

Laboratorul 7

Abordarea axiomatică

Săptămâna 4.05-10.05.2020

Exemplul 1.0.1 Folosind axiomele să se identifice demonstrații formale pentru:

- a) $(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\gamma \vee \theta) \rightarrow (\alpha \vee \beta))$
- b) $(\neg(\beta \vee \gamma) \rightarrow \neg(\theta \vee \alpha)) \rightarrow ((\neg\theta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\beta \vee \gamma))$
- c) $\neg((\beta \vee \neg\alpha) \vee (\gamma \wedge \neg\theta)) \leftrightarrow ((\neg\beta \wedge \alpha) \wedge (\neg\gamma \vee \theta))$ unde $\alpha, \beta, \gamma, \theta \in FORM$.

Soluție

Folosind $\bar{\alpha}_1 = a \rightarrow (b \rightarrow a)$ și substituția $\sigma = \{(\neg\alpha \vee \beta)|a, (\neg\gamma \vee \theta)|b\}$ obținem $\bar{\alpha}_1\sigma = (\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\gamma \vee \theta) \rightarrow (\alpha \vee \beta))$, relația a), unde a, b, c propoziții elementare.

Pentru demonstrarea relației b) vom folosi axioma $\bar{\alpha}_7 = (((\neg a) \rightarrow (\neg b)) \rightarrow (b \rightarrow a))$, substituția $\sigma = \{(\beta \vee \gamma)|a, (\neg\theta \rightarrow \alpha)|b\}$ și următoarea axiomă $(\neg\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta)$.

Plecând de la relațiile $\neg(a \vee b) \leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$ și $\neg(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$, cu $a, b \in V$ și aplicând substituția $\sigma = \{(\beta \vee \neg\alpha)|a, (\gamma \wedge \neg\theta)|b\}$ formulelor prezentate obținem cu ușurință c).

Exemplul 1.0.2 Să se identifice axiomele care se pot aplica pentru demonstrarea formulelor:

- a) $f_1 : \vdash \neg(\gamma \vee \theta) \rightarrow ((\neg\gamma \rightarrow \theta) \rightarrow (\omega \vee \delta))$
- b) $f_2 : \vdash (\neg(\omega \vee (\theta \rightarrow \delta)) \vee (\neg\theta \rightarrow \delta)) \leftrightarrow ((\neg\omega \rightarrow (\neg\theta \vee \delta)) \rightarrow (\theta \vee \delta))$
- c) $f_3 : \vdash (\neg\delta \wedge \neg\gamma) \rightarrow ((\neg\delta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\neg\theta \vee (\delta \rightarrow \neg\omega)))$
- d) $f_4 : \vdash \theta \rightarrow (\theta \vee (\gamma \rightarrow \omega))$.

Soluție

În cazul formulei f_1 s-a folosit aplicația 1.4.5, $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ cu $\alpha, \beta \in FORM$ căreia i s-a aplicat substituția $\sigma = \{(\gamma \vee \theta)|\alpha, (\omega \vee \delta)|\beta\}$.

Pentru cazul b) s-a utilizat axioma $\alpha = (\neg a \rightarrow b) \leftrightarrow (a \vee b)$ împreună cu substituția $\sigma = \{(\neg\omega \rightarrow (\neg\theta \vee \delta))|a, (\theta \vee \delta)|b\}$ rezultând $\alpha\sigma$, adică relația dată.

În subpunctul c) s-a plecat de la aplicația 1.4.5, $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ cu $\alpha, \beta \in FORM$, căreia i s-a aplicat substituția $\sigma = \{(\beta \vee \gamma)|\alpha, (\neg\theta \vee (\delta \rightarrow \neg\omega))|\beta\}$. De asemenea s-au folosit și legile lui De Morgan $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$, dar și axioma $\alpha = (\neg a \rightarrow b) \leftrightarrow (a \vee b)$.

În ultimul caz, aplicației 1.4.10, $\delta = \alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$ cu $\alpha, \beta \in FORM$ i s-a aplicat substituția $\sigma = \{\theta|\alpha, (\gamma \rightarrow \omega)|\beta\}$ obținându-se $\delta\sigma$, adică relația dorită.

TEMĂ

Folosind axiomele, să se identifice demonstrații formale pentru:

Exercițiul 1.0.1 $(\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\gamma \vee \theta) \rightarrow ((\alpha \wedge \neg\beta) \vee \beta));$

Exercițiul 1.0.2 $(\neg((\beta \wedge \alpha) \vee \gamma) \rightarrow \neg(\theta \vee \alpha)) \rightarrow ((\neg\theta \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\beta \wedge \alpha) \vee \gamma));$

Exercițiul 1.0.3 $\neg((\beta \vee \neg\alpha) \vee ((\gamma \vee \neg\theta) \wedge \neg\theta)) \leftrightarrow ((\neg\beta \wedge \alpha) \wedge (\neg(\gamma \vee \neg\theta) \vee \theta)).$