

Acad. M. NICOLESCU

N. DINCULEANU

S. MARCUS

# ANALIZĂ MATEMATICĂ

EDIȚIA A PATRA



MINISTERUL ÎNVĂȚĂMINTULUI

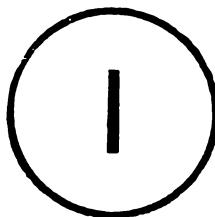
Acad. M. NICOLESCU

N. DINCULEANU

S. MARCUS

# ANALIZĂ MATEMATICĂ

---



EDIȚIA A PATRA

83.873.112

W. Boek



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI – 1971

## PREFATĂ LA EDIȚIA A TREIA

Ediția a treia a volumului I al manualului de analiză matematică nu prezintă modificări structurale față de ediția precedentă. Am ținut totuși să îndreptăm pe cât posibil atât erorile și scăpările datorite autorilor, cât și erorile de tipar.

Am profitat de acest prilej ca să simplificăm prezentarea unor capitulo, precum și unele demonstrații. În același timp am căutat să aplicăm mai consecvent și mai adincit conceptul general de funcție introdus chiar la începutul manualului la studiul aplicațiilor lui  $R$  sau  $R^2$  în  $R^2$  sau  $R^3$ , privite ca spații vectoriale, adică la studiul așa-numitelor funcții vectoriale.

Era natural ca să dăm și în acest caz, ca și în cazul aplicațiilor numerice, o interpretare fizică derivatei întâi și derivatei a doua. În acest mod, studentul este mai bine pregătit să abordeze studiile ulterioare de geometrie sau de mecanică.

Este probabil că în această ediție se vor stcura alte erori. Vom fi recunoscători colegilor care ne vor semnala lipsurile de orice fel, ajutându-ne astfel să ne îmbunătățim continuu prezentarea manualului.

AUTORII

## PREFATĂ LA EDIȚIA A DOUA

Intervalul de timp foarte scurt la care această ediție urmează primei ediții nu ne-a îngăduit să reflectăm prea mult asupra tuturor îmbunătățirilor ce s-ar fi putut aduce în redactarea și prezentarea materialului din acest volum și nici nu ne-a permis să culegem observațiile făcute de cititori. Cu toate acestea, am procedat la unele modificări pe care le-am crezut absolut necesare pentru mai buna înțelegere a fenomenelor matematice prezentate. Astfel, studiul șirurilor convergente se prezintă mai sistematic dacă este precedat de studiul șirurilor care converg către zero. Am introdus în noua ediție acest studiu preliminar.

De asemenea, studiul funcțiilor integrabile Riemann a fost completat cu teorema de echivalență a lui Lebesgue. Prezentarea acestui criteriu are un interes științific deosebit: pe de o parte, cititorul capătă o informație precisă asupra structurii funcțiilor integrabile Riemann; pe de altă parte, criteriul lui Lebesgue delimităază exact domeniul de integrare cu metoda Riemann. În fapt, după ce Lebesgue, în jurul anului 1900, a obținut teorema sa de caracterizare a integrabilității în sensul lui Riemann, a trebuit să se gîndească la un alt procedeu pentru a extinde integrala Riemann; și astfel a ajuns la integrala care-i poartă numele.

Din punct de vedere metodologic, criteriul lui Lebesgue permite să se dea demonstrații mult mai simple tuturor proprietăților privind funcțiile integrabile Riemann și calculul cu aceste funcții. Aceste demonstrații figurează în ediția de față.

În afara de aceste modificări mai importante, s-au mai adus, de-a lungul întregului curs, unele mici îndreptări și modificări pe care nu le mai enumerăm aici.

Toate îndreptările, adăugirile și chiar suprimerile făcute cu scopul ameliorării atât a formei cât și a conținutului nu modifică linia generală

*a manualului. De aceea ne menținem rugămintea către colegii noștri de specialitate și către toți cititorii de a ne semnala erorile eventuale scăpate și de a ne trimite toate observațiile susceptibile de a contribui la o și mai bună prezentare a acestui manual.*

Decembrie, 1962

AUTORII

### PREFĂTĂ LA EDIȚIA ÎNȚÎL

*Cartea de față reprezintă, în cea mai mare măsură a sa, fructul experienței didactice a autorilor săi, precum și al unor repetitive dezbateri, în ședințele de colectiv ale catedrei, asupra celor mai bune mijloace de prezentare a noțiunilor de bază ale analizei.*

*Întreaga teorie a integralei, ca și teoria curbelor rectificabile, pentru a nu da decât aceste două exemple, poartă pecetea, așa cum sunt redactate aici, a discuțiilor fructuoase purtate în colectivul amintit mai sus.*

*În consecință, manualul de față, care are ca punct de plecare un manual mai vechi al unuia dintre autori<sup>1</sup>, se deosebește în mod sensibil de acesta.*

*Există, în primul rînd, o deosebire în ordonarea materiei, care a urmat, în manualul de față, în mod strict, programa analitică.*

*Această programă este diferită de programa din 1949, ca și de cea din 1953. Ca urmare, conținutul însuși al actualului manual este mai cuprinzător decât al vechiului manual.*

*În anii regimului democrat-popular a avut loc o înflorire fără precedent a cercetării matematice, care a cuprins sectoare din ce în ce mai largi ale acestei discipline. În particular, s-a creat o școală puternică de analiză funcțională și topologie, prin eforturile reunite ale catedrelor care constituie astăzi secția de analiză a Facultății de matematică și fizică a Universității din București.*

<sup>1</sup> Miron Niculescu: 1° Calcul diferențial și integral, 1949; 2° Analiză matematică, vol. II, 1953.

*În dezvoltarea acestei școli, cursul de analiză matematică (calculul diferențial și integral) a jucat și va trebui să continue să joace un rol de bază. Iată de ce am considerat necesar să dăm o orientare corespunzătoare acestui curs, ținind — bineînțeles — seama de tradiția creată și verificată prin experiența de atiția ani de la catedra de calcul diferențial și integral.*

*Am ținut, de asemenea, seama de locul din ce în ce mai important pe care algebra abstractă îl joacă în cercetarea matematică actuală. Metodele algebrei au pătruns astăzi în aproape toate celelalte discipline matematice. Din acest motiv, demarcarea precisă între diversele sectoare ale activității matematice devine o operație din ce în ce mai grea. O astfel de demarcare, dacă este prea net subliniată, este chiar dăunătoare ideii de unitate pe care cercetătorul începător trebuie să o capete din studiul diverselor discipline matematice.*

*Toți factorii enumerați mai sus și-au adus contribuția lor în infățișarea actuală a cursului. O consecință a acestui fapt o constituie, de exemplu, punerea în acord a terminologiei utilizate în curs cu terminologia în uz în cercetarea actuală, precum și utilizarea frecventă a limbajului vectorial, care are dublu avantaj: de a simplifica prezentarea și de a înlesni drumul spre analiza funcțională.*

*Volumul acestui curs poate apărea prea mare față de numărul de ore atribuit analizei matematice prin programa actuală.*

*Am fi putut foarte bine să prezintăm acest curs ca o reproducere fidelă a lecțiilor orale, lucru care ar fi micșorat (nu prea mult, totuși) volumul acestui curs. Considerăm însă că dacă această metodă se poate susține cu argumente valabile, pentru un curs de specializare, ea devine de-a dreptul dăunătoare, în cazul unui curs fundamental. Dacă profesorul, din lipsă de timp sau pentru motive de ordin pedagogic, găsește cu cale să prezinte, într-o lecție vorbită, numai liniile generale ale unui raționament, studentul trebuie să poată găsi în manual raționamentul expus în toate detaliile. Mai mult decât atât, un adevărat manual consacrat unei materii fundamentale trebuie să poată servi studentului și după trecerea examenelor respective, ca o carte de referință, analogă unui „dicționar politehnic” pentru un inginer.*

*Întrucât această carte este destinată studenților, autorii sunt interesați în cea mai mare măsură să cunoască rezultatele experienței făcute cu manualul de față la celelalte instituții de învățămînt superior; ei vor primi cu recunoștință toate observațiile care vor contribui la îmbunătățirea eventualelor ediții următoare.*

## Capitolul I

# MULTIMI ŞI FUNCȚII

### § I. Apartenență, incluziune, părțile unei multimi

Vom adopta aşa-numitul *punct de vedere naiv* în expunerea noțiunilor din teoria mulțimilor, adică vom da noțiunilor fundamentale, mulțime, relație, proprietate, corespondență etc., înțelesul pe care-l au în limbajul obișnuit.

#### 1. Exemple de mulțimi

Denumirile mulțime, grămadă, ansamblu, colecție sunt sinonime.  
Iată cîteva exemple de mulțimi concrete:

- 1) Mulțimea oamenilor de pe glob.
- 2) Mulțimea literelor alfabetului latin.
- 3) Mulțimea punctelor de pe un cerc.
- 4) Mulțimea moleculelor dintr-un corp.
- 5) Mulțimea numerelor naturale\* 1, 2, 3, 4, ...
- 6) Mulțimea numerelor 1, 3, 7.
- 7) Mulțimea formată numai din numărul 2.

#### 2. Elementele unei mulțimi

Obiectele din care este alcătuită o mulțime se numesc *elemente* ale mulțimii. Elementele unei mulțimi pot fi obiecte de orice natură, fie obiecte concrete, fie obiecte ale gîndirii. Pentru studiu, problema esențială este posibilitatea de a distinge între ele aceste obiecte.

---

\* Vom presupune cunoscute numerele întregi, pentru exemplificarea noțiunilor din acest capitol. Teoria mulțimilor nu necesită însă cunoașterea conceptului de număr, ci, dimpotrivă, construirea numerelor necesită cunoașterea teoriei mulțimilor.

Cărțile unei biblioteci constituie la un loc o mulțime. O carte din bibliotecă este un element al mulțimii. Elementele (cărțile) acestei mulțimi pot fi deosebite între ele, fie prin conținut, fie prin format, fie prin locul pe care îl ocupă în spațiu.

Mulțimile și elementele sunt noteate în raționamente prin litere (ale diverselor alfabele), prin alte simboluri grafice sau prin combinații de litere și alte semne. De obicei, mulțimile se notează cu litere mari, iar elementele cu litere mici.

Pentru simplificarea limbajului se spune de cele mai multe ori „mulțimea  $A$ ” sau „elementul  $x$ ” în loc de „mulțimea *notată* prin litera  $A$ ” sau „elementul *notat* prin litera  $x$ ”.

O literă poate indica fie un element *determinat*, fie un element *arbitrar*, nedeterminat, al unei mulțimi. Un element arbitrar este de asemenea numit *variabilă*, sau *argument*, sau element *generic* al mulțimii.

Dacă într-o proprietate, sau într-o relație relativă la elementele unei mulțimi, se înlocuiește un element arbitrar  $x$  printr-un element determinat  $x_0$ , se spune că se dă lui  $x$  valoarea  $x_0$ .

Se spune că o proprietate sau o relație în care intervin elemente arbitrale este o *identitate*, dacă ea devine o propoziție adevărată, oricare ar fi valorile date elementelor arbitrale (argumentelor).

### 3. Moduri de definire a mulțimilor

O mulțime se consideră definită (precizată, dată) dacă avem un criteriu după care putem deosebi elementele mulțimii de celelalte obiecte care nu fac parte din mulțime. În acest sens, o mulțime poate fi definită fie numind individual elementele sale, fie specificând o proprietate pe care o au toate elementele sale și pe care nu o au alte obiecte.

O mulțime definită prin enumerarea elementelor sale se notează scriind între acolade aceste elemente. De exemplu, mulțimile din exemplele 5, 6 și 7 se notează, respectiv:  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ,  $\{1, 3, 7\}$ ,  $\{2\}$ .

Vom face distincție între mulțimea  $\{2\}$  și elementul 2 al acestei mulțimi.

O mulțime definită prin specificarea unei proprietăți caracteristice  $P$  a elementelor sale se notează scriind între acolade această proprietate. De exemplu, mulțimea punctelor  $(x, y)$  din plan care aparțin cercului cu centrul în origine și raza 1 se notează:

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

### 4. Relația de egalitate

Dacă două litere,  $x$  și  $y$ , reprezintă același element al unei mulțimi  $E$ , se scrie  $x = y$  și se citește „ $x$  este egal cu  $y$ ”. Dacă  $x$  și  $y$  nu reprezintă același element se scrie  $x \neq y$  și se citește „ $x$  nu este egal cu  $y$ ” sau „ $x$

este diferit de  $y''$ . Semnul = se numește *semn de egalitate*. Se verifică imediat că relația de egalitate are următoarele proprietăți\*:

- 1)  $x = x$  (egalitatea este reflexivă);
- 2)  $x = y \Rightarrow y = x$  (egalitatea este simetrică);
- 3)  $x = y$  și  $y = z \Rightarrow x = z$  (egalitatea este tranzitivă) ( $x, y$  și  $z$  sunt elemente arbitrar ale lui  $E$ ).

## 5. Relația de apartenență

Dacă  $a$  este un element al unei mulțimi  $A$  (mai precis, dacă litera  $a$  reprezintă un element al mulțimii indicate prin litera  $A$ ), se scrie  $a \in A$  și se citește „ $a$  aparține mulțimii  $A$ ”. Dacă  $b$  nu este element al mulțimii  $A$ , se scrie  $b \notin A$  și se citește „ $b$  nu aparține lui  $A$ ”. Semnul  $\in$  se numește *semn de apartenență*.

Am definit astfel *relația de apartenență* între elementele unei mulțimi și mulțimea însăși.

În loc de  $a \in A$  se poate scrie  $A \ni a$ .

*Exemplu.*  $5 \in \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ ;  $3 \in \{1, 3, 7\}$ ;  $2 \in \{2\}$ ;  $-1 \notin \{1, 2, 3, \dots\}$ ;  $2 \notin \{1, 3, 7\}$ ;  $3 \notin \{2\}$ ;  $\{1, 3, 7\} \ni 7$ ;  $\{1, 3, 7\} \not\ni 5$ .

## 6. Părțile unei mulțimi

Fie  $E$  o mulțime. O proprietate  $P$ , care se referă la elementele lui  $E$  (pe care unele elemente o pot avea, iar alte elemente pot să nu o aibă), definește o mulțime formată din *acele* elemente ale lui  $E$  care *au* proprietatea  $P$ . O astfel de mulțime formată din elemente ale lui  $E$  se numește *partea* a lui  $E$  sau *submulțime* a lui  $E$ .

Proprietatea „ $x = x''$  este adevărată pentru toate elementele  $x \in E$ , este o identitate. Partea definită de această proprietate se numește *partea plină* a lui  $E$  și este formată din *toate* elementele lui  $E$ . Așadar  $E$  este o parte sau o submulțime (improprie) a sa însăși.

Dacă  $a \in E$ , mulțimea  $\{a\}$  formată numai din elementul  $a$  este o parte a lui  $E$ . Această parte poate fi definită ca mulțimea punctelor  $x \in E$  care au proprietatea  $x = a$ .

\*  $\Rightarrow$  este semnul *implicației logice*. De exemplu,  $x = y \Rightarrow y = x$  se citește „ $x = y$  implică (atrage)  $y = x$ ”, sau „dacă  $x = y$ , atunci  $y = x$ ”, sau incă „din  $x = y$  rezultă  $y = x$ ”. Semnul  $\Rightarrow$  se poate citi, de asemenea: deci, așadar, prin urmare.

$\Leftrightarrow$  este semnul *echivalenței logice*. De exemplu,  $x = y \Leftrightarrow y = x$  se citește: „ $x = y$  este echivalent cu  $y = x$ ”, sau „ $x = y$  dacă și numai dacă  $y = x$ ” sau „ $x = y$  atunci și numai cind  $y = x$ ” sau incă „pentru ca  $x = y$  este necesar și suficient ca  $y = x$ ”. Semnul  $\Leftrightarrow$  se poate citi, de asemenea: adică, înseamnă că, este același lucru cu etc.

Dacă o submulțime  $A$  a lui  $E$  nu coincide cu  $E$ , atunci  $A$  se numește o submulțime *proprie* sau *strictă* a lui  $E$ .

Printre părțile lui  $E$  se consideră și *partea vidă a lui E*, care se notează  $\emptyset$  și care nu conține nici un element. Partea vidă poate fi definită, de exemplu, ca mulțimea elementelor  $x \in E$  care au proprietatea  $x \neq x$ .

Părțile mulțimii  $E$  pot fi considerate ca elemente ale unei noi mulțimi, numită *mulțimea părților lui E*, și notată  $\mathcal{P}(E)$ . Printre elementele mulțimii  $\mathcal{P}(E)$  a părților lui  $E$ , se află părțile  $E$ ,  $\emptyset$  și  $\{a\}$  dacă  $a \in E$ . Putem deci scrie  $E \in \mathcal{P}(E)$ ,  $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ ,  $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$ .

Dacă două părți  $A$  și  $B$  ale lui  $E$  sunt formate din aceleași elemente, se scrie  $A = B$ . Mai precis,  $A = B$  înseamnă că literele  $A$  și  $B$  desemnează aceeași parte a lui  $E$  (sau același element al mulțimii părților  $\mathcal{P}(E)$ ).

## 7. Relația de incluziune

Fie  $E$  o mulțime,  $A$  și  $B$  două părți ale sale. Dacă fiecare element al lui  $A$  aparține și lui  $B$ , se scrie  $A \subset B$  și se citește „ $A$  este conținută în  $B$ ” sau „ $A$  este inclusă în  $B$ ”. În loc de  $A \subset B$  se scrie de asemenea  $B \supset A$  și se citește „ $B$  conține (sau include) pe  $A$ ” (fig. 1). Dacă

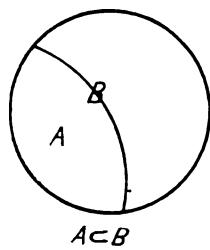
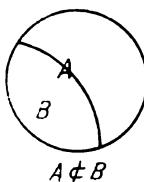
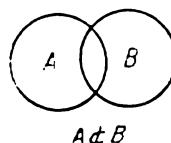


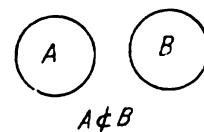
Fig. 1



A ⊈ B



A ⊂ B



A ⊄ B

Fig. 2

$A$  nu este inclusă în  $B$ , se scrie  $A \not\subset B$  sau  $B \not\supset A$  și se citește respectiv „ $A$  nu este inclusă în  $B$ ” sau „ $B$  nu include pe  $A$ ” (fig. 2). Vom face convenția  $\emptyset \subset A$ , oricare ar fi partea  $A$  a lui  $E$ .

Am definit astfel *relația de incluziune* între părțile lui  $E$  (sau între elementele mulțimii părților  $\mathcal{P}(E)$ ).

Se verifică imediat că relația de incluziune are proprietățile următoare:

- 1)  $A \subset A$  (este reflexivă);
  - 2)  $A \subset B$  și  $B \subset C \Rightarrow A \subset C$  (este antisimetrică);
  - 3)  $A \subset B$  și  $B \subset C \Rightarrow A \subset C$  (este tranzitivă)
- ( $A$ ,  $B$  și  $C$  fiind părți arbitrar ale lui  $E$ ).

Relația de incluziune este o *relație de ordine\** în mulțimea părților  $\mathcal{P}(E)$ .

*Exemplu*  $\{1, 3, 7\} \subset \{1, 3, 7\}$ ;  $\{1, 7\} \subset \{1, 3, 7\}$ ;  $\{1, 7\} \subset \{1, 7\}$ ;  $\{3\} \subset \{1, 3, 7\}$ ;  $\emptyset \subset \{3\}$ ;  $\emptyset \subset \{3, 7\}$ ;  $\{1, 7\} \not\subset \{1, 3\}$ ;  $\{1, 3\} \not\subset \{1, 7\}$ ;  $\{7\} \not\subset \{1, 3\}$ ;  $\{1\} \not\subset \emptyset$ .

Două părți  $A$  și  $B$  sunt *comparabile* dacă sau  $A \subset B$  sau  $B \subset A$ . De exemplu  $\{1, 3\}$  și  $\{1, 3, 7\}$  sunt comparabile deoarece  $\{1, 3\} \subset \{1, 3, 7\}$ . Dacă nici una din părțile  $A$  și  $B$  nu este inclusă în cealaltă, se spune că  $A$  și  $B$  sunt *incomparabile*. De exemplu  $\{1, 3\}$  și  $\{1, 7\}$  sunt incomparabile deoarece  $\{1, 3\} \not\subset \{1, 7\}$  și  $\{1, 7\} \not\subset \{1, 3\}$ .

Legătura dintre relația de apartenență și relația de incluziune este exprimată de următoarele proprietăți:

$$1) a \in A \text{ și } A \subset B \Rightarrow a \in B;$$

$$2) a \in A \Leftrightarrow \{a\} \subset A.$$

**Observație.** Proprietatea 2 a relației de ordine (antisimetria) constituie procedeul obișnuit de demonstrație a egalității a două mulțimi  $A$  și  $B$  (sau, mai precis, literalele  $A$  și  $B$  reprezintă aceeași mulțime): se arată întâi că  $x \in A \Rightarrow x \in B$  (deci  $A \subset B$ ) și apoi se arată că  $x \in B \Rightarrow x \in A$  (deci  $B \subset A$ ), de unde rezultă  $A = B$ .

## § 2. Operații cu mulțimile

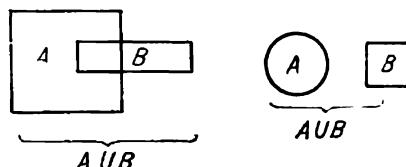
### 1. Reuniunea și intersecția

Fie  $E$  o mulțime,  $A$  și  $B$  două părți ale ei.

Mulțimea elementelor care aparțin cel puțin uneia din mulțimile  $A$  și  $B$  se numește *reuniunea* lui  $A$  și  $B$  și se notează  $A \cup B$  (se citește  $A$  reunit cu  $B$ ) (fig. 3). Așadar:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

Semnul  $\cup$  se numește *semn de reuniune*.



*Exemplu.*

$$\{1, 2, 5\} \cup \{-1, 0, 2\} = \{-1, 0, 1, 2, 5\}.$$

Fig. 3

\* O relație  $x \leq y$  definită pentru unele perechi ordonate  $(x, y)$  de elemente ale unei mulțimi  $M$  se numește *relație de ordine* dacă este *reflexivă* ( $x \leq x$  oricare ar fi  $x \in M$ ), *antisimetrică* ( $x \leq y$  și  $y \leq x \Rightarrow x = y$ ) și *tranzitivă* ( $x \leq y$  și  $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ). Fie  $x \leq y$  o relație de ordine; să definim relația „ $x < y$ ” ca fiind echivalentă cu  $x \leq y$  și  $x \neq y$ . Relația  $x < y$  este *ireflexivă* ( $x < x$  nu are loc) pentru nici un element  $x \in M$ ) și *tranzitivă* ( $x < y$  și  $y < z \Rightarrow x < z$ ). Relația  $x < y$  se numește *relație de ordine strictă*.

Reciproc, dindu-se o relație de ordine strictă  $x < y$  (ireflexivă și tranzitivă), obținem o relație de ordine  $x \leq y$  reflexivă, antisimetrică și tranzitivă dacă definim „ $x \leq y$ ” ca fiind echivalentă cu „ $x < y$  sau  $x = y$ ”.

O relație de ordine între elementele unei mulțimi  $M$  definește pe  $M$  o *structură de ordine* sau, mai simplu, o *ordine*. Mulțimea  $M$  împreună cu o ordine definită pe ea se numește *mulțime ordonată*. Mulțimea  $M$  este total ordonată, dacă oricare ar fi elementele  $x \neq y$  din  $M$  avem sau  $x < y$ , sau  $y < x$ .

Mulțimea elementelor care aparțin și lui  $A$  și lui  $B$  se numește *intersecția* lui  $A$  și  $B$  și se notează  $A \cap B$  (se citește:  $A$  intersectat cu  $B$  (fig. 4). Așadar :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

Dacă  $A$  și  $B$  nu au nici un element comun, atunci intersecția lor este vidă :  $A \cap B = \emptyset$ . În acest caz se spune că  $A$  și  $B$  sunt *disjuncte* (fig. 5).

*Exemplu.*  $\{1, 2, 5\} \cap \{0, 2, 5\} = \{2, 5\}$ ;  $\{1, 2, 5\} \cap \{2, 7\} = \{2\}$ ;  $\{1, 2, 5\} \cap \{3, 7\} = \emptyset$ .

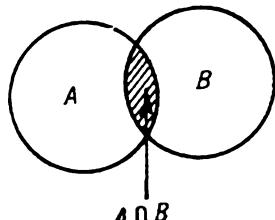


Fig. 4

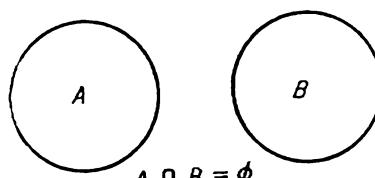


Fig. 5

Am definit astfel operațiile de reuniune și intersecție, prin care fiecarei perechi  $(A, B)$  de părți ale lui  $E$  i se asociază mulțimea  $A \cup B$ , respectiv  $A \cap B$ .

Cele două operații cu mulțimile au următoarele proprietăți :

- 1)  $A \cup A = A$ ;  $A \cap A = A$  (idempotentă),
  - 2)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ;  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  (asociativitatea),
  - 3)  $A \cup B = B \cup A$ ;  $A \cap B = B \cap A$  (comutativitatea),
  - 4)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ;  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (distributivitatea),
  - 5)  $A \cup \emptyset = A$ ;  $A \cap E = A$ ,
  - 6)  $A \cup E = E$ ;  $A \cap \emptyset = \emptyset$
- ( $A$ ,  $B$  și  $C$  fiind părți arbitrarе ale lui  $E$ ).

Legătura dintre relația de inclusiune și operațiile de reuniune și intersecție este exprimată de următoarele proprietăți :

- 7)  $A \subset A \cup B$ ;  $A \cap B \subset A$ ,
  - 8)  $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$ ;  $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$ ,
  - 9)  $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$ ;  $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$ ,
  - 10)  $A \subset C$  și  $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$ ;  $C \subset A$  și  $C \subset B \Rightarrow C \subset A \cap B$
- ( $A$ ,  $B$  și  $C$  fiind părți arbitrarе ale lui  $E$ ).

Să definesc în mod asemănător reuniunea și intersecția mai multor mulțimi  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , notate respectiv

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, \quad A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \text{ sau } \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

## 2. Diferența. Complementara

Fie  $E$  o mulțime,  $A$  și  $B$  două părți ale ei. Mulțimea elementelor lui  $A$  care nu aparțin lui  $B$  se numește *diferență* dintre  $A$  și  $B$  și se notează  $A - B$  (se citește  $A$  minus  $B$ ) (fig. 6). Așadar :

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

Diferența  $A - B$  se obține eliminînd din  $A$  elemente care aparțin și lui  $B$ .

Dacă  $A$  și  $B$  sunt disjuncte, atunci  $A - B = A$ ; dacă  $A \subset B$  atunci  $A - B = \emptyset$ .

Diferența  $E - A$  se numește *complementara* lui  $A$  și se notează  $\complement{A}$ . Așadar :

$$\complement{A} = \{(x \mid x \in E, x \neq A)\}.$$

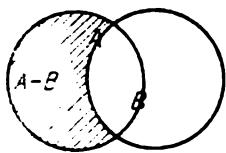


Fig. 6

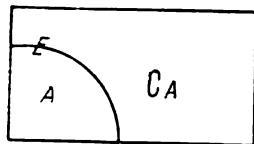


Fig. 7

Complementara lui  $A$  este formată din toate elementele lui  $E$  care nu aparțin lui  $A$ .

Următoarele proprietăți se deduc imediat :

$$1) \complement{E} = \emptyset; \complement{\emptyset} = E,$$

$$2) \complement{\complement{A}} = A,$$

$$3) A \cup \complement{A} = E;$$

$$A \cap \complement{A} = \emptyset,$$

$$4) \complement{(A \cup B)} = (\complement{A}) \cap (\complement{B});$$

$$\complement{(A \cap B)} = (\complement{A}) \cup (\complement{B}),$$

$$5) A \subset B \Leftrightarrow \complement{A} \supset \complement{B}$$

( $A$  și  $B$  fiind părți arbitrarе ale lui  $E$ ).

Din proprietățile 3 rezultă că :

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin \complement{A} \text{ și } x \in \complement{A} \Leftrightarrow x \notin A.$$

### 3. Produs cartesian

Fie  $E$  și  $F$  două mulțimi distințe sau nu. Putem forma perechi ordonate  $(x, y)$  cu elementele celor două mulțimi, cu primul element  $x$  din  $E$  și al doilea element  $y$  din  $F$ .

Să considerăm *toate* perechile  $(x, y)$  de acest fel. Mulțimea tuturor perechilor  $(x, y)$ , considerate ca elemente, se numește *produsul cartesian* al lui  $E$  cu  $F$  și se notează  $E \times F$ . Așadar :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

$E$  și  $F$  se numesc factorii produsului cartesian  $E \times F$ ;  $E$  este primul factor, iar  $F$  este al doilea factor.

$x$  și  $y$  se numesc *coordonatele* sau *proiecțiile* elementului  $(x, y)$ ;  $x$  este prima coordonată sau prima proiecție, iar  $y$  este a doua coordonată sau a doua proiecție.

*Exemplu.*  $E = \{a_1, a_2\}$ ,  $F = \{b_1, b_2\}$ ,  $E \times F = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$ .

Se poate considera produsul cartezian  $F \times E$  al lui  $F$  cu  $E$ , ale căruia elemente sunt perechile  $(y, x)$  cu  $y \in F$  și  $x \in E$ ;

$$F \times E = \{(y, x) \mid y \in F, x \in E\}.$$

Dacă  $E \neq F$ , vom face distincție între  $E \times F$  și  $F \times E$ . În exemplul precedent, avem :

$$F \times E = \{(b_1, a_1), (b_1, a_2), (b_2, a_1), (b_2, a_2)\}.$$

Dacă  $E = F$ , evident  $E \times F = F \times E$ . În acest caz, în loc de  $E \times E$  vom scrie  $E^2$ . Astfel,

$$E^2 = \{(x, y) \mid x \in E, y \in E\}.$$

*Exemplu.*  $E = \{a_1, a_2\}$ .  $E^2 = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2)\}$ .

Două elemente  $(x, y)$  și  $(x', y')$  ale produsului cartezian sunt egale dacă și numai dacă  $x = x'$  și  $y = y'$ .

Se poate defini produsul cartezian  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  a  $n$  mulțimi  $E_1, E_2, \dots, E_n$  ca fiind mulțimea tuturor grupelor  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  unde  $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$ . Așadar :

$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n\}$ .  
 $E_1, E_2, \dots, E_n$  se numesc factorii produsului cartezian, iar  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se numesc *coordonatele* sau *proiecțiile* elementului  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Dacă  $E_1 = E_2 = \dots = E_n$ , se scrie  $E^n$  în loc de  $\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{n \text{ factori}}$ .

### § 3. Funcții

#### 1. Definiția funcției

Fie  $E$  și  $F$  două mulțimi distincte sau nu.

**Definiție.** Dacă, printr-un procedeu oarecare, facem să corespundă fiecărui element  $x \in E$  un element și unul singur  $y \in F$ , spunem că am definit o funcție pe  $E$  cu valori în  $F$ .

Prin *funcție* se înțelege ansamblul format din: mulțimea  $E$ , mulțimea  $F$  și corespondența  $x \rightarrow y$  de la  $E$  la  $F$ .

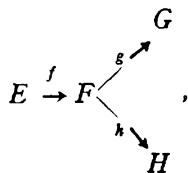
$E$  se numește *mulțimea de definiție* (sau domeniul de definiție) al funcției, iar  $F$  se numește *mulțimea în care funcția ia valori*.

O funcție se notează cu o literă, de exemplu  $f$  (se pot folosi și alte litere,  $g$ ,  $h$ ,  $F$ ,  $\varphi$ ,  $\Phi$  etc.).

Dacă  $f$  este o funcție definită pe  $E$  cu valori în  $F$ , se spune de asemenea că  $f$  este o *aplicație a lui  $E$  în  $F$* .

Vom folosi adesea notația  $f: E \rightarrow F$  care se citește: funcția  $f$  definită pe  $E$  cu valori în  $F$ , sau, aplicația  $f$  a lui  $E$  în  $F$ .

Dacă într-un raționament intervin două sau mai multe funcții, vom folosi diagrame de forma următoare:



unde printr-un grup de semne ca  $E \xrightarrow{f} F$  se înțelege că  $f$  este o aplicație a lui  $E$  în  $F$ .

Dacă printr-o funcție  $f: E \rightarrow F$ , unui element  $a \in E$  îi corespunde elementul (unic)  $b \in F$ , se spune că  $b$  este *valoarea funcției  $f$  în „punctul”  $a$* , și se notează  $f(a)$ . Așadar:

$$b = f(a).$$

Se spune, de asemenea, că  $b$  este *imaginăea* lui  $a$  prin funcția  $f$ , sau că  $b$  este *transformatul* lui  $a$  prin funcția  $f$ , sau că, funcția  $f$  transformă pe  $a$  în  $b$ .

Uneori, se folosește în loc de  $f(a)$  notația *indicială*  $f_a$ .

Un element oarecare  $x$  al mulțimii de definiție  $E$  se numește de asemenea *variabilă* sau *argument* al funcției  $f$ . Funcția  $f$  se reprezintă de asemenea prin notația simbolică

$$x \rightarrow f(x), \quad x \in E.$$

Se poate spune, de exemplu: fie funcția  $f$  care fiecărui număr real  $x$  face să-i corespundă  $x^2$ ; sau, fie funcția  $f$  definită pe mulțimea numerelor reale prin corespondența  $x \rightarrow x^2$  (sau prin egalitatea  $f(x) = x^2$ ).

**Observație.** Trebuie făcută distincție între funcția  $f$  (care reprezintă corespondența de la  $E$  la  $F$ , în ansamblul ei) și elementul  $f(x)$  din  $F$  (care reprezintă *valoarea funcției  $f$  în  $x$* ). Totuși, funcția se notează adesea cu  $f(x)$  în loc de  $x \rightarrow f(x)$ , ceea ce constituie un abuz de limbaj foarte frecvent și de foarte multe ori necesar. De exemplu, funcția exponentială  $x \rightarrow 2^x$ , definită pe mulțimea numerelor reale, va fi notată, mai simplu,  $2^x$ .

Aplicațiile  $f$  ale unei mulțimi  $E$  într-o mulțime  $F$  sunt elementele unei mulțimi, *mulțimea aplicațiilor lui  $E$  în  $F$* , care se notează  $F^E$ .

**Exemplu.** 1) Fie  $E = \{u, v, w\}$  și  $F = \{a, b, c\}$ . Corespondența indicată în figura 8 prin săgeți definește o funcție  $f: E \rightarrow F$ .

$$\text{Avem: } f(u) = b, \quad f(v) = a, \quad f(w) = b.$$

Pe acest exemplu se constată că:

a) o funcție poate avea *valori egale* în *puncte diferite* (de exemplu,  $f(u) = f(w) = b$ );

b) în mulțimea  $F$  pot exista elemente care să nu fie valori ale funcției (de ex.  $c$  nu este valoare a funcției  $f$ ).

2) O funcție  $f: E \rightarrow F$  este *constantă* dacă are *aceeași valoare*,  $f(x) = a$ , în toate punctele  $x \in E$ .

În figura 9 avem un exemplu de funcție constantă.

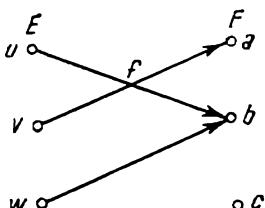


Fig. 8

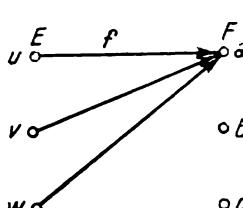


Fig. 9

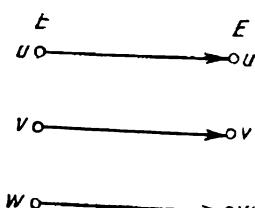


Fig. 10

Pentru fiecare element  $a \in F$  se poate defini o aplicație constantă  $f(x) \equiv a$  (și numai una) a lui  $E$  în  $F$ . Pentru mulțimile  $E$  și  $F$  din figura 9, putem defini trei funcții constante:  $f(x) \equiv a$ ,  $f(x) \equiv b$  și  $f(x) \equiv c$ .

3) Se numește *aplicație identică* a unei mulțimi  $E$  în ea însăși funcția  $i: E \rightarrow E$  definită prin corespondența  $x \rightarrow x$  (sau prin egalitatea  $i(x) = x$ ). Aplicația identică a mulțimii  $E = \{u, v, w\}$  în ea însăși este reprezentată în figura 10.

## 2. Graficul unei funcții

Fie funcția  $f: E \rightarrow F$ . Corespondența  $x \rightarrow f(x)$  stabilită de funcția  $f$  se poate reprezenta prin perechi ordonate  $(x, f(x))$ . O astfel de pereche este un element al produsului cartezian  $E \times F$ , deoarece  $x \in E$  și  $f(x) \in F$ .

Mulțimea  $G$  a tuturor perechilor de formă  $(x, f(x))$  cu  $x \in E$  se numește *graficul funcției*  $f$ . Așadar :

$$G = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}.$$

Graficul funcției  $f$  este o parte a produsului cartezian  $E \times F$  și este caracterizat de următoarele proprietăți :

1) fiecare element  $x \in E$  face parte dintr-o pereche  $(x, y)$  a graficului  $G_f$ , și *numai* din una;

2) în fiecare pereche  $(x, y)$  a graficului, cele două coordonate  $x$  și  $y$  verifică egalitatea  $y = f(x)$ ; pentru orice altă pereche  $(x, y)$  care *nu* aparține graficului, avem  $x \neq f(x)$ .

## Egalitatea

$$y = f(x),$$

verificată de toate elementele  $(x, y)$  ale graficului și numai de acestea, se numește *ecuația graficului funcției*  $f$ .

Fie acum  $G$  o submulțime a produsului cartezian  $E \times F$ , care are proprietatea că fiecare element  $x \in E$  face parte dintr-o pereche  $(x, y) \in G$  și numai din una. Putem atunci defini o funcție  $f: E \rightarrow F$ , făcând să corespundă fiecarui element  $x \in E$ , elementul unic  $y \in F$ , pentru care  $(x, y) \in G$  adică punând  $f(x) = y$  pentru fiecare pereche  $(x, y) \in G$ .

Mulțimea  $G$  este graficul funcției  $f$  astfel definite.

*Exemplu.* Graficul aplicației identice a mulțimii  $E$  în ea însăși este mulțimea perechilor  $(x, x)$  cu  $x \in E$ . Graficul aplicației identice se numește *diagonala* produsului cartezian  $E^2$ .

**Observații.** 1° Graficul unei funcții  $f: E \rightarrow F$  coincide cu produsul cartezian  $E \times F$ , dacă și numai dacă mulțimea  $F$  este formată dintr-un singur element.

2° O submulțime  $K \subset E \times F$  care conține două perechi  $(x, y)$  și  $(x, y')$ , cu același prim element  $x$ , dar cu  $y \neq y'$ , nu este graficul unei funcții, deoarece în corespondența stabilită de mulțimea  $K$ , lui  $x$  i se asociază două elemente *diferite*,  $y$  și  $y'$ .

De exemplu, mulțimea punctelor  $(x, y)$  din plan, care verifică ecuația  $x^2 + y^2 = 4$  (cercul cu centrul în origine și raza 2) nu este graficul unei funcții, deoarece pentru  $x = \sqrt{2}$ , există două numere *diferite*,  $y = \sqrt{2}$  și  $y' = -\sqrt{2}$ , care verifică această ecuație.

3° Din cauza corespondenței dintre o funcție  $f$  și *ecuația*  $y = f(x)$  a graficului său  $G_f$ , se folosește uneori, pentru funcție, notația  $y = f(x)$ .

## 3. Familii. Siruri

În anumite cazuri este util să concepem o funcție  $f: I \rightarrow E$  ca o familie de elemente din  $E$ ; în acest caz, se folosește notația indicială  $f_i$ , pentru valoarea funcției într-un punct  $i$ . Mulțimea de definiție  $I$  se numește atunci *mulțimea indicilor*: orice element  $i \in I$  se numește *indice*, iar  $f_i$  se numește element al familiei, cu indicele  $i$ . Elementele familiei pot coincide (dacă  $f$  nu este biunivocă).

O asemenea familie se notează:

$$(f_i)_{i \in I}.$$

De obicei, dacă pentru elementele mulțimii  $E$  se folosește o literă  $a$ , o familie de elemente ale lui  $E$  se notează  $(a_i)_{i \in I}$ .

Dacă mulțimea indicilor este mulțimea  $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  a numerelor naturale, o familie  $(a_n)_{n \in N}$  de elemente ale mulțimii  $E$  se numește *sir*. Așadar, un sir de elemente din  $E$  este o funcție  $n \rightarrow a_n$  definită pe mulțimea  $N$  a numerelor naturale, cu valori în  $E$ .

#### 4. Reuniuni și intersecții de familii

Fie  $(A_i)_{i \in I}$  o familie de părți (distingute sau nu) ale unei multimi  $E$ .

