6 numere extrase.

Să se calculeze:

a) probabilitatea ca un jucător ce a jucat o *variantă simplă*, constând în 6 numere, să obțină un câștig de categoria I;

b) probabilitatea ca un jucător ce a jucat o variantă simplă să obțină un câștig de categoria a II-a;

c) probabilitatea ca un jucător ce a jucat o variantă simplă să obțină un câștig de categoria a III-a;

d) probabilitatea ca un jucător ce a jucat o *variantă combinată* constând în 7 numere, să obțină un câștig de categoria I;

e) probabilitatea ca un jucător ce a jucat o variantă combinată constând în 7 numere, să obțină un câștig de categoria a II-a;

f) probabilitatea ca un jucător ce a jucat o variantă combinată constând în 7 numere, să obțină un câștig de categoria a III-a.

Soluție. Vom aplica schema bilei neîntoarse. Folosim notațiile:

- a = numărul de bile câștigătoare pentru jucător (numerele jucate de acesta), numite generic *bile albe.*
- b = numărul de bile necâștigătoare pentru jucător (numerele nejucate de acesta), numite generic *bile negre*, deci $b = 49 - a$.
- n = numărul de bile extrase, deci $n = 6$.

- $k =$ numărul de bile extrase ce sunt câștigătoare pentru jucător, numite generic *bile albe extrase.*

Conform schemei bilei neîntoarse, probabilitatea ca numărul de bile albe extrase să fie egal cu k este

$$\widetilde{P}_{n,k} = \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}.$$

a) Avem $a = 6,\ b = 43,\ n = 6,\ k = 6$, deci probabilitatea cerută este

$$\widetilde{P}_{n,k} = \frac{C_6^6 \cdot C_{43}^0}{C_{49}^6} = \frac{1}{C_{49}^6} = \frac{6!}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} = \frac{1}{13983816}.$$

b) Avem $a = 6,\ b = 43,\ n = 6,\ k = 5$, deci probabilitatea cerută este

$$\widetilde{P}_{n,k} = \frac{C_6^5 \cdot C_{43}^1}{C_{49}^6} = \frac{6 \cdot 43}{C_{49}^6} = \frac{258}{13983816} \simeq \frac{1}{54201}.$$

c) Avem $a = 6,\ b = 43,\ n = 6,\ k = 4$, deci probabilitatea cerută este

$$\widetilde{P}_{n,k} = \frac{C_6^4 \cdot C_{43}^2}{C_{49}^6} = \frac{15 \cdot 903}{C_{49}^6} = \frac{13545}{13983816} \simeq \frac{1}{1032}.$$

d) Avem $a = 7,\ b = 42,\ n = 6,\ k = 6$, deci probabilitatea cerută este

$$\widetilde{P}_{n,k} = \frac{C_7^6 \cdot C_{42}^0}{C_{49}^6} = \frac{7}{C_{49}^6} = \frac{7}{13983816} = \frac{1}{1997688}.$$

e) Avem $a = 7,\ b = 42,\ n = 6,\ k = 5$, deci probabilitatea cerută este

$$\widetilde{P}_{n,k} = \frac{C_7^5 \cdot C_{42}^1}{C_{49}^6} = \frac{21 \cdot 42}{C_{49}^6} = \frac{882}{13983816} \simeq \frac{1}{15855}.$$

f) Avem $a = 7,\ b = 42,\ n = 6,\ k = 4$, deci probabilitatea cerută este

$$\widetilde{P}_{n,k} = \frac{C_7^4 \cdot C_{42}^2}{C_{49}^6} = \frac{35 \cdot 861}{C_{49}^6} = \frac{30135}{13983816} \simeq \frac{1}{464}.$$

□

Exemplul 2.6.3. O firmă a achiziționat 10 articole identice de la 3 depozite. Probabilitatea ca un articol să provină de la primul depozit este de 0,2, de la al doilea depozit de 0,3, iar de la al treilea depozit de 0,5. Care este probabilitatea ca, din cele 10 articole achiziționate, 5 să provină de la primul depozit, 3 de la al doilea şi 2 de la al treilea?

Soluție. Aplicând schema multinomială pentru

$$n = 10,\ r = 3,\ k_1 = 5,\ k_2 = 3,\ k_3 = 2,\ p_1 = 0{,}2,\ p_2 = 0{,}3,\ p_3 = 0{,}5,$$

obţinem că probabilitatea cerută este

$$P_{10;5,3,2} = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}5^2 \simeq 0{,}005.$$

□

Exemplul 2.6.4. La un concurs de tir, 3 jucători trag câte un foc asupra unei ținte. Probabilitățile de a nimeri ținta ale celor 3 jucători sunt egale cu 0,8, 0,5, respectiv 0,9.

a) Care este probabilitatea ca exact doi jucători să nimerească ținta?

b) Ştiind că un singur foc a nimerit ținta, care este probabilitatea ca acesta să fi fost tras de cel de-al treilea jucător?

Soluție. Considerăm evenimentele

$$A_i : \text{"jucătorul } i \text{ nimerește ținta"}, \ \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

$$B : \text{"exact doi jucători nimeresc ținta"},$$

$$C : \text{"exact un jucător nimerește ținta"}.$$

Conform datelor problemei, avem:

$$p_1 = P(A_1) = 0{,}8,\ p_2 = P(A_2) = 0{,}5,\ p_3 = P(A_3) = 0{,}9,$$

$$q_1 = P(\overline{A}_1) = 1 - p_1 = 0{,}2,\ q_2 = P(\overline{A}_2) = 1 - p_2 = 0{,}5,\ q_3 = P(\overline{A}_3) = 0{,}1.$$

a) Probabilitatea cerută este $P(B)$. Aplicând schema lui Poisson, această probabilitate este egală cu coeficientul lui x^2 din dezvoltarea polinomului

$$\begin{aligned}(p_1x + q_1)(p_2x + q_2)(p_3x + q_3) &= (0{,}8x + 0{,}2)(0{,}5x + 0{,}5)(0{,}9x + 0{,}1)\\ &= (0{,}5x + 0{,}5)(0{,}72x^2 + 0{,}26x + 0{,}02)\\ &= 0{,}36x^3 + 0{,}49x^2 + 0{,}14x + 0{,}01.\end{aligned}$$

Deci $P(B) = 0{,}49$.

b) Probabilitatea cerută este $P_C(A_3)$. Aplicând formula probabilității condiționate și utilizând faptul că evenimentele A_1, A_2 și A_3 sunt independente, avem

$$P_C(A_3) = \frac{P(C \cap A_3)}{P(C)} = \frac{P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3)}{P(C)} = \frac{P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)}{P(C)}.$$

Aplicând schema lui Poisson, probabilitatea $P(C)$ este egală cu coeficientul lui x din dezvoltarea polinomului de la punctul anterior, adică $P(C) = 0{,}14$. Deci $P_C(A_3) = \dfrac{0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}9}{0{,}14} = \dfrac{9}{14}$. □

Exemplul 2.6.5. Pentru un examen parțial la matematică, un student a avut de pregătit 60 de subiecte, dintre care 20 de analiză matematică, 25 de algebră şi 15 de probabilităţi. La examen, studentul primeşte 5 subiecte diferite. Care este probabilitatea ca din cele 5 subiecte primite două să fie de analiză matematică, două de algebră şi unul de probabilităţi?

Soluție. Aplicând schema hipergeometrică generalizată pentru

$$n = 5,\ r = 3,\ k_1 = 2,\ k_2 = 2,\ k_3 = 1,\ a_1 = 20,\ a_2 = 25,\ a_3 = 15,$$

obţinem că probabilitatea cerută este

$$\widetilde{P}_{5;2,2,1} = \frac{C_{20}^2 \cdot C_{25}^2 \cdot C_{15}^1}{C_{60}^5} = \frac{\dfrac{20!}{18! \cdot 2!} \cdot \dfrac{25!}{23! \cdot 2!} \cdot \dfrac{15!}{14! \cdot 1!}}{\dfrac{60!}{55! \cdot 5!}} \simeq 0{,}157.$$ □

Capitolul 3

Variabile aleatoare

3.1 Definiții și proprietăți

Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate.

Definiția 3.1.1. *O **variabilă aleatoare** (prescurtat **v.a.**) (**variabilă aleatoare numerică**) este o funcție $X : \Omega \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că*

$$X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{B},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

(unde $X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (-\infty, x]\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

Propoziția 3.1.1. *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare. Atunci pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x < y$ avem*

$$X^{-1}((-\infty, x)), X^{-1}([x, +\infty)), X^{-1}((x, +\infty)), X^{-1}(x), X^{-1}(\mathbb{R}) \in \mathcal{B},$$
$$X^{-1}([x, y]), X^{-1}((x, y)), X^{-1}([x, y)), X^{-1}((x, y]) \in \mathcal{B}.$$

Demonstrație. Avem $(-\infty, x) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x - \dfrac{1}{n}\right]$, deci

$$X^{-1}((-\infty, x)) = X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right]\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}\left(\left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right]\right) \in \mathcal{B}.$$

Analog se arată și celelalte apartenențe din enunț. □

Propoziția 3.1.2 (caracterizări echivalente ale variabilelor aleatoare). *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcție. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

1) X este o variabilă aleatoare;
2) $X^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{B}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
3) $X^{-1}([x, +\infty)) \in \mathcal{B}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
4) $X^{-1}((x, +\infty)) \in \mathcal{B}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
5) $X^{-1}([x, y]) \in \mathcal{B}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x < y$;
6) $X^{-1}((x, y)) \in \mathcal{B}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x < y$;
7) $X^{-1}([x, y)) \in \mathcal{B}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x < y$;
8) $X^{-1}((x, y]) \in \mathcal{B}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x < y$.

Demonstrație. 1) $\Rightarrow$ 2) Dacă X este o variabilă aleatoare, atunci conform propoziției anterioare are loc relația de la punctul 2).

2) $\Rightarrow$ 1) Presupunem adevărată relația de la punctul 2). Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $(-\infty, x] = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x + \dfrac{1}{n}\right)$, deci

$$X^{-1}((-\infty, x]) = X^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right)\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}\left(\left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right)\right) \in \mathcal{B},$$

ceea ce înseamnă că X este o variabilă aleatoare.

Analog se arată și celelalte echivalențe din enunț. $\square$

Definiția 3.1.2. *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare. Atunci pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x < y$ notăm evenimentele din definiția și propozițiile anterioare astfel:*

$$\begin{gathered}\{X = x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\},\\ \{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\},\ \{X < x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\},\\ \{X \geq x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq x\},\ \{X > x\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\},\\ \{X \in [x, y]\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in [x, y]\},\ \{X \in (x, y)\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (x, y)\},\\ \{X \in [x, y)\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (x, y]\},\ \{X \in (x, y]\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (x, y]\}.\end{gathered}$$

Probabilitățile acestor evenimente le notăm respectiv cu $P(X = x)$, $P(X \leq x)$, $\ldots$, $P(X \in (x, y])$.

Observația 3.1.1. În cele ce urmează vom utiliza și alte notații asemănătoare celor din definiția anterioară.

Propoziția 3.1.3. *Orice funcție constantă $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este o variabilă aleatoare.*

Demonstrație. Fie $c \in \mathbb{R}$ și $X(\omega) = c$, pentru orice $\omega \in \Omega$. Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \begin{cases} \Omega, & \text{dacă } c \leq x, \\ \emptyset, & \text{dacă } c > x, \end{cases}$$

deci $X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{B}$ și astfel X este o variabilă aleatoare. $\square$

Propoziția 3.1.4. *a) Dacă $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este o variabilă aleatoare și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci și funcția $g \circ X$ este o variabilă aleatoare.*

b) Dacă $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este o variabilă aleatoare și $a \in \mathbb{R}$, atunci și funcțiile $-X$, $|X|$, $X + a$ și aX sunt variabile aleatoare.

c) Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare astfel încât $X(\omega) \neq 0$ pentru orice $\omega \in \Omega$ și fie $a \in \mathbb{R}$. Atunci și funcția $\dfrac{a}{X}$ este o variabilă aleatoare.

Demonstrație. a) Fie $x \in \mathbb{R}$ arbitrar fixat. Avem

$$(g \circ X)^{-1}((-\infty, x)) = X^{-1}(g^{-1}((-\infty, x))).$$

Deoarece funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă, rezultă că mulțimea $g^{-1}((-\infty, x))$ este o mulțime deschisă, deci fie este vidă și atunci $(g \circ X)^{-1}((-\infty, x)) = X^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{B}$, fie este nevidă și atunci poate fi scrisă ca o reuniune cel mult numărabilă de intervale deschise și disjuncte două câte două:

$$g^{-1}((-\infty, x)) = \bigcup_{j \in J} I_j.$$

În acest caz avem

$$(g \circ X)^{-1}((-\infty, x)) = X^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} I_j\right) = \bigcup_{j\in J} X^{-1}(I_j),$$

deci conform Propoziției 3.1.1 rezultă că $(g\circ X)^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{B}$. Aplicând Propoziția 3.1.2 obținem că funcția $g \circ X$ este o variabilă aleatoare.

Afirmațiile de la punctele b) și c) sunt consecințe imediate ale afirmației de la punctul a). □

Propoziția 3.1.5. *a) Dacă $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sunt două variabile aleatoare, atunci și funcțiile $X + Y$, $X - Y$ și $X \cdot Y$ sunt variabile aleatoare.*

b) Dacă $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sunt două variabile aleatoare și $Y(\omega) \neq 0$ pentru orice $\omega \in \Omega$, atunci și funcția $\dfrac{X}{Y}$ este o variabilă aleatoare.

Demonstrație. Fie $Z = X + Y$ și fie $x \in \mathbb{R}$ arbitrar fixat. Pentru orice $\omega \in \Omega$ avem echivalențele

$$\begin{aligned} Z(\omega) < x &\Leftrightarrow X(\omega) < x - Y(\omega) \\ &\Leftrightarrow \exists\, q \in \mathbb{Q} \text{ a.î. } X(\omega) < q < x - Y(\omega) \\ &\Leftrightarrow \exists\, q \in \mathbb{Q} \text{ a.î. } X(\omega) < q \text{ și } Y(\omega) < x - q, \end{aligned}$$

deci

$$Z^{-1}((-\infty, x)) = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \left(X^{-1}((-\infty, q)) \cap Y^{-1}((-\infty, x - q))\right).$$

Folosind ipoteza că X și Y sunt variabile aleatoare și faptul că mulțimea $\mathbb{Q}$ este numărabilă, rezultă că $Z^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{B}$, deci conform Propoziției 3.1.2 obținem că funcția $Z = X + Y$ este o variabilă aleatoare.

Utilizând și Propoziția 3.1.4, rezultă că și funcțiile

$$X - Y = X + (-Y),\ X \cdot Y = \frac{1}{4}\left[(X + Y)^2 - (X - Y)^2\right],\ \frac{X}{Y} = X \cdot \frac{1}{Y}$$

sunt, de asemenea, variabile aleatoare. □

Definiția 3.1.3. *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare.* ***Funcția de repartiție a v.a.*** *X este funcția*

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1],\ F_X(x) = P(X \leq x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propoziția 3.1.6 (de caracterizare a funcțiilor de repartiție). *O funcție de repartiție a unei v.a. este o funcție $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ caracterizată de următoarele trei proprietăți:*

1) $F(x) \leq F(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x < y$ (adică F este crescătoare);

2) $\lim\limits_{x\searrow a} F(x) = F(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$ (adică F este continuă la dreapta);

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Demonstrație. Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare și $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $F_X(x) = P(X \leq x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, funcția de repartiție a v.a. X.

1) Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, atunci $\{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\}$, deci

$$F(x) = P(X \leq x) \leq P(X \leq y) = F(y).$$

2) Fie $a \in \mathbb{R}$ arbitrar fixat. Pentru orice șir strict descrescător $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ avem

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\} = \{X \leq a\}$$

și
$$\{X \leq x_1\} \supseteq \{X \leq x_2\} \supseteq \ldots \supseteq \{X \leq x_n\} \supseteq \{X \leq x_{n+1}\} \supseteq \ldots .$$
Conform Propoziției 2.2.4 rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P(X \leq x_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X \leq x_n\}\right) = P(X \leq a),$$

adică $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(a)$. Rezultă că $\lim_{x\searrow a} F(x) = F(a)$.

3) Pentru orice șir descrescător $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ avem

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X \leq x_n\} = \emptyset$$

și
$$\{X \leq x_1\} \supseteq \{X \leq x_2\} \supseteq \ldots \supseteq \{X \leq x_n\} \supseteq \{X \leq x_{n+1}\} \supseteq \ldots .$$
Conform Propoziției 2.2.4 rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P(X \leq x_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X \leq x_n\}\right) = P(\emptyset) = 0,$$

adică $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0$. Rezultă că $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

De asemenea, pentru orice șir crescător $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ avem

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X \leq x_n\} = \Omega$$

și
$$\{X \leq x_1\} \subseteq \{X \leq x_2\} \subseteq \ldots \subseteq \{X \leq x_n\} \subseteq \{X \leq x_{n+1}\} \subseteq \ldots .$$
Conform Propoziției 2.2.4 rezultă acum că

$$\lim_{n\to\infty} P(X \leq x_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X \leq x_n\}\right) = P(\Omega) = 1,$$

adică $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = 1$. Rezultă că $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Reciproc, fie $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ o funcție ce verifică proprietățile 1), 2) și 3). Luând $\Omega = (0,1)$, $\mathcal{B} =$ intersecția tuturor corpurilor boreliene pe Ω ce conțin intervalele de forma $(a,b]$ cu $a,b \in \Omega$, $a < b$ și $P((a,b]) = b - a$ (*măsura Lebesgue*), atunci funcția $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definită prin

$$X(\omega) = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) < \omega\},\ \forall\, \omega \in \Omega$$

este o variabilă aleatoare având drept funcție de repartiție chiar funcția F. □

Propoziția 3.1.7. *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare și fie F_X funcția sa de repartiție. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x < y$. Atunci:*

1. $P(X = x) = F_X(x) - \lim_{t\nearrow x} F_X(t)$;

2. $P(X \leq x) = F_X(x)$;

3. $P(X < x) = \lim\limits_{t \nearrow x} F_X(t)$;

4. $P(X \geq x) = 1 - \lim\limits_{t \nearrow x} F_X(t)$;

5. $P(X > x) = 1 - F_X(x)$;

6. $P(X \in [x, y]) = F_X(y) - \lim\limits_{t \nearrow x} F_X(t)$;

7. $P(X \in (x, y)) = \lim\limits_{t \nearrow y} F_X(t) - F_X(x)$;

8. $P(X \in [x, y)) = \lim\limits_{t \nearrow y} F_X(t) - \lim\limits_{t \nearrow x} F_X(t)$;

9. $P(X \in (x, y]) = F_X(y) - F_X(x)$.

Demonstrație. Egalitatea de la punctul 2 rezultă direct din definiția funcției de repartiție.

Pentru orice șir strict crescător $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = x$ avem

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq t_n\} = \{X < x\}$$

și

$$\{X \leq t_1\} \subseteq \{X \leq t_2\} \subseteq \ldots \subseteq \{X \leq t_n\} \subseteq \{X \leq t_{n+1}\} \subseteq \ldots.$$

Conform Propoziției 2.2.4 rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} F_X(t_n) = \lim_{n\to\infty} P(X \leq t_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq t_n\}\right) = P(X < x),$$

deci $\lim\limits_{t \nearrow x} F_X(t) = P(X < x)$, adică egalitatea de la punctul 3.

Celelalte egalități din enunț sunt consecințe imediate ale celor de la punctele 2 și 3:

$$P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F_X(x) - \lim_{t \nearrow x} F_X(t);$$
$$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - \lim_{t \nearrow x} F_X(t);$$
$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x);$$
$$P(X \in [x, y]) = P(X \leq y) - P(X < x) = F_X(y) - \lim_{t \nearrow x} F_X(t);$$
$$P(X \in (x, y)) = P(X < y) - P(X \leq x) = \lim_{t \nearrow y} F_X(t) - F_X(x);$$
$$P(X \in [x, y)) = P(X < y) - P(X < x) = \lim_{t \nearrow y} F_X(t) - \lim_{t \nearrow x} F_X(t);$$
$$P(X \in (x, y]) = P(X \leq y) - P(X \leq x) = F_X(y) - F_X(x).$$

□

3.2 Variabile aleatoare independente

Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate.

Definiția 3.2.1. *Fie variabilele aleatoare $X_1, X_2, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se numesc **v.a. independente** dacă evenimentele $\{X_1 \leq x_1\}, \{X_2 \leq x_2\}, \ldots, \{X_n \leq x_n\}$ sunt independente pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.*

Propoziția 3.2.1. *Fie variabilele aleatoare $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Atunci $X_1, \ldots, X_n$ sunt independente dacă și numai dacă pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea*

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \cdot P(X_2 \leq x_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq x_n). \tag{3.2.1}$$

Demonstrație. Implicația directă este imediată, conform definițiilor v.a. independente și a evenimentelor independente.

Demonstrăm acum implicația inversă. Presupunem că are loc egalitatea (3.2.1), pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Trebuie să arătam că această egalitate are loc și pentru orice submulțime de cel puțin două evenimente a mulțimii $\{\{X_1 \leq x_1\}, \{X_2 \leq x_2\}, \ldots, \{X_n \leq x_n\}\}$. Este suficient să o demonstrăm doar pentru submulțimea $\{\{X_2 \leq x_2\}, \ldots, \{X_n \leq x_n\}\}$, deoarece repetând procedeul se obține succesiv egalitatea pentru submulțimi de $n-2, n-3, \ldots, 2$ evenimente.

Pentru orice șir crescător $(x_1^{(m)})_{m\in\mathbb{N}^*}$ cu $\lim\limits_{m\to\infty} x_1^{(m)} = +\infty$ avem

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \{X_1 \leq x_1^{(m)}, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n\} = \{X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n\},$$

iar

$$\{X_1 \leq x_1^{(m)}, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n\} \subseteq \{X_1 \leq x_1^{(m+1)}, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n\}, \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Conform Propoziției 2.2.4, relației (3.2.1) și Proprietății 3) din Propoziția 3.1.6 rezultă că

$$\begin{aligned} P(X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n) &= \lim_{m\to\infty} P(X_1 \leq x_1^{(m)}, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n) \\ &= \lim_{m\to\infty} P(X_1 \leq x_1^{(m)}) \cdot P(X_2 \leq x_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq x_n) \\ &= P(X_2 \leq x_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq x_n), \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația. □

Propoziția 3.2.2 (caracterizări echivalente ale independenței variabilelor aleatoare). *Fie variabilele aleatoare $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. *$X_1, \ldots, X_n$ sunt independente;*

2. $P(X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n) = P(X_1 < x_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n < x_n)$, $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$;

3. $P(X_1 \geq x_1, \ldots, X_n \geq x_n) = P(X_1 \geq x_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \geq x_n)$, $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$;

4. $P(X_1 > x_1, \ldots, X_n > x_n) = P(X_1 > x_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n > x_n)$, $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$;

5. $P(X_1 \in [x_1, y_1], \ldots, X_n \in [x_n, y_n]) = P(X_1 \in [x_1, y_1]) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in [x_n, y_n])$, $\forall x_1, y_1 \ldots, x_n, y_n \in \mathbb{R}$ *a.î.* $x_1 < y_1, \ldots, x_n < y_n$;

6. $P(X_1 \in (x_1, y_1), \ldots, X_n \in (x_n, y_n)) = P(X_1 \in (x_1, y_1)) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in (x_n, y_n))$, $\forall x_1, y_1 \ldots, x_n, y_n \in \mathbb{R}$ *a.î.* $x_1 < y_1, \ldots, x_n < y_n$;

7. $P(X_1 \in [x_1, y_1), \ldots, X_n \in [x_n, y_n)) = P(X_1 \in [x_1, y_1)) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in [x_n, y_n))$, $\forall x_1, y_1 \ldots, x_n, y_n \in \mathbb{R}$ *a.î.* $x_1 < y_1, \ldots, x_n < y_n$;

8. $P(X_1 \in (x_1, y_1], \ldots, X_n \in (x_n, y_n]) = P(X_1 \in (x_1, y_1]) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in (x_n, y_n])$, $\forall x_1, y_1 \ldots, x_n, y_n \in \mathbb{R}$ *a.î.* $x_1 < y_1, \ldots, x_n < y_n$.

Demonstrație. 1) $\Rightarrow$ 8) Fie $X_1, \ldots, X_n$ v.a. independente, adică pentru orice $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea (3.2.1). Demonstrăm că pentru orice $k \in \{0, \ldots, n\}$ are loc egalitatea

$$\begin{aligned} &P(X_1 \in (x_1, y_1], \ldots, X_k \in (x_k, y_k], X_{k+1} \leq y_{k+1} \ldots, X_n \leq y_n) \\ &\quad = P(X_1 \in (x_1, y_1]) \cdot \ldots \cdot P(X_k \in (x_k, y_k]) \cdot P(X_{k+1} \leq y_{k+1}) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq y_n), \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

pentru orice $x_1, y_1 \ldots, x_n, y_n \in \mathbb{R}$ a.î. $x_1 < y_1, \ \ldots, x_n < y_n$, prin inducție după k.

Pentru $k = 0$ egalitatea devine $P(X_1 \leq y_1, \ldots, X_n \leq y_n) = P(X_1 \leq y_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq y_n)$ și este adevărată conform (3.2.1).

Presupunem acum (3.2.2) adevărată pentru k și o demonstrăm pentru $k+1$. Avem

$$\begin{aligned} &P(X_1 \in (x_1, y_1], \ldots, X_{k+1} \in (x_{k+1}, y_{k+1}], X_{k+2} \leq y_{k+2} \ldots, X_n \leq y_n) \\ &\quad = P(X_1 \in (x_1, y_1], \ldots, X_k \in (x_k, y_k], X_{k+1} \leq y_{k+1}, X_{k+2} \leq y_{k+2} \ldots, X_n \leq y_n) \\ &\qquad - P(X_1 \in (x_1, y_1], \ldots, X_k \in (x_k, y_k], X_{k+1} \leq x_{k+1}, X_{k+2} \leq y_{k+2} \ldots, X_n \leq y_n) \\ &\quad = P(X_1 \in (x_1, y_1]) \cdot \ldots \cdot P(X_k \in (x_k, y_k]) \cdot P(X_{k+1} \leq y_{k+1}) \cdot P(X_{k+2} \leq y_{k+2}) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq y_n) \\ &\qquad - P(X_1 \in (x_1, y_1]) \cdot \ldots \cdot P(X_k \in (x_k, y_k]) \cdot P(X_{k+1} \leq x_{k+1}) \cdot P(X_{k+2} \leq y_{k+2}) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq y_n) \\ &\quad = P(X_1 \in (x_1, y_1]) \cdot \ldots \cdot P(X_k \in (x_k, y_k]) \cdot (P(X_{k+1} \leq y_{k+1}) - P(X_{k+1} \leq x_{k+1})) \cdot \\ &\qquad \cdot P(X_{k+2} \leq y_{k+2}) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq y_n) \\ &\quad = P(X_1 \in (x_1, y_1]) \cdot \ldots \cdot P(X_k \in (x_k, y_k]) \cdot P(X_{k+1} \in (x_{k+1}, y_{k+1}]) \cdot \\ &\qquad \cdot P(X_{k+2} \leq y_{k+2}) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq y_n), \end{aligned}$$

deci demonstrația prin inducție este încheiată. Luând $k = n$ în (3.2.2) obținem egalitatea de la punctul 8.

1) $\Rightarrow$ 8) Fie acum $X_1, \ldots, X_n$ v.a. astfel încât are loc egalitatea de la punctul 8. Fie $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ și fie

Pentru orice șir descrescător $(t_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ cu $\lim\limits_{m \to \infty} t_m = -\infty$ avem

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \{X_1 \in (t_m, x_1], \ldots, X_n \in (t_m, x_n]\} = \{X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n\},$$

iar

$$\{X_1 \in (t_m, x_1], \ldots, X_n \in (t_m, x_n]\} \subseteq \{X_1 \in (t_{m+1}, x_1], \ldots, X_n \in (t_{m+1}, x_n]\}, \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Conform Propoziției 2.2.4, egalității de la punctul 8 și Propoziției 3.1.6 rezultă că

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) &= \lim_{m \to \infty} P(X_1 \in (t_{m+1}, x_1], \ldots, X_n \in (t_{m+1}, x_n]) \\ &= \lim_{m \to \infty} [P(X_1 \in (t_{m+1}, x_1]) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in (t_{m+1}, x_n])] \\ &= \lim_{m \to \infty} [(P(X_1 \leq x_1) - P(X_1 \leq t_m)) \cdot \ldots \cdot (P(X_n \leq x_n) - P(X_n \leq t_m))] \\ &= P(X_1 \leq x_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq x_n), \end{aligned}$$

deci $X_1, \ldots, X_n$ sunt independente.

Analog se arată și celelalte echivalențe din enunț. □

3.3 Variabile aleatoare discrete

Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate.

Definiția 3.3.1. *Dacă $X(\Omega)$ este o mulțime discretă (finită sau numărabilă), atunci X se numește **v.a. discretă (finită (simplă)**, respectiv **numărabilă**).*

Definiția 3.3.2. *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare discretă. Funcția*

$$p_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p_X(x) = P(X = x),\ \forall x \in \mathbb{R}$$

*se numește **funcția masă de probabilitate (masa)** a v.a. X.*

Definiția 3.3.3. *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare finită și $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm*

$$p_i = P(X = x_i),\ \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

V.a. X poate fi reprezentată sub forma

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \textit{(valorile v.a. } X\textit{)}, \\ \textit{(probabilitățile acestor valori)}, \end{array}$$

*această matrice numindu-se **repartiția (de probabilitate a) lui** X sau **distribuția (de probabilitate a) lui** X.*

Observația 3.3.1. Dacă X este o v.a. finită având repartiția

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

unde $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, atunci funcția de repartiție a v.a. X este funcția

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1],\ F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < x_1, \\ p_1, & \text{dacă } x_1 \le x < x_2, \\ p_1 + p_2, & \text{dacă } x_2 \le x < x_3, \\ \dots & \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}, & \text{dacă } x_{n-1} \le x < x_n, \\ 1, & \text{dacă } x \ge x_n. \end{cases}$$

Propoziția 3.3.1. *O repartiție $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ a unei v.a. finite este caracterizată de următoarele două proprietăți:*

1) $p_i \ge 0,\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$;

2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Demonstrație. Fie X o v.a. finită având repartiția din enunț. Atunci $p_i = P(X = x_i) \ge 0$, pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$ și

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X = x_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

(evenimentele reunite fiind disjuncte două câte două).

Reciproc fie o matrice ca în enunț, ce verifică proprietățile 1) și 2). Presupunem că $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Atunci funcția F definită în observația anterioară verifică proprietățile din Propoziția 3.1.6, deci este funcția de repartiție pentru o v.a. X, construită în demonstrația acelei propoziții. Din construcția v.a. X (conform demonstrației amintite) pentru funcția F (definită în observația anterioară) rezultă că $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, deci X este o v.a. finită, iar repartiția lui X este chiar repartiția dată. $\square$

Definiția 3.3.4. *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare numărabilă și $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}^*\}$. Notăm*

$$p_i = P(X = x_i),\ \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

V.a. X poate fi reprezentată sub forma

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (\textit{valorile v.a. } X), \\ (\textit{probabilitățile acestor valori}), \end{matrix}$$

*numită **repartiția (de probabilitate a) lui** X sau **distribuția (de probabilitate a) lui** X.*

Observația 3.3.2. Dacă X este o v.a. numărabilă având repartiția

$$X : \begin{pmatrix} \dots & x_{n-1} & x_n & \dots \\ \dots & p_{n-1} & p_n & \dots \end{pmatrix},$$

unde $\dots < x_{n-1} < x_n < \dots$, atunci funcția de repartiție a v.a. X este funcția

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1],\ F_X(x) = \begin{cases} \dots \\ \dots + p_{n-2} + p_{n-1}, & \text{dacă } x_{n-1} \leq x < x_n, \\ \dots \end{cases}$$

Analog Propoziției 3.3.1 se demonstrează următorul rezultat.

Propoziția 3.3.2. *O repartiție $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$ a unei v.a. numărabile este caracterizată de următoarele două proprietăți:*

1) $p_i \geq 0,\ \forall i \in \mathbb{N}^*$;

2) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$

Propoziția 3.3.3. *Fie $X_1, X_2, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. discrete, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Atunci $X_1, X_2, \dots, X_n$ sunt independente dacă și numai dacă pentru orice $x_1 \in X_1(\Omega), x_2 \in X_2(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$ are loc egalitatea*

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n = x_n).$$

Demonstrație. "$\Rightarrow$" Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a. discrete independente și fie $x_1 \in X_1(\Omega)$, $x_2 \in X_2(\Omega)$, $\dots$, $x_n \in X_n(\Omega)$. Deoarece v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sunt discrete, rezultă că există $\varepsilon > 0$ a.î. pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$ să avem

$$(x_i - \varepsilon, x_i) \cap X_i(\Omega) = \emptyset,\ \text{adică } \{X_i \in (x_i - \varepsilon, x_i]\} = \{X_i = x_i\}.$$

Conform Propoziției 3.2.2 (punctul 8) rezultă atunci că

$$\begin{aligned} &P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \\ &\quad = P(X_1 \in (x_1 - \varepsilon, x_1], X_2 \in (x_2 - \varepsilon, x_2], \dots, X_n \in (x_n - \varepsilon, x_n]) \\ &\quad = P(X_1 \in (x_1 - \varepsilon, x_1]) \cdot P(X_2 \in (x_2 - \varepsilon, x_2]) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in (x_n - \varepsilon, x_n]) \\ &\quad = P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n = x_n). \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" Presupunem că pentru orice $x_1 \in X_1(\Omega), x_2 \in X_2(\Omega), \ldots, x_n \in X_n(\Omega)$ are loc egalitatea (3.3.3). Avem

$$\begin{aligned}
P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) &= P\left(\bigcup_{\substack{y_1 \in X_1(\Omega)\cap(-\infty,x_1] \\ \cdots \\ y_n \in X_n(\Omega)\cap(-\infty,x_n]}} \{X_1 = y_1, \ldots, X_n = y_n\} \right) \\
&= \sum_{\substack{y_1 \in X_1(\Omega)\cap(-\infty,x_1] \\ \cdots \\ y_n \in X_n(\Omega)\cap(-\infty,x_n]}} P(X_1 = y_1, \ldots, X_n = y_n) \\
&= \sum_{\substack{y_1 \in X_1(\Omega)\cap(-\infty,x_1] \\ \cdots \\ y_n \in X_n(\Omega)\cap(-\infty,x_n]}} (P(X_1 = y_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n = y_n)) \\
&= \left(\sum_{y_1 \in X_1(\Omega)\cap(-\infty,x_1]} P(X_1 = y_1) \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{y_n \in X_n(\Omega)\cap(-\infty,x_n]} P(X_n = y_n) \right) \\
&= P\left(\bigcup_{y_1 \in X_1(\Omega)\cap(-\infty,x_1]} \{X_1 = y_1\} \right) \cdot \ldots \cdot P\left(\bigcup_{y_n \in X_n(\Omega)\cap(-\infty,x_n]} \{X_n = y_n\} \right) \\
&= P(X_1 \leq x_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq x_n),
\end{aligned}$$

deci $X_1, \ldots, X_n$ sunt independente. □

Luând $n = 2$ în propoziția anterioară, obținem următorul rezultat.

