Laborarator 11 – Probabilități și Statistică Matematică

LEGEA NUMERELOR MARI SI TEOREMA LIMITA CENTRALA

1. Ilustrarea Legii Numerelor Mari

PROBLEMA REZOLVATA:

Utilizati Legea Numerelor Mari pentru a aproxima integrala următoare

$$I = \int_0^1 e^x \sin(2x)\cos(2x)\,dx.$$

Calculati de asemenea valoarea exactă I a acesteia si comparati-o cu aproximarea găsită.

Fie $U_1, U_2, \dots, U_n$ un sir de v.a. i.i.d. repartizare uniform pe [0,1]. Cum g este o functie continuă atunci $g(U_1), g(U_2), \dots, g(U_n)$ sunt variabile aleatoare i.i.d. si aplicând Legea Numerelor Mari obtinem

$$g_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(U_i) \xrightarrow{P} E[g(U_1)] = \int_0^1 g(x)dx.$$

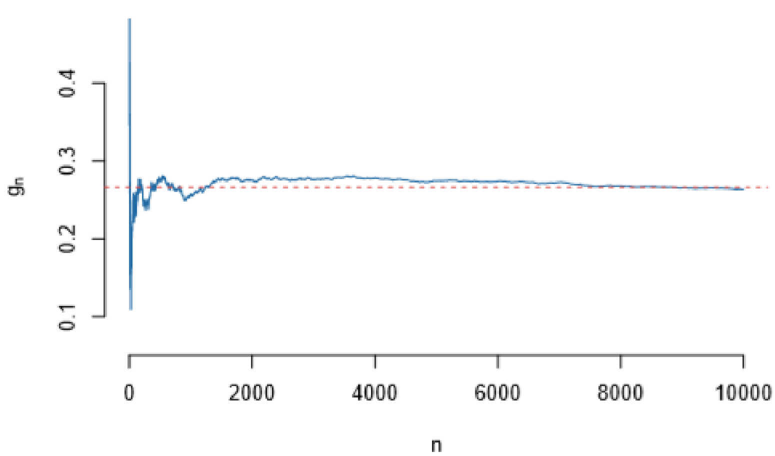
Pentru a calcula integrala numeric vom folosi functia *integrate* (trebuie observat că această integrală se poate calcula usor si exact prin integrare prin părti). Următorul script ne dă valoare numerică si aproximarea obtinută cu ajutorul metodei Monte Carlo pentru integrale $\int_0^1 g(x)dx$:

```
myfun=function(x){
 y = exp(x)*sin(2*x)*cos(2*x);
 return(y);
}


# calculul integralei cu metode numerice
 I = integrate(myfun,0,1) # raspunsul este o lista si oprim prima valoare
 I = I[[1]]
```

```
# calculul integralei cu ajutorul metodei Monte Carlo

 n = 10000

u = runif(n) # generarea sirului U_n

z = myfun(u) # calcularea sirului g_n

I2 = sum(z)/n  # aproximarea MC
```

Obtinem că valoarea numerică a lui *I* este 0.2662 iar cea obtinută cu ajutorul metodei Monte Carlo este 0.2673. Avem următoarea ilustrare grafică a convergentei metodei Monte Carlo:

```
# graficul

 gn = myfun(runif(n))

 gn = cumsum(gn)/(1:n) # calculul lui g_n

plot(1:n, gn, type = "l",

            col = myblue, xlab = "n",

            ylab = expression(g[n]), bty = "n",

           ylim = c(I-0.2, I+0.2))

 abline(h = I, lty = "dashed", col = myred)
```



2. Ilustrarea Teoremei Limită Centrală

PROBLEMA REZOLVATA:

Fie $(X_n)_{n\geq 1}$ *un sir de v.a. i.i.d. de lege* $\varepsilon(1)$. *Pentru toti* n, *notăm cu* $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ *sirul sumelor partiale, μ si* σ^2 *reprezentând media si respectiv varianta legii* $\varepsilon(1)$. *Teorema Limită Centrală afirmă că dacă* n *este mare atunci v.a.*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

are aproximativ aceeasi distribut ie ca si legea normală N(0,1). Ilustrati această convergentă în distributie cu ajutorul unei histograme. Suprapuneti peste această histogramă densitatea legii N(0,1).

Stim că media unei v.a. distribuite exponential de parametru λ, $\varepsilon(\lambda)$ este $\mu = 1/\lambda$ iar varianta acesteia este $\sigma^2 = 1/\lambda^2$. Pentru fiecare valoare a lui i de la 1 la N calculăm raportul $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$

(cu alte cuvinte repetăm experimentul de N ori):

```
N = 1000 # alegem numarul de repetitii ale experimentului

n = 1000 # alegem n pentru care folosim aproximarea normala

lambda = 1 # parametrul legii E(1)

mu = 1/lambda # media

sigma = 1/lambda # abaterea standard

s = rep(0,N) # initializam sirul sumelor partiale

for (i in 1:N){

        x = rexp(n, rate = lambda) # generam variabilele exponentiale

        s[i] = (sum(x)-n*mu)/(sigma*sqrt(n)) # calculam raportul

        }
```

Continuăm prin trasarea histogramei cerute si adăugăm la grafic densitatea legii normale N(0,1):

```
# trasam histograma

 # pentru mai multe optiuni latex: ?plotmath

hist(s, main = expression(paste("Histograma raportului ",
```

```
                                frac(S[n]-n%*%mu,sigma%*%sqrt(n)))),
     prob = TRUE,
     col = "grey80", # Culoarea de umplere
     border = "grey20",
     xlim = c(-4,4),
     cex.main=0.75,
     cex.lab = 0.75,
     cex.axis = 0.75,
     xlab = "",
     ylab = "Densitatea")
# adaugam densitatea normalei N(0,1)
 x1 = seq(-4,4,by=0.1)
 y1 = dnorm(x1, mean = 0, sd = 1)
 lines(x1, y1, col = myred, lwd = 2, lty = 2)
```