Mulțimea elementelor  $x \in E$  care aparțin cel puțin unei multimi  $A_i$  din familie se numește reuniunea familiei și se notează

$$\bigcup_{i \in I} A_i.$$

Mulțimea elementelor  $x \in E$  care aparțin tuturor multimilor din familie se numește intersecția familiei și se notează

$$\bigcap_{i \in I} A_i.$$

Dacă  $(A_n)_{n \in N}$  este un sir de părți ale lui  $E$ , reuniunea și intersecția acestui sir se notează și astfel:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ sau } A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$$

respectiv

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ sau } A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$$

Dacă  $I = \emptyset$ , obținem o familie vidă de părți ale lui  $E$ . Se face convenția ca reuniunea familiei vide să fie  $\emptyset$ , iar intersecția familiei vide să fie mulțimea  $E$ . Cu această convenție, au loc totdeauna egalitățile

$$C(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} C(A_i) \text{ și } C(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} C(A_i)$$

oricare ar fi familia  $(A_i)_{i \in I}$ .

#### 5. Restricții și extensiuni de funcții

Din definiția dată noțiunii de funcție rezultă că două funcții  $f$  și  $g$  sunt egale dacă sunt definite pe aceeași mulțime  $E$ , au valori în aceeași mulțime  $F$  și dacă stabilesc aceeași corespondență, adică dacă

$$f(x) = g(x) \text{ pentru orice } x \in E.$$

Altfel exprimat: funcțiile  $f$  și  $g$  sunt egale dacă și numai dacă au aceeași grafic.

Așadar, două funcții  $f$  și  $g$  sunt *diferite*, fie dacă nu sunt definite pe aceeași mulțime, fie, în cazul cînd sunt definite pe aceeași mulțime  $E$ , dacă au valori diferite *cel puțin* într-un punct  $x_0 \in E$ :

$$f(x_0) \neq g(x_0).$$

Fie funcția  $f: E \rightarrow F$  și  $A$  o parte a lui  $E$ . Să considerăm corespondența  $x \rightarrow f(x)$  stabilită de funcția  $f$  numai pentru elementele  $x \in A$ . Această

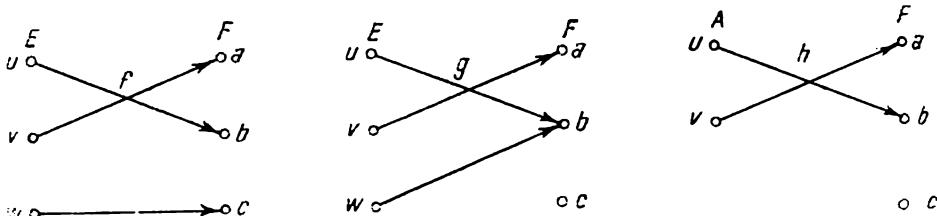


Fig. 11

corespondență de la  $A$  la  $F$  definește o aplicație a lui  $A$  în  $F$ , care se numește *restricția funcției  $f$  la mulțimea  $A$* , și se notează, de obicei, cu  $f_A$  (sau  $f|A$ ). Așadar: funcția  $f_A: A \rightarrow F$  este definită prin egalitatea

$$f_A(x) = f(x) \quad \text{pentru } x \in A.$$

Funcția  $f: E \rightarrow F$  este, prin definiție, o *extensiune* sau o *prelungire* la mulțimea  $E$  a funcției  $f_A$ . Dîndu-se o funcție  $f: E \rightarrow F$  și o mulțime  $A \subset E$ , există o singură restricție a lui  $f$  la  $A$ . Două funcții *diferite*  $f: E \rightarrow F$  și  $g: E \rightarrow F$  au însă *aceeași* restricție la  $A$  dacă  $f(x) = g(x)$  pentru orice  $x \in A$ .

Așadar o funcție  $h: A \rightarrow F$  are în general mai multe prelungiri la mulțimea  $E$  (funcția  $h$  are o prelungire *unică* la  $E$  dacă și numai dacă  $F$  este formată dintr-un singur element).

*Exemplu.*  $E = \{u, v, w\}$ ,  $F = \{a, b, c\}$ ,  $A = \{u, v\}$ . Funcția  $h$  din figura 11 este restricția funcțiilor  $f$  și  $g$ .

## 6. Funcții compuse

Fie  $f: E \rightarrow F$  și  $g: F \rightarrow G$  două funcții.

Un element oarecare  $x \in E$  este transformat de funcția  $f$  în elementul (unic)  $f(x) \in F$ ; mai departe, elementul  $f(x) \in F$  este transformat de funcția  $g$  în elementul (unic)  $g(f(x)) \in G$ . În acest mod putem stabili o corespondență  $x \rightarrow g(f(x))$  direct de la  $E$  la  $G$ :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) \\ & & \hline & & x \longrightarrow g(f(x)) \end{array}$$

**D e f i n i t i e.** Funcția definită pe  $E$  cu valori în  $G$  prin corespondența  $x \rightarrow g(f(x))$  se numește funcția compusă a funcțiilor  $g$  și  $f$ , în această ordine și se notează  $g \circ f$ :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{pentru } x \in E$$

( $g \circ f$  se citește  $g$  compus cu  $f$ ).

Funcția compusă  $g \circ f$  este definită pe mulțimea  $E$  ca și funcția  $f$  scrisă la dreapta în notația  $g \circ f$  și are valori în  $G$  ca și funcția  $g$  scrisă la stînga în notația  $g \circ f$ .

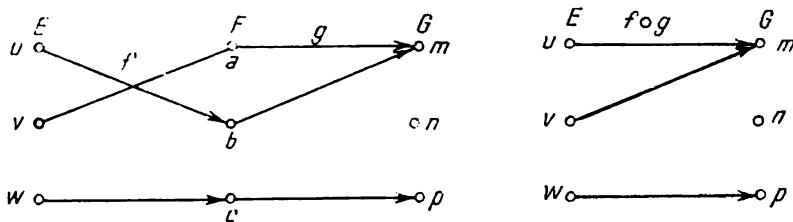


Fig. 12

Este de observat că pentru a obține funcția compusă  $g \circ f$ , se aplică întii funcția  $f$  și apoi funcția  $g$ .

*Exemplu* (fig. 12).

Operația de compunere este asociativă:

Dacă  $f: E \rightarrow F$ ,  $g: F \rightarrow G$  și  $h: G \rightarrow H$  sunt trei funcții, avem, după cum se poate ușor verifica,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

De aceea funcția definită de ambii membri se notează  $h \circ g \circ f$  și se numește funcția compusă a funcțiilor  $h$ ,  $g$  și  $f$ , în ordinea indicată:

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G & \xrightarrow{h} & H \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) & \longrightarrow & h(g(f(x))) \\ x & & & & & & \longrightarrow h(g(f(x))). \end{array}$$

Se definește în mod analog funcția compusă a mai multor funcții.

**O b s e r v a t i i.** 1° Fie  $f: E \rightarrow F$  și  $g: F \rightarrow G$  două funcții. În general funcția  $f \circ g$  nu poate fi definită. În adevăr, un element  $y \in F$  este transformat de funcția  $g$  în elementul  $g(y) \in G$ , și dacă  $g(y) \notin E$ , nu-i putem aplica funcția  $f$ .

2° Dacă  $f: E \rightarrow F$  și  $g: F \rightarrow E$  atunci se pot defini ambele funcții compuse:  $g \circ f$  și  $f \circ g$ .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \xleftarrow{g} E \\ x & \longrightarrow & f(x) \longrightarrow g(f(x)) \\ x & & \longrightarrow g(f(x)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{g} & E \xrightarrow{f} F \\ y & \longrightarrow & g(y) \longrightarrow f(g(y)) \\ y & & \longrightarrow f(g(y)). \end{array}$$

Cele două funcții compuse  $g \circ f$  și  $f \circ g$  sunt în general diferite, deoarece prima este definită pe  $E$ , iar a doua este definită pe  $F$ . Așadar operația de compunere a funcțiilor nu este comutativă.

Dacă  $f: E \rightarrow E$  și  $g: E \rightarrow E$ , atunci funcțiile  $g \circ f$  și  $f \circ g$  sunt definite pe aceeași mulțime  $E$ . Chiar în acest caz cele două funcții compuse sunt în general diferite, cum se constată din exemplul dat în figura 13.

3° Fie funcția  $f: E \rightarrow F$ .

Dacă  $i$  este aplicația identică a lui  $E$  în  $E$  ( $i(x) = x$  pentru  $x \in E$ ), atunci

$$f \circ i = f.$$

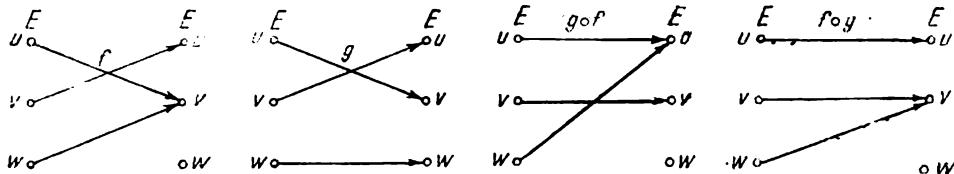


Fig. 13

În adevăr, pentru orice  $x \in E$  avem  $(f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(x)$ . Funcțiile  $f \circ i$  și  $f$  sunt definite amândouă pe mulțimea  $E$  și stabilesc aceeași corespondență, deci sunt egale.

De asemenea, dacă  $j$  este aplicația identică a lui  $F$  în  $F$  ( $j(y) = y$  pentru orice  $y \in F$ ), atunci

$$j \circ f = f.$$

În adevăr, pentru orice  $x \in E$  avem  $f(x) \in F$  și

$$(j \circ f)(x) = j(f(x)) = f(x).$$

Să observăm că funcțiile  $i \circ f$  și  $f \circ j$  pot fi amândouă definite dacă și numai dacă  $E = F$ . În acest caz,  $i = j$ , deci  $i \circ f = f \circ i = f$ . Aplicația identică  $i$  a lui  $E$  în  $E$  este deci element neutru (are efect nul) pentru operația de compunere a funcțiilor  $f: E \rightarrow E$ .

4° Fie funcțiile  $f: E \rightarrow F$  și  $g: G \rightarrow H$ . Să notăm  $E_1 = \{x | x \in E, f(x) \in G\}$ . Mulțimea  $E_1$  poate fi vidă. Dacă  $E_1 \neq \emptyset$ , să considerăm restricția  $f_1$  a lui  $f$  la  $E_1$ . Așadar:  $f_1: E_1 \rightarrow G$ . Atunci putem considera funcția compusă  $g \circ f_1: E_1 \rightarrow H$ . Pentru orice  $x \in E_1$  avem

$$(g \circ f_1)(x) = g(f_1(x)) = g(f(x)).$$

De aceea, prin abuz de limbaj, funcția compusă  $g \circ f_1$ , se notează adesea  $g \circ f$ .

## § 4. Aplicații biunivoce. Funcții inverse

### 1. Imagini directe de mulțimi printr-o funcție.

#### Apliicație pe o mulțime

Fie funcția  $f: E \rightarrow F$  și  $A$  o parte a lui  $E$ . Mulțimea valorilor luate de funcția  $f$  pe  $A$  se numește *imaginea directă a lui  $A$  prin funcția  $f$*  sau, mai simplu, *imaginea lui  $A$  prin  $f$*  și se notează  $f(A)$ . Așadar:

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}.$$

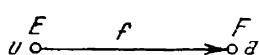
Mulțimea  $f(A)$  este o parte a mulțimii  $F$  (deoarece  $f(x) \in F$  pentru orice  $x \in A$ ), și se numește de asemenea transformata mulțimii  $A$  prin funcția  $f$ .

Așadar,  $y \in f(A)$  dacă și numai dacă există (cel puțin) un element  $x \in A$ , astfel ca  $y = f(x)$ .

Imaginea  $f(E)$  a întregii mulțimi de definiție se numește *mulțimea valorilor funcției f*.

Mulțimea valorilor,  $f(E)$ , poate fi diferită de mulțimea  $F$  în care funcția ia valori, adică pot exista elemente  $y \in F$  care să nu fie imaginea nici unui element  $x \in E$  (fig. 8). În acest caz avem  $f(E) \subset F$ , cu  $f(E) \neq F$ .

Dacă  $f(E) = F$ , se spune că  $f$  este o aplicație a lui  $E$  pe  $F$ . Aceasta înseamnă că orice element  $y \in F$  este imaginea a (cel puțin) unui element  $x \in E$ . Trebuie să facem distincție între „aplicație a lui  $E$  în  $F$ ” și „aplicație a lui  $E$  pe  $F$ ”.



*Exemplu* (fig. 14).  $f(E) = F$ ;  $f(\{u, v\}) = \{a, c\}$ ;  
 $f(\{t\}) = \{c\}$ ;  $f(\{v, w, t\}) = \{b, c\}$ .

Din definiția funcției deducem următoarele proprietăți:

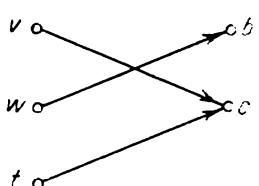


Fig. 14

$$1) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$2) f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

3) Dacă  $A \subset E$  și  $A \neq \emptyset$  atunci  $f(A) \neq \emptyset$ .

4) Dacă  $A \subset E$  este formată numai dintr-un element,  $A = \{x\}$ , atunci  $f(A)$  este formată numai dintr-un element,  $f(A) = \{f(x)\}$ , adică

$$f(\{x\}) = \{f(x)\}.$$

## 2. Imagini reciproce de mulțimi printr-o funcție.

### Aplicații biunivoce

Fie funcția  $f: E \rightarrow F$  și  $B$  o parte a lui  $F$ . Mulțimea tuturor elementelor  $x \in E$  ale căror imagini prin funcția  $f$  aparțin lui  $B$  se numește *imagine reciprocă* (sau inversă) a lui  $B$  prin funcția  $f$  și se notează  $f^{-1}(B)$ :

$$f^{-1}(B) = \{x \mid x \in E, f(x) \in B\};$$

$f^{-1}(B)$  este o parte a mulțimii  $E$ . Așadar,  $x \in f^{-1}(B)$  dacă și numai dacă  $f(x) \in B$ .

Evident,  $f^{-1}(f(G)) = G$  și de asemenea  $f(f(E)) = E$ .

Avem:

$$1) f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$2) f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$3) f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B).$$

*Exemplu* (fig. 15).  $f(\{b, c\}) = \{v, w, t\}$ ;  $f^{-1}(\{a, b\}) = \{u, w\}$ ;  $f^{-1}(\{c\}) = \{v, t\}$ ;  $f^{-1}(\{d\}) = \emptyset$ .

Pe acest exemplu se constată că:

a) mulțimea  $B \subset F$  poate fi nevidă și totuși imaginea sa reciprocă  $f^{-1}(B)$  poate fi vidă;

b) mulțimea  $B \subset F$  poate fi formată dintr-un singur element, și totuși imaginea reciprocă  $f^{-1}(B)$  poate fi formată din două sau mai multe elemente.

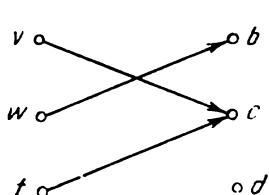
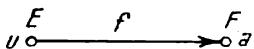


Fig. 15

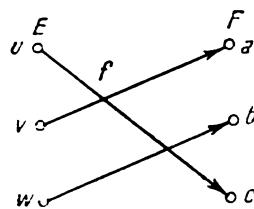


Fig. 16

Se constată ușor că: imaginea reciprocă a oricărei mulțimi nevide  $B \subset F$  este de asemenea nevidă, dacă și numai dacă  $f(E) = F$ , adică dacă și numai dacă  $f$  este o aplicație a lui  $E$  pe  $F$ .

Dacă  $f$  este o aplicație a lui  $E$  pe  $F$ , atunci imaginile reciproce verifică și ele proprietatea 1) a imaginilor directe:

Dacă  $B \subset F$  și  $B \neq \emptyset$ , atunci  $f^{-1}(B) \neq \emptyset$ .

**Definiție.** Se spune că funcția  $f: E \rightarrow F$  este biunivocă, dacă oricare ar fi elementele  $x' \neq x''$  din  $E$ , avem  $f(x') \neq f(x'')$  (adică două elemente diferite din  $E$  au imagini diferite în  $F$ ).

Se verifică ușor că  $f$  este biunivocă dacă și numai dacă  $f(x') = f(x'') \Rightarrow x' = x''$ .

*Exemplu* (fig. 16).

O formulare echivalentă a definiției unei funcții biunivoce este următoarea:

*Funcția  $f: E \rightarrow F$  este biunivocă dacă și numai dacă, oricare ar fi  $y \in F$ , imaginea reciprocă a mulțimii  $\{y\}$  conține cel mult un element (putând fi even- tual vidă).* Lăsăm pe seama cititorului, ca exercițiu, verificarea echivalenței diferențelor formulări ale definiției unei funcții biunivoce.

Dacă  $f$  este o aplicație biunivocă a lui  $E$  pe  $F$ , atunci imaginile reciproce au aceleași proprietăți ca și imaginile directe:

1) dacă  $B \subset F$  și  $B \neq \emptyset$  atunci  $f^{-1}(B) \neq \emptyset$ ;

2) dacă  $B \subset F$  și  $B$  este formată dintr-un singur element,  $B = \{y\}$ , atunci  $f^{-1}(B)$  este formată numai dintr-un singur element,  $x$ , pentru care  $f(x) = y$ .

### 3. Funcții inverse

Fie  $f$  o aplicație biunivocă a lui  $E$  pe  $F$ . Aceasta înseamnă că  $f(E) = F$  și  $x' \neq x'' \Rightarrow f(x') \neq f(x'')$ , ( $x', x'' \in E$ ).

În acest caz, pentru orice element  $y \in F$ , există un element și *unul singur*  $x \in E$ , astfel ca  $f(x) = y$ .

În acest mod putem stabili o corespondență  $f(x) \rightarrow x$  de la elementele lui  $F$  la elementele lui  $E$ , care definește o aplicație biunivocă a lui  $F$  pe  $E$ , și care se numește *aplicația reciprocă* (sau funcția inversă) a funcției  $f$  și se notează  $f^{-1}$ . Așadar :

**D e f i n i t i e.** Se numește **funcție inversă** (sau **reciproce**) a funcției  $f$  funcția  $f^{-1}$  prin care fiecărui element  $y \in F$  li corespunde acel element (unic)  $x \in E$  pentru care  $f(x) = y$ .

Egalitățile  $f(x) = y$  și  $x = f^{-1}(y)$  sunt echivalente.

Funcția  $f^{-1}$  este la rîndul său o aplicație biunivocă a lui  $F$  pe  $E$  și deci admite o funcție inversă care este  $f$ . Funcțiile  $f$  și  $f^{-1}$  sunt deci inverse una alteia :

$$\begin{matrix} & f \\ E & \xrightarrow{\quad\quad} & F \\ & f^{-1} & \end{matrix}$$

Din egalitățile echivalente  $f(x) = y$  și  $x = f^{-1}(y)$ , deducem

$$f(f(x)) = x \text{ pentru orice } x \in E,$$

$$f(f(y)) = y \text{ pentru orice } y \in F.$$

*Exemplu* (fig. 17).  $f(u) = c, f(c) = u; f(v) = a, f^{-1}(a) = v; f(w) = b, f^{-1}(b) = w; f^{-1}(f(u)) = f^{-1}(c) = u; f^{-1}(f(v)) = f^{-1}(a) = v; f^{-1}(f(w)) = f^{-1}(b) = w; f(f(a)) = f(v) = a; f(f(b)) = f(w) = b; f(f(c)) = f(u) = c$ .

**O b s e r v a t i i.** 1°. Numai aplicațiile biunivoce ale lui  $E$  pe  $F$  admit funcții inverse.

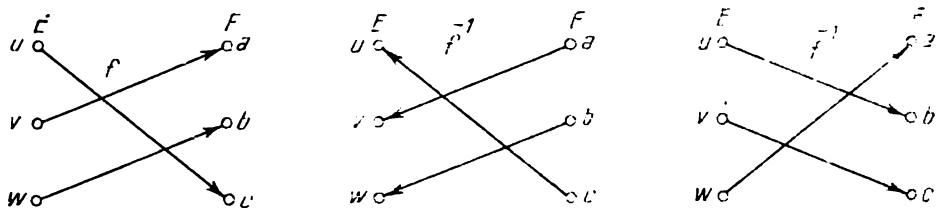


Fig. 17

Dacă funcția  $f: E \rightarrow F$  este *biunivocă* și dacă  $f(E) \neq F$ , atunci se consideră  $f$  ca o aplicație biunivocă a lui  $E$  pe  $f(E)$ , și deci admite o funcție inversă  $f^{-1}: f(E) \rightarrow E$ .

2° Practic, după ce s-a verificat că  $f: E \rightarrow F$  este o aplicație *biunivocă* a lui  $E$  pe  $F$ , funcția inversă  $f^{-1}$  se obține rezolvând în raport cu  $x$  ecuația

$$y = f(x), \quad (x \in E, y \in F).$$

Pentru fiecare  $y \in F$ , se obține soluția unică în  $E$

$$x = f^{-1}(y).$$

3° Fie  $f: E \rightarrow F$  o aplicație *biunivocă* și fie  $f: F \rightarrow E$  funcția sa inversă.

Dacă  $i$  este aplicația identică a lui  $E$  în  $E$ , ( $i(x) = x$  pentru orice  $x \in E$ ) avem

$$f^{-1} \circ f = i.$$

În adevăr  $(f \circ f^{-1})(x) = f(f(x)) = x = i(x)$  pentru orice  $x \in E$ .

Dacă  $j$  este aplicația identică a lui  $F$  în  $F$  ( $j(y) = y$  pentru orice  $y \in F$ ), avem

$$f \circ f^{-1} = j.$$

4° O aplicație *biunivocă* a unei mulțimi  $E$  pe ea însăși se numește *permutare*. Aplicația identică  $i$  a lui  $E$  în  $E$  este o permutare.

Fie  $f: E \rightarrow E$  o permutare și  $f: E \rightarrow E$  permutarea inversă. Avem:

$$f^{-1} \circ f = i \text{ și } f \circ f^{-1} = i.$$

Așadar mulțimea permutărilor  $f: E \rightarrow E$  este grup\* (necomutativ) pentru operația de compunere.

\* Fie  $E$  o mulțime. O aplicație a produsului cartezian  $E \times E$  în mulțimea  $E$  se numește operație de compunere în  $E$ . Așadar, o operație de compunere în mulțimea  $E$  face să corespundă fiecărei perechi  $(x, y)$  de elemente din  $E$ , un element din  $E$  pe care-l vom nota, în general,  $x \circ y$ .

1) O operație  $x \circ y$  este asociativă dacă

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \text{ oricare ar fi } x, y, z \in E.$$

2) Un element  $e \in E$  se numește *element neutru* pentru operația  $x \circ y$  dacă

$$e \circ x = x \circ e = x \text{ oricare ar fi } x \in E.$$

3) Dacă  $e$  este element neutru pentru operația  $x \circ y$ , se spune că un element  $x \in E$  are invers (sau este inversibil) pentru această operație dacă există un element  $y \in E$  astfel că

$$x \circ y = y \circ x = e,$$

$y$  se numește inversul lui  $x$ ;  $y$  este de asemenea inversabil și inversul său este  $x$ . Inversul lui  $x$  se notează  $x^{-1}$ . Așadar  $y = x^{-1}$ ,  $x = y^{-1}$ .

4) O operație  $x \circ y$  este comutativă dacă

$$x \circ y = y \circ x \text{ oricare ar fi } x, y \in E.$$

## § 5. Multimi numărabile

### 1. Corespondență biunivocă a două multimi

Fie  $f: E \rightarrow F$  o aplicație biunivocă a lui  $E$  pe  $F$ , și fie  $f^{-1}: F \rightarrow E$  funcția sa inversă.

Se spune că funcțiile  $f$  și  $f^{-1}$  realizează o *corespondență biunivocă* între multimile  $E$  și  $F$ , sau că  $E$  și  $F$  sunt puse în corespondență biunivocă prin aceste funcții.

Orice mulțime  $E$  poate fi pusă în corespondență biunivocă cu ea însăși, de exemplu prin aplicația identică a lui  $E$  pe  $E$ .

Dacă două multimi pot fi puse în corespondență biunivocă prin funcțiile  $f$  și  $f^{-1}$ , atunci pot exista și alte funcții care să le pună în corespondență biunivocă.

În adevăr, dacă  $p$  este o permutare oarecare a lui  $E$  și  $g$  o permutare oarecare a lui  $F$ , funcția compusă

$$g \circ f \circ p : E \rightarrow F$$

este de asemenea o aplicație biunivocă a lui  $E$  pe  $F$ , deci această aplicație și aplicația sa reciprocă realizează de asemenea o corespondență biunivocă între  $E$  și  $F$ .

Se spune că două multimi  $E$  și  $F$  sunt *echivalente*, și se scrie  $E \sim F$ , dacă pot fi puse în corespondență biunivocă (adică dacă există o aplicație biunivocă a lui  $E$  pe  $F$ ).

### 2. Multimi numărabile

Se spune că o mulțime  $A$  este *numărabilă* dacă este echivalentă cu mulțimea  $N$  a numerelor naturale, adică dacă poate fi pusă în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor naturale.

Așadar, mulțimea  $A$  este numărabilă dacă și numai dacă *toate* elementele sale pot fi așezate într-un sir

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

O mulțime  $E$  în care s-a definit o operație asociativă se numește *semigrup*. Dacă există element neutru,  $E$  se numește *semigrup cu unitate*.

Un semigrup cu unitate în care fiecare element este inversabil se numește *grup*.

Un semigrup sau grup în care operația este comutativă se numește *semigrup, respectiv grup comutativ, sau abelian*.

Pentru o operație comutativă, se folosește mai ales notația aditivă  $x + y$ ; în acest caz elementul neutru este numit „zero” și este notat 0; inversul unui element  $x$  este numit *opusul* lui  $x$  și este notat  $-x$ .

Altă notație uzuală pentru operații este notația multiplicativă  $x \cdot y$  sau  $xy$ ; în acest caz elementul neutru este numit element unitate, sau „unu”.

Dacă  $E$  este grup, condiția necesară și suficientă ca o submulțime  $E' \subset E$  să fie grup, este ca  $x \circ y \in E'$  și  $x^{-1} \in E'$ , oricare ar fi  $x, y \in E'$ .

Se spune că o mulțime  $B$  este finită și are  $n$  elemente dacă este echivalentă cu mulțimea  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  a primelor  $n$  numere naturale.

Orice mulțime care nu este finită se numește mulțime infinită. O mulțime numărabilă este infinită.

Se spune că o mulțime este cel mult numărabilă, dacă este finită sau numărabilă.

*Exemplu.* 1) Mulțimea numerelor naturale este numărabilă (deoarece  $N \sim N$ ).

2) Mulțimea numerelor pare

$$2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$$

este numărabilă, deoarece toate elementele sale pot fi așezate într-un sir. Corespondența biunivocă cu mulțimea numerelor naturale este  $n \rightarrow 2n$ .

3) Mulțimea numerelor impare

$$1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots$$

este numărabilă.

*O b s e r v a t i e.* Două mulțimi finite  $A$  și  $B$  sunt echivalente dacă și numai dacă au același număr de elemente.

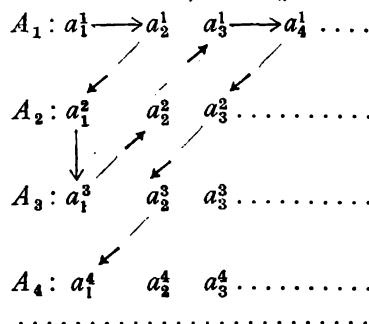
În adevăr, fie  $n$  numărul elementelor lui  $A$ . Aceasta inseamnă  $A \sim \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ; dar  $A \sim B$ , deci  $B \sim \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , deci  $B$  are tot  $n$  elemente. Reciproc, dacă  $A$  și  $B$  au  $n$  elemente atunci  $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$  și  $B \sim \{1, 2, \dots, n\}$  deci  $A \sim B$ .

O mulțime finită nu poate fi deci echivalentă cu o submulțime strictă a sa.

Din exemplele precedente se vede că o mulțime infinită poate fi echivalentă cu o submulțime strictă a sa. Așadar, pentru mulțimile infinite „numărul” de elemente nu mai are același înțeles ca pentru mulțimile finite.

**P r o p o z i t i e.** Reuniunea unui sir  $(A_n)_{n \in N}$  de mulțimi numărabile este o mulțime numărabilă.

Pentru demonstrație, vom presupune că mulțimile din sir sunt disjuncte două cîte două:  $A_n \cap A_m = \emptyset$  dacă  $n \neq m$ . În caz contrar, dacă un element se repetă în mai multe mulțimi din sir îl menținem numai în prima mulțime în care apare, iar în celealte îl înlăturăm. Să așezăm în cîte un sir elementele fiecărei mulțimi  $A_n$ :



Să formăm acum sirul următor

$$a_1^1; a_2^1, a_1^2; a_3^1, a_2^2, a_3^1; a_4^1, a_3^2, a_2^3, a_1^4; \dots$$

Orice ar fi multimea  $A_n$  și oricare ar fi elementul său  $a_m^n$ , el face parte din acest sir; aşadar, acest sir conține *toate* elementele reuniunii  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , deci această reuniune este numărabilă.

**O b s e r v a t i e.** Se poate arăta că multimea numerelor *rationale* și multimea numerelor *algebrice* sunt multimi numărabile, și că multimea numerelor reale nu este numărabilă.

### § 6. Despre negație

În matematică se folosește adesea raționamentul „prin reducere la absurd” pentru demonstrația unei proprietăți  $P$ . Acest raționament constă în faptul că, presupunând „prin absurd” că proprietatea  $P$  nu este adevărată se trag consecințe contradictorii.

Pentru a putea folosi în raționamentele propoziția negativă „proprietatea  $P$  nu este adevărată”, trebuie să-o transformăm într-o propoziție echivalentă afirmativă.

Transcrierea proprietății „non  $P$ ” într-o formulare echivalentă afirmativă se numește, în mod obișnuit, negarea proprietății  $P$ .

Dacă proprietatea  $P$  are o formulare mai lungă, negarea sa este adesea anevoieasă și poate fi făcută incorrect.

În acest paragraf se dă o regulă de negare simplă și sigură.

Pentru aceasta vom considera mai întâi propoziții simple, universal affirmative, sau particular affirmative.

O propoziție simplă universal affirmativă afirmă că *toate* elementele unei mulțimi  $E$  au o proprietate  $P$ , și deci se poate formula astfel:

oricare  $x \in E$  are proprietatea  $P$

sau

oricare ar fi  $x \in E$ ,  $x$  are proprietatea  $P$ .

O propoziție simplă particular affirmativă afirmă că *unele* elemente ale unei mulțimi  $E$  (eventual *toate* elementele lui  $E$ ) au o proprietate  $P$ , adică, mulțimea elementelor din  $E$  care au proprietatea  $P$  nu este vidă; o asemenea propoziție se poate formula astfel:

există cel puțin un element  $x \in E$  care are proprietatea  $P$ .

De cele mai multe ori se omite „cel puțin” dar se subînțelege totdeauna, astfel încât o propoziție particular affirmativă se scrie

există  $x \in E$  cu proprietatea  $P$ .

Observăm că, formal, cele două feluri de propoziții se deosebesc între ele prin faptul că *unele* încep cu „oricare”, iar *altele* cu „există”.

*Prin negare, o propoziție simplă universal afirmativă se transformă într-o particular afirmativă, o propoziție simplă particular afirmativă se transformă într-o universal afirmativă, iar proprietatea  $P$  se transformă în contrariul ei non  $P$ .*

Să plecăm de la o propoziție simplă universal afirmativă :

*orice  $x$  din  $E$  are proprietatea  $P$ ,*

și s-o negăm. Forma directă a negării este următoarea :

*nu este adevărat că orice  $x$  din  $E$  are proprietatea  $P$ .*

Aceasta înseamnă că există, sigur, cel puțin un element din  $E$  care nu are proprietatea  $P$ , deci care are proprietatea contrară non  $P$ ; aşadar :

*există  $x \in E$  care are proprietatea non  $P$ .*

Să plecăm acum de la o propoziție simplă particular afirmativă : *există* (cel puțin) un element  $x \in E$  care are proprietatea  $P$ , și s-o negăm :

*nu este adevărat că există un element  $x$  din  $E$  cu proprietatea  $P$ .*

Aceasta înseamnă că nici un element din  $E$  nu are proprietatea  $P$ , sau : oricare ar fi elementul  $x \in E$ ,  $x$  nu are proprietatea  $P$ , ci proprietatea contrară, non  $P$ ;

așadar :

*oricare ar fi  $x \in E$ ,  $x$  are proprietate non  $P$ .*

De aici deducem următoarea regulă practică :

*prin negare, „oricare” se transformă în „există”, „există” se transformă în „oricare”, iar proprietatea  $P$  în non  $P$ .*

Această regulă se păstrează pentru orice propoziție, nu numai pentru cele simple, deoarece negarea unei propoziții complexe se reduce la negarea succesivă a unor propoziții simple.

Într-adevăr, o propoziție complexă o putem scrie ca o propoziție simplă, înlocuind o parte din ea cu  $P$ . Prin negare,  $P$  se transformă în non  $P$  și, deci, trebuie să negăm propoziția  $P$ ; dacă  $P$  nu este simplă, o scriem ca o propoziție simplă, înlocuind o parte din ea cu  $Q$ . Prin negare,  $Q$  se transformă în non  $Q$ , s.a.m.d. De fiecare dată, prin negare, „există” se transformă în „oricare” și „oricare” se transformă în „există”. Până la urmă vom ajunge la o propoziție simplă în care figurează proprietatea finală din propoziția inițială, care, prin negare, se transformă în contrariul ei.

Pentru a putea aplica această tehnică de negare unei propoziții ea trebuie formulată cu ajutorul cuvintelor „oricare” și „există”. Aceasta se poate realiza ușor pentru fiecare propoziție în parte, observând dacă elementele care intervin în propoziție sunt arbitrar sau nu. Dacă sunt arbitrar, se scrie în fața lor „oricare ar fi”, sau „pentru orice”, iar dacă nu sunt arbitrar se scrie în fața lor „există”.

Va trebui să observăm de fiecare dată că :

*un element despre care se afirmă că „există” depinde de (este funcție de) elementele scrise în propoziție înaintea sa și despre care se afirmă că sunt arbitrar (au înainte „oricare”) și nu depinde de elementele scrise după el în propoziție.*

Ne dăm astfel seama de importanța pe care o are ordinea în care sunt scrise cuvintele într-o propoziție. Schimbarea ordinii cuvintelor într-o propoziție poate să-i schimbe foarte mult înțelesul, să-o transforme într-o propoziție *diferită* sau, uneori, chiar într-o propoziție fără sens.

De asemenea, va trebui să observăm că după fiecare element despre care se afirmă că „există” trebuie să adaugăm expresia „cu proprietatea că” sau „astfel încât”.

În logica matematică se folosesc notațiile  $\exists$  și  $\forall$  pentru „există” și „oricare”. Noi vom folosi prescurtările următoare: „or” pentru „oricare” și „ex” pentru „există”.

## Capitolul II

# MULTIMI DE NUMERE REALE. FUNCTII REALE

## § 1. Numere reale

Vom presupune cunoscute numerele reale și proprietățile lor, pe care le rezumăm mai jos.

Construirea numerelor reale și demonstrarea proprietăților lor se fac în detaliu la cursul de aritmetică și sunt expuse în tratatul de analiză matematică (vol. I) al academicianului Miron Nicolescu.

### 1. Structura algebrică a numerelor reale

Mulțimea numerelor reale va fi notată cu  $R$ .

Cu numerele reale se pot efectua două operații: adunarea și înmulțirea. Operația de *adunare* face să corespundă fiecărei perechi  $(x, y)$  de numere reale un număr real notat cu  $x + y$  și numit *suma* lui  $x$  cu  $y$ .

Operația de *înmulțire* face să corespundă fiecărei perechi  $(x, y)$  de numere reale un număr real notat  $x \cdot y$  sau  $xy$  și numit *produsul* lui  $x$  cu  $y$ .

Aceste operații au următoarele proprietăți:

- 1)  $x + y = y + x$  (adunarea este comutativă);
- 2)  $(x + y) + z = x + (y + z)$  (adunarea este asociativă);
- 3)  $x + 0 = x$  (0 este element neutru pentru adunare);
- 4)  $x + (-x) = 0$  (orice număr  $x$  are un opus  $-x$ );

Mulțimea  $R$  a numerelor reale este, deci, *grup* comutativ pentru operația de adunare.

- 5)  $xy = yx$  (înmulțirea este comutativă);
- 6)  $(xy)z = x(yz)$  (înmulțirea este asociativă);
- 7)  $1 \cdot x = x$  (1 este element neutru, sau element unitate pentru înmulțire);
- 8) Dacă  $x \neq 0$ ,  $xx^{-1} = 1$  (orice număr  $x \neq 0$  are invers pentru înmulțire).

0 este singurul număr care nu are invers (pentru înmulțire).

Mulțimea numerelor *diferite de 0* este *grup* pentru operația de înmulțire.

9)  $x(y + z) = xy + xz$  (înmulțirea este distributivă față de adunare).

Așadar, mulțimea  $R$  a numerelor reale este *corp\** (pentru operațiile de adunare și înmulțire).

Suma  $x + (-y)$  dintre  $x$  și opusul lui  $y$  se scrie, mai simplu,  $x - y$  și se numește *diferență* dintre  $x$  și  $y$ . Operația de scădere se reduce astfel la aceea de adunare:  $x - y = x + (-y)$ .

Inversul  $x^{-1}$  al unui număr  $x \neq 0$  se mai notează  $\frac{1}{x}$ ; așadar,  $xx^{-1} = x \cdot \frac{1}{x} = 1$ . Produsul  $x \cdot \frac{1}{y}$  dintre un număr  $x$  și inversul unui număr  $y \neq 0$  se mai scrie  $\frac{x}{y}$  și se numește *cîtul* dintre  $x$  și  $y$ . Operația de împărțire (prin care unei perechi de numere  $(x, y)$  cu  $y \neq 0$  i se asociază cîtul lor  $\frac{x}{y}$ ) se reduce astfel la aceea de înmulțire:  $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$ .

Împărțirea cu 0 nu se poate efectua, deoarece 0 nu are invers. Nu dăm nici un înțeles împărțirii cu 0, nu o definim. Spunem că împărțirea cu 0 este o operație fără sens.

Din proprietățile de mai sus rezultă încă următoarele proprietăți:

- 1) Numărul 0 este singurul element neutru pentru adunare.
- 2) Numărul 1 este singurul element unitate pentru înmulțire.
- 3) Un număr real are un singur opus. Opusul lui 0 este 0.
- 4) Un număr real diferit de 0 are un singur invers. Inversul lui 1 este 1.
- 5)  $x = y \Rightarrow x + z = y + z$  (și  $x - z = y - z$ ) oricare ar fi  $z \in R$ ;  
 $x + z = y + z$  (sau  $x - z = y - z$ )  $\Rightarrow x = y$ .

- 6)  $x = y \Rightarrow xz = yz$  oricare ar fi  $z \in R$ ;  $x = y \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{y}{z}$  oricare ar fi  $z \neq 0$ ;  
dacă  $z \neq 0$ , atunci  $xz = yz$  (sau  $\frac{x}{z} = \frac{y}{z}$ )  $\Rightarrow x = y$ .

\* Fie  $E$  o mulțime pe care s-au definit două operații, una notată aditiv  $x + y$ , și alta notată multiplicativ  $xy$ . Mulțimea  $E$  este *inel* pentru aceste două operații dacă:

- 1) este grup *comutativ* pentru adunare;
- 2) este semigrup pentru înmulțire (înmulțirea este asociativă);
- 3) înmulțirea este distributivă față de adunare.

Dacă înmulțirea este comutativă,  $E$  se numește *inel comutativ*.

Dacă înmulțirea are element unitate,  $E$  se numește *inel cu unitate*.

Un inel cu unitate,  $E$ , în care fiecare element  $x \neq 0$  are invers pentru înmulțire se numește *corp*. Dacă înmulțirea este comutativă,  $E$  se numește *corp comutativ*. Așadar, un corp este un inel în care mulțimea elementelor diferite de 0 este *grup* pentru înmulțire.

- $\vdash 0x = 0$  oricare ar fi  $x \in R$ .  
 Să  $(y - z) = xy - xz$  (înmulțirea este distributivă față de scădere).  
 Șă Ecuația  $a + x = b$  are totdeauna o soluție unică,  $x = b - a$ .  
 ! Dacă  $a \neq 0$ , ecuația  $ax = b$  are totdeauna o soluție unică,  $x = \frac{b}{a}$ .

## 2. Clase de numere reale

Numerele naturale sunt\*:

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

Mulțimea numerelor naturale va fi notată cu  $N$ .

Suma  $m + n$  și produsul  $mn$  a două numere naturale  $m$  și  $n$  sunt de asemenea numere naturale.

Opusul unui număr natural nu mai este număr natural. Inversul unui număr natural  $n$  nu mai este număr natural decât dacă  $n = 1$ .

Mulțimea  $N$  a numerelor naturale este semigrup comutativ pentru adunare, și semigrup comutativ cu unitate pentru înmulțire.

Principiul inducției complete (sau al recurenței). Fie  $P$  o proprietate care se referă la numerele naturale. Dacă;

1. și proprietatea este adevărată pentru numărul natural 1;

2. presupunind proprietatea  $P$  adevărată pentru un număr natural  $n$ , rezultă că ea este adevărată și pentru  $n + 1$ ;

atunci proprietatea este adevărată pentru toate numerele naturale.

Numerele întregi sunt:

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Mulțimea numerelor întregi va fi notată cu  $Z$ . Avem  $N \subset Z$ .

Suma  $p + q$  și produsul  $pq$  a două numere întregi  $p$  și  $q$  sunt de asemenea numere întregi.

În plus, dacă  $p$  este număr întreg, opusul său  $-p$  este de asemenea număr întreg.