Corolarul 3.3.1. *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ și $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ două variabile aleatoare discrete. Atunci X și Y sunt independente dacă și numai dacă*

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y), \ \forall x \in X(\Omega), \ \forall y \in Y(\Omega).$$

Exemplul 3.3.1. Fie X valoarea obținută la aruncarea unui zar și Y suma valorilor obținute la aruncarea a două zaruri. Atunci X este o v.a. finită luând valorile $1, 2, \ldots, 6$ cu probabilitățile $p_i = P(X = i) = \frac{1}{6}$, $\forall i \in \{1, \ldots, 6\}$, deci are repartiția

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Funcția de repartiție a v.a. X este funcția

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \ F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 1, \\ \frac{1}{6}, & \text{dacă } 1 \leq x < 2, \\ \frac{2}{6}, & \text{dacă } 2 \leq x < 3, \\ \frac{3}{6}, & \text{dacă } 3 \leq x < 4, \\ \frac{4}{6}, & \text{dacă } 4 \leq x < 5, \\ \frac{5}{6}, & \text{dacă } 5 \leq x < 6, \\ 1, & \text{dacă } x \geq 6. \end{cases}$$

Fie X_1 și X_2 valorile obținute la aruncarea celor două zaruri. Evident, X_1 și X_2 sunt v.a. independente ce au aceeași repartiție ca și X. Astfel $Y = X_1 + X_2$ este o v.a. luând valorile $2, 3, \dots, 12$ cu probabilitățile

$$\begin{aligned}
P(Y=2) &= P(X_1=1, X_2=1) = P(X_1=1)P(X_2=1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36},\\
P(Y=3) &= P(X_1=1, X_2=2 \text{ sau } X_1=2, X_2=1)\\
&= P(X_1=1, X_2=2) + P(X_1=2, X_2=1)\\
&= P(X_1=1)P(X_2=2) + P(X_1=2)P(X_2=1)\\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{36},\\
P(Y=4) &= P(X_1=1, X_2=3 \text{ sau } X_1=2, X_2=2 \text{ sau } X_1=3, X_2=1)\\
&= P(X_1=1, X_2=3) + P(X_1=2, X_2=2) + P(X_1=3, X_2=1)\\
&= P(X_1=1)P(X_2=3) + P(X_1=2)P(X_2=2) +\\
&\quad + P(X_1=3)P(X_2=1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{3}{36},\\
&\dots\\
P(Y=12) &= P(X_1=6, X_2=6) = P(X_1=6)P(X_2=6) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}.
\end{aligned}$$

Obținem că Y are repartiția

$$Y : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

3.4 Variabile aleatoare continue

Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate.

Definiția 3.4.1. *O variabilă aleatoare $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se numește **v.a. continuă** dacă funcția sa de repartiție F_X este continuă.*

Propoziția 3.4.1. *O variabilă aleatoare $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este v.a. continuă dacă și numai dacă*

$$P(X = x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstrație. Conform Propoziției 3.1.6 funcția de repartiție F_X este continuă la dreapta, deci utilizând Propoziția 3.1.7 avem echivalențele:

$$\begin{aligned}
F_X \text{ este continuă } &\Leftrightarrow\ F_X \text{ este continuă la stânga}\\
&\Leftrightarrow F_X(x) - \lim_{t \nearrow x} F_X(t) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\\
&\Leftrightarrow P(X = x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

□

Definiția 3.4.2. *O mulțime M de numere reale se numește **mulțime neglijabilă** (sau **mulțime de măsură Lebesgue nulă**) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime numărabilă de intervale deschise $\{(a_i, b_i) \mid i \in \mathbb{N}^*\}$ ($a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$) astfel încât*

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \ \text{ și } \ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon.$$

Observația 3.4.1. Orice mulțime cel mult numărabilă de numere reale este o mulțime neglijabilă.

Definiția 3.4.3. *O variabilă aleatoare continuă $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se numește* ***v.a. absolut continuă*** *dacă funcția sa de repartiție F_X este derivabilă și cu derivata continuă, cu excepția unei mulțimi neglijabile de puncte. În acest caz, funcția*

$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_X(x) = F_X'(x)$$

se numește ***densitatea de repartiție a v.a.*** *X.*

Propoziția 3.4.2. *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. absolut continuă având densitatea de repartiție f. Atunci funcția de repartiție a v.a. X este*

$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,\ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{3.4.1}$$

unde

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{x} f(t)dt. \tag{3.4.2}$$

Demonstrație. Deoarece $F_X'(x) = f_X(x)$ (cu excepția unei mulțimi neglijabile de puncte), rezultă că

$$\int_{a}^{x} f(t)dt = F_X(x) - F_X(a),\ \forall a, x \in \mathbb{R},\ a \le x.$$

Luând $a \to -\infty$ și utilizând proprietatea 3) din Propoziția 3.1.6 obținem egalitatea (3.4.1). □

Observația 3.4.2. Integrala $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ definită prin relația (3.4.2) se numește **integrala improprie a funcției f pe intervalul** $(-\infty, x]$.

Propoziția 3.4.3 (de caracterizare a densităților de repartiție). *O densitate de repartiție a unei v.a. absolut continue este o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă, cu excepția unei mulțimi neglijabile de puncte, caracterizată de următoarele două proprietăți:*

1) $f(x) \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$,

unde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx. \tag{3.4.3}$$

Demonstrație. Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare absolut continuă având funcția de repartiție F și densitatea de repartiție f, deci $f = F'$ este funcție continuă (cu excepția unei mulțimi neglijabile de puncte) și $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

1) Conform Propoziției 3.1.6, funcția F este crescătoare, deci $f(x) = F'(x) \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

2) Utilizând proprietățile integralei și Propoziția 3.1.6 avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) = 1.$$

Reciproc fie o funcție f ca în enunț, ce verifică proprietățile 1) și 2). Atunci funcția

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

verifică proprietățile din Propoziția 3.1.6, deci este funcția de repartiție pentru o v.a. X, construită în demonstrația acelei propoziții. Deoarece $F'(x) = f(x)$ (cu excepția unei mulțimi neglijabile de puncte), rezultă că X este o v.a. absolut continuă având ca densitate de repartiție chiar funcția dată f. □

Observația 3.4.3. Integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ definită prin relația (3.4.3) se numește **integrala improprie a funcției f pe intervalul** $(-\infty, +\infty)$.

Propoziția 3.4.4. *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. absolut continuă având funcția de repartiție F_X și densitatea de repartiție f. Fie $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$. Atunci*

1. $P(X = x) = 0$;
2. $P(X \leq x) = P(X < x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$;
3. $P(X \geq x) = P(X > x) = 1 - F_X(x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)dt$, *unde*
$$\int_{x}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{a\to+\infty} \int_{x}^{a} f(t)dt; \tag{3.4.4}$$
4. $P(X \in [x, y]) = P(X \in (x, y)) = P(X \in [x, y)) = P(X \in (x, y]) =$
$= F_X(y) - F_X(x) = \int_{x}^{y} f(t)dt$;

Demonstrație. Utilizând Propozițiile 3.1.7, 3.4.1 și 3.4.4, precum și proprietățile integralei avem:

$$\begin{aligned}
P(X = x) &= 0;\\
P(X < x) &= P(X \leq x) - P(X = x) = P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt;\\
P(X \geq x) &= P(X > x) + P(X = x) = P(X > x) = 1 - F_X(x)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt - \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{x}^{+\infty} f(t)dt;\\
P(X \in [x, y]) &= P(X \in (x, y)) = P(X \in [x, y)) = P(X \in (x, y]) = F_X(y) - F_X(x)\\
&= \int_{-\infty}^{y} f(t)dt - \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{x}^{y} f(t)dt.
\end{aligned}$$

□

Observația 3.4.4. Integrala $\int_{x}^{+\infty} f(t)dt$ definită prin relația (3.4.4) se numește **integrala improprie a funcției f pe intervalul** $[x, +\infty)$.

Următorul rezultat este o consecință a propoziției anterioare și a proprietăților integralei.

Propoziția 3.4.5. *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o v.a. absolut continuă având densitatea de repartiție f. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $X^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Atunci*
$$P(X \in A) = \int_{A} f(x)dx.$$

Exemplul 3.4.1. Considerăm experimentul constând în tragerea la o țintă circulară de rază dată r, $r > 0$. Presupunem că raza r este suficient de mare, încât ținta este întotdeauna atinsă, și că orice punct al țintei are aceeași șansă de a fi atins. Notăm cu O centrul țintei.

Fie X distanța de la punctul unde este atinsă ținta la centrul O al acesteia. Atunci X este o variabilă aleatoare continuă având imaginea (mulțimea valorilor) intervalul $[0, r]$.

Calculăm funcția de repartiție a v.a. X. Pentru orice $x \in (0, r]$, avem

$$P(X \leq x) = \frac{\mathcal{A}(\mathcal{C}(O,x))}{\mathcal{A}(\mathcal{C}(O,r))} = \frac{\pi \cdot x^2}{\pi \cdot r^2} = \frac{x^2}{r^2},$$

unde $\mathcal{A}(\mathcal{C}(O,r))$ reprezintă aria cercului de centru O și rază r, deci funcția de repartiție a v.a. X este

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq 0, \\ \dfrac{x^2}{r^2}, & \text{dacă } x \in (0,r), \\ 1, & \text{dacă } x \geq r. \end{cases}$$

Evident,

$$F'_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq 0, \\ \dfrac{2x}{r^2}, & \text{dacă } x \in (0,r), \\ 0, & \text{dacă } x > r. \end{cases}$$

Funcția F_X este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{r\}$ (adică cu excepția punctului r, deci cu excepția unei mulțimi neglijabile de puncte) și cu derivata continuă, deci X este o v.a. absolut continuă având densitatea de repartiție

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{r^2}, & \text{dacă } x \in (0,r), \\ 0, & \text{dacă } x \notin (0,r) \end{cases}$$

(am definit $f_X(r) = 0$, dar la fel de bine puteam să definim $f_X(r) = a$, cu a număr real arbitrar!).

Să calculăm acum probabilitatea ca ținta să fie atinsă în interiorul coroanei circulare cuprinsă între cercurile cu centrele în O și de raze $\frac{r}{3}$ și $\frac{2r}{3}$, adică $P\left(X \in \left(\frac{r}{3}, \frac{2r}{3}\right)\right)$.

Utilizând funcția de repartiție avem

$$\begin{aligned} P\left(X \in \left(\frac{r}{3}, \frac{2r}{3}\right)\right) &= P\left(\frac{r}{3} < X < \frac{2r}{3}\right) = P\left(X < \frac{2r}{3}\right) - P\left(X \leq \frac{r}{3}\right) \\ &= F_X\left(\frac{2r}{3}\right) - F_X\left(\frac{r}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

O altă metodă de calcul se obține utilizând densitatea de repartiție:

$$P\left(X \in \left(\frac{r}{3}, \frac{2r}{3}\right)\right) = \int_{\frac{r}{3}}^{\frac{2r}{3}} f_X(x)dx = \frac{2}{r^2}\int_{\frac{r}{3}}^{\frac{2r}{3}} x dx = \left.\frac{x^2}{r^2}\right|_{\frac{r}{3}}^{\frac{2r}{3}} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

Exemplul 3.4.2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} a|x|, & \text{dacă } x \in [-1,3], \\ 0, & \text{dacă } x \notin [-1,3]. \end{cases}$$

a) Să se determine valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția f este densitatea de repartiție a unei v.a. continue X.

b) Pentru valoarea lui a găsită la punctul anterior, să se calculeze funcția de repartiție a v.a. X și probabilitatea ca X să aparțină intervalului $[1,2]$.

Soluție. a) Conform Propoziției 3.4.3, funcția f este densitate de repartiție dacă și numai dacă

$$f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \text{și} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Evident, condiția $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, este echivalentă cu $a \geq 0$. Avem

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-1}^{3} a|x|dx = a\int_{-1}^{0}(-x)dx + a\int_{0}^{3} xdx \\ &= -\left.\frac{ax^2}{2}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{ax^2}{2}\right|_{0}^{3} = \frac{a}{2} + \frac{9a}{2} = 5a.\end{aligned}$$

Astfel, $5a = 1$, deci $a = \dfrac{1}{5}$.

b) Conform punctului anterior, v.a. X are densitatea de repartiție

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{5}, & \text{dacă } x \in [-1,3], \\ 0, & \text{dacă } x \notin [-1,3]. \end{cases}$$

Conform Propoziției 3.4.2, funcția de repartiție a v.a. X este

$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq -1, \\ \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{|t|}{5}dt, & \text{dacă } x \in (-1,3], \\ 1, & \text{dacă } x > 3. \end{cases}$$

Pentru $x \in (-1,0]$ avem $\displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{|t|}{5}dt = \frac{1}{5}\int_{-1}^{x}(-t)dt = -\left.\frac{t^2}{10}\right|_{-1}^{x} = \frac{1-x^2}{10}$.

Pentru $x \in (0,3]$ avem

$$\int_{-1}^{x} \frac{|t|}{5}dt = \frac{1}{5}\int_{-1}^{0}(-t)dt + \frac{1}{5}\int_{0}^{x} tdt = -\left.\frac{t^2}{10}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{t^2}{10}\right|_{0}^{x} = \frac{1+x^2}{10}.$$

Deci

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq -1, \\ \dfrac{1-x^2}{10}, & \text{dacă } x \in (-1,0], \\ \dfrac{1+x^2}{10}, & \text{dacă } x \in (0,3], \\ 1, & \text{dacă } x > 3. \end{cases}$$

Probabilitatea ca X să aparțină intervalului $[1,2]$ este

$$\begin{aligned}P(X \in [1,2]) &= P(1 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X < 1) \\ &= F_X(2) - F_X(1) = \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{3}{10}.\end{aligned}$$

O altă metodă de calcul se obține aplicând Propoziția 3.4.4:

$P(X \in [1,2]) = \displaystyle\int_{1}^{2} f(x)dx = \frac{1}{5}\int_{1}^{2} xdx = \left.\frac{x^2}{10}\right|_{1}^{2} = \frac{4}{10} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10}.$ □

3.5 Variabile aleatoare multidimensionale

Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate.

Definiția 3.5.1. *Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabile aleatoare, $n \geq 2$. Vectorul $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se numește **vector aleator** n**-dimensional** sau **variabilă aleatoare** n**-dimensională de componente** $X_1, X_2, \ldots, X_n$. **Funcția de repartiție a v.a.** X este funcția*

$$F_X : \mathbb{R}^n \to [0,1],\ F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n),\ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

*Funcția $F_X = F_{(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$ se numește și **funcția de repartiție comună a v.a.** $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, funcția de repartiție F_{X_i} a v.a. X_i se numește și **funcția de repartiție marginală a lui** X **în raport cu componenta** X_i.*

Propoziția 3.5.1 (formula de calcul a funcțiilor de repartiție marginale). *În contextul definiției anterioare, pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ avem*

$$F_{X_i}(x_i) = \lim_{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \to +\infty} F_X(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n),\ \forall x_i \in \mathbb{R}.$$

Demonstrație. Pentru orice șiruri crescătoare $(x_j^{(m)})_{m \in \mathbb{N}^*}$ cu $\lim\limits_{m \to \infty} x_j^{(m)} = +\infty$ pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ avem

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \{X_1 \leq x_1^{(m)}, \ldots, X_{i-1} \leq x_{i-1}^{(m)}, X_{i+1} \leq x_{i+1}^{(m)}, \ldots, X_n \leq x_1^{(m)}\} = \{X_i \leq x_i\},$$

iar

$$\begin{aligned} &\{X_1 \leq x_1^{(m)}, \ldots, X_{i-1} \leq x_{i-1}^{(m)}, X_{i+1} \leq x_{i+1}^{(m)}, \ldots, X_n \leq x_1^{(m)}\} \\ &\quad \subseteq \{X_1 \leq x_1^{(m+1)}, \ldots, X_{i-1} \leq x_{i-1}^{(m+1)}, X_{i+1} \leq x_{i+1}^{(m+1)}, \ldots, X_n \leq x_1^{(m+1)}\}, \forall m \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Utilizând Propoziția 2.2.4 avem

$$\begin{aligned} F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i) &= \lim_{m \to \infty} P(X_1 \leq x_1^{(m)}, \ldots, X_{i-1} \leq x_{i-1}^{(m)}, X_{i+1} \leq x_{i+1}^{(m)}, \ldots, X_n \leq x_1^{(m)}) \\ &= \lim_{m \to \infty} F_X(x_1^{(m)}, \ldots, x_{i-1}^{(m)}, x_{i+1}^{(m)}, \ldots, x_1^{(m)}), \end{aligned}$$

de unde rezultă egalitatea din enunț. □

Propoziția 3.5.2. *Fie $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vector aleator n-dimensional, $n \geq 2$. Atunci componentele $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sunt v.a. independente dacă și numai dacă*

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \ldots F_{X_n}(x_n),\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

unde F_X este funcția de repartiție a vectorului X iar $F_{X_1}, F_{X_2}, \ldots, F_{X_n}$ sunt funcțiile de repartiție ale componentelor $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Demonstrație. Conform Propoziției 3.2.1 și definițiilor funcțiilor de repartiție avem echivalențele:

$$\begin{aligned} &X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ sunt v.a. independente} \\ &\quad \Leftrightarrow P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \cdot P(X_2 \leq x_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq x_n), \\ &\qquad\quad \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \\ &\quad \Leftrightarrow F_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \ldots F_{X_n}(x_n),\ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

□

Definiția 3.5.2. *Fie $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vector aleator n-dimensional, $n \geq 2$, ale cărui componente $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sunt variabile aleatoare discrete.* ***Funcția masă de probabilitate (masa)*** *a vectorului aleator X este funcția*

$$p_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n),\ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^m.$$

Funcția $p_X = p_{(X_1, X_2, \ldots, X_n)}$ se numește și ***masa de probabilitate comună a v.a.*** *$X_1, X_2, \ldots, X_n$. Pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, masa de probabilitate p_{X_i} a v.a. X_i se numește și* ***masa de probabilitate marginală a lui*** X ***în raport cu componenta*** *X_i.*

Propoziția 3.5.3 (formula de calcul a maselor de probabilitate marginale). *În contextul definiției anterioare, pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ are loc egalitatea:*

$$p_{X_i}(x_i) = \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \cdots \sum_{x_{i-1} \in X_{i-1}(\Omega)} \sum_{x_{i+1} \in X_{i+1}(\Omega)} \cdots \sum_{x_n \in X_n(\Omega)} p_X(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n),\ \forall x_i \in X_i(\Omega).$$

Demonstrație. Evident, pentru orice $x_i \in X_i(\Omega)$ avem

$$p_{X_i}(x_i) = P\Bigg(\bigcup_{x_1 \in X_1(\Omega), \ldots, x_{i-1} \in X_{i-1}(\Omega), x_{i+1} \in X_{i+1}(\Omega), \ldots, x_n \in X_n(\Omega)} \{X_1 = x_1, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x_i,$$
$$X_{i+1} = x_{i+1}, \ldots, X_n = x_n\} \Bigg),$$

iar evenimentele reunite sunt disjuncte două câte două, de unde rezultă egalitatea din enunț. □

Următorul rezultat este o reformulare a Propoziției 3.3.3.

Propoziția 3.5.4. *Variabilele aleatoare discrete $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sunt independente dacă și numai dacă pentru orice $x_1 \in X_1(\Omega)$, $x_2 \in X_2(\Omega)$, $\ldots$, $x_n \in X_n(\Omega)$ are loc egalitatea*

$$p_{(X_1, X_2, \ldots, X_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) \ldots p_{X_n}(x_n).$$

Următorul rezultat se obține analog Propozițiilor 3.1.6 și 3.1.7.

Propoziția 3.5.5 (proprietăți ale funcției de repartiție comună). *Fie $Z = (X, Y)$ un vector aleator bidimensional (variabilă aleatoare bidimensională) și fie $F_Z = F_{(X,Y)}$ funcția sa de repartiție. Atunci:*

1. *$F_{(X,Y)}$ este crescătoare atât în x cât și în y;*

2. *$F_{(X,Y)}$ este continuă la dreapta;*

3. $\lim\limits_{x,y \to -\infty} F_{(X,Y)}(x, y) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{(X,Y)}(x, y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$ *și* $\lim\limits_{y \to -\infty} F_{(X,Y)}(x, y) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

4. $\lim\limits_{x,y \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, y) = 1$;

5. $F_X(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, y)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *și* $F_Y(y) = \lim\limits_{x \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$;

6. $P(X \leq x, Y \leq y) = F_{(X,Y)}(x, y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

7. $P(X \leq x, Y < y) = \lim\limits_{u \nearrow y} F_{(X,Y)}(x, u)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

8. $P(X \leq x, Y = y) = F_{(X,Y)}(x, y) - \lim\limits_{u \nearrow y} F_{(X,Y)}(x, u)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

9. $P(X \leq x, Y > y) = F_X(x) - F_{(X,Y)}(x, y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
10. $P(X \leq x, Y \geq y) = F_X(x) - \lim\limits_{u \nearrow y} F_{(X,Y)}(x, u),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
11. $P(X < x, Y < y) = \lim\limits_{t \nearrow x; u \nearrow y} F_{(X,Y)}(t, u),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
12. $P(X < x, Y = y) = \lim\limits_{t \nearrow x} F_{(X,Y)}(t, y) - \lim\limits_{t \nearrow x; u \nearrow y} F_{(X,Y)}(t, u),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
13. $P(X < x, Y > y) = \lim\limits_{t \nearrow x} F_X(t) - \lim\limits_{t \nearrow x} F_{(X,Y)}(t, y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
14. $P(X < x, Y \geq y) = \lim\limits_{t \nearrow x} F_X(t) - \lim\limits_{t \nearrow x; u \nearrow y} F_{(X,Y)}(t, u),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
15. $P(X = x, Y = y) = F_{(X,Y)}(x, y) - \lim\limits_{t \nearrow x} F_{(X,Y)}(t, y) - \lim\limits_{u \nearrow y} F_{(X,Y)}(x, u) + \lim\limits_{t \nearrow x; u \nearrow y} F_{(X,Y)}(t, u)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;
16. $P(X = x, Y > y) = F_X(x) - \lim\limits_{t \nearrow x} F_X(t) - F_{(X,Y)}(x, y) + \lim\limits_{t \nearrow x} F_{(X,Y)}(t, y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
17. $P(X = x, Y \geq y) = F_X(x) - \lim\limits_{t \nearrow x} F_X(t) - \lim\limits_{u \nearrow y} F_{(X,Y)}(x, u) + \lim\limits_{t \nearrow x; u \nearrow y} F_{(X,Y)}(t, u),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
18. $P(X > x, Y > y) = 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F_{(X,Y)}(x, y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
19. $P(X > x, Y \geq y) = 1 - F_X(x) - \lim\limits_{u \nearrow y} F_Y(u) + \lim\limits_{u \nearrow y} F_{(X,Y)}(x, u),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
20. $P(X \geq x, Y \geq y) = 1 - \lim\limits_{t \nearrow x} F_X(x) - \lim\limits_{u \nearrow y} F_Y(u) + \lim\limits_{t \nearrow x; u \nearrow y} F_{(X,Y)}(t, u),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
21. $P(X \in (x_1, x_2], Y \in (y_1, y_2]) = F_{(X,Y)}(x_2, y_2) - F_{(X,Y)}(x_1, y_2) - F_{(X,Y)}(x_2, y_1) + F_{(X,Y)}(x_1, y_1)$, $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ *cu* $x_1 < y_1$ *și* $x_2 < y_2$.

Observația 3.5.1. Analog se obțin formule pentru calculul probabilităților ca o v.a. bidimensională să aparțină altor tipuri de intervale, în funcție de funcția de repartiție comună. De exemplu:

$$\begin{aligned}
P(X \in [x_1, x_2], Y \in (y_1, y_2]) &= P(X \in [x_1, x_2], Y \leq y_2) - P(X \in [x_1, x_2], Y \leq y_1) \\
&= P(X \leq x_2, Y \leq y_2) - P(X < x_1, Y \leq y_2) - P(X \leq x_2, Y \leq y_1) + P(X < x_1, Y \leq y_1) \\
&= F_{(X,Y)}(x_2, y_2) - \lim_{t \nearrow x_1} F_{(X,Y)}(t, y_2) - F_{(X,Y)}(x_2, y_1) + \lim_{t \nearrow x_1} F_{(X,Y)}(t, y_1),
\end{aligned}$$

pentru orice $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ cu $x_1 < y_1$ și $x_2 < y_2$.

Observația 3.5.2. Evident, propoziția anterioară poate fi ușor extinsă la cazul n-dimensional.

Definiția 3.5.3. *Fie* $Z = (X, Y)$ *un vector aleator bidimensional (variabilă aleatoare bidimensională) ale cărui componente* X *și* Y *sunt variabile aleatoare finite având repartițiile*

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix},\ Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \\ q_1 & q_2 & \ldots & q_m \end{pmatrix}.$$

Repartiția v.a. Z *este dată de valorile* (x_i, y_j), $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ *și probabilitățile corespunzătoare*

$$p_{ij} = P(\mathrm{Z} = (x_i, y_j)) = P(X = x_i, Y = y_j),\ \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \forall j \in \{1, \ldots, m\},$$

și se numește și ***repartiția comună a v.a.*** X ***și*** Y. *Repartiția v.a.* X *se numește și* ***repartiția marginală a v.a.*** Z ***în raport cu componenta*** X*, iar repartiția v.a.* Y *se numește și* ***repartiția marginală a v.a.*** Z ***în raport cu componenta*** Y.

Propoziția 3.5.6 (Formulele de calcul ale repartițiilor marginale). *În contextul definiției anterioare, au loc egalitățile:*

$$p_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}, \ \forall i \in \{1, \dots, n\},$$
$$q_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}, \ \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Demonstrație. Evident, pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$ avem

$$p_i = P(X = x_i) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n} \{X = x_i, Y = y_j\}\right) = \sum_{j=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$$

(evenimentele reunite fiind disjuncte două câte două). Analog se obține și a doua egalitate din enunț. □

Observația 3.5.3. În contextul definiției anterioare, repartiția comună (repartiția v.a. Z = (X, Y)) și repartițiile marginale (repartițiile v.a. X și Y) sunt reprezentate într-un tabel de forma

$X\diagdown Y$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	$P(X = x_i)$
x_1	p_{11}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1m}	p_1
$\vdots$						
x_i	p_{i1}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{im}	p_i
$\vdots$						
x_n	p_{n1}	$\dots$	p_{nj}	$\dots$	p_{nm}	p_n
$P(Y = y_j)$	q_1	$\dots$	q_j	$\dots$	q_m	—

Conform propoziției anterioare, probabilitățile marginale p_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, sunt sumele pe liniile tabelului, iar probabilitățile marginale q_j, $j \in \{1, \dots, m\}$, sunt sumele pe coloanele tabelului.

Propoziția 3.5.7. *În contextul Definiției 3.5.3, componentele X și Y sunt v.a. independente dacă și numai dacă*

$$p_{ij} = p_i q_j, \ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \ \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Demonstrație. Conform Corolarului 3.3.1 avem echivalențele:

$$\begin{aligned} &X \text{ și } Y \text{ sunt independente} \\ &\quad \Leftrightarrow P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j), \ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \ \forall j \in \{1, \dots, m\} \\ &\quad \Leftrightarrow p_{ij} = p_i q_j, \ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \ \forall j \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

□

Observația 3.5.4. Conform propoziției anterioare rezultă că repartiția unei variabile bidimensionale având componentele v.a. finite independente, repartiția comună și repartițiile marginale au forma

$X\diagdown Y$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	$P(X = x_i)$
x_1	$p_1 q_1$	$\dots$	$p_1 q_j$	$\dots$	$p_1 q_m$	p_1
$\vdots$						
x_i	$p_i q_1$	$\dots$	$p_i q_j$	$\dots$	$p_i q_m$	p_i
$\vdots$						
x_n	$p_n q_1$	$\dots$	$p_n q_j$	$\dots$	$p_n q_m$	p_n
$P(Y = y_j)$	q_1	$\dots$	q_j	$\dots$	q_m	—

Observația 3.5.5. Evident, Definiția 3.5.3 și Propozițiile 3.5.6 și 3.5.7 pot fi extinse pentru v.a. numărabile. De asemenea ele pot fi extinse și la cazul n-dimensional.

Exemplul 3.5.1. O urnă conține 5 bile albe, 2 bile roșii și 3 bile negre. Se extrag 2 bile, cu întoarcere. Dacă variabila X reprezintă numărul bilelor albe extrase, iar variabila Y reprezintă numărul bilelor roșii extrase, să se determine repartiția variabilei aleatoare bidimensionale Z $= (X, Y)$, precum și repartițiile marginale ale lui Z. Sunt v.a. X și Y independente?

Soluție. Evident, v.a. X și Y iau valorile 0, 1 și 2. Conform schemei multinomiale avem

$$P(X = x, Y = y) = \frac{2!}{x!y!(2-x-y)!} \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^y \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{2-x-y},$$
$$\forall x, y \in \{0, 1, 2\} \text{ a.î. } x + y \leq 2.$$

Evident,

$$P(X = x, Y = y) = 0, \ \forall x, y \in \{0, 1, 2\} \text{ a.î. } x + y > 2.$$

Avem

$$P(X=0,Y=0) = \frac{2!}{2!} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 = 0{,}09, \qquad P(X=0,Y=1) = 2! \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = 0{,}12,$$
$$P(X=0,Y=2) = \left(\frac{2}{10}\right)^2 = 0{,}04, \qquad P(X=1,Y=0) = 2! \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} = 0{,}3,$$
$$P(X=1,Y=1) = 2! \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{10} = 0{,}2, \qquad P(X=1,Y=2) = 0,$$
$$P(X=2,Y=0) = \left(\frac{5}{10}\right)^2 = 0{,}25, \qquad P(X=2,Y=1) = P(X=2,Y=2) = 0.$$

Astfel, repartiția v.a. Z $= (X, Y)$ și repartițiile marginale (repartițiile v.a. X și Y) sunt reprezentate în următorul tabel.

$X \diagdown Y$	0	1	2	$P(X = x_i)$
0	0,09	0,12	0,04	0,25
1	0,3	0,2	0	0,5
2	0,25	0	0	0,25
$P(Y = y_j)$	0,64	0,32	0,04	—

Probabilitățile marginale $P(X = x_i)$ au fost calculate ca sume pe linii, iar probabilitățile marginale $P(Y = y_j)$ au fost calculate ca sume pe coloane.

Observăm că v.a. X și Y nu sunt independente, deoarece, de exemplu,

$$P(X = 0, Y = 0) = 0,09 \neq 0,25 \cdot 0,64 = P(X = 0)P(Y = 0).$$

□

Exemplul 3.5.2. Două urne conțin fiecare câte 5 bile albe, 2 bile roșii și 3 bile negre. Se extrag câte 2 bile din fiecare urnă, cu întoarcere. Dacă variabila X reprezintă numărul bilelor albe extrase din prima urnă, iar variabila Y reprezintă numărul bilelor roșii extrase din a doua urnă, să se determine repartiția variabilei aleatoare bidimensionale Z $= (X, Y)$, precum și repartițiile marginale ale lui Z.

Soluție. Evident, de data aceasta v.a. X și Y sunt independente. Ele iau tot valorile 0, 1 și 2.

Conform schemei binomiale avem

$$P(X = x) = C_2^x \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^{2-x}, \ P(Y = y) = C_2^y \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^y \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^{2-y}, \ \forall x, y \in \{0, 1, 2\},$$

deci repartițiile v.a. X și Y (repartițiile marginale ale lui Z) sunt

$$X : \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \end{array} \right), Y : \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 0,64 & 0,32 & 0,04 \end{array} \right).$$

V.a. X și Y fiind independente, conform Propoziției 3.5.7 și Observației 3.5.4 rezultă că probabilitățile comune se obțin prin înmulțirea probabilităților marginale, deci repartiția v.a. Z $= (X, Y)$ (și repartițiile marginale) sunt reprezentate în următorul tabel.

$X \diagdown Y$	0	1	2	$P(X = x_i)$
0	0,16	0,08	0,01	0,25
1	0,32	0,16	0,02	0,5
2	0,16	0,08	0,01	0,25
$P(Y = y_j)$	0,64	0,32	0,04	—

$\square$

Definiția 3.5.4. *O mulțime $M \subseteq \mathbb{R}^2$ de numere reale se numește* ***mulțime neglijabilă*** *(sau* ***mulțime de măsură Lebesgue nulă****) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulțime numărabilă de intervale deschise $\{(a_i, b_i) \times (c_i, d_i) \mid i \in \mathbb{N}^*\}$ ($a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$, $c_i < d_i$, pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$) astfel încât*

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \times (c_i, d_i) \text{ și } \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)(d_i - c_i) < \varepsilon.$$

Definiția 3.5.5. *Fie $Z = (X, Y)$ un vector aleator bidimensional (variabilă aleatoare bidimensională) ale cărui componente X și Y sunt variabile aleatoare absolut continue. O funcție $f_Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă, cu excepția unei mulțimi neglijabile de puncte, ce satisface următoarele două proprietăți*

1) $f_Z(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

2) $P(Z \in A) = \iint_A f_Z(x, y)dxdy$, $\forall A \subseteq \mathbb{R}^2$, pentru orice $A \subseteq \mathbb{R}^2$ pentru care $Z^{-1}(A) \in \mathcal{B}$,

se numește ***densitatea de repartiție a vectorului aleator*** *Z.*

$Z = (X, Y)$ se numește ***vector aleator absolut continuu****.*

Funcția $f_Z = f_{(X,Y)}$ se numește și ***densitatea de repartiție comună a v.a.*** *X* ***și*** *Y.*

Densitatea de repartiție f_X a v.a. X se numește și ***densitatea de repartiție marginală a v.a.*** Z ***în raport cu componenta*** *X, iar densitatea de repartiție f_Y a v.a. Y se numește și* ***densitatea de repartiție marginală a v.a.*** Z ***în raport cu componenta*** *Y.*

Următorul rezultat se obține analog Propoziției 3.4.2.

Propoziția 3.5.8. *Fie $Z = (X, Y)$ un vector aleator bidimensional (variabilă aleatoare bidimensională) absolut continuu având densitatea de repartiție $f_{(X,Y)}$ și funcția de repartiție $F_{(X,Y)}$. Atunci:*

1. $F_{(X,Y)}(x, y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(t, u)dtdu$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

2. $f_{(X,Y)}(x, y) = \dfrac{\partial^2 F_{(X,Y)}}{\partial x \partial y}(x, y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (cu excepția unei mulțimi neglijabile de puncte).

Demonstrație. 1. Folosind definiția funcției de repartiție și proprietatea 2) din definiția anterioară avem

$$F_{(X,Y)}(x, y) = P((X, Y) \in (-\infty, x] \times (-\infty, y]) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(t, u)dtdu, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Folosind și Propoziția 3.5.5, avem

$$\begin{aligned}F_{(X,Y)}(x,y) - F_{(X,Y)}(a,y) - F_{(X,Y)}(x,b) + F_{(X,Y)}(a,b) &= P(X \in (a,x], Y \in (b,y]) \\ &= \int_b^y \int_a^x f_{(X,Y)}(t,u)dtdu\end{aligned}$$

$\forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$ cu $x > a$ și $y > b$. Derivând întâi în raport cu y, apoi în raport cu x se obține egalitatea din enunț. □

Propoziția 3.5.9 (**Formulele de calcul ale densităților de repartiție marginale**). *În contextul Definiției 3.5.5, au loc egalitățile:*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy, \ \forall x \in \mathbb{R},$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dx, \ \forall y \in \mathbb{R}$$

(cu excepția unor mulțimi neglijabile de puncte).

