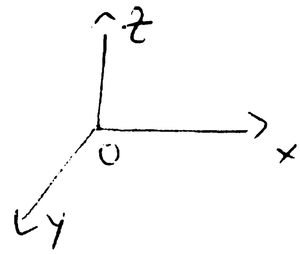
C

# Planul în spațiu

Ec. generală a unui plan în spațiu este o ec. algebrică de forma $Ax + By + Cz + D = 0$, cu $A^2+B^2+C^2 \neq 0$, $A,B,C,D \in \mathbb{R}$.

Cazuri particulare de plane

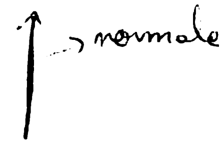



Planul $xOy$ are ec $z = 0$
Planul $xOz$ are ec. $y = 0$
Planul $yOz$ are ec $x = 0$

Vectorul $\vec{n} = (A, B, C)$ se numește vector normal la planul P de ec $Ax + By + Cz + D = 0$.

__Def__ Doi vectori liniar independenți $\vec{a}$ și $\vec{b}$ care au dreptele suport paralele cu un plan P s.n. <u>vectori directori</u> ai planului P.

__Def__ Un vector nenul $\vec{n}$ s.n. vector normal la planul P dacă dreapta suport a vectorului este perpendiculară pe planul P.




## Ecuații ale planului în spațiu

1 Ec. planului care trece printr-un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ și este perpendicular pe vectorul nenul $\vec{n} = (A, B, C)$ este

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

Vectorul $\vec{n}$ reprezintă normala la plan)

__Ex__ Să se scrie ec planului care trece prin punctul $M(\underset{x_0}{2}, \underset{y_0}{1}, \underset{z_0}{3})$ și este perpendicular pe vect. $\vec{n} = (\underset{A}{2}, \underset{B}{3}, \underset{C}{4})$

-/-

$2(x-2)+3(y-1)+4(z-3)=0$

$2x-4+3y-3+4z-12=0 \iff 2x+3y+4z-19=0$

Temă

a) Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M(3,-1,2)$ și e perpendicular pe vectorul $\vec{n}=(-1,2,-5)$

b) Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M(1,2,-5)$ și are direcția vectorului normal $\vec{u}=(-3,2,4)$

2. Ec planului care trece prin $M(x_0,y_0,z_0)$ și este paralel cu direcțiile vectorilor $\vec{v}_1=(l_1,m_1,n_1)$ și $\vec{v}_2=(l_2,m_2,n_2)$ este

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0.$$

Ex

Să se scrie ec planului care trece prin punctul $M(2,1,3)$ și este paralel cu vectorii $\vec{v}_1=(1,0,2)$, $\vec{v}_2=(-1,1,0)$

Sol

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(x-2)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+(z-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-2(x-2)-2(y-1)+(z-3)$$

$$=-2x+4-2y+2+z-3$$

$$=\boxed{-2x-2y+z+3=0}$$

Temă Același enunț pt.

a) $M(2,-1,0)$, $\vec{v}_1=(3,1,-1)$, $\vec{v}_2=(-1,2,0)$

b) $M(1,-2,3)$, $\vec{v}_1=(-1,2,1)$, $\vec{v}_2=(3,0,-1)$

3 Ec planului determinat de 3 puncte necoliniare $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ este

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau}$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ex

Să se scrie ec planului ce trece prin punctele $A(1,2,1)$, $B(-1,3,2)$, $C(0,1,1)$

Sol.

I

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x(4+1+3-2-2-3) - y(2-1-1+1) + z(3-1-1+2) - (3-1-2+2)$$

$$= \boxed{x - y + 3z - 2 = 0}$$

II

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1-1 & 3-2 & 2-1 \\ 0-1 & 1-2 & 1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ (z-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (x-1)-(y-2)+3(z-1) = x-1-y+2+3z-3$$

$$= \boxed{x - y + 3z - 2 = 0}$$

Temă Să se determine ec planului ce trece prin punctele

a) $A(2,1,3)$, $B(-1,2,0)$, $C(1,1,1)$

b) $A(0,1,-1)$, $B(-2,0,2)$, $C(4,3,0)$.

Prop Distanța de la un punct $M(x_0,y_0,z_0)$ la un plan $P$ de ecuație $Ax+By+Cz+D=0$ este

$$d(M,P)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Ex Să se calculeze distanța de la punctul $M(2,1,3)$ la planul $P$ de ec. $3x+2y-z+5=0$

Sol.

$$d(M,P)=\frac{|3\cdot2+2\cdot1+(-1)\cdot1+5|}{\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|6+2-1+5|}{\sqrt{9+4+1}}=\frac{12}{\sqrt{15}}$$

$$=\frac{12\sqrt{15}}{15}=\frac{4\sqrt{15}}{5}$$

Temă a) Să se calculeze distanța de la punctul $M(3,0,2)$ la planul $P$ de ec $5x-y+4z-2=0$.

b) Să se calculeze distanța de la punctul $M(1,2,0)$ la planul $P$ de ec $2x-5y+3z-8=0$.

Def Unghiul a două plane este unghiul ascuțit determinat de doi vectori normali.

Ex Să se determine unghiul determinat de planele:

$P_1: 2x+5y-3z+2=0$

$P_2: -2x+4y+5z-4=0$.

Sol. Direcțiile normale ale celor două plane sunt $\vec{n}_1 = (2, 5, -3)$, $\vec{n}_2 = (-2, 4, 5)$

Unghiul dintre cei doi vectori este:

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|}$$

$$\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 4 + (-3) \cdot 5 = -4 + 20 - 15 = 1$$

$$\|\vec{n}_1\| = \sqrt{2^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 25 + 9} = \sqrt{38}$$

$$\|\vec{n}_2\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 16 + 25} = \sqrt{45}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{45}} = \frac{\sqrt{38} \cdot \sqrt{45}}{38 \cdot 45} = \frac{\sqrt{38} \cdot \cancel{3}\sqrt{5}}{38 \cdot \cancel{45}\,15} = \frac{\sqrt{38} \cdot \sqrt{5}}{38 \cdot 15}$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos \frac{\sqrt{38}\,\sqrt{5}}{38 \cdot 15}$$

Tema

Să se determine unghiul dintre planele

a) $P_1:\ 3x - 2y + z - 5 = 0$

$P_2\ \ -3x + 4y - 5z + 1 = 0$.

b) $P_1\ \ x + 2y - 3z + 1 = 0$

$P_2\ \ -4x + y - z - 3 = 0$.

Obs. Condiția ca ~~patru~~ puncte să fie coplanare:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$