Așadar, mulțimea  $Z$  a numerelor întregi este grup comutativ pentru adunare. Inversul unui număr întreg  $p$  este întreg numai dacă  $p = 1$  sau  $p = -1$ , deci, pentru înmulțire,  $Z$  este semigrup (comutativ cu unitate).

Rezultă că mulțimea  $Z$  a numerelor întregi este inel (comutativ cu unitate).

Numerele raționale se pot reprezenta sub formă de fracție  $\frac{m}{n}$ , cu  $m$  și  $n$  întregi și  $n \neq 0$ .

Două asemenea fracții  $\frac{m}{n}$  și  $\frac{m'}{n'}$  reprezintă același număr rațional, dacă și numai dacă  $mn' = m'n$ .

\* Unii autori consideră și pe 0 număr natural.

Mulțimea numerelor raționale va fi notată cu  $Q$ . O fracție  $\frac{m}{n}$  ( $m$  și  $n$  întregi și  $n \neq 0$ ) este *ireductibilă* dacă  $m$  și  $n$  sunt prime între ele.

Oricare număr rațional se poate reprezenta într-un singur mod ca fracție ireductibilă cu *numitorul număr natural*.

Un număr întreg  $p$  se poate scrie ca fracție sub formă  $\frac{p}{1}$ , deci numerele întregi sunt în același timp numere raționale:  $Z \subset Q$ .

Suma  $r + s$  și produsul  $r s$  a două numere raționale sunt de asemenea numere raționale. În plus, dacă  $r$  este număr rațional, atunci opusul său  $-r$  este număr rațional, iar dacă  $r \neq 0$ , inversul său  $\frac{1}{r}$  este de asemenea număr rațional.

Rezultă că mulțimea  $Q$  a numerelor raționale este corp (comutativ).

Dacă  $a$  și  $b$  sunt numere raționale, atunci  $b - a$  și  $\frac{b}{a}$  (dacă  $a \neq 0$ ) sunt numere raționale, deci ecuațiile  $a + x = b$  și  $ax = b$  (dacă  $a \neq 0$ ) au soluții în cadrul numerelor raționale.

Ecuția  $x^2 = a$  nu mai are însă totdeauna soluție rațională. De exemplu, ecuația  $x^2 = 2$  nu are soluție rațională. Într-adevăr:

*Nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 2.*

Să presupunem, prin absurd, că există un număr rațional  $r$  astfel că  $r^2 = 2$ . Să scriem numărul  $r$  ca fracție ireductibilă  $r = \frac{p}{q}$ , unde  $p$  și  $q$  sunt numere întregi fără nici un alt divizor comun afară de 1 și -1. Așadar

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \text{ sau } \frac{p^2}{q^2} = 2,$$

de unde:

$$p^2 = 2q^2.$$

Rezultă că  $p^2$  este un număr par, deci și  $p$  este un număr par\*:  $p = 2m$ . Egalitatea  $p^2 = 2q^2$  se scrie atunci:

$$4m^2 = 2q^2,$$

de unde

$$2m^2 = q^2.$$

Rezultă că  $q^2$  este un număr par, deci și  $q$  este un număr par:  $q = 2n$ . Așadar,  $p$  și  $q$  au pe 2 ca divizor comun și am ajuns astfel la o contradicție, presupunind că ar exista un număr rațional  $r$  cu  $r^2 = 2$ .

Vom arăta mai departe că, în cadrul numerelor reale, oricare ar fi numărul natural  $n$ , și oricare ar fi numărul real *pozitiv*  $a$ , ecuația  $x^n = a$  are totdeauna soluție.

\* Dacă  $p$  ar fi impar,  $p = 2m + 1$ , atunci am avea  $p^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$ , adică și  $p^2$  ar fi impar.

Pe lîngă această deosebire dintre corpul numerelor *raționale*  $Q$  și corpul numerelor reale  $R$ , mai există și alte deosebiri, care pot fi considerate, toate, ca diverse aspecte sau diverse consecințe ale unei deosebiri fundamentale care va fi pusă în evidență mai departe\*.

**N**umerele reale care nu sunt raționale se numesc *numere iraționale*.

**S**e numește *număr algebric* orice număr care este soluție a unei ecuații algebrice de forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

cu coeficienții  $a_0, a_1, \dots, a_n$  numere întregi. Mulțimea numerelor algebrice este numărabilă.

Numerele reale care nu sunt algebrice se numesc *numere transcendentă*. Se demonstrează că numerele  $e$  și  $\pi$  sunt transcendentă.

### 3. Structura de ordine

Pe mulțimea numerelor reale se definește o relație de ordine „ $x < y$ ” ( $x$  este mai mic decât  $y$ ). În loc de  $x < y$  se scrie de asemenea  $y > x$  ( $y$  este mai mare decât  $x$ ). Dacă  $x$  nu este mai mic decât  $y$ , se scrie  $x \not< y$  sau  $y \not> x$ .

Relația „ $x < y$ ” este o relație de ordine *totală*; aceasta înseamnă că, oricare ar fi numerele  $x$  și  $y$ , avem una și numai una din următoarele trei posibilități: sau  $x < y$ , sau  $x = y$ , sau  $x > y$ .

a) *Proprietățile relației „ $x < y$ ”:*

- (i)  $x < x$ , oricare ar fi  $x \in R$  (este ireflexivă);
- (ii)  $x < y \Rightarrow y > x$ ;
- (iii)  $x < y$  și  $y < z \Rightarrow x < z$  (este tranzitivă);
- (iv)  $x < y \Rightarrow x + z < y + z$  (și  $x - z < y - z$ ) oricare ar fi  $z \in R$ ;  
 $x + z < y + z$  (sau  $x - z < y - z$ )  $\Rightarrow x < y$ ;
- (v)  $x < y$  și  $z > 0 \Rightarrow xz < yz$  (și  $\frac{x}{z} < \frac{y}{z}$ );  
 $z > 0$  și  $xz < yz$  (sau  $\frac{x}{z} < \frac{y}{z}$ )  $\Rightarrow x < y$ ;
- (vi)  $x < y \Rightarrow -x > -y$ ;
- (vii)  $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ .

\* Deosebirea este că  $R$  este spațiu complet (orice sir fundamental este convergent) pe cind  $Q$  nu este spațiu complet (există siruri Cauchy de numere raționale care n-au limită rațională).

Din (u) și (ui) rezultă că :

$$x < y \text{ și } z < 0 \Rightarrow xz > yz \left( \text{și } \frac{x}{z} > \frac{y}{z} \right);$$

$$z < 0 \text{ și } xz < yz \left( \text{sau } \frac{x}{z} < \frac{y}{z} \right) \Rightarrow x > y.$$

Numerele  $x > 0$  se numesc numere *strict pozitive*.

Numerele  $x < 0$  se numesc numere *strict negative*.

Orice număr natural  $n$  este strict pozitiv :  $n > 0$ .

Reținem de asemenea următoarele proprietăți\* :

**Între două numere reale diferite  $x < y$  există cel puțin un număr rațional  $r$  și cel puțin un număr irațional  $\alpha$ :**

$$x < r < y, \quad x < \alpha < y.$$

Rezultă că între două numere diferite reale există oricât de multe numere raționale și oricât de multe numere iraționale.

**Axioma lui Arhimede:** oricare ar fi numerele reale  $x > 0$  și  $y$ , există un număr natural  $n$  astfel ca  $nx > y$ .

În particular, luând  $x = 1$ , rezultă că :

**Oricare ar fi numărul real  $y$ , există un număr natural  $n > y$ .**

Dacă  $x \not> y$  ( $x$  nu este mai mare decât  $y$ ), atunci sau  $x = y$  sau  $x < y$ , ceea ce vom scrie  $x \leqslant y$  ( $x$  este mai mic sau egal cu  $y$ ).

Relația „ $x \leqslant y$ ” este echivalentă cu relația „ $x < y$  sau  $x = y$ ” și cu relația „ $x \not> y$ ”.

De exemplu,  $2 \leqslant 3$  deoarece  $2 < 3$ ;  $2 \leqslant 2$  deoarece  $2 = 2$ .

Dacă  $x \not< y$  ( $x$  nu este mai mic decât  $y$ ), atunci sau  $x = y$  sau  $x > y$ , ceea ce vom scrie  $x \geqslant y$  ( $x$  este mai mare sau egal cu  $y$ ).

Relația „ $x \geqslant y$ ” este echivalentă cu relația „ $x > y$  sau  $x = y$ ”, cu relația „ $x \not< y$ ”, și cu relația „ $y \leqslant x$ ”.

Numerele  $x \geqslant 0$  se numesc numere *pozitive*; numerele  $x \leqslant 0$  se numesc *numere negative*.

Deoarece  $x > 0 \Rightarrow x \geqslant 0$  și  $x < 0 \Rightarrow x \leqslant 0$  rezultă că orice număr strict pozitiv este un număr pozitiv, și orice număr strict negativ este un număr negativ. 0 este în același timp pozitiv și negativ, și este singurul număr cu această proprietate.

\* Într-o teorie constructivă a numerelor reale, aceste proprietăți se pot demonstra în mod riguros.

b) Proprietățile relației „ $x \leq y$ ” :

(ij)  $x \leq x$  oricare ar fi  $x \in R$  (este reflexivă) ;

(iji)  $x \leq y$  și  $y \leq x \Rightarrow x = y$  (este antisimetrică) ;

(iji)  $x \leq y$  și  $y \leq z \Rightarrow x \leq z$  (este tranzitivă) ;

(iv)  $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$  (și  $x - z \leq y - z$ ) oricare ar fi  $z \in R$  ;  
 $x + z \leq y + z$  (sau  $x - z \leq y - z \Rightarrow x \leq y$ ) ;

(v)  $x \leq y$  și  $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$ ;  $x \leq y$  și  $z > 0 \Rightarrow \frac{x}{z} \leq \frac{y}{z}$ ;

$z > 0$  și  $xz \leq yz$  (sau  $\frac{x}{z} \leq \frac{y}{z}$ )  $\Rightarrow x \leq y$  ;

(vj)  $x \leq y \Rightarrow -x \geq -y$  ;

(vjj)  $0 \leq x \leq y \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} > 0$ .

Din (v) și (vj) rezultă că

$x \leq y$  și  $z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz$ ;  $x \leq y$  și  $z < 0 \Rightarrow \frac{x}{z} \geq \frac{y}{z}$ ;

$z < 0$  și  $xz \leq yz$  (sau  $\frac{x}{z} \leq \frac{y}{z}$ )  $\Rightarrow x \geq y$ .

Din proprietățile celor două relații rezultă, încă, următoarele proprietăți :

1)  $x \leq y$  și  $y < z \Rightarrow x < z$ ;  $x < y$  și  $y \leq z \Rightarrow x < z$ ;

2)  $x \leq y$  și  $x' \leq y' \Rightarrow x + x' \leq y + y'$ ;

$x < y$  și  $x' \leq y' \Rightarrow x + x' < y + y'$

(adunarea inegalităților membru cu membru) ;

3)  $0 \leq x \leq y$  și  $0 \leq x' \leq y' \Rightarrow xx' \leq yy'$

(înmulțirea membru cu membru a inegalităților de numere pozitive)

Reținem de asemenea următoarea proprietate (care se poate demonstra riguros) :

Dacă  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt două șiruri de numere raționale care au următoarele două proprietăți

1)  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$  ;

2) pentru orice număr  $\alpha > 0$ , există un număr natural  $n$ , astfel că  $b_n - a_n \leq \alpha$ ; atunci există un număr real  $x_0$ , și numai unul astfel încât

$a_n \leq x_0 \leq b_n$  oricare ar fi  $n \in N$ .

Observație. Condiția 2) înseamnă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  (v. cap. III).

Fie  $n$  numere reale  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Cel mai mare (maximul) dintre aceste numere se notează

$$\max \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ sau } \sup \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

iar cel mai mic (minimul) dintre aceste numere se notează

$$\min \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ sau } \inf \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Mai departe, aceste numere vor fi interpretate ca margini ale mulțimii  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

#### 4. Modulul

Modulul  $|x|$  al unei numărături  $x$  se definește astfel :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \text{ sau } |x| = \begin{cases} x & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x & \text{dacă } x \leq 0 \end{cases} \\ -x & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

sau încă,  $|x| = \max \{x, -x\}$ .

Proprietățile modulului sunt următoarele :

$$1) |x| \geq 0; \quad |x| > 0 \text{ dacă și numai dacă } x \neq 0;$$

$$2) |-x| = |x|;$$

$$3) |x + y| \leq |x| + |y|; \quad |x - y| \leq |x| + |y|;$$

$$4) ||x| - |y|| \leq |x - y|; \quad ||x| - |y|| \leq |x + y|;$$

$$5) |xy| = |x| \cdot |y|; \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0;$$

$$6) |x| < \varepsilon \text{ dacă și numai dacă } -\varepsilon < x < \varepsilon;$$

$$|x| \leq \varepsilon \text{ dacă și numai dacă } -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon.$$

Dacă  $r$  este număr rațional, atunci  $|r|$  este de asemenea rațional; dacă  $p$  este întreg, atunci și  $|p|$  este întreg.

Se folosesc următoarele notații

$$x^+ = \sup(x, 0) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } x \leq 0 \end{cases} \quad x^- = \sup(-x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x \leq 0 \end{cases}$$

$x^+$  se numește partea pozitivă a numărului  $x$ , iar  $x^-$  se numește partea negativă a numărului  $x$ . Se verifică fără dificultate egalitățile

$$x = x^+ - x^- \quad x^+ = \frac{1}{2}(|x| + x)$$

și

$$|x| = x^+ + x^- \quad x^- = \frac{1}{2}(|x| - x).$$

De asemenea, avem

$$\sup(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

$$\inf(x, y) = -\sup(-x, -y)$$

## 5. Reprezentarea numerelor reale

prin puncte pe o dreaptă

Fiind dată o dreaptă  $d$  pe care s-a ales o origine  $O$ , un sens de parcursere pozitiv și o unitate de lungime, se stabilește o corespondență biunivocă între multimea numerelor reale și multimea punctelor de pe dreaptă.

Numerul  $x$  care corespunde unui punct  $P$  se numește *abscisa* lui  $P$ .

Corespondența stabilită păstrează ordinea, adică dacă  $x < y$  și  $y$  sint abscisele a două puncte  $P$  și  $Q$ , avem  $x < y$  dacă și numai dacă  $P$  se află la stînga lui  $Q$  (adică sensul de la  $P$  la  $Q$  este pozitiv).

Dacă  $P$  și  $Q$  sunt două puncte de abscise, respectiv  $x$  și  $y$ , numărul  $|x - y|$  se numește *distanță* dintre  $P$  și  $Q$ .

Numărul  $|x|$  reprezintă distanța dintre  $P$  și originea  $O$ .

În cele ce urmează numerele vor fi adesea identificate cu punctele ce le corespund.

## 6. Reprezentarea perechilor de numere

prin puncte din plan

Fiind date două drepte perpendiculare  $Ox$  și  $Oy$ , pe care s-a ales aceeași origine  $O$ , aceeași unitate de lungime și cîte un sens pozitiv, se stabilește o corespondență biunivoce între punctele  $P$  din plan și perechile ordonate  $(x, y)$  de numere reale. Numerele

$x$  și  $y$  se numesc *coordonatele* punctului  $P$ ;  $x$  este abscisa lui  $P$ , iar  $y$  este ordonata lui  $P$  (fig. 18).

Datorită acestei corespondențe biunivoce se identifică un punct  $P$  cu perechea coordonatelor sale  $(x, y)$ .

În loc de „punctul  $P$ ” vom spune adesea „punctul  $(x, y)$ ”.

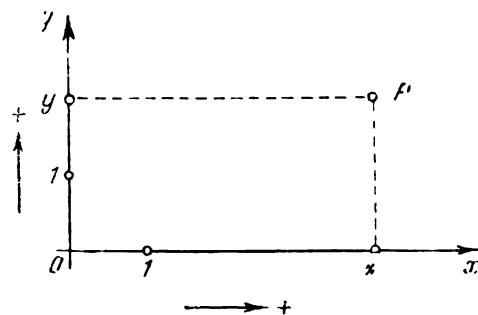


Fig. 18

## 7. Intervale

Fie  $a \leq b$  două numere reale oarecare.

1) Multimea tuturor punctelor  $x$  care verifică inegalitățile  $a < x < b$  se numește *interval deschis* (fig. 19) și se notează  $(a, b)$ :

$$(a, b) = \{x | x \in R, a < x < b\}.$$

2) Multimea tuturor punctelor  $x$  care verifică inegalitățile  $a \leq x \leq b$  se numește *interval închis sau segment* (fig. 20) și se notează  $[a, b]$ :

$$[a, b] = \{x | x \in R, a \leq x \leq b\}.$$

## 3) Multimea

$$[a, b) = \{x | x \in R, a \leq x < b\}$$

se numește interval închis la stînga și deschis la dreapta (fig. 21).

## 4) Multimea

$$](a, b] = \{x | x \in R, a < x \leq b\}$$

se numește interval deschis la stînga și închis la dreapta (fig. 22).

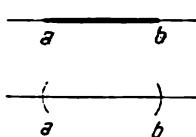


Fig. 19

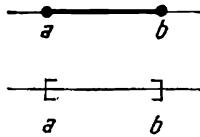


Fig. 20

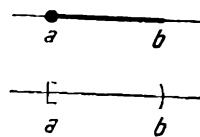


Fig. 21

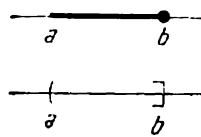


Fig. 22

Intervalele definite mai sus se numesc *intervale mărginite*;  $a$  și  $b$  se numesc *extremitățile* intervalului:  $a$  este extremitatea stîngă, iar  $b$  este extremitatea dreaptă.

Avem  $(a, b) \subset [a, b] \subset [a, b]$  și  $(a, b) \subset (a, b) \subset [a, b]$ .

Dacă  $a = b$  atunci  $[a, a] = \{a\}$  și  $(a, a) = (a, a) = [a, a] = \emptyset$ .

Intervalele închise  $[a, b]$  se mai numesc *intervale compacte*.

5) Multimea  $\{x | x \in R, x > a\}$  se numește *semidreaptă deschisă nemărginită la dreapta* (fig. 23) și se notează  $(a, +\infty)$ .

6) Multimea  $\{x | x \in R, x \geq a\}$  se numește *semidreaptă închisă nemărginită la dreapta* (fig. 24) și se notează  $[a, +\infty)$ .

7) Multimea  $\{x | x \in R, x < a\}$  se numește *semidreaptă deschisă nemărginită la stînga* (fig. 25) și se notează  $(-\infty, a)$ .

8) Multimea  $\{x | x \in R, x \leq a\}$  se numește *semidreaptă închisă nemărginită la stînga* (fig. 26) și se notează  $(-\infty, a]$ .

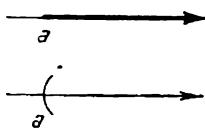


Fig. 23

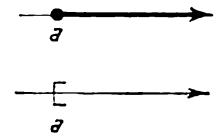


Fig. 24

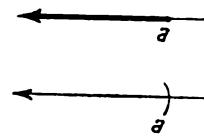


Fig. 25

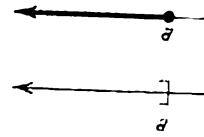


Fig. 26

Punctul  $a$  se numește extremitatea semidreptelor.

Dreapta întreagă  $R$  se mai notează  $(-\infty, +\infty)$ .

Semidreptele și dreapta întreagă  $R$  se numesc *intervale nemărginute*.

Mai departe (cap. IV) vor fi justificate simbolurile  $-\infty$  și  $+\infty$  care apar în notația intervalelor nemărginute.

## § 2. Puteri întregi

### 1. Puteri naturale

Fie  $a$  un număr *real* și  $n$  un număr *natural*. Vom scrie:

$$a^1 = a \text{ și } a^n = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n \text{ ori}} \text{ dacă } n > 1.$$

Numărul  $a^n$  se numește *putere*: numărul  $a$  se numește *baza* puterii, iar numărul  $n$  se numește *exponentul* puterii. Avem:  $1^n = 1$ , și  $0^n = 0$  oricare ar fi  $n \in N$ . Dacă  $a^n = 0$  atunci  $a = 0$ ; dacă  $a > 0$  atunci  $a^n > 0$  oricare ar fi  $n \in N$ .

Puterile cu exponent natural se numesc *puteri naturale*.

Proprietățile puterilor naturale sunt următoarele:

$$1) a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$2) (a^n)^m = a^{nm}.$$

$$3) (ab)^n = a^n b^n; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; b \neq 0.$$

$$4) \text{ Dacă } a > 1 \text{ atunci } a^n > 1, \text{ oricare ar fi } n \in N.$$

$$\text{Dacă } 0 < a < 1 \text{ atunci } 0 < a^n < 1, \text{ oricare ar fi } n \in N.$$

Primele trei proprietăți se verifică imediat, plecind de la definiția puterii.

Proprietatea 4) se demonstrează prin recurență:

Înmulțind în inegalitatea  $a > 1$  cu  $a$  (care este strict pozitiv), obținem  $a^2 > a$ , deci  $a^2 > 1$ .

Presupunând acum inegalitatea  $a^n > 1$  adevărată și înmulțind cu  $a$ , obținem  $a^{n+1} > a$ , deci  $a^{n+1} > 1$ . Conform principiului inducției complete rezultă că inegalitatea  $a^n > 1$  este verificată pentru orice  $n \in N$ , dacă  $a > 1$ .

Dacă  $0 < a < 1$ , atunci  $\frac{1}{a} > 1$  și deci  $\left(\frac{1}{a}\right)^n > 1$ , adică  $\frac{1}{a^n} > 1$  sau  $a^n < 1$ , oricare ar fi  $n \in N$ .

Din proprietățile de mai sus se deduc încă următoarele proprietăți:

$$5) \text{ Dacă } 0 < a < b \text{ atunci } a^n < b^n, \text{ oricare ar fi } n \in N.$$

$$6) \text{ Dacă } n < m \text{ atunci: } a^n < a^m \text{ pentru } a > 1,$$

$$a^n > a^m \text{ pentru } 0 < a < 1.$$

Într-adevăr, din  $0 < a < b$  rezultă  $\frac{b}{a} > 1$ , deci  $\left(\frac{b}{a}\right)^n > 1$  sau  $\frac{b^n}{a^n} > 1$ , adică  $b^n > a^n$  sau  $a^n < b^n$ , oricare ar fi  $n \in N$ , ceea ce demonstrează proprietatea 5).

În cazul cînd  $a > 1$ , avem  $a^{m-n} > 1$  (deoarece  $m - n$  este natural) și înmulțind cu  $a^n$  (care este strict pozitiv) obținem  $a^n \cdot a^{m-n} > a^n$  sau  $a^m > a^n$ , adică  $a^n < a^m$ .

Dacă însă  $0 < a < 1$ , atunci  $a^{m-n} < 1$ , și înmulțind cu  $a^n$  obținem  $a^n \cdot a^{m-n} < a^n$ , sau  $a^m < a^n$  adică  $a^n > a^m$ . Astfel, proprietatea 6) este de asemenea demonstrată.

## 2. Puteri întregi

Dacă  $a \neq 0$  se definește

$$a^0 = 1 \text{ și } a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ oricare ar fi } n \in N.$$

Puterile lui 0 cu exponent negativ nu se definesc. Spunem că  $0^0$  și  $0^{-n}$ ,  $n \in N$ , nu au sens.

În acest fel am definit puterile  $a^p$  ale unui număr  $a$  diferit de 0, cu orice exponent întreg  $p$ .

Puterile cu exponent întreg se numesc *puteri întregi*.

*Proprietățile puterilor întregi sunt următoarele* (ori de câte ori exponentul este  $\leq 0$ , baza va fi presupusă *diferită de 0*) :

$$1) a^p \cdot a^q = a^{p+q}; \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}.$$

$$2) (a^p)^q = a^{pq}.$$

$$3) (ab)^p = a^p b^p; \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

$$4) a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

$$5) \text{ Dacă } a > 1 \text{ atunci: } a^p > 1 \text{ dacă } p > 0. \\ a^p < 1 \text{ dacă } p < 0.$$

$$\text{Dacă } 0 < a < 1 \text{ atunci: } a^p < 1 \text{ dacă } p > 0. \\ a^p > 1 \text{ dacă } p < 0.$$

Primele patru proprietăți se deduc imediat din definiția puterilor întregi și din proprietățile corespunzătoare ale puterilor naturale.

Dacă  $p > 0$ ,  $p$  este natural și în acest caz proprietatea 5) este adevărată, ca o proprietate a puterilor naturale. Dacă  $p < 0$ , atunci  $-p$  este natural ; proprietatea 5) rezultă în acest caz din 4).

## 3. Inegalitatea lui Bernoulli

Oricare ar fi  $a \geq -1$  și  $n$  natural avem:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Pentru  $n = 1$  avem  $(1 + a)^1 = 1 + a = 1 + 1 \cdot a$ , deci inegalitatea este verificată cu egalitate.

Să presupunem acum inegalitatea verificată pentru  $n = p$ :

$$(1 + a)^p \geq 1 + pa$$

și să demonstrăm pentru  $n = p + 1$ .

Deoarece  $1 + a \geq 0$ , înmulțind cu  $1 + a$  în inegalitatea precedență obținem

$$(1 + a)^p(1 + a) \geq (1 + pa)(1 + a)$$

sau

$$(1 + a)^{p+1} \geq 1 + pa + a + pa^2 = 1 + (1 + p)a + pa^2 \geq 1 + (1 + p)a$$

(deoarece  $pa^2 > 0$ ).

Conform principiului inducției complete, inegalitatea este adevărată pentru orice  $n \in N$ .

Inegalitatea demonstrată se numește inegalitatea lui Bernoulli.

**Aplicații.** 1) Dacă  $a \geq 2$ , atunci  $a^n \geq n + 1$ , oricare ar fi  $n \in N$ .

Într-adevăr, să notăm  $A = a - 1$ ; deci  $A \geq 1$  și  $a = A + 1$ . Atunci :

$$a^n = (1 + A)^n \geq 1 + nA \geq 1 + n.$$

În particular,  $2^n \geq n + 1$ ,  $10^n \geq n + 1$ , oricare ar fi  $n \in N$ .

2) Dacă  $a > 1$ , pentru fiecare număr real  $\alpha$ , există un număr natural  $n$  astfel ca  $a^n > \alpha$ .

Să notăm  $A = a - 1$ , deci  $A > 0$  și  $a = 1 + A$ .

Există un număr natural  $n > \frac{\alpha}{A}$ , adică astfel ca  $nA > \alpha$  (deoarece  $A > 0$ ). Atunci, pentru numărul natural  $n$  obținut avem :

$$a^n = (1 + A)^n \geq 1 + nA > 1 + \alpha > \alpha.$$

Rezultă că dacă  $a > 1$ , atunci  $\frac{1}{a^n}$  poate fi făcut oricăr de mic dacă se ia  $n$  suficient de mare. Într-adevăr, fie  $\epsilon > 0$  un număr arbitrar; să notăm  $\alpha = \frac{1}{\epsilon}$ ; există atunci un număr  $n$  astfel ca  $a^n > \alpha$ , deci  $\frac{1}{a^n} < \frac{1}{\alpha} = \epsilon$ .

Să observăm că pentru orice număr  $n' > n$  avem  $a^{n'} > a^n$ , deci  $\frac{1}{a^{n'}} < \frac{1}{a^n}$  și deci  $\frac{1}{a^{n'}} < \epsilon$ .

Rezultă, de asemenea, că dacă  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt două şiruri de numere rationale care au următoarele două proprietăți :

$$1) \quad a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1;$$

2) există un număr  $l > 0$  astfel ca  $b_n - a_n \leq \frac{l}{2^n}$  pentru orice  $n \in N$ , atunci există un număr unic  $x_0$  astfel ca  $a_n \leq x_0 \leq b_n$  pentru orice  $n \in N$ .

Într-adevăr, dacă se dă  $\alpha > 0$ , există un  $n$  astfel ca  $\frac{l}{2^n} < \alpha$  și deci  $b_n - a_n \leq \alpha$  și afirmația rezultă atunci dintr-o proprietate anterioară a numerelor reale.

### § 3. Multimi mărginite

#### 1. Multimi majorate. Multimi minorate.

##### Multimi mărginite

Fie  $A$  o multime de numere reale.

Se spune că  $A$  este majorată (sau mărginită superior) dacă există un punct  $b$  la dreapta căruia nu se mai află nici un punct din  $A$ , adică astfel încât  $x \leq b$  pentru orice  $x \in A$ . Numărul  $b$  se numește majorant al mulțimii  $A$ .

Dacă  $b$  este un majorant al lui  $A$  și dacă  $b < b'$ , atunci și  $b'$  este un majorant al lui  $A$ .

Se spune că mulțimea  $A$  este minorată (sau mărginită inferior) dacă există un punct  $a$  la stînga căruia nu se mai află nici un punct din  $A$ , adică astfel încât  $a \leq x$  pentru orice  $x \in A$ . Numărul  $a$  se numește minorant al mulțimii  $A$ .

Dacă  $a$  este un minorant al lui  $A$  și  $a' < a$  atunci și  $a'$  este un minorant al lui  $A$ .

Se spune că mulțimea  $A$  este mărginită dacă este și majorată și minorată, adică dacă există două numere  $a$  și  $b$  astfel încât  $a \leq x \leq b$  pentru orice  $x \in A$ .

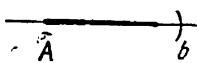


Fig. 27

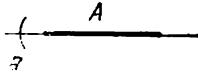


Fig. 28

Observații. În limbajul geometric se spune că  $A$  este majorată înseamnă că există o semidreaptă nemărginită la stînga, care conține pe  $A$  (fig. 27). De asemenea  $A$  este minorată dacă există o semidreaptă nemărginită la dreapta, care conține pe  $A$  (fig. 28).  $A$  este mărginită dacă există un interval mărginit (închis sau nu) care conține pe  $A$ .

**Propozitie.** O mulțime  $A$  este mărginită dacă și numai dacă există un număr  $M > 0$  astfel ca  $|x| \leq M$  pentru orice  $x \in A$ .

Dacă există  $M > 0$  astfel ca  $|x| \leq M$  pentru orice  $x \in A$ , atunci  $-M \leq x \leq M$  pentru orice  $x \in A$ , adică  $A$  este conținută în intervalul mărginit  $[-M, M]$  și deci  $A$  este mărginită. Reciproc, dacă  $A$  este mărginită există un interval mărginit  $(a, b)$  care o conține:  $a \leq x \leq b$  pentru orice  $x \in A$ . Să punem  $M = \max(|a|, |b|)$ . Atunci  $b \leq |b| \leq M$  și  $-a \leq |a| \leq M$  deci  $-M \leq -|a| \leq a$ , adică  $-M \leq a \leq b \leq M$ , de unde  $-M \leq x \leq M$  sau  $|x| \leq M$  pentru orice  $x \in A$ .

*Exemplu.* I) Mulțimea  $\{\dots, -n, \dots, -2, -1\}$  este majorată dar nu este minorată, deci nu este mărginită. Orice număr  $b \geq -1$  este un majorant al ei. Numărul  $-1$  este de asemenea un majorant și anume cel mai mic majorant, și face parte din mulțime.

II) Mulțimea  $\{1, 2, \dots, 4, \dots\}$  este minorată dar nu este majorată, deci nu este mărginită; orice număr  $a \leq 1$  este minorant al său. Numărul  $1$  este cel mai mare minorant și face parte din mulțime.

3) Un interval  $(a, b)$  este o mulțime majorată și minorată, deci este mărginită. Orice număr  $a' \leq a$  este un minorant și orice număr  $b' \geq b$  este un majorant;  $a$  este cel mai mare minorant, iar  $b$  este cel mai mic majorant;  $a$  și  $b$  nu fac parte din mulțime.

4) Orice mulțime finită  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  este mărginită. Cel mai mic din aceste numere este un minorant, iar cel mai mare din aceste numere este un majorant al mulțimii.

## 2. Marginile unei mulțimi

**D e f i n i t i e.** Un număr  $m$  se numește margine inferioară a unei mulțimi  $A$  dacă este cel mai mare minorant al mulțimii  $A$ . Se notează :

$$m = \inf A = \inf_{x \in A} x$$

(se citește „infimum” sau „inferior”).

Un număr  $M$  se numește margine superioară a unei mulțimi  $A$  dacă este cel mai mic majorant al mulțimii  $A$ . Se notează :

$$M = \sup A = \sup_{x \in A} x$$

(se citește „supremum” sau „superior”).

Marginile unei mulțimi, dacă există, sunt *unice*. Existența marginilor este asigurată de următoarea :

**T e o r e m ă.** Orice mulțime nevidă minorată are margine inferioară și orice mulțime nevidă majorată are margine superioară.

Vom face demonstrația în cazul unei mulțimi majorate  $A$ .

Fie  $a$  nu număr care nu este majorant al lui  $A$ , și  $b$  un majorant al lui  $A$ ; există deci cel puțin un punct  $x \in A$  astfel ca :

$$a \leq x \leq b \text{ și } b - a = l > 0$$

(punctele  $a$  și  $b$  nu aparțin neapărat lui  $A$ ). În plus, putem alege numerele  $a$  și  $b$  raționale, deci  $l$  este de asemenea rațional. (În caz contrar alegem un număr rațional  $a' < a$  și un număr rațional  $b' > b$  și  $b'$  este majorant, iar  $a'$  nu este majorant al lui  $A$ .)

Să împărțim segmentul  $[a, b]$  în două părți egale. Una din aceste părți are proprietatea că extremitatea stângă nu este majorant, iar extremitatea dreaptă este majorant al lui  $A$ ; să notăm cu  $[a_1, b_1]$  partea care are această proprietate. Numerele  $a_1$  și  $b_1$  sunt raționale, există cel puțin un punct  $x \in A$  astfel ca  $a_1 \leq x \leq b_1$ , iar  $b_1 - a_1 = \frac{l}{2}$ .

Să presupunem că am găsit două numere raționale  $a_n$  și  $b_n$  astfel ca  $a_n$  să nu fie majorant al lui  $A$ , iar  $b_n$  să fie majorant al lui  $A$ , și  $b_n - a_n = \frac{l}{2^n}$ .

Să împărțim segmentul  $[a_n, b_n]$  în două părți egale și să notăm cu  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  partea pentru care extremitatea stângă  $a_{n+1}$  nu este majorant

al lui  $A$ , iar extremitatea dreaptă  $b_{n+1}$  este majorant al lui  $A$ . Numerele  $a_{n+1}$  și  $b_{n+1}$  sunt raționale,

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \text{ și } b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{l}{2^{n+1}}.$$

Am demonstrat astfel, prin recurență, că putem găsi două siruri  $(a_n)$  și  $(b_n)$  de numere *raționale*, cu următoarele proprietăți:

$$1) \quad a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1,$$

$$2) \quad b_n - a_n = \frac{l}{2^n} \text{ pentru oricare } n \in N.$$

3) Nici un număr  $a_n$  nu este majorant al lui  $A$  și orice număr  $b_n$  este majorant al lui  $A$ .

Din proprietățile 1) și 2) rezultă că există un număr real  $\alpha$  și unul singur astfel încât

$$a_n \leq \alpha \leq b_n \text{ pentru orice } n \in N.$$

Să arătăm că  $\alpha$  este cel mai mic majorant al mulțimii  $A$ .

1)  $\alpha$  este majorant al lui  $A$ , adică  $x \leq \alpha$  oricare ar fi  $x \in A$ . Într-adevăr, să presupunem, prin absurd, că ar exista un punct  $x_0 \in A$  cu  $\alpha < x_0$ . Putem alege pe  $n$  suficient de mare astfel ca  $\frac{l}{2^n} < x_0 - \alpha$ ; atunci  $b_n - a_n < x_0 - \alpha$ , deci  $b_n < a_n - \alpha + x_0$  și fiindcă  $a_n - \alpha \leq 0$ , rezultă  $b_n < x_0$ , ceea ce contrazice faptul că  $b_n$  este majorant al lui  $A$ , conform proprietății 3).

2)  $\alpha$  este cel mai mic majorant al lui  $A$ . Într-adevăr, să presupunem că ar exista un majorant  $\alpha' < \alpha$  al lui  $A$ . Putem alege pe  $n$  suficient de mare astfel ca  $\frac{l}{2^n} < \alpha - \alpha'$  și atunci  $b_n - a_n < \alpha - \alpha'$ , de unde  $-a_n < \alpha - b_n - \alpha'$  și fiindcă  $\alpha - b_n \leq 0$ , rezultă  $-a_n < -\alpha'$  sau  $\alpha' < a_n$ . Deoarece  $\alpha'$  este majorant al lui  $A$ , deducem că și  $a_n$  este majorant al lui  $A$ , ceea ce este în contradicție cu proprietatea 3).

Urmează că  $\alpha$  este cel mai mic majorant al lui  $A$ , adică este marginea superioară a lui  $A$ .

Se demonstrează în mod analog existența marginii inferioare a unei multimi minorate.

**C o r o l a r.** Orice mulțime mărginită are margine inferioară și margine superioară.

Într-adevăr, o mulțime mărginită este și minorată și majorată.

Din definiția marginilor unei multimi, deducem că:

Un număr  $m$  este *marginea inferioară* a unei multimi  $A$ , dacă și numai dacă verifică următoarele două condiții:

1)  $m \leq x$  pentru orice  $x \in A$  ( $m$  este minorant al lui  $A$ );

2) oricare ar fi  $\alpha > m$ , există cel puțin un punct  $x \in A$  astfel încât  $x < \alpha$  (fig. 29), (nici un număr  $\alpha > m$  nu este minorant al lui  $A$ , adică  $m$  este cel mai mare minorant).

De asemenea, un număr  $M$  este *marginea superioară* a unei mulțimi  $A$  dacă și numai dacă verifică următoarele două condiții:

1)  $x \leq M$  pentru orice  $x \in A$ , ( $M$  este majorant al lui  $A$ );

2) oricare ar fi  $\alpha < M$ , există cel puțin un punct  $x \in A$  astfel încât  $\alpha < x$  (fig. 30) (nici un număr  $\alpha < M$  nu este majorant al lui  $A$ , adică  $M$  este cel mai mic majorant al lui  $A$ ).



Fig. 29

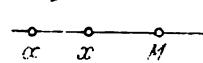


Fig. 30

Dacă  $A$  este mărginită, atunci  $\inf A \leq x \leq \sup A$ , pentru orice  $x \in A$ .

Avem  $\inf A = \sup A$  dacă și numai dacă mulțimea  $A$  este formată dintr-un singur punct.

Marginile unei mulțimi pot să aparțină sau să nu aparțină mulțimii.

*Exemplu.*  $\sup \{-\dots, -n, \dots, -2, -1\} = -1$ ;  $\inf \{1, 2, \dots, n, \dots\} = 1$ ;  $\inf \{0, 1\} = 0$  și  $\sup \{0, 1\} = 1$ , dar  $0 \notin \{0, 1\}$  și  $1 \notin \{0, 1\}$ ;  $\inf [0, 1] = 0$  și  $0 \in [0, 1]$ ,  $\sup [0, 1] = 1$  și  $1 \notin [0, 1]$ .

Dacă  $A$  posedă un cel mai mic număr  $m$ , atunci

$$m = \inf A = \min A \in A.$$

Dacă  $A$  posedă un cel mai mare număr  $M$ , atunci

$$M = \sup A = \max A \in A.$$

## § 4. Structura topologică pe dreaptă

### 1. Vecinătățile unui punct de dreaptă

Fie  $x_0$  un punct pe dreaptă. Vom numi *vecinătate* a lui  $x_0$  orice mulțime  $V$  care conține un interval deschis  $(a, b)$  care conține pe  $x_0$ , adică astfel încât  $x_0 \in (a, b) \subset V$ . În particular, orice interval deschis  $(a, b)$  care conține pe  $x_0$ , adică astfel ca  $a < x_0 < b$ , este o vecinătate a lui  $x_0$  (fig. 31).

Vecinătățile de forma

$$(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$$

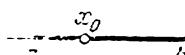


Fig. 31

cu  $\alpha > 0$  se numesc *vecinătăți simetrice ale lui  $x_0$*  (fig. 32).

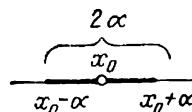


Fig. 32

Orice vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  conține o vecinătate simetrică a lui  $x_0$ .

Într-adevăr, fie  $(a, b)$  un interval deschis astfel ca  $x_0 \in (a, b) \subset V$ . Deoarece  $a < x_0 < b$ , avem  $\alpha = \min(x_0 - a, b - x_0) > 0$  și  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \subset (a, b) \subset V$ .

Datorită acestei observații, va fi suficient, mai departe, să considerăm numai vecinătățile de forma  $(a, b)$  sau vecinătățile simetrice ale unui punct.

Vecinătățile punctului  $x_0$  au următoarele proprietăți:

- 1) Orice mulțime  $U$  care conține o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  este de asemenea o vecinătate a lui  $x_0$ .
- 2) Intersecția a două vecinătăți ale lui  $x_0$  este de asemenea o vecinătate a lui  $x_0$  (fig. 33).
- 3) Orice vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  conține pe  $x_0$ .
- 4) Pentru orice vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  există o vecinătate  $W = (a, b)$  a lui  $x_0$ , astfel încât  $V$  este vecinătatea fiecărui punct  $y \in W$ .

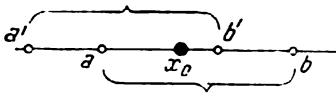


Fig. 33

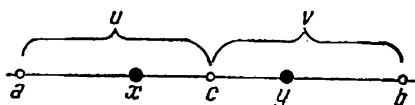


Fig. 34

Prin alegerea vecinătăților fiecărui punct de pe dreapta, am definit pe dreapta o *structură topologică* sau o *topologie\**. Cu această topologie, dreapta  $R$  este un *spațiu topologic* numit *dreapta reală*.