Demonstrație. Utilizând Propoziția 3.4.4 și Definiția 3.5.5, avem

$$\int_a^x f_X(t)dt = P(X \in (a,x]) = P(Y \in \mathbb{R}, X \in (a,x]) = \int_a^x \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(t,y)dydt,$$

pentru orice $x, a \in \mathbb{R}$ cu $x > a$. Derivând în raport cu x obținem prima egalitate din enunț. Analog se obține și cea de-a doua egalitate din enunț. □

Următorul rezultat se obține analog Propozițiilor 3.4.3 și 3.4.4.

Propoziția 3.5.10 (**proprietăți ale densității de repartiție comună**). *Fie $Z = (X,Y)$ un vector aleator bidimensional (variabilă aleatoare bidimensională) absolut continuu având densitatea de repartiție $f_{(X,Y)}$. Atunci:*

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy = 1$;
2. $P(X = x, Y \in A) = P(X \in A, Y = y) = 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \ \forall A \subseteq \mathbb{R}$;
3. $P(X \le x, Y \le y) = P(X < x, Y < y) = P(X \le x, Y < y) = P(X < x, Y \le y) = $ $= F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(t,u)dtdu, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
4. $P(X \ge x, Y \ge y) = P(X > x, Y > y) = P(X \ge x, Y > y) = P(X > x, Y \ge y) = $ $= \int_y^{+\infty} \int_x^{+\infty} f_{(X,Y)}(t,u)dtdu, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$;
5. $P(X \le x, Y \ge y) = P(X < x, Y > y) = P(X \le x, Y > y) = P(X < x, Y \ge y) = $ $= \int_y^{+\infty} \int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(t,u)dtdu, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
6. $P(X \in [a,b], Y \in [c,d]) = P(X \in (a,b), Y \in (c,d)) = P(X \in [a,b], Y \in (c,d)) = $ $= P(X \in (a,b), Y \in [c,d]) = \int_c^d \int_a^b f_{(X,Y)}(x,y)dxdy, \ \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *cu* $a < b$ *și* $c < d$.

7. *Mai general, dacă* $I \in \{[a,b],(a,b),[a,b),(a,b]\}$ *și* $J \in \{[c,d],(c,d),[c,d),(c,d]\}$, *unde* $a,b,c,d \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, $c < d$, *iar la capetele infinite intervalele se consideră deschise, atunci*

$$P(X \in I, Y \in J) = \int_c^d \int_a^b f_{(X,Y)}(x,y)dxdy.$$

Propoziția 3.5.11. *În contextul Definiției 3.5.5, componentele* X *și* Y *sunt v.a. independente dacă și numai dacă*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \ \forall x,y \in \mathbb{R}$$

(cu excepția unei mulțimi neglijabile de puncte).

Demonstrație. "⇒" Presupunem că X și Y sunt v.a. independente. Conform Propoziției 3.5.2 avem

$$F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)F_Y(y), \ \forall x,y \in \mathbb{R},$$

deci utilizând Propoziția 3.5.8 și Definiția 3.4.3 rezultă că

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(F_X(x)F_Y(y)) = F'_X(x)F'_Y(y) = f_X(x)f_Y(y), \ \forall x,y \in \mathbb{R}$$

(cu excepția unei mulțimi neglijabile de puncte).

"⇐" Presupunem acum că are loc egalitatea din enunț. Utilizând Propozițiile 3.5.8 și 3.4.2 avem

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(t,u)dtdu = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_X(t)f_Y(u)dtdu = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \cdot \int_{-\infty}^{y} f_Y(u)dtdu$$
$$= F_X(x)F_Y(y), \ \forall x,y \in \mathbb{R},$$

deci conform Propoziției 3.5.2 rezultă că X și Y sunt independente. □

Observația 3.5.6. Evident, Definiția 3.5.5 și rezultatele anterioare pot fi extinse ușor la cazul n-dimensional.

Exemplul 3.5.3. Fie funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} a(x^2+y), & \text{dacă } x \in [0,3] \text{ și } y \in [0,2], \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

a) Să se determine valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția f este densitatea de repartiție a unui vector aleator $Z = (X,Y)$.

b) Pentru valoarea lui a găsită la punctul anterior, să se calculeze funcția de repartiție comună a v.a. X și Y.

c) Pentru valoarea lui a găsită la punctul a), să se calculeze densitățile de repartiție ale v.a. X și Y. Sunt variabilele X și Y independente?

d) Pentru valoarea lui a găsită la punctul a), să se calculeze următoarele probabilități: $P(X \in [1,2])$, $P(Y \in [0,1])$, $P(X \in [1,2], Y \in [0,1])$, $P(X+Y \geq 4)$.

Soluție. a) Conform definiției, $f(x,y) \geq 0$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$, deci $a \geq 0$.

Conform Propoziției 3.5.10, avem

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^2\int_0^3 f(x,y)dxdy = a\int_0^2\int_0^3 (x^2+y)dxdy = a\int_0^2 \left(\frac{x^3}{3}+yx\right)\Big|_{x=0}^{3} dy$$
$$= a\int_0^2 (9+3y)\,dy = a\left(9y+\frac{3y^2}{2}\right)\Big|_0^2 = (18+6)a = 24a,$$

deci $a = \dfrac{1}{24}$.

Reciproc, pentru $a = \dfrac{1}{24}$ vom vedea la punctul c) că $Z = (X, Y)$ este un vector aleator având componentele X și Y v.a. absolut continue.

b) Conform Propoziției 3.5.8, funcția de repartiție comună a v.a. X și Y este dată de

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(t, u)dtdu, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dacă $x \leq 0$ sau $y \leq 0$, atunci $F_{(X,Y)}(x, y) = 0$.

Dacă $x \geq 3$ și $y \geq 2$, atunci $F_{(X,Y)}(x, y) = \displaystyle\int_{0}^{2} \int_{0}^{3} f(t, u)dtdu = 1$.

Dacă $x \in (0, 3)$ și $y \in (0, 2)$, atunci

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \int_{0}^{y} \int_{0}^{x} f(t, u)dtdu = \frac{1}{24} \int_{0}^{y} \int_{0}^{x} (t^2 + u)dtdu = \frac{1}{24} \int_{0}^{y} \left(\frac{t^3}{3} + ut \right) \Big|_{t=0}^{x} du \\ &= \frac{1}{24} \int_{0}^{y} \left(\frac{x^3}{3} + xu \right) du = \frac{1}{24} \left(\frac{x^3 u}{3} + \frac{xu^2}{2} \right) \Big|_{u=0}^{y} = \frac{1}{24} \left(\frac{x^3 y}{3} + \frac{xy^2}{2} \right) = \frac{2x^3 y + 3xy^2}{144}. \end{aligned}$$

Dacă $x \in (0, 3)$ și $y \geq 2$, atunci

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \int_{0}^{2} \int_{0}^{x} f(t, u)dtdu = \frac{1}{24} \int_{0}^{2} \int_{0}^{x} (t^2 + u)dtdu = \frac{1}{24} \int_{0}^{2} \left(\frac{t^3}{3} + ut \right) \Big|_{t=0}^{x} du \\ &= \frac{1}{24} \int_{0}^{2} \left(\frac{x^3}{3} + xu \right) du = \frac{1}{24} \left(\frac{x^3 u}{3} + \frac{xu^2}{2} \right) \Big|_{u=0}^{2} = \frac{1}{24} \left(\frac{2x^3}{3} + 2x \right) = \frac{x^3 + 3x}{36} \end{aligned}$$

(sau, direct, $F_{(X,Y)}(x, y) = \displaystyle\int_{0}^{2} \int_{0}^{x} f(t, u)dtdu = F_{(X,Y)}(x, 2) = \frac{2x^3 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2}{144} = \frac{x^3 + 3x}{36}$).

Dacă $x \geq 3$ și $y \in (0, 2)$, atunci

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x, y) &= \int_{0}^{y} \int_{0}^{3} f(t, u)dtdu = \frac{1}{24} \int_{0}^{y} \int_{0}^{3} (t^2 + u)dtdu = \frac{1}{24} \int_{0}^{y} \left(\frac{t^3}{3} + ut \right) \Big|_{t=0}^{3} du \\ &= \frac{1}{24} \int_{0}^{y} (9 + 3u)\, du = \frac{1}{24} \left(9u + \frac{3u^2}{2} \right) \Big|_{0}^{y} = \frac{1}{24} \left(9y + \frac{3y^2}{2} \right) = \frac{y^2 + 6y}{16} \end{aligned}$$

(sau, direct, $F_{(X,Y)}(x, y) = \displaystyle\int_{0}^{y} \int_{0}^{3} f(t, u)dtdu = F_{(X,Y)}(3, y) = \frac{2 \cdot 3^3 \cdot y + 3 \cdot 3 \cdot y^2}{144} = \frac{y^2 + 6y}{16}$).

Deci

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 0\,, & \text{dacă } x \leq 0 \text{ sau } y \leq 0, \\ \dfrac{2x^3 y + 3xy^2}{144}\,, & \text{dacă } x \in (0, 3) \text{ și } y \in (0, 2), \\ \dfrac{x^3 + 3x}{36}\,, & \text{dacă } x \in (0, 3) \text{ și } y \geq 2, \\ \dfrac{y^2 + 6y}{16}\,, & \text{dacă } x \geq 3 \text{ și } y \in (0, 2), \\ 1\,, & \text{dacă } x \geq 3 \text{ și } y \geq 2. \end{cases}$$

c) Densitatea de repartiție f_X a v.a. X este densitatea de repartiție marginală a vectorului (X, Y), deci conform Propoziției 3.5.9 avem

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dacă $x < 0$ sau $x > 3$, atunci $f_X(x) = 0$.
Dacă $x \in [0, 3]$, atunci

$$f_X(x) = \int_0^2 f(x,y)dy = \frac{1}{24}\int_0^2 (x^2 + y)dy = \frac{1}{24}\left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^2 = \frac{1}{24}\left(2x^2 + 2\right) = \frac{x^2+1}{12}.$$

Deci

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{12}, & \text{dacă } x \in [0,3], \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

O altă metodă de calcul este următoarea:

- Se calculează funcția de repartiție a v.a. X ca funcție de repartiție marginală a vectorului (X, Y), conform Propoziției 3.5.5:

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq 0, \\ \dfrac{x^3+3x}{36}, & \text{dacă } x \in (0,3) \\ 1, & \text{dacă } x \geq 3; \end{cases}$$

- Se calculează densitatea de repartiție a v.a. X ca derivată a funcției de repartiție, conform Definiției 3.4.3:

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0, \\ \dfrac{x^2+1}{12}, & \text{dacă } x \in (0,3), \\ 0, & \text{dacă } x > 3. \end{cases}$$

  Funcția F_X nu este derivabilă în 0 și în 3, deci $f_X(0)$ și $f_X(3)$ pot fi alese arbitrar.

Densitatea de repartiție f_Y a v.a. Y este densitatea de repartiție marginală a vectorului (X, Y), deci conform Propoziției 3.5.9 avem

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx, \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Dacă $y < 0$ sau $y > 2$, atunci $f_Y(y) = 0$.
Dacă $y \in [0, 2]$, atunci

$$f_Y(y) = \int_0^3 f(x,y)dx = \frac{1}{24}\int_0^3 (x^2 + y)dx = \frac{1}{24}\left(\frac{x^3}{3} + yx\right)\Big|_{x=0}^3 = \frac{1}{24}(9 + 3y) = \frac{y+3}{8}.$$

Deci

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y+3}{8}, & \text{dacă } y \in [0,2], \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

O altă metodă de calcul este următoarea:

- Se calculează funcția de repartiție a v.a. Y ca funcție de repartiție marginală a vectorului (X, Y), conform Propoziției 3.5.5:

$$F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } y \leq 0, \\ \dfrac{y^2+6y}{16}, & \text{dacă } y \in (0,2) \\ 1, & \text{dacă } y \geq 2; \end{cases}$$

- Se calculează densitatea de repartiție a v.a. Y ca derivată a funcției de repartiție, conform Definiției 3.4.3:

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 0\,, & \text{dacă } y < 0, \\ \dfrac{y+3}{8}\,, & \text{dacă } y \in (0,2), \\ 0\,, & \text{dacă } y > 2. \end{cases}$$

  Funcția F_Y nu este derivabilă în 0 și în 2, deci $f_Y(0)$ și $f_Y(2)$ pot fi alese arbitrar.

Remarcăm faptul că aplicând Propoziția 3.4.3 (sau Propoziția 3.1.6 și Definiția 3.4.3), rezultă că X și Y sunt v.a. absolut continue.

De asemenea, conform Propoziției 3.5.11 (sau Propoziției 3.5.2) rezultă că v.a. X și Y nu sunt independente.

d) Utilizând densitatea de repartiție marginală avem:

$$P(X \in [1,2]) = \int_1^2 f_X(x)dx = \frac{1}{12}\int_1^2 (x^2+1)dx = \frac{1}{12}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{7}{3}+1\right) = \frac{5}{18}.$$

O altă metodă de calcul se obține utilizând funcția de repartiție marginală:

$$P(X \in [1,2]) = F_X(2) - F_X(1) = \frac{14}{36} - \frac{4}{36} = \frac{5}{18}.$$

Analog, utilizând densitatea de repartiție marginală avem:

$$P(Y \in [0,1]) = \int_0^1 f_Y(y)dx = \frac{1}{8}\int_0^1 (y+3)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{y^2}{2}+3y\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+3\right) = \frac{7}{16}.$$

O altă metodă de calcul se obține utilizând funcția de repartiție marginală:

$$P(Y \in [0,1]) = F_Y(1) - F_Y(0) = \frac{7}{16}.$$

Utilizând densitatea de repartiție comună, conform Propoziției 3.5.10 avem:

$$\begin{aligned} P(X \in [1,2], Y \in [0,1]) &= \int_0^1 \int_1^2 f(x,y)dxdy = \frac{1}{24}\int_0^1\int_1^2 (x^2+y)dxdy = \frac{1}{24}\int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}+yx\right)\Big|_{x=1}^2 dy \\ &= \frac{1}{24}\int_0^1 \left(\frac{7}{3}+y\right)dy = \frac{1}{24}\left(\frac{7y}{3}+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{24}\left(\frac{7}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{144}. \end{aligned}$$

O altă metodă de calcul se obține utilizând funcția de repartiție comună, conform Propoziției 3.5.5:

$$\begin{aligned} P(X \in [1,2], Y \in [0,1]) &= F_{(X,Y)}(2,1) - F_{(X,Y)}(1,1) - F_{(X,Y)}(2,0) + F_{(X,Y)}(1,0) \\ &= \frac{22}{144} - \frac{5}{144} - 0 + 0 = \frac{17}{144}. \end{aligned}$$

Conform Definiției 3.5.5 avem

$$P(X+Y \geq 4) = \iint_A f(x,y)dxdy,$$

unde

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2,\ x+y \geq 4\}.$$

Pentru a calcula integrala dublă, rescriem mulțimea A astfel:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2,\ 4 - y \leq x \leq 3\}.$$

Rezultă că

$$\begin{aligned} P(X+Y \geq 4) &= \int_1^2 \int_{4-y}^3 f(x,y)dxdy = \frac{1}{24}\int_1^2 \int_{4-y}^3 (x^2+y)dxdy = \frac{1}{24}\int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + yx\right)\Big|_{x=4-y}^3 dy \\ &= \frac{1}{24}\int_1^2 \left(9 + 3y - \frac{(4-y)^3}{3} - y(4-y)\right) dy = \frac{1}{24}\int_1^2 \left(y^2 - y + 9 - \frac{(4-y)^3}{3}\right) dy \\ &= \frac{1}{24}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 9y + \frac{(4-y)^4}{12}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{24}\left(\frac{7}{3} - \frac{3}{2} + 9 - \frac{65}{12}\right) = \frac{53}{288}. \end{aligned}$$

□

Exemplul 3.5.4. Fie X și Y două variabile aleatoare independente având densitățile de repartiție

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{12}, & \text{dacă } x \in [0,3], \\ 0, & \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

respectiv

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y+3}{8}, & \text{dacă } y \in [0,2], \\ 0, & \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

adică exact ca în exemplul anterior.

Să se calculeze din nou probabilitățile $P(X \in [1,2])$, $P(Y \in [0,1])$, $P(X \in [1,2], Y \in [0,1])$ și $P(X+Y \geq 4)$.

Soluție. Primele două probabilități se calculează exact ca în exemplul anterior:

$$\begin{aligned} P(X \in [1,2]) &= \int_1^2 f_X(x)dx = \frac{1}{12}\int_1^2 (x^2+1)dx = \frac{1}{12}\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{7}{3} + 1\right) = \frac{5}{18}; \\ P(Y \in [0,1]) &= \int_0^1 f_Y(y)dx = \frac{1}{8}\int_0^1 (y+3)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{y^2}{2} + 3y\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} + 3\right) = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

Deoarece X și Y sunt acum variabile aleatoare independente, avem

$$P(X \in [1,2], Y \in [0,1]) = P(X \in [1,2]) \cdot P(Y \in [0,1]) = \frac{5}{18} \cdot \frac{7}{16} = \frac{35}{288}.$$

Pentru a calcula ultima probabilitate din enunț vom proceda ca în exemplul anterior. De data aceasta, deoarece X și Y sunt independente, rezultă că densitatea de repartiție comună este

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2+1)(y+3)}{96}, & \text{dacă } x \in [0,3] \text{ și } y \in [0,2], \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Notând

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2,\ x + y \geq 4\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 3,\ 4 - x \leq y \leq 2\}, \end{aligned}$$

avem

$$\begin{aligned}
P(X+Y\geq 4) &= \iint_A f_{(X,Y)}(x,y)dxdy = \int_2^3\int_{4-x}^2 f_{(X,Y)}(x,y)dydx \\
&= \frac{1}{96}\int_2^3\int_{4-x}^2 (x^2+1)(y+3)dydx = \frac{1}{96}\int_2^3 (x^2+1)\left(\frac{y^2}{2}+3y\right)\Big|_{y=4-x}^2 dx \\
&= \frac{1}{96}\int_2^3 (x^2+1)\left(8-\frac{(4-x)^2}{2}-3(4-x)\right)dx \\
&= \frac{1}{192}\int_2^3 (x^2+1)(-x^2+14x-24)dx = \frac{1}{192}\int_2^3(-x^4+14x^3-25x^2+14x-24)dx \\
&= \frac{1}{192}\left(-\frac{x^5}{5}+\frac{7x^4}{2}-\frac{25x^3}{3}+7x^2-24x\right)\Big|_2^3 = \frac{1139}{5760}.
\end{aligned}$$

□

3.6 Momentele variabilelor aleatoare

Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate.

Definiția 3.6.1. *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare discretă având masa de probabilitate p_X. **Media (valoarea medie** a) **v.a.** X este*

$$E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x p_X(x)$$

(sub presupunerea că suma seriei există, în cazul în care v.a. X este numărabilă).

Definiția 3.6.2. *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare continuă având densitatea de repartiție f_X. **Media (valoarea medie** a) **v.a.** X este*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

(sub presupunerea că integrala există, adică limita ce definește această integrală există).

Observația 3.6.1. Media $E(X)$ a unei v.a. X (discrete sau continue) se mai notează și cu $M(X)$.

Definiția 3.6.3 (**Momentele v.a.**). *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare (discretă sau continuă).*

1. *Fie $r \in \mathbb{N}^*$. **Momentul de ordinul** r **al v.a.** X este*

   $$E(X^r)$$

   (sub presupunerea că această valoare medie există, în cazul în care v.a. X este numărabilă sau continuă).

2. *Fie $r \in \mathbb{N}^*$. **Momentul centrat de ordinul** r **al v.a.** X este*

   $$\mu_r(X) = E((X - E(X))^r)$$

   (sub presupunerea că această valoare medie există, în cazul în care v.a. X este numărabilă sau continuă).

3. ***Dispersia (varianța) v.a.*** *X este*

$$\mathrm{var}\,(X) = \mu_2(X)$$

(sub presupunerea că aceast moment centrat există, în cazul în care v.a. X este numărabilă sau continuă).

4. ***Deviația standard (abaterea standard, abaterea medie pătratică) a v.a.*** *X este*

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}\,(X)},$$

sub presupunerea că dispersia $\mathrm{var}\,(X)$ *este finită.*

Observația 3.6.2. Dispersia $\mathrm{var}\,(X)$ a unei v.a. X (discrete sau continue) se mai notează și cu $D(X)$ sau cu σ_X^2.

Propoziția 3.6.1. *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare discretă având masa de probabilitate p_X și fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci*

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) p_X(x)$$

(sub presupunerea că suma seriei există, în cazul în care v.a. X este numărabilă).

Demonstrație. Fie $Y = g(X)$. Conform Propoziției 3.1.4, Y este variabilă aleatoare, iar deoarece X este discretă rezultă că și Y este discretă. Avem

$$\begin{aligned} E(g(X)) = E(Y) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} y p_Y(y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y P(Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(y \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} P(X = x) \right) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} y p_X(x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} g(x) p_X(x) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) p_X(x). \end{aligned}$$

□

Următorul rezultat se obține analog propoziției anterioare.

Propoziția 3.6.2. *Fie $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ două variabile aleatoare discrete având masa de probabilitate comună $p_{(X,Y)}$ și fie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci*

$$E(g(X, Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x, y) p_{(X,Y)}(x, y)$$

(sub presupunerea că suma seriei există, în cazul în care cel puțin una din v.a. X și Y este numărabilă).

Observația 3.6.3. Evident, propoziția anterioară poate fi ușor extinsă la cazul n-dimensional.

Următoarele două rezultate sunt analoagele celor două propoziții anterioare în cazul v.a. continue.

Propoziția 3.6.3. *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare continuă având densitatea de repartiție f_X și fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci*

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

(sub presupunerea că integrala există).

Propoziția 3.6.4. *Fie $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ două variabile aleatoare continuĕ având densitatea de repartiție comună $f_{(X,Y)}$ și fie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci*

$$E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{(X,Y)}(x,y)dxdy$$

(sub presupunerea că integrala dublă există).

Observația 3.6.4. Evident, și propoziția anterioară poate fi ușor extinsă la cazul n-dimensional.

Propoziția 3.6.5 (Proprietăți ale mediei).
a) Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare (discretă sau continuă). Avem:

1. *Dacă v.a. X este constantă, adică există $c \in \mathbb{R}$ a.î. $X(\omega) = c$, $\forall \omega \in \Omega$, atunci $E(X) = c$.*

2. *$E(X + a) = E(X) + a$, $\forall a \in \mathbb{R}$;*

3. *$E(aX) = aE(X)$, $\forall a \in \mathbb{R}$;*

4. *Dacă $X \geq 0$ (adică $X(\omega) \geq 0$, $\forall \omega \in \Omega$), atunci $E(X) \geq 0$, iar egalitatea are loc dacă și numai dacă $P(X = E(X)) = 1$.*

b) Fie $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ două variabile aleatoare (discrete sau continue). Avem:

1. *$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;*

2. *$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$.*

c) Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ variabile aleatoare (discrete sau continue), $n \geq 2$. Avem

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n).$$

Demonstrație. a) 1. V.a. X fiind constantă, rezultă că este finită și astfel

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x p_X(x) = c p_X(c) = c \cdot P(X = c) = c \cdot 1 = c.$$

2. Cazul i) Dacă v.a. X este discretă, atunci $X + a$ este tot o v.a. discretă și, utilizând Propoziția 3.6.1, avem

$$E(X + a) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x + a) p_X(x) = \sum_{x \in X(\Omega)} x p_X(x) + a \sum_{x \in X(\Omega)} p_X(x) = E(X) + a \cdot 1 = E(X) + a.$$

Cazul ii) Dacă v.a. X este continuă, atunci $X + a$ este tot o v.a. continuă și, utilizând Propoziția 3.6.3, avem

$$E(X + a) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x + a) f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx + a \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = E(X) + a \cdot 1 = E(X) + a.$$

Relațiile de la punctele 3 și 4 se demonstrează analog.

b) 1. Cazul i) Dacă v.a. X și Y sunt discrete, atunci utilizând Propozițiile 3.6.2 și 3.5.3 avem

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} (x + y) p_{(X,Y)}(x,y) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(x \sum_{y \in Y(\Omega)} p_{(X,Y)}(x,y) \right) + \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(y \sum_{x \in X(\Omega)} p_{(X,Y)}(x,y) \right) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x p_X(x) + \sum_{y \in Y(\Omega)} y p_Y(y) = E(X) + E(Y). \end{aligned}$$

Cazul ii) Dacă v.a. X și Y sunt continue, atunci utilizând Propozițiile 3.6.4 și 3.5.9 avem

$$\begin{aligned}E(X+Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f_{(X,Y)}(x,y)dxdy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(x\int_{-\infty}^{+\infty}f_{(X,Y)}(x,y)dy\right)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(y\int_{-\infty}^{+\infty}f_{(X,Y)}(x,y)dx\right)dy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=E(X)+E(Y).\end{aligned}$$

Analog se demonstrează și celelalte egalități din enunț. □

Următorul rezultat este o consecință imediată a Definiției 3.6.3 și a Propoziției 3.6.1.

Propoziția 3.6.6 (**Formule de calcul pentru momentele v.a. discrete**). *Fie $X:\Omega\to\mathbb{R}$ o variabilă aleatoare discretă având masa de probabilitate p_X.*

1. *Fie $r\in\mathbb{N}^*$. Momentul de ordinul r al v.a. X este*

$$E(X^r)=\sum_{x\in X(\Omega)}x^r p_X(x)$$

(sub presupunerea că suma seriei există, în cazul în care v.a. X este numărabilă).

2. *Fie $r\in\mathbb{N}^*$. Momentul centrat de ordinul r al v.a. X este*

$$\mu_r(X)=\sum_{x\in X(\Omega)}(x-E(X))^r p_X(x)$$

(sub presupunerea că suma seriei există, în cazul în care v.a. X este numărabilă).

3. *Dispersia (varianța) v.a. X este*

$$\operatorname{var}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)}(x-E(X))^2 p_X(x).$$

Următorul rezultat este o consecință imediată a Definiției 3.6.3 și a Propoziției 3.6.3.

Propoziția 3.6.7 (**Formule de calcul pentru momentele v.a. continue**). *Fie $X:\Omega\to\mathbb{R}$ o variabilă aleatoare continuă având densitatea de repartiție f_X.*

1. *Fie $r\in\mathbb{N}^*$. Momentul de ordinul r al v.a. X este*

$$E(X^r)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^r f_X(x)dx$$

(sub presupunerea că integrala există).

2. *Fie $r\in\mathbb{N}^*$. Momentul centrat de ordinul r al v.a. X este*

$$\mu_r(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^r f_X(x)dx$$

(sub presupunerea că integrala există).

3. Dispersia (varianța) v.a. X este

$$\operatorname{var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)dx.$$

Propoziția 3.6.8 (Proprietăți ale dispersiei). *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare (discretă sau continuă). Avem:*

1. $\operatorname{var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$;
2. $\operatorname{var}(X) \geq 0$;
3. *Dacă v.a. X este constantă, adică există $c \in \mathbb{R}$ a.î. $X(\omega) = c$, $\forall \omega \in \Omega$, atunci* $\operatorname{var}(X) = 0$;
4. $\operatorname{var}(X) = 0$ *dacă și numai dacă* $P(X = E(X)) = 1$;
5. $\operatorname{var}(X + a) = \operatorname{var}(X)$, $\forall a \in \mathbb{R}$;
6. $\operatorname{var}(aX) = a^2 \cdot \operatorname{var}(X)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Demonstrație. 1. Utilizând proprietățile mediei avem

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(X) &= E((X - E(X))^2) = E\left(X^2 - 2E(X) \cdot X + E^2(X)\right) \\
&= E(X^2) - E(2E(X) \cdot X) + E^2(X) = E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + E^2(X) \\
&= E(X^2) - E^2(X).
\end{aligned}$$

Analog se demonstrează și celelalte relații din enunț. □

Exemplul 3.6.1. Fie variabila aleatoare X având repartiția

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze media, dispersia și deviația standard ale lui X.

Soluție. Media lui X este $E(X) = -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Pentru a calcula dispersia lui X, calculăm repartiția lui X^2.

Deoarece X ia valorile $-1, 0, 1$, rezultă că X^2 ia valorile $0, 1$. Avem

$$P(X^2 = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{4},$$
$$P(X^2 = 1) = P(X = \pm 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

deci X^2 are repartiția

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix},$$

și astfel $E(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$.

O altă metodă de calcul se obține utilizând Propoziția 3.6.6:

$$E(X^2) = \sum_{x=-1}^{2} x^2 P(X = x) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Rezultă că dispersia lui X este

$$\mathrm{var}\,(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{11}{16},$$

iar deviația standard a lui X este $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}\,(X)} = \dfrac{\sqrt{11}}{4}$. □

Exemplul 3.6.2. Fie v.a. continuă X având densitatea de repartiție

$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{5}, & \text{dacă } x \in [-1, 3], \\ 0, & \text{dacă } x \notin [-1, 3] \end{cases}$$

(adică aceeași ca în Exemplul 3.4.2). Să se calculeze media, dispersia și deviația standard ale lui X.

Soluție. Media lui X este

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \frac{1}{5} \int_{-1}^{3} x|x| dx = \frac{1}{5} \int_{-1}^{0} (-x^2) dx + \frac{1}{5} \int_{0}^{3} x^2 dx \\ &= -\left.\frac{x^3}{15}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{x^3}{15}\right|_{0}^{3} = -\frac{1}{15} + \frac{27}{15} = \frac{26}{15}. \end{aligned}$$

Calculăm dispersia v.a. X utilizând formula $\mathrm{var}\,(X) = E(X^2) - E^2(X)$.
Avem

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \frac{1}{5} \int_{-1}^{3} x^2|x| dx = \frac{1}{5} \int_{-1}^{0} (-x^3) dx + \frac{1}{5} \int_{0}^{3} x^3 dx \\ &= -\left.\frac{x^4}{20}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{x^4}{20}\right|_{0}^{3} = \frac{1}{20} + \frac{81}{20} = \frac{82}{20} = \frac{41}{10}, \end{aligned}$$

deci $\quad \mathrm{var}\,(X) = E(X^2) - E^2(X) = \dfrac{41}{10} - \left(\dfrac{26}{15}\right)^2 = \dfrac{41}{10} - \dfrac{676}{225} = \dfrac{493}{450}.$

Deviația standard a a lui X este $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}\,(X)} = \sqrt{\dfrac{493}{450}} \simeq 1{,}05$. □

Observația 3.6.5. Dispersia unei variabile aleatoare măsoară abaterea acelei variabile de la media sa, adică gradul de împrăștiere a valorilor variabilei, având ca unitate de măsură pătratul unității de măsură a valorilor variabilei. Deviația standard măsoară același lucru, dar are ca unitate de măsură chiar unitatea de măsură a valorilor variabilei.

Conform punctului 4 din propoziția anterioară rezultă că dacă dispersia unei variabile aleatoare este egală cu zero, atunci masa de probabilitate a variabilei este concentrată în valoarea sa medie.

De asemenea rezultă că o variabilă aleatoare absolut continuă nu poate avea dispersia egală cu zero.

Definiția 3.6.4. *Fie $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ două variabile aleatoare (discrete sau continue).*

1. ***Covarianța v.a.*** X ***și*** Y *este*

$$\mathrm{cov}\,(X,Y) = E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big),$$

sub presupunerea că mediile există și sunt finite.

2. ***Coeficientul de corelație al v.a.*** X ***și*** Y *este*

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}\,(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

sub presupunerea că abaterile medii pătratice există și sunt nenule.

Dacă $\rho(X,Y)=0$*, atunci spunem că* X *și* Y *sunt* ***v.a. necorelate****.*

Propoziția 3.6.9 (**Proprietăți ale covarianței**).
a) Fie $X:\Omega\to\mathbb{R}$ *o variabilă aleatoare (discretă sau continuă). Avem:*

1. $\mathrm{cov}\,(X,X) = \mathrm{var}\,(X)$;
2. $\mathrm{cov}\,(X,a) = 0,\ \forall a\in\mathbb{R}$.

b) Fie $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ *două variabile aleatoare (discrete sau continue). Avem:*

1. $\mathrm{cov}\,(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$;
2. $\mathrm{cov}\,(Y,X) = \mathrm{cov}\,(X,Y)$;
3. $\mathrm{cov}\,(X+a,Y+b) = \mathrm{cov}\,(X,Y),\ \forall a,b\in\mathbb{R}$;
4. $\mathrm{cov}\,(aX,bY) = ab\cdot\mathrm{cov}\,(X,Y),\ \forall a,b\in\mathbb{R}$;
5. $\mathrm{var}\,(X+Y) = \mathrm{var}\,(X)+\mathrm{var}\,(Y)+2\,\mathrm{cov}\,(X,Y)$;
6. $\mathrm{var}\,(X-Y) = \mathrm{var}\,(X)+\mathrm{var}\,(Y)-2\,\mathrm{cov}\,(X,Y)$.

c) Fie $X_1,X_2,\ldots,X_n:\Omega\to\mathbb{R}$ *variabile aleatoare (discrete sau continue),* $n\geq 2$*. Avem*

$$\mathrm{var}\,(X_1+X_2+\ldots+X_n) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}\,(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\mathrm{cov}\,(X_i,X_j).$$

d) Fie $X,Y,Z:\Omega\to\mathbb{R}$ *trei variabile aleatoare (discrete sau continue). Atunci:*

$$\mathrm{cov}\,(X+Y,Z) = \mathrm{cov}\,(X,Z)+\mathrm{cov}\,(Y,Z).$$

Demonstraţie. a) 1. Avem $\mathrm{cov}\,(X,X) = E\big((X-E(X))^2\big) = \mathrm{var}\,(X)$.
2. Avem $\mathrm{cov}\,(X,a) = E\big((X-E(X))(a-E(a))\big) = E\big((X-E(X))(a-a)\big) = E(0) = 0$.
b) 1. Utilizând proprietățile mediei, avem

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}\,(X,Y) &= E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big) = E\big(XY - E(Y)\cdot X - E(X)\cdot Y + E(X)E(Y)\big)\\ &= E(XY) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y).\end{aligned}$$

Analog se demonstrează și celelalte egalități din enunț. □

Propoziția 3.6.10 (**Proprietăți ale coeficientului de corelație**). *Fie* $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ *două variabile aleatoare (discrete sau continue) a.î.* $\mathrm{var}\,(X)>0$ *și* $\mathrm{var}\,(Y)>0$*. Avem:*

1. *$\rho(Y,X)=\rho(X,Y)$;*

2. *$\rho(X,Y)\in[-1,1]$;*

3. *$\rho(X,Y)=1$ dacă și numai dacă există $t\in\mathbb{R}$, $t>0$ a.î. $P\big(Y-E(Y)=t(X-E(X))\big)=1$;*

4. *$\rho(X,Y)=-1$ dacă și numai dacă există $t\in\mathbb{R}$, $t<0$ a.î. $P\big(Y-E(Y)=t(X-E(X))\big)=1$;*

5. *$\rho(X+a,Y+b)=\rho(X,Y)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$;*

6. *$\rho(aX,bY)=\begin{cases}\rho(X,Y), & \text{dacă } ab>0\\ -\rho(X,Y), & \text{dacă } ab<0\end{cases}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}^*$.*

Demonstrație. 1. Avem $\rho(Y,X)=\dfrac{\mathrm{cov}\,(Y,X)}{\sigma_Y\sigma_X}=\dfrac{\mathrm{cov}\,(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\rho(X,Y)$.

