Probabilități și Statistică Matematică

Seminar 22.04.2021.

1. Se consideră vectorul aleator discret (X, Y) cu repartiția dată în tabelul:

$X \setminus Y$	2	6	8	
1	0.20	0.10	0.10	0.4
3	0.05	0.10	0.05	0.2
4	0.25	0.05	0.10	0.4
	0.5	0.25	0.25	

a) Să se calculeze repartițiile și mediile variabilelor aleatoare condiționate $X|\{Y=y_j\}$ și $Y|\{X=x_i\}$, pentru $i,j \in \{0,1,2\}$.

b) Utilizând rezultatele obținute la punctul a), să se calculeze mediile v.a. X și Y.

Rezolvare

a) $X|\{Y=2\}: \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{2}{5} & \frac{5}{50} & \frac{25}{50} \end{pmatrix} \Rightarrow E(X|Y=2) = 1\cdot\frac{2}{5} + 3\cdot\frac{5}{50} + 4\cdot\frac{25}{50} = \frac{95}{50}$

$X|\{Y=6\}: \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{10}{25} & \frac{10}{25} & \frac{5}{25} \end{pmatrix} \Rightarrow E(X|Y=6) = 1\cdot\frac{10}{25} + 3\cdot\frac{10}{25} + 4\cdot\frac{5}{25} = \frac{60}{25}$

$X|\{Y=8\}: \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{10}{25} & \frac{5}{25} & \frac{10}{25} \end{pmatrix} \Rightarrow E(X|Y=8) = 1\cdot\frac{10}{25} + 3\cdot\frac{5}{25} + 4\cdot\frac{10}{25} = \frac{65}{25}$

- $Y|\{X=1\}: \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow E(Y|X=1) = 2\cdot\frac{2}{4} + 6\cdot\frac{1}{4} + 8\cdot\frac{1}{4} = \frac{18}{4}$

$Y|\{X=3\}: \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ \frac{5}{20} & \frac{1}{2} & \frac{5}{20} \end{pmatrix} \Rightarrow E(Y|X=3) = 2\cdot\frac{5}{20} + 6\cdot\frac{1}{2} + 8\cdot\frac{5}{20} = \frac{11}{2}$

$Y|(X=4): \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ \frac{25}{40} & \frac{5}{40} & \frac{10}{40} \end{pmatrix} \Rightarrow E(Y|X=4) = 2\cdot\frac{25}{40} + 6\cdot\frac{5}{40} + 8\cdot\frac{10}{40} = 4$

b) $E(X) = 0.5 \cdot \frac{95}{50} + 0.25 \cdot \frac{60}{25} + 0.25 \cdot \frac{65}{25}$

$E(Y) = 0.4 \cdot \frac{18}{4} + 0.2 \cdot \frac{11}{2} + 0.4 \cdot 4$

2. Fie vectorul aleator (X,Y) cu densitatea de probabilitate $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/5 \cdot (x+y+1), & x \in [0,1], y \in [0,2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

a) Să se calculeze densitățile de repartiție și mediile variabilelor aleatoare condiționate $X|\{Y=y\}$ și $Y|\{X=x\}$, unde $y \in [0,2]$ și $x \in [0,1]$.

b) Să se calculeze probabilitățile condiționate $P(X \in [1,2] | Y=y)$ și $P(Y \in [0,1] | X=x)$, pentru $y \in [0,2]$ și $x \in [0,1]$.

c) Să se calculeze mediile condiționate $E(X|Y=1)$ și $E(Y|X=2)$ și probabilitățile condiționate $P(X \in [1,2] | Y=1)$ și $P(Y \in [0,1] | X=2)$.

d) Utilizând rezultatele obținute la punctul a), să se calculeze mediile v.a. X și Y.

Rezolvare

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x+4}{5}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2y+3}{10}, & y \in [0,2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

a) Fie $y \in [0,2]$

$$\Rightarrow f_{X/Y}(x,y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{2(x+y+1)}{2y+3}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(X|Y=y) = \int_0^1 x \cdot \frac{2(x+y+1)}{2y+3}\,dx = \frac{2}{2y+3} \int_0^1 (x^2 + xy + x)\,dx = \ldots$$

$$= \frac{3y+5}{3(2y+3)}$$

Fie $x \in [0,1] \Rightarrow f_{Y|X}(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y+1}{2(x+2)}, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

$$\Rightarrow E(Y|X=x) = \int_0^2 y \cdot \frac{x+y+1}{2(x+2)}\,dy = \frac{1}{2(x+2)} \int_0^2 (yx + y^2 + y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2(x+2)} \left(\frac{y^2 x}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \frac{3x+7}{3(x+2)}$$

b) $P(X \in [1,2], Y=y) = \int_1^2 f_{X|Y}(x,y)\,dx = 0$

$$P(Y \in [0,1] \mid X=x) = \int_0^1 f_{Y|X}(y|x)\,dy = \int_0^1 \frac{x+y+1}{2(x+2)}\,dy = \frac{1}{2(x+2)} \int_0^1 (x+y+1)\,dy$$

$$= \frac{1}{2(x+2)} \cdot \left(xy + \frac{y^2}{2} + y\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2(x+2)} \left(x + \frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2(x+2)} \cdot \frac{2x+3}{2} = \frac{2x+3}{4x+8}$$

c) $E(X|Y=1) \overset{a)}{=} \dfrac{3\cdot 1+5}{3\cdot(2\cdot 1+3)}$

$E(Y|X=2) \overset{a)}{=} \dfrac{3\cdot 2+7}{3(2+2)}$

$P(X \in [1,2] \mid Y=1) \overset{b)}{=} 0$ X

$P(Y \in [0,1] \mid X=2) \overset{b)}{=} \dfrac{2\cdot 2+3}{4(2+2)}$

d) $$E(X) = \int_0^2 \frac{2y+3}{10} \cdot \frac{3y+5}{3(2y+3)}\,dy = \frac{1}{30} \int_0^2 (3y+5)\,dy = \frac{1}{30}\left(3\frac{y^2}{2} + 5y\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{30}(3\cdot 2+10) = \frac{10}{30}$$

$$E(Y) = \int_0^1 \frac{2x+4}{5} \cdot \frac{3x+7}{3(x+2)}\,dx = \frac{2}{15} \int_0^1 (3x+7)\,dx = \frac{2}{15}\left(3\frac{x^2}{2} + 7x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{15}\left(\frac{3}{2} + 7\right) = \frac{34}{30}$$