**Propozitie.** Oricare ar fi punctele  $x \neq y$ , există o vecinătate  $U$  a lui  $x$  și o vecinătate  $V$  a lui  $y$ , fără puncte comune:  $U \cap V = \emptyset$ .

Să presupunem  $x < y$ ; există un număr  $c$  astfel ca  $x < c < y$  (fig. 34); luând  $a < x$  și  $b > y$ ,  $U = (a, c)$  este o vecinătate a lui  $x$ ,  $V = (c, b)$  este o vecinătate a lui  $y$  și  $U \cap V = \emptyset$ .

Proprietatea enunțată în această propoziție se exprimă spunând că dreapta reală este un spațiu *separat*.

## 2. Puncte interioare. Multimi deschise

Fie  $A$  o mulțime de numere.

Un punct  $x_0$  din  $A$  este punct interior al mulțimii  $A$  dacă există o vecinătate  $(a, b)$  a lui  $x_0$ , conținută în mulțimea  $A$ , adică astfel ca

$$x_0 \in (a, b) \subset A.$$

A spune că  $x_0$  este punct interior al lui  $A$  înseamnă deci că  $A$  este o vecinătate a lui  $x_0$ . Mulțimea punctelor interioare ale mulțimii  $A$  se numește

\* Fie  $E$  o mulțime. Dacă pentru fiecare element  $x \in E$  s-a ales o mulțime de părți  $\wp(x)$ , numite *vecinătăți* ale lui  $x$ , care îndeplinesc cele patru condiții din text, se zice că s-a definit pe mulțimea  $E$  o *structură topologică* sau o *topologie*.

O mulțime  $E$  pe care s-a definit o structură topologică se numește *spațiu topologic*, iar elementele sale se numesc *puncte*.

O mulțime de vecinătăți ale lui  $x$  se numește *sistem fundamental de vecinătăți ale lui  $x$* , dacă fiecare vecinătate a lui  $x$  conține o vecinătate din sistemul fundamental.

Intervalele  $(a, b)$  care conțin un punct  $x$  de pe dreapta formează un sistem fundamental de vecinătăți ale lui  $x$ . De asemenea, vecinătățile simetrice ale lui  $x$ , de forma  $(x - \alpha, x + \alpha)$ , sau de forma  $[x - \alpha, x + \alpha]$  formează un sistem fundamental de vecinătăți ale lui  $x$ .

interiorul lui  $A$  și se notează  $\text{Int } A$  sau  $\mathring{A}$ . Evident, interiorul lui  $A$  este conținut în  $A$ :

$$\mathring{A} \subset A.$$

Interiorul mulțimii vide este tot mulțimea vidă.

Mulțimea  $A$  se numește *mulțime deschisă* dacă este egală cu interiorul său:  $A = \mathring{A}$ , adică dacă toate punctele sale îi sunt interioare, sau, ceea ce este același lucru, dacă  $A$  este o vecinătate a fiecărui punct al ei. A spune că  $x_0$  nu este punct interior lui  $A$ , înseamnă că nici o vecinătate a lui  $x_0$  nu este complet conținută în  $A$ .

Spunem că un punct  $y_0 \in R$  este *punct exterior* lui  $A$ , dacă  $y_0$  este punct interior al complementarei lui  $A$ , adică dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $y_0$  cu  $V \subset \complement A$ , sau, ceea ce este același lucru, cu  $V \cap A = \emptyset$ .

*Exemplu.* 1) Mulțimea vidă  $\emptyset$  este deschisă, deoarece  $\text{Int } \emptyset = \emptyset$ .

2) Dreapta întreagă  $R$  este deschisă. În adevăr, orice punct  $x_0 \in R$  este punct interior al lui  $R$ , deoarece, luând o vecinătate  $(a, b)$  a lui  $x_0$ , avem evident

$$x_0 \in (a, b) \subset R.$$

3) Un interval deschis  $(a, b)$  este o mulțime deschisă, deoarece orice punct  $x_0 \in (a, b)$  este punct interior al intervalului. În adevăr, luând ca vecinătate a lui  $x_0$  chiar intervalul  $(a, b)$ , avem:

$$x_0 \in (a, b) \subset (a, b).$$

4) Orice semidreaptă deschisă (nemărginită la dreapta sau la stînga) este o mulțime deschisă.

5) Un interval de forma  $[a, b]$  cu  $a < b$  nu este o mulțime deschisă, deoarece punctul  $a$  nu este punct interior al intervalului.

Într-adevăr, oricare ar fi vecinătatea  $(\alpha, \beta)$  a lui  $a$ , avem  $\alpha < a < \beta$ , deci  $(\alpha, \beta)$  nu este conținută în  $[a, b]$ .

6) Intervalele  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  cu  $a < b$  și semidreptele închise nu sunt mulțimi deschise

7) O mulțime  $\{a\}$  formată dintr-un singur punct nu este deschisă.

**Proprietățile mulțimilor deschise** sunt următoarele:

1) Reuniunea unei familii *oarecare* de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

2) Intersecția unei familii *finite* de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

3)  $R$  și  $\emptyset$  sunt mulțimi deschise.

### Demonstrație

1) Fie  $(A_i)_{i \in I}$  o familie *oarecare* de mulțimi deschise și  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ . Fie  $x_0 \in A$ ; există o mulțime  $A_i$  din familie care conține pe  $x_0$ ; dar  $A_i$  este deschisă, deci există o vecinătate  $(a, b)$  a lui  $x_0$  astfel ca

$$x_0 \in (a, b) \subset A_i$$

și cum  $A_i \subset A$ , avem

$$x_0 \in (a, b) \subset A,$$

adică  $x_0$  este punct interior al lui  $A$ . Cum  $x_0$  a fost ales arbitrar în  $A$ , rezultă că orice punct  $x \in A$  este punct interior al lui  $A$ , deci  $A$  este deschisă.

2) Fie  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  o familie finită de multimiile deschise și  $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$ . Fie  $x_0 \in A$ ; atunci  $x_0 \in A_1$ ,  $x_0 \in A_2$ , ...,  $x_0 \in A_n$ . Dar multimiile  $A_i$  sunt deschise, deci  $x_0$  este punct interior al fiecareia; există deci intervalele deschise  $(a_1, b_1)$ , ...,  $(a_n, b_n)$  astfel ca:

$$x_0 \in (a_1, b_1) \subset A_1, \quad x_0 \in (a_2, b_2) \subset A_2, \quad \dots, \quad x_0 \in (a_n, b_n) \subset A_n.$$

Să notăm  $a = \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$  și  $b = \min(b_1, b_2, \dots, b_n)$ . Atunci  $a < x_0 < b$  deci  $(a, b)$  este o vecinătate a lui  $x_0$  și este conținută în toate intervalele  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$ , ...,  $(a_n, b_n)$ , deci cu atât mai mult în toate multimiile  $A_1$ ,  $A_2$ , ...,  $A_n$ , și deci și în intersecția lor  $A$ :

$$x_0 \in (a, b) \subset A.$$

Așadar  $x_0$  este punct interior al lui  $A$ . Cum  $x_0$  a fost ales arbitrar în  $A$ , rezultă că orice punct  $x \in A$  este punct interior al lui  $A$ , deci  $A$  este deschisă.

**Observații.** 1° Intersecția unei familiilor infinite de multimiile deschise nu este totdeauna deschisă.

De exemplu, multimiile  $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  sunt deschise, dar intersecția lor  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$  nu este deschisă.

2° Se poate demonstra că orice mulțime deschisă pe dreapta se poate pune în mod unic sub forma reuniunii unei familiilor cel mult numărabile de intervale deschise disjuncte două cîte două.

În adevară, fie  $G$  o mulțime deschisă de puncte ale dreptei  $R$  și  $x_0 \in G$ . Prin definiție, există un interval  $(a', b') \subset G$  care conține punctul  $x_0$ . Dacă oricare ar fi  $b' > x_0$ , avem  $(x_0, b') \subset G$ , atunci  $(x_0, \infty) \subset G$ . În caz contrar, mulțimea punctelor  $b'$  pentru care  $(x_0, b') \subset G$  este majorată. Vom nota cu  $b_0$  marginea superioară a acestei mulțimi. Dacă oricare ar fi  $a' < x_0$ , avem  $(a', x_0) \subset G$ , atunci  $(-\infty, x_0) \subset G$ . În caz contrar, mulțimea punctelor  $a'$  pentru care  $(a', x_0) \subset G$  este minorată. Fie  $a_0$  marginea inferioară a acestei mulțimi.

Fiecarui punct  $x_0 \in G$  îl se poate atașa în acest mod un interval  $(a_0, b_0) \subset G$  care conține punctul  $x_0$ , astfel încît orice interval  $(a, b) \supset (a_0, b_0)$ , nu mai este inclus în  $G$ .

Dacă există un punct  $x_1 \in G$  astfel încît  $x_1 \notin (a_0, b_0)$ , atunci, raționând ca mai sus, găsim un interval maxim  $(a_1, b_1) \subset G$ , care conține punctul  $x_1$ .

Evident  $(a_0, b_0) \cap (a_1, b_1) = \emptyset$ .

Astfel, o mulțime deschisă  $G \subset R$  este o reuniune de intervale disjuncte două cîte două.

Rămîne să arătăm că mulțimea  $A$  a acestor intervale este cel mult numărabilă.

Într-adevăr, mulțimea  $A_1$  a intervalelor din  $A$ , care au lungimea  $\geq 1$ , este cel mult numărabilă (eventual vidă). Pentru fiecare număr natural  $n > 1$ , mulțimea  $A_n$  a intervalelor din  $A$  care au lungimea  $\geq \frac{1}{n}$  și  $< \frac{1}{n-1}$  este de asemenea cel mult numărabilă (eventual vidă).

Fiecare interval face parte din una din multimiile  $A_n$ , deci  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  și deci  $A$  este cel mult numărabilă, ca reuniune numărabilă de mulțimi cel mult numărabile (eventual unele dintre ele, vide).

### 3. Puncte aderente. Aderența unei mulțimi.

#### Mulțimi închise

Fie  $A$  o mulțime de numere. Un punct  $x_0 \in R$  (nu neapărat din  $A$ ) se numește *punct aderent* al lui  $A$ , dacă în orice vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  există cel puțin un punct din  $A$  (eventual numai  $x_0$ , dacă  $x_0 \in A$ ), adică dacă  $A \cap V \neq \emptyset$ .

Mulțimea punctelor aderente ale mulțimii  $A$  se numește *aderența* lui  $A$  sau *închiderea* lui  $A$  și se notează  $\bar{A}$ .

Orice punct  $x_0 \in A$  este punct aderent al lui  $A$ , deoarece în orice vecinătate a lui  $x_0$  se găsește cel puțin punctul  $x_0$  din  $A$ . Așadar, mulțimea  $A$  este conținută în *închiderea* sa :

$$A \subset \bar{A}.$$

O mulțime poate să aibă și alte puncte aderente care să nu-i aparțină.

O mulțime  $A$  se numește *mulțime închisă* dacă este egală cu *închiderea* sa :  $A = \bar{A}$ .

A spune că  $x_0 \notin \bar{A}$ , înseamnă că există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  cu  $V \cap A = \emptyset$ , iar aceasta înseamnă că  $x_0$  este punct exterior al lui  $A$ , adică punct interior al mulțimii  $\complement A$ , și reciproc. Avem așadar

$$\complement \bar{A} = \text{Int } \complement A \text{ și } \text{Int } A = \overline{\complement A}.$$

Spunem că  $y_0$  este un *punct frontieră* al unei mulțimi  $A$ , dacă este aderent și lui  $A$  și lui  $\complement A$ , adică dacă aparține mulțimii  $\bar{A} \cap \overline{\complement A}$ .

Mulțimea  $\bar{A} \cap \overline{\complement A}$  a punctelor frontieră ale lui  $A$  se numește *frontiera* mulțimii  $A$  și se notează  $\text{Fr } A$ . Deducem de aici că  $\text{Fr } A = \text{Fr } \complement A$ .

A spune că  $y_0 \in \text{Fr } A$  înseamnă că pentru orice vecinătate  $V$  a lui  $y_0$  avem  $V \cap A \neq \emptyset$  și  $V \cap \complement A \neq \emptyset$ .

*Exemplu.* 1) Închiderea dreptei  $R$  este tot  $R$ , deoarece alte puncte care să-l fie aderente nu mai există. Dreapta  $R$  este o mulțime închisă (în același timp, ea este și o mulțime deschisă).

2) Închiderea mulțimii vide este mulțimea vidă:  $\emptyset = \emptyset$ . Într-adevăr, nici un punct  $x_0 \in R$  nu este aderent lui  $\emptyset$ , deoarece oricare ar fi vecinătatea  $V$  a lui  $x_0$  avem  $V \cap \emptyset = \emptyset$ . Mulțimea vidă este deci o mulțime închisă (ea este și deschisă).

3) Închiderea unui interval închis  $[a, b]$  este tot  $[a, b]$ , deoarece nici un alt punct din afară intervalului nu îl este aderent. În adevăr, fie  $x_0 \notin [a, b]$ . Pentru a face o alegere, să presupunem că  $x_0 < a$ . Există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  care nu conține pe  $a$ , deci  $V \cap [a, b] = \emptyset$ . Un interval închis este, așadar, o mulțime închisă.

4) Închiderea unei mulțimi  $\{x_0\}$  formată numai dintr-un punct este mulțimea însăși :  $\{x_0\}$ . În adevăr, dacă  $x_1 \neq x_0$  există o vecinătate  $V$  a lui  $x_1$  care nu conține pe  $x_0$ , deci  $V \cap \{x_0\} = \emptyset$ . Mulțimea formată dintr-un singur punct este deci o mulțime închisă.

5) Dacă  $a < b$ , avem  $(\overline{a, b}) = [\overline{a, b}] = (\overline{a, b}) = [a, b]$ .

Într-adevăr  $a$  este punct aderent oricărui din intervalele  $(a, b)$ ,  $[a, b]$  și  $(a, b]$ , deoarece orice vecinătate  $(\alpha, \beta)$  a lui  $a$ ,  $\alpha < a < \beta$ , conține punctele de la dreapta lui  $a$ , care se află

în fiecare din aceste intervale. La fel se arată că  $b$  este punct aderent al intervalor. Punctele care nu aparțin intervalului închis  $[a, b]$  nu sunt puncte aderente ale nici una din aceste intervale.

6) Închiderea unei semidrepte se obține adăugind semidreptei extremitatea sa, care îi este punct aderent.

7) Orice număr real  $x$  este aderent multimii  $Q$  a numerelor raționale:  $\overline{Q} = R$ . În adevăr, în orice vecinătate  $(a, b)$  a lui  $x$  există puncte raționale.

8) Orice număr real este aderent multimii  $I$  a numerelor iraționale, deci închiderea multimii numerelor iraționale este toată dreapta. Într-adevăr, în orice vecinătate  $(a, b)$  a lui  $x$  se află cel puțin un număr irațional.

$$9) \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, 0 \right\}.$$

$$10) \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

*Marginea superioară  $M$  a unei mulțimi majorate  $A$  este punct aderent al lui  $A$ .*

Într-adevăr, fie  $V = (\alpha, \beta)$  o vecinătate a lui  $M$ , adică  $\alpha < M < \beta$ . Există atunci cel puțin un punct  $x \in A$  astfel ca  $\alpha < x \leq M$ , adică astfel ca  $x \in (\alpha, \beta)$ , deci  $V \cap A \neq \emptyset$ .

Se arată la fel că *marginea inferioară  $m$  a unei mulțimi minorate este punct aderent al acesteia*.

Rezultă că *marginile unei mulțimi mărginite sunt puncte aderente ale acesteia*.

Observații. 1º Dreapta întreagă  $R$  și multimea vidă sunt și închise și deschise, și sunt singurele mulțimi de numere reale care au această proprietate.

2º Există mulțimi care nu sunt nici închise nici deschise, de exemplu intervalele de forma  $(a, b]$  sau  $[a, b)$  cu  $a < b$ .

Legătura dintre mulțimile deschise și cele închise este dată de următoarea

**Propozitie.** O mulțime  $A$  este închisă dacă și numai dacă complementara sa  $\complement A$  este deschisă.

Să presupunem întâi că  $A$  este închisă și să arătăm că  $B = \complement A$  este deschisă, adică orice punct al său este punct interior. Fie  $x_0 \in B$  oarecare; atunci  $x_0 \notin A$  și deoarece  $A$  este închisă, avem  $A = \bar{A}$ , deci  $x_0 \notin \bar{A}$ , adică  $x_0$  nu este punct aderent al lui  $A$ . Există atunci cel puțin o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  astfel ca  $V \cap A = \emptyset$ . Aceasta înseamnă că  $V \subset \complement A$ , adică  $x_0 \in V \subset B$  și deci  $x_0$  este punct interior al lui  $B$ . Cum  $x_0$  a fost ales arbitrar în  $B$ , rezultă că toate punctele lui  $B$  îi sunt puncte interioare, adică  $B$  este deschisă.

Reciproc, să presupunem că  $B$  este deschisă și să arătăm că  $A$  este închisă, adică  $A = \bar{A}$ . Fie pentru aceasta  $x_0$  un punct aderent al lui  $A$ , adică  $x_0 \in \bar{A}$ . Dacă  $x_0$  ar apartine lui  $B$ , cum  $B$  este deschisă ar exista o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  conținută în  $B$ ,  $V \subset B$ , și atunci  $V \cap A = \emptyset$ , ceea ce ar contrazice ipoteza că  $x_0$  este punct aderent al lui  $A$ . Presupunerea că  $x_0 \in B$  ne duce la contradicție, deci  $x_0 \notin B$ , adică  $x_0 \in A$ . Cum  $x_0$  a fost ales arbitrar în  $\bar{A}$ , rezultă că pentru orice  $x \in \bar{A}$  avem  $x \in A$ , adică  $\bar{A} \subset A$ , și cum avem de asemenea  $A \subset \bar{A}$ , rezultă  $A = \bar{A}$ , adică  $A$  este închisă.

**Corolar.** O mulțime  $B$  este deschisă dacă și numai dacă complementara sa  $\complement B$  este închisă.

În adevăr, se notează  $A = \complement B$ , deci  $B = \complement A$  și se aplică propoziția precedentă.

Din proprietățile mulțimilor deschise se deduc proprietățile mulțimilor închise:

- 1) Intersecția unei familii *oarecare* de mulțimi închise este o mulțime închisă.
- 2) Reuniunea unei familii *finită* de mulțimi închise este o mulțime închisă.
- 3)  $R$  și  $\emptyset$  sunt închise.

#### **Demonstrație.**

1) Fie  $(A_i)_{i \in I}$  o familie oarecare de mulțimi închise și  $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ . Atunci  $\complement A_i$  sunt mulțimi deschise și  $\bigcup_{i \in I} \complement A_i$  este tot o mulțime deschisă. Dar

$$\complement A = \complement \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \complement A_i,$$

deci  $\complement A$  este deschisă, și deci  $A$  este închisă.

2) Fie  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  o familie *finită* de mulțimi închise și  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ . Atunci  $\complement A_i$  sunt deschise și  $\bigcap_{i=1}^n \complement A_i$  este deschisă. Dar

$$\complement A = \complement \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \complement A_i,$$

deci  $\complement A$  este deschisă și deci  $A$  este închisă.

**O b s e r v a t i i.** 1° Reuniunea unei familii *infinite* de mulțimi închise nu mai este totdeauna o mulțime închisă. De exemplu, mulțimile  $A_n = \left[ \frac{1}{n}, 1 \right]$ ,  $n = 1, 2, \dots$  sunt închise dar reuniunea lor  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 1]$  nu este închisă.

2° Orice mulțime finită este închisă. Într-adevăr, o mulțime finită  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  este reuniunea familiei finite  $\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}$  de mulțimi închise (deoarece sunt formate numai din cîte un punct).

3° Se spune că o mulțime  $A$  este *densă* într-o mulțime  $B$  dacă orice punct al lui  $B$  este aderent lui  $A$ , adică dacă  $B \subset \overline{A}$ . De exemplu, intervalele  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  cu  $a < b$  sunt dense în intervalul închis  $[a, b]$ .

Dacă o mulțime  $A$  este densă în  $R$ , adică dacă  $\overline{A} = R$ , se mai spune că  $A$  este *peste tot densă*. De exemplu, mulțimea numerelor raționale este peste tot densă; mulțimea numerelor iraționale este peste tot densă.

O mulțime *inchisă* și majorată  $A$  își conține marginea superioară  $M$ , deoarece  $M$  este punct aderent al lui  $A$ .

De asemenea, o mulțime *inchisă* și minorată își conține marginea inferioară.

O mulțime *inchisă* și *mărginită* își conține marginea inferioară și marginea superioară.

#### 4. Puncte de acumulare.

##### Teorema lui Weierstrass-Bolzano

Fie  $A$  o mulțime de numere. Un punct  $x_0 \in R$  (nu neapărat din  $A$ ) se numește *punct de acumulare* al lui  $A$ , dacă orice vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  conține cel puțin un punct  $x$  din  $A$  diferit de  $x_0$ , adică dacă  $V \cap A - \{x_0\} \neq \emptyset$ .

Dacă  $x_0 \notin A$ , evident, condiția ca „ $x$  din  $A$  să fie diferit de  $x_0$ ” este verificată de la sine.

Orice punct de acumulare al lui  $A$  este punct aderent al lui  $A$ , dar pot exista puncte aderente ale lui  $A$  care să nu fie puncte de acumulare ale lui  $A$ . De exemplu, dacă  $A = \{x_0\}$ ,  $x_0$  este punct aderent al lui  $A$ , dar nu este punct de acumulare al lui  $A$ , deoarece  $A$  nu conține nici un alt punct diferit de  $x_0$  și deci nu poate verifica definiția punctului de acumulare.

Dacă însă  $x_0$  este punct aderent al lui  $A$  dar nu aparține lui  $A$ , atunci  $x_0$  este neapărat punct de acumulare al lui  $A$ . Într-adevăr, deoarece  $x_0$  este punct aderent al lui  $A$ , în orice vecinătate  $V$  al lui  $A$  există cel puțin un punct  $x$  din  $A$  și deoarece  $x_0 \notin A$  avem  $x \neq x_0$ , deci  $x_0$  este punct de acumulare al lui  $A$ .

A spune că  $x_0$  nu este punct de acumulare al mulțimii  $A$ , înseamnă că există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , care nu mai conține nici un alt punct din  $A$ , afară, eventual, de  $x_0$ .

**Propozitie.** Un punct  $x_0$  este punct de acumulare al unei mulțimi  $A$  dacă și numai dacă în orice vecinătate  $V$  al lui  $x_0$  există o infinitate de puncte din  $A$  (adică dacă mulțimea  $V \cap A$  este infinită).

Este evident că dacă în orice vecinătate a lui  $x_0$  se află o infinitate de puncte din  $A$ , cel mult unul este egal cu  $x_0$ , iar celelalte sunt diferite de  $x_0$ ; aşadar, în orice vecinătate a lui  $x_0$  există puncte din  $A$  diferite de  $x_0$ , deci  $x_0$  este punct de acumulare al lui  $A$ .

Reciproc, să presupunem că  $x_0$  este punct de acumulare al lui  $A$ . Fie  $V = (a, b)$  o vecinătate a lui  $x_0$ ; să presupunem, prin absurd, că  $V$  conține un număr finit de puncte din  $A$  diferite de  $x_0$ , fie  $c_1, c_2, \dots, c_n$

toate aceste puncte. Putem găsi atunci (fig. 35) o vecinătate  $(\alpha, \beta)$  a lui  $x_0$  conținută în  $(a, b)$  și care să nu conțină nici unul din punctele  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .



Fig. 35

Atunci  $(\alpha, \beta)$  nu mai conține nici un punct din  $A$  diferit de  $x_0$  (deoarece un asemenea punct s-ar afla în  $(a, b)$  și ar fi diferit de  $c_1, c_2, \dots, c_n$ ). Concluzia la care am ajuns, că  $(\alpha, \beta)$  nu conține un punct din  $A$  diferit de  $x_0$ , contrazice ipoteza că  $x_0$  este punct de acumulare.

Presupunerea că vecinătatea aleasă  $V$  conține *numai* un număr finit de puncte de  $A$  ne duce la contradicție. Așadar,  $V$  conține o infinitate de puncte din  $A$ . Propoziția este astfel demonstrată.

**Corolarul 1.** Dacă o mulțime  $A$  are un punct de acumulare, ea este infinită.

**Corolarul 2.** O mulțime finită nu are nici un punct de acumulare.

**Observații.** 1° Există și mulțimi infinite care nu au nici un punct de acumulare. De exemplu mulțimea  $N$  a numerelor naturale este infinită dar nu are nici un punct de acumulare.

2° Dacă o mulțime majorată  $A$  nu-și conține marginea superioară  $M$ , atunci  $M$  este punct de acumulare al lui  $A$ , deoarece  $M$  este punct aderent al lui  $A$ .

De asemenea, dacă o mulțime minorată  $A$  nu-și conține marginea inferioară  $m$ , atunci  $m$  este punct de acumulare al lui  $A$ .

Rezultă că dacă o mulțime mărginită  $A$  nu-și conține una din margini, aceasta este punct de acumulare al lui  $A$ .

Dacă mulțimea  $A$  își conține marginile, în unele cazuri marginile sunt puncte de acumulare, iar în alte cazuri nu sunt.

*Exemplu.* 1)  $\sup [0, 1] = 1 \in [0, 1]$ ,  $\inf [0, 1] = 0 \in [0, 1]$ , iar 0 și 1 sunt puncte de acumulare ale segmentului  $[0, 1]$ .

2)  $\sup \{0, 1, 2\} = 2 \in \{0, 1, 2\}$  și  $\inf \{0, 1, 2\} = 0 \in \{0, 1, 2\}$ , dar 0 și 2 nu sunt puncte de acumulare ale mulțimii  $\{0, 1, 2\}$ , deoarece aceasta, fiind finită, nu are nici un punct de acumulare.

**Propozitie.** O mulțime  $A$  este închisă dacă și numai dacă își conține toate punctele sale de acumulare.

Dacă  $A$  este închisă, avem  $A = \bar{A}$ , adică  $A$  își conține toate punctele aderente; în particular își conține toate punctele de acumulare, deoarece punctele de acumulare ale lui  $A$  sunt puncte aderente ale lui  $A$ .

Reciproc, să presupunem că  $A$  își conține toate punctele de acumulare. Fie  $x_0$  un punct aderent al lui  $A$ ; să presupunem, prin absurd, că  $x_0 \notin A$ ; atunci  $x_0$  este punct de acumulare al lui  $A$  și deci  $x_0 \in \bar{A}$ ; am ajuns astfel la o contradicție presupunând că  $x_0 \notin A$ . Rezultă că  $x_0 \in A$ . Cum  $x_0$  a fost arbitrar, deducem că orice punct aderent al lui  $A$  aparține lui  $A$ , deci  $\bar{A} = A$ , adică  $A$  este închisă.

**Teorema lui Weierstrass-Bolzano.** Orice mulțime mărginită și infinită are cel puțin un punct de acumulare.

Fie  $A$  o mulțime mărginită și infinită,  $a$  un minorant al lui  $A$  și  $b$  un majorant al lui  $A$ . Putem alege numerele  $a$  și  $b$  rationale. Fie  $l = b - a > 0$ ;  $l$  este de asemenea rational. Avem  $A \subset^{\sharp} [a, b]$ .

Să împărțim segmentul  $[a, b]$  în două părți egale. Deoarece  $A$  este infinită, cel puțin una din cele două părți conține o infinitate de puncte din  $A$ . Fie  $[a_1, b_1]$  una din cele două părți care au această proprietate;  $a_1$  și  $b_1$  sunt rationale și  $b_1 - a_1 = \frac{l}{2}$ .

Să presupunem că am găsit două numere raționale  $a_n$  și  $b_n$  astfel ca segmentul  $[a_n, b_n]$  să conțină o infinitate de puncte din  $A$  și  $b_n - a_n = \frac{l}{2^n}$ .

Să împărțim segmentul  $[a_n, b_n]$  în două părți egale. Deoarece segmentul  $[a_n, b_n]$  conține o infinitate de puncte din  $A$ , cel puțin una din cele două părți conține de asemenea o infinitate de puncte din  $A$ . Să notăm cu  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  una din cele două părți care are această proprietate. Numerele  $a_{n+1}$  și  $b_{n+1}$  sunt raționale,  $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$  și  $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{l}{2^{n+1}}$ .

Am demonstrat astfel prin inducție completă că putem găsi două siruri  $(a_n)$  și  $(b_n)$  de numere *raționale*, cu următoarele proprietăți:

- 1)  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$ .
- 2)  $b_n - a_n = \frac{l}{2^n}$  pentru orice  $n \in N$ .

3) Segmentul  $[a_n, b_n]$  conține o infinitate de puncte din  $A$ , oricare ar fi  $n \in N$ .

Numerele  $a_n$  și  $b_n$  nu aparțin neapărat mulțimii  $A$ . Din proprietățile 1) și 2) deducem că există un număr  $x_0$  astfel încât  $a_n \leq x_0 \leq b_n$  oricare ar fi  $n$  natural.

Să arătăm că  $x_0$  este punct de acumulare al lui  $A$ .

Fie  $V = (\alpha, \beta)$  o vecinătate a lui  $x_0$ , adică  $\alpha < x_0 < \beta$ . Putem alege pe  $n$  suficient de mare, astfel încât să avem

$$\alpha < a_n \leq x_0 \leq b_n < \beta.$$

Dar segmentul  $[a_n, b_n]$  conține o infinitate de puncte din  $A$ ; atunci vecinătatea  $(\alpha, \beta)$  a lui  $x_0$  conține de asemenea o infinitate de puncte din  $A$ , deci  $x_0$  este punct de acumulare al lui  $A$ .

**Observație.** Punctul  $x$  nu aparține neapărat lui  $A$ , dacă  $A$  nu este închisă.

## 5. Multimi compacte. Teorema lui Borel-Lebesgue

O mulțime  $C$  de numere reale se numește *mulțime compactă* dacă este închisă și mărginită.

**Exemplu.** I) O mulțime finită  $C = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  este închisă și mărginită, deci este compactă. În particular, o mulțime  $\{a\}$  formată numai dintr-un punct este compactă.

2) Un interval închis și mărginit  $[a, b]$  este o mulțime compactă. Intervalele  $[a, b]$  se numesc *intervale compacte*.

3) O reuniune finită  $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$  de intervale compacte este o mulțime compactă.

4) Intervalele  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  nu sunt compacte deoarece nu sunt închise.

5) Semidreptele și dreapta întreagă nu sunt compacte deoarece nu sunt mărginite.

Vom spune că o familie  $(B_\alpha)_{\alpha \in J}$  de mulțimi constituie o *acoperire* a unei mulțimi  $A$ , dacă orice punct  $x \in A$  aparține cel puțin uneia din mulțimile familiei, adică dacă  $A \subset \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha$ .

Dacă familia este formată dintr-un număr finit de mulțimi, vom spune că ea constituie o acoperire finită a mulțimii  $A$ .

Mulțimile compacte au o proprietate importantă dată de

**Theorema lui Borel-Lebesgue.** Dacă  $C$  este o mulțime compactă, din orice acoperire a sa cu intervale deschise se poate extrage o acoperire finită a sa.

Fie  $(I_\alpha)_{\alpha \in I}$  o acoperire a lui  $C$  formată din intervale deschise.

Dacă  $C$  este finită,  $C = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , fiecare din aceste puncte este conținut în cîte un interval din familie. Cele  $n$  intervale  $I_{\alpha_1}, \dots, I_{\alpha_n}$  constituie o acoperire finită a lui  $C$ , și teorema este demonstrată în acest caz.

Să presupunem că  $C$  este infinită. Vom raționa prin reducere al absurd: vom presupune că mulțimea  $C$  nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie și vom arăta că ajungem la o contradicție.

Deoarece  $C$  este compactă, este mărginită. Fie  $a$  și  $b$  două numere raționale astfel ca  $a \leq x \leq b$  oricare ar fi  $x \in C$ , adică astfel ca  $C \subset [a, b]$ .

Să împărțim segmentul  $[a, b]$  în două părți egale. În acest fel am împărțit și mulțimea  $C$  în două părți  $C_1$  și  $C_2$ , și anume  $C_1$  este conținută într-o jumătate a segmentului  $[a, b]$ , iar  $C_2$  este conținută în a doua jumătate a acestui segment. Avem  $C = C_1 \cup C_2$ . Dacă fiecare din mulțimile  $C_1$  și  $C_2$  ar putea fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie, atunci și  $C$  ar putea fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie, ceea ce ar fi în contradicție cu presupunerea făcută. Așadar, cel puțin una din mulțimile  $C_1$  și  $C_2$  nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie. Să notăm cu  $[a_1, b_1]$  una din cele două jumătăți ale segmentului  $[a, b]$  care are proprietatea că  $[a_1, b_1] \cap C$  nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie.  $a_1$  și  $b_1$  sunt raționale, și dacă notăm cu  $l = b - a$ , avem

$$a \leq a_1 < b_1 \leq b, \quad b_1 - a_1 = \frac{l}{2}.$$

Să presupunem că am găsit două numere raționale  $a_n$  și  $b_n$  astfel ca  $b_n - a_n = \frac{l}{2^n}$  și  $[a_n, b_n] \cap C$  nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie.

Să împărțim segmentul  $[a_n, b_n]$  în două părți egale, prin punctul  $c_n = \frac{b_n - a_n}{2}$ . Cel puțin una din mulțimile  $[a_n, c_n] \cap C$  sau  $[c_n, b_n] \cap C$  nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie. Să notăm cu  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  una din cele două jumătăți ale segmentului  $[a, b]$  care are proprietatea că  $[a_{n+1}, b_{n+1}] \cap C$  nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie;  $a_{n+1}$  și  $b_{n+1}$  sunt raționale și avem

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n, \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{l}{2^{n+1}}.$$

Am demonstrat astfel, prin inducție completă, că putem construi două siruri  $(a_n)$  și  $(b_n)$  de numere raționale, cu următoarele proprietăți:

$$1) \quad a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$

$$2) \quad b_n - a_n = \frac{l}{2^n} \text{ pentru orice } n \in N.$$

3) Oricare ar fi  $n \in N$ , mulțimea  $[a_n, b_n] \cap C$  nu poate fi acoperită cu un număr finit de intervale din familie.

Rezultă în particular că  $[a_n, b_n] \cap C$  este infinită, oricare ar fi  $n \in N$ . Din proprietățile 1) și 2) deducem că există un singur punct  $x_0$  astfel ca  $a_n \leq x_0 \leq b_n$  pentru orice  $n \in N$ ;  $x_0$  este punct de acumulare al mulțimii  $C$ . În adevăr, fie  $V = (\alpha, \beta)$  o vecinătate a lui  $x_0$ , deci  $\alpha < x_0 < \beta$ . Datorită proprietății 2) putem găsi un indice  $n$  suficient de mare, astfel ca  $\alpha < a_n \leq x_0 \leq b_n < \beta$ , adică astfel ca  $[a_n, b_n] \subset V$ . Dar  $[a_n, b_n]$  conține o infinitate de puncte din  $C$ , deci  $V$  conține o infinitate de puncte din  $C$ , adică  $x_0$  este punct de acumulare al lui  $C$ . Deoarece  $C$  este compactă, este închisă, deci  $x_0 \in C$ . Există atunci un interval deschis  $I$  din familie care conține pe  $x_0$ , deci care este o vecinătate a lui  $x_0$ . Datorită proprietății 2) există un număr  $n$  suficient de mare astfel ca  $[a_n, b_n] \subset I$  și atunci  $[a_n, b_n] \cap C \subset I$ , adică mulțimea  $[a_n, b_n] \cap C$  poate fi acoperită cu un singur interval din familie, ceea ce contrazice proprietatea 3). Am ajuns la o contradicție, și teorema este astfel demonstrată.

Se poate demonstra și o teoremă reciprocă:

**Teoremă.** Dacă din orice acoperire cu intervale deschise, a unei mulțimi  $C$ , se poate extrage o acoperire finită, atunci  $C$  este compactă.

Fie  $y \notin C$  un punct oarecare. Să arătăm că  $y \notin \bar{C}$  de unde va rezulta că  $C$  este închisă. Pentru orice punct  $x \in C$  avem  $x \neq y$ . Există deci un interval deschis  $I_x \ni x$  și un interval deschis  $J_x \ni y$ , fără puncte comune. (Dacă, de exemplu,  $x < y$ , se aleg punctele  $\alpha, \beta, \gamma$  astfel încât  $\alpha < x < \gamma < y < \beta$  și se ia  $I_x = (\alpha, \gamma)$  și  $J_x = (\gamma, \beta)$ ). Familia de intervale deschise  $(I_x)_{x \in C}$  acoperă mulțimea  $C$ . Conform ipotezei, din această acoperire se poate extrage o acoperire finită a lui  $C$ , formată din intervalele  $I_{x_1}, I_{x_2}, \dots, I_{x_n}$ . Deoarece fiecare interval  $I_{x_i}$  este mărginit și  $C \subset \bigcup_{i=1}^n I_{x_i}$ , urmează

în primul rând că  $C$  este o mulțime mărginită. Mulțimea  $J = \bigcap_{i=1}^n J_{x_i}$  este o vecinătate a lui  $y$ , disjunctă de fiecare interval  $I_{x_i}$ , deci  $J \cap C = \emptyset$ . Urmează că  $y$  este punct exterior al lui  $C$ . Din cele de mai sus deducem că dacă  $x$  este aderent lui  $C$ , atunci  $x \in C$  (deoarece, în caz contrar, ca mai sus, ar rezulta că  $x$  este exterior lui  $C$ ), deci  $C$  este închisă. Fiind și mărginită,  $C$  este compactă.

**Observații.** 1º Atât în teorema directă cât și în teorema reciprocă, se pot considera acoperiri formate din mulțimi deschise, nu neapărat din intervale deschise.

Proprietatea enunțată în teorema lui Borel-Lebegue se ia ca definiție a mulțimilor compacte în spațiile topologice generale.

2° Se poate arăta prin exemple că dacă  $C$  nu este închisă, sau nu este mărginită, există acoperiri ale lui  $C$  cu intervale deschise, din care nu se poate extrage o acoperire finită.

De asemenea, dacă multimiile din acoperire nu sunt deschise, este posibil să nu se poată extrage o acoperire finită.

*Exemplu.* 1)  $C = (-1, 1)$ . Intervalele

$$I_1 = \left( -1 + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2} \right), \quad I_2 = \left( -1 + \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3} \right), \dots$$

$$I_{n-1} = \left( -1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right), \dots$$

constituie o acoperire a lui  $C$ , dar  $C$  nu poate fi acoperită cu un număr finit din aceste intervale.

2)  $C = [0, +\infty)$ . Intervalele

$$I_1 = (-1, 1), I_2 = (0, 2), I_3 = (1, 3), \dots, I_n = (n-2, n) \dots$$

constituie o acoperire a lui  $C$ , din care nu se poate extrage o acoperire finită a lui  $C$ .

3)  $C = [0, 1]$ . Pentru fiecare  $x \in C$  să considerăm mulțimea  $B_x = \{x\}$ . Familia  $(B_x)_{x \in C}$  constituie o acoperire a lui  $C$ , din care nu se poate extrage o acoperire finită.

## § 5. Funcții reale

### 1. Funcții reale, funcții de variabilă reală

Funcțiile  $f: E \rightarrow F$  în care  $F$  este o mulțime de numere reale se numesc *funcții cu valori reale* sau, mai simplu, *funcții reale* sau *funcții numerice*.

Scrierea  $f: E \rightarrow R$  se citește astfel: funcția reală  $f$  definită pe  $E$  sau funcția numerică  $f$  definită pe  $E$ , sau funcția  $f$  definită pe  $E$  cu valori reale sau numerice.

Funcțiile  $f: E \rightarrow F$  în care  $E$  este o mulțime de numere reale se numesc *funcții de argument real* sau *funcții de variabilă reală*.

Dacă atât  $E$  cât și  $F$  sunt mulțimi de numere reale, funcțiile  $f: E \rightarrow F$  se numesc *funcții reale de argument real* sau *funcții reale de variabilă reală*. Acestea vor fi studiate în cea mai mare parte a cărții. De aceea, cînd vom spune „funcție” fără altă specificare, vom înțelege că este vorba de funcție reală de variabilă reală. Printre funcțiile reale de variabilă reală se află funcțiile elementare, studiate în școala medie.

### 2. Operații cu funcții reale

Fie  $E$  o mulțime oarecare,  $A$  și  $B$  două părți ale lui  $E$ , astfel ca  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $f$  și  $g$  două funcții reale definite pe  $A$ , respectiv  $B$ :

$$f: A \rightarrow R, \quad g: B \rightarrow R.$$

Efectuând operațiile algebrice obișnuite asupra valorilor funcțiilor (care sunt numere), putem stabili noi corespondențe, care definesc funcții noi.

Pentru a putea efectua suma  $f(x) + g(x)$  și produsul  $f(x) \cdot g(x)$  este necesar să existe atât  $f(x)$  cît și  $g(x)$ , adică este necesar ca atât funcția  $f$  cît și funcția  $g$  să fie definite în  $x$ ; aceasta înseamnă că  $x$  trebuie să aparțină atât mulțimii  $A$  pe care este definită  $f$  cît și mulțimii  $B$  pe care este definită  $g$ , adică  $x \in A \cap B$ . Pentru a putea efectua împărțirea  $\frac{1}{f(x)}$ , trebuie ca  $x \in A$  și  $f(x) \neq 0$ , deoarece împărțirea cu 0 nu are sens.