2. Utilizând proprietățile dispersiei avem

$$0\le \mathrm{var}\,(Y-tX)=\mathrm{var}\,(Y)-2\mathrm{cov}\,(Y,tX)+\mathrm{var}\,(tX)=\mathrm{var}\,(X)\cdot t^2-2\mathrm{cov}\,(X,Y)\cdot t+\mathrm{var}\,(Y),\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Cum $\mathrm{var}\,(X)>0$, conform semnului funcției de gradul al doilea rezultă că

$$\Delta=4\mathrm{cov}\,^2(X,Y)-4\mathrm{var}\,(X)\mathrm{var}\,(Y)\le 0,$$

deci $\rho^2(X,Y)=\dfrac{\mathrm{cov}\,^2(X,Y)}{\mathrm{var}\,(X)\mathrm{var}\,(Y)}\le 1$ și astfel $\rho(X,Y)\in[-1,1]$.

Analizând cazurile de egalitate și aplicând punctul 4 din Propoziția 3.6.8 se obțin relațiile de la punctele 3 și 4.

5. Utilizând proprietățile covarianței și ale dispersiei avem

$$\rho(X+a,Y+b)=\frac{\mathrm{cov}\,(X+a,Y+b)}{\sqrt{\mathrm{var}\,(X+a)\cdot\mathrm{var}\,(Y+b)}}=\frac{\mathrm{cov}\,(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}\,(X)\cdot\mathrm{var}\,(Y)}}=\rho(X,Y).$$

Analog se demonstrează și egalitatea de la punctul 6. □

Observația 3.6.6. Coeficientul de corelație măsoară gradul de condiționare reciprocă (interdependență) dintre două variabile aleatoare. Conform punctelor 5 și 6 din propoziția anterioară rezultă că dacă acest coeficient este egal cu 1, atunci intre cele două variabile există o relație de interdependență liniară crescătoare, iar dacă acest coeficient este egal cu -1, atunci intre cele două variabile există o relație de interdependență liniară descrescătoare.

Propoziția 3.6.11. *a) Dacă X și Y sunt v.a. independente și cu mediile finite, atunci:*

1. *$E(XY)=E(X)E(Y)$;*

2. *$\mathrm{cov}\,(X,Y)=0$;*

3. *$\rho(X,Y)=0$;*

4. *$\mathrm{var}\,(X+Y)=\mathrm{var}\,(X)+\mathrm{var}\,(Y)$.*

b) Dacă $X_1,X_2,\ldots,X_n$ $(n\ge 2)$ sunt v.a. independente și cu mediile finite, atunci

$$\mathrm{var}\,(X_1+X_2+\ldots+X_n)=\mathrm{var}\,(X_1)+\mathrm{var}\,(X_2)+\ldots+\mathrm{var}\,(X_n).$$

Demonstrație. a) 1. Cazul i) Dacă v.a. X și Y sunt discrete, atunci utilizând Propozițiile 3.6.2 și 3.5.4 avem

$$\begin{aligned}E(XY) &= \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} xyp_{(X,Y)}(x,y) = \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} xyp_X(x)p_Y(y)\\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} xp_X(x)\sum_{y\in Y(\Omega)} yp_Y(y) = E(X)E(Y).\end{aligned}$$

Cazul ii) Dacă v.a. X și Y sunt continue, atunci utilizând Propozițiile 3.6.4 și 3.5.11 avem

$$\begin{aligned}E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_{(X,Y)}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dxdy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy = E(X)E(Y).\end{aligned}$$

2. $\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.$

3. $\rho(X,Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = 0.$

4. $\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y).$

b) $\operatorname{var}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\operatorname{var}(X_i) + 2\sum\limits_{1\le i<j\le n}\operatorname{cov}(X_i,X_j) = \sum\limits_{i=1}^{n}\operatorname{var}(X_i).$ □

Exemplul 3.6.3. Fie X și Y variabilele aleatoare finite din Exemplul 3.5.1.

a) Să se calculeze covarianța v.a. X și Y.

b) Să se calculeze coeficientul de corelație al v.a. X și Y.

Soluție. Conform rezolvării Exemplului 3.5.1, v.a. X și Y au repartițiile

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25\end{pmatrix},\quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\\ 0{,}64 & 0{,}32 & 0{,}04\end{pmatrix},$$

iar repartiția comună a v.a. X și Y este

$X\diagdown Y$	0	1	2
0	0,09	0,12	0,04
1	0,3	0,2	0
2	0,25	0	0

a) Calculăm covarianța v.a. X și Y utilizând formula

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Avem

$$\begin{aligned}E(XY) &= \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xyP(X=x, Y=y)\\ &= 0\cdot 0\cdot 0{,}09 + 0\cdot 1\cdot 0{,}12 + 0\cdot 2\cdot 0{,}04 + 1\cdot 0\cdot 0{,}3 + 1\cdot 1\cdot 0{,}2\\ &\quad + 1\cdot 2\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 0{,}25 + 2\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 2\cdot 0 = 0{,}2,\\ E(X) &= \sum_{x=0}^{2} xP(X=x) = 0\cdot 0{,}25 + 1\cdot 0{,}5 + 2\cdot 0{,}25 = 1,\\ E(Y) &= \sum_{y=0}^{2} yP(Y=y) = 0\cdot 0{,}64 + 1\cdot 0{,}32 + 2\cdot 0{,}04 = 0{,}4,\end{aligned}$$

deci $\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0{,}2 - 1 \cdot 0{,}4 = -0{,}2$.

b) Calculăm coeficientul de corelație utilizând formula $\rho(X,Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.
Avem

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x=0}^{2} x^2 P(X=x) = 0^2 \cdot 0{,}25 + 1^2 \cdot 0{,}5 + 2^2 \cdot 0{,}25 = 1{,}5,\\
\operatorname{var}(X) &= E(X^2) - E^2(X) = 1{,}5 - 1^2 = 0{,}5,\\
\sigma_X &= \sqrt{\operatorname{var}(X)} = \sqrt{0{,}5} = \frac{\sqrt{2}}{2},\\
E(Y^2) &= \sum_{y=0}^{2} y^2 P(Y=y) = 0^2 \cdot 0{,}64 + 1^2 \cdot 0{,}32 + 2^2 \cdot 0{,}04 = 0{,}48,\\
\operatorname{var}(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) = 0{,}48 - 0{,}4^2 = 0{,}32,\\
\sigma_Y &= \sqrt{\operatorname{var}(Y)} = \sqrt{0{,}32} = \frac{2\sqrt{2}}{5},
\end{aligned}$$

deci

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-0{,}2}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{5}} = -0{,}5.$$

□

Exemplul 3.6.4. Fie v.a. continue X și Y având densitatea de repartiție comună

$$f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y}{24}, & \text{dacă } x \in [0,3] \text{ și } y \in [0,2],\\ 0, & \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

adică aceeași ca în Exemplul 3.5.3.

a) Să se calculeze covarianța v.a. X și Y.

b) Să se calculeze coeficientul de corelație al v.a. X și Y.

Soluție. Conform rezolvării Exemplului 3.5.3, v.a. X și Y au densitățile de repartiție

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{12}, & \text{dacă } x \in [0,3]\\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y+3}{8}, & \text{dacă } y \in [0,2]\\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}.$$

a) Calculăm covarianța v.a. X și Y utilizând formula

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Avem

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_0^2 \int_0^3 xyf_{(X,Y)}dxdy = \frac{1}{24}\int_0^2 \int_0^3 (x^3y + xy^2)dxdy \\
&= \frac{1}{24}\left(\int_0^3 x^3dx \int_0^2 ydy + \int_0^3 xdx \int_0^2 y^2dy\right) = \frac{1}{24}\left(\frac{x^4}{4}\bigg|_0^3 \cdot \frac{y^2}{2}\bigg|_0^2 + \frac{x^2}{2}\bigg|_0^3 \cdot \frac{y^3}{3}\bigg|_0^2\right) \\
&= \frac{1}{24}\left(\frac{81}{4}\cdot 2 + \frac{9}{2}\cdot\frac{8}{3}\right) = \frac{35}{16}, \\
E(X) &= \int_0^3 xf_X(x)dx = \frac{1}{12}\int_0^3 (x^3+x)dx = \frac{1}{12}\left(\frac{x^4}{4}\bigg|_0^3 + \frac{x^2}{2}\bigg|_0^3\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{81}{4}+\frac{9}{2}\right) = \frac{33}{16}, \\
E(Y) &= \int_0^2 yf_Y(y)dy = \frac{1}{8}\int_0^2 (y^2+3y)dy = \frac{1}{8}\left(\frac{y^3}{3}\bigg|_0^2 + \frac{3y^2}{2}\bigg|_0^2\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{8}{3}+6\right) = \frac{13}{12},
\end{aligned}$$

deci

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{35}{16} - \frac{33}{16}\cdot\frac{13}{12} = -\frac{3}{64}.$$

b) Calculăm coeficientul de corelație utilizând formula

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Avem

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^3 x^2f_X(x)dx = \frac{1}{12}\int_0^3 (x^4+x^2)dx = \frac{1}{12}\left(\frac{x^5}{5}\bigg|_0^3 + \frac{x^3}{3}\bigg|_0^3\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{243}{5}+9\right) = \frac{24}{5}, \\
\operatorname{var}(X) &= E(X^2) - E^2(X) = \frac{24}{5} - \left(\frac{33}{16}\right)^2 = \frac{699}{1280}, \\
\sigma_X &= \sqrt{\operatorname{var}(X)} = \sqrt{\frac{699}{1280}} = \frac{\sqrt{3495}}{80}, \\
E(Y^2) &= \int_0^2 y^2f_Y(y)dy = \frac{1}{8}\int_0^2 (y^3+3y^2)dy = \frac{1}{8}\left(\frac{y^4}{4}\bigg|_0^2 + y^3\big|_0^2\right) = \frac{1}{8}(4+8) = \frac{3}{2}, \\
\operatorname{var}(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{3}{2} - \left(\frac{13}{12}\right)^2 = \frac{47}{144}, \\
\sigma_Y &= \sqrt{\operatorname{var}(Y)} = \sqrt{\frac{47}{144}} = \frac{\sqrt{47}}{12},
\end{aligned}$$

deci

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{-\frac{3}{64}}{\frac{\sqrt{3495}}{80}\cdot\frac{\sqrt{47}}{12}} = -\frac{3\sqrt{15}}{\sqrt{10951}} \simeq 0{,}111.$$

□

Observația 3.6.7. Proprietatea 3 din Propoziția 3.6.11 poate fi reformulată astfel: dacă v.a. X și Y sunt independente, atunci X și Y sunt necorelate.

Reciproca acestei afirmații nu este adevărată.

De exemplu, fie variabilele aleatoare finite X și Y având repartiția comună și repartițiile individuale reprezentate în următorul tabel.

$X \diagdown Y$	-1	0	1	$P(X = x_i)$
-2	0	0,125	0	0,125
-1	0	0,125	0	0,125
0	0,25	0	0,25	0,5
1	0	0,125	0	0,125
2	0	0,125	0	0,125
$P(Y = y_j)$	0,25	0,5	0,25	—

Avem

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 \cdot 0 = 0,$$

deci $\rho(X, Y) = 0$ și astfel X și Y sunt necorelate, dar X și Y nu sunt independente, deoarece, de exemplu,

$$P(X = 0, Y = 0) = 0 \neq 0,5 \cdot 0,5 = P(X = 0)P(Y = 0).$$

Definiția 3.6.5. *Fie $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vector aleator n-dimensional, $n \geq 2$.*

1. ***Media v.a.*** *X este vectorul*

$$E(X) = (E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n))$$

(sub presupunerea că există mediile $E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n)$).

2. ***Matricea de covarianță a v.a.*** *X este matricea*

$$\operatorname{Cov}(X) = (\operatorname{cov}(X_i, X_j))_{i,j=\overline{1,n}}$$

(sub presupunerea că există covarianțele $\operatorname{cov}(X_i, X_j)$, pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$).

Observația 3.6.8. Matricea de covarianță $\operatorname{Cov}(X)$ a unui vector aleator X se mai notează și cu $\operatorname{Var}(X)$.

Definiția 3.6.6. *a) O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește* ***pozitiv semidefinită*** *dacă*

$$xAx^\top \geq 0, \ \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

unde $x^\top$ este transpusul vectorului x.

b) O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește ***pozitiv definită*** *dacă*

$$xAx^\top > 0, \ \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\},$$

unde $0_n = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ este vectorului nul.

Propoziția 3.6.12. *Dacă $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ este un vector aleator n-dimensional ($n \geq 2$) având matricea de covarianță $\operatorname{Cov}(X)$, atunci matricea $\operatorname{Cov}(X)$ este simetrică și pozitiv semidefinită.*

Demonstraţie. Evident, matricea $\operatorname{Cov}(X)$ este simetrică, deoarece

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \operatorname{cov}(X_j, X_i), \ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avem

$$\begin{aligned} x\operatorname{Cov}(X)x^\top &= xE\left((X - E(X))^\top (X - E(X))\right) x^\top \\ &= E\left(x(X - E(X))^\top (X - E(X))x^\top\right) \\ &= E\left((xX^\top - E(xX^\top))(xX^\top - E(xX^\top))^\top\right) \\ &= E\left((xX^\top - E(xX^\top))^2\right) \\ &= \operatorname{var}(xX^\top) \geq 0, \end{aligned}$$

deci matricea $\operatorname{Cov}(X)$ este pozitiv semidefinită. □

Exemplul 3.6.5. Fie $Z = (X, Y)$ variabila aleatoare bidimensională finită din Exemplul 3.5.1. Se cere să se calculeze media și matricea de covarianță ale lui Z.

Soluție. Utilizând rezolvarea Exemplului 3.6.3 și proprietățile covarianței, avem

$$\begin{gathered} E(X) = 1,\ E(Y) = 0{,}4, \\ \operatorname{cov}(X, X) = \operatorname{var}(X) = 0{,}5, \\ \operatorname{cov}(Y, Y) = \operatorname{var}(Y) = 0{,}32, \\ \operatorname{cov}(Y, X) = \operatorname{cov}(X, Y) = -0{,}2, \end{gathered}$$

deci media vectorului aleator $Z = (X, Y)$ este vectorul

$$E(Z) = (E(X), E(Y)) = (1; 0{,}4),$$

iar matricea de covarianță este

$$\operatorname{Cov}(Z) = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(X, X) & \operatorname{cov}(X, Y) \\ \operatorname{cov}(Y, X) & \operatorname{cov}(Y, Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{var}(X) & \operatorname{cov}(X, Y) \\ \operatorname{cov}(X, Y) & \operatorname{var}(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}32 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Exemplul 3.6.6. Fie $Z = (X, Y)$ variabila aleatoare bidimensională continuă din Exemplul 3.6.4. Se cere să se calculeze media și matricea de covarianță ale lui Z.

Soluție. Utilizând rezolvarea Exemplului 3.6.4 și proprietățile covarianței, avem

$$\begin{gathered} E(X) = \frac{33}{16},\ E(Y) = \frac{13}{12}, \\ \operatorname{cov}(X, X) = \operatorname{var}(X) = \frac{699}{1280}, \\ \operatorname{cov}(Y, Y) = \operatorname{var}(Y) = \frac{47}{144}, \\ \operatorname{cov}(Y, X) = \operatorname{cov}(X, Y) = -\frac{3}{64}, \end{gathered}$$

deci media vectorului aleator $Z = (X, Y)$ este vectorul

$$E(Z) = (E(X), E(Y)) = \left(\frac{33}{16}, \frac{13}{12}\right),$$

iar matricea de covarianță este

$$\operatorname{Cov}(Z) = \begin{pmatrix} \operatorname{var}(X) & \operatorname{cov}(X, Y) \\ \operatorname{cov}(X, Y) & \operatorname{var}(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{699}{1280} & -\dfrac{3}{64} \\ -\dfrac{3}{64} & \dfrac{47}{144} \end{pmatrix}.$$

$\square$

3.7 Variabile aleatoare condiționate

Lema 3.7.1. *Fie* $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ *un câmp de probabilitate,* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *o variabilă aleatoare și* $A \in \mathcal{B}$ *un eveniment a.î.* $P(A) > 0$. *Fie*

$$\mathcal{B}_A = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

Atunci $(A, \mathcal{B}_A, P_A)$ *este un câmp de probabilitate, unde* P_A *este probabilitatea condiționată de evenimentul* A *(mai precis restricția acesteia la subfamilia* $\mathcal{B}_A$ *a familiei* $\mathcal{B}$*).*

Demonstraţie. Evident, $A \in \mathcal{B}_A$, deci $\mathcal{B}_A \neq \emptyset$.

Dacă $B' \in \mathcal{B}_A$, atunci există $B \in \mathcal{B}$ a.î. $B' = B \cap A$, deci $A \setminus B' = A \setminus (B \cap A)) = A \cap \overline{B} \in \mathcal{B}_A$.

Dacă $(B'_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}_A$, atunci există $(B'_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \subseteq \mathcal{B}$ a.î. $B'_i = B_i \cap A$, $\forall i \in N^*$, deci

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B'_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B'_i \cap A) = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B'_i\right) \cap A \in \mathcal{B}_A.$$

Astfel $(A, \mathcal{B}_A)$ este un spațiu măsurabil.

Deoarece funcția P_A este o probabilitate pe spațiul măsurabil $(\Omega, \mathcal{B})$ și $P_A(A) = \dfrac{P(A \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$, rezultă că restricția funcției P_A la $\mathcal{B}_A$ este o probabilitate pe spațiul măsurabil $(A, \mathcal{B}_A)$, deci $(A, \mathcal{B}_A, P_A)$ este un câmp de probabilitate. □

Propoziția 3.7.1. *Fie* $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ *un câmp de probabilitate,* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *o variabilă aleatoare și* $A \in \mathcal{B}$ *un eveniment a.î.* $P(A) > 0$. *Atunci restricția funcției* X *la submulțimea* $A \subseteq \Omega$*, adică funcția*

$$X|A : A \to \mathbb{R},\ (X|A)(\omega) = X(\omega),\ \forall \omega \in A,$$

este o variabilă aleatoare definită pe câmpul de probabilitate $(A, \mathcal{B}_A, P_A)$*, având funcția de repartiție*

$$F_{X|A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F_{X|A}(x) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap A)}{P(A)},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţie. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $(X|A)^{-1}((-\infty, x]) = X^{-1}((-\infty, x]) \cap A \in \mathcal{B}_A$, deci $X|A$ este o variabilă aleatoare. Avem

$$F_{X|A}(x) = P(X \leq x|A) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap A)}{P(A)},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Definiția 3.7.1. *În contextul propoziției anterioare,* $X|A$ *se numește* ***variabilă aleatoare condiționată de evenimentul*** A. *Funcția sa de repartiție,* $F_{X|A}$*, se numește* ***funcția de repartiție a v.a.*** X ***condiționată de evenimentul*** A. *Media sa,* $E(X|A)$*, se numește* ***media v.a.*** X ***condiționată de evenimentul*** A.

Propoziția 3.7.2. *În contextul propoziției anterioare, dacă v.a.* X *este discretă, atunci și v.a.* $X|A$ *este discretă. Masa sa de probabilitate este*

$$p_{X|A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p_{X|A}(x) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)},\ \forall x \in \mathbb{R},$$

iar media sa este

$$E(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x p_{X|A}(x)$$

(sub presupunerea că suma seriei există, în cazul în care v.a. X *este numărabilă).*

Demonstraţie. Avem $(X|A)(A) = X(A) \subseteq X(\Omega)$, deci v.a. $X|A$ este discretă. Conform definiției masei de probabilitate și formulei probabilității condiționate avem

$$p_{X|A}(x) = P(X = x|A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ultima formulă din enunț este evidentă, conform formulei mediei v.a. discrete. □

Definiția 3.7.2. *În contextul propoziției anterioare, funcția $p_{X|A}$ se numește* ***masa de probabilitate a v.a.*** *X* ***condiționată de evenimentul*** *A.*

Propoziția 3.7.3. *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare discretă, I o mulțime cel mult numărabilă de indici și fie $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}$ a.î. $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$. Avem*

$$p_X(x) = \sum_{\substack{i\in I \\ P(A_i)>0}} P(A_i)p_{X|A_i}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

De asemenea, avem

$$E(X) = \sum_{\substack{i\in I \\ P(A_i)>0}} P(A_i)E(X|A_i)$$

(sub presupunerea că $X \geq 0$, în cazul în care v.a. X este numărabilă și mulțimea I este numărabilă).

Demonstraţie. Prima egalitate este o rescriere evidentă a formulei probabilității totale. Avem

$$E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xp_X(x) = \sum_{x\in X(\Omega)} \left(x \sum_{\substack{i\in I \\ P(A_i)>0}} P(A_i)p_{X|A_i}(x) \right) = \sum_{\substack{i\in I \\ P(A_i)>0}} \left(P(A_i) \sum_{x\in X(\Omega)} xp_{X|A_i}(x) \right)$$
$$= \sum_{\substack{i\in I \\ P(A_i)>0}} P(A_i)E(X|A_i)$$

(presupunerea suplimentară din enunț asigură posibilitatea permutării celor două sume). □

Propoziția 3.7.4. *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate, $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ două variabile aleatoare discrete și fie $y \in \mathbb{R}$ a.î. $P(Y = y) > 0$. Atunci $X|\{Y = y\}$ este o variabilă aleatoare discretă având masa de probabilitate*

$$p_{X|\{Y=y\}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ p_{X|\{Y=y\}}(x) = \frac{p_{(X,Y)}(x, y)}{p_Y(y)}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

unde $p_{(X,Y)}$ este masa de probabilitate comună a v.a. X și Y, iar p_Y este masa de probabilitate a v.a. Y.

Demonstraţie. Se aplică Propoziția 3.7.2 pentru evenimentul $A = \{Y = y\}$. □

Definiția 3.7.3. *În contextul corolarului anterior, funcția $p_{X|\{Y=y\}}$ se numește* ***masa de probabilitate a v.a.*** *X* ***condiționată de*** *$Y = y$ și se notează și cu $p_{X|Y}(\cdot|y)$.*

Propoziția 3.7.5. *În contextul propoziției anterioare, media v.a. $X|\{Y = y\}$ este*

$$E(X|Y = y) = \sum_{x\in X(\Omega)} xp_{X|Y}(x|y)$$

(sub presupunerea că suma seriei există, în cazul în care v.a. X este numărabilă).

Demonstrație. Se aplică Propoziția 3.7.2 pentru evenimentul $A = \{Y = y\}$. □

Propoziția 3.7.6 (formula probabilității totale pentru mase de probabilitate). *Fie* $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ *un câmp de probabilitate și fie* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *două variabile aleatoare discrete. Atunci*

$$p_X(x) = \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ p_Y(y) > 0}} p_Y(y) p_{X|Y}(x|y), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstrație. Se aplică Propoziția 3.7.3 pentru evenimentele $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$. O demonstrație directă este următoarea:

$$\begin{aligned} p_X(x) &= P(X = x) = P\Big(\bigcup_{y \in Y(\Omega)} \{X = x, Y = y\}\Big) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ P(Y=y) > 0}} P(X = x, Y = y) = \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ p_Y(y) > 0}} p_{(X,Y)}(x, y) = \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ p_Y(y) > 0}} p_Y(y) p_{X|Y}(x|y), \end{aligned}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. □

Propoziția 3.7.7. *În contextul propoziției anterioare, avem*

$$E(X) = \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ p_Y(y) > 0}} p_Y(y) E(X|Y = y)$$

(sub presupunerea că $X \geq 0$*, în cazul în care ambele v.a.* X *și* Y *sunt numărabile).*

Demonstrație. Se aplică Propoziția 3.7.3 pentru evenimentele $(\{Y = y\})_{y \in Y(\Omega)}$. □

Propoziția 3.7.8 (formula lui Bayes pentru mase de probabilitate). *Fie* $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ *un câmp de probabilitate,* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *două variabile aleatoare discrete și fie* $x, y \in \mathbb{R}$ *a.î.* $p_X(x) > 0$ *și* $p_Y(y) > 0$*. Atunci*

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_Y(y) p_{X|Y}(x|y)}{p_X(x)} = \frac{p_Y(y) p_{X|Y}(x|y)}{\sum\limits_{\substack{t \in Y(\Omega) \\ p_Y(t) > 0}} p_Y(t) p_{X|Y}(x|t)}.$$

Demonstrație. Conform formulei masei de probabilitate condiționate și formulei probabilității totale pentru mase de probabilitate avem

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{(X,Y)}(x, y)}{p_X(x)} = \frac{p_Y(y) p_{X|Y}(x|y)}{p_X(x)} = \frac{p_Y(y) p_{X|Y}(x|y)}{\sum\limits_{\substack{t \in Y(\Omega) \\ p_Y(t) > 0}} p_Y(t) p_{X|Y}(x|t)}.$$

□

Propoziția 3.7.9. *Fie* $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ *un câmp de probabilitate și fie* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *două variabile aleatoare discrete. Atunci* X *și* Y *sunt independente dacă și numai dacă*

$$p_{X|Y}(x|y) = p_X(x), \ \forall x \in X(\Omega), \ \forall y \in Y(\Omega) \ a.î. \ p_Y(y) > 0.$$

Demonstrație. Echivalența din enunț este o consecință imediată a Propozițiilor 3.5.4 și 3.7.4, utilizând faptul că pentru $p_Y(y) = 0$, cum $\{X = x, Y = y\} \subseteq \{Y = y\}$, avem și $p_{(X,Y)}(x, y) = 0$, pentru orice $x \in X(\Omega)$. □

Exemplul 3.7.1. Fie X și Y variabilele aleatoare finite din Exemplul 3.5.1.

a) Să se calculeze repartițiile și mediile variabilelor aleatoare condiționate $X|\{Y = y_j\}$ și $Y|\{X = x_i\}$, pentru $i, j \in \{0, 1, 2\}$.

b) Utilizând rezultatele obținute la punctul a), să se calculeze mediile v.a. X și Y.

Soluție. Conform rezolvării Exemplului 3.5.1, v.a. X și Y au repartiția comună și repartițiile marginale reprezentate în următorul tabel.

$X\diagdown Y$	0	1	2	$P(X = x_i)$
0	0,09	0,12	0,04	0,25
1	0,3	0,2	0	0,5
2	0,25	0	0	0,25
$P(Y = y_j)$	0,64	0,32	0,04	—

a) Aplicând formula masei de probabilitate condiționate

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{(X,Y)}(x, y)}{p_Y(y)}, \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

avem

$$p_{X|Y}(0|0) = \frac{0{,}09}{0{,}64} = \frac{9}{64}, \ p_{X|Y}(1|0) = \frac{0{,}3}{0{,}64} = \frac{30}{64}, \ p_{X|Y}(2|0) = \frac{0{,}25}{0{,}64} = \frac{25}{64},$$
$$p_{X|Y}(0|1) = \frac{0{,}12}{0{,}32} = \frac{3}{8}, \quad p_{X|Y}(1|1) = \frac{0{,}2}{0{,}32} = \frac{5}{8}, \quad p_{X|Y}(2|1) = \frac{0}{0{,}32} = 0,$$
$$p_{X|Y}(0|2) = \frac{0{,}04}{0{,}04} = 1, \quad p_{X|Y}(1|2) = \frac{0}{0{,}04} = 0, \quad p_{X|Y}(2|2) = \frac{0}{0{,}04} = 0,$$

deci repartițiile variabilelor aleatoare condiționate $X|\{Y = y_j\}$, $j \in \{0, 1, 2\}$, sunt:

$$X|\{Y = 0\} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{9}{64} & \frac{30}{64} & \frac{25}{64} \end{pmatrix}, \quad X|\{Y = 1\} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} & 0 \end{pmatrix}, \quad X|\{Y = 2\} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mediile lor sunt:

$$E(X|Y = 0) = 0 \cdot \frac{9}{64} + 1 \cdot \frac{30}{64} + 2 \cdot \frac{25}{64} = \frac{5}{4},$$
$$E(X|Y = 1) = 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{5}{8} + 2 \cdot 0 = \frac{5}{8},$$
$$E(X|Y = 2) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0.$$

Analog, aplicând formula masei de probabilitate condiționate

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{(X,Y)}(x, y)}{p_X(x)}, \ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

avem

$$p_{Y|X}(0|0) = \frac{0{,}09}{0{,}25} = \frac{9}{25}, \ p_{Y|X}(1|0) = \frac{0{,}12}{0{,}25} = \frac{12}{25}, \ p_{Y|X}(2|0) = \frac{0{,}04}{0{,}25} = \frac{4}{25},$$
$$p_{Y|X}(0|1) = \frac{0{,}3}{0{,}5} = \frac{3}{5}, \quad p_{Y|X}(1|1) = \frac{0{,}2}{0{,}5} = \frac{2}{5}, \quad p_{Y|X}(2|1) = \frac{0}{0{,}5} = 0,$$
$$p_{Y|X}(0|2) = \frac{0{,}25}{0{,}25} = 1, \quad p_{Y|X}(1|2) = \frac{0}{0{,}25} = 0, \quad p_{Y|X}(2|2) = \frac{0}{0{,}25} = 0,$$

deci repartițiile variabilelor aleatoare condiționate $X|\{Y = y_j\}$, $j \in \{0, 1, 2\}$, sunt:

$$Y|\{X=0\} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}, \quad Y|\{X=1\} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}, \quad Y|\{X=2\} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mediile lor sunt:

$$\begin{aligned} E(Y|X=0) &= 0 \cdot \frac{9}{25} + 1 \cdot \frac{12}{25} + 2 \cdot \frac{4}{25} = \frac{4}{5}, \\ E(Y|X=1) &= 0 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot 0 = \frac{2}{5}, \\ E(Y|X=2) &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

b) Aplicând Propoziția 3.7.7 avem:

$$\begin{aligned} E(X) &= p_Y(0)E(X|Y=0) + p_Y(1)E(X|Y=1) + p_Y(2)E(X|Y=2) \\ &= 0{,}64 \cdot \frac{5}{4} + 0{,}32 \cdot \frac{5}{8} + 0{,}04 \cdot 0 = 1, \\ E(Y) &= p_X(0)E(Y|X=0) + p_X(1)E(Y|X=1) + p_X(2)E(Y|X=2) \\ &= 0{,}25 \cdot \frac{4}{5} + 0{,}5 \cdot \frac{2}{5} + 0{,}25 \cdot 0 = 0{,}4. \end{aligned}$$

□

Definiția 3.7.4. *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare absolut continuă și $A \in \mathcal{B}$ un eveniment a.î. $P(A) > 0$. Dacă v.a. condiționată $X|A$ este o variabilă aleatoare absolut continuă, atunci densitatea sa de repartiție $f_{X|A}$ se numește* ***densitatea de repartiție a v.a.*** *X* ***condiționată de evenimentul*** *A.*

Propoziția 3.7.10. *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare continuă având densitatea de repartiție f_X și fie $A \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $X^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ și $P(X \in A) > 0$. Atunci v.a. condiționată $X|\{X \in A\}$ este o variabilă aleatoare continuă. Densitatea sa de repartiție este*

$$f_{X|\{X\in A\}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f_{X|\{X\in A\}}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{P(X \in A)}, & \text{dacă } x \in A, \\ 0, & \text{dacă } x \notin A, \end{cases}$$

iar media sa este

$$E(X|\{X \in A\}) = \int_A x f_{X|\{X\in A\}}(x)dx.$$

(sub presupunerea că integrala există).

Demonstrație. Deoarece funcția f_X este continuă, cu excepția unei mulțimi neglijabile de puncte, rezultă că și funcția $f_{X|\{X\in A\}}$ definită de (3.7.10) are această proprietate. Conform proprietăților funcției de repartiție și densității de repartiție și formulei probabilității condiționate avem

$$\begin{aligned} F_{X|\{X\in A\}}(x) &= P(X \le x | x \in A) = \frac{P(\{X \le x\} \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{P(A)} \int_{(-\infty,x)\cap A} f_X(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} f_{X|\{X\in A\}}(t)dt, \ \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

deci $F'_{X|\{X\in A\}} = f_{X|\{X\in A\}}$ (cu excepția unei mulțimi neglijabile de puncte), de unde rezultă că $X|\{X \in A\}$ este v.a. continuă cu densitatea de repartiție $f_{X|\{X\in A\}}$ dată de (3.7.10).

Ultima formulă din enunț este evidentă, conform formulei mediei v.a. continue. □

Propoziția 3.7.11. *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate și $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare continuă având densitatea de repartiție f_X. Fie $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$, $n \geq 2$, a.î. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, $P(A_i) > 0$ și $X|A_i$ este o v.a. continuă cu densitatea de repartiție $f_{X|A_i}$, pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$. Avem*

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) f_{X|A_i}(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

cu excepția unei mulțimi neglijabile de puncte. De asemenea, avem

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) E(X|A_i)$$

(sub presupunerea că mediile există).

Demonstrație. Conform formulei probabilității totale avem

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) F_{X|A_i}(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

de unde prin derivare se obține prima formulă din enunț. Avem

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x \sum_{i=1}^{n} P(A_i) f_{X|A_i}(x) \right) dx = \sum_{i=1}^{n} \left(P(A_i) \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|A_i}(x) \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) E(X|A_i).$$

□

Corolarul 3.7.1. *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate și $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ două variabilă aleatoare absolut continue. Fie $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$, a.î. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \supseteq Y(\Omega)$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, $Y^{-1}(A_i) \in \mathcal{B}$, $P(Y \in A_i) > 0$ și $X|\{Y \in A_i\}$ este o v.a. continuă cu densitatea de repartiție $f_{X|\{Y \in A_i\}}$, pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$. Avem*

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) f_{X|\{Y \in A_i\}}(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

cu excepția unei mulțimi neglijabile de puncte, unde f_X este densitatea de repartiție a v.a. X.

De asemenea, avem

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) E(X|\{Y \in A_i\})$$

(sub presupunerea că mediile există).

Demonstrație. Se aplică Propoziția 3.7.11 pentru evenimentele $(\{Y \in A_i\})_{i=\overline{1,n}}$. □

Propoziția 3.7.12. *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate, $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ două variabilă aleatoare absolut continue având densitatea de repartiție comună $f_{(X,Y)}$ și fie $y \in \mathbb{R}$ a.î. $f_Y(y) > 0$, unde f_Y este densitatea de repartiție a v.a. Y. Atunci funcția*

$$f_{X|\{Y=y\}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_{X|\{Y=y\}}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

este densitatea de repartiție a unei v.a. absolut continue.

Demonstrație. Evident, $f_{X|\{Y=y\}}(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Conform Propoziției 3.5.9 avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|\{Y=y\}}(x)dx = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dx}{f_Y(y)} = \frac{f_Y(y)}{f_Y(y)} = 1.$$

Conform Propoziției 3.4.3 rezultă afirmația din enunț. □

Definiția 3.7.5. *În contextul propoziției anterioare, funcția $f_{X|\{Y=y\}}$ se numește **densitatea de repartiție a v.a.** X **condiționată de** $Y = y$ și se notează și cu $f_{X|Y}(\cdot|y)$.*

*Variabila aleatoare continuă care are această densitate de repartiție se notează cu $X|\{Y = y\}$ și se numește **variabilă aleatoare condiționată de evenimentul** $\{Y = y\}$.*

Funcția sa de repartiție,

$$F_{X|\{Y=y\}} : \mathbb{R} \to [0,1],\ F_{X|\{Y=y\}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(t|y)dt,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

*se numește **funcția de repartiție a v.a.** X **condiționată de** $Y = y$ și se notează și cu $F_{X|Y}(\cdot|y)$.*

Media sa,

$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx,$$

*sub presupunerea că integrala există, se numește **media v.a.** X **condiționată de** $Y = y$.*

Pemtru orice $A \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $X^{-1}(A) \in \Omega$, probabilitatea

$$P((X|\{Y = y\}) \in A) = \int_A f_{X|Y}(x|y)dx$$

*se numește **probabilitatea ca** $X \in A$ **condiționată de** $Y = y$ și se notează și cu $P(X \in A|Y = y)$ sau cu $P_{Y=y}(X \in A)$.*

Observația 3.7.1. În contextul definiției anterioare, deoarece Y este o v.a. continuă avem

$$P(Y = y) = 0.$$

Deci noțiunile de variabilă aleatoare condiţionată $X|\{Y = y\}$ și de probabilitate condiţionată $P(X \in A|Y = y)$ astfel definite sunt o extindere a definițiilor anterioare, în care presupuneam că evenimentul fixat drept condiție, în cazul de față $\{Y = y\}$, are probabilitatea nenulă.

Evident, în cazul acestei extinderi formula probabilității condiționate,

$$P(X \in A|Y = y) = \frac{P(X \in A, Y = y)}{P(Y = y)},$$

nu se mai aplică, deoarece numitorul fracţiei este egal cu zero!

Totuși, formula echivalentă

$$P(X \in A, Y = y) = P(X \in A|Y = y) \cdot P(Y = y)$$

rămâne valabilă, deoarece $P(X \in A, Y = y) = P(Y = y) = 0$.

Propoziția 3.7.13 (formula probabilității totale pentru densități de repartiție). *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate și $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ două variabilă aleatoare absolut continue având densitate de repartiție comună. Atunci*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)dy,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

(luând, prin cconvenție, $f_{X|Y}(x|y)$ arbitrar, pentru $f_Y(y) = 0$).

Demonstrație. Utilizând formula densității de repartiție marginale, formula densității de repartiție condiționate și convenția din enunț, avem

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)dy,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. □

Propoziția 3.7.14. *În contextul propoziției anterioare, avem*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) E(X|Y = y)dy$$

(sub presupunerea că mediile există).

Demonstrație. Utilizând Propoziția 3.6.4, formula densității de repartiție condiționate și Definiția 3.7.5, avem

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{(X,Y)}(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) E(X|Y = y)dy. \end{aligned}$$

□

Propoziția 3.7.15 (formula lui Bayes pentru densități de repartiție). *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate, $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ două variabilă aleatoare absolut continue având densitate de repartiție comună și fie $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $f_X(x) > 0$ și $f_Y(y) > 0$. Atunci*

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)}{f_X(x)} = \frac{f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) f_{X|Y}(x|t)dt}$$

(luând, prin cconvenție, $f_{X|Y}(x|t)$ arbitrar, pentru $f_Y(t) = 0$).

Demonstrație. Conform formulei densității de repartiție condiționate și formulei probabilității totale pentru densități de repartiție avem

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)}{f_X(x)} = \frac{f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) f_{X|Y}(x|t)dt}.$$

□

Propoziția 3.7.16. *Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate, $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ două variabilă aleatoare absolut continue având densitate de repartiție comună. Presupunem că pentru orice $y \in \mathbb{R}$ a.î. $f_Y(y) = 0$ avem $f_{(X,Y)}(x,y) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, cu excepția unei mulțimi neglijabile de puncte. Atunci X și Y sunt independente dacă și numai dacă*

$$f_{X|Y}(x|y) = f_X(x), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ a.î. } f_Y(y) > 0,$$

cu excepția unei mulțimi neglijabile de puncte.

Demonstrație. Echivalența din enunț este o consecință imediată a Propoziției 3.5.11 și formulei densității de repartiție condiționate. □

Exemplul 3.7.2. Fie X și Y variabilele aleatoare continue din Exemplul 3.5.3 (pentru $a = \frac{1}{24}$).

a) Să se calculeze densitățile de repartiție și mediile variabilelor aleatoare condiționate $X|\{Y = y\}$ și $Y|\{X = x\}$, pentru $y \in [0, 2]$ și $x \in [0, 3]$.

b) Să se calculeze probabilitățile condiționate $P(X \in [1, 2]|Y = y)$ si $P(Y \in [0, 1]|X = x)$, pentru $y \in [0, 2]$ și $x \in [0, 3]$.

c) Să se calculeze mediile condiționate $E(X|Y = 1)$ si $E(Y|X = 2)$ și probabilitățile condiționate $P(X \in [1, 2]|Y = 1)$ si $P(Y \in [0, 1]|X = 2)$.

d) Utilizând rezultatele obținute la punctul a), să se calculeze mediile v.a. X și Y.

Soluție. Conform rezolvării Exemplului 3.5.3 v.a. X și Y au densitatea de repartiție comună

$$f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y}{24}, & \text{dacă } x \in [0, 3] \text{ și } y \in [0, 2], \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

și densitățile de repartiție (individuale, marginale)

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 1}{12}, & \text{dacă } x \in [0, 3] \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases},\quad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y + 3}{8}, & \text{dacă } y \in [0, 2] \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases}.$$

a) Fie $y \in [0, 2]$, deci $f_Y(y) > 0$. Aplicând formula densității de repartiție condiționate, rezultă că densitatea de repartiție a v.a. X condiționată de $Y = y$ este

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y}{3(y + 3)}, & \text{dacă } x \in [0, 3] \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Media sa este

$$\begin{aligned} E(X|Y = y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx = \int_0^3 \frac{x^3 + xy}{3(y + 3)}dx = \frac{1}{3(y + 3)} \left(\frac{x^4}{4} + \frac{yx^2}{2} \right)\Bigg|_{x=0}^{3} \\ &= \frac{1}{3(y + 3)} \left(\frac{81}{4} + \frac{9y}{2} \right) = \frac{6y + 27}{4(y + 3)}. \end{aligned}$$

Fie acum $x \in [0, 3]$, deci $f_X(x) > 0$. Aplicând formula densității de repartiție condiționate, rezultă că densitatea de repartiție a v.a. Y condiționată de $X = x$ este

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y}{2(x^2 + 1)}, & \text{dacă } y \in [0, 2] \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Media sa este

$$\begin{aligned} E(Y|X = x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy = \int_0^2 \frac{x^2 y + y^2}{2(x^2 + 1)}dy = \frac{1}{2(x^2 + 1)} \left(\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{y=0}^{2} \\ &= \frac{1}{2(x^2 + 1)} \left(2x^2 + \frac{8}{3} \right) = \frac{3x^2 + 4}{3(x^2 + 1)}. \end{aligned}$$

b) Fie $y \in [0, 2]$. Avem

$$\begin{aligned} P(X \in [1, 2]|Y = y) &= \int_1^2 f_{X|Y}(x|y)dx = \int_1^2 \frac{x^2 + y}{3(y + 3)}dx = \frac{1}{3(y + 3)} \left(\frac{x^3}{3} + yx \right)\Bigg|_{x=1}^{2} \\ &= \frac{1}{3(y + 3)} \left(\frac{7}{3} + y \right) = \frac{3y + 7}{9(y + 3)}. \end{aligned}$$

Fie $x \in [0,3]$. Avem

$$P(Y \in [0,1]|X = x) = \int_0^1 f_{Y|X}(y|x)dy = \int_0^1 \frac{x^2+y}{2(x^2+1)}dy = \frac{1}{2(x^2+1)}\left(x^2y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^1$$
$$= \frac{1}{2(x^2+1)}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2x^2+1}{2(x^2+1)}.$$

c) Conform rezultatelor obținute la punctele a) și b) avem:

$$E(X|Y=1) = \frac{6+27}{4(1+3)} = \frac{33}{16}, \quad E(Y|X=2) = \frac{12+4}{3(4+1)} = \frac{16}{15},$$
$$P(X \in [1,2]|Y=1) = \frac{3+7}{9(1+3)} = \frac{5}{18}, \quad P(Y \in [0,1]|X=2) = \frac{8+1}{2(4+1)} = \frac{9}{10}.$$

d) Aplicând Propoziția 3.7.14 avem:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)E(X|Y=y)dy = \int_0^2 \frac{y+3}{8}\cdot\frac{6y+27}{4(y+3)}dy = \int_0^2 \frac{6y+27}{32}dy$$
$$= \frac{1}{32}\left(3y^2+27y\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{32}(12+54) = \frac{33}{16},$$
$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)E(Y|X=x)dx = \int_0^3 \frac{x^2+1}{12}\cdot\frac{3x^2+4}{3(x^2+1)}dx = \int_0^3 \frac{3x^2+4}{36}dx$$
$$= \frac{1}{36}\left(x^3+4x\right)\Big|_0^3 = \frac{1}{36}(27+12) = \frac{13}{12}.$$

□

Observația 3.7.2. Definițiile și rezultatele din această secţiune pot fi ușor extinse la cazul n-dimensional.

3.8 Funcții generatoare de momente și funcții caracteristice

Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate.

Definiția 3.8.1. *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare (discretă sau continuă).*

1. ***Funcția generatoare de momente a v.a.*** *X este funcția*

$$\psi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \psi_X(t) = E(e^{tX}),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

2. ***Funcția caracteristică a v.a.*** *X este funcția*

$$\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \varphi_X(t) = E(e^{\mathrm{i}tX}),\ \forall t \in \mathbb{R}$$

($\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathbb{C}$ fiind mulțimea mumerelor complexe), unde

$$e^{x+\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Propoziția 3.8.1. *Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare (discretă sau continuă). Atunci pentru orice $r \in \mathbb{N}^*$ au loc relațiile*

$$\frac{\partial^r \psi_X}{\partial t^r}(0) = E(X^r), \quad \frac{\partial^r \varphi_X}{\partial t^r}(0) = \mathrm{i}^r E(X^r).$$

Demonstraţie. Cazul 1. Dacă v.a. X este discretă, atunci e^{tX} este tot o v.a. discretă şi, utilizând Propoziţia 3.6.1, avem

$$\psi_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} p_X(x).$$

Rezultă că

$$\frac{\partial^r \psi_X}{\partial t^r}(t) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r e^{tx} p_X(x),$$

deci

$$\frac{\partial^r \psi_X}{\partial t^r}(0) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r p_X(x) = E(X^r).$$

Cazul 2. Dacă v.a. X este continuă, atunci e^{tX} este tot o v.a. continuă şi, utilizând Propoziţia 3.6.3, avem

$$\psi_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx.$$

Rezultă că

$$\frac{\partial^r \psi_X}{\partial t^r}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{tx} f_X(x)dx,$$

deci

$$\frac{\partial^r \psi_X}{\partial t^r}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x)dx = E(X^r).$$

A doua egalitate din enunţ se demonstrează analog. □

Observaţia 3.8.1. Prima egalitate din propoziţia anterioară justifică denumirea funcţiei ψ_X drept *funcţia generatoare de momente a v.a. X.*

Propoziţia 3.8.2. *Dacă $X_1, \ldots, X_n$ sunt v.a. independente ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), atunci*

$$\psi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \psi_{X_1}(t) \ldots \psi_{X_n}(t), \ \forall t \in \mathbb{R},$$
$$\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \ldots \varphi_{X_n}(t), \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţie. Deoarece v.a. $X_1, \ldots, X_n$ sunt independente, confrm Propoziţiei 3.2.1 rezultă că şi v.a. $e^{tX_1}, \ldots, e^{tX_n}$ sunt independente. Utilizând Propoziţia 3.6.11 avem

$$\psi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = E(e^{t(X_1+\ldots+X_n)}) = E(e^{tX_1} \cdot \ldots \cdot e^{tX_n}) = E(e^{tX_1}) \cdot \ldots \cdot E(e^{tX_n}) = \psi_{X_1}(t) \ldots \psi_{X_n}(t).$$

A doua egalitate din enunţ se demonstrează analog. □

Capitolul 4

Repartiții clasice

4.1 Repartiții discrete clasice

4.1.1 Repartiția uniformă

Definiția 4.1.1. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. O repartiție a unei v.a. discrete X de forma*

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

*se numește **repartiția uniformă pe mulțimea** $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Notăm $X \sim U_{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}}$.*

Pentru $n = 1$ și $a \in \mathbb{R}$, repartiția uniformă pe mulțimea $\{a\}$, adică

$$X : \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix},$$

*se numește și **repartiția Dirac în punctul** a și notăm $X \sim \delta_a$.*

Exemplul 4.1.1. Dacă v.a. X reprezintă numărul obținut la aruncarea unui zar, atunci $X \sim U_{\{1,2,\ldots,6\}}$.

Propoziția 4.1.1. *Dacă $X \sim U_{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}}$, atunci*

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2.$$

4.1.2 Repartiția binomială

Definiția 4.1.2. *Fie $n \in \mathbb{N}$ și $p \in [0, 1]$. Spunem că v.a. X are o **repartiție binomială** de parametri n și p dacă*

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \ \forall k \in \{0, \ldots, n\},$$

unde $q = 1 - p$. Notăm $X \sim B(n, p)$.

Observația 4.1.1. Utilizăm convenția $0^0 = 1$.

Observația 4.1.2. Repartiția binomială este repartiția specifică schemei bilei întoarse.

Propoziția 4.1.2. *Dacă $X \sim B(n, p)$, atunci*

$$E(X) = np, \quad \operatorname{var}(X) = npq,$$

$$\psi_X(t) = \left(pe^t + q\right)^n, \quad \varphi_X(t) = \left(pe^{it} + q\right)^n.$$

Dacă $X_1 \sim B(n_1, p)$, $X_2 \sim B(n_2, p)$, ..., $X_k \sim B(n_k, p)$ sunt v.a. independente ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$), atunci $X_1 + X_2 + \ldots + X_k \sim B(n_1 + n_2 + \ldots + n_k, p)$.

4.1.3 Repartiția multinomială

Definiția 4.1.3. *Fie $n, r \in \mathbb{N}^*$ și $p_1, p_2, \ldots, p_r \in [0,1]$ a.î. $p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1$, $r \geq 2$. Spunem că vectorul aleator $X = (X_1, X_2, \ldots, X_r)$ are o **repartiție multinomială** de parametri n și $p_1, p_2, \ldots, p_r$ dacă*

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!} \cdot p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r},$$

$\forall k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ *a.î.* $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$.

Observația 4.1.3. Repartiția multinomială este repartiția specifică schemei multinomiale.

Observația 4.1.4. Luând $r = 2$ obținem repartiția binomială. Deci repartiția multinomială generalizează repartiția binomială.

Propoziția 4.1.3. *Fie $n, r \in \mathbb{N}^*$ și $p_1, p_2, \ldots, p_r \in [0,1]$ a.î. $p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1$, $r \geq 2$. Dacă $X = (X_1, X_2, \ldots, X_r)$ este un vector aleator având o repartiție multinomială de parametri n și $p_1, p_2, \ldots, p_r$, atunci*

$$X_i \sim B(n, p_i),\ \forall i \in \{1, \ldots, r\},$$
$$E(X) = n(p_1, p_2, \ldots, p_r),$$
$$\operatorname{Cov}(X) = n \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p_2 & \ldots & -p_1p_r \\ -p_1p_2 & p_2(1-p_2) & \ldots & -p_2p_r \\ \ldots & & & \\ -p_1p_r & -p_2p_r & \ldots & p_r(1-p_r) \end{pmatrix}.$$

4.1.4 Repartiția hipergeometrică

Definiția 4.1.4. *Fie $n, a, b \in \mathbb{N}^*$ a.î. $n \leq a + b$. Spunem că v.a. X are o **repartiție hipergeometrică** de parametri n, a și b dacă*

$$P(X = k) = \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n},\ \forall k \in \{\max\{n-b, 0\}, \ldots, \min\{n, a\}\}.$$

Observația 4.1.5. Repartiția hipergeometrică este repartiția specifică schemei bilei neîntoarse.

Propoziția 4.1.4. *Fie $n, a, b \in \mathbb{N}^*$ a.î. $n \leq a + b$. Dacă X este o v.a. având o repartiție hipergeometrică de parametri n, a și b, atunci*

$$E(X) = \frac{na}{a+b}, \quad \operatorname{var}(X) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}.$$

4.1.5 Repartiția hipergeometrică generalizată

Definiția 4.1.5. *Fie $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ și $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{N}^*$ a.î. $n \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_r$. Spunem că vectorul aleator $X = (X_1, X_2, \ldots, X_r)$ are o **repartiție hipergeometrică generalizată** de parametri n și $a_1, a_2, \ldots, a_r$ dacă*

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_r = k_r) = \frac{C_{a_1}^{k_1} \cdot C_{a_2}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{a_r}^{k_r}}{C_{a_1+a_2+\ldots+a_r}^{k_1+k_2+\ldots+k_r}},$$

$\forall k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ *a.î.* $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$ *și* $k_i \leq a_i$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

Observația 4.1.6. Repartiția hipergeometrică generalizată este repartiția specifică schemei hipergeometrice generalizate.

Observația 4.1.7. Luând $r = 2$ obținem repartiția hipergeometrică.

Propoziția 4.1.5. *Fie $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ și $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{N}^*$ a.î. $n \leq s$, unde $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_r$. Dacă $X = (X_1, X_2, \ldots, X_r)$ este un vector aleator având o repartiție hipergeometrică generalizată de parametri n și $a_1, a_2, \ldots, a_r$, atunci*

$$X_i \text{ are o repartiție hipergeometrică de parametri } n, a_i \text{ și } s - a_i, \ \forall i \in \{1, \ldots, r\},$$

$$E(X) = \frac{n}{s} \cdot \big(a_1, a_2, \ldots, a_r\big),$$

$$\operatorname{Cov}(X) = \frac{n(s-n)}{s^2(s-1)} \begin{pmatrix} a_1(s-a_1) & -a_1a_2 & \ldots & -a_1a_r \\ -a_1a_2 & a_2(s-a_2) & \ldots & -a_2a_r \\ \ldots & & & \\ -a_1a_r & -a_2a_r & \ldots & a_r(s-a_r) \end{pmatrix}.$$

4.1.6 Repartiția geometrică

Definiția 4.1.6. *Fie $p \in (0,1)$. Spunem că v.a. X are o **repartiție geometrică** de parametru p dacă*

$$P(X = k) = p(1-p)^k, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Propoziția 4.1.6. *Se consideră un șir infinit de probe Bernoulli, adică de repetări independente ale unei experiențe aleatoare ce are ca rezultat fie evenimentul A ce reprezintă varianta succes, fie evenimentul contrar $\overline{A}$ ce reprezintă varianta insucces. Fie $p = P(A)$ probabilitatea de succes. Presupunem că $p \in (0,1)$. Dacă X reprezintă numărul de insuccese consecutive până la apariția primului succes, atunci X este o variabilă aleatoare numărabilă având repartiția geometrică de parametru p.*

Demonstrație. Evident, $X \in \mathbb{N}$, deci X este o variabilă aleatoare numărabilă. Pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$, fie A_i evenimentul ca la proba numărul i să se realizeze un succes, deci

$$P(A_i) = p \text{ și } P(\overline{A}_i) = 1 - p, \ \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

Rezultatele probelor fiind evenimente independente, pentru orice $k \in \mathbb{N}$ avem

$$P(X = k) = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_k \cap A_{k+1}) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\ldots P(\overline{A}_k)P(A_{k+1}) = (1-p)^k \cdot p,$$

deci repartiția v.a. X este repartiția geometrică de parametru p. □

Propoziția 4.1.7. *Fie $p \in (0,1)$. Dacă X are o v.a. având repartiție geometrică de parametru p, atunci*

$$E(X) = \frac{1-p}{p}, \quad \operatorname{var}(X) = \frac{1-p}{p^2},$$

$$\psi_X(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^t}, \quad \varphi_X(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^{it}}.$$

4.1.7 Repartiția binomială negativă (Pascal)

Definiția 4.1.7. *Fie $n \geq 0$ și $p \in [0,1]$. Spunem că v.a. X are o **repartiție binomială negativă (Pascal)** de parametri n și p dacă*

$$P(X = k) = C_{n+k-1}^k p^n (1-p)^k, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Notăm $X \sim BN(n,p)$.

Observația 4.1.8. Prin convenție, $0^0 = 1$.

Observația 4.1.9. Conform Observației 1.3.3, C^k_{n+k-1} reprezintă combinări cu repetiție de n luate câte k. De asemenea, conform Definiției 1.8.1 avem

$$C^k_{n+k-1} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots n}{k!} = \frac{(-1)^k(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \cdot C^k_{-n},$$

deci

$$C^k_{n+k-1}p^n(1-p)^k = C^k_{-n}p^n(p-1)^k, \forall k \in \mathbb{N},$$

ceea ce justifică denumirea de repartiție binomială *negativă*.

Propoziția 4.1.8. *Se consideră un șir infinit de probe Bernoulli. Fie p probabilitatea de succes (a fiecărei probe) și fie $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă X reprezintă numărul de insuccese până la apariția celui de-al n-lea succes, atunci X este o variabilă aleatoare numărabilă având repartiția binomială negativă de parametri n și p.*

Demonstrație. Evident, $X \in \mathbb{N}$, deci X este o variabilă aleatoare numărabilă. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$, fie B_k evenimentul ca la primele $n+k-1$ probe să se realizeze k insuccese și $n-1$ succese, iar D_k evenimentul ca la proba numărul k să se realizeze un succes. Deoarece rezultatele probelor sunt evenimente independente, avem

$$P(X = k) = P(B_k \cap D_k) = P(B_k)P(D_k).$$

Dar $P(D_k) = p$, iar conform schemei binomiale avem

$$P(B_k) = C^k_{n+k-1}p^{n-1}(1-p)^k,$$

deci

$$P(X = k) = C^k_{n+k-1}p^n(1-p)^k, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

adică repartiția v.a. X este repartiția binomială negativă de parametri n și p. □

Propoziția 4.1.9. *Dacă $X \sim BN(n,p)$ cu $p > 0$, atunci*

$$E(X) = \frac{n(1-p)}{p}, \quad \mathrm{var}\,(X) = \frac{n(1-p)}{p^2}.$$

Dacă $X \sim BN(n,p)$, atunci

$$\psi_X(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^n, \quad \varphi_X(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^{it}}\right)^n.$$

Dacă $X_1 \sim BN(n_1,p)$, $X_2 \sim BN(n_2,p)$, $\dots$, $X_k \sim BN(n_k,p)$ sunt v.a. independente ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$), atunci $X_1 + X_2 + \dots + X_k \sim BN(n_1 + n_2 + \dots + n_k, p)$.

Observația 4.1.10. Repartiția geometrică este un caz particular al repartiției binomiale negative, și anume cazul $n = 1$.

4.1.8 Repartiția Poisson

Definiția 4.1.8. *Fie $\lambda > 0$. Spunem că v.a. X are o **repartiție Poisson** de parametru λ dacă*

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Notăm $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$.

Propoziția 4.1.10. *Dacă* $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, *atunci*

$$E(X) = \lambda, \quad \mathrm{var}\,(X) = \lambda,$$
$$\psi_X(t) = e^{-\lambda(1-e^t)}, \quad \varphi_X(t) = e^{-\lambda(1-e^{it})}.$$

Dacă $X_1 \sim \mathrm{Po}(\lambda_1)$, $X_2 \sim \mathrm{Po}(\lambda_2)$, ..., $X_k \sim \mathrm{Po}(\lambda_k)$ *sunt v.a. independente* ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$), *atunci* $X_1 + X_2 + \ldots + X_k \sim \mathrm{Po}(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k)$.

Propoziția 4.1.11. *Fie* $\lambda > 0$ *și* X *o v.a. a.î.* $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$. *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, *fie* X_n *o v.a. a.î.* $X_n \sim B(n, p_n)$, *unde* $p_n \in [0,1]$, *și* $E(X_n) = E(X)$. *Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(X_n = k)}{P(X = k)} = 1, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație. Deoarece $E(X) = \lambda$ și $E(X_n) = np_n$, rezultă că

$$p_n = \frac{\lambda}{n}.$$

Fie $k \in \mathbb{N}$ și $n \geq k$. Conform definițiilor repartițiilor binomială și Poisson avem

$$\frac{P(X_n = k)}{P(X = k)} = \frac{C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}}{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}} = e^{\lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \cdot \frac{A_n^k}{n^k}.$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n-k)\cdot\left(-\frac{\lambda}{n}\right)} = e^{-\lambda}$$

și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n^k}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = 1,$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(X_n = k)}{P(X = k)} = e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = 1.$ □

Observația 4.1.11. Conform propoziției anterioare rezultă că repartiția Poisson este o aproximare a repartiției binomiale pentru $n \to \infty$. Mai mult, utilizând *formula lui Stirling* cu margini ale restului date de H. Robbins ([29])

$$\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{12n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

se obține că această aproximare este bună pentru $n > 10$ și $p_n < 0{,}1$.

4.2 Repartiții continue clasice

4.2.1 Repartiția uniformă

Definiția 4.2.1. *Fie* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. ***Repartiția uniformă*** *pe intervalul* $[a,b]$ *este repartiția având densitatea*

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \ \forall x \in [a,b]$$

și $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$.

Dacă X *este o v.a. având această repartiție, notăm* $X \sim U_{[a,b]}$.

Propoziția 4.2.1. *Dacă* $X \sim U_{[a,b]}$, *atunci*

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \ \mathrm{var}\,(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

4.2.2 Repartiția uniformă bidimensională

Definiția 4.2.2. *Fie $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$.* ***Repartiția uniformă*** *pe dreptunghiul $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ este repartiția bidimensională având densitatea*

$$f(x, y) = \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}, \ \forall (x, y) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

și $f(x, y) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus ([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])$.

Dacă $Z = (X, Y)$ este un vector aleator având această repartiție, notăm $Z \sim U_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]}$.

Propoziția 4.2.2. *Dacă $Z = (X, Y) \sim U_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]}$, atunci*

$$\begin{gathered} X \sim U_{[a_1,b_1]}, \ Y \sim U_{[a_2,b_2]}, \\ X \text{ și } Y \text{ sunt v.a. independente}, \\ E(Z) = \frac{1}{2}\big(a_1 + b_1, a_2 + b_2\big), \\ \operatorname{Cov}(X) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} (b_1 - a_1)^2 & 0 \\ 0 & (b_2 - a_2)^2 \end{pmatrix}. \end{gathered}$$

4.2.3 Repartiția normală (Gaussiană)

Lema 4.2.1. *Avem*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Demonstrație. Notând cu I integrala din enunț, avem

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dxdy.$$

Efectuăm schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \end{cases}$$

unde $r = \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, +\infty)$ este modulul numărului complex $z = x + yi$, iar $t \in [0, 2\pi)$ este argumentul acestuia (r și t se numesc *coordonate polare*). Jacobianul acestei schimbări de variabile este

$$J = \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \end{vmatrix} = r\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = r,$$

deci

$$dxdy = |J| drdt = rdrdt$$

și astfel

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[(r\cos t)^2 + (r\sin t)^2\right]} \cdot rdrdt = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} re^{-\frac{1}{2}r^2} drdt = \int_0^{2\pi} \left(-e^{-\frac{1}{2}r^2}\right)\Big|_{r=0}^{+\infty} dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

Evident, $I > 0$, deci $I = \sqrt{2\pi}$. □

Definiția 4.2.3. *Fie $m, \sigma \in \mathbb{R}$ a.î. $\sigma > 0$.* ***Repartiția normală (Gaussiană)*** *de parametri m și σ^2 este repartiția având densitatea*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dacă X este o v.a. având această repartiție, notăm $X \sim N(m, \sigma^2)$.

În particular, repartiția normală de parametri $m = 0$ și $\sigma^2 = 1$ se numește ***repartiția normală (Gaussiană) standard****, iar funcția sa de repartiție se numește* ***funcția Laplace-Gauss****.*

Observația 4.2.1. Graficul densității repartiției normale standard

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

este perfect simetric față de axa Oy și, datorită formei sale, este cunoscut sub numele de *clopotul lui Gauss.*

Propoziția 4.2.3. *Dacă $X \sim N(m, \sigma^2)$, atunci*

$$E(X) = m, \ \mathrm{var}\,(X) = \sigma^2,$$
$$\psi_X(t) = e^{mt+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

Dacă $Y = aX + b$, cu $X \sim N(m, \sigma^2)$, $a \in \mathbb{R}^*$ și $b \in \mathbb{R}$, atunci $Y \sim N(am + b, a^2\sigma^2)$.

Dacă $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2)$, ..., $X_k \sim N(m_k, \sigma_k^2)$ sunt v.a. independente ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$), atunci

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_k \sim N(m_1 + m_2 + \ldots + m_k, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_k^2).$$

Are loc echivalența $X \sim N(m, \sigma^2) \Leftrightarrow \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

4.2.4 Repartiția normală multidimensională

Definiția 4.2.4. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^n$ și $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică și pozitiv definită.* ***Repartiția normală n-dimensională*** *de parametri m și A este repartiția n-dimensională având densitatea*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det A)^{1/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-m)A^{-1}(x-m)^\top}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dacă $X = (X_1, \ldots, X_n)$ este un vector aleator având această repartiție, notăm $X \sim N(m, A)$.

Observația 4.2.2. Luând $n = 1$ obținem repartiția normală 1-dimensională (Gaussiană).

Propoziția 4.2.4. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^n$ și $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică și pozitiv definită. Fie $X = (X_1, \ldots, X_n) \sim N(m, A)$. Atunci*

$$E(X) = m, \ \mathrm{Cov}\,(X) = A,$$
$$X_i \sim N(m_i, a_{ii}), \ \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$
$$(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}) \sim N((m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}), (a_{pq})_{p,q \in \{i_1,\ldots,i_k\}}), \ \forall 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n \ (k \geq 1).$$

V.a. $X_1, \ldots, X_n$ sunt independente dacă și numai dacă matricea A este diagonală (adică $a_{ij} = 0$ pentru orice $i \neq j$).

4.2.5 Repartiția exponențială

Definiția 4.2.5. *Fie $\lambda > 0$. **Repartiția exponențială** de parametru λ este repartiția având densitatea*

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ \forall x \in (0, \infty)$$

și $f(x) = 0$, $\forall x \in (-\infty, 0]$.

Propoziția 4.2.5. *Dacă X este o v.a. având repartiția exponențială de parametru λ, atunci*

$$E(X) = \frac{1}{\lambda},\ \text{var}\,(X) = \frac{1}{\lambda^2},$$
$$\psi_X(t) = 1 - \frac{t}{\lambda}.$$

4.2.6 Repartiția Gamma

Definiția 4.2.6. *Fie $a, \lambda > 0$. **Repartiția Gamma** de parametri a și λ este repartiția având densitatea*

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} e^{-\lambda x},\ \forall x \in (0, \infty)$$

și $f(x) = 0$, $\forall x \in (-\infty, 0]$, unde

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx.$$

Observația 4.2.3. Funcția Γ din definiția anterioară se numește **funcția Gamma**. Ea are următoarele proprietăți:

$$\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1),\ \forall a > 1;$$
$$\Gamma(n) = (n-1)!,\ \forall n \in \mathbb{N}^*;$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Propoziția 4.2.6. *Dacă X este o v.a. având repartiția Gamma de parametri a și λ, atunci*

$$E(X) = \frac{a}{\lambda},\ \text{var}\,(X) = \frac{a}{\lambda^2},$$
$$\psi_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a}.$$

Observația 4.2.4. Repartiția exponențială este un caz particular al repartiției Gamma, și anume cazul $a = 1$.

4.2.7 Repartiția hi-pătrat

Definiția 4.2.7. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$. **Repartiția hi-pătrat** cu n grade de libertate este repartiția având densitatea*

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}},\ \forall x \in (0, \infty)$$

și $f(x) = 0$, $\forall x \in (-\infty, 0]$.

Dacă X este o v.a. având această repartiție, notăm $X \sim \chi^2(n)$.

Propoziția 4.2.7. *Dacă* $X \sim \chi^2(n)$*, atunci*

$$E(X) = n,\ \mathrm{var}\,(X) = 2n,$$
$$\psi_X(t) = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}.$$

Propoziția 4.2.8. *Dacă* $X \sim N(0,1)$*, atunci* $X^2 \sim \chi^2(1)$.

Dacă $X_1 \sim N(0,1),\ X_2 \sim N(0,1),\ \ldots,\ X_n \sim N(0,1)$ *sunt v.a. independente* ($n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$)*, atunci* $X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$.

Observația 4.2.5. Și repartiția hi-pătrat este un caz particular al repartiției Gamma, și anume cazul $a = \dfrac{n}{2}$ și $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

4.2.8 Repartiția Weibull

Definiția 4.2.8. *Fie* $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *a.î.* $\alpha > 0$ *și* $\beta > 0$*.* ***Repartiția Weibull*** *de parametri* a*,* α *și* β *este repartiția având densitatea*

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta}(x-a)^{\alpha-1}e^{-\frac{(x-a)^\alpha}{\beta}},\ \forall x \in (a, \infty)$$

și $f(x) = 0$*,* $\forall x \in (-\infty, a]$.

Observația 4.2.6. Repartiția exponențială este un caz particular și al repartiției Weibull, și anume cazul $a = 0$, $\alpha = 1$ și $\beta = \dfrac{1}{\lambda}$.

4.2.9 Repartiția beta

Definiția 4.2.9. *Fie* $a, b > 0$*.* ***Repartiția beta*** *de parametri* a *și* b *este repartiția având densitatea*

$$f(x) = \frac{1}{\beta(a,b)} \cdot x^{a-1}(1-x)^{b-1},\ \forall x \in (0,1)$$

și $f(x) = 0$*,* $\forall x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$*, unde*

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx.$$

Observația 4.2.7. Funcția β din definiția anterioară se numește **funcția beta**. Are loc egalitatea

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\ \forall a, b > 0.$$

Propoziția 4.2.9. *Dacă* X *este o v.a. având repartiția beta de parametri* a *și* b*, atunci*

$$E(X) = \frac{a}{a+b},\ \mathrm{var}\,(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

4.2.10 Repartiția Student

Definiția 4.2.10. *Fie* $n \in \mathbb{N}^*$*.* ***Repartiția Student (repartiția T)*** *cu* n *grade de libertate este repartiția având densitatea*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \beta\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dacă X *este o v.a. având această repartiție, notăm* $X \sim T(n)$*.*

Propoziția 4.2.10. *Dacă $X \sim T(n)$, unde $n > 2$, atunci*

$$E(X) = 0, \ \mathrm{var}\,(X) = \frac{n}{n-2}.$$

Propoziția 4.2.11. *Dacă $X \sim N(0,1)$ și $Y \sim \chi^2(n)$ sunt v.a. independente, $n \in \mathbb{N}^*$ atunci*

$$X\sqrt{\frac{n}{Y}} \sim T(n).$$

4.2.11 Repartiția Fisher-Snedecor

Definiția 4.2.11. *Fie $n, m \in \mathbb{N}^*$. **Repartiția Fisher-Snedecor** (**repartiția F**) cu n, m grade de libertate este repartiția având densitatea*

$$f(x) = \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}}}{\beta\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1}\left(1 + \frac{n}{m} \cdot x\right)^{-\frac{n+m}{2}}, \ \forall x \in (0, \infty)$$

și $f(x) = 0$, $\forall x \in (-\infty, 0]$.