Putem astfel da următoarele definiții:

1) *Suma  $f + g$  a funcțiilor  $f$  și  $g$  este funcția definită pe mulțimea  $A \cap B$  prin egalitatea*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in A \cap B.$$

2) *Produsul  $\alpha f$  dintre un număr  $\alpha$  și funcția  $f$  este funcția definită pe mulțimea  $A$  (ca și  $f$ ) prin egalitatea*

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x), \quad x \in A.$$

3) *Produsul  $fg$  al funcțiilor  $f$  și  $g$  este funcția definită pe mulțimea  $A \cap B$  prin egalitatea*

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad x \in A \cap B.$$

4) *Inversa  $\frac{1}{g}$  a funcției  $g$  este funcția definită pe mulțimea  $B - G_0$ , unde  $G_0 = \{x \mid x \in B, g(x) = 0\}$ , prin egalitatea*

$$\left( \frac{1}{g} \right)(x) = \frac{1}{g(x)}.$$

În loc de  $\frac{1}{g}$  se poate scrie de asemenea  $g^{-1}$ .

**O b s e r v a t i e.** Nu trebuie confundată inversa față de operația de înmulțire cu funcția inversă față de operația de compunere. Pentru a evita confuziile, funcția inversă față de operația de compunere va fi numită adesea **funcție reciprocă**.

De asemenea, nu trebuie confundată notația  $g^{-1}$  a funcției inverse cu notația  $g^{-1}$  a funcției reciproce.

Luând  $\alpha = -1$  în definiția 3), deducem că:

5) *Funcția  $-f$  este definită pe mulțimea  $A$  (ca și  $f$ ) prin egalitatea*

$$(-f)(x) = -f(x), \quad x \in A.$$

Atunci :

6) *Diferența  $f - g = f + (-g)$  dintre funcția  $f$  și  $g$  este funcția definită pe mulțimea  $A \cap B$  prin egalitatea*

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad x \in A \cap B.$$

Din definițiile 3) și 4) deducem :

7) Cînd  $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$  dintre funcția  $f$  și funcția  $g$  este funcția  $\frac{f}{g}$  definită pe mulțimea  $A \cap B - G_0$  prin egalitatea

$$\left( \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

**O b s e r v a t i i .** 1° Dacă  $A \cap B = \emptyset$ , funcțiile  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $fg$  și  $\frac{f}{g}$  nu pot fi definite.

De asemenea, dacă  $G_0 = A \cap B$ , adică dacă  $g(x) \equiv 0$  pe  $A \cap B$ , funcția  $\frac{f}{g}$  nu poate fi definită.

2° Să notăm cu  $\mathcal{F}$  mulțimea funcțiilor reale definite pe părți ale mulțimii  $E$ :

$$\mathcal{F} = \{f: A \rightarrow R \mid A \subset E\}.$$

Se verifică ușor următoarele proprietăți ale operațiilor definite mai sus :

1)  $f + g = g + f$ .

2)  $(f + g) + h = f + (g + h)$ .

3) Funcția identic nulă  $\theta(x) \equiv 0$  definită pe  $E$  este zero pentru adunare :

$$f + \theta = f.$$

Mulțimea  $\mathcal{F}$  este deci semigrup comutativ cu element neutru pentru adunare.  $\mathcal{F}$  nu este însă grup pentru adunare, deoarece dacă  $A \neq E$ , și  $f: A \rightarrow R$ , avem  $-f: A \rightarrow R$  și

$$(f - f)(x) = f(x) - f(x) = 0 \text{ pentru } x \in A.$$

Funcția  $f - f$  este definită pe  $A$  și este diferită de funcția  $\theta$  care este definită pe întreaga mulțime  $E$ . Așadar, funcția  $f$  nu are opus în mulțimea  $\mathcal{F}$ .

4)  $fg = gf$ .

5)  $(fg)h = f(gh)$ .

6) Funcția constantă identic egală cu 1,  $e(x) \equiv 1$ , definită pe  $E$ , este unitate pentru înmulțire :

$$ef = f.$$

Mulțimea  $\mathcal{F}$  este semigrup comutativ cu unitate și pentru înmulțire.

Înmulțirea este distributivă față de adunare :

7)  $f(g+h) = fg + fh$ .

Mulțimea  $\mathcal{F}$  nu este inel pentru cele două operații pentru că nu este grup pentru adunare.

3° Să considerăm acum o mulțime  $A \subset E$ , și mulțimea  $\mathcal{F}(A, R)$  a funcțiilor reale, definite, toate, pe  $A$

$$\mathcal{F}(A, R) = \{f: A \rightarrow R\}.$$

Dacă  $f$  și  $g$  sunt definite pe  $A$ , atunci  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $af$  și  $fg$  sunt definite tot pe mulțimea  $A$ , deci aparțin tot mulțimii  $\mathcal{F}(A, R)$ .

Dacă notăm acum cu  $\theta(x) \equiv 0$  funcția identic nulă definită pe  $A$  și cu  $e(x) \equiv 1$  funcția identic egală cu 1 definită tot pe  $A$ , avem  $\theta \in \mathcal{F}(A, R)$  și  $e \in \mathcal{F}(A, R)$ . Funcția  $\theta$  este zero pentru adunarea funcțiilor din  $\mathcal{F}(A, R)$ , iar funcția  $e$  este unitate pentru înmulțirea funcțiilor din  $\mathcal{F}(A, R)$ . În plus, dacă  $f$  este definită pe  $A$  atunci  $-f$  deci și  $f - f$  este definită tot pe  $A$  și  $f - f = \theta$ . Rezultă că  $-f$  este opusa lui  $f$ , deci  $\mathcal{F}(A, R)$  este grup pentru adunare, și deci este inel pentru adunare și înmulțire.

Iată acum proprietățile înmulțirii cu numere:

- (i)  $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$ .
- (ii)  $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$ .
- (iii)  $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$ .
- (iu)  $1 \cdot f = f$ .
- (j)  $\alpha(fg) = (\alpha f)g = f(\alpha g)$ .

Rezultă că mulțimea  $\mathcal{F}(A, R)$  este un spațiu vectorial\* pentru operațiile  $f + g$  și  $\alpha f$ , și este o algebră\*\* pentru cele trei operații,  $f + g$ ,  $\alpha f$ ,  $fg$ .

4° Produsul  $\alpha f$  dintre numărul  $\alpha$  și funcția  $f: A \rightarrow R$  este egal cu produsul dintre funcția constantă  $\alpha(x) = \alpha$  definită pe  $A$  și funcția  $f$ .

Produsul dintre un număr și o funcție poate fi deci considerat un caz particular de produs a două funcții.

### 3. Structura de ordine pe mulțimea funcțiilor reale

Fie  $E$  o mulțime și  $\mathcal{F}(E, R)$  mulțimea funcțiilor reale definite pe  $E$ . Folosind ordonarea numerelor reale putem defini o structură de ordine pe mulțimea funcțiilor reale definite pe  $E$ .

Dacă  $f$  și  $g$  sunt două funcții reale definite pe  $E$ , vom scrie  $f \leq g$  sau  $g \geq f$  dacă  $f(x) \leq g(x)$  pentru orice  $x \in E$ .

Dacă  $f(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in E$  spunem că funcția  $f$  este pozitivă și scriem  $f \geq 0$ .

Dacă  $f(x) \leq 0$  pentru orice  $x \in E$ , spunem că  $f$  este negativă și scriem  $f \leq 0$ .

Dacă  $E$  este un spațiu vectorial și dacă o submulțime  $E' \subset E$  este închisă față de adunare și înmulțirea cu scalari:

$x + y \in E'$  și  $\alpha x \in E'$ , pentru orice  $x, y \in E'$  și  $\alpha \in R$ , atunci  $E'$  este de asemenea un spațiu vectorial.

\* O mulțime  $E$  pe care s-a definit o operație de adunare  $(x, y) \rightarrow x + y$  și o operație de înmulțire cu numere  $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$  se numește spațiu vectorial sau spațiu liniar dacă:

1)  $E$  este grup comutativ pentru adunare;

2) înmulțirea cu numere are proprietățile (i) – (iu) din text.

Elementele unui spațiu vectorial se numesc vectori, iar numerele se numesc scalari. Operația de înmulțire cu numere se numește atunci înmulțire cu scalari.

\*\* O mulțime  $E$  pe care s-au definit: o adunare  $(x, y) \rightarrow x + y$ , o înmulțire  $(x, y) \rightarrow x \cdot y$  și o înmulțire cu numere  $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$  se numește algebră dacă:

1)  $E$  este inel pentru adunare și înmulțire;

2)  $E$  este spațiu vectorial pentru adunare și înmulțire cu numere;

3)  $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ .

Dacă înmulțirea  $x \cdot y$  este comutativă,  $E$  se numește algebră comutativă; dacă înmulțirea are unitate,  $E$  se numește algebră cu unitate.

Dacă  $E$  este o algebră și dacă o submulțime  $E' \subset E$  este închisă față de adunare, înmulțire și înmulțire cu scalari:

$x + y \in E'$ ,  $xy \in E'$  și  $\alpha x \in E'$ , oricare ar fi  $x, y \in E'$  și  $\alpha \in R$ , atunci  $E'$  este de asemenea o algebră.

Deoarece s-a arătat că  $\mathcal{F}(A, R)$  este algebră, deducem că pentru a demonstra că o submulțime de funcții  $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}(A, R)$  este o algebră, este suficient să arătăm că cele trei operații, efectuate asupra funcțiilor din  $\mathcal{F}'$ , ne conduc tot la funcții din  $\mathcal{F}'$ .

Se verifică ușor că „ $f \leq g$ ” este o relație de ordine pe mulțimea  $\mathcal{F}(E, R)$ , cu următoarele proprietăți:

- 1)  $f \leq f$ .
- 2)  $f \leq g$  și  $g \leq f \Rightarrow f = g$ .
- 3)  $f \leq g$  și  $g \leq h \Rightarrow f \leq h$ .
- 4)  $f \leq g \Rightarrow f + h \leq g + h$  (și  $f + h \leq g + h \Rightarrow f \leq g$ ).
- 5)  $f \leq g$  și  $h \geq 0 \Rightarrow fh \leq gh$   
 $fh \leq gh$  și  $h(x) > 0$  pentru orice  $x \in E \Rightarrow f \leq g$ .

Dacă  $f(x) > 0$  pentru orice  $x \in E$  spunem că funcția  $f$  este *strict pozitivă*, iar dacă  $f(x) < 0$  pentru orice  $x \in E$  spunem că funcția  $f$  este *strict negativă*.

Vom nota cu  $|f|$  funcția definită pe  $E$  prin egalitatea

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{dacă } f(x) \leq 0 \end{cases}, \text{ pentru } x \in E.$$

Funcția  $|f|$  va fi numită modulul funcției  $f$ .

Fie funcțiile  $f, g : E \rightarrow R$ . Vom nota cu  $\sup(f, g)$  funcția reală definită pe  $E$ , care în fiecare punct  $x \in E$  are drept valoare pe cel mai mare dintre numerele  $f(x)$  și  $g(x)$ :

$$\sup(f, g)(x) = \sup(f(x), g(x)), \quad x \in E.$$

Se definește de asemenea funcția  $\inf(f, g)$ , prin egalitatea

$$\inf(f, g)(x) = \inf(f(x), g(x)), \quad x \in E.$$

Funcțiile  $\sup(f, g)$  și  $\inf(f, g)$  se numesc, respectiv, anvelopa superioară și anvelopa inferioară a funcțiilor  $f$  și  $g$ .

Mai general, dacă  $(f_i)_{i \in I}$  este o familie de funcții reale definite pe  $E$ , se definesc anvelopa inferioară  $\inf_{i \in I} f_i$  și anvelopa superioară  $\sup_{i \in I} f_i$  a acestei familii, prin inegalitățile

$$(\inf_{i \in I} f_i)(x) = \inf_{i \in I} f_i(x) \text{ și } (\sup_{i \in I} f_i)(x) = \sup_{i \in I} f_i(x).$$

### Funcțiile

$$f^+ = \sup(f, 0) \text{ și } f^- = \sup(-f, 0)$$

se numesc respectiv partea pozitivă și partea negativă a funcției  $f$ .

Avem

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

și

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{dacă } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Se verifică imediat următoarele egalități:

$$f = f^+ - f^- \quad f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$$

$$|f| = f^+ + f^- = \sup (f, -f); \quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

$$\sup (f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

$$\inf (f, g) = -\sup (-f, -g)$$

#### 4. Funcții mărginite

Fie funcția reală  $f: E \rightarrow R$  definită pe o mulțime oarecare  $E$  și fie  $A \subset E$ .

Se spune că funcția  $f$  este *minorată* sau *mărginită inferior pe mulțimea  $A$*  dacă imaginea  $f(A)$  a lui  $A$  prin funcția  $f$  este o mulțime minorată, adică *dacă există un număr  $a \in R$ , astfel încât  $a \leq f(x)$  pentru orice  $x \in A$* . Marginea inferioară  $\inf_{x \in A} f(x)$  a mulțimii  $f(A)$  se numește *marginea inferioară a funcției  $f$  pe mulțimea  $A$*  și se notează  $\inf_{x \in A} f(x)$ :

$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A).$$

Numărul  $m = \inf_{x \in A} f(x)$  este caracterizat de următoarele două proprietăți (care exprimă faptul că  $m$  este *cel mai mare minorant al mulțimii  $f(A)$* ):

- 1)  $m \leq f(x)$ , oricare ar fi  $x \in A$ ;
- 2) dacă  $m < \alpha$ , există  $x \in A$  astfel ca  $f(x) < \alpha$ .

Dacă  $f$  este minorată pe domeniul său de definiție  $E$ , se spune, mai simplu, că este minorată, fără a mai specifica mulțimea pe care are această proprietate, iar numărul  $\inf_{x \in E} f(x)$  se numește *marginea inferioară a funcției  $f$* .

Dacă  $f$  este o funcție reală de variabilă reală, a spune că  $f$  este minorată înseamnă că graficul său se află în întregime deasupra unei drepte  $y = a$  paralele cu axa  $Ox$  (fig. 36).

Se spune că funcția  $f$  este majorată sau mărginită superior pe mulțimea  $A$  dacă imaginea  $f(A)$  este o mulțime majorată, adică dacă există un număr  $b \in R$ , astfel încât  $f(x) \leq b$ , oricare ar fi  $x \in A$ .

Marginea superioară  $\sup_{x \in A} f(x)$  a mulțimii  $f(A)$  se numește marginea superioară a funcției  $f$  pe mulțimea  $A$  și se notează  $\sup_{x \in A} f(x)$ :

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup_{x \in A} f(A).$$

Numărul  $M = \sup_{x \in A} f(x)$  este caracterizat de următoarele două proprietăți (care exprimă faptul că  $M$  este cel mai mic majorant al mulțimii  $f(A)$ ):

- 1)  $f(x) \leq M$ , oricare ar fi  $x \in A$ ;
- 2) dacă  $\alpha < M$ , există  $x \in A$  astfel ca  $\alpha < f(x)$ .

Dacă  $f$  este majorată pe domeniul său de definiție  $E$ , se spune, mai simplu, că  $f$  este majorată, fără a mai specifica mulțimea pe care are această proprietate, iar numărul  $\sup_{x \in E} f(x)$  se numește marginea superioară a funcției  $f$ .

Dacă  $f$  este o funcție reală de variabilă reală, a spune că este majorată înseamnă că graficul său se află în întregime sub o dreaptă  $y = b$  paralelă cu axa  $Ox$  (fig. 37).

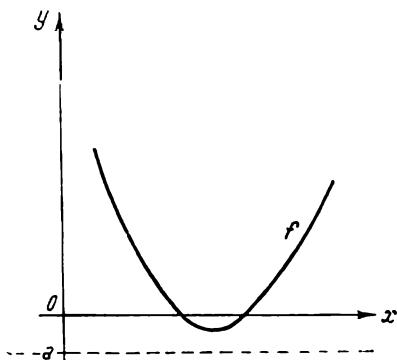


Fig. 36

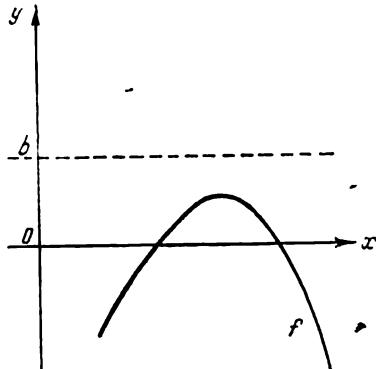


Fig. 37

Se spune că funcția  $f$  este mărginită pe mulțimea  $A$  dacă este și minorată și majorată pe  $A$ , adică dacă mulțimea valorilor  $f(A)$  este mărginită.

Aceasta înseamnă că există două numere  $a$  și  $b$  astfel încât să avem  $a \leq f(x) \leq b$  pentru orice  $x \in A$ .

Avem  $\inf_{x \in A} f(x) \leq \sup_{x \in A} f(x)$ ; cele două margini sunt egale dacă și numai dacă  $f$  este constantă pe  $A$ .

Dacă  $f$  este mărginită pe mulțimea de definiție  $E$ , vom spune, mai simplu, că  $f$  este mărginită, fără altă specificare.

Dacă  $f$  este o funcție reală de variabilă reală, a spune că  $f$  este mărginită înseamnă că graficul său se află în întregime cuprins între două drepte  $y = a$  și  $y = b$  paralele cu axa  $Ox$  (fig. 38).

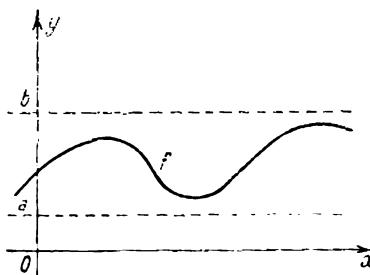


Fig. 38

**Propoziție.** Funcția  $f: E \rightarrow R$  este mărginită, dacă și numai dacă există un număr  $M > 0$  astfel încit

$$|f(x)| \leq M \text{ pentru orice } x \in E.$$

În adevăr,  $f(E) = \{f(x) | x \in E\}$ , iar  $f(E)$  este mărginită dacă și numai dacă există  $M > 0$  astfel ca  $|y| \leq M$  pentru orice  $y \in f(E)$ , adică  $|f(x)| \leq M$  pentru orice  $x \in E$ .

Rezultă din această propoziție că  $f$  este mărginită dacă și numai dacă modulul său  $|f|$  este o funcție mărginită.

Se verifică ușor că dacă  $f, g: E \rightarrow R$  sunt mărginete, funcțiile  $f + g$ ,  $\alpha f$  și  $fg$  sunt mărginete, deci mulțimea  $\mathfrak{M}(E, R)$  a funcțiilor reale mărginete definite pe  $E$  este o algebră.

**Observație.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt minorate atunci  $f + g$  este minorată și dacă  $\alpha \geq 0$  atunci  $\alpha f$  este minorată. Funcția  $-f$  poate însă să nu fie minorată. Mulțimea funcțiilor minorate nu este grup pentru adunare.

Aceleași considerații se pot face pentru funcții majorate.

Funcția  $f$  este minorată dacă și numai dacă  $-f$  este majorată. În acest caz avem:

$$\inf_{x \in E} f(x) = -\sup_{x \in E} (-f(x)).$$

De asemenea  $f$  este majorată dacă și numai dacă  $-f$  este minorată și avem:

$$\sup_{x \in E} f(x) = -\inf_{x \in E} (-f(x)).$$

Dăm acum cîteva proprietăți ale funcțiilor mărginete a căror demonstrație este imediată:

1) Dacă  $f: E \rightarrow R$  este mărginită pe  $A \subset E$  și dacă  $B \subset A$  atunci  $f$  este mărginită pe  $B$  și

$$\inf_{x \in B} f(x) \geq \inf_{x \in A} f(x), \quad \sup_{x \in B} f(x) \leq \sup_{x \in A} f(x).$$

2) Dacă  $f: E \rightarrow R$  este mărginită pe submulțimile  $A$  și  $B$ , atunci  $f$  este mărginită pe  $A \cup B$ .

3) Dacă funcțiile  $f, g: E \rightarrow R$  sunt mărginete și dacă  $f \leq g$  atunci:

$$\inf_{x \in E} f(x) \leq \inf_{x \in E} g(x), \quad \sup_{x \in E} f(x) \leq \sup_{x \in E} g(x).$$

4) Dacă funcțiile  $f$  și  $g: E \rightarrow R$  sunt mărginete, atunci

$$\inf_{x \in E} (f(x) + g(x)) \geq \inf_{x \in E} f(x) + \inf_{x \in E} g(x);$$

$$\sup_{x \in E} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in E} f(x) + \sup_{x \in E} g(x).$$

## 5. Funcții monotone

Fie  $f: E \rightarrow R$  o funcție reală de variabilă reală ( $E \subset R$ ) și fie  $A \subset E$ . Spunem că funcția  $f$  este *crescătoare pe  $A$* , dacă, oricare ar fi  $x' < x''$  din  $A$ , avem  $f(x') \leq f(x'')$ .

Spunem că funcția  $f$  este *descrescătoare pe  $A$* , dacă, oricare ar fi  $x' < x''$  din  $A$ , avem  $f(x') \geq f(x'')$ .

Dacă funcția  $f$  este crescătoare (respectiv descrescătoare) pe tot domeniul său de definiție, va fi numită, mai simplu, funcție crescătoare (respectiv descrescătoare) fără a mai specifica mulțimea pe care are loc această proprietate.

Funcțiile crescătoare și funcțiile descrescătoare se numesc *funcții monotone*.

O funcție constantă este și crescătoare și descrescătoare. Reciproc, dacă o funcție este și crescătoare și descrescătoare, atunci ea este constantă.

**O b s e r v a t i e.** O funcție crescătoare se caracterizează prin aceea că o inegalitate dintre valorile argumentului se transformă într-o inegalitate de același sens (eventual, egalitate) între valorile funcției. Așadar, o funcție crescătoare se poate defini și cu ajutorul următoarei implicații:  $x' > x'' \Rightarrow f(x') \geq f(x'')$ .

O funcție descrescătoare transformă o inegalitate dintre valorile argumentului într-o inegalitate de sens contrar (eventual, egalitate) între valorile funcției. Așadar, o funcție descrescătoare se poate caracteriza prin:  $x' > x'' \Rightarrow f(x') \leq f(x'')$ .

Spunem că funcția  $f$  este *strict crescătoare pe  $A$* , dacă, oricare ar fi  $x' < x''$  din  $A$ , avem  $f(x') < f(x'')$ .

Orice funcție strict crescătoare este crescătoare deoarece dacă  $f(x') < f(x'')$  atunci  $f(x') \leq f(x'')$ .

Spunem că funcția  $f$  este *strict descrescătoare pe  $A$* , dacă, oricare ar fi  $x' < x''$  din  $A$ , avem  $f(x') > f(x'')$ .

Orice funcție strict descrescătoare este descrescătoare.

Dacă funcția  $f$  este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe tot domeniul său de definiție, va fi numită, mai simplu, funcție strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare) fără a mai specifica mulțimea pe care are loc această proprietate.

Funcțiile strict crescătoare și strict descrescătoare se numesc *funcții strict monotone*.

Orice funcție strict monotonă este monotonă.

**O b s e r v a t i e.** Funcția  $f$  este strict crescătoare dacă și numai dacă  $x' > x'' \Rightarrow f(x') > f(x'')$ . Funcția  $f$  este strict descrescătoare dacă și numai dacă  $x' > x'' \Rightarrow f(x') < f(x'')$ .

Următoarele proprietăți se verifică imediat:

- 1) Dacă  $f$  și  $g$  sunt (strict) crescătoare și  $\alpha > 0$ , atunci  $f + g$  și  $\alpha f$  sunt (strict) crescătoare.

Așadar mulțimea funcțiilor reale (strict) crescătoare definite pe o mulțime  $E \subset R$  este un *con convex*\* în spațiul vectorial  $\mathcal{F}(E, R)$  al funcțiilor  $f: E \rightarrow R$ .

2) Dacă  $f$  este (strict) crescătoare, atunci  $-f$  este (strict) descrescătoare.

Așadar, mulțimea funcțiilor reale crescătoare definite pe  $E \subset R$  nu este grup pentru adunare.

3) Dacă  $f(x) > 0$  pentru orice  $x \in E$  și dacă  $f$  este (strict) crescătoare, atunci funcția  $\frac{1}{f}$  este (strict) descrescătoare.

Dacă în propozițiile de mai sus se înlocuiesc cuvintele „crescător” și „descrescător” unul cu altul, se obțin alte proprietăți ale funcțiilor monotone.

4) Fie  $f: A \rightarrow B$  și  $g: B \rightarrow R$ , două funcții și  $g \circ f: A \rightarrow R$ , funcția lor compusă.

Dacă  $f$  și  $g$  sunt ambele (strict) crescătoare sau ambele (strict) descrescătoare, atunci funcția compusă  $g \circ f$  este (strict) crescătoare.

Dacă una din funcțiile  $f$  și  $g$  este (strict) crescătoare și cealaltă este (strict) descrescătoare, atunci funcția compusă  $g \circ f$  este (strict) descrescătoare.

**Propozitie.** O funcție strict monotonă este biunivocă.

În adevăr, fie  $f: A \rightarrow B$  o funcție strict monotonă, și  $x' \neq x''$  două puncte din  $A$ . Să presupunem  $x' < x''$ . Atunci  $f(x') < f(x'')$  dacă  $f$  este strict crescătoare, sau  $f(x') > f(x'')$  dacă  $f$  este strict descrescătoare, deci, în orice caz  $f(x') \neq f(x'')$ , adică  $f$  este biunivocă.

Urmează că funcțiile strict monotone admit funcții inverse.

**Propozitie.** Funcția inversă a unei funcții strict crescătoare este strict crescătoare.

Funcția inversă a unei funcții strict descrescătoare este strict descrescătoare.

Fie  $f$  o aplicație strict crescătoare a lui  $A$  pe  $B$ ,  $f(A) = B$ , și fie  $f^{-1}: B \rightarrow A$  funcția inversă. Fie  $y' < y''$ ; să arătăm că  $f^{-1}(y') < f^{-1}(y'')$ . Fie  $x', x''$  punctele din  $A$  pentru care avem

$$f(x') = y', \quad f(x'') = y''$$

deci

$$x' = f^{-1}(y'), \quad x'' = f^{-1}(y'').$$

A arăta că  $f^{-1}(y') < f^{-1}(y'')$  revine la a arăta că  $x' < x''$ .

\* Fie  $E$  un spațiu vectorial. O mulțime  $C \subset E$  se numește *con* (cu virful în origine) dacă pentru orice  $x \in C$  și orice număr  $\alpha > 0$  avem  $\alpha x \in C$ .

Așadar  $C$  este con dacă o dată cu un punct  $x$ , conține întreaga semidreaptă  $\{\alpha x | \alpha > 0\}$  cu virful în origine, care trece prin  $x$ .

Un con  $C \subset E$  se numește *con convex* dacă

$$x + y \in C, \text{ oricare ar fi } x, y \in C$$

adică, dacă o dată cu două puncte  $x$  și  $y$ , conține întregul segment care le unește.

Să presupunem, prin absurd, că  $x' \geqslant x''$ . Deoarece  $f$  este strict crescătoare, avem  $f(x') \geqslant f(x'')$  sau  $y' \geqslant y''$ , ceea ce contrazice alegerea  $y' < y''$ . Așadar,  $y' < y'' \Rightarrow f(y') < f(y'')$ , deci  $f$  este strict crescătoare.

În cazul cînd  $f$  este strict descrescătoare, se procedează în mod analog.

**Propozitie.** Graficele a două funcții reale de variabilă reală, inverse una alteia, sunt simetrice față de prima bisectoare.

Fie  $f$  o aplicație biunivocă a lui  $A$  pe  $B$ , și  $f^{-1}$  aplicația reciprocă a lui  $B$  pe  $A$ :

$$f: A \rightarrow B$$

$$A \leftarrow B : f^{-1}$$

Avem  $y = f(x)$  dacă și numai dacă  $x = f^{-1}(y)$ ,  $x \in A$ ,  $y \in B$ .

Un punct  $(x, y)$  se află pe graficul lui  $f(x \in A)$ , și  $y = f(x)$ , dacă și numai dacă punctul  $(y, x)$  se află pe graficul lui  $f^{-1}(y \in B)$ , și  $x = f^{-1}(y)$ . Dar punctele  $A(x, y)$  și  $B(y, x)$  sunt simetrice față de prima bisectoare.

Într-adevăr (fig. 39), dacă notăm  $C(x, x)$  și  $D(y, y)$ , punctele  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  sunt vîrfurile unui patrat, în care  $CD$  este o diagonală (de-a lungul primei bisectoare) și  $AB$  este cealaltă diagonală. Diagonalele se taie la jumătate, în  $E$ . Avem  $AE = EB$  și  $AB \perp CD$ , deci  $A$  și  $B$  sunt simetrice față de prima bisectoare.

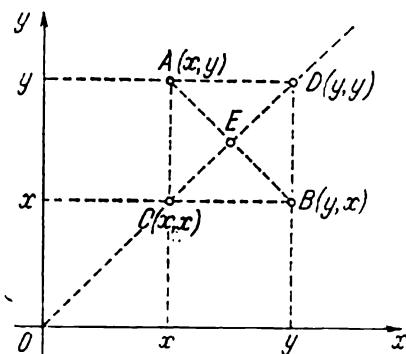


Fig. 39

## 6. Oscilația unei funcții pe o mulțime

Fie  $f: E \rightarrow R$  o funcție definită pe o mulțime oarecare  $E$  și fie  $A \subset E$ . Dacă funcția  $f$  este mărginită pe mulțimea  $A$ , are o margine superioară și o margine inferioară pe această mulțime. Diferența dintre aceste margini se numește *oscilația funcției  $f$  pe mulțimea  $A$*  și se notează  $\omega_f(A)$ :

$$\omega_f(A) = \sup f(A) - \inf f(A).$$

Din această definiție rezultă că  $\omega_f$  are următoarele proprietăți pe mulțimile pe care  $f$  este mărginită:

1)  $\omega_f(A) \geqslant 0$ , oricare ar fi  $A \subset E$ , ( $\omega_f$  este pozitivă), deoarece  $\sup f(A) \geqslant \inf f(A)$ ;

2)  $\omega_f(A) \leqslant \omega_f(B)$  dacă  $A \subset B$  ( $\omega_f$  este crescătoare), deoarece  $\sup f(A) \leqslant \sup f(B)$  și  $\inf f(A) \geqslant \inf f(B)$ ;

$$3) \omega_f(A) = \sup_{\substack{x' \in A \\ x'' \in A}} (f(x') - f(x'')).$$

Într-adevăr,

$$\sup f(A) = \sup_{x' \in A} f(x') \text{ și } \inf f(A) = \inf_{x'' \in A} f(x'') = - \sup_{x'' \in A} (-f(x'')).$$

deci

$$\omega_f(A) = \sup_{x' \in A} f(x') + \sup_{x'' \in A} (-f(x'')) = \sup_{\substack{x' \in A \\ x'' \in A}} (f(x') - f(x'')).$$

Se verifică imediat că dacă mulțimea  $A$  este formată dintr-un singur punct  $x$ , atunci  $\omega_f(\{x\}) = 0$ .

De asemenea, dacă funcția  $f$  este constantă pe  $A$ , atunci  $\omega_f(A) = 0$ .

## 7. Oscilația unei funcții într-un punct

Să presupunem acum că  $f: E \rightarrow R$  este o funcție mărginită definită pe o mulțime de numere reale,  $E \subset R$ , și fie  $x \in E$ . Pentru fiecare vecinătate  $V$  a lui  $x$  să considerăm oscilația  $\omega_f(V \cap E)$  a funcției pe mulțimea  $V \cap E$  și să notăm

$$\omega_f(x) = \inf \omega_f(V \cap E),$$

unde marginea inferioară se ia pentru *toate* vecinătățile  $V$  ale lui  $x$ . Numărul  $\omega_f(x)$  se numește *oscilația funcției  $f$  în punctul  $x$* .

Pentru definirea oscilației într-un punct ne putem folosi numai de intervalele  $I$  care conțin pe  $x$  sau care au centrul în  $x$ :

$$\omega_f(x) = \inf_{I \ni x} \omega_f(I \cap E),$$

deoarece orice vecinătate  $V$  a lui  $x$ , conține un interval cu centrul în  $x$ .

Dacă  $x$  este un punct izolat al lui  $E$ , atunci există o vecinătate  $V$  a lui  $x$  astfel încât  $V \cap E = \{x\}$ . În acest caz  $\omega_f(V \cap E) = \omega_f(\{x\}) = 0$  și deci  $\omega_f(x) = 0$ .

Oscilația  $\omega_f(x)$  este o funcție pozitivă, definită pentru orice  $x$  din  $E$ . Această funcție poate fi nemărginită, deși funcția  $f$  de la care s-a plecat a fost presupusă mărginită. Pentru funcțiile cu oscilația mărginită definite pe mulțimi compacte, avem următoarea propoziție, care va fi folosită pentru demonstrarea criteriului de integrabilitate al lui Lebesgue.

**Propozitie.** Să presupunem că funcția  $f: E \rightarrow R$  este definită pe o mulțime compactă  $E$  și că oscilația sa  $\omega_f(x)$  este mărginită, și să notăm

$$\omega = \sup_{x \in E} \omega_f(x).$$

Atunci pentru orice număr  $\varepsilon > 0$ , există un număr  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât oricare ar fi intervalul  $I$  de lungime  $< \delta(\varepsilon)$ , să avem  $\omega_f(I \cap E) < \omega + \varepsilon$ .

Prin ipoteză, avem  $\omega_f(x) \leq \omega$ , oricare ar fi  $x \in E$ . Fie  $\varepsilon > 0$  și  $x \in E$ . Deoarece

$$\omega_f(x) = \inf_{I \ni x} \omega_f(I \cap E),$$

există un interval  $I_x$  cu centrul în  $x$ , astfel încât să avem

$$\omega_f(I_x \cap E) < \omega_f(x) + \varepsilon \leq \omega + \varepsilon.$$

Procedînd astfel pentru fiecare  $x \in E$ , obținem o familie  $(I_x)_{x \in E}$  de intervale deschise, care acoperă pe  $E$ , astfel încât pentru fiecare  $x \in E$  să avem

$$\omega_f(I \cap E) < \omega + \varepsilon.$$

În fiecare interval  $I_x$ , să alegem un interval deschis  $J_x$ , cu centrul în  $x$ , și cu lungimea egală cu jumătatea lungimii lui  $I_x$ . Familia de intervale deschise  $(J_x)_{x \in E}$  acoperă de asemenea mulțimea compactă  $E$ . Conform teoremei lui Borel-Lebesgue, din această acoperire se poate extrage o acoperire finită a lui  $E$ :

$$J_{x_1}, J_{x_2}, \dots, J_{x_n}.$$

intervalele fiind așezate în ordinea crescătoare a indicilor:

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

Să notăm cu  $\delta$  lungimea celui mai mic dintre aceste intervale. Numărul  $\delta$  astfel obținut este numărul căutat. Fie într-adevăr un interval  $I$  de lungime  $< \delta$ . Dacă  $I \cap E = \emptyset$ , atunci  $\omega_f(I \cap E) = 0 < \omega + \varepsilon$ . Să presupunem deci că  $I \cap E \neq \emptyset$ . În acest caz, intervalul  $I$  se află conținut în întregime în reuniunea a două intervale consecutive,  $J_{x_i} \cup J_{x_{i+1}}$ . Presupunând că intervalul  $I_{x_i}$  are lungime mai mare decât  $I_{x_{i+1}}$ , avem  $J_{x_i} \cup J_{x_{i+1}} \subset I_{x_i}$ , deci  $I \subset I_{x_i}$  și deci

$$\omega_f(I \cap E) \leq \omega_f(I_{x_i} \cap E) < \omega + \varepsilon$$

și propoziția este demonstrată.

## Capitolul III

# ŞIRURI DE NUMERE

### § 1. Generalități

#### 1. Denumiri și notații

Amintim că o funcție reală  $n \rightarrow a(n)$  definită pe mulțimea  $N$  a numerelor naturale se numește *șir de numere reale*. Pentru șiruri se obișnuiește notația indicială  $n \rightarrow a_n$ , astfel încât un șir de numere reale este o familie  $(a_n)_{n \in N}$  de numere reale, cu indici numerele naturale. Cind nu va fi pericol de confuzie, un șir va fi notat  $(a_n)$  fără a mai specifica mulțimea indicilor, subînțelegindu-se că aceasta este mulțimea  $N$  a numerelor naturale.

Deoarece în continuare vor fi considerate mai ales șiruri de numere reale, acestea vor fi numite, simplu, șiruri.

Să scriem explicit corespondența stabilită de funcția șir :

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & \dots, & n, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ a_1, & a_2, & a_3, & \dots, & a_n, & \dots \end{array}$$

Înlăturând mulțimea de definiție  $1, 2, \dots, n, \dots$  care se subînțelege, rămîn numai valorile funcției șir, în ordinea crescătoare a indicilor :

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Aceasta este scrierea obișnuită a șirului, în care, aparent, nu este pus în evidență caracterul de funcție al șirului. La o examinare mai atentă apare însă caracterul de funcție al șirului, dacă asociem fiecărui indice  $n$  numărul  $a_n$ .

Numerele  $a_1, a_2, a_3, \dots$  se numesc *termenii* șirului :  $a_1$  este primul termen,  $a_2$  este al doilea termen etc. Se zice de asemenea că  $a_1$  este termenul de rang 1 ;  $a_2$  este termenul de rang 2 etc. Un termen  $a_n$  al șirului, în care nu se precizează numărul natural  $n$ , se numește în mod obișnuit *termen general* al șirului.

Atunci cînd se dă un sir concret de numere, în care indicii nu mai sunt scriși, caracterul de funcție al sirului se pune în evidență dacă asociem numărului 1 primul termen din sir, numărului 2 al doilea termen din sir etc.

Doi termeni diferenți  $a_i$  și  $a_j$ , ( $i \neq j$ ), pot avea aceeași valoare.

*Exemple de siruri:*

- 1) 1, 2, 3, 4, ... (sirul numerelor naturale).
- 2) 2, 4, 6, 8, ... (sirul numerelor naturale pare).
- 3) 1, 3, 5, 7, ... (sirul numerelor naturale impare).
- 4) 2, 1, 4, 3, 6, 5, ... (sir de numere naturale).
- 5) -1, -2, -3, -4, ... (sirul numerelor întregi strict negative).
- 6) 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...
- 7) 1, 1, 1, 1, ...
- 8) 0, 0, 0, 0, ...

Potrivit egalității a două funcții, două siruri  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt egale dacă și numai dacă au termenii corespunzători acelaiași indice egali:

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n, \dots$$

Un sir  $(a_n)$  este *constant* dacă este o funcție constantă, adică dacă toți termenii au aceeași valoare.

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \dots = a_n = \dots$$

Dacă notăm cu  $a$  valoarea comună a tuturor termenilor, un sir constant se scrie:

$$a, a, a, \dots, a, \dots$$

Termenii unui sir se pot reprezenta prin puncte pe dreaptă. Dacă doi sau mai mulți termeni au aceeași valoare, ei se reprezintă, evident, prin același punct pe dreaptă. De exemplu, toți termenii unui sir constant se reprezintă prin același punct.

## 2. Operații cu siruri

Fie  $(a_n)$  și  $(b_n)$  două siruri:

$$(a_n) : a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

$$(b_n) : b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$$

Din definiția operațiilor cu funcțiile se deduc operațiile cu sirurile:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) : a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots$$

$$\alpha(a_n) = (\alpha a_n) : \alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n, \dots$$

$$(a_n)(b_n) = (a_n b_n) : a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n, \dots$$

$$\frac{1}{(a_n)} = \left(\frac{1}{a_n}\right) : \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}, \dots \quad (\text{dacă } a_n \neq 0 \text{ pentru orice } n \in N).$$

În particular :

$$-(a_n) = (-a_n) : -a_1, -a_2, \dots, -a_n, \dots$$

$$(a_n) - (b_n) = (a_n - b_n) : a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n, \dots$$

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} = \left( \frac{a_n}{b_n} \right) : \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots, \text{ dacă } b_n \neq 0 \text{ pentru orice } n \in N.$$

Șirul constant  $0, 0, \dots, 0, \dots$  este zero pentru adunarea șirurilor, iar șirul constant  $1, 1, \dots, 1, \dots$  este unitate pentru înmulțirea șirurilor. Mulțimea șirurilor de numere reale este o *algebră*.

"

### 3. Șiruri mărginite

\* Un șir  $(a_n)$  este *minorat* (sau *mărginit inferior*) dacă există un număr  $\alpha$  astfel încât

$$\alpha \leq a_n \text{ pentru orice } n \in N.$$

Șirul  $(a_n)$  este *majorat* (sau *mărginit superior*) dacă există un număr  $\beta$  astfel încât

$$a_n \leq \beta \text{ pentru orice } n \in N.$$

Șirul  $(a_n)$  este *mărginit*, dacă există două numere  $\alpha < \beta$ , astfel încât să avem

$$\alpha \leq a_n \leq \beta \text{ pentru orice } n \in N.$$

Considerațiile din capitolul II, § 5, asupra funcțiilor mărginite, se aplică, în particular, șirurilor numerice :

**Propoziția 1.** Un șir  $(a_n)$  este mărginit dacă și numai dacă există un număr  $M > 0$  astfel încât să avem

$$|a_n| \leq M, \text{ pentru orice } n \in N.$$

În cazul șirurilor însă este suficient ca inegalitatea să fie verificată numai începând de la un anumit rang :

**Propoziția 2.** Dacă există un număr  $M > 0$  și un număr  $n_0$  astfel încât să avem

$$|a_n| \leq M, \text{ pentru } n \geq n_0$$

atunci șirul  $(a_n)$  este mărginit.