Propoziția 4.2.12. *Dacă X este o v.a. având repartiția Fisher-Snedecor cu n, m grade de libertate, atunci*

$$E(X) = \frac{m}{m-2}, \ \forall m > 2.$$

4.3 Repartiții mixte

Definiția 4.3.1. *Un **parametru** al unei repartiții se numește **variabil** dacă el este rezultatul unei variabile aleatoare. O repartiție de probabilitate având unul sau mai mulți parametri variabili se numește **repartiție mixtă** sau **repartiție cu parametru variabil (parametri variabili)**.*

Definiția 4.3.2. *Fie $\Lambda > 0$ o variabilă aleatoare având repartiția H. Spunem că v.a. X are o **repartiție Poisson H-mixtă** (**repartiție Poisson mixată cu repartiția lui** Λ) dacă $X|(\Lambda = \lambda) \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ pentru orice $\lambda > 0$, adică*

$$P(X = k|\Lambda = \lambda) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \forall \lambda > 0.$$

Exemplul 4.3.1. Fie Λ o variabilă aleatoare discretă având repartiția

$$\Lambda : \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}, \quad \text{unde } \lambda_i > 0, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Atunci repartiția Poisson mixată cu repartiția lui Λ este repartiția unei v.a. discrete X dată de

$$P(X = k) = \sum_{i=1}^{n} p_i P(X = k|\Lambda = \lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^k}{k!}, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

(s-a aplicat formula probabilității totale).

Exemplul 4.3.2. Fie Λ o variabilă aleatoare continuă având o repartiție Gamma de parametri a și b, unde $a, b > 0$, având deci densitatea

$$f(\lambda) = \frac{1}{b^a \cdot \Gamma(a)} \cdot \lambda^{a-1} e^{-\frac{\lambda}{b}}, \ \forall \lambda > 0.$$

Atunci **repartiția Poisson Gamma-mixtă** de parametri a și b este repartiția unei v.a. discrete X dată de

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \int_0^\infty P(X=k|\Lambda=\lambda)f(\lambda)d\lambda \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot\frac{1}{b^a\Gamma(a)}\cdot\lambda^{a-1}e^{-\frac{\lambda}{b}}d\lambda \\
&= \frac{1}{k!\cdot b^a\cdot\Gamma(a)}\int_0^\infty \lambda^{a+k-1}e^{-\frac{(b+1)\lambda}{b}}d\lambda,\ \forall k\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Efectuând schimbarea de variabilă $\dfrac{(b+1)\lambda}{b}=x$ și proprietățile funcției Γ (Observația 4.2.3) obținem

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \frac{1}{k!\Gamma(a)b^a}\int_0^\infty\left(\frac{bx}{b+1}\right)^{a+k-1}\cdot e^{-x}\cdot\frac{b}{b+1}dx \\
&= \frac{1}{k!\Gamma(a)}\cdot\left(\frac{1}{b+1}\right)^a\cdot\left(\frac{b}{b+1}\right)^k\cdot\int_0^\infty x^{a+k-1}e^{-x}dx \\
&= \frac{1}{k!\Gamma(a)}\cdot\left(\frac{1}{b+1}\right)^a\cdot\left(\frac{b}{b+1}\right)^k\cdot\Gamma(a+k) \\
&= \frac{1}{k!\Gamma(a)}\cdot\left(\frac{1}{b+1}\right)^a\cdot\left(\frac{b}{b+1}\right)^k\cdot(a+k-1)(a+k-2)\dots a\Gamma(a) \\
&= C_{a+k-1}^k\cdot\left(\frac{1}{b+1}\right)^a\cdot\left(1-\frac{1}{b+1}\right)^k,\ \forall k\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Conform Definiției 4.1.7 rezultă că $X\sim BN(a,\frac{1}{b+1})$, adică repartiția Poisson Gamma-mixtă de parametri a și b coincide cu repartiția binomială negativă de parametri a și $\frac{1}{b+1}$.

Capitolul 5

Legi ale numerelor mari

5.1 Inegaliăți celebre din teoria probabilităților

Fie $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un câmp de probabilitate, X o v.a. și $(X_n)_{n\geq 1}$ un șir de v.a. definite pe acest câmp.

Teorema 5.1.1.

*1 (**Inegalitatea lui Markov**). Pentru orice $r \geq 1$, dacă $E(|X|^r) < \infty$, atunci*

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^r} \cdot E(|X|^r),\ \forall \varepsilon > 0.$$

*2 (**Inegalitatea lui Cebîșev**). Dacă v.a. X are media și dispersia finite, atunci*

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \mathrm{var}\,(X),\ \forall \varepsilon > 0.$$

*3 (**Inegalitatea lui Kolmogorov**). Dacă v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sunt independente, de medii și dispersii finite, atunci*

$$P\left(\max_{k\in\{1,\ldots,n\}} \left|\sum_{i=1}^{k} X_i - \sum_{i=1}^{k} E(X_i)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}\,(X_k),\ \forall \varepsilon > 0.$$

5.2 Convergențe pentru șiruri de variabile aleatoare

Definiția 5.2.1.

1. *Spunem că șirul $(X_n)_{n\geq 1}$ **converge în probabilitate către** X și notăm $X_n \xrightarrow{p} X$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0,\ \forall \varepsilon > 0$.*

2. *Spunem că șirul $(X_n)_{n\geq 1}$ **converge aproape sigur către** X și notăm $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = X) = 1$.*

3. *Spunem că șirul $(X_n)_{n\geq 1}$ **converge către** X **în medie pătratică** și notăm $X_n \xrightarrow{m.p.} X$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} E((X_n - X)^2) = 0$.*

4. *Fie F funcția de repartiție a v.a. X și, pentru orice $n \geq 1$, fie F_n funcția de repartiție a v.a. X_n. Spunem că șirul $(X_n)_{n\geq 1}$ **converge în repartiție către** X și notăm $X_n \xrightarrow{r} X$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, pentru orice punct de continuitate x al lui F.*

Observația 5.2.1. Convergența în probabilitate se numește și **convergență slabă**, iar convergența aproape sigură se numește și **convergență tare**.

Propoziția 5.2.1. *Au loc implicațiile:*

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{r} X;$$
$$X_n \xrightarrow{m.p.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{r} X.$$

5.3 Legi slabe ale numerelor mari

Teorema 5.3.1 (Legi slabe ale numerelor mari).

1 **(*Markov*)**. *Dacă v.a. din șirul $(X_n)_{n\geq 1}$ au mediile și dispersiile finite și*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot \operatorname{var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right) = 0,$$

atunci

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k)) \xrightarrow{p} 0.$$

2 **(*Cebîșev*)**. *Dacă v.a. din șirul $(X_n)_{n\geq 1}$ sunt independente două câte două și șirul dispersiilor $(\operatorname{var}(X_n))_{n\geq 1}$ este mărginit, atunci*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k)) \xrightarrow{p} 0.$$

3 **(*Hincin*)**. *Dacă v.a. din șirul $(X_n)_{n\geq 1}$ sunt independente și identic repartizate cu v.a. X și media $E(X)$ este finită, atunci*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p} E(X).$$

5.4 Legi tari ale numerelor mari

Teorema 5.4.1 (Legi tari ale numerelor mari).

1 **(*Markov*)**. *Dacă v.a. din șirul $(X_n)_{n\geq 1}$ sunt independente, cu mediile și dispersiile finite, și seria $\sum_{n\geq 1} \frac{\operatorname{var}(X_n)}{n^2}$ este convergentă, atunci*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k)) \xrightarrow{a.s.} 0.$$

2 **(*Cantelli*)**. *Dacă v.a. din șirul $(X_n)_{n\geq 1}$ sunt independente și șirul momentelor centrate*

$$\left(E\left((X_n - E(X_n))^4\right)\right)_{n\geq 1}$$

este mărginit, atunci

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k)) \xrightarrow{a.s.} 0.$$

*3 (**Kolmogorov**). Dacă v.a. din șirul $(X_n)_{n\geq 1}$ sunt independente două câte două și identic repartizate cu v.a. X și $E(|X|) < \infty$, atunci*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{a.s.} E(X).$$

5.5 Teorema limită centrală

Teorema 5.5.1 (**Teorema limită centrală (Liapunov)**).

1. *Dacă v.a. din șirul $(X_n)_{n\geq 1}$ sunt independente, cu mediile și dispersiile finite, și există $\delta > 0$ a.î.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} E\left(|X_k - m_k|^{2+\delta}\right)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right)^{\frac{2+\delta}{2}}} = 0,$$

unde $m_k = E(X_k)$ și $\sigma_k^2 = \mathrm{var}\,(X_k) > 0$, $\forall k \geq 1$, atunci

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - m_k}{\sigma_k} \xrightarrow{r} N(0,1),$$

adică

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k - m_k}{\sigma_k} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. *Dacă v.a. din șirul $(X_n)_{n\geq 1}$ sunt independente și identic repartizate cu v.a. X, de medie $E(X) = m$ și dispersie $\mathrm{var}\,(X) = \sigma^2 > 0$ finite, atunci*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k - m}{\sigma} \xrightarrow{r} N(0,1).$$

Capitolul 6

Selecție și statistici

6.1 Noțiuni generale

O cercetare statistică efectuează gruparea, analiza și interpretarea datelor referitoare la anumite caracteristici ale unei mulțimi de elemente asemănătoare (colectivitate umană sau set de obiecte), putându-se astfel prognoza și evoluția acestor caracteristici. În cadrul unei analize statistice deosebim două etape:

- culegerea și înregistrarea datelor (**statistică descriptivă**);
- gruparea și analiza datelor, obținerea rezultatelor și interpretarea acestora, determinarea prognozei privind comportarea viitoare (**statistică inferențială**).

Mulțimea ce formează obiectul analizei statistice se numește **populație (colectivitate) statistică**, un element al acestei mulțimi numindu-se **individ (unitate statistică)**.

O caracteristică a unei populații statistice este **cantitativă** dacă se cuantifică printr-o valoare numerică numită **variabilă statistică**, respectiv **calitativă**, dacă se cuantifică printr-un calificativ.

Analiza statistică a unei populații infinite sau foarte numeroasă se limitează la analiza unei submulțimi reprezentative a acestei populații. Este cazul, de exemplu, al calculului rating-ului unei emisiuni de televiziune, al verificării unui lot de conserve sau al realizării unui sondaj de opinie. În acest caz, analiza statistică trebuie să evalueze și gradul de corectitudine al extinderii concluziilor asupra întregii populații.

Pentru o populație statistică, o submulțime ale cărei elemente sunt alese aleator se numește **selecție (selecție aleatoare, eșantion, sondaj)**.

Numărul elementelor alese se numește **volumul** (**mărimea**) **selecției**.

Selecția se numește **repetată** sau **nerepetată**, după cum elementele alese la întâmplare sunt reintroduse sau nu în colectivitate înainte de extragerea următoarelor elemente.

Observația 6.1.1. Pentru selecții de volum mic, raportat la volumul întregii populații, deosebirea dintre o selecție nerepetată și una repetată devine nesemnificativă.

Considerăm, în continuare, că studiul statistic are ca obiectiv o caracteristică numerică cuantificată prin variabila statistică X a unei colectivități statistice C și că acest studiu se realizează printr-o selecție repetată de volum n: $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ reprezintă valorile observate ale variabilei X.

Privite aposteriori (adică după efectuarea selecției), aceste valori sunt **valori ale v.a.** X; privite apriori (adică înainte de efectuarea selecției), aceste valori sunt **variabile aleatoare independente și identic repartizate cu v.a.** X.

Presupunem că selecţia $X_1, X_2, ..., X_n$ are următoarele proprietăţi:

1) $X_1, X_2, ..., X_n$ sunt independente.

2)

$$f_{X_i}(x) = f_X(x), \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

dacă X este continuă, sau

$$p_{X_i}(x) = p_X(x), \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

dacă X este discretă.

Un set specific de valori observate $(x_1, x_2, ..., x_n)$ este un set de **valori ale selecţiei**.

Datorită proprietăţilor 1 şi 2, dacă X este continuă,

$$f_{(X_1, X_2, ..., X_n)}(x_1, x_2, ..., x_n) = f_X(x_1) f_X(x_2) ... f_X(x_n)$$

iar dacă X este discretă, atunci

$$p_{(X_1, X_2, ..., X_n)}(x_1, x_2, ..., x_n) = p_X(x_1) p_X(x_2) ... p_X(x_n)$$

Definiția 6.1.1. *O funcție având ca domeniu datele (elementele) unei selecții se numește **funcție de selecție** sau **statistică**.*

În continuare vom defini câteva statistici importante pentru selecția X_1, X_2, ..., X_n.

6.2 Statistici de ordine şi funcția empirică de repartiție

Definiția 6.2.1. *Șirul ordonat crescător*

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$$

*al variabilelor de selecție $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se numește **statistica ordinii** selecției date. Pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $X_{(i)}$ reprezintă **a i-a statistică de ordine**.*

Diferența

$$\overline{W}(X_1, \ldots, X_n) = X_{(n)} - X_{(1)} = \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} X_i - \min_{i \in \{1, \ldots, n\}} X_i$$

*se numește **amplitudinea** acestei selecții.*

Definiția 6.2.2. ***Funcția empirică de repartiție a v.a.** X sau **funcţia de repartiţie de selecţie** pentru selecția X_1, X_2, ..., X_n este funcția $\widehat{F}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{n_x}{n}, \ \textit{unde } n_x = \operatorname{card}\{X_i \mid X_i < x, \ i \in \{1, \ldots, n\}\}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

(adică n_x reprezintă numărul valorilor de selecție mai mici decât x).

Observația 6.2.1. Evident, avem

$$\widehat{F}_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < X_{(1)}, \\ \dfrac{i}{n}, \text{ dacă } X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)}, \\ 1, \text{ dacă } x \geq X_{(n)}. \end{cases}$$

Observația 6.2.2. Reamintim că **funcția (teoretică) de repartiție** a v.a. X este funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = P(X < x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Deci $\widehat{F}_n(x)$ reprezintă *frecvența relativă* a valorilor de selecție mai mici decât x, iar $F(x)$ reprezintă *probabilitatea* ca valoarea de selecție să fie mai mică decât x.

Următorul rezultat fundamentează utilizarea metodei selecției.

Teorema 6.2.1.

*1 (**Glivenko**).* $P\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|F_n(x)-F(x)|=0\right)=1.$

*2 (**Kolmogorov**). Pentru orice $\varepsilon>0$ avem*

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_n(x)-F(x)|\leq\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-k^2\varepsilon^2}.$$

6.3 Momente de selecție

Definiția 6.3.1. *Fie selecția $X_1, X_2, \ldots, X_n$ și $r\in\mathbb{N}^*$.*

***Momentul (inițial) de selecție de ordinul** r este $\overline{M}_r=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^r$.*

***Media de selecție** este $\overline{M}_1=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.*

***Momentul centrat de selecție de ordinul** r este $\overline{\mu}_r=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^r$.*

***Dispersia de selecție** este $\overline{\mu}_2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$.*

Observația 6.3.1. Momentele de selecție $\overline{M}_r, \overline{X}, \overline{\mu}_r, \overline{\mu}_2$ sunt variabile aleatoare.

6.4 Histograme şi diagrame de frecvenţe

O **histogramă** este o reprezentare grafică a valorilor observate ale unei selecții sau, mai general, a unui set de date.

Exemplul 6.4.1. Considerăm o selecție de volum 100 pentru o v.a.

$$X\sim N(10,9),$$

valorile observate fiind generate în R prin

```
>x<-rnorm(100,10,3)
>x
```

8.449356 4.059286 10.355060 15.068765 11.132735 12.441160 10.874801 11.569318 10.621346 9.987289 10.076492 11.506984 14.108741 4.061629 8.468588 7.447903 10.048971 9.406384 7.675613 9.735852 9.627260 6.111653 10.661327 14.150467 17.773670 11.263339 12.670334 7.828342 10.309116 12.469174 6.350104 9.406193 16.184772 6.995616 12.224467 6.697838 7.509152 12.872328 9.851522 11.636276 9.470872 5.237516 6.446147 11.569758 12.207436 5.818678 9.704024 10.887312 13.697052 8.459075 9.905855 5.278982 9.371550 3.573341 14.362907 11.864279 9.572689 9.350056 10.277726 10.001576 7.796079 14.482855 10.927141 8.238671 14.098699 9.512800 16.179764 9.794223 4.705376 4.187849 14.782292 13.444395 12.877847 11.463408 10.838066 13.681570 10.743082 10.636756 8.149680 9.347442 6.837830 5.463358 12.377972 13.604466 12.915735 12.837217 8.536288 8.347401 10.140770 11.322579 11.021491 15.296663 10.737393 9.901314 6.898652 8.063332 12.257763 4.519346 5.713361 6.069707.

Histograma acestor date, obţinută în R prin

```
>hist(x)
```

este reprezentată în Figura 6.4.1.

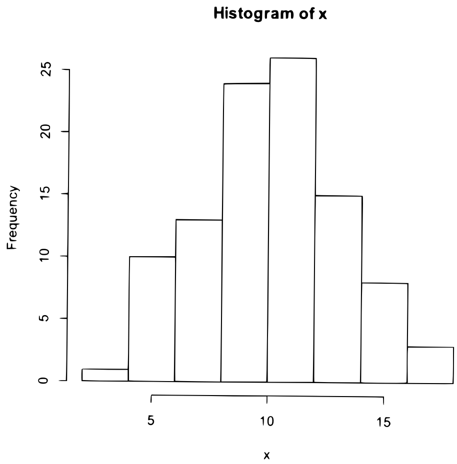


Figura 6.4.1:

Intervalul $[2, 18]$ se împarte în 8 intervale egale. Numărul total de date din fiecare interval se reprezintă ca înălţimea dreptunghiului de deasupra intervalului.

O **diagramă de frecvenţe** este obţinută dacă ordonata histogramei este împărţită la numărul total de observaţii, 100 în acest caz, şi la lăţimea intervalului Δ (care este 2 în acest exemplu).

Diagrama frecvenţelor pentru datele de mai sus, obţinută în R prin

>hist(x,probability=TRUE)

este reprezentată în Figura 6.4.2.

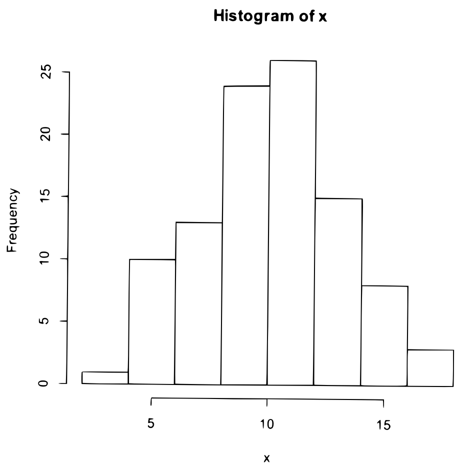


Figura 6.4.2:

Suma ariilor dreptunghiurilor din diagrama frecvenţelor este 1. Probabilitatea unei date mai mici decât 8 poate fi calculată din diagrama frecvenţelor adunând ariile de la stânga lui 8 şi obţinând 0,24 (0,01+0,1+0,13). Similar, probabilitatea unei date mai mari ca 12 este 0,26 (0,15+0,035+0,03+0,01). Acestea sunt estimări ale probabilităţilor $P(X < 8)$ şi $P(X > 12)$ asociate cu variabila aleatoare X.

H. Sturges a sugerat în 1926 ca o valoare aproximativă pentru numărul de intervale k să fie dată de

$$k = 1 + \lceil \log_2 n \rceil \simeq 1 + 3{,}3 \lg n,$$

unde n este numărul de date.

Deoarece

$$X \sim N(10, 9),$$

din secvenţa în R
>pnorm(8,10,3)
obţinem

$$P\left(X<8\right)=F_X\left(8\right)=0{,}2524925,$$

care este comparabilă cu 0,24 obţinută folosind diagrama frecvenţelor.

Media v.a. X este aproximată de media valorilor selecţiei, adică

$$E(X)\simeq m_X=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

iar dispersia v.a. X este aproximată de dispersia acestor valori

$$\operatorname{var}\left(X\right)\simeq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-m_X\right)^2.$$

Aceste expresii pot fi calculate în R prin
>mean(x)
>sum((x-mean(x))^2)/length(x)
rezultatele fiind 10,05497, respectiv 9,092576 şi ele aproximează destul de bine

$$E(X)=10,\ \operatorname{var}\left(X\right)=9.$$

6.5 Proprietăţi ale momentelor de selecţie

Propoziţia 6.5.1. *Avem:*

$$E(\overline{M}_r)=E(X^r);\ \operatorname{var}\left(\overline{M}_r\right)=\frac{E(X^{2r})-E^2(X^r)}{n};$$
$$E(\overline{X})=E(X);\ \operatorname{var}\left(\overline{X}\right)=\frac{\operatorname{var}\left(X\right)}{n};$$
$$\overline{\mu}_2=\overline{M}_2-\overline{X}^2;\ E(\overline{\mu}_2)=\frac{n-1}{n}\cdot\operatorname{var}\left(X\right);$$
$$\operatorname{var}\left(\overline{\mu}_2\right)=\frac{(n-1)^2}{n^3}\cdot E(X^4)-\frac{(n-1)(n-3)}{n^3}\cdot\operatorname{var}^2(X).$$

Dacă $S^2=\dfrac{n}{n-1}\cdot\overline{\mu}_2$, *atunci*

$$E(S^2)=\operatorname{var}\left(X\right)\ \text{și}\ \operatorname{var}\left(S^2\right)=\frac{1}{n}\cdot E(X^4)-\frac{n-3}{n(n-1)}\cdot\operatorname{var}^2(X).$$

Demonstraţie. Fie media şi dispersia v.a. X:

$$E(X)=m,\ \operatorname{var}\left(X\right)=\sigma^2. \tag{6.5.1}$$

Media mediei de selecţie $\overline{X}$ este

$$E(\overline{X})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i\right)=\frac{1}{n}(nm)=m=E(X).$$

Dispersia mediei de selecţie $\overline{X}$ este

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(\overline{X}) &= E\left(\left(\overline{X}-m\right)^2\right) = E\left(\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)\right]^2\right) = \frac{1}{n^2}E\left(\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)\right]^2\right)\\
&= \frac{1}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n}(X_i-m)(X_j-m)\right)\\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}E\left((X_i-m)^2\right) + 2\sum_{1\le i<j\le n}E\left((X_i-m)(X_j-m)\right)\right]\\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n}E\left((X_i-m)(X_j-m)\right)\right]\\
&= \frac{1}{n^2}\left[\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2}_{=n\sigma^2} + 2\sum_{1\le i<j\le n}\underbrace{E\left((X_i-m)\right)}_{=0}\underbrace{E\left((X_j-m)\right)}_{=0}\right]\\
&= \frac{1}{n^2}\left(n\sigma^2\right) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\operatorname{var}(X)}{n}.
\end{aligned}$$

Avem

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-m)-\left(\overline{X}-m\right)\right]^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-m)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-m)\right]^2\\
&= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2 - \frac{2}{n}(X_i-m)\sum_{j=1}^{n}(X_j-m) + \frac{1}{n^2}\left[\sum_{j=1}^{n}(X_j-m)\right]^2\right\}\\
&= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2 - \frac{2}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)\right]^2 + \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)\right]^2\right\}\\
&= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2 - \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)\right]^2\right\}\\
&= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2 - \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n}(X_i-m)(X_j-m)\right]\right\}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-m)^2 - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}(X_i-m)(X_j-m).
\end{aligned}$$

Rezultă că media lui S^2 este

$$\begin{aligned}
E(S^2) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left((X_i-m)^2\right) - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}E\left((X_i-m)(X_j-m)\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{E\left((X_i-m)^2\right)}_{=\sigma^2} - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{1\le i<j\le n}\underbrace{E(X_i-m)}_{=0}E(X_j-m) = \sigma^2 = \operatorname{var}(X).
\end{aligned}$$

Analog se demonstrează și celelalte egalități din enunț. $\square$

Observația 6.5.1. Când n creşte, dispersia lui $\overline{X}$ descreşte şi repartiţia lui $\overline{X}$ devine ascuţită cu vârful în
$$E(\overline{X}) = m.$$

Definiția 6.5.1. *Variabila de selecție*
$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \overline{\mu}_2$$
se numește ***dispersie de selecție corectată****; în acest context* $\overline{\mu}_2$ *se numește* ***dispersie de selecție necorectată****.*

Observația 6.5.2. Motivul folosirii lui $\frac{1}{n-1}$ în loc de $\frac{1}{n}$ în formula dispersiei de selecție corectată S^2 este de a face media lui S^2 egală cu σ^2. Aceasta este o proprietate de dorit pentru S^2 dacă aceasta este folosită la estimarea lui σ^2, adevărata dispersie a lui X.

Exemplul 6.5.1. Pentru controlul gramajului unui sortiment de ciocolată se extrage o selecție de volum 10 care dă următoarele valori (în grame):
$$(101;\ 99{,}25;\ 99;\ 100{,}25;\ 99{,}5;\ 101{,}25;\ 100;\ 99{,}25;\ 99{,}75;\ 100{,}25).$$

Să se determine repartiția empirică și să se calculeze amplitudinea, media și dispersia de selecție, precum și funcția empirică de repartiție a selecției.

Soluție. Repartiția empirică a v.a. de selecție este
$$X : \begin{pmatrix} 99 & 99{,}25 & 99{,}5 & 99{,}75 & 100 & 100{,}25 & 101 & 101{,}25 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Amplitudinea selecției este $\overline{W} = 101{,}25 - 99 = 2{,}25$.
Media de selecție este $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i = \dfrac{1}{10}(101 + 99{,}25 + \cdots + 100{,}25) = 99{,}95$.
Altfel: $\overline{X} = E(X) = 99 \cdot \dfrac{1}{10} + 99{,}25 \cdot \dfrac{2}{10} + \cdots + 101{,}25 \cdot \dfrac{1}{10} = 99{,}95$.
Dispersia de selecție necorectată este $\overline{\mu}_2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \dfrac{1}{10}[(101 - 99{,}95)^2 + (99{,}25 - 99{,}95)^2 + \cdots + (100{,}25 - 99{,}95)^2] = 0{,}51$.
Altfel: $\overline{\mu}_2 = \overline{M}_2 - \overline{X}^2 = \left(99^2 \cdot \dfrac{1}{10} + 99{,}25^2 \cdot \dfrac{2}{10} + \ldots + 101{,}25^2 \cdot \dfrac{1}{10}\right) - 99{,}95^2$
$= 0{,}51$.
Dispersia de selecție corectată este $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \dfrac{1}{9}[(101 - 99{,}95)^2 + (99{,}25 - 99{,}95)^2 + \cdots + (100{,}25 - 99{,}95)^2] = 0{,}56$.
Altfel: $S^2 = \dfrac{n}{n-1} \cdot \overline{\mu}_2 = \dfrac{10}{9} \cdot 0{,}51 = 0{,}56$.

Funcția empirică de repartiție este $\widehat{F}_{10} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\widehat{F}_{10}(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{dacă } x \leq 99\,, \\ 0{,}1\,, & \text{dacă } 99 < x \leq 99{,}25\,, \\ 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3\,, & \text{dacă } 99{,}25 < x \leq 99{,}5\,, \\ 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}4\,, & \text{dacă } 99{,}5 < x \leq 99{,}75\,, \\ 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}5\,, & \text{dacă } 99{,}75 < x \leq 100\,, \\ 0{,}6\,, & \text{dacă } 100 < x \leq 100{,}25\,, \\ 0{,}8\,, & \text{dacă } 100{,}25 < x \leq 101\,, \\ 0{,}9\,, & \text{dacă } 101 < x \leq 101{,}25\,, \\ 1\,, & \text{dacă } x > 101{,}25\,. \end{cases}$$

□

Exemplul 6.5.2. Considerăm datele din Exemplul 6.4.1. Am văzut că media de selecţie a este 10,05497, iar dispersia de selecție necorectată este 9,092576.

Dispersia de selecţie corectată are valoarea

$$\frac{100}{99} \cdot 9{,}092576 = 9{,}18442.$$

Ea se obţine în R prin

```
>var(x)
```

Momentul de selecţie de ordinul 3 și momentul centrat de selecţie de ordinul 3 se obţin în R prin

```
>sum(x^3)/length(x)
>sum((x-mean(x))^3)/length(x)
```

fiind egale cu 1289,694, respectiv cu $-1{,}163751$.

Următorul rezultat este o consecință a Teoremei limită centrală.

Corolarul 6.5.1. *Media de selecție $\overline{X}$ are asimptotic (pentru $n \to \infty$) o comportare de repartiție normală de medie $E(X)$ și dispersie $\dfrac{\operatorname{var}(X)}{n}$, adică*

$$\frac{\overline{X} - E(X)}{\sqrt{\dfrac{\operatorname{var}(X)}{n}}} \xrightarrow{r} N(0, 1).$$

Corolarul 6.5.2. *În cazul particular al selecției dintr-o populație normală $N(m, \sigma^2)$ avem:*

$$\overline{M}_r \xrightarrow{p} E(X^r),\ \overline{X} \xrightarrow{p} m \ (\textit{pentru } n \to \infty);$$

$$\overline{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right);$$

$$\frac{n}{\sigma^2} \cdot \overline{\mu}_2 \sim \chi^2(n-1);\ \frac{n-1}{\sigma^2} \cdot S^2 \sim \chi^2(n-1);$$

$$E(\overline{\mu}_2) = \frac{(n-1)\sigma^2}{n};\ \operatorname{var}(\overline{\mu}_2) = \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2};\ E(S^2) = \sigma^2;\ \operatorname{var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

Capitolul 7

Estimarea parametrilor

7.1 Expunerea problemei

Deseori repartiția teoretică a unei variabile aleatoare X depinde de anumiți parametri. Pentru a utiliza variabila X trebuie să cunoaștem valorile acestor parametri. Determinarea acestor valori se face, de obicei, pe baza unei selecții de volum n: $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Operația prin care se evaluează parametrii necunoscuți poartă numele de **estimare a parametrilor**.

Presupunem în continuare că

$$\widehat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

este o **estimație** (**estimator**, **estimare**) **a unui parametru** θ bazată pe selecția $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Observația 7.1.1. Fiind o funcție de datele de selecție, estimația $\widehat{\theta}$ este o statistică. Ea este o variabilă aleatoare a cărei repartiție (funcție de repartiție, masă de probabilitate, densitate de repartiție) depinde atât de funcția h cât și de repartiția (funcția de repartiție, masa de probabilitate, densitatea de repartiție a) variabilei aleatoare X.

7.2 Estimații consistente

Definiția 7.2.1. *Estimația $\widehat{\theta}$ (a parametrului θ) se numește **consistentă** dacă*

$$\widehat{\theta} \xrightarrow{p} \theta \text{ (pentru } n \to \infty).$$

Propoziția 7.2.1. *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} E(\widehat{\theta}) = \theta \text{ și } \lim_{n\to\infty} \operatorname{var}(\widehat{\theta}) = 0,$$

atunci $\widehat{\theta}$ este o estimație consistentă pentru θ.

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece

$$|\widehat{\theta} - \theta| = |\widehat{\theta} - E(\widehat{\theta}) + E(\widehat{\theta}) - \theta| \le |\widehat{\theta} - E(\widehat{\theta})| + |E(\widehat{\theta}) - \theta|,$$

rezultă că

$$P\left(|\widehat{\theta} - \theta| \ge \varepsilon\right) \le P\left(|\widehat{\theta} - E(\widehat{\theta})| + |E(\widehat{\theta}) - \theta| \ge \varepsilon\right) = P\left(|\widehat{\theta} - E(\widehat{\theta})| \ge \varepsilon - |E(\widehat{\theta}) - \theta|\right). \quad (7.2.1)$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty} E(\widehat{\theta}) = \theta$, rezultă că $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î.

$$|E(\widehat{\theta}) - \theta| \le \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \ge N. \quad (7.2.2)$$

Din (7.2.1) și (7.2.2) rezultă că pentru orice $n \geq N$ avem

$$P\left(|\widehat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\right) \leq P\left(|\widehat{\theta} - E(\widehat{\theta})| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Cum, conform Inegalității lui Cebîșev avem

$$P\left(|\widehat{\theta} - E(\widehat{\theta})| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \cdot \text{var}\,(\widehat{\theta}),$$

rezultă că

$$0 \leq P\left(|\widehat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \cdot \text{var}\,(\widehat{\theta}),$$

pentru orice $n \geq N$. Trecând la limită rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\widehat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

deci $\widehat{\theta}$ este o estimație consistentă pentru θ. □

Exemplul 7.2.1. Fie X o variabilă statistică având media $E(X) = m$ și dispersia $\text{var}\,(X) = \sigma^2$. Atunci media de selecție $\overline{X}$ este o estimație consistentă pentru media m, deoarece, utilizând Propoziția 6.5.1, avem

$$\lim_{n\to\infty} E(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} m = m \text{ și } \lim_{n\to\infty} \text{var}\,(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0.$$

Dacă $E(X^4) < \infty$, atunci dispersia de selecție necorectată $\overline{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ și dispersia de selecție corectată $S^2 = \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \overline{\mu}_2$ sunt estimații consistente pentru dispersia σ^2, deoarece, utilizând Propoziția 6.5.1, avem

$$\lim_{n\to\infty} E(\overline{\mu}_2) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2\right) = \sigma^2,$$

$$\lim_{n\to\infty} \text{var}\,(\overline{\mu}_2) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n-1)^2}{n^3} \cdot E(X^4) - \frac{(n-1)(n-3)}{n^3} \cdot \sigma^4\right) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} E(S^2) = \lim_{n\to\infty} \sigma^2 = \sigma^2,$$

$$\lim_{n\to\infty} \text{var}\,(S^2) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot E(X^4) - \frac{n-3}{n(n-1)} \cdot \sigma^4\right) = 0.$$

7.3 Estimații nedeplasate și estimații absolut corecte

Definiția 7.3.1.

1. *Diferența $E(\widehat{\theta}) - \theta$ se numește **deplasarea estimației** $\widehat{\theta}$.*

2. *Estimația $\widehat{\theta}$ se numește **nedeplasată** dacă $E(\widehat{\theta}) = \theta$ (și **deplasată** în caz contrar).*

3. *Estimația $\widehat{\theta}$ se numește **absolut corectă** dacă $E(\widehat{\theta}) = \theta$ și $\lim_{n\to\infty} \text{var}\,(\widehat{\theta}) = 0$.*

Observația 7.3.1. Evident, orice estimație absolut corectă este nedeplasată.

Mai mult, ca o consecință directă a Propoziției 7.2.1 obținem următorul rezultat.

Corolarul 7.3.1. *Orice estimație absolut corectă este consistentă.*

Exemplul 7.3.1. Fie din nou o variabilă statistică X având media $E(X) = m$ și dispersia $\mathrm{var}\,(X) = \sigma^2$.

Conform Exemplului 7.2.1, media de selecție $\overline{X}$ este o estimație consistentă pentru media m. Mai mult, utilizând Propoziția 6.5.1, avem

$$E(\overline{X}) = m \text{ și } \lim_{n\to\infty} \mathrm{var}\,(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0.$$

Rezultă că media de selecție $\overline{X}$ este o estimație nedeplasată și absolut corectă pentru media m.

Dispersia de selecție necorectată $\overline{\mu}_2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ este o estimație deplasată pentru dispersia σ^2, deoarece, conform Propoziției 6.5.1,

$$E(\overline{\mu}_2) = \frac{n-1}{n}\cdot \mathrm{var}\,(X) = \frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2 \neq \sigma^2,$$

deci ea nu este o estimație absolut corectă pentru dispersia σ^2.

Dispersia de selecție corectată $S^2 = \dfrac{n}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \dfrac{n}{n-1}\cdot\overline{\mu}_2$ este o estimație nedeplasată pentru dispersia σ^2, deoarece, utilizând Propoziția 6.5.1, avem

$$E(S^2) = \mathrm{var}\,(X) = \sigma^2.$$

Mai mult, dacă $E(X^4) < \infty$, atunci, conform Exemplului 7.2.1, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{var}\,(S^2) = 0$, de unde obținem că dispersia de selecție corectată S^2 este și estimație absolut corectă pentru dispersia σ^2.

7.4 Estimații eficiente

Definiția 7.4.1. *Valoarea*

$$I(\theta) = \begin{cases} -E\left(\dfrac{\partial^2 \ln p(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right), & \textit{dacă v.a. } X \textit{ este discretă,} \\ -E\left(\dfrac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right), & \textit{dacă v.a. } X \textit{ este continuă,} \end{cases}$$

se numește ***cantitatea de informație pe o unitate de selecție****, unde $p(x;\theta) = P(X = x;\theta)$ reprezintă masa de probabilitate a v.a. X, iar $f(x;\theta)$ reprezintă densitatea de repartiție a v.a. X.*

Teorema 7.4.1 (Inegalitatea Rao-Cramer). *Dacă $\widehat{\theta}$ este o estimație absolut corectă pentru parametrul θ, atunci*

$$\mathrm{var}\,(\widehat{\theta}) \geq \frac{1}{nI(\theta)}.$$

Observația 7.4.1. În contextul teoremei anterioare, valoarea $\frac{1}{nI(\theta)}$ se numește *marginea inferioară Rao-Cramer* pentru dispersia estimației $\widehat{\theta}$.

Definiția 7.4.2. *Estimația nedeplasată $\widehat{\theta}$ se numește* ***eficientă*** *dacă* $\mathrm{var}\,(\widehat{\theta}) = \dfrac{1}{nI(\theta)}$.

Următorul rezultat este o consecință directă a Inegalității Rao-Cramer.

Corolarul 7.4.1. *O estimație absolut corectă este eficientă dacă și numai dacă are dispersia minimă.*

Definiția 7.4.3. *Estimația $\widehat{\theta}$ se numește* ***asimptotic eficientă*** *dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} E(\widehat{\theta}) = \theta$ *și*

$$\lim_{n\to\infty} \left(nI(\theta)\mathrm{var}\,(\widehat{\theta}) \right) = 1.$$

Exemplul 7.4.1. Fie o variabilă statistică $X \sim N(m, \sigma^2)$, unde $m, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Densitatea de repartiție a v.a. X este

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Conform Exemplului 7.3.1, media de selecție $\overline{X}$ este o estimație consistentă, nedeplasată și absolut corectă pentru media m. Avem

$$\begin{aligned} \ln f(x;m) &= -\ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2; \\ \frac{\partial \ln f(x;m)}{\partial m} &= \frac{x-m}{\sigma^2}; \\ \frac{\partial^2 \ln f(x;m)}{\partial m^2} &= -\frac{1}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Avem

$$I(m) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f(x;m)}{\partial m^2}\right) = -E\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2},$$

și astfel, utilizând Corolarul 6.5.2, obținem

$$\frac{1}{nI(m)} = \frac{\sigma^2}{n} = \mathrm{var}\,(\overline{X}).$$

Rezultă că media de selecție $\overline{X}$ este o estimație eficientă pentru media m.

Conform Exemplelor 7.2.1 și 7.3.1, dispersia de selecție necorectată $\overline{\mu}_2$ este o estimație consistentă, dar deplasată, pentru dispersia σ^2 și $\lim\limits_{n\to\infty} E(\overline{\mu}_2) = \sigma^2$. Notând $\alpha = \sigma^2$, avem

$$\begin{aligned} \ln f(x;\alpha) &= -\frac{\ln(2\pi) + \ln\alpha}{2} - \frac{(x-m)^2}{2\alpha}; \\ \frac{\partial \ln f(x;\alpha)}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{2\alpha} + \frac{(x-m)^2}{2\alpha^2}; \\ \frac{\partial^2 \ln f(x;\alpha)}{\partial \alpha^2} &= \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{(x-m)^2}{\alpha^3}. \end{aligned}$$

Utilizând Corolarul 6.5.2, avem

$$I(\sigma^2) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f(x;\alpha)}{\partial \alpha^2}\right) = -\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{E\left((X-m)^2\right)}{\alpha^3} = -\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\mathrm{var}\,(X)}{\alpha^3} = -\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\alpha}{\alpha^3} = \frac{1}{2\alpha^2},$$

și astfel

$$\frac{1}{nI(\sigma^2)} = \frac{2\alpha^2}{n} = \frac{2\sigma^4}{n} \neq \mathrm{var}\,(\overline{\mu}_2) = \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(nI(\sigma^2)\mathrm{var}\,(\overline{\mu}_2)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2\sigma^4} \cdot \frac{2(n-1)\sigma^4}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Rezultă că dispersia de selecție necorectată $\overline{\mu}_2$ nu este o estimație eficientă, dar este o estimație asimptotic eficientă pentru dispersia σ^2.

Conform Exemplelor 7.2.1 și 7.3.1, dispersia de selecție corectată S^2 este o estimație consistentă, nedeplasată și absolut corectă pentru dispersia σ^2. Utilizând Corolarul 6.5.2, avem

$$\frac{1}{nI(\sigma^2)} = \frac{2\sigma^4}{n} \neq \mathrm{var}\,(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

și

$$\lim_{n\to\infty}\left(nI(\sigma^2)\mathrm{var}\,(S^2)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2\sigma^4}\cdot\frac{2\sigma^4}{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1} = 1.$$

Astfel dispersia de selecție corectată S^2 nu este o estimație eficientă, dar este o estimație asimptotic eficientă pentru dispersia σ^2.

7.5 Metoda momentelor

Fie X o variabilă statistică a cărei repartiție depinde de parametrii θ_1, θ_2, ..., θ_k, unde $k \in \mathbb{N}^*$.

Presupunem în continuare că estimarea parametrilor $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ se efectuează pe baza unei selecții $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Metoda momentelor constă în estimarea parametrilor $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ prin statisticile $\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \ldots, \widehat{\theta}_k$ ce se obțin rezolvând sistemul

$$E(X^i) = \overline{M}_i,\ \forall i \in \{1, \ldots, k\},$$

obținut prin egalarea momentelor (teoretice) de ordin cel mult k ale v.a. X cu momentele de selecție de aceleași ordine.

Exemplul 7.5.1. Fie o variabilă statistică X având o repartiție uniformă pe intervalul $[\theta_1, \theta_2]$ $(\theta_2 > \theta_1)$, adică densitatea sa de repartiție este

$$f(x;\theta_1,\theta_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta_2-\theta_1}\,, & \text{dacă } x \in [\theta_1,\theta_2], \\ 0\,, & \text{dacă } x \notin [\theta_1,\theta_2]. \end{cases}$$

Să se estimeze parametrii θ_1 și θ_2 folosind metoda momentelor.

Soluție. Avem:

$$E(X) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x\cdot\frac{1}{\theta_2-\theta_1}dx = \left.\frac{x^2}{2(\theta_2-\theta_1)}\right|_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{\theta_2^2-\theta_1^2}{2(\theta_2-\theta_1)} = \frac{\theta_1+\theta_2}{2},$$
$$E(X^2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x^2\cdot\frac{1}{\theta_2-\theta_1}dx = \left.\frac{x^3}{3(\theta_2-\theta_1)}\right|_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{\theta_2^3-\theta_1^3}{3(\theta_2-\theta_1)} = \frac{\theta_1^2+\theta_1\theta_2+\theta_2^2}{3}.$$

Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} E(X) = \overline{M}_1, \\ E(X^2) = \overline{M}_2, \end{cases}$$

unde $\overline{M}_1$ și $\overline{M}_2$ sunt momentele de selecție de ordinul 1, respectiv 2. Sistemul devine succesiv:

$$\begin{cases} \dfrac{\theta_1+\theta_2}{2} = \overline{M}_1, \\ \dfrac{\theta_1^2+\theta_1\theta_2+\theta_2^2}{3} = \overline{M}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1+\theta_2 = 2\overline{M}_1, \\ (\theta_1+\theta_2)^2 - \theta_1\theta_2 = 3\overline{M}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1+\theta_2 = 2\overline{M}_1, \\ \theta_1\theta_2 = 4\overline{M}_1^2 - 3\overline{M}_2. \end{cases}$$

Rezultă că $\widehat{\theta}_1$ și $\widehat{\theta}_2$ sunt soluțiile ecuației $t^2 - 2\overline{M}_1 t + 4\overline{M}_1^2 - 3\overline{M}_2 = 0$.
Cum $\theta_2 > \theta_1$ rezultă că

$$\begin{cases} \widehat{\theta}_1 = \overline{M}_1 - \sqrt{3(\overline{M}_2 - \overline{M}_1^2)} = \overline{X} - \sqrt{3\overline{\mu}_2}, \\ \widehat{\theta}_2 = \overline{M}_1 + \sqrt{3(\overline{M}_2 - \overline{M}_1^2)} = \overline{X} + \sqrt{3\overline{\mu}_2}. \end{cases}$$

$\square$

7.6 Determinarea punctelor de extrem

Fie funcția $f : A \to \mathbb{R}$ cu $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Presupunem că mulțimea A este deschisă și că funcția f are derivate parțiale de ordinul al doilea continue pe A.

Descriem în continuare o metodă pentru calculul punctelor de extrem local.

Algoritmul 7.6.1 (**Metoda punctelor critice pentru determinarea punctelor de extrem**). Pentru găsirea punctelor de extrem (local) ale funcției f se parcurg următoarele etape:

Pasul 1. Se calculează derivatele parțiale $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}),\ k \in \{1, \dots, n\}$.

Pasul 2. Se rezolvă sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathrm{x}) = 0,\ k \in \{1, \dots, n\}. \tag{7.6.1}$$

Definiția 7.6.1. *Orice soluție* $\mathrm{x} = \mathrm{a} \in A$ *a sistemului (7.6.1) se numește* ***punct critic (staționar) pentru funcția*** f*.*

Pasul 3. Se calculează hessiana $\mathrm{H}f(\mathrm{x}) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathrm{x})\right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}}$.

Pasul 4. Se analizează fiecare punct critic a, pentru a decide natura sa. Pentru aceasta, se parcurg următoarele subetape:

4.1. Se calculează hessiana $Hf(\mathrm{a}) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & & & \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix}$.

4.2. Se calculează minorii principali ai lui $Hf(\mathrm{a})$:

$$\Delta_1 = h_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & & & \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix} (= \det Hf(\mathrm{a})).$$

4.3. Avem următoarele cazuri posibile.

a. Dacă $\Delta_i > 0,\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$, atunci a este un punct de minim local pentru funcția f.

b. Fie
$$\Delta_i^* = (-1)^i \Delta_i, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$
Dacă $\Delta_i^* > 0, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, atunci a este un punct de maxim local pentru funcția f.

c. Dacă există $i \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încât $\Delta_i = 0$, atunci nu putem preciza natura punctului a (adică poate să fie sau să nu fie punct de extrem local).

d. În rest, punctul a este un punct şa pentru funcția f (adică nu este punct de extrem local).

Exemplul 7.6.1. Să se determine extremele locale ale funcției
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 6xy - 12x + 12y + 10.$$

Soluție. Vom aplica metoda punctelor critice.

Pasul 1. Funcția f este derivabilă parțial, având derivatele parțiale
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 6y - 12,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy + 6x + 12.$$

Pasul 2. Determinăm punctele critice ale funcției f, adică soluțiile sistemului
$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 6y - 12 = 0, \\ 6xy + 6x + 12 = 0. \end{cases}$$

Acesta este echivalent, succesiv, cu:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 4 = 0, \\ xy + x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y + 1) = -2, \\ x^2 + y^2 + 2y + 1 = 5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{y + 1}, \ y \neq -1, \\ \dfrac{4}{(y + 1)^2} + (y + 1)^2 = 5. \end{cases}$$

Notând $(y + 1)^2 = t$ obținem ecuația $\frac{4}{t} + t = 5$, adică $t^2 - 5t + 4 = 0$, cu soluțiile $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

Pentru $t = 1$ obținem $y + 1 = \pm 1$, deci $y \in \{-2, 0\}$. Pentru $y = -2$ rezultă $x = 2$, iar pentru $y = 0$ rezultă $x = -2$.

Pentru $t = 4$ obținem $y + 1 = \pm 2$, deci $y \in \{-3, 1\}$. Pentru $y = -3$ rezultă $x = 1$, iar pentru $y = 1$ rezultă $x = -1$.

Am obținut punctele critice $(x, y) \in \{(-2, 0), (-1, 1), (1, -3), (2, -2)\}$.

Pasul 3. Derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției f sunt
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6y + 6, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6x,$$

deci hessiana funcției f este
$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y + 6 \\ 6y + 6 & 6x \end{pmatrix}.$$

Observăm că derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției f sunt continue pe $\mathbb{R}^2$, deci este verificată ipoteza necesară aplicării metodei punctelor critice.

Pasul 4. Analizăm separat fiecare punct critic.

1. Pentru $(x,y) = (-2,0)$ avem

$$Hf(-2,0) = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = -12,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -12 \end{vmatrix} = 144 - 36 = 108,$$

$$\Delta_1^* = (-1)^1\Delta_1 = -\Delta_1 = 12,\ \Delta_2^* = (-1)^2\Delta_2 = \Delta_2 = 108.$$

Deci $\Delta_1^* > 0$, $\Delta_2^* > 0$ și astfel $(-2,0)$ este punct de maxim local.

2. Pentru $(x,y) = (-1,1)$ avem

$$Hf(-1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 12 & -6 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = -6,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 12 \\ 12 & -6 \end{vmatrix} = 36 - 144 = -108,$$

$$\Delta_1^* = -\Delta_1 = 6,\ \Delta_2^* = \Delta_2 = -108.$$

Deci $(-1,1)$ este punct șa (nu este punct de extrem).

3. Pentru $(x,y) = (1,-3)$ avem

$$Hf(1,-3) = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta_1 = 6,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 144 = -108,$$

$$\Delta_1^* = -\Delta_1 = -6,\ \Delta_2^* = \Delta_2 = -108.$$

Deci $(1,-3)$ este punct șa (nu este punct de extrem).

4. Pentru $(x,y) = (2,-2)$ avem

$$Hf(2,-2) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = 12,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 36 = 108.$$

Deci $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ și astfel $(2,-2)$ este punct de minim local. $\square$

7.7 Metoda verosimilității maxime

Fie X o variabilă statistică a cărei repartiție depinde de parametrii θ_1, θ_2, ..., θ_k, unde $k \in \mathbb{N}^*$.

Presupunem din nou că că estimarea parametrilor $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ se efectuează pe baza unei selecții $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Metoda verosimilității maxime constă în estimarea parametrilor θ_1, θ_2, ..., θ_k prin statisticile $\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \ldots, \widehat{\theta}_k$ ce se obțin prin maximizarea funcției

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_k) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \ln p(x_i; \theta_1, \ldots, \theta_k), \text{ dacă v.a. } X \text{ este discretă}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \ln f(x_i; \theta_1, \ldots, \theta_k), \text{ dacă v.a. } X \text{ este continuă}, \end{cases}$$

unde $p(x_i; \theta_1, \ldots, \theta_k) = P(X_i = x_i; \theta_1, \ldots, \theta_k)$ reprezintă masa de probabilitate a v.a. X_i, iar $f(x_i; \theta_1, \ldots, \theta_k)$ reprezintă densitatea de repartiție a v.a. X_i.

Observația 7.7.1. Deoarece v.a. $X_1, \ldots, X_n$ sunt independente și identic repartizate cu X, avem:

a) dacă v.a. X este discretă, atunci

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_k) = \ln p(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_k),$$

unde $p(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_k) = \prod\limits_{i=1}^{n} p(x_i; \theta_1, \ldots, \theta_k)$ este masa de probabilitate a vectorului aleator discret $(X_1, \ldots, X_n)$;

b) dacă v.a. X este continuă, atunci

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_k) = \ln f(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_k),$$

unde $f(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_k) = \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1, \ldots, \theta_k)$ este densitatea de repartiție a vectorului aleator continuu $(X_1, \ldots, X_n)$.

Definiția 7.7.1. *Funcțiile* $L(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_k)$ *și* $p(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_k)$, *respectiv* $f(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_k)$, *se numesc* ***funcții de verosimilitate****.*

Observația 7.7.2. Pentru maximizarea funcțiilor de verosimilitate se utilizează metoda punctelor critice, descrisă in secțiunea anterioară. Astfel estimațiile $\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \ldots, \widehat{\theta}_k$ se obțin rezolvând sistemul

$$\frac{\partial L(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_i} = 0, \ \forall i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Exemplul 7.7.1. Fie o variabilă statistică X având o repartiție Poisson de parametru θ ($\theta > 0$), adică probabilitatea sa de repartiție este

$$P(X = x; \theta) = e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^x}{x!}, \ \forall x \in \mathbb{N}^*.$$

Să se estimeze parametrul θ folosind metoda verosimilității maxime.

Soluție. Calculăm funcția de verosimilitate:

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln p(x_i; \theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln P(X = x_i; \theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln \left(e^{-\theta} \cdot \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [-\theta + x_i \ln \theta - \ln(x_i!)] = -n\theta + n\overline{X} \ln \theta - \ln \prod_{i=1}^{n} x_i! \ .$$

Rezultă că

$$\frac{\partial L(x_1, \ldots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = -n + \frac{n\overline{X}}{\theta},$$

deci ecuația $\dfrac{\partial L(x_1,\ldots,x_n;\theta)}{\partial\theta} = 0$ are soluția $\widehat{\theta} = \overline{X}$.

Cum $E(\overline{X}) = E(X) = \theta$, rezultă că $\widehat{\theta} = \overline{X}$ este o estimație nedeplasată pentru θ.

Cum $\mathrm{var}\,(\overline{X}) = \dfrac{\mathrm{var}\,(X)}{n} = \dfrac{\theta}{n}$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{var}\,(\overline{X}) = 0$, deci estimația $\widehat{\theta} = \overline{X}$ este absolut corectă, deci și consistentă.

Cum $\dfrac{\partial \ln p(x;\theta)}{\partial\theta} = -1 + \dfrac{x}{\theta}$, rezultă că $\dfrac{\partial^2 \ln p(x;\theta)}{\partial\theta^2} = -\dfrac{x}{\theta^2}$, deci

$$I(\theta) = -E\left(-\frac{X}{\theta^2}\right) = \frac{1}{\theta^2}E(X) = \frac{1}{\theta^2}\cdot\theta = \frac{1}{\theta}.$$

Rezultă că $\mathrm{var}\,(\overline{X}) = \dfrac{1}{nI(\theta)}$, deci estimația $\widehat{\theta} = \overline{X}$ este și eficientă. □

Exemplul 7.7.2. Fie o variabilă statistică X având o repartiție binomială negativă de parametri n și p ($n \geq 0$, $p \in (0,1)$), adică masa sa de probabilitate este

$$P(X = k; n, p) = C^k_{n+k-1} p^n (1-p)^k, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Să se estimeze parametrii n și p folosind:

a) metoda momentelor;

b) metoda verosimilității maxime.

Soluție. a) Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} E(X) = \overline{X}, \\ \mathrm{var}\,(X) = \overline{\mu}_2, \end{cases}$$

unde $\overline{X}$ este media de selecție iar $\overline{\mu}_2$ este dispersia de selecție. Conform Propoziției 4.1.9 acest sistem devine

$$\begin{cases} \dfrac{n(1-p)}{p} = \overline{X}, \\ \dfrac{n(1-p)}{p^2} = \overline{\mu}_2, \end{cases}$$

deci soluția sa este

$$\widehat{p} = \frac{\overline{X}}{\overline{\mu}_2}, \ \widehat{n} = \frac{\overline{X}^2}{\overline{\mu}_2 - \overline{X}},$$

cu condiția $\overline{\mu}_2 > \overline{X}$.

b) Calculăm funcția de verosimilitate, pe baza unei selecții $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_m = x_m$:

$$\begin{aligned} L(x_1,\ldots,x_m;n,p) &= \sum_{i=1}^m \ln P(X = x_i; n, p) = \sum_{i=1}^m \ln\left[C^{x_i}_{n+x_i-1} p^n (1-p)^{x_i}\right] \\ &= \sum_{i=1}^m \left[n\ln p + x_i \ln(1-p) + \ln\frac{(n+x_i-1)(n+x_i-2)\ldots n}{x_i!}\right] \\ &= nm\ln p + m\overline{X}\ln(1-p) + \sum_{\substack{i=1\\x_i\geq 1}}^m [\ln n + \ln(n+1) + \ldots + \ln(n+x_i-1)] - \ln\prod_{i=1}^m x_i!\,. \end{aligned}$$

Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1,\ldots,x_m;n,p)}{\partial n} = 0, \\ \dfrac{\partial L(x_1,\ldots,x_m;n,p)}{\partial p} = 0, \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} m\ln p + \sum\limits_{\substack{i=1\\ x_i\geq 1}}^{m}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\ldots+\dfrac{1}{n+x_i-1}\right)=0,\\[2ex] \dfrac{nm}{p}-\dfrac{m\overline{X}}{1-p}=0.\end{cases}$$

Soluția sa este $(\widehat{n}, \widehat{p})$, unde $\widehat{n}$ este soluția pozitivă a ecuației

$$\sum_{\substack{i=1\\ x_i\geq 1}}^{m}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+x_i-1}\right)-m\ln\left(1+\frac{\overline{X}}{n}\right)=0, \tag{7.7.1}$$

iar

$$\widehat{p}=\frac{\widehat{n}}{\widehat{n}+\overline{X}}\,. \tag{7.7.2}$$

□

7.8 Intervale de încredere

Definiția 7.8.1. *Considerăm estimarea unui parametru θ bazată pe selecția $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Fie $L_1 = L_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ și $L_2 = L_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ două statistici astfel încât*

$$P(L_1 < L_2) = 1,$$

și fie $\alpha \in [0, 1)$. Intervalul (L_1, L_2) se numește un ***interval de încredere*** $[100\,(1-\alpha)]\,\%$ ***pentru parametrul*** *θ dacă*

$$P\left(L_1 < \theta < L_2\right) = 1-\alpha.$$

Numărul α se numește ***nivelul de semnificație****, iar numărul $1-\alpha$ se numește* ***coeficientul de încredere****. Statisticile L_1 și L_2 se numesc* ***limita inferioară****, respectiv* ***limita superioară de încredere*** *pentru parametrul θ, corespunzătoare coeficientul de încredere $1-\alpha$.*

Observația 7.8.1. Valorile uzuale ale coeficientul de încredere $1-\alpha$ sunt $0{,}9, 0{,}95, 0{,}99, 0{,}995, 0{,}999$, adică

$$\alpha \in \{0{,}1, 0{,}05, 0{,}01, 0{,}005, 0{,}001\}.$$

Capitolul 8

Estimarea parametrilor repartiției normale

8.1 Estimarea parametrilor prin metoda momentelor

Fie o variabilă statistică X având o repartiție normală de parametri m și σ^2 ($\sigma > 0$), adică densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vom estima parametrii m și σ^2 pe baza unei selecții $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$, folosind metoda momentelor.

Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} E(X) = \overline{M}_1, \\ E(X^2) = \overline{M}_2, \end{cases}$$

unde $\overline{M}_1$ și $\overline{M}_2$ sunt momentele de selecție de ordinul 1, respectiv 2. Sistemul este echivalent cu

$$\begin{cases} E(X) = \overline{X}, \\ \operatorname{var}(X) = \overline{\mu}_2, \end{cases}$$

unde $\overline{X} = \overline{M}_1 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ este media de selecție iar $\overline{\mu}_2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2$ este dispersia de selecție. Conform Propoziției 4.2.3, soluția sa este $(\widehat{m}, \widehat{\sigma^2})$, unde

$$\begin{cases} \widehat{m} = \overline{X}, \\ \widehat{\sigma^2} = \overline{\mu}_2 = \dfrac{n-1}{n} \cdot S^2. \end{cases}$$

Conform Exemplului 7.4.1, rezultă că $\widehat{m} = \overline{X}$ este o estimație consistentă, nedeplasată, absolut corectă și eficientă pentru parametrul m, iar $\widehat{\sigma^2} = \overline{\mu}_2$ este o estimație consistentă, deplasată și asimptotic eficientă pentru parametrul σ^2.

8.2 Estimarea parametrilor prin metoda verosimilității maxime

Fie o variabilă statistică X având o repartiție normală de parametri m și σ^2 ($\sigma > 0$), adică densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vom estima parametrii m și σ^2 folosind metoda verosimilității maxime.

Notăm

$$\alpha = \sigma^2.$$

Calculăm funcția de verosimilitate, pe baza unei selecții $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$:

$$\begin{aligned} L(x_1, \ldots, x_n; m, \alpha) &= \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i; m, \alpha) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[\ln(2\pi\alpha) + \frac{(x_i - m)^2}{\alpha} \right] \\ &= -\frac{n \ln(2\pi)}{2} - \frac{n \ln \alpha}{2} - \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2. \end{aligned}$$

Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, \ldots, x_n; m, \alpha)}{\partial m} = 0, \\ \dfrac{\partial L(x_1, \ldots, x_n; m, \alpha)}{\partial \alpha} = 0, \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - m) = 0, \\ -\dfrac{n}{2\alpha} + \dfrac{1}{2\alpha^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 = 0. \end{cases}$$

Soluția sa este $(\widehat{m}, \widehat{\alpha})$, unde

$$\begin{cases} \widehat{m} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{X}, \\ \widehat{\alpha} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \widehat{m})^2 = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2 = \overline{\mu}_2 = \dfrac{n-1}{n} \cdot S^2. \end{cases}$$

Deci estimațiile obținute sunt aceleași ca și în cazul metodei momentelor.

8.3 Intervale de încredere pentru parametrul m când parametrul σ^2 este cunoscut

Propoziția 8.3.1. *Fie o variabilă statistică X având o repartiție normală de parametri m și σ^2, unde $\sigma > 0$ este fixat, și fie estimația $\widehat{m} = \overline{X}$ a parametrului m, unde $\overline{X}$ este media selecției $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$. Fie $\alpha \in (0, 1)$ și fie $u_{1-\alpha/2} \in (0, \infty)$ a.î.*

$$F_U(u_{1-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \tag{8.3.1}$$

unde F_U este funcția de repartiție a unei v.a. $U \sim N(0, 1)$. Atunci intervalul

$$\left(\overline{X} - \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \cdot \sigma, \overline{X} + \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \cdot \sigma \right)$$

este un interval de încredere $[100\,(1-\alpha)]\,\%$ pentru parametrul m, adică

$$P\left(\overline{X} - \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \cdot \sigma < m < \overline{X} + \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \cdot \sigma \right) = 1 - \alpha. \tag{8.3.2}$$

Demonstrație. Fie $L \in (0, \infty)$ a.î.

$$P\left(\overline{X} - L < m < \overline{X} + L\right) = 1 - \alpha. \tag{8.3.3}$$

Evident,

$$P\left(\overline{X} - L < m < \overline{X} + L\right) = P\left(-\frac{L\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{(\overline{X} - m)\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{L\sqrt{n}}{\sigma}\right). \tag{8.3.4}$$

Dar, conform Corolarului 6.5.2 avem

$$\overline{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

deci conform Propoziției 4.2.3 rezultă că

$$\frac{(\overline{X} - m)\sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Astfel avem

$$P\left(-\frac{L\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{(\overline{X} - m)\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{L\sqrt{n}}{\sigma}\right) = P\left(-\frac{L\sqrt{n}}{\sigma} < U < \frac{L\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \int_{-\frac{L\sqrt{n}}{\sigma}}^{\frac{L\sqrt{n}}{\sigma}} f_U(x)dx, \tag{8.3.5}$$

unde

$$f_U(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

este densitatea de repartiție a v.a. $U \sim N(0, 1)$. Folosind faptul că funcția f_U este pară, avem

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{L\sqrt{n}}{\sigma}}^{\frac{L\sqrt{n}}{\sigma}} f_U(x)dx &= 2\int_0^{\frac{L\sqrt{n}}{\sigma}} f_U(x)dx = 2\left(F_U\left(\frac{L\sqrt{n}}{\sigma}\right) - F_U(0)\right) = 2\left(F_U\left(\frac{L\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\right)\\ &= 2F_U\left(\frac{L\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1,\end{aligned}$$

deci conform (8.3.3), (8.3.4) și (8.3.5) obținem $2F_U\left(\frac{L\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 = 1 - \alpha$.

Rezultă că $F_U\left(\frac{L\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, deci conform (8.3.1) obținem $\frac{L\sqrt{n}}{\sigma} = u_{1-\alpha/2}$, adică

$$L = \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \cdot \sigma. \tag{8.3.6}$$

Din (8.3.3) și (8.3.6) rezultă egalitatea (8.3.2). □

Observația 8.3.1. Existența și unicitatea valorii $u_{1-\alpha/2} \in (0, \infty)$ ce verifică ecuația (8.3.1), numită *cuantila de ordinul* $1 - \alpha/2$ *a v.a.* U, sunt asigurate de faptul că funcția de repartiție $F_U : \mathbb{R} \to [0, 1]$ este continuă, strict crescătoare (derivata sa, f_U, fiind strict pozitivă), $F_U(0) = \frac{1}{2}$ și $\lim\limits_{x\to\infty} F_U(x) = 1$. Astfel din demonstrația propoziției anterioare rezultă că intervalul de încredere dat în enunțul propoziției este unic cu proprietatea (8.3.2), printre intervalele centrate în $\overline{X}$.

Observația 8.3.2. Ecuația (8.3.1) este echivalentă cu $P(U < u_{1-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, deci cu

$$P(U > u_{1-\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Exemplul 8.3.1. Considerăm o selecție de volum $n = 4$ pentru o v.a. $X \sim N(m, 9)$, valorile observate fiind generate în R (pentru $m = 2$) prin

```
>x<-rnorm(4,2,3)
>x
0.2405243 2.4351720 1.6419779 -1.9547743.
```

Presupunem că valorile sunt observate dintr-o repartiție normală având o medie necunoscută m și o dispersie cunoscută $\sigma^2 = 9$.

Estimația parametrului m dată de media de selecţie are valoarea

$$\overline{X} = \frac{1}{4}(0{,}2405243 + 2{,}4351720 + 1{,}6419779 - 1{,}9547743) = 0{,}590725.$$

Această valoare poate fi calculată în R prin

```
> mean(x)
```

Considerăm coeficientul de încredere $1 - \alpha = 0{,}95$, adică $\alpha = 0{,}05$.

Determinăm numărul $u_{1-\alpha/2} = u_{0{,}975} \in (0, \infty)$ ce verifică (8.3.1), adică $F_U(u_{0{,}975}) = 0{,}975$. Acest număr poate fi calculat în R prin

```
>qnorm(0.975,0,1)
```

rezultatul fiind $u_{0{,}975} = 1{,}959964$.

Astfel

$$\frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \cdot \sigma = \frac{3 \cdot 1{,}959964}{\sqrt{4}} = 2{,}939946,$$

deci conform Propoziției 8.3.1 rezultă că un interval de încredere 95% pentru parametrul m este

$$\left(\overline{X} - 2{,}939946, \overline{X} + 2{,}939946\right) = (-2{,}349221, 3{,}530671),$$

adică $P(-2{,}349221 < m < 3{,}530671) = 0{,}95$.

Exemplul 8.3.2. Considerăm o selecție de volum n pentru o variabilă statistică având o repartiție normală de medie m necunoscută și dispersie $\sigma^2 = 9$. Care este valoarea minimă a volumului n al selecției pentru care

$$P\left(|m - \overline{X}| < 0{,}01\right) \geq 0{,}95,$$

adică eroarea estimării parametrului m prin media de selecție $\overline{X}$ să fie mai mică decât 0,01, cu o probabilitate (încredere) de cel puțin 95%?

Soluție. Pentru orice $\alpha \in (0, 1)$, conform (8.3.2) avem

$$P\left(|m - \overline{X}| < \frac{3u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha,$$

unde $u_{1-\alpha/2} \in (0, \infty)$ este dat de (8.3.1). Astfel inegalitatea cerută are loc dacă și numai dacă $1 - \alpha \geq 0{,}95$ și $\frac{3u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq 0{,}01$, adică $1 - \alpha \geq 0{,}95$ și $n \geq (300u_{1-\alpha/2})^2$.

Funcția de repartiție F_U este strict crescătoare, deci valoarea lui $u_{1-\alpha/2}$ este strict crescătoare în raport cu coeficientul $1 - \alpha$. Rezultă că inegalitatea cerută are loc dacă și numai dacă $n \geq (300u_{1-\alpha_0/2})^2$, unde $1 - \alpha_0 = 0{,}95$. Deci valoarea minimă a lui n ce verifică inegalitatea este

$$n = \left\lceil (300u_{0{,}975})^2 \right\rceil,$$

unde $\lceil x \rceil$ reprezintă *partea întreagă superioară* a numărului real x.

Conform exemplului anterior avem $u_{0{,}975} = 1{,}959964$, deci valoarea minimă cerută este

$$n = \left\lceil (300 \cdot 1{,}959964)^2 \right\rceil = 345732.$$

□

8.4 Intervale de încredere pentru parametrul σ^2

Ca estimație pentru parametrul σ^2 vom utiliza dispersia corectată S^2, deoarece este o estimație nedeplasată (spre deosebire de dispersia $\overline{\mu}_2$ care este o estimație deplasată).