Într-adevăr, luând  $M' = \max (|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0}|, M)$ , avem

$$|a_n| \leq M', \quad \text{pentru orice } n \in N,$$

deci  $(a_n)$  este mărginit.

Se verifică fără dificultate că dacă  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt siruri mărginite, iar  $\alpha \in R$ , atunci sirurile  $(a_n + b_n)$ ,  $(\alpha a_n)$  și  $(a_n b_n)$  sunt de asemenea mărginite, deci: *mărgimea sirurilor mărginite este o algebră*.

Algebra sirurilor mărginite se notează cu litera  $m$ .

Ca și pentru funcții, pentru un sir  $(a_n)$  se definește marginea inferioară  $m = \inf_{n \in N} a_n$ , caracterizată de următoarele proprietăți:

1)  $m \leq a_n$ , pentru orice  $n$ ;

2) pentru orice  $\alpha > m$ , există un termen  $a_n < \alpha$  și marginea superioară  $M = \sup_{n \in N} a_n$ , caracterizată de următoarele proprietăți:

1)  $a_n \leq M$ , pentru orice  $n$ ;

2) pentru orice  $\alpha < M$ , există un termen  $a_n > \alpha$ .

*Exemplu.* 1. Orice sir constant  $a, a, a, \dots, a, \dots$  este mărginit (putem lua  $\alpha = \beta = a$ , deci  $\alpha \leq a_n \leq \beta$ , pentru orice  $n \in N$ ).

2)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  este mărginit (avem  $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ ).

3)  $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$  este mărginit (avem  $-5 \leq -\frac{1}{n} \leq 7$ ).

4)  $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$  este mărginit (avem  $|a_n| \leq 1$ ).

5) Dacă  $0 < a < 1$ , avem  $0 < a^n < 1$  pentru orice  $n \in N$ , deci sirul  $1, a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$  este mărginit. În particular, sirurile următoare sunt mărginite:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots; 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \dots$

Sirurile care nu sunt mărginite se numesc siruri nemărginite. Prin negarea proprietății de mărginire, obținem următoarele definiții:

Un sir  $(a_n)$  este nemărginit, dacă și numai dacă, oricare ar fi numărul  $M > 0$ , există un termen  $a_n$  din sir astfel încât  $|a_n| > M$ .

Sau:

Un sir  $(a_n)$  este nemărginit, dacă și numai dacă, oricare ar fi numerele  $\alpha < \beta$ , există un termen  $a_n$  din sir care nu se află cuprins între  $\alpha$  și  $\beta$ , deci pentru care avem sau  $a_n < \alpha$ , sau  $\beta < a_n$ .

În limbaj geometric, un sir  $(a_n)$  este nemărginit dacă în afara oricărui interval mărginit există cel puțin un termen din sir.

Un sir este nemărginit fie dacă nu este majorat, fie dacă nu este minorat, fie dacă nu este nici majorat, nici minorat.

*Exemple de siruri nemărginite.* 1)  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$  este minorat (de 0) dar nu este majorat. În adevăr, oricare ar fi  $M > 0$ , există un număr natural  $n > M$ .

2)  $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$  este majorat (de 0), dar nu este minorat; oricare ar fi  $M > 0$ , există  $n > M$ , deci  $-n < -M$ .

3)  $0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots, 0, n, \dots$  este minorat.

4) Dacă  $a > 1$ , sirul  $1, a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$  este nemărginit. În adevăr, folosind inegalitatea lui Bernoulli, am dedus că oricare ar fi  $M > 0$ , există un număr natural  $n$  astfel că  $a^n \geq M$ , deci sirul nu este majorat.

În particular, sirurile

$$1, 2, 2^2, 2^3, \dots$$

$$1, 10, 10^2, 10^3, \dots$$

sunt nemărginite.

5)  $1^k, 2^k, 3^k, \dots, n^k, \dots$  ( $k$  natural) este nemărginit.

Într-adevăr, oricare ar fi  $M > 0$ , există un număr natural  $n > M$ . Dar  $k \geq 1$ , deci  $n^k \geq n^1$ , și deci  $n^k > M$ .

6) Sirul  $1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$  nu este nici majorat, nici minorat.

#### 4. Siruri monotone

Considerațiile din capitolul II, § 5 asupra funcțiilor monotone se aplică, în particular, sirurilor numerice. Astfel:

Un sir  $(a_n)$  este crescător dacă

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$$

(fiecare termen este mai mic sau egal cu cel următor).

Un sir  $(a_n)$  este descrescător dacă

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$$

(fiecare termen este mai mare sau egal cu cel următor).

Sirurile crescătoare și sirurile descrescătoare se numesc siruri monotone.

Un sir  $(a_n)$  este strict crescător dacă

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$$

Orice sir strict crescător este crescător, deoarece, dacă  $a_n < a_{n+1}$ , atunci  $a_n \leq a_{n+1}$ .

Un sir  $(a_n)$  este strict descrescător, dacă

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$$

Orice sir strict descrescător este descrescător. Sirurile strict crescătoare și sirurile strict descrescătoare se numesc siruri strict monotone.

Orice sir strict monoton este un sir monoton.

Se verifică fără dificultate următoarele propoziții:

1) Dacă  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt crescătoare (respectiv strict crescătoare) și dacă  $\alpha > 0$ , atunci sirurile  $(a_n + b_n)$  și  $(\alpha a_n)$  sunt crescătoare (strict crescătoare). Așadar multimea sirurilor crescătoare (respectiv strict crescătoare) este un con în spațiul vectorial  $\mathbb{R}$  al tuturor sirurilor.

2) Dacă  $(a_n)$  este crescător (respectiv strict crescător), atunci sirul  $(-a_n)$  este descrescător (respectiv strict descrescător).

Așadar, multimea sirurilor crescătoare nu este grup pentru adunare.

3) Dacă  $(a_n)$  este un sir crescător (respectiv strict crescător) de numere  $> 0$ , atunci sirul  $\left(\frac{1}{a_n}\right)$  este descrescător (respectiv strict descrescător).

Dacă în proprietățile de mai sus se înlocuiesc unul cu altul cuvintele „crescător” și „descrescător”, se obțin alte proprietăți ale sirurilor monotone.

*Exemple de siruri monotone:* 1) Orice sir constant

$$a, a, a, \dots, a, \dots$$

este și crescător și descrescător. Reciproc, dacă un sir este sir crescător și descrescător atunci este constant.

2) 1, 2, 3, ...,  $n$ , ... este strict crescător.

3) 1, 1, 2, 2, 3, 3, ... este crescător.

4) 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ , ...,  $\frac{1}{n}$ , ... este strict descrescător.

5) Dacă  $a > 1$ , sirul

$$1, a, a^2, \dots, a^n, \dots$$

este strict crescător. Într-adevăr, deoarece  $a > 1$  și  $n < n + 1$  avem:  $a^n < a^{n+1}$ , oricare ar fi  $n \in N$ .

În particular, sirurile

$$1, 2, 2^2, \dots, 2^n, \dots; 1, 10, 10^2, \dots, 10^n, \dots$$

sunt strict crescătoare.

6) Dacă  $0 < a < 1$ , sirul

$$1, a, a^2, \dots, a^n, \dots$$

este strict descrescător; deoarece  $0 < a < 1$  și  $n < n + 1$  avem

$$a^n > a^{n+1} \text{ oricare ar fi } n \in N.$$

În particular sirurile

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots; 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \dots, \frac{1}{10^n}, \dots$$

sunt strict descrescătoare.

7) Sirul

$$1^k, 2^k, 3^k, \dots, n^k, \dots (k \text{ natural})$$

este strict crescător. Într-adevăr, deoarece  $n < n + 1$ , avem  $n^k < (n + 1)^k$  oricare ar fi  $n \in N$ .

*Exemple de siruri care nu sunt monotone.* 1) 0, 1, 0, 1, ..., 0, 1, ...

2) 0, 1, 0, 2, 0, 3, ..., 0,  $n$ , ...

3) 1, -2, 3, -4, 5, -6, ...

## 5. Subsiruri

Fie  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  un sir. Dacă

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_p < \dots$$

este un sir strict crescător de numere naturale, sirul

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots, a_{n_p}, \dots$$

se numește subsir al sirului inițial.

Dacă  $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3, \dots, n_p = p, \dots$  subșirul

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_p}, \dots$$

coincide cu sirul inițial.

*Exemplu.* Fie sirul numerelor naturale 1, 2, 3, ...,  $n, \dots$ . Sirurile 2, 4, 6, ...; 1, 3, 5, ...; 1<sup>1</sup>, 2<sup>2</sup>, 3<sup>3</sup>, ...;  $n^n, \dots$ ; 1<sup>k</sup>, 2<sup>k</sup>, 3<sup>k</sup>, ...,  $n^k, \dots$ ; 2<sup>k</sup>, 4<sup>k</sup>, 6<sup>k</sup>, ...; 1, 2, 2<sup>2</sup>, ..., 2<sup>n</sup>, ...; 1, 10, 10<sup>2</sup>, ..., 10<sup>n</sup> ... sint subșiruri ale sale.

*O b s e r v a t i i.* 1° Fie  $n_1 < n_2 < \dots < n_p < \dots$  un sir strict crescător de numere naturale. Deoarece  $n_2 > n_1$ , avem  $n_2 > 1$ , deci  $n_2 \geq 2$ .

Presupunind că  $n_p \geq p$ , deoarece  $n_{p+1} > n_p$  avem  $n_{p+1} > p$ , deci  $n_{p+1} \geq p + 1$ . Așadar, oricare ar fi  $p$ , avem:

$$n_p \geq p.$$

2° Un subșir  $(a_{n_p})_{p \in N}$  al sirului  $(a_n)_{n \in N}$  se obține prin compunerea sirului strict crescător de numere naturale  $p \rightarrow n_p$  cu sirul  $n \rightarrow a_n$ :

$$p \rightarrow n_p \rightarrow a_{n_p}.$$

•

## § 2. Șiruri convergente

### 1. Un exemplu de sir convergent

Să considerăm sirul

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

în care  $a_n = \frac{1}{n}$ , ( $n \in N$ ). Ne dăm seama, foarte ușor, că termenii acestui sir descresc necontentit, se apropiie tot mai mult de zero.

Vom încerca să cuprindem într-o formulare matematică precisă această constatare de ordin experimental.

Pentru a verifica matematic că termenii sirului precedent se apropii în adevăr de zero cînd rangul lor crește, vom proceda astfel: ne vom da un număr pozitiv  $\varepsilon$  (după voie, îl putem deci presupune oricît de mic voim) și vom verifica dacă există un rang  $v$  începînd de la care termenii sirului să scadă toți sub  $\varepsilon$ . Pentru aceasta trebuie ca  $n > v$  să implice

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Dar  $n > v$  este echivalent cu  $\frac{1}{n} < \frac{1}{v}$ . Dacă deci avem:

$$\frac{1}{v} < \varepsilon,$$

adică :

$$v > \frac{1}{\varepsilon},$$

atunci cu atit mai mult vom avea  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , pentru toți termenii de rang mai mare decit  $v_\varepsilon$ .

Inegalitatea precedentă poate fi verificată, de exemplu, dacă luăm pentru  $v$  cel mai mic număr natural care depășește pe  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

După cum se vede, rangul  $v$  depinde de  $\varepsilon$ , adică este o funcție de  $\varepsilon$ . Îl vom scrie astfel:  $v_\varepsilon$ .

Așadar: Pentru orice număr  $\varepsilon > 0$  există un rang  $v_\varepsilon$  astfel încât  $n > v_\varepsilon$  să implice  $a_n < \varepsilon$ .

Această propoziție constituie constatarea, formulată în termeni matematici, a faptului intuit experimental la început, anume că termenii șirului considerat se apropie tot mai mult de numărul zero.

Dacă la fiecare termen al șirului considerat am adăuga numărul 1, am obține un alt șir

$$b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

cu  $b_n = \frac{1}{n} + 1 = \frac{n+1}{n}$ . Din raționamentul făcut mai sus rezultă că: Pentru orice număr  $\varepsilon > 0$  există un rang  $v_\varepsilon$  astfel încât  $n > v_\varepsilon$  să implice

$$0 < b_n - 1 < \varepsilon.$$

Această propoziție constituie constatarea, matematic formulată, a faptului că termenii noului șir se apropie neconitenit de numărul 1.

Propoziției precedente i se poate da un aspect geometric: Să considerăm vecinătatea  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  a punctului 1. Pentru  $n > v_\varepsilon$ , toți termenii șirului  $(b_n)$  vor aparține acestei vecinătăți. În afară va rămaîne numai un număr finit de termeni, anume termenii:

$$b_1, b_2, \dots, b_{v_\varepsilon}.$$

Bineînțeles, numărul acestor termeni, care este totdeauna finit, depinde de  $\varepsilon$ .

Reciproc, să presupunem că orice vecinătate  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  a punctului 1 lasă în afară un număr finit (depinzind de  $\varepsilon$ ) de termeni. Dacă  $b_{v_\varepsilon}$  este termenul de rang cel mai înalt lăsat afară, pentru  $n > v_\varepsilon$  toți termenii șirului se vor afla în intervalul  $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ .

## 2. Definiția limitei

Considerațiile din exemplul precedent ne conduc la următoarea

**D e f i n i t i e.** Un număr  $a$  este limita unui șir  $(a_n)$  dacă orice vecinătate a lui  $a$  conține toți termenii șirului, cu excepția unui număr finit de termeni.

Cu cât vecinătatea lui  $a$  este mai mică, cu atât se vor afla în afara sa mai mulți termeni, însă tot în număr finit.

În loc de a spune că  $a$  este limita sirului  $(a_n)$  se spune de asemenea că sirul  $(a_n)$  are limita  $a$ , sau că sirul  $(a_n)$  este convergent (sau converge) către  $a$ , sau încă, sirul  $(a_n)$  tinde către  $a$ . În scris:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

(Citit: limită de  $a_n$  cind  $n$  tinde către infinit este egal cu  $a$ )  
sau:

$$\lim_n a_n = a$$

(citit: limita de  $a_n$  este egală cu  $a$ )  
sau încă:

$$a_n \xrightarrow{n} a, \quad a_n \rightarrow a$$

(citit:  $a_n$  tinde către  $a$ ).

Şirurile care au limită se numesc siruri convergente.

Şirurile care nu sunt convergente vor fi numite siruri divergente.

Așadar, sirul  $(a_n)$  este divergent dacă nici un număr real nu este limita sa. Din definiția limitei unui sir, deducem, prin negare următoarea

**Propozitie.** Un sir  $(a_n)$  este divergent dacă și numai dacă, oricare ar fi numărul  $a$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $a$ , în afara căreia se află o infinitate de termeni ai sirului.

**Exemplu.** 1) Sirul constant  $a, a, a, \dots, a, \dots$  este convergent și are limita  $a$ .

Intr-adevăr, toți termenii sirului coincid în reprezentarea pe dreaptă în punctul  $a$ , deci orice vecinătate a lui  $a$  conține toți termenii sirului (fără excepție), adică  $a$  este limita sirului.

Așadar, dacă  $a_n = a$  pentru orice  $n \in N$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Scriem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a = a.$$

2) Din exemplul considerat mai sus deducem că sirul

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ , are limita 0 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

**Exemple de siruri divergente.** 1) Sirul numerelor naturale  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ , este divergent. Fie  $a$  un număr oarecare și vecinătatea sa  $V = \left(a - \frac{1}{4}, a + \frac{1}{4}\right)$  de lungime  $\frac{1}{2}$ . Deoarece distanța dintre două numere naturale este cel puțin egală cu 1, în această vecină-

tate se află cel mult un număr natural, deci în afara ei se află o infinitate de numere naturale. Deducem că  $a$  nu este limita acestui sir. Cum  $a$  a fost ales arbitrar rezultă că nici un număr nu este limită a acestui sir, deci sirul nu este convergent.

2) Se demonstrează ca mai sus că sirurile

$$-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$$

$$1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$$

sunt divergente.

3) Sirul  $0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots$  este divergent.

Să arătăm întii că 1 nu este limită a sirului. În adevăr, în afara vecinătății  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$  a lui 1 se află o infinitate de termeni ai sirului, anume toți termenii egali cu 0 (fig. 40). Deci 1 nu este limită a sirului.

Se arată la fel că 0 nu este limită a sirului, alegind vecinătatea  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  a lui 0.

Dacă  $a$  este un număr oarecare diferit de 0 și de 1, putem alege o vecinătate  $V$  a sa care nu conține nici pe 0 nici pe 1, și în afara sa se află toți termenii sirului. Deci nici  $a$  nu este limită sirului. Rezultă că sirul nu are nici o limită, adică este divergent.

**O b s e r v a t i e.** Din faptul că într-o vecinătate a lui  $a$  se află o infinitate de termeni ai sirului, nu rezultă că în afara acestei vecinătăți se află neapărat un număr finit de termeni.

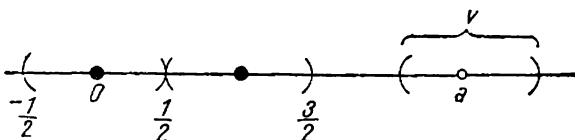


Fig. 40

De exemplu: atât în afara cit și în interiorul vecinătății  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  a lui 0 se află cîte o infinitate de termeni ai sirului  $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

Vom da acum o formulare echivalentă a definiției limitei unui sir.

Reamintim că intervalele de formă  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  cu  $\varepsilon > 0$  sunt vecinătățile simetrice ale lui  $a$ , și că orice vecinătate  $V$  a lui  $a$  conține o vecinătate simetrică a lui  $a$  (cap. II, § 4). A spune că un termen  $a_n$  se află într-o vecinătate  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  a lui  $a$ , adică  $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , înseamnă  $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ , adică  $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ , adică  $|a_n - a| < \varepsilon$ , iar aceasta înseamnă că distanța dintre  $a_n$  și  $a$  este  $< \varepsilon$ .

Formularea echivalentă a definiției limitei unui sir este dată de următoarea

**T e o r e m ă.** Un număr  $a$  este limita unui sir  $(a_n)$  dacă și numai dacă, pentru orice număr  $\varepsilon > 0$ , există un număr  $N(\varepsilon)$  astfel, încit oricare ar fi  $n \geq N(\varepsilon)$ , să avem

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Să presupunem întii că  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Fie  $\varepsilon > 0$  oarecare. După cum am remarcat mai sus, termenii  $a_n$  din sir care nu verifică inegalitatea  $|a_n - a| < \varepsilon$  se află în afara vecinătății  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  deci sunt în număr finit; putem găsi deci un termen  $a_N$  după care, în sir, nu se mai află nici unul dintre aceștia. Dacă notăm  $N(\varepsilon) = N + 1$ , atunci oricare ar fi  $n \geq N(\varepsilon)$

avem  $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , adică  $|a_n - a| < \varepsilon$  și prima implicație a teoremei este demonstrată.

Reciproc, să presupunem verificată condiția din enunțul teoremei. Fie  $V$  o vecinătate a lui  $a$ . După cum am remarcat mai sus, vecinătatea  $V$  conține o vecinătate simetrică a lui  $a$ , de forma  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  cu  $\varepsilon > 0$ . Conform presupunerii, pentru acest  $\varepsilon$  există  $N(\varepsilon)$  astfel încât pentru  $n \geq N(\varepsilon)$  să avem  $|a_n - a| < \varepsilon$ , adică  $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset V$ . În afara vecinătății  $V$  a lui  $a$  se află cel mult primii  $N(\varepsilon) - 1$  termeni, în număr finit. Urmează că  $a$  este limita sirului  $(a_n)$  și cu aceasta și a doua implicație a teoremei este demonstrată.

Din această teoremă, deducem, prin negație, următoarea

**Propozitie.** Sirul  $(a_n)$  este divergent dacă și numai dacă, pentru orice număr  $a \in R$ , există un număr  $\varepsilon_0 > 0$  (care depinde de  $a$ ) cu proprietatea că oricare ar fi  $N$ , există un număr  $n \geq N$  ( $n$  depinde de  $N$  și de  $a$ ) astfel încât să avem

$$|a_n - a| \geq \varepsilon_0.$$

**Observații.** 1° Inegalitatea  $|a_n - a| < \varepsilon$  din enunțul teoremei poate fi înlocuită cu inegalitatea  $|a_n - a| \leq \varepsilon$ .

Intr-adevăr, dacă  $|a_n - a| < \varepsilon$ , atunci putem scrie de asemenea  $|a_n - a| \leq \varepsilon$ .

Reciproc, dacă pentru fiecare  $\varepsilon > 0$ , inegalitatea  $|a_n - a| \leq \varepsilon$  este satisfăcută pentru  $n \geq N'(\varepsilon)$ , atunci avem  $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  pentru  $n \geq N' \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)$  și deci  $|a_n - a| < \varepsilon$  pentru  $n \geq N(\varepsilon) = N' \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)$ .

2° Inegalitatea  $n \geq N(\varepsilon)$  din enunțul teoremei poate fi înlocuită cu inegalitatea strictă  $n > N(\varepsilon)$ .

Intr-adevăr, dacă  $|a_n - a| < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq N(\varepsilon)$ , atunci avem  $|a_n - a| < \varepsilon$  pentru orice  $n > N(\varepsilon)$ .

Reciproc, dacă  $|a_n - a| < \varepsilon$  pentru orice  $n > N'(\varepsilon)$ , atunci, notind  $N(\varepsilon) = N'(\varepsilon) + 1$  avem  $|a_n - a| < \varepsilon$  pentru orice  $n \geq N(\varepsilon)$ .

3° Dacă pentru fiecare  $\varepsilon > 0$  există  $N'(\varepsilon)$  astfel ca

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq N'(\varepsilon),$$

atunci, notind  $N(\varepsilon) = N' \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)$ , avem

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru orice } n \geq N(\varepsilon).$$

În general, notind  $N(\varepsilon) = N'(\alpha\varepsilon)$ ,  $\alpha > 0$ , avem

$$|a_n - a| < \alpha\varepsilon \text{ pentru orice } n \geq N(\varepsilon).$$

4° Dacă  $a_n \rightarrow a$  și  $b_n \rightarrow b$ , dacă  $\alpha > 0$  și  $\beta > 0$ , atunci pentru fiecare  $\varepsilon > 0$  putem găsi același număr  $N(\varepsilon)$  pentru ambele siruri astfel ca

$$|a_n - a| < \alpha\varepsilon \text{ și } |b_n - b| < \beta\varepsilon \text{ oricare ar fi } n \geq N(\varepsilon).$$

Fie intr-adevăr  $\varepsilon > 0$ ; deoarece  $a_n \rightarrow a$ , pentru acest  $\varepsilon$  există un număr  $N'(\varepsilon)$  astfel ca

$$|a_n - a| < \alpha\varepsilon \text{ pentru orice } n \geq N'(\varepsilon).$$

Deoarece  $b_n \rightarrow b$ , pentru același număr  $\epsilon$  există un număr  $N''(\epsilon)$  astfel ca

$$|b_n - b| < \beta\epsilon.$$

Să luăm  $N(\epsilon) = \max N'(\epsilon), N''(\epsilon)$ ; dacă  $n \geq N(\epsilon)$ , atunci  $n \geq N'(\epsilon)$  și  $n \geq N''(\epsilon)$ , deci

$$|a_n - a| < \alpha\epsilon \text{ și } |b_n - b| < \beta\epsilon \text{ pentru orice } n \geq N(\epsilon).$$

5° Condiția ca  $\epsilon$  să fie strict pozitiv este esențială.

În adevară, singurele șiruri care îndeplinesc condiția din enunțul teoremei și pentru  $\epsilon = 0$ , sunt șirurile care verifică egalitatea  $a_n = a$ , începând de la un anumit rang  $N(0)$ , deci care diferă de un șir constant numai printr-un număr finit de termeni.

6° Vom folosi definiția cu vecinătăți sau definiția cu  $\epsilon$  a limitei unui șir, după cum va fi mai convenabil în raționamente.

**Criteriu de convergență.** Fie  $(a_n)$  și  $(\alpha_n)$  două șiruri și  $a \in R$ . Dacă  $|a_n - a| \leq |\alpha_n|$  pentru orice  $n$  și dacă  $\alpha_n \rightarrow 0$ , atunci  $a_n \rightarrow a$ .

În adevară, fie  $\epsilon > 0$ . Deoarece  $\alpha_n \rightarrow 0$ , există un număr  $N(\epsilon)$  astfel ca pentru orice  $n \geq N(\epsilon)$  să avem  $|\alpha_n| < \epsilon$ . Atunci, cu atât mai mult  $|a_n - a| < \epsilon$  pentru  $n \geq N(\epsilon)$ , deci  $a_n \rightarrow a$ .

În particular, dacă  $|a_n| \leq |\alpha_n|$  și dacă  $\alpha_n \rightarrow 0$ , atunci  $a_n \rightarrow 0$ .

### 3. Șiruri convergente către 0

Din teorema din numărul precedent, deducem, în particular, luând  $a = 0$ ,

**Propozitia 1.**  $a_n \rightarrow 0$  dacă și numai dacă, pentru orice  $\epsilon > 0$ , există un număr  $N(\epsilon)$  astfel încât să avem

$$|a_n| < \epsilon, \text{ oricare ar fi } n \geq N(\epsilon).$$

Prin negație, deducem apoi

**Propozitia 2.** Pentru ca  $(a_n)$  să nu aibă limita 0 este necesar și suficient să existe un număr  $\epsilon_0 > 0$  cu proprietatea că pentru orice număr  $N$  există  $n > N$  cu  $|a_n| \geq \epsilon_0$ .

Însemnatatea specială a șirurilor convergente către 0 rezultă din

**Propozitia 3.** Avem  $a_n \rightarrow a$ , dacă și numai dacă  $a_n - a \rightarrow 0$ .

Într-adevară, condiția din enunțul teoremei de la numărul precedent: pentru orice  $\epsilon > 0$ , există  $N(\epsilon)$  astfel încât

$$|a_n - a| < \epsilon, \text{ pentru } n \geq N(\epsilon)$$

înseamnă, în același timp, că  $a_n \rightarrow a$  și că  $a_n - a \rightarrow 0$ .

**C o r o l a r.** Avem  $a_n \rightarrow a$  dacă și numai dacă sirul  $(a_n)$  se poate scrie sub forma

$$a_n = a + \alpha_n$$

cu  $\alpha_n \rightarrow 0$

Într-adevăr, notând  $\alpha_n = a_n - a$ , avem  $a_n = a + \alpha_n$  și din propoziția precedentă deducem că  $a_n \rightarrow a$  dacă și numai dacă  $\alpha_n \rightarrow 0$ .

Exemple de siruri convergente către 0 se obțin cu ajutorul propoziției următoare

**P r o p o z i ᄀ i a 4.** Dacă  $(a_n)$  este un sir crescător și nemărginit de numere  $> 0$ , atunci  $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ .

Fie  $\epsilon > 0$ . Să notăm  $A = \frac{1}{\epsilon}$ . Deoarece  $(a_n)$  este nemărginit există un termen  $a_N > A$ . Deoarece  $(a_n)$  este crescător, pentru orice  $n \geq N$  avem  $a_n \geq a_N$ , deci  $a_n > A$ , de unde  $0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{A} < \epsilon$ . Notând  $N(\epsilon) = N$ , avem deci

$$\left| \frac{1}{a_n} \right| < \epsilon, \text{ pentru orice } n \geq N(\epsilon),$$

deci  $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ .

**P r o p o z i ᄀ i a 5.** Dacă  $a_n \rightarrow 0$  și dacă  $a_n \neq 0$  pentru orice  $n$ , atunci sirul  $\left( \frac{1}{a_n} \right)$  este nemărginit.

Într-adevăr fie  $M > 0$  un număr oarecare. Să notăm  $\epsilon = \frac{1}{M} > 0$ . Deoarece  $a_n \rightarrow 0$ , există un număr  $N(\epsilon)$  astfel încât pentru  $n \geq N(\epsilon)$  să avem  $|a_n| < \epsilon$ , deci  $\frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\epsilon}$ , adică  $\left| \frac{1}{a_n} \right| > M$ , deci sirul  $\left( \frac{1}{a_n} \right)$  este nemărginit.

Transcriem și criteriul de convergență pentru siruri convergente către 0:

**P r o p o z i ᄀ i a 6.** Dacă  $|a_n| \leq |\alpha_n|$  și  $\alpha_n \rightarrow 0$  atunci  $a_n \rightarrow 0$ .

Exemple de siruri convergente către 0. 1) Dacă  $a > 1$ , sirul

$1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \dots, \frac{1}{a^n}, \dots$  are limita 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = 0 \quad (a > 1).$$

deoarece sirul  $1, a, a^2, \dots, a^n, \dots$  este crescător și nemărginit.

În particular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = 0$ .

2) Dacă  $0 < a < 1$ , sirul  $1, a, a^2, \dots, a^n$  are limita 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0, \quad (0 < a < 1)$$

deoarece, notind  $b = \frac{1}{a}$ , avem  $b > 1$ , deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = 0$  și deoarece  $a^n = \frac{1}{b^n}$  rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ .

3) Dacă  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_p < \dots$  este un sir de numere naturale, atunci sirul

$$\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \frac{1}{n_3}, \dots, \frac{1}{n_p}, \dots$$

are limita 0:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{n_p} = 0 \text{ sau } \frac{1}{n_p} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0.$$

Într-adevăr, un sir de numere naturale *diferite* este nemărginit, și prin ipoteză sirul  $(n_p)_{p \in N}$  este crescător.

În particular,  $\lim_n \frac{1}{2n} = 0$ ;  $\lim_n \frac{1}{2n+1} = 0$ ;  $\lim_n \frac{1}{n^k} = 0$ .

#### 4. Proprietățile sirurilor convergente

 **Propozitie 1.** Un sir convergent are o singură limită (limita unui sir convergent este unică).

Fie  $(a_n)$  un sir convergent către un număr  $a$ . Dacă  $a' \neq a$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $a$  și o vecinătate  $V'$  a lui  $a'$  fără puncte comune (fig. 41). Deoarece  $a_n \rightarrow a$  și  $V$  este o vecinătate a lui  $a$ , în  $V$  se află o infinitate de termeni din sir; acești termeni se află în afara lui  $V'$ . Așadar, am găsit o vecinătate  $V'$ , a lui  $a'$ , în afara căreia se află o infinitate de termeni ai sirului  $(a_n)$ , deci  $a'$  nu este limita acestui sir. Urmează că  $a$  este singura limită a sirului  $(a_n)$ .

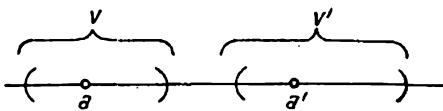


Fig. 41

 **Propozitie 2.** Dacă  $(a_n)$  este un sir convergent, atunci sirul  $(|a_n|)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |\lim_{n \rightarrow \infty} a_n|$$

(limita modulului este egală cu modulul limitei).

Să notăm  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Fie  $\varepsilon > 0$ . Există un număr  $N(\varepsilon)$  astfel încât să avem

$$|a_n - a| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq N(\varepsilon).$$

Dar

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|, \text{ pentru orice } n,$$

deci

$$||a_n| - |a|| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq N(\varepsilon)$$

deci  $|a_n| \rightarrow |a|$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a| = |\lim_{n \rightarrow \infty} a_n|$$

**O b s e r v a t i e.** Propoziția reciprocă nu este adevărată: dacă sirul  $(|a_n|)$  este convergent, nu rezultă că sirul  $(a_n)$  este convergent.

De exemplu, sirul

$$1, -1, 1, -1, \dots$$

nu este convergent, iar sirul modulelor

$$1, 1, 1, 1, \dots$$

este convergent, fiind constant.

Pentru sirurile convergente către zero este adevărată și propoziția reciprocă:

○ **Propoziția 3.** Dacă  $|a_n| \rightarrow 0$ , atunci  $a_n \rightarrow 0$  (și reciproc).

În adevăr,  $|a_n| \rightarrow 0$  înseamnă că: pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N(\varepsilon)$  astfel încât să avem

$$|a_n| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq N(\varepsilon),$$

iar aceasta înseamnă că  $a_n \rightarrow 0$ .

*Exemplu.* Sirurile

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots \text{ și } 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$$

au limita 0, deoarece sirul modulelor

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

are limita 0.

○ **Propoziția 4.** Orice sir convergent este mărginit.

Fie  $(a_n)$  un sir convergent și  $a$  limita sa. Luând  $M = |a| + 1$  avem  $-M < a < M$ , deci intervalul  $(-M, M)$  este o vecinătate a lui  $a$ . Deoarece

rece în afara acestei vecinătăți se află un număr finit de termeni, există un număr  $N$  astfel încât pentru  $n \geq N$  să avem  $a_n \in (-M, M)$ , adică  $-M < a_n < M$ , deci

$$|a_n| < M, \text{ pentru orice } n \geq N.$$

Urmează că sirul  $(a_n)$  este mărginit.

Din această propoziție deducem următorul

**C o r o l a r.** Orice sir nemărginit este divergent.

**Propoziția 5.** Prin schimbarea ordinii termenilor unui sir convergent se obține un sir convergent către aceeași limită.

În adevăr, poziția pe dreaptă a termenilor nu depinde de rangul lor, ci numai de valoarea lor numerică.

Dacă  $(a_n)$  este un sir convergent către  $a$  și  $(b_n)$  este un sir obținut din  $(a_n)$  prin schimbarea ordinii termenilor, atunci în afara fiecărei vecinătăți a lui  $a$  se află un număr finit de termeni ai sirului  $(a_n)$  și același număr finit de termeni ai sirului  $(b_n)$ , deci și sirul  $(b_n)$  are tot limita  $a$ .

**Propoziția 6.** Dacă la un sir convergent se adaugă sau se scoate un număr finit de termeni, sirul obținut este convergent și are aceeași limită.

În adevăr, dacă  $a_n \rightarrow a$ , atunci în afara fiecărei vecinătăți a lui  $a$  se află un număr finit de termeni ai sirului  $(a_n)$ , iar după adăugarea sau scoaterea unui număr finit de termeni, în afara fiecărei vecinătăți a lui  $a$  se află tot un număr finit de termeni ai sirului obținut, deci și acesta are limita  $a$ .

**Propoziția 7.** Dacă  $(a_n)$  este un sir convergent și dacă există  $n_0$  astfel încât să avem

$$\alpha \leq a_n \leq \beta, \text{ pentru } n \geq n_0$$

atunci

$$\alpha \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \beta.$$

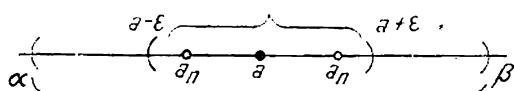


Fig. 42

Să notăm  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  și să arătăm că  $\alpha \leq a \leq \beta$ . Să presupunem

prin absurd că  $a < \alpha$ . Înănd  $\alpha' < a$ , intervalul  $V = (\alpha', \alpha)$  este o vecinătate a lui  $a$ . Deoarece  $a_n \rightarrow a$ , avem  $a_n \in (\alpha', \alpha)$ , adică  $a_n < \alpha$  pentru toți termenii, cu excepția unui număr finit dintre ei, ceea ce contrazice ipoteza  $a_n \geq \alpha$  pentru  $n \geq n_0$ . Așadar  $\alpha \leq a$ , și la fel se arată că  $a \leq \beta$ .

**C o r o l a r.** Dacă  $(a_n)$  este un sir convergent de termeni  $\geq 0$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$ .

Se ia  $\alpha = 0$  în propoziția 7.

**O b s e r v a t i e.** Dacă în propozițiile precedente termenii șirului  $(a_n)$  verifică inegalități stricte, nu rezultă că limita verifică inegalități stricte.

De exemplu, pentru șirul  $a_n = \frac{1}{n}$  avem  $a_n > 0$ , dar  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Propoziția următoare exprimă o proprietate duală celei din propoziția 7, însă pentru inegalități stricte.

**P r o p o z i t i a 8.** Dacă  $(a_n)$  este un șir convergent și dacă  $\alpha < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \beta$ , atunci există un număr  $n_0$  astfel încât să avem

$$\alpha < a_n < \beta, \text{ pentru } n \geq n_0.$$

Într-adevăr, notând  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , intervalul  $V = (\alpha, \beta)$  este o vecinătate a lui  $a$ . Deoarece  $a_n \rightarrow a$ , există un număr  $n_0$  astfel încât pentru  $n \geq n_0$  să avem  $a_n \in V$ , adică  $\alpha < a_n < \beta$ .

**C o r o l a r u l 1.** Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$ , atunci există un număr  $n_0$  astfel încât să avem

$$a_n > 0, \text{ pentru } n \geq n_0.$$

Se ia  $\alpha = 0$ .

**C o r o l a r u l 2.** Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 0$ , atunci există un număr  $n_0$ , astfel încât să avem

$$a_n < 0, \text{ pentru } n \geq n_0.$$

Se ia  $\beta = 0$ .

**C o r o l a r u l 3.** Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , atunci există un număr  $n_0$  astfel încât să avem

$$a_n \neq 0, \text{ pentru } n \geq n_0.$$

### § 3. Operații cu șiruri convergente

Vom arăta că, efectuind asupra șirurilor convergente operațiile algebrice obișnuite (adunarea, scăderea, înmulțirea cu scalari, înmulțirea, și, cu anumite restricții, împărțirea) se obțin tot șiruri convergente.

## 1. Operații cu șiruri convergente către zero

**Propoziția 1.** Dacă  $a_n \rightarrow 0$  și  $b_n \rightarrow 0$ , atunci

$$a_n + b_n \rightarrow 0$$

$$a_n b_n \rightarrow 0$$

$$\alpha a_n \rightarrow 0, \text{ pentru orice număr } \alpha \in R.$$

Într-adevăr, fie  $\varepsilon > 0$ . Deoarece  $a_n \rightarrow 0$  și  $b_n \rightarrow 0$ , există un număr  $N(\varepsilon)$  astfel încât să avem

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ și } |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru orice } n \geq N(\varepsilon).$$

Dar

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|,$$

deci

$$|a_n + b_n| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq N(\varepsilon),$$

adică  $a_n + b_n \rightarrow 0$ .

Relațiile  $a_n b_n \rightarrow 0$  și  $\alpha a_n \rightarrow 0$  se demonstrează în mod asemănător, dar vor rezulta și din următoarea propoziție mai generală.

**Propoziția 2.** Dacă  $a_n \rightarrow 0$  și dacă  $(b_n)$  este un șir mărginit, atunci  $a_n b_n \rightarrow 0$ .

Deoarece șirul  $(b_n)$  este mărginit, există un număr  $M > 0$  astfel încât să avem  $|b_n| \leq M$ , pentru toți termenii  $b_n$ , deci

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq M |a_n|, \text{ pentru orice } n.$$

Fie acum  $\varepsilon > 0$ . Deoarece  $a_n \rightarrow 0$ , există un număr  $N(\varepsilon)$  astfel încât să avem

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}, \text{ pentru orice } n \geq N(\varepsilon).$$

Urmează atunci că

$$|a_n b_n| < \varepsilon, \text{ pentru orice } n \geq N(\varepsilon),$$

adică  $a_n b_n \rightarrow 0$ .

**Corolarul 1.** Dacă  $a_n \rightarrow 0$  și  $(b_n)$  este un șir convergent, atunci  $a_n b_n \rightarrow 0$ .

Într-adevăr, șirul convergent  $(b_n)$  este mărginit.

Din acest corolar rezultă în particular că dacă  $a_n \rightarrow 0$  și  $b_n \rightarrow 0$ , atunci  $a_n b_n \rightarrow 0$  și că dacă  $a_n \rightarrow 0$ , atunci  $\alpha a_n \rightarrow 0$ , deoarece șirul  $(\alpha a_n)$

poate fi considerat ca produsul dintre sirul  $(a_n)$  si sirul constant  $(\alpha)$  care este convergent. În acest fel, și propoziția 1 a fost complet demonstrată.

**Corolarul 2.** Dacă  $a_n \rightarrow 0$ , atunci  $-a_n \rightarrow 0$ .

Se ia  $\alpha = -1$  în propoziția 1.

**Corolarul 3.** Dacă  $a_n \rightarrow 0$  și  $b_n \rightarrow 0$  atunci  $a_n - b_n \rightarrow 0$ .

Într-adevăr,  $-b_n \rightarrow 0$  și  $a_n - b_n = a_n + (-b_n) \rightarrow 0$ .

Prin inducție completă deducem că suma și produsul unui număr  $k$  de siruri convergente către zero sunt de asemenea siruri convergente către zero.

**Observație.** Multimea sirurilor convergente către 0 este o algebră. Această algebră se notează cu  $c_0$ . Din poziția 2 rezultă că  $c_0$  este un ideal\* în algebra  $m$  a sirurilor mărginite.

Mai departe se va arăta că multimea  $c$  a sirurilor convergente este de asemenea o algebră. Din corolarul 1 rezultă că  $c_0$  este un ideal și în algebra  $c$ .

## 2. Operații cu siruri convergente

\* **Propoziția 1.** Dacă  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt două siruri convergente, iar  $\alpha \in R$ , atunci sirurile  $(a_n + b_n)$ ,  $(\alpha a_n)$  și  $(a_n b_n)$  sunt convergente și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(limita sumei este egală cu suma limitelor):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(limita produsului este egală cu produsul limitelor).

Fie  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  și  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Sirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  se pot scrie sub forma

$$a_n = a + \alpha_n \text{ și } b_n = b + \beta_n,$$

unde  $\alpha_n \rightarrow 0$  și  $\beta_n \rightarrow 0$ . Atunci, notind  $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ , avem

$$a_n + b_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n) = (a + b) + \gamma_n,$$

iar  $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n \rightarrow 0$ , deci  $a_n + b_n \rightarrow a + b$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

\* Fie  $E$  o algebră comutativă. O submulțime  $I \subset E$  se numește ideal al algebrei  $E$  dacă este o algebră și dacă pentru orice  $x \in I$  și orice  $y \in E$  avem  $xy \in I$ .

Avem apoi

$$\alpha a_n = \alpha a + \alpha \alpha_n$$

și  $\alpha \alpha_n \rightarrow 0$  deci  $\alpha a_n \rightarrow \alpha a$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha a_n = \alpha a = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

În sfîrșit, notînd  $\delta_n = \alpha_n \beta_n + a \beta_n + b \alpha_n$ , avem

$$a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \alpha_n \beta_n + a \beta_n + b \alpha_n = ab + \delta_n.$$

Dar  $\alpha_n \beta_n \rightarrow 0$ ,  $a \beta_n \rightarrow 0$  și  $b \alpha_n \rightarrow 0$ , deci  $\delta_n = \alpha_n \beta_n + a \beta_n + b \alpha_n \rightarrow 0$  și deci  $a_n b_n \rightarrow ab$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Prin inducție completă se demonstrează că suma și produsul unei familii finite de șiruri convergente sunt de asemenea șiruri convergente și limita sumei este egală cu suma limitelor, iar limita produsului este egală cu produsul limitelor.

În particular, luînd  $k$  șiruri convergente egale cu  $(a_n)$ , deducem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^k) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^k.$$

**Corolarul 1.** Dacă șirul  $(a_n)$  este convergent, atunci șirul  $(-a_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Se ia  $\alpha = -1$  în propoziția 1.

**Corolarul 2.** Dacă  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt două șiruri convergente, atunci șirul  $(a_n - b_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(limita diferenței este egală cu diferența limitelor).

Într-adevăr, presupunînd că  $a_n \rightarrow a$  și  $b_n \rightarrow b$ , avem  $-b_n \rightarrow -b$  și  $a_n - b_n = a_n + (-b_n) \rightarrow a + (-b) = a - b$ .

$$\begin{aligned} \text{Exemplu: 1) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a + b \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a + \lim_{n \rightarrow \infty} b \cdot \frac{1}{n} = \\ &= a + b \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = a + b0 = a. \end{aligned}$$

2) Dacă  $0 < q < 1$ , atunci

$$\frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{1}{1 - q} q^n.$$

Dar  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{1}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

**O b s e r v a t i i.** 1º Dacă şirurile  $(a_n + b_n)$  și  $(a_n b_n)$  sunt convergente, nu rezultă că şirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt convergente.

De exemplu, şirurile

$$1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots$$

$$0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots$$

nu sunt convergente, deși suma lor

$$1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots$$

și produsul lor

$$0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots$$

sunt convergente, fiind constante.

2º Multimea şirurilor convergente este o *algebră* care conține algebra  $c_0$  a şirurilor convergente către 0. Algebra şirurilor convergente se notează cu  $c$ .

Funcția care face să corespundă fiecărui şir convergent  $(a_n)$  din  $c$  limita sa  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  se numește *operația de trecere la limită\**.

Egalitatea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

arată că operația de trecere la limită este *aditivă*.

Egalitatea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

arată că operația de trecere la limită este *omogenă*. Așadar, operația de trecere la limită este *liniară*.

\*Fie  $E$  și  $F$  două spații vectoriale (eventual algebrelle). O funcție  $T: E \rightarrow F$  – pentru care domeniul de definiție  $E$  și mulțimea  $F$  în care ia valori sunt *spații vectoriale* – se numește *operație*.

O operație  $T: E \rightarrow E$  – pentru care mulțimea de definiție și mulțimea în care ia valori, coincid – se numește, de obicei, *operator*.

O operație  $T: E \rightarrow R$  – pentru care spațiul vectorial în care  $T$  ia valori, este *dreapta numerică* – se numește *funcțională*.

Fie  $T: E \rightarrow F$  o operație. Spunem că  $T$  este o operație *aditivă* dacă

$$\{ T(x + y) = T(x) + T(y), \text{ oricare ar fi } x, y \in E. \}$$

Spunem că  $T$  este o operație *omogenă* dacă

$$T(\alpha x) = \alpha T(x), \text{ oricare ar fi } x \in E \text{ și } \alpha \in R.$$

O operație aditivă și omogenă se numește operație *liniară*.

Dacă  $E$  și  $F$  sunt algebrelle, spunem că operația  $T$  este *multiplicativă*, dacă

$$T(xy) = T(x) T(y), \text{ oricare ar fi } x, y \in E.$$

Operația de trecere la limită  $T(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , definită pe spațiul vectorial  $E = c$  al şirurilor convergente, cu valori reale, este de fapt o *funcțională*. Ea este liniară și multiplicativă.

Egalitatea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

arată că operația de trecere la limită este *multiplicativă*.

### 3. Cîtul a două řiruri convergente

Reamintim că dacă un řir  $(\alpha_n)$  are limită  $\neq 0$ , atunci avem  $\alpha_n \neq 0$ , pentru toți termenii, cu excepția, eventual, a unui număr finit dintre ei, pe care îi putem înlătura, fără a modifica prin aceasta limita.

De aceea în continuare vom presupune că dacă un řir are limită  $\neq 0$ , atunci toți termenii săi sunt  $\neq 0$ , chiar dacă acest fapt nu va fi specificat.

Vom demonstra mai întîi următoarea

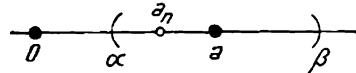


Fig. 43

**L e m ā . Dacă  $(b_n)$  este un řir convergent, cu limită  $\neq 0$ , atunci řirul  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  este mărginit.**

Să notăm  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ . Atunci putem presupune că toți termenii  $b_n$  sunt  $\neq 0$ , deci řirul  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  este definit.

Să luăm, de exemplu,  $\alpha = \frac{|b|}{2} > 0$ . Avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = |b| > \alpha$ . Urmează că există un rang  $N$  începînd de la care avem inegalitatea  $|b_n| > \alpha$ . Atunci

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{1}{\alpha}, \text{ pentru } n \geq N.$$

$$\text{Luînd } M = \max \left| \frac{1}{|b_1|}, \frac{1}{|b_2|}, \dots, \frac{1}{|b_N|}, \frac{1}{\alpha} \right|,$$

avem

$$\left| \frac{1}{b_n} \right| \leq M, \text{ oricare ar fi } n,$$

deci řirul  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  este mărginit.

**O b s e r v a ţ i e.** Dacă  $b_n \rightarrow 0$ , (și  $b_n \neq 0$  pentru fiecare  $n$ ), atunci řirul  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  este ne-mărginit.

**P r o p o z i ţ i a .** Dacă řirul  $(b_n)$  este convergent și dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ , atunci řirul  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Într-adevăr, notând  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ , avem

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{b_n b} = \frac{1}{b_n} \cdot \frac{1}{b} (b - b_n).$$

Dar  $b - b_n \rightarrow 0$ , deci  $\frac{1}{b} (b - b_n) \rightarrow 0$ . Din lema precedentă rezultă că şirul  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  este mărginit, deci  $\frac{1}{b_n} \cdot \frac{1}{b} (b - b_n) \rightarrow 0$ .

Aşadar,  $\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \rightarrow 0$ , adică  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n}.$$

**O b s e r v a t i e.** Dacă  $b_n \rightarrow 0$ , şirul  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  nu este convergent, deoarece este nemărginit

**P r o p o z i t i a.** Dacă  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt două şiruri convergente și dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ , atunci şirul  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

(limita cîntului este egală cu cîntul limitelor).

Într-adevăr, putem scrie şirul cît ca un produs de şiruri

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n},$$

iar şirul  $\left(\frac{1}{b_n}\right)$  este convergent. Urmează atunci că şirul produs  $\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right)$  este convergent, deci şirul cît  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  este convergent.

Notând  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  și  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n \cdot \frac{1}{b_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

**C o r o l a r.** Dacă  $a_n \rightarrow a \neq 0$  și  $k \in N$ , atunci  $a_n^{-k} \rightarrow a^{-k}$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{-k} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{-k}$$

Într-adevăr  $a_n^k \rightarrow a^k \neq 0$ , deci  $\frac{1}{a_n^k} \rightarrow \frac{1}{a^k}$ , adică  $a_n^{-k} \rightarrow a^{-k}$ .

Din acest corolar și din observația care urmează propoziția 1 deducem că dacă  $a_n \rightarrow a \neq 0$ , avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k, \text{ oricare ar fi } k \text{ întreg,}$$

iar pentru  $k$  natural, egalitatea este adevărată chiar dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Mai departe se va arăta că dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$ , egalitatea rămîne adevărată pentru orice exponent real.

**Observații.** 1° Propoziția reciprocă nu este adevărată: dacă sirul cît este convergent, nu rezultă că cele două siruri sunt convergente. De exemplu, sirurile egale

$$1, 2, 1, 2, \dots, 1, 2, \dots$$

$$1, 2, 1, 2, \dots, 1, 2, \dots$$

nu sunt convergente, în timp ce sirul cît

$$1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, \dots$$

este convergent, fiind constant.

2° Dacă  $a_n \rightarrow a \neq 0$  și  $b_n \rightarrow 0$ , sirul cît  $\left( \frac{a_n}{b_n} \right)$  este nemărginit, deci nu este convergent.

Dacă  $a_n \rightarrow 0$  și  $b_n \rightarrow 0$ , despre sirul cît  $\left( \frac{a_n}{b_n} \right)$  nu se mai poate afirma nimic. Uneori este convergent, alteori este divergent. Mai mult, oricare ar fi  $a \in R$ , se poate găsi un sir  $a_n \rightarrow 0$  și un sir  $b_n \rightarrow 0$ , astfel ca  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow a$ .

*Exemplu:*

$$1) (a_n) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad a_n \rightarrow 0$$

$$(b_n) : a, \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{a}{4}, \dots, \frac{a}{n}, \dots \quad b_n \rightarrow 0$$

$$\left( \frac{b_n}{a_n} \right) : a, a, a, \dots, a, \dots \quad \frac{b_n}{a_n} \rightarrow a.$$

$$2) (a_n) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad a_n \rightarrow 0$$

$$(b_n) : 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots \quad b_n \rightarrow 0$$

$$\left( \frac{a_n}{b_n} \right) : 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots \text{ crescător și nemărginit}$$

$$3) (a_n) : -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots \quad a_n \rightarrow 0$$

$$(b) : 1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots \quad b_n \rightarrow 0$$

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) : -1, -2, -3, \dots, -n, \dots$  descrescător și nemărginit.

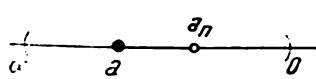
$$4) (a_n) : 1, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots, \frac{1}{2n-1}, 0, \dots \quad a_n \rightarrow 0$$

$$(b_n) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n}, \dots \quad b_n \rightarrow 0$$

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) : 1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots$  nu are limită.

#### 4. Trecerea la limită în inegalități

**Propoziția 1.** Dacă  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt două șiruri convergente și dacă  $a_n \leq b_n$  pentru orice  $n \in N$ , atunci :



$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Într-adevăr, șirul  $(b_n - a_n)$  este convergent și

Fig. 44

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Pe de altă parte,  $b_n - a_n \geq 0$  pentru orice  $n \in N$ , deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \geq 0$ .

Rezultă că :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0,$$

adică :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

**Observație.** Dacă  $a_n < b_n$  pentru orice  $n \in N$  nu putem deduce că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , ci numai că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

Propoziția următoare este și un criteriu de convergență.

**Propoziția 2.** Dacă  $a_n \leq x_n \leq b_n$  pentru orice  $n \in N$  și dacă șirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt convergente și au aceeași limită, atunci șirul  $(x_n)$  este convergent și are aceeași limită ca și celelalte două șiruri.

Din inegalitățile  $a_n \leq x_n \leq b_n$  deducem  $0 \leq x_n - a_n \leq b_n - a_n$ . Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , pe baza criteriului de convergență rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a_n) = 0$ .

Atunci

$$x_n = (x_n - a_n) + a_n,$$

deci :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

**O b s e r v a t i e.** Propozițiile de mai sus rămân adevărate chiar dacă inegalitățile sunt verificate doar începând de la un anumit rang. Într-adevăr, înălțurind termenii în număr finit care nu verifică inegalitățile, obținem noi șiruri cu aceleași limite, ai căror termeni verifică, toti, inegalitățile respective.

#### § 4. Șiruri fundamentale (Cauchy)

În definiția limitei unui șir, această limită a intervenit în mod explicit. Pentru a putea verifica pe baza acestei definiții că un șir este convergent, trebuie să avem o indicație asupra limitei însăși. Pentru un număr restrins de șiruri, ca  $\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{10^n}\right)$  etc., intuitiv, ne dăm seama ușor că limita lor este 0. Folosind proprietățile șirurilor, criteriul de convergență și operațiile cu șirurile convergente, din convergența șirurilor cunoscute putem deduce convergența altor șiruri.

Dacă ni se dă un șir  $(a_n)$  căruia nu-i putem aplica unul din aceste procedee, în general este foarte greu, uneori chiar imposibil, să precizăm dacă șirul este convergent. Chiar dacă știm că este convergent, în general nu-i putem determina limita, dacă nu avem vreo indicație asupra ei, pentru că nu putem încerca toate numerele reale dacă verifică sau nu definiția limitei.

Așadar, definiția limitei este de un folos practic atunci când după puține încercări reușim să găsim limita șirului. Importanța teoretică a acestei definiții este însă foarte mare, ea stă la baza analizei matematice.

#### 1. Definiția șirului fundamental

Cauchy a reușit să dea o definiție echivalentă a unui șir convergent, în care nu mai intervine limita șirului, ci numai termenii șirului.

**D e f i n i t i e .** Un șir  $(a_n)$  se numește **șir fundamental sau șir Cauchy**, dacă pentru orice număr  $\epsilon > 0$  există un număr  $N(\epsilon)$  astfel încât oricare ar fi  $m \geq N(\epsilon)$  și  $n \geq N(\epsilon)$  să avem

$$|a_m - a_n| < \epsilon.$$

În cele ce urmează vom arăta că noțiunile de sir fundamental și de sir convergent sunt echivalente.

**O b s e r v a t i o n i.** 1° Ca și în definiția limitei unui sir, inegalitățile  $n \geq N(\epsilon)$  pot fi înlocuite cu  $n > N(\epsilon)$ ; inegalitățile  $|a_m - a_n| < \epsilon$  pot fi înlocuite cu  $|a_m - a_n| \leq \epsilon$ , sau cu  $|a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{2}$  sau cu  $|a_m - a_n| < \alpha\epsilon$ , unde  $\alpha > 0$ .

2° Dacă  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt două siruri fundamentale,  $\alpha > 0$  și  $\beta > 0$ , atunci pentru fiecare  $\epsilon > 0$  putem găsi același  $N(\epsilon)$  astfel ca

$$|a_m - a_n| < \alpha\epsilon \text{ și } |b_m - b_n| < \beta\epsilon, \text{ oricare ar fi } m, n \geq N(\epsilon).$$

Definiția unui sir fundamental se poate enunța în formele echivalente date de următoarele două propoziții:

X **P r o p o z i t i a 1.** Un sir  $(a_n)$  este fundamental dacă și numai dacă, pentru orice număr  $\epsilon > 0$  există un număr  $N(\epsilon)$  astfel încât oricare ar fi  $n \geq N(\epsilon)$  și oricare ar fi  $p \in N$  să avem

$$|a_{n+p} - a_n| < \epsilon.$$

Într-adevăr, dacă în definiția de mai sus, considerăm  $m > n$ , avem  $m = n + p$  cu  $p \geq 1$  și obținem condiția din enunțul propoziției. Reciproc, din condiția enunțată în propoziție se obține definiția sirului fundamental punind  $m = n + p$ , deoarece dacă  $n \geq N(\epsilon)$  și  $p \geq 1$ , avem de asemenea  $m > N(\epsilon)$  (vezi obs. 1°).

X **P r o p o z i t i a 2.** Un sir  $(a_n)$  este fundamental dacă și numai dacă pentru orice număr  $\epsilon > 0$  există un număr  $N = N(\epsilon)$  astfel încât oricare ar fi  $n \geq N$  să avem

$$|a_N - a_n| < \epsilon.$$

Din definiția sirului fundamental rezultă condiția din propoziția 2, luând  $m = N = N(\epsilon)$ .

Reciproc, să presupunem verificată condiția din enunțul propoziției. Fie  $\epsilon > 0$ ; există un număr  $N$  astfel ca  $|a_N - a_n| < \frac{\epsilon}{2}$  oricare ar fi  $n \geq N$ .

Dacă  $n, m \geq N$  avem deci

$$|a_m - a_n| = |a_m - a_N + a_N - a_n| \leq |a_m - a_N| + |a_N - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

**O b s e r v a t i o n i.** 1° Formularea dată în propoziția 2 se poate folosi mai ușor în raționamentele prin reducere la absurd.

2° A spune că un sir  $(a_n)$  este fundamental revine la a afirma că diferența a doi termeni poate fi făcută oricât de mică, dacă rangul celor doi termeni este suficient de mare. Mai precis, dincolo de un anumit rang care depinde de  $\epsilon$ , diferența a doi termeni este mai mică decit  $\epsilon$ , oricât de îndepărtați ar fi cei doi termeni unul de altul.

## 2. Subsiruri convergente. Lema lui Cesàro

**Propoziția 1.** Orice subsir al unui sir convergent este convergent și are aceeași limită.

Într-adevăr, dacă  $a_n \rightarrow a$ , în afara oricărei vecinătăți a lui  $a$  se află un număr finit de termeni ai sirului  $(a_n)$  și deci, cu atât mai mult, un număr finit de termeni ai oricărui subsir al său; deci orice subsir al sirului  $(a_n)$  are limita  $a$ .

În particular, sirul obținut dintr-un sir convergent prin suprimarea unui număr finit de termeni este convergent și tinde către aceeași limită ca sirul inițial.

*Exemplu.* 1) Deoarece sirul  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  are limita 0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

următoarele subsiruri ale sale

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots; \quad 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{2n-1}, \dots$$

$$1, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{3^k}, \dots, \frac{1}{n^k}, \dots \quad k \in N; \quad 1, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{3^k}, \dots, \frac{1}{n^n}, \dots$$

au de asemenea limita 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^n} = 0.$$

2) Deoarece pentru  $0 < a < 1$ , sirul  $1, a, a^2, \dots, a^n, \dots$  are limita 0,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \quad (0 < a < 1)$$

următoarele subsiruri ale sale

$$1, a^2, a^4, \dots, a^{2n}, \dots; \quad a, a^3, a^5, \dots, a^{2n-1}, \dots$$

$$1, a^4, a^9, \dots, a^{n^2}, \dots; \quad a^5, a^{10}, a^{15}, \dots, a^{5n}, \dots$$

au de asemenea limita 0.

**Observație.** Propoziția reciprocă este de asemenea adeverată: dacă orice subsir al sirului  $(a_n)$  este convergent, atunci sirul  $(a_n)$  este de asemenea convergent, deoarece  $(a_n)$  însuși este unul din subsiruri.

Dacă însă numai unele subsiruri sunt convergente, nu rezultă că sirul este convergent de exemplu, sirul  $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$  sunt subsiruri convergente cum sunt  $0, 0, 0, \dots; 1, 1, 1, \dots$ ; dar sirul inițial nu este convergent.

De asemenea, sirul  $0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots, 0, n, \dots$  este divergent și conține subsirul convergent  $0, 0, 0, \dots$

O condiție suficientă pentru ca un sir să conțină subșiruri convergente este dată de

**L e m a l u i C e s à r o.** Orice sir mărginit conține un subșir convergent.

Fie  $(x_n)$  un sir mărginit. Putem găsi două numere raționale  $a$  și  $b$  astfel ca

$$a < x_n < b$$

pentru orice  $n \in N$ .

Să împărțim segmentul  $[a, b]$  în două părți egale, prin punctul rațional  $c = \frac{b-a}{2}$ . Cel puțin unul dintre cele două segmente parțiale conține o infinitate de termeni ai sirului.

Să notăm cu  $[a_1, b_1]$  unul dintre aceste segmente parțiale care conține o infinitate de termeni ai sirului. Dacă ambele segmente parțiale au această proprietate, convenim — de exemplu — să notăm cu  $[a_1, b_1]$  pe cel din stînga. Numerele  $a_1$  și  $b_1$  sunt raționale și avem

$$a \leq a_1 < b_1 \leq b \quad \text{și} \quad b_1 - a_1 = \frac{l}{2},$$

unde am notat  $l = b - a$ .

Să presupunem că am găsit un segment  $[a_n, b_n]$  care conține o infinitate de termeni ai sirului  $(x_n)$ , astfel că  $a_n$  și  $b_n$  sunt raționale și

$$b_n - a_n = \frac{l}{2^n}.$$

Împărțim segmentul  $[a_n, b_n]$  în două părți egale prin punctul  $c_n = \frac{b_n - a_n}{2}$ , și notăm cu  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  unul din cele două segmente parțiale care conține o infinitate de termeni ai sirului  $(x_n)$ . Avem :

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \quad \text{și} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{l}{2^{n+1}},$$

iar  $a_{n+1}$  și  $b_{n+1}$  sunt raționale.

Am demonstrat astfel prin inducție completă că putem găsi două siruri  $(a_n)$  și  $(b_n)$  de numere raționale cu următoarele proprietăți :

$$1) \quad a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$

$$2) \quad b_n - a_n = \frac{l}{2^n} \quad \text{pentru orice } n \in N.$$

3) Fiecare segment  $[a_n, b_n]$  conține o infinitate de termeni ai șirului  $(x_n)$ .

Din primele două proprietăți deducem că există un punct  $x$  și numai unul, astfel ca

$$a_n \leq x \leq b_n \text{ pentru orice } n \in N.$$

Să arătăm că  $x$  este limita unui subșir al șirului  $(x_n)$ .

Să alegem un termen  $x_{n_1}$  al șirului  $(x_n)$  astfel ca

$$x_{n_1} \in [a_1, b_1].$$

Deoarece segmentul  $[a_2, b_2]$  conține o infinitate de termeni ai șirului  $(x_n)$ , putem găsi un termen  $x_{n_2}$  al șirului astfel ca

$$x_{n_2} \in [a_2, b_2] \text{ și } n_1 < n_2.$$

Să presupunem că am ales un termen  $x_{n_p} \in [a_p, b_p]$ . Deoarece  $[a_{p+1}, b_{p+1}]$  conține o infinitate de termeni ai șirului  $(x_n)$ , putem găsi în șir un termen  $x_{n_{p+1}}$  cu  $n_p < n_{p+1}$  astfel ca

$$x_{n_{p+1}} \in [a_{p+1}, b_{p+1}].$$

Am demonstrat astfel, prin inducție completă, că putem găsi un șir  $(x_{n_p})$ ,  $1 \leq p < \infty$ , astfel ca

$$n_1 < n_2 < \dots < n_p < \dots$$

și

$$a_p \leq x_{n_p} \leq b_p \text{ pentru orice } p \in N.$$

Așadar,  $(x_{n_p})$  este un subșir al șirului  $(x_n)$ .

Rămîne să arătăm că subșirul  $(x_{n_p})$  este convergent către  $x$ .

Din inegalitățile

$$a_p \leq x \leq b_p,$$

$$a_p \leq x_{n_p} \leq b_p$$

deducem :

$$|x_{n_p} - x| \leq b_p - a_p \leq \frac{l}{2^p}$$

pentru fiecare  $p$ . Sirul  $\left(\frac{l}{2^p}\right)$  este convergent către 0 (deoarece sirul  $\frac{2^p}{l}$  este crescător și nemărginit). Pe baza criteriului de convergență deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_p} = x$$

și lema este demonstrată.

17.2.1.2

### 3. Criteriul lui Cauchy

Înainte de a enunța criteriul lui Cauchy, vom demonstra două leme.

**L e m a 1. Orice sir fundamental este mărginit.**

Fie  $(a_n)$  un sir fundamental. Luând  $\epsilon = 1$ , găsim un număr natural  $N = N(1)$  astfel ca pentru orice  $n \geq N$  să avem

$$|a_n - a_N| < 1$$

sau

$$-1 < a_n - a_N < 1$$

sau încă

$$a_N - 1 < a_n < a_N + 1.$$

Dacă notăm

$$m = \min \{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, a_N - 1\},$$

$$M = \max \{a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, a_N + 1\},$$

atunci pentru orice  $n$  natural avem

$$m \leq a_n \leq M,$$

deci sirul  $(a_n)$  este mărginit.

**L e m a 2. Dacă un sir fundamental conține un subșir convergent, atunci el este convergent.**

Fie  $(a_n)$  un sir fundamental și  $(a_{n_p})$  un subșir al său convergent către un număr  $a$ . Să arătăm că sirul  $(a_n)$  este de asemenea convergent către  $a$ .

Fie  $\epsilon > 0$ . Deoarece  $(a_n)$  este sir fundamental, există un număr natural  $N_1(\epsilon)$  astfel ca

$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2} \text{ pentru } n, m \geq N_1(\epsilon).$$

Deoarece subșirul  $(a_{n_p})$  este convergent către  $a$ , există un număr natural  $N_2(\epsilon)$  astfel ca

$$|a_{n_p} - a| < \frac{\epsilon}{2} \text{ pentru } p \geq N_2(\epsilon).$$

Să notăm  $N(\epsilon) = \max(N_1(\epsilon), N_2(\epsilon))$ . Fie  $n > N(\epsilon)$ ; să alegem  $p$  astfel ca  $n_p > N(\epsilon)$ . Atunci  $n, n_p \geq N_1(\epsilon)$ , deci

$$|a_n - a_{n_p}| < \frac{\epsilon}{2}$$

și  $n_p \geq N(\varepsilon)$ , deci

$$|a_{n_p} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Așadar:

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_p}| + |a_{n_p} - a| < \varepsilon.$$

Cum  $n$  a fost ales arbitrar, rezultă că pentru orice  $n \geq N(\varepsilon)$  avem:

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

adică sirul  $(a_n)$  este convergent către  $a$ .

**Criteriul lui Cauchy.** Un sir  $(a_n)$  este convergent dacă și numai dacă este sir fundamental.

Să presupunem întâi că  $(a_n)$  este un sir convergent, și fie  $a$  limita sa. Să arătăm atunci că  $(a_n)$  este sir fundamental.

Fie  $\varepsilon > 0$ . Deoarece  $a_n \rightarrow a$ , există un număr natural  $N(\varepsilon)$  astfel ca pentru orice  $n \geq N(\varepsilon)$  avem:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Atunci, pentru orice  $n, m \geq N(\varepsilon)$  avem

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon,$$

adică  $(a_n)$  este sir fundamental.

Reciproc, să presupunem acum că  $(a_n)$  este sir fundamental și să arătăm atunci că este convergent. Deoarece  $(a_n)$  este sir fundamental, este mărginit, deci, conform lemei lu Cesàro, conține un subșir convergent. Conform lemei 2, sirul fundamental  $(a_n)$  este de asemenea convergent.

O b s e r v a t i i . 1° Importanța criteriului lui Cauchy constă în aceea că ne permite să precizăm dacă un sir este convergent, fără a-i cunoaște limita.

2° Deoarece orice sir fundamental de numere reale este convergent, se spune că mulțimea numerelor reale este un spațiu complet.

Mulțimea numerelor *raționale* nu este un spațiu complet, deoarece există siruri fundamentale de numere *raționale* care nu au limită *rațională* (adică nu sunt convergente în cadrul numerelor *raționale*).

Vom construi prin recurență un sir fundamental  $(r_n)$  de numere *raționale* care nu este convergent.

Plecăm de la numerele  $a = 1$  și  $b = 2$ . Avem

$$a^2 < 2 < b^2 \text{ și } b - a = 1.$$

Considerăm apoi numerele

$$1, 1 + \frac{1}{10}, 1 + \frac{2}{10}, \dots, 1 + \frac{9}{10}, 2$$

și pătratele lor

$$1^2, \left(1 + \frac{1}{10}\right)^2, \left(1 + \frac{2}{10}\right)^2, \dots, \left(1 + \frac{9}{10}\right)^2, 2^2.$$

Numărul 2 se află cuprins între două numere consecutive dintre acestea, anume

$$\left(1 + \frac{4}{10}\right)^2 < 2 < \left(1 + \frac{5}{10}\right)^2.$$

Notăm  $r_1 = 1 + \frac{4}{10}$  și  $s_1 = 1 + \frac{5}{10}$ . Avem

$$r_1^2 < 2 < s_1^2 \text{ și } s_1 - r_1 = \frac{1}{10}.$$

Să presupunem că am găsit numerele raționale  $r_n$  și  $s_n$  astfel încât:

$$r_n^2 \leq 2 \leq s_n^2 \text{ și } s_n - r_n = \frac{1}{10^n}$$

și ne propunem să găsim două numere raționale  $r_{n+1}$  și  $s_{n+1}$  astfel încât:

$$r_{n+1}^2 \leq 2 \leq s_{n+1}^2 \text{ și } s_{n+1} - r_{n+1} = \frac{1}{10^{n+1}}.$$

Pentru aceasta considerăm numerele

$$r_n, r_n + \frac{1}{10^{n+1}}, r_n + \frac{2}{10^{n+1}}, \dots, r_n + \frac{9}{10^{n+1}}, s_n$$

și pătratele lor

$$r_n^2, \left(r_n + \frac{1}{10^{n+1}}\right)^2, \left(r_n + \frac{2}{10^{n+1}}\right)^2, \dots, \left(r_n + \frac{9}{10^{n+1}}\right)^2, s_n^2.$$

Deoarece 2 se află cuprins între  $r_n^2$  și  $s_n^2$ , există două numere consecutive  $r_n + \frac{a}{10^{n+1}}$  și  $r_n + \frac{a+1}{10^{n+1}}$ ,  $0 \leq a \leq 9$  astfel ca  $\left(r_n + \frac{a}{10^{n+1}}\right)^2 \leq 2 \leq \left(r_n + \frac{a+1}{10^{n+1}}\right)^2$ .

Notind  $r_{n+1} = r_n + \frac{a}{10^{n+1}}$  și  $s_{n+1} = r_n + \frac{a+1}{10^{n+1}}$ , avem  $r_n \leq r_{n+1} < s_{n+1} \leq s_n$ ;  $r_{n+1}^2 \leq 2 \leq s_{n+1}^2$  și  $s_{n+1} - r_{n+1} = \frac{1}{10^{n+1}}$ .

În acest fel, prin inducție completă putem construi două șiruri  $(r_n)$  și  $(s_n)$  de numere raționale astfel încât:

$$r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n \leq \dots \leq s_n \leq \dots \leq s_2 \leq s_1;$$

$$r_n^2 \leq 2 \leq s_n^2 \text{ și } s_n - r_n = \frac{1}{10^n}, \text{ pentru orice } n \in N.$$

Deoarece  $s_n \leq 2$  și  $r_n \leq 2$  pentru orice  $n \in N$ , avem:

$$0 \leq 2 - r_n^2 \leq s_n^2 - r_n^2 = (s_n + r_n)(s_n - r_n) \leq 4(s_n - r_n) = \frac{4}{10^n},$$

adică:

$$|r_n^2 - 2| \leq \frac{4}{10^n}.$$

Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{10^n} = 0$ , pe baza criteriului de convergență deducem că  $r_n^2 \rightarrow 2$ .

Șirul  $(r_n)$  nu este convergent (către un număr rațional).

Într-adevăr, dacă ar exista un număr rațional  $r$  astfel ca  $r_n \rightarrow r$ , atunci  $r_n^2 \rightarrow r^2$ ; dar  $r^2 \rightarrow 2$  și cum limita unui sir este unică, avem  $r^2 = 2$ , ceea ce este absurd, deoarece nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 2.

Pe de altă parte, sirul  $(r_n)$  este fundamental.

Într-adevăr,

$$|r_n - r_m| = \frac{|r_n^2 - r_m^2|}{r_n + r_m} \leq |r_n^2 - r_m^2|,$$

deoarece  $r_n + r_m \geq 1$ . Fie  $\epsilon > 0$ ; deoarece  $(r_n^2)$  este convergent, este fundamental, deci există un număr  $N(\epsilon)$  astfel ca

$$|r_n^2 - r_m^2| < \epsilon \text{ pentru } n, m \geq N(\epsilon).$$

Atunci, de asemenea

$$|r_n - r_m| < \epsilon \text{ pentru } n, m \geq N(\epsilon),$$

adică  $(r_n)$  este sir fundamental.



## § 5. Siruri monotone

### 1. Teorema de convergență a sirurilor monotone

S-a arătat mai înainte că orice sir convergent este mărginit. Există însă siruri mărginite care nu sunt convergente.

Există de asemenea siruri monotone care nu sunt convergente, de exemplu sirul numerelor naturale. Dacă însă un sir are ambele proprietăți, atunci el este convergent. Pentru aceasta vom demonstra mai întâi următoarea

**Lemă.** Limita unui sir crescător și convergent este mai mare decât toți termenii sirului.

Fie  $(a_n)$  un sir crescător și convergent și fie  $a$  limita sa. Pentru orice  $n$  și orice  $m > n$  avem

$$a_n \leq a_m$$

de unde, luând limita în partea dreaptă, obținem

$$a_n \leq \lim_{m \rightarrow \infty} a_m,$$

adică

$$a_n \leq a$$

oricare ar fi  $n \in N$ .

În mod asemănător se arată că :

*Limita unui sir descrescător și convergent este mai mică decât toți termenii sirului.*

**Theoremă.** Orice sir monoton și mărginit este convergent.

Fie  $(a_n)$  un sir monoton și mărginit. Pentru a face o alegere să presupunem că este crescător. Vom da două demonstrații pentru această teoremă.

Prima demonstrație folosește direct lema lui Cesàro. Deoarece  $(a_n)$  este mărginit, conține un subșir  $(a_{n_p})$  convergent către un număr  $a$ . Se arată prin reducere la absurd că  $a_n \leq a$  pentru orice  $n$ . Deoarece  $a_{n_p} \rightarrow a$ , pentru fiecare  $\epsilon > 0$  există  $p'$  astfel încât  $|a - a_{n_p}| < \epsilon$ . Luând  $N(\epsilon) = p'$ , pentru orice  $n \geq N(\epsilon)$  avem  $a_{N(\epsilon)} \leq a_n \leq a$ , deci  $|a - a_n| < \epsilon$  și deci  $a_n \rightarrow a$ .

A doua demonstrație folosește criteriul lui Cauchy. Vom arăta că  $(a_n)$  este sir Cauchy, de unde va rezulta că este convergent. Să observăm mai întii că deoarece  $(a_n)$  este sir crescător, dacă  $n > m$ , avem  $a_n \geq a_m$ , deci  $a_n - a_m \geq 0$  și deci  $|a_n - a_m| = a_n - a_m$ .

Deoarece  $(a_n)$  este mărginit, există un număr  $M > 0$  astfel încât să avem  $|a_n| \leq M$  pentru orice  $n$ .

Să presupunem, prin absurd, că  $(a_n)$  nu este sir Cauchy. Aceasta înseamnă (negind propoziția 2 de la nr. 1) că există un număr  $\epsilon_0 > 0$ , cu proprietatea că oricare ar fi  $N$ , există un număr  $n > N$  ( $n$  depinde de  $N$ ) cu  $|a_n - a_N| > \epsilon_0$ , adică  $a_n - a_N > \epsilon_0$ .

Fie  $p$  un număr natural astfel încât să avem  $p\epsilon_0 > 2M$  (axioma lui Arhimede). Deoarece  $N$  este arbitrar, să-i dăm diferite valori :

Pentru  $N = 1$ , există  $n_1 > 1$  cu  $a_{n_1} - a_1 > \epsilon_0$

Pentru  $N = n_1$ , există  $n_2 > n_1$  cu  $a_{n_2} - a_{n_1} > \epsilon_0$

.....

Pentru  $N = n_{p-1}$  există  $n_p > n_{p-1}$  cu  $a_{n_p} - a_{n_{p-1}} > \epsilon_0$ .

Adunând aceste  $p$  inegalități membru cu membru și reducind termenii asemenea, deducem

$$a_{n_p} - a_1 > p\epsilon_0.$$

Dar

$$a_{n_p} - a_1 = |a_{n_p} - a_1| \leq |a_{n_p}| + |a_1| \leq 2M,$$

deci  $2M > p\epsilon_0$ , ceea ce contrazice inegalitatea  $p\epsilon_0 > 2M$ , prin care a fost ales  $p$ . Așadar, afirmația că  $(a_n)$  n-ar fi sir Cauchy este falsă. Urmează atunci că  $(a_n)$  este sir Cauchy, deci este convergent.

**Propozitia 1.** Dacă  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt două siruri de numere reale care verifică următoarele două condiții:

$$1^\circ \quad a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1;$$

$$2^\circ \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

atunci sirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt convergente și au aceeași limită

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Sirul  $(a_n)$  este crescător și mărginit ( $a_1 \leq a_n \leq b_2$ ), deci este convergent; fie  $c$  limita sa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c.$$

Atunci

$$b_n = (b_n - a_n) + a_n$$

și deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 + c = c.$$

Aveam:

$$a_n \leq c \leq b_n \text{ pentru orice } n \in N.$$

**Observație.** Numărul  $c$  este singurul număr care verifică inegalitățile  $a_n \leq c \leq b_n$  pentru orice  $n \in N$ .

Intr-adevăr, dacă  $a_n \leq c' \leq b_n$  pentru orice  $n$ , atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq c' \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ adică, } c \leq c' \leq c,$$

de unde  $c' = c$ .

**Propoziția 2.** Pentru orice număr real  $x$  există două siruri  $(r_n)$  și  $(s_n)$  de numere rationale, cu următoarele proprietăți:

$$1^{\circ} \quad r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n \leq \dots \leq x \leq \dots \leq s_n \leq \dots \leq s_2 \leq s_1;$$

$$2^{\circ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Intr-adevăr, pentru fiecare număr natural  $n$  există două numere rationale  $\alpha_n$  și  $\beta_n$  astfel ca

$$x - \frac{1}{n} < \alpha_n < x < \beta_n < x + \frac{1}{n}.$$

Pentru fiecare  $n$  natural să notăm

$$r_n = \max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad s_n = \min(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

Numerele  $r_n$  și  $s_n$  sunt rationale și avem

$$r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n \leq \dots \leq x \leq \dots \leq s_n \leq \dots \leq s_2 \leq s_1$$

$$\text{și } x - \frac{1}{n} \leq r_n \leq x \leq s_n \leq x + \frac{1}{n}.$$

Atunci

$$|x - r_n| \leq \frac{1}{n}, \quad |x - s_n| \leq \frac{1}{n}$$

și deci, în baza criteriului de convergență,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x.$$

## 2. Numărul $e$

Fie sirul

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \dots$$

Vom arăta că acest sir este crescător și mărginit, de unde va rezulta că este convergent. Pentru aceasta, pentru fiecare  $n \in N$  să notăm

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

și să dezvoltăm membrul drept după formula binomului lui Newton:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \\ &\quad + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot \frac{1}{n^n}. \end{aligned}$$

Se observă că

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \cdot \frac{1}{n^k} &= \frac{\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n}}{1 \cdot 2 \dots k} = \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2 \dots k} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \end{aligned}$$

astfel încât

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots k} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Efectuând operația de scădere în fiecare paranteză, se obține un număr  $> 0$ , deoarece  $k-1 < n$  și deci  $\frac{k-1}{n} < 1$ .

Așadar, membrul drept este o sumă cu termeni strict pozitivi, și deci această sumă, adică  $a_n$ , este mai mare decât suma primilor doi termeni  $1 + 1 = 2$ ; deci

$$2 < a_n.$$

Pe de altă parte, în fiecare paranteză numărul obținut este mai mic decât 1, deci

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n}.$$

Dacă în fiecare fracție se înlocuiesc cu 2 factorii de la numitor mai mari sau egali cu 2, numitorii fracțiilor se micșorează, deci ele se măresc. Așadar :

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3.$$

Așadar,  $2 < a_n < 3$  oricare ar fi  $n \in N$ , adică sirul  $(a_n)$  este *mărginit*.

Să arătăm acum că este crescător. Dezvoltând termenul  $a_{n+1}$  după binomul lui Newton, obținem

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots k} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \\ &+ \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n(n+1)} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Avem :

$$\frac{i}{n} > \frac{i}{n+1}, \text{ deci } -\frac{i}{n} < -\frac{i}{n+1}, \text{ de unde :}$$

$$1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i}{n+1}.$$

Așadar, numărul din fiecare paranteză din dezvoltarea lui  $a_n$  este *mai mic* decât numărul din paranteza corespunzătoare din dezvoltarea lui  $a_{n+1}$ . Deci fiecare termen al sumei care dă pe  $a_n$  este mai mic decât termenul corespunzător al sumei care dă pe  $a_{n+1}$ . Deoarece  $a_{n+1}$  are în dezvoltarea sa un termen pozitiv (ultimul) în plus față de dezvoltarea lui  $a_n$ , rezultă cu atât mai mult că  $a_n < a_{n+1}$  pentru fiecare  $n \in N$ , deci sirul  $(a_n)$  este *crescător*.

Fiind crescător și mărginit, sirul  $(a_n)$  este convergent. Limita sa se notează cu litera  $e$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e;$$

deoarece  $2 < a_n < 3$  pentru orice  $n \in N$ , deducem că  $2 \leq e \leq 3$ .

## § 6. Proprietăți suplimentare ale șirurilor convergente

### 1. Schimbarea ordinii termenilor unui șir convergent

**Propoziția 1.** Dacă  $a_n \rightarrow a$  și  $a_n < a$  pentru orice  $n \in N$ , se poate schimba ordinea termenilor astfel încât să obținem un șir crescător (convergent către  $a$ ).

În afara vecinătății  $V_1 = (a - 1, a + 1)$  a lui  $a$ , se află un număr finit de termeni (eventual nici unul) și anume la stînga lui  $a - 1$ . Să-i scriem în ordinea crescătoare

$$b_1, b_2, \dots, b_{n_1}.$$

Dacă mai mulți termeni au aceeași valoare numerică, îi scriem unul după altul într-o ordine oarecare, de exemplu în ordinea în care apar în șirul inițial.

În afara vecinătății  $V_2 = \left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$  se află un număr finit de termeni ai șirului și anume la stînga lui  $a - \frac{1}{2}$ . Printre aceștia se află și cei deja scriși în ordine crescătoare. Termenii nescrisi să-i așezăm după  $b_{n_1}$ , tot în ordine crescătoare.

$$b_1, b_2, \dots, b_{n_1}, b_{n_1+1}, \dots, b_{n_p}.$$

Să presupunem că am așezat în ordine crescătoare toți termenii din afara vecinătății  $V_p = \left(a - \frac{1}{p}, a + \frac{1}{p}\right)$

$$b_1, \dots, b_{n_1}, \dots, b_{n_p}.$$

În afara vecinătății  $V_{p+1} = \left(a - \frac{1}{p+1}, a + \frac{1}{p+1}\right)$  și anume la stînga ei se află un număr finit de termeni ai șirului, diferenți de cei deja așezăți în ordine crescătoare; să-i scriem și pe aceștia după  $b_{n_p}$  în ordine crescătoare

$$b_1, \dots, b_{n_1}, \dots, b_{n_p}, b_{n_p+1}, \dots$$

Am demonstrat deci, prin inducție completă, că putem forma un șir crescător cu termeni ai șirului  $(a_n)$ . Acest șir este crescător și conține toți termenii șirului  $(a_n)$ , deci se obține din  $(a_n)$  prin schimbarea ordinii termenilor.

Într-adevăr, fie  $a_{n_0}$  un termen oarecare al șirului  $(a_n)$ .

Deoarece  $a_{n_0} < a$ , și deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a - \frac{1}{p_n} \right) = a$ , există un număr natural  $p_0$  astfel că

$$a_{n_0} < a - \frac{1}{p_0} < a.$$

Deci  $a_{n_0}$  se află în afara vecinătății  $V_{p_0} = \left( a - \frac{1}{p_0}, a + \frac{1}{p_0} \right)$  și deci la operația de ordin  $p_0$ , termenul  $a_{n_0}$  va apărea în sirul crescător.

**Propozitie 2.** Dacă  $a_n \rightarrow a$  și  $a_n > a$  pentru orice  $n \in N$ , se poate schimba ordinea termenilor astfel încât să obținem un sir descreșător (convergent către  $a$ ).

Avem  $-a_n \rightarrow -a$  și  $-a_n < -a$ ; putem deci schimba ordinea termenilor sirului  $(-a_n)$  ca să obținem un sir crescător  $(-b_n)$ . Atunci sirul  $(b_n)$  este descreșător și se poate obține prin schimbarea ordinii termenilor sirului  $(a_n)$ .

**Propozitie 3.** Dacă  $a_n \rightarrow a$  și  $a_n \neq a$  pentru orice  $n \in N$  și dacă există o infinitate de termeni la stînga lui  $a$  și o infinitate de termeni la dreapta lui  $a$ , atunci se pot forma cu termenii sirului două siruri  $(b_n)$  și  $(c_n)$ , primul crescător, al doilea descreșător, ambele convergente către  $a$ .

Într-adevăr, fie  $(a'_n)$  subșirul lui  $(a_n)$  format cu toți termenii de la stînga lui  $a$ ,  $a'_n < a$ , și  $(a''_n)$  subșirul format cu toți termenii de la dreapta lui  $a$ ,  $a < a''_n$ . Deoarece  $a_n \rightarrow a$ , avem  $a'_n \rightarrow a$  și  $a''_n \rightarrow a$ .

Prin schimbarea convenabilă a termenilor sirului  $(a'_n)$  putem obține un sir crescător  $b_n \rightarrow a$ , și de asemenea, prin schimbarea ordinii termenilor sirului  $(a''_n)$  putem obține un sir descreșător  $c_n \rightarrow a$ .

**Propozitie 4.** Dacă  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt două siruri convergente și au aceeași limită  $c$ , orice sir obținut cu termenii celor două siruri, într-o ordine oarecare, este convergent și are limita  $c$ .

Într-adevăr, în afara fiecărei vecinătăți a lui  $c$  se află un număr finit de termeni ai sirului  $(a_n)$  și un număr finit de termeni ai sirului  $(b_n)$ , deci de asemenea un număr finit ai oricărui sir  $(c_n)$  obținut cu termenii celor două siruri. Rezultă că sirul  $(c_n)$  are de asemenea limita  $c$ .

## 2. Puncte de acumulare ale unei mulțimi

**Propozitie.** Un număr  $a$  este punct de acumulare al unei mulțimi  $A$ , dacă și numai dacă există un sir  $a_n$  convergent către  $a$ , format din puncte din  $A$  diferite de  $a$  ( $a_n \in A$ ,  $a_n \neq a$ ,  $a_n \rightarrow a$ ).

Dacă  $a_n \in A$ ,  $a_n \neq a$  și  $a_n \rightarrow a$ , atunci în orice vecinătate a lui  $a$  se află termeni  $a_n$  din sir, deci în orice vecinătate a lui  $a$  se află puncte  $a_n$  din  $A$  diferite de  $a$ . Rezultă că  $a$  este punct de acumulare al mulțimii  $A$ .

Reciproc, să presupunem că  $a$  este punct de acumulare al mulțimii  $A$ . În vecinătatea  $V_1 = (a - 1, a + 1)$  se află o infinitate de puncte din  $A$ , diferite de  $a$ ; fie  $a_1$  unul dintre acestea. Avem

$$a_1 \in A, a_1 \neq a \text{ și } |a_1 - a| < 1.$$

Să presupunem că am găsit un punct  $a_n \in A$ ,  $a_n \neq a$ , și  $|a_n - a| < \frac{1}{n}$ .

În vecinătatea  $V_{n+1} = \left(a - \frac{1}{n+1}, a + \frac{1}{n+1}\right)$  se află o infinitate de puncte din  $A$ , diferite de  $a$ . Fie  $a_{n+1}$  unul dintre acestea, pe care-l putem alege diferit de  $a_n$ . Avem

$$a_{n+1} \in A, a_{n+1} \neq a \text{ și } |a_{n+1} - a| < \frac{1}{n+1}.$$

Am demonstrat prin inducție completă că putem alege un sir  $(a_n)$  de puncte din  $A$ , diferite de  $a$  (și diferite între ele) astfel ca

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} \text{ pentru fiecare } n \in N.$$

Pe baza criteriului de convergență deducem că  $a_n \rightarrow a$ .

**Corolarul 1.** Un număr  $a$  este punct aderent al mulțimii  $A$ , dacă și numai dacă există un sir  $(a_n)$  de puncte din  $A$ , convergent către  $a$ .

Într-adevăr, dacă  $a \in A$ , atunci luăm  $a_n = a$  pentru orice  $n$ . Dacă  $a \notin A$ , atunci  $a$  este punct de acumulare al lui  $A$  și se aplică propoziția precedentă.

**Corolarul 2.** O mulțime  $A$  este închisă, dacă și numai dacă, oricare ar fi sirul convergent de puncte (distințe sau nu) din  $A$ , limita sirului aparține de asemenea lui  $A$ .

Să presupunem întâi că  $A$  este închisă și fie  $(a_n)$  un sir de puncte din  $A$ , convergent către un număr  $a$ . Conform corolarului 1,  $a$  este punct aderent al lui  $A$ , și deoarece  $A$  este închisă, își conține punctele aderente, deci  $a \in A$ .

Reciproc, să presupunem că oricare ar fi sirul convergent de puncte din  $A$ , limita sa aparține de asemenea lui  $A$ . Deoarece orice punct aderent  $a \in A$  este limita unui sir de puncte  $(a_n)$  din  $A$ , urmează că  $a \in A$ , deci  $A$  este închisă și propoziția este demonstrată.

## § 7. Puteri și logaritmi

### 1. Radicali

Să considerăm ecuația

$$x^n = a \quad (a \geq 0, \text{ real}, n \text{ natural}).$$

Este ușor de văzut că dacă această ecuație are o soluție pozitivă, ea are numai una, adică dacă  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$  și  $x_1^n = x_2^n = a$ , atunci  $x_1 = x_2$ . În adevăr, dacă  $x_1$  și  $x_2$  ar fi două soluții pozitive, diferite, ale acestei ecuații, atunci, de exemplu,  $x_1 < x_2$ , deci  $x_1^n < x_2^n$ . Dar  $x_1^n = a$  și  $x_2^n = a$ , deci  $x_1^n = x_2^n$  și am ajuns la o contradicție.

Vom arăta acum că această ecuație are efectiv o soluție pozitivă.

Există un număr natural  $m > a$ ; deoarece  $n \geq 1$ , avem:  $m^n \geq m^1 = m$ , deci  $m^n > a$ . Numărul  $a$  se află deci cuprins între două numere consecutive din următoarele numere

$$0^n < 1^n < 2^n < \dots < m^n.$$

Fie  $k \geq 0$  numărul întreg astfel încât

$$k^n \leq a < (k+1)^n.$$

Avem apoi  $k < k + \frac{1}{2} < k + 1$ , deci  $k^n < \left(k + \frac{1}{2}\right)^n < (k+1)^n$ . Numărul  $a$  se află cuprins fie între  $k^n$  și  $\left(k + \frac{1}{2}\right)^n$ , fie între  $\left(k + \frac{1}{2}\right)^n$  și  $(k+1)^n$ .

Să notăm cu  $x_1$  și  $y_1$  numerele consecutive dintre numerele  $k, k + \frac{1}{2}, k + 1$ , pentru care avem

$$x_1^n \leq a < y_1^n.$$

Avem  $y_1 - x_1 = \frac{1}{2}$  și  $x_1 \geq 0$ .

Să presupunem că am găsit două numere  $x_p$  și  $y_p$  astfel ca:

$$x_p^n \leq a < y_p^n \text{ și } y_p - x_p = \frac{1}{2^p}.$$

Să considerăm numerele  $x_p < x_p + \frac{1}{2^{p+1}} < y_p$ ; avem:  $x_p^n < \left(x_p + \frac{1}{2^{p+1}}\right)^n < y_p^n$ . Numărul  $a$  este cuprins între  $x_p^n$  și  $y_p^n$ , deci este cuprins între două puteri consecutive dintre cele trei puteri  $x_p^n, \left(x_p + \frac{1}{2^{p+1}}\right)^n, y_p^n$ . Să notăm cu  $x_{p+1}$  și  $y_{p+1}$  două numere consecutive dintre numerele  $x_p, x_p + \frac{1}{2^{p+1}}, y_p$ , pentru care avem

$$x_{p+1}^n \leq a < y_{p+1}^n.$$

Avem de asemenea  $x_p \leqslant x_{p+1} < y_{p+1} \leqslant y_p$  și  $y_{p+1} - x_{p+1} = \frac{1}{2^{p+1}}$ .

Prin inducție completă putem deci construi două siruri de numere raționale  $(x_p)$  și  $(y_p)$  cu proprietățile următoare:

$$1) 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_p \leqslant \dots \leqslant y_p \leqslant \dots \leqslant y_2 \leqslant y_1.$$

$$2) y_p - x_p = \frac{1}{2^p}, p = 1, 2, 3, \dots$$

$$3) x_p^n \leqslant a < y_p^n, p = 1, 2, 3, \dots$$

Din proprietățile 1) și 2) deducem că cele două siruri au o limită comună  $x_0$ :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = x_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} y_p$$

și  $0 \leqslant x_1 \leqslant x_0$ .

Atunci :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x_p^n = x_0^n = \lim_{p \rightarrow \infty} y_p^n.$$

Dar din proprietatea 3) deducem că

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x_p^n \leqslant a \leqslant \lim_{p \rightarrow \infty} y_p^n,$$

adică :  $x_0^n \leqslant a \leqslant x_0^n$  și deci  $x_0^n = a$ , adică  $x_0$  este o soluție pozitivă a ecuației  $x^n = a$ .

Soluția pozitivă unică a ecuației  $x^n = a$  se notează cu  $\sqrt[n]{a}$  și se numește rădăcina de ordinul  $n$  a lui  $a$  (sau radicalul de ordin  $n$  al lui  $a$ ).

## 2. Proprietățile radicalilor

Deoarece  $\sqrt[n]{a}$  este soluția pozitivă a ecuației  $x^n = a$ , avem

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \text{ și } \sqrt[n]{a} \geqslant 0, \text{ oricare ar fi } a \geqslant 0 \text{ și } n \in N.$$

Avem  $\sqrt[0]{0} = 0$  și  $\sqrt[0]{1} = 1$ , oricare ar fi  $n \in N$ .

Într-adevăr, 0 este soluția pozitivă (unică) a ecuației  $x^n = 0$ , iar 1 este soluția pozitivă unică a ecuației  $x^n = 1$ .

Proprietățile radicalilor sunt următoarele ( $a \geqslant 0$ ):

$$1) (\sqrt[n]{a})^n = a, \quad (n \in N).$$

$$2) \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k, \quad (n \in N, k \in Z).$$

$$3) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^k}} = \sqrt[mn]{a^k}, \quad (n, m \in N, k \in Z).$$

$$4) \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad (n, m \in N).$$

$$5) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}; \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (n \in N).$$

$$6) \text{ Dacă } a > 1, \sqrt[n]{a} > 1; \text{ dacă } 0 < a < 1, \sqrt[n]{a} < 1, \quad (n \in N).$$

Pentru demonstrarea proprietăților 2) — 5) se notează cu  $u$  și  $v$  cei doi membri ai egalităților și se arată că, pentru un anumit exponent, puterile numerelor *positive*  $u$  și  $v$  sunt egale, deci  $u = v$ .

Pentru exemplificare să demonstrăm proprietatea 2):

Să notăm  $u = \sqrt[n]{a^k}$  și  $v = (\sqrt[n]{a})^k$ . Avem

$$u^n = (\sqrt[n]{a^k})^n = a^k \text{ și } v^n = (\sqrt[n]{a})^{kn} = [(\sqrt[n]{a})^n]^k = a^k,$$

deci  $u^n = v^n$ , de unde  $u = v$ , adică  $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ .

Pentru demonstrarea proprietății 6) raționăm prin reducere la absurd. Să presupunem că  $a > 1$  și  $\sqrt[n]{a} \leq 1$ . Ridicând ambii membri ai ultimei inegalități la puterea  $n$  obținem  $(\sqrt[n]{a})^n \leq 1^n$ , adică  $a \leq 1$ , ceea ce este în contradicție cu ipoteza  $a > 1$ .

La fel se arată că dacă  $0 < a < 1$ , atunci  $\sqrt[n]{a} < 1$ .

**Observații.** Am presupus, mai sus,  $a \geq 0$ . Ce se întâmplă în cazul când  $a < 0$ ?

1° Dacă  $a < 0$ , ecuația  $x^{2n} = a$  nu are nici o soluție reală, deoarece  $x^{2n} \geq 0$  oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ . Radicalii de ordin par ai numerelor strict negative nu au sens (în cadrul numerelor reale).

2° Dacă  $a < 0$ , ecuația  $x^{2n-1} = a$  are o soluție negativă unică. Într-adevăr notind  $t = -x$  avem  $t > 0$ , deci ecuația  $x^{2n-1} = b$  are soluție pozitivă unică,  $x_0 = \sqrt[2n-1]{b}$ . Atunci  $(-x_0)^{2n-1} = (-\sqrt[2n-1]{b})^{2n-1} = -(\sqrt[2n-1]{b})^{2n-1} = -b = a$ , adică  $-x_0 = -\sqrt[2n-1]{-a}$  este o soluție negativă a ecuației  $x^{2n-1} = a$ .

Soluția negativă unică a ecuației  $x^{2n-1} = a$ ,  $a < 0$ , se notează și în acest caz cu  $\sqrt[2n-1]{a}$ :

$$\sqrt[2n-1]{a} = -\sqrt[2n-1]{-a}.$$

De exemplu, ecuația  $x^3 = -27$  are soluția  $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$ .

Radicalii numerelor strict negative nu mai posedă toate proprietățile radicalilor numerelor pozitive. Proprietatea 3) nu mai este verificată pentru orice număr întreg  $k$ .

De exemplu,  $\sqrt[3]{-27} = -3$ , dar  $\sqrt[3.2]{(-27)^2} = \sqrt[6]{729} = 3$ .

De asemenea, proprietatea 2) nu mai are loc dacă  $a < 0$  și  $n$  este par, chiar dacă și  $k$  este par, deoarece membrul drept al egalității nu are sens în aceste condiții.

Proprietățile 2) și 3) sunt esențiale pentru definirea puterilor cu exponent rațional.

### 3. Puteri raționale

Fie  $a > 0$  un număr real și  $r$  un număr rațional. Pentru definirea puterii  $a^r$  vom folosi faptul că  $r$  poate fi scris ca fracție  $\frac{m}{n}$  și vom defini

puterea  $a^{\frac{m}{n}}$ . Deoarece, însă, numărul  $r$  poate fi scris în mai multe moduri

ca fracție, pentru puterea  $a^r$  trebuie să alegem o definiție care să fie independentă de alegerea particulară a fracției care-l reprezintă pe  $r$ .

Fie  $\frac{m}{n}$  o fracție cu *numitorul natural*, care reprezintă numărul rațional  $r$ :

$$r = \frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot m.$$

Din proprietățile radicalilor deducem:

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Să notăm

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Fie  $\frac{m'}{n'}$  fracția ireductibilă cu *numitorul natural* care reprezintă pe  $r$ :

$$r = \frac{m'}{n'} = m' \cdot \frac{1}{n'} = \frac{1}{n'} \cdot m'.$$

Avem:

$$a^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[n']{a^{m'}} = (\sqrt[n']{a})^{m'}.$$

Deoarece însă fracția  $\frac{m'}{n'}$  este ireductibilă, există un număr natural  $k$  astfel ca  $m = km'$  și  $n = kn'$ .

Atunci:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn']{a^{km'}} = \sqrt[n']{a^{m'}},$$

adică

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}.$$

Definim puterea  $a^r$  cu exponentul rațional  $r$  astfel:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m,$$

unde  $r = \frac{m}{n}$ , iar  $n$  este *natural*. Din cele de mai sus rezultă că definiția puterii  $a^r$  este independentă de alegerea fracției  $\frac{m}{n}$  care reprezintă pe  $r$ .

Dacă  $r \geq 0$ , atunci putem scrie  $r = \frac{m}{n}$ , unde  $m$  și  $n$  sunt numere naturale. În acest caz  $\sqrt[n]{0^m} = (\sqrt[n]{0})^m = 0$ ; putem deci pune prin definiție  $0^r = 0$ . Dacă însă  $r \leq 0$ , și dacă  $r = \frac{m}{n}$  cu  $n$  natural, atunci  $m \leq 0$  și

puterea  $0^m$  nu mai este definită; în acest caz nu mai putem scrie  $\sqrt[m]{0^m}$  sau  $(\sqrt[m]{0})^m$ , și deci puterea  $0^r$  cu  $r \leq 0$  nu mai are sens.

Reținem că puterea  $0^r$  are sens numai pentru  $r > 0$ . Avem  $1' = 1$  oricare ar fi  $r$  rațional.

Puterile cu exponent rațional se numesc *puteri raționale*.

#### 4. Proprietățile puterilor raționale

Proprietățile puterilor raționale sunt următoarele (ori de câte ori exponentul este  $\leq 0$  se va presupune baza  $> 0$ ):

$$1) a^r \cdot a^s = a^{r+s}; \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}.$$

$$2) (a^r)^s = a^{rs}.$$

$$3) (ab)^r = a^r b^r; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

$$4) a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

5) Dacă  $a > 1$  și  $r > 0$ , atunci  $a^r > 1$ .

Aceste proprietăți se demonstrează folosind definiția puterilor raționale și proprietățile corespunzătoare ale radicalilor și ale puterilor întregi. Pentru exemplificare să demonstrăm proprietatea 1). Să scriem numerele  $r$  și  $s$  ca fracție cu același numitor natural:  $r = \frac{p}{n}$ ,

$s = \frac{q}{n}$ . Avem:

$$a^r \cdot a^s = a^{\frac{p}{n}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = \sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[n]{a^p a^q} = \sqrt[n]{a^{p+q}} = a^{\frac{p+q}{n}} = a^{r+s}.$$

Din aceste proprietăți mai rezultă următoarele proprietăți:

6) Dacă  $0 < a < 1$  și  $r > 0$  atunci  $a^r < 1$ .

7) Dacă  $r < 0$ , atunci  $a^r < 1$  pentru  $a > 1$ ,

$a^r > 1$  pentru  $0 < a < 1$ .

8) Dacă  $r < s$ , atunci:  $a^r < a^s$  pentru  $a > 1$ .

$a^r > a^s$  pentru  $0 < a < 1$ .

(Dacă baza este  $> 1$ , inegalitatea dintre exponenți se păstrează și pentru puteri; dacă baza este  $< 1$ , inegalitatea dintre exponenți se inversează pentru puteri).

9) Dacă  $0 < a < b$ , atunci:  $a^r < b^r$  pentru  $r > 0$ ,  
 $a^r > b^r$  pentru  $r < 0$ .

(Dacă exponentul este  $> 0$ , inegalitatea dintre baze se păstrează și pentru puteri; dacă exponentul este  $< 0$ , inegalitatea dintre baze se inversează pentru puteri.)

Demonstrația acestor proprietăți se face ca și pentru puterile întregi.

### 5. Șiruri de puteri raționale

Pentru a putea defini puterile cu exponent real oarecare, trebuie mai întii să studiem șirurile de puteri raționale.

**L e m a 1.** Dacă  $a > 1$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ .

Deoarece  $a > 1$  și

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$$

avem :

$$a > a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}} > \dots > a^{\frac{1}{n}} > \dots$$

Șirul  $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)$  este descrescător și mărginit  $\left(1 < a^{\frac{1}{n}} < a\right)$ . El este deci convergent. Să arătăm că limita sa este 1. Să presupunem prin absurd că 1 nu este limita șirului  $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)$ . Aceasta înseamnă că există un număr  $\varepsilon_0 > 0$ , cu proprietatea că pentru oricare număr  $N$  există un număr  $n > N$  astfel că  $\left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| > \varepsilon_0$ , sau, (deoarece  $a^{\frac{1}{n}} > 1$ ),  $a^{\frac{1}{n}} - 1 > \varepsilon_0$ , sau  $a^{\frac{1}{n}} > 1 + \varepsilon_0$ , sau încă  $a > (1 + \varepsilon_0)^n$ ; atunci, în baza inegalității  $(1 + \varepsilon_0)^n \geqslant 1 + n\varepsilon_0$ , a lui Bernoulli, avem cu atât mai mult  $a \geqslant 1 + n\varepsilon_0$ . Deoarece  $\varepsilon_0 > 0$ , există însă un număr  $N$  astfel că  $a < N\varepsilon_0 < 1 + N\varepsilon_0$ , și deci pentru orice  $n > N$  avem de asemenea  $a < 1 + n\varepsilon_0$ . Am ajuns astfel la o contradicție.

Rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ .

**L e m a 2.** Dacă  $a > 1$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$ .

Într-adevăr,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$ , deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

**O b s e r v a t i e .** Șirul  $\left(a^{-\frac{1}{n}}\right)$  este crescător și  $a^{-\frac{1}{n}} < 1$  pentru orice  $n \in N$ .

**L e m a 3.** Dacă  $a > 1$  și  $(r_n)$  este un șir de numere raționale convergent către 0, atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = 1$ .

Fie  $\varepsilon > 0$ . Deoarece  $a^n \rightarrow 1$  și  $a^{-n} \rightarrow 1$ , există un număr natural  $p$  astfel ca (fig. 45).

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{p}} < 1 < a^{\frac{1}{p}} < 1 + \varepsilon.$$

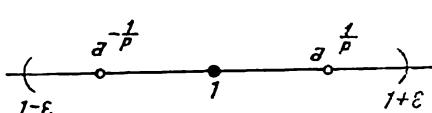


Fig. 45

Să notăm  $\varepsilon' = \frac{1}{p}$  ( $p$  depinde de  $\varepsilon$ , deci  $\varepsilon'$  depinde de  $\varepsilon$ ).

Deoarece  $r_n \rightarrow 0$ , există un număr natural  $N(\varepsilon) = N(\varepsilon')$  astfel ca  $|r_n| < \varepsilon'$  sau  $|r_n| < \frac{1}{p}$ , adică

$$-\frac{1}{p} < r_n < \frac{1}{p}, \text{ dacă } n \geq N(\varepsilon).$$

Deoarece  $a > 1$ , avem:

$$a^{-\frac{1}{p}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{p}} \text{ pentru } n \geq N(\varepsilon)$$

și deci:

$$1 - \varepsilon < a^{r_n} < 1 + \varepsilon, \text{ pentru } n \geq N(\varepsilon),$$

adică:

$$|a^{r_n} - 1| < \varepsilon \text{ pentru } n \geq N(\varepsilon).$$

Aceasta înseamnă că  $a^{r_n} \rightarrow 1$ .

**L e m a 4.** Dacă  $a > 0$  și  $(r_n)$  este un sir de numere raționale convergent către 0, atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = 1$ .

Pentru  $a > 1$ , proprietatea este enunțată în lema 3.

Pentru  $a = 1$ , avem  $a^{r_n} = 1$ , pentru orice  $n$ , deci  $a^{r_n} \rightarrow 1$ . Să presupunem  $0 < a < 1$ . Atunci  $\frac{1}{a} > 1$ , deci, în baza lemei 3,  $\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} \rightarrow 1$ .

Atunci:  $a = \frac{1}{\frac{1}{a}}$ , deci  $a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}}$  și deci  $a^{r_n} \rightarrow 1$ .

**P r o p o z i t i o n a l a 1.** Dacă  $a > 0$ , și dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$ , unde  $r_n$  și  $r$  sunt numere raționale, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = a^r = a^{n \rightarrow \infty}.$$

Într-adevăr,  $r_n - r \rightarrow 0$ , deci  $a^{r_n-r} \rightarrow 1$ .  
Atunci

$$a^{r_n} = a^{r_n-r+r} = a^{r_n-r} a^r,$$

deci  $a^{r_n} \rightarrow 1 \cdot a^r$ .

**Observație.** Dacă  $a = 0$  și  $r_n > 0$ ,  $r > 0$ , atunci  $a^{r_n} = 0$ ,  $a^r = 0$ , deci  $a^{r_n} \rightarrow a^r$ . Propoziția 1 rămîne deci adevărată și în cazul cînd baza este 0, dacă exponenții sunt strict pozitivi.

**Propoziția 2.** Dacă  $a > 0$  și  $(r_n)$  este un sir convergent de numere raționale, atunci sirul  $(a^{r_n})$  este de asemenea convergent.

Vom face demonstrația pentru  $a > 1$ . Sirul  $(r_n)$  este mărginit (fiind convergent). Există deci un număr  $M > 0$  astfel ca  $-M \leq r_n \leq M$  pentru orice  $n \in N$ . Atunci  $a^{r_n} \leq a^M$  pentru orice  $n \in N$ . Să punem  $A = a^M > 0$ .

Fie  $\epsilon > 0$ . Deoarece:  $a^{\frac{1}{p}} \rightarrow 1$  și  $a^{-\frac{1}{p}} \rightarrow 1$ , există un număr natural  $p$  astfel ca:

$$1 - \frac{\epsilon}{A} < a^{-\frac{1}{p}} < 1 < a^{\frac{1}{p}} < 1 + \frac{\epsilon}{A}.$$

Să punem  $\epsilon' = \frac{1}{p}$  ( $\epsilon'$  depinde de  $\epsilon$ , deci  $\epsilon'$  depinde de  $\epsilon$ ). Deoarece  $(r_n)$  este sir Cauchy (fiind convergent), există un număr  $N(\epsilon) = N(\epsilon')$  astfel ca dacă  $m, n \geq N(\epsilon)$  să avem  $-\epsilon' < r_m - r_n < \epsilon'$ , adică

$$-\frac{1}{p} < r_m - r_n < \frac{1}{p}.$$

Atunci:  $a^{-\frac{1}{p}} < a^{r_m - r_n} < a^{\frac{1}{p}}$   $n, m \geq N(\epsilon)$ ,

deci :

$$1 - \frac{\epsilon}{A} < a^{r_m - r_n} < 1 + \frac{\epsilon}{A} \quad n, m \geq N(\epsilon),$$

adică :

$$-\frac{\epsilon}{A} < a^{r_m - r_n} - 1 < \frac{\epsilon}{A}$$

sau

$$|a^{r_m - r_n} - 1| < \frac{\epsilon}{A} \quad n, m \geq N(\epsilon).$$

Atunci :

$$\begin{aligned} |a^{r_m} - a^{r_n}| &= |a^{r_n} (a^{r_m - r_n} - 1)| = a^{r_n} |a^{r_m - r_n} - 1| \leq \\ &\leq a^M |a^{r_m - r_n} - 1| = A |a^{r_m - r_n} - 1| \end{aligned}$$

și deci dacă  $m, n \geq N(\epsilon)$ , avem

$$|a^m - a^n| \leq A |a^{m-n} - 1| < A \frac{\epsilon}{A} = \epsilon,$$

adică  $(a^n)$  este sir fundamental. În baza criteriului lui Cauchy rezultă că  $(a^n)$  este convergent.

Dacă  $a = 1$ , avem  $1^n = 1$ , deci  $(1^n)$  este sir convergent.

Dacă  $0 < a < 1$ , raționamentul se face ca mai sus, ţinând seama de faptul că inegalitatea dintre exponenti se inversează pentru puteri, și deoarece  $a^n \leq a^{-M}$ , se ia  $A = a^{-M}$ .

**Propozitia 3.** Dacă  $a > 0$ , și dacă  $(r_n)$  și  $(s_n)$  sunt siruri de numere rationale, convergente către aceeași limită, atunci  $(a^n)$  și  $(a^{s_n})$  sunt de asemenea convergente către aceeași limită.

Într-adevăr, deoarece  $(r_n)$  și  $(s_n)$  au aceeași limită avem:  $r_n - s_n \rightarrow 0$ , deci:  $a^{r_n - s_n} \rightarrow 1$ , adică

$$a^{r_n - s_n} - 1 \rightarrow 0.$$

Sirul  $(a^{s_n})$  este convergent, deci este mărginit, și deci:

$$a^{s_n}(a^{r_n - s_n} - 1) \rightarrow 0.$$

Atunci  $a^{r_n} = (a^{r_n} - a^{s_n}) + a^{s_n}$  și  $a^{r_n} - a^{s_n} = a^{s_n}(a^{r_n - s_n} - 1) \rightarrow 0$ , deci:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n}.$$

## 6. Puteri reale

Fie  $a > 0$ . Vom defini acum puterea  $a^x$  cu exponentul  $x$  real.

Fie  $x \in R$  și  $(r_n)$  un sir de numere rationale convergent către  $x$ . Sirul  $(a^{r_n})$  este convergent către un număr  $\alpha$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \alpha.$$

Dacă  $(s_n)$  este alt sir de numere rationale convergent către  $x$ , sirurile  $(a^{r_n})$  și  $(a^{s_n})$  au aceeași limită  $\alpha$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = \alpha.$$

Așadar, limita  $\alpha$  nu depinde de sirul particular de numere raționale convergent către  $x$ , ci numai de  $x$ . Prin definiție, puterea  $a^x$  se definește prin

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}, \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x, \quad r_n \in Q).$$

Puterile cu exponent real oarecare se numesc *puteri reale*.

**O b s e r v a t i i.** 1° Dacă  $a = 0$  și  $x > 0$ , urmărind procedeul de mai sus se definește  $0^x = 0$ . În adevăr, orice sir de numere raționale  $(r_n)$  convergent către  $x$  are termenii strict pozitivi,  $r_n > 0$ , cu excepția unui număr finit dintre ei, pe care-i putem înălțura. Atunci

$$0^{r_n} = 0, \quad \text{deci } \lim_{n \rightarrow \infty} 0^{r_n} = 0 \quad \text{și deci } 0^x = \lim_{n \rightarrow \infty} 0^{r_n} = 0.$$

2° Dacă  $x = r$  este rațional, puterea  $a^x$  definită aici considerind pe  $x$  real coincide cu puterea rațională  $a^r$  definită anterior.

În adevăr, oricare ar fi sirul de numere raționale  $(r_n)$  convergent către  $r$ , avem

$$a^r = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}.$$

Pe de altă parte, conform definiției puterii  $a^x$  avem

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}.$$

Limita unui sir fiind unică, deducem  $a^x = a^r$ .

În particular  $a^0 = 1$ , ( $a > 0$ ),  $a^1 = a$ , ( $a \geq 0$ ), unde 0 și 1 sunt considerate numere reale.

## 7. Proprietățile puterilor reale

Puterile reale au aceleași proprietăți ca și puterile raționale (ori de câte ori exponentul este  $\leq 0$ , se consideră baza  $> 0$ ).

$$1) \quad a^x a^y = a^{x+y}; \quad \frac{a^x}{b^y} = a^{x-y}.$$

$$2) \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

$$3) \quad (ab)^x = a^x b^x; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

$$4) \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

$$5) \quad \text{Dacă } a > 1 \text{ și } x > 0, \text{ atunci } a^x > 1.$$

$$6) \quad \text{Dacă } x_n \rightarrow x, \text{ atunci } a^{x_n} \rightarrow a^x, \quad \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = a^{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \right)$$

$$7) \quad \text{Dacă } a > 0, a \neq 1, \text{ și } a^{x_n} \rightarrow a^x, \text{ atunci } x_n \rightarrow x.$$

Să observăm întii că dacă  $a > 0$ , atunci  $a^x > 0$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .

Într-adevăr, dacă  $a > 1$ , alegem un sir crescător de numere raționale  $r_n \rightarrow x$ . Atunci (sirul  $a^{r_n}$ ) este de asemenea crescător și  $a^{r_n} \rightarrow a^x$ , deci  $a^{r_n} \leq a^x$  pentru orice  $n$ . Dar  $a^{r_n} > 0$ , deci  $a^x > 0$ . Dacă  $0 < a < 1$ , alegem un sir descrescător de numere raționale  $r_n \rightarrow x$ . Atunci sirul  $(a^{r_n})$  este crescător, și ca mai sus deducem că  $a^x > 0$ .

În particular, dacă  $a > 1$  și  $x > 0$ , putem alege un sir crescător  $(r_n)$  de numere raționale strict pozitive convergent către  $x$ ,  $r_n > 0$ ,  $r_n \rightarrow x$ . Atunci  $a^{r_n} > 1$ , și deci  $a^x > 1$ , și astfel proprietatea 5) este demonstrată. Să demonstrează acum celelalte proprietăți.

1) Fie  $r_n \rightarrow x$  și  $s_n \rightarrow y$ ; atunci  $r_n + s_n \rightarrow x + y$ , deci

$$a^{x+y} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n+s_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{r_n} \cdot a^{s_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = a^x \cdot a^y.$$

3) Fie  $r_n \rightarrow x$ . Atunci

$$(ab)^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (ab)^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{r_n} \cdot b^{r_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b^{r_n} = a^x \cdot b^x.$$

Deoarece  $b > 0$ , avem  $b^x > 0$ ; atunci

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{b}\right)^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{r_n}}{b^{r_n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} b^{r_n}} = \frac{a^x}{b^x}.$$

4) Fie  $r_n \rightarrow x$ . Avem  $-r_n \rightarrow -x$  și  $a^{-r_n} = \frac{1}{a^{r_n}}$ , deci

$$a^{-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^{r_n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}} = \frac{1}{a^x},$$

deoarece, pentru  $a > 0$ , avem  $a^x > 0$ .

6) Fie  $x_n \rightarrow x$ . Pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  avem

$$x_n - \frac{1}{n} < x_n < x_n + \frac{1}{n}.$$

Există numere raționale  $r_n$  și  $s_n$  astfel ca

$$x_n - \frac{1}{n} < r_n < x_n < s_n < x_n + \frac{1}{n}.$$

Dar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( x_n - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = x + 0 = x,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( x_n + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = x + 0 = x$$

și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Deducem atunci că  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x$ .

Dacă  $a > 1$ , avem:  $a^{r_n} < a^{x_n} < a^{s_n}$ ,

și deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{s_n} = a^x$ , rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = a^x$ .

Dacă  $a = 1$ , evident  $1^{x_n} = 1$ ,  $1^x = 1$  și  $1^{x_n} \rightarrow 1^x$ .

Dacă  $0 < a < 1$ , avem  $a^{x_n} > a^{z_n} > a^{s_n}$ , și deducem iarăși că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = a^x.$$

Dacă  $a = 0$  și  $x > 0$ , înălțurind la nevoie un număr finit de termeni ai sirului  $x_n$ , putem presupune  $x_n > 0$ . În acest caz  $a^{x_n} = 0$ ,  $a^x = 0$  și  $0^{x_n} \rightarrow 0^x$ .

7) Vom arăta mai întii că dacă  $a > 1$ , și  $a^{x_n} \rightarrow 1$ , atunci  $y_n \rightarrow 0$ .

Dacă, prin absurd, sirul  $(y_n)$  nu ar avea limită 0, ar exista o vecinătate  $(-\epsilon_0, \epsilon_0)$  a lui 0,  $\epsilon_0 > 0$ , în afara căreia se află o infinitate de termeni  $y_n$ , deci avem  $y_n < -\epsilon_0$  sau  $\epsilon_0 < y_n$  pentru o infinitate de indici. Pentru acești indici avem:

$$a^{y_n} < a^{-\epsilon_0} < 1 \text{ sau } 1 < a^{\epsilon_0} < a^{y_n},$$

adică  $a^{y_n}$  se află în afara vecinătății  $(a^{-\epsilon_0}, a^{\epsilon_0})$  a lui 1, pentru o infinitate de indici deci sirul  $a^{y_n}$  nu tinde către 1, ceea ce contrazice ipoteza.

Dacă  $0 < a < 1$  și  $a^{x_n} \rightarrow 1$ , atunci  $y_n \rightarrow 0$ .

$$\text{Într-adevăr } \frac{1}{a} > 1, \text{ și } \left(\frac{1}{a}\right)^{y_n} = \frac{1}{a^{y_n}} \rightarrow 1. \text{ deci } y_n \rightarrow 0.$$

Dacă  $a > 0$  și  $a \neq 1$ , și dacă  $a^{x_n} \rightarrow x$  atunci  $x_n \rightarrow x$ . Într-adevăr, deoarece  $a^{x_n} \rightarrow a^x$ , avem:

$$\frac{a^{x_n}}{a^x} \rightarrow 1, (a^x > 0), \text{ adică } a^{x_n - x} \rightarrow 1, \text{ de unde } x_n - x \rightarrow 0 \text{ și deci } x_n \rightarrow x.$$

**Observație.** Pentru  $a = 0$  sau  $a = 1$ , proprietatea 7) nu mai este adevărată, deoarece avem  $0^{x_n} = 0$  și  $0^x = 0$ , deci  $0^{x_n} \rightarrow 0^x$ , chiar dacă sirul  $(x_n)$  nu tinde către  $x$ . De asemenea, avem  $1^{x_n} = 1$  și  $1^x = 1$ , deci  $1^{x_n} \rightarrow 1^x$  chiar dacă sirul  $(x_n)$  nu tinde către  $x$ .

2) Să demonstrăm acum proprietatea  $(a^x)^t = a^{xt}$ . Să presupunem întii  $a > 1$ , și  $y = t$  rational și să arătăm că  $(a^x)^t = a^{xt}$ .

Fie  $(r_n)$  un sir crescător convergent către  $x$  și  $(s_n)$  un sir descrescător convergent către  $x$ . Pentru fiecare  $n \in N$  avem:

$$r_n \leqslant x \leqslant s_n,$$

deci:

$$a^{r_n} \leqslant a^x \leqslant a^{s_n}.$$

Dacă  $t \geqslant 0$ , avem

$$(a^{r_n})^t \leqslant (a^x)^t \leqslant (a^{s_n})^t$$

sau:

$$a^{r_n t} \leqslant (a^x)^t \leqslant a^{s_n t}$$

și deoarece  $r_n t \rightarrow xt$  și  $s_n t \rightarrow xt$ , avem  $a^{r_n t} \rightarrow a^{xt}$  și  $a^{s_n t} \rightarrow a^{xt}$  și deci  $(a^x)^t = a^{xt}$ .

Dacă  $t \leqslant 0$ , avem

$$(a^{r_n})^t \geqslant (a^x)^t \geqslant (a^{s_n})^t$$

și în același mod se deduce că  $(a^x)^t = a^{xt}$ .

Dacă  $0 < a < 1$ , atunci  $\frac{1}{a} > 1$ , deci

$$\left(\left(\frac{1}{a}\right)^x\right)^t = \left(\frac{1}{a}\right)^{xt} \text{ sau } \frac{1}{(a^x)^t} = \frac{1}{a^{xt}}. \text{ de unde: } (a^x)^t = a^{xt}.$$

Dacă  $a = 1$ , evident  $