Propoziția 8.4.1. *Fie o variabilă statistică X având o repartiție normală de parametri m și σ^2, $\sigma > 0$, și fie estimația $\widehat{\sigma^2} = S^2$ a parametrului σ^2, unde S^2 este dispersia corectată a selecției $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$. Fie $\alpha \in (0,1)$ și fie $y_{n-1,1-\alpha/2}, y_{n-1,\alpha/2} \in (0,\infty)$ a.î.*

$$F_Y(y_{n-1,1-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2},\ F_Y(y_{n-1,\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}, \tag{8.4.1}$$

unde F_Y este funcția de repartiție a unei v.a. $Y \sim \chi^2(n-1)$ (repartiția hi-pătrat cu $n-1$ grade de libertate). Atunci intervalul

$$\left(\frac{n-1}{y_{n-1,1-\alpha/2}} \cdot S^2, \frac{n-1}{y_{n-1,\alpha/2}} \cdot S^2\right)$$

este un interval de încredere $[100\,(1-\alpha)]\,\%$ pentru parametrul σ^2, adică

$$P\left(\frac{n-1}{y_{n-1,1-\alpha/2}} \cdot S^2 < \sigma^2 < \frac{n-1}{y_{n-1,\alpha/2}} \cdot S^2\right) = 1 - \alpha. \tag{8.4.2}$$

Demonstrație. Fie $L_1, L_2 \in (0,\infty)$ a.î.

$$P\left(L_1 < \sigma^2 < L_2\right) = 1 - \alpha. \tag{8.4.3}$$

Evident,

$$P\left(L_1 < \sigma^2 < L_2\right) = P\left(\frac{n-1}{L_2} \cdot S^2 < \frac{n-1}{\sigma^2} \cdot S^2 < \frac{n-1}{L_1} \cdot S^2\right). \tag{8.4.4}$$

Dar, conform Corolarului 6.5.2 avem

$$\frac{n-1}{\sigma^2} \cdot S^2 \sim \chi^2(n-1).$$

Astfel avem

$$P\left(\frac{n-1}{L_2} \cdot S^2 < \frac{n-1}{\sigma^2} \cdot S^2 < \frac{n-1}{L_1} \cdot S^2\right) = P\left(\frac{n-1}{L_2} \cdot S^2 < Y < \frac{n-1}{L_1} \cdot S^2\right) = \int_{\frac{n-1}{L_2}\cdot S^2}^{\frac{n-1}{L_1}\cdot S^2} f_Y(x)dx, \tag{8.4.5}$$

unde

$$f_Y(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}},\ \forall x \in (0,\infty)$$

(și $f_Y(x) = 0$, $\forall x \in (-\infty, 0]$) este densitatea de repartiție a v.a. $Y \sim \chi^2(n-1)$. Avem

$$\int_{\frac{n-1}{L_2}\cdot S^2}^{\frac{n-1}{L_1}\cdot S^2} f_Y(x)dx = F_Y\left(\frac{n-1}{L_1} \cdot S^2\right) - F_Y\left(\frac{n-1}{L_2} \cdot S^2\right),$$

deci conform (8.4.3), (8.4.4) și (8.4.5) obținem

$$F_Y\left(\frac{n-1}{L_1} \cdot S^2\right) - F_Y\left(\frac{n-1}{L_2} \cdot S^2\right) = 1 - \alpha.$$

Această egalitate este adevărată, de exemplu, pentru

$$F_Y\left(\frac{n-1}{L_1} \cdot S^2\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \text{ și } F_Y\left(\frac{n-1}{L_2} \cdot S^2\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

Conform (8.4.1) obținem $\frac{n-1}{L_1} \cdot S^2 = y_{n-1,1-\alpha/2}$ și $\frac{n-1}{L_2} \cdot S^2 = y_{n-1,\alpha/2}$, adică

$$L_1 = \frac{n-1}{y_{n-1,1-\alpha/2}} \cdot S^2 \text{ și } L_2 = \frac{n-1}{y_{n-1,\alpha/2}} \cdot S^2. \tag{8.4.6}$$

Din (8.4.3) și (8.4.6) rezultă egalitatea (8.4.2). □

Observația 8.4.1. Existența și unicitatea fiecăreia din valorile $y_{n-1,1-\alpha/2}, y_{n-1,\alpha/2} \in (0,\infty)$ ce verifică ecuația (8.4.1), numite *cuantilele de ordinul* $1-\alpha/2$, respectiv $\alpha/2$, ale v.a. Y, sunt asigurate de faptul că funcția de repartiție $F_Y : \mathbb{R} \to [0,1]$ este continuă, strict crescătoare pe $[0,\infty)$ (derivata sa, f_Y, fiind strict pozitivă pe $(0,\infty)$), $F_Y(0) = 0$ și $\lim_{x\to\infty} F_Y(x) = 1$.

Totuși, din demonstrația propoziției anterioare rezultă că intervalul de încredere dat în enunțul propoziției nu este unic cu proprietatea (8.4.2).

Observația 8.4.2. Ecuațiile (8.4.1) sunt echivalente cu

$$P(Y < y_{n-1,1-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2},\ P(Y < y_{n-1,\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2},$$

deci cu

$$P(Y > y_{n-1,1-\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2},\ P(Y > y_{n-1,\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Exemplul 8.4.1. Considerăm din nou selecția de volum $n = 4$ din Exemplul 8.3.1,

$$0{,}2405243,\ 2{,}4351720,\ 1{,}6419779,\ -1{,}9547743,$$

dar acum presupunem că valorile sunt observate dintr-o repartiție normală $N(m,\sigma^2)$ având dispersia σ^2 necunoscută.

Estimația nedeplasată a parametrului σ^2 dată de dispersia de selecţie corectată are valoarea

$$S^2 = \frac{1}{3}\big[(0{,}2405243 - 0{,}590725)^2 + (2{,}4351720 - 0{,}590725)^2 + (1{,}6419779 - 0{,}590725)^2 \\ + (-1{,}9547743 - 0{,}590725)^2\big] = 3{,}703108.$$

Această valoare poate fi calculată în R prin

```
> var(x)
```

Considerăm din nou coeficientul de încredere $1-\alpha = 0{,}95$, adică $\alpha = 0{,}05$.

Determinăm numerele $y_{n-1,1-\alpha/2} = y_{3,\,0{,}975} \in (0,\infty)$ și $y_{n-1,\alpha/2} = y_{3,\,0{,}025} \in (0,\infty)$ ce verifică (8.4.1), adică

$$F_Y(y_{3,\,0{,}975}) = 0{,}975,\ F_Y(y_{3,\,0{,}025}) = 0{,}025.$$

Aceste numere pot fi calculate în R prin

```
>qchisq(0.975,3)
>qchisq(0.025,3)
```

rezultatele fiind $y_{3,\,0{,}975} = 9{,}348404$, respectiv $y_{3,\,0{,}025} = 0{,}2157953$.

Astfel

$$\frac{n-1}{y_{n-1,1-\alpha/2}} = \frac{3}{9{,}348404} = 0{,}3209104,\ \frac{n-1}{y_{n-1,\alpha/2}} = \frac{3}{0{,}2157953} = 13{,}9020637,$$

deci conform Propoziției 8.4.1 rezultă că un interval de încredere 95% pentru parametrul σ^2 este

$$\big(0{,}3209104 \cdot S^2, 13{,}9020637 \cdot S^2\big) = (1{,}188366, 51{,}48084),$$

adică $P(1{,}188366 < \sigma^2 < 51{,}48084) = 0{,}95$.

8.5 Intervale de încredere pentru parametrul m când parametrul σ^2 este necunoscut

Propoziția 8.5.1. *Fie o variabilă statistică X având o repartiție normală de parametri m și σ^2, $\sigma > 0$, și fie estimațiile $\widehat{m} = \overline{X}$ și $\widehat{\sigma^2} = S^2$ ale parametrilor m, respectiv σ^2, unde $\overline{X}$ și S^2 sunt media, respectiv dispersia corectată ale selecției $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$. Presupunem că $S > 0$. Fie $\alpha \in (0,1)$ și fie $z_{n-1,1-\alpha/2} \in (0,\infty)$ a.î.*

$$F_Z(z_{n-1,1-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \tag{8.5.1}$$

unde F_Z este funcția de repartiție a unei v.a. $Z \sim T(n-1)$ (repartiția Student cu $n-1$ grade de libertate). Atunci intervalul

$$\left(\overline{X} - \frac{z_{n-1,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \cdot S, \overline{X} + \frac{z_{n-1,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \cdot S\right)$$

este un interval de încredere $[100\,(1-\alpha)]\,\%$ pentru parametrul m, adică

$$P\left(\overline{X} - \frac{z_{n-1,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \cdot S < m < \overline{X} + \frac{z_{n-1,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \cdot S\right) = 1 - \alpha. \tag{8.5.2}$$

Demonstrație. Fie $L \in (0,\infty)$ a.î.

$$P\left(\overline{X} - L < m < \overline{X} + L\right) = 1 - \alpha. \tag{8.5.3}$$

Evident,

$$P\left(\overline{X} - L < m < \overline{X} + L\right) = P\left(-\frac{L\sqrt{n}}{S} < \frac{(\overline{X} - m)\sqrt{n}}{S} < \frac{L\sqrt{n}}{S}\right). \tag{8.5.4}$$

Fie

$$U = \frac{(\overline{X} - m)\sqrt{n}}{\sigma} \text{ și } Y = \frac{n-1}{\sigma^2} \cdot S^2.$$

Conform Corolarului 6.5.2 și Propoziției 4.2.3 avem

$$U \sim N(0,1) \text{ și } Y \sim \chi^2(n-1).$$

Cum $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sunt v.a. independente și identic repartizate cu $X \sim N(m, \sigma^2)$, rezultă că $\overline{X}$ și S^2 sunt v.a. independente, deci U și Y sunt v.a. independente. Conform Propoziției 4.2.11 rezultă că

$$\frac{(\overline{X} - m)\sqrt{n}}{S} = U \cdot \frac{\sigma}{S} = U\sqrt{\frac{n-1}{Y}} \sim T(n-1).$$

Astfel avem

$$P\left(-\frac{L\sqrt{n}}{S} < \frac{(\overline{X} - m)\sqrt{n}}{S} < \frac{L\sqrt{n}}{S}\right) = P\left(-\frac{L\sqrt{n}}{S} < Z < \frac{L\sqrt{n}}{S}\right) = \int_{-\frac{L\sqrt{n}}{S}}^{\frac{L\sqrt{n}}{S}} f_Z(x)dx, \tag{8.5.5}$$

unde

$$f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \beta\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

este densitatea de repartiție a v.a. $Z \sim T(n-1)$. Folosind faptul că funcția f_Z este pară, avem

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{L\sqrt{n}}{S}}^{\frac{L\sqrt{n}}{S}} f_Z(x)dx &= 2\int_0^{\frac{L\sqrt{n}}{S}} f_Z(x)dx = 2\left(F_Z\left(\frac{L\sqrt{n}}{S}\right) - F_Z(0)\right) = 2\left(F_Z\left(\frac{L\sqrt{n}}{S}\right) - \frac{1}{2}\right)\\ &= 2F_Z\left(\frac{L\sqrt{n}}{S}\right) - 1,\end{aligned}$$

deci conform (8.5.3), (8.5.4) și (8.5.5) obținem $2F_Z\left(\frac{L\sqrt{n}}{S}\right) - 1 = 1-\alpha$.

Rezultă că $F_Z\left(\frac{L\sqrt{n}}{S}\right) = 1-\frac{\alpha}{2}$, deci conform (8.5.1) obținem $\frac{L\sqrt{n}}{S} = z_{n-1,1-\alpha/2}$, adică

$$L = \frac{z_{n-1,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \cdot S. \tag{8.5.6}$$

Din (8.5.3) și (8.5.6) rezultă egalitatea (8.5.2). □

Observația 8.5.1. Existența și unicitatea valorii $z_{n-1,1-\alpha/2} \in (0,\infty)$ ce verifică ecuația (8.5.1), numită *cuantila de ordinul* $1-\alpha/2$ *a v.a.* Z, sunt asigurate de faptul că funcția de repartiție $F_Z : \mathbb{R} \to [0,1]$ este continuă, strict crescătoare (derivata sa, f_Z, fiind strict pozitivă), $F_Z(0) = \frac{1}{2}$ și $\lim_{x\to\infty} F_Z(x) = 1$. Astfel din demonstrația propoziției anterioare rezultă că intervalul de încredere dat în enunțul propoziției este unic cu proprietatea (8.5.2), printre intervalele centrate în $\overline{X}$.

Observația 8.5.2. Ecuația (8.5.1) este echivalentă cu $P(Z < z_{n-1,1-\alpha/2}) = 1-\frac{\alpha}{2}$, deci cu

$$P(Z > z_{n-1,1-\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Exemplul 8.5.1. Considerăm din nou selecția de volum $n = 4$ din Exemplele 8.3.1 și 8.4.1

$$0{,}2405243,\ 2{,}4351720,\ 1{,}6419779,\ -1{,}9547743,$$

dar acum presupunem că valorile sunt observate dintr-o repartiție normală $N(m,\sigma^2)$ având atât media m cât și dispersia σ^2 necunoscute.

Conform Exemplelor 8.3.1 și 8.4.1, estimația parametrului m dată de media de selecţie are valoarea

$$\overline{X} = 0{,}590725,$$

iar dispersia de selecţie corectată are valoarea

$$S^2 = 3{,}703108,\ \text{deci } S = \sqrt{3{,}703108} = 1{,}924346.$$

Considerăm din nou coeficientul de încredere $1-\alpha = 0{,}95$, adică $\alpha = 0{,}05$.

Determinăm numărul $z_{n-1,1-\alpha/2} = z_{3,0{,}975} \in (0,\infty)$ ce verifică (8.5.1), adică $F_Z(z_{3,0{,}975}) = 0{,}975$. Acest număr poate fi calculat în R prin

```
>qt(0.975,3)
```

rezultatul fiind $z_{3,0{,}975} = 3{,}182446$.

Astfel

$$\frac{z_{n-1,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}182446}{\sqrt{4}} = 1{,}591223,$$

deci conform Propoziției 8.5.1 rezultă că un interval de încredere 95% pentru parametrul m este

$$\left(\overline{X} - 1{,}591223\cdot S, \overline{X} + 1{,}591223\cdot S\right) = (-2{,}471339, 3{,}652789),$$

adică $P(-2{,}471339 < m < 3{,}652789) = 0{,}95$.

Capitolul 9

Regresie liniară

9.1 Metoda celor mai mici pătrate

Metoda celor mai mici pătrate se utilizează pentru aproximarea unei funcții când se cunosc numai valorile sale într-un număr finit de puncte, putându-se astfel prognoza valorile funcției în alte puncte (estimându-se astfel tendința (trendul) evoluției acestei funcții).

Presupunem că în aproximarea unei funcții $f : A \to \mathbb{R}$, cu $A \subseteq \mathbb{R}$, cunoaștem valorile

$$f(x_i),\ i \in \{1, \ldots, n\},$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ sunt puncte distincte, fixate. Vom aproxima funcția f printr-o funcție $g : A \to \mathbb{R}$, numită **funcție de ajustare (tendință, trend, aproximare)**.

De obicei funcția g este o funcție polinomială

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k,\ \text{cu } k \leq n$$

(în particular, funcție liniară $g(x) = a_0 + a_1 x$ sau pătratică $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$), sau o funcție hiperbolică

$$g(x) = a_0 + \frac{a_1}{x},$$

sau o funcție exponențială

$$g(x) = a_0 + \mathrm{e}^{a_1 x},$$

sau o funcție logaritmică

$$g(x) = a_0 + a_1 \ln x.$$

Alegerea tipului funcției de ajustare se face reprezentând grafic punctele date

$$(x_i, f(x_i)),\ i \in \{1, \ldots, n\}$$

și alegând un tip de funcție de ajustare cu graficul de aceeași formă cu reprezentarea grafică a acestor puncte.

După alegerea tipului funcției de ajustare g, parametrii $a_0, a_1, \ldots$ ai acestei funcții sunt calculați prin **minimizarea sumei pătratelor erorilor individuale**:

$$\min_{a_0, a_1, \ldots} \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - g(x_i)\right)^2.$$

În acest scop se poate utiliza metoda punctelor critice.

De exemplu, în cazul **funcției de ajustare polinomială**

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k,\ k \leq n,$$

parametrii $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ sunt soluția unică a sistemului

$$\frac{\partial h}{\partial a_j}(a_0, a_1, \ldots, a_k) = 0,\ j \in \{0, \ldots, k\},$$

unde

$$\begin{aligned} h(a_0, a_1, \ldots, a_k) &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - g(x_i))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \ldots - a_k x_i^k\right)^2 \end{aligned}$$

(deoarece $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ este punctul staționar unic al funcției h).

Efectuând derivările, acest sistem devine

$$-2 \sum_{i=1}^{n} x_i^j \left(f(x_i) - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \ldots - a_k x_i^k\right) = 0,\ j \in \{0, \ldots, k\},$$

adică

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \ldots + a_k \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i), \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + \ldots + a_k \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{k+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(x_i), \\ \ldots \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{k+1} + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{k+2} + \ldots + a_k \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{2k} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k f(x_i) \end{cases} \tag{9.1.1}$$

(sistem liniar de $k+1$ ecuații cu $k+1$ necunoscute, având determinantul nenul).

În particular, în cazul **funcției de ajustare liniară**

$$g(x) = a_0 + a_1 x$$

(adică pentru $k = 1$), acest sistem devine

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i), \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(x_i). \end{cases} \tag{9.1.2}$$

Observația 9.1.1. Alegând mai multe tipuri de funcții de ajustare, aproximarea este cu atât mai bună cu cât suma pătratelor erorilor individuale $\sum\limits_{i=1}^{n} (f(x_i) - g(x_i))^2$ este mai mică.

Exemplul 9.1.1. Vânzările unui produs, exprimate în mii lei, au avut următoarea evoluție în primele cinci luni ale anului:

Luna	Ian	Feb	Mar	Apr	Mai
Vânzare	20	25	35	45	60

Se cere să se determine o funcție de ajustare și, astfel, o prognoză a vânzărilor pentru luna iunie.

Soluție. Vom aplica metoda celor mai mici pătrate. Transformând șirul lunilor (ian, feb, mar, apr, mai) în șirul numeric

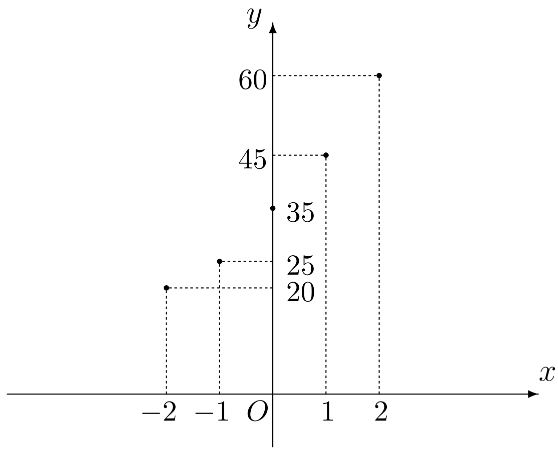
$$x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 2,$$

avem cunoscute valorile

$$f(-2) = 20,\ f(-1) = 25,\ f(0) = 35,\ f(1) = 45,\ f(2) = 60,$$

unde $f(x)$ reprezintă valoarea vânzărilor în luna x.

Reprezentarea grafică a punctelor $(x_i, f(x_i))$ este



ceea ce sugerează alegerea unei funcții de ajustare liniară sau pătratică.

Varianta 1. Pentru funcția de ajustare liniară $g(x) = a_0 + a_1 x$, parametrii a_0 și a_1 sunt soluțiile sistemului (9.1.2), care devine

$$\begin{cases} 5a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{5} x_i = \sum_{i=1}^{5} f(x_i), \\ a_0 \sum_{i=1}^{5} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i f(x_i). \end{cases}$$

Calculul coeficienților sistemului este efectuat în următorul tabel, pe coloanele $x_i,\ f(x_i),\ x_i^2,\ x_i f(x_i)$:

i	x_i	$f(x_i)$	x_i^2	$x_i f(x_i)$	$g(x_i)$	$f(x_i) - g(x_i)$	$(f(x_i) - g(x_i))^2$
1	-2	20	4	-40	17	3	9
2	-1	25	1	-25	27	-2	4
3	0	35	0	0	37	-2	4
4	1	45	1	45	47	-2	4
5	2	60	4	120	57	3	9
$\sum$	0	185	10	100	—	—	**30**

Sistemul devine

$$\begin{cases} 5a_0 = 185, \\ 10a_1 = 100, \end{cases} \text{deci} \begin{cases} a_0 = 37, \\ a_1 = 10. \end{cases}$$

Am obținut că funcția de ajustare liniară este

$$g(x) = 37 + 10x.$$

Astfel, vânzările prognozate pentru luna iunie au valoarea

$$g(3) = 37 + 10 \cdot 3 = 67 \text{ (mii lei)}.$$

Calculul sumei pătratelor erorilor individuale este efectuat în coloanele $g(x_i)$, $f(x_i) - g(x_i)$ și $(f(x_i) - g(x_i))^2$ ale tabelului anterior, obținându-se că această sumă are valoarea

$$\sum_{i=1}^{5} (f(x_i) - g(x_i))^2 = 30.$$

Varianta 2. Pentru funcția de ajustare pătratică $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, parametrii a_0, a_1 și a_2 sunt soluțiile sistemului (9.1.1) pentru $k = 2$, care devine

$$\begin{cases} 5a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{5} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = \sum_{i=1}^{5} f(x_i), \\ a_0 \sum_{i=1}^{5} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{5} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{5} x_i^3 = \sum_{i=1}^{5} x_i f(x_i), \\ a_0 \sum_{i=1}^{5} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{5} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{5} x_i^4 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 f(x_i). \end{cases}$$

Calculul coeficienților este efectuat în tabelul următor:

i	x_i	$f(x_i)$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i f(x_i)$	$x_i^2 f(x_i)$
1	-2	20	4	-8	16	-40	80
2	-1	25	1	-1	1	-25	25
3	0	35	0	0	0	0	0
4	1	45	1	1	1	45	45
5	2	60	4	8	16	120	240
$\sum$	0	185	10	0	34	100	390

Sistemul devine

$$\begin{cases} 5a_0 + 10a_2 = 185, \\ 10a_1 = 100, \\ 10a_0 + 34a_2 = 390, \end{cases} \quad \text{deci} \quad \begin{cases} a_0 = \dfrac{239}{7}, \\ a_1 = 10, \\ a_2 = \dfrac{10}{7}. \end{cases}$$

Am obținut că funcția de ajustare pătratică este

$$g(x) = \frac{239}{7} + 10x + \frac{10}{7} \cdot x^2.$$

Astfel, în acest caz vânzările prognozate pentru luna iunie au valoarea

$$g(3) = \frac{239}{7} + 10 \cdot 3 + \frac{10}{7} \cdot 3^2 = 77 \text{ (mii lei)}.$$

Calculul sumei pătratelor erorilor individuale este efectuat în tabelul următor (rezultatele din coloanele $g(x_i)$ și $f(x_i) - g(x_i)$ fiind rotunjite la a treia zecimală, iar cele din coloana $(f(x_i) - g(x_i))^2$ la a doua zecimală):

i	x_i	$f(x_i)$	$g(x_i)$	$f(x_i) - g(x_i)$	$(f(x_i) - g(x_i))^2$
1	-2	20	19,857	0,143	0,02
2	-1	25	25,571	-0,571	0,33
3	0	35	34,143	0,857	0,73
4	1	45	45,571	-0,571	0,33
5	2	60	59,857	0,143	0,02
$\sum$	0	185	—	—	**1,43**

Suma pătratelor erorilor individuale are acum valoarea

$$\sum_{i=1}^{5}\left(f(x_i)-g(x_i)\right)^2 \simeq 1{,}43.$$

Această valoare fiind mult mai mică decât cea de la ajustarea liniară, rezultă că aproximarea pătratică este sensibil mai bună decât cea liniară. Evident, această concluzie este în general valabilă, deoarece aproximarea liniară este un caz particular al aproximării pătratice. □

9.2 Regresia liniară simplă

Considerăm o variabilă statistică Y dependentă liniar de o variabilă numerică (nealeatoare) X cu o **eroare** (**perturbație**, **zgomot**, **reziduu**) ε, având forma

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon, \tag{9.2.1}$$

unde α și β sunt parametrii reali, necunoscuți, iar ε este o variabilă aleatoare având media $E(\varepsilon) = 0$.

Observația 9.2.1. Deoarece $E(\varepsilon) = 0$, rezultă că

$$E(Y) = \alpha + \beta X \quad \text{și} \quad \operatorname{var}(Y) = \operatorname{var}(\varepsilon).$$

Definiția 9.2.1. *Relația (9.2.1) se numește* ***modelul de regresie liniară simplă****. Parametrii necunoscuți α și β se numesc* ***coeficienții de regresie****, iar dreapta de ecuație $y = \alpha + \beta x$ se numește* ***dreapta de regresie*** *corespunzătoare modelului considerat.*

Vom estima coeficienții de regresie α și β ai modelului (9.2.1) pe baza unei selecții $Y_1 = y_1$, $Y_2 = y_2$, ..., $Y_n = y_n$ pentru v.a. Y, corespunzătoare valorilor $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$ ale variabilei X, utilizând metoda celor mai mici pătrate, adică prin minimizarea sumei pătratelor erorilor individuale $y_i - (\alpha + \beta x_i)$.

Propoziția 9.2.1. *Fie modelul de regresie liniară simplă (9.2.1). Fie o selecție pentru v.a. Y formată din valorile $Y_1 = y_1$, $Y_2 = y_2$, ..., $Y_n = y_n$, corespunzătoare valorilor $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2$, ...,respectiv $X_n = x_n$ ale variabilei X. Presupunem că există $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a.î. $x_i \neq x_j$. Atunci estimările obținute prin metoda celor mai mici pătrate pentru parametrii α și β sunt*

$$\widehat{\alpha} = \overline{Y} - \frac{\overline{cov}(X,Y)}{\overline{\mu}_2(X)} \cdot \overline{X}, \quad \widehat{\beta} = \frac{\overline{cov}(X,Y)}{\overline{\mu}_2(X)},$$

unde

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{și} \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

reprezintă mediile de selecție ale lui X, respectiv Y,

$$\overline{\mu}_2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2$$

reprezintă dispersia de selecție a lui X, iar

$$\overline{cov}(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})$$

reprezintă covarianța de selecție a lui X și Y.

Demonstrație. Conform metodei celor mai mici pătrate, estimările $\widehat{\alpha}$ și $\widehat{\beta}$ ale parametrilor α, respectiv β se obțin prin minimizarea sumei pătratelor erorilor individuale, adică a funcției

$$Q(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n; \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (\alpha + \beta x_i)\right]^2.$$

Conform rezultatelor din secțiunea anterioară (ecuațiile (9.1.2)), rezultă că $\widehat{\alpha}$ și $\widehat{\beta}$ sunt soluțiile sistemului de ecuații

$$\begin{cases} n\alpha + \beta \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \\ \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

Conform *formulelor lui Cramer* obținem că

$$\beta = \frac{n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{XY}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{X}^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{X}\right)^2} = \frac{\overline{\text{cov}}(X, Y)}{\overline{\mu}_2(X)},$$

deci

$$\widehat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{\widehat{\beta}}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{Y} - \widehat{\beta}\overline{X} = \overline{Y} - \frac{\overline{\text{cov}}(X, Y)}{\overline{\mu}_2(X)} \cdot \overline{X}.$$

Ipoteza că există $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a.î. $x_i \neq x_j$ este echivalentă cu $\overline{\mu}_2(X) \neq 0$. Astfel determinantul sistemului de ecuații considerat este nenul, deci sistemul are soluție unică. □

Observația 9.2.2. Estimațiile $\widehat{\alpha}$ și $\widehat{\beta}$ din propoziția anterioară sunt nedeplasate și de dispersie minimă.

Observația 9.2.3. Dacă variabila statistică Y are o repartiție normală, atunci estimațiile $\widehat{\alpha}$ și $\widehat{\beta}$ din propoziția anterioară, obținute prin metoda celor mai mici pătrate, coincid cu estimațiile obținute prin metoda verosimilității maxime. De asemenea, în acest caz intervalele de încredere pentru estimațiile $\widehat{\alpha}$ și $\widehat{\beta}$ pot fi determinate utilizând rezultatele din capitolul anterior.

9.3 Alte modele de regresie

Modelul polinomial de regresie are forma

$$Y = \alpha + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \ldots + \beta_k X^k + \varepsilon.$$

Modelul hiperbolic de regresie are forma

$$Y = \alpha + \frac{\beta}{X} + \varepsilon.$$

Modelul logaritmic de regresie are forma

$$Y = \alpha + \beta \ln X + \varepsilon.$$

Aceste trei modele sunt modele de regresie liniară, funcțiile de regresie invocate fiind liniare relativ la coeficienții de regresie.

Modelul exponențial de regresie are forma

$$Y = \alpha + e^{\beta X} + \varepsilon.$$

Modelul de regresie liniară multiplă are forma

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_k X_k + \varepsilon.$$

Capitolul 10

Testarea ipotezelor statistice

10.1 Expunerea problemei

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o selecție și fie o variabilă aleatoare X având densitatea de repartiție $f(x;\theta)$ (cazul continuu) sau masa de probabilitate $p(x;\theta)$ (cazul discret), unde θ este un parametru, cunoscut sau necunoscut.

Considerăm **ipoteza statistică**

$$H: \quad X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ sunt valori ale v.a. } X.$$

H se numeşte **ipoteză simplă** dacă parametrul θ și repartiția lui X (adică densitatea de repartiție $f(x;\theta)$, respectiv masa de probabilitate $p(x;\theta)$) sunt cunoscute, respectiv **ipoteză compusă**, în caz contrar.

Testarea unei ipoteze statistice H se face în raport cu o **ipoteză alternativă** $\overline{H}$.

De obicei ipoteza alternativă este

$$\overline{H}: \quad H \text{ nu este adevărată.}$$

Observația 10.1.1. În testarea ipotezelor statistice pot să apară erori de două tipuri, și anume:

- **erori de tipul I**, când ipoteza este respinsă, deși ea este adevărată;
- **erori de tipul al II-lea**, când ipoteza este acceptată, deși ea este falsă.

Probabilitatea să apară o eroare de tipul I se numește **nivelul de semnificație** al testului.

Valorile uzuale ale nivelul de semnificație sunt $0{,}1, 0{,}05, 0{,}01, 0{,}005, 0{,}001$.

10.2 Testul hi-pătrat

Considerăm cazul în care ipoteza H este simplă, adică parametrul θ și repartiția lui X sunt cunoscute.

Pentru testarea ipotezei H se introduce o statistică $h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ a selecției date, care este o măsură a deviației repartiției de selecție de la repartiția teoretică a v.a. X.

Testul χ^2 (hi-pătrat), introdus de K. Pearson, este bazat pe statistica următoare, care cuantifică distanța dintre frecvențele intervalelor unei diagrame de frecvențe a selecției și probabilitățile teoretice ale acestor intervale, în acord cu metoda celor mai mici pătrate (ponderate):

$$D = \sum_{j=1}^{k} \frac{n}{P_j} \left(\frac{N_j}{n} - P_j \right)^2, \tag{10.2.1}$$

unde

- k este numărul de intervale disjuncte $I_1, I_2, \ldots, I_k$ în care este partiționată mulțimea numerelor reale, fiecare interval I_j conținând cel puțin o valoare X_i;
- $N_j = \text{card}\,\{i \mid X_i \in I_j,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ (numărul valorilor de selecție ce aparțin intervalului I_j, numit și *frecvența absolută a valorilor de selecție ce aparțin intervalului* I_j), pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, deci $\dfrac{N_j}{n}$ reprezintă *frecvența relativă a valorilor de selecție ce aparțin intervalului* I_j;
- $P_j = P(X \in I_j)$ reprezintă *probabilitatea (teoretică) ca v.a. X să aparțină intervalului* I_j, pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$;

Evident, $\sum\limits_{j=1}^{k} N_j = \sum\limits_{j=1}^{k} P_j = 1$, deci avem

$$D = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{(N_j - nP_j)^2}{P_j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{N_j^2}{P_j} - n. \tag{10.2.2}$$

Observația 10.2.1. D este o statistică deoarece este o funcție de frecvențele $N_1, N_2, \ldots, N_k$, iar acestea sunt funcții de datele de selecție $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Testul hi-pătrat este fundamentat de următorul rezultat.

Teorema 10.2.1 (Pearson). *Statistica D definită de relația (10.2.1) converge în repartiție către o repartiție hi-pătrat cu $k-1$ grade de libertate, adică*

$$D \xrightarrow{r} \chi^2(k-1) \quad (\textit{pentru } n \to \infty).$$

Fie $\alpha \in (0, 1)$ nivelul de semnificație al testului și fie $y_{k-1,1-\alpha} \in (0, \infty)$ a.î.

$$F_Y(y_{k-1,1-\alpha}) = 1 - \alpha, \tag{10.2.3}$$

unde F_Y este funcția de repartiție a unei v.a. $Y \sim \chi^2(k-1)$.

Ecuația (10.2.3) este echivalentă cu

$$P(Y < y_{k-1,1-\alpha}) = 1 - \alpha,$$

deci cu

$$P(Y > y_{k-1,1-\alpha}) = \alpha.$$

Conform teoremei anterioare, putem considera că statistica D are o repartiție $\chi^2(k-1)$, pentru n suficient de mare. Astfel ipoteza H este respinsă dacă

$$D > y_{k-1,1-\alpha} \tag{10.2.4}$$

și acceptată în caz contrar.

Observația 10.2.2. Testul hi-pătrat se aplică pentru selecții de volum mare, de regulă pentru $n > 50$, și pentru $N_j \geq 5$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Exemplul 10.2.1. Fie o selecție de volum $n = 1000$, datele observate fiind: 500 de 0, 250 de 1, 125 de 2, 63 de 3, 32 de 4, 16 de 5, 8 de 6, 4 de 7, și 2 de 8.

Dorim să testăm ipoteza că aceste date au o repartiție Poisson de parametru $\lambda = 1$.

Vom aplica testul hi-pătrat, pentru un nivel de semnificație $\alpha = 0{,}01$.

Partiționăm mulțimea $\mathbb{R}$ în următoarele $k = 8$ intervale disjuncte:

$$I_1 = (-\infty, 1),\ I_j = [j-1, j),\ \forall j \in \{2, \ldots, 7\},\ I_8 = [7, \infty).$$

Frecvențele absolute corespunzătoare acestor intervale sunt

$$N_1 = 500,\ N_2 = 250,\ N_3 = 125,\ N_4 = 63,\ N_5 = 32,\ N_6 = 16,\ N_7 = 8,\ N_8 = 4 + 2 = 6.$$

Pentru o v.a. $X \sim \mathrm{Po}(1)$, avem

$$P(X = m) = e^{-1} \cdot \frac{1}{m!} = \frac{1}{e \cdot m!},\ \forall m \in \mathbb{N},$$

deci probabilitățile teoretice, conform repartiției Po(1), corespunzătoare intervalelor considerate sunt

$$\begin{gathered} P_1 = P(X = 0) = 0{,}3678794,\ P_2 = P(X = 1) = 0{,}3678794,\ P_3 = P(X = 2) = 0{,}1839397, \\ P_4 = P(X = 3) = 0{,}0613132,\ P_5 = P(X = 4) = 0{,}0153283,\ P_6 = P(X = 5) = 0{,}0030657, \\ P_7 = P(X = 6) = 0{,}0005109,\ P_8 = P(X \geq 7) = 1 - (P_1 + P_2 + \ldots + P_7) = 0{,}0000834. \end{gathered}$$

Înlocuind în formula (10.2.2) obținem că valoarea statisticii D pentru datele observate este

$$D = \frac{1}{1000} \sum_{j=1}^{8} \frac{N_j^2}{P_j} - 1000 = 707{,}1895.$$

Determinăm numărul (cuantila) $y_{k-1,1-\alpha} = y_{7,\,0{,}99} \in (0, \infty)$ ce verifică (10.2.3), adică

$$F_Y(y_{7,\,0{,}99}) = 0{,}99.$$

Acest număr poate fi calculat în R prin

```
>qchisq(0.99,7)
```

rezultatul fiind $y_{7,\,0{,}99} = 18{,}47531$.

Rezultă că

$$D > y_{k-1,1-\alpha},$$

și astfel, conform (10.2.4), ipoteza este respinsă (la nivelul de semnificație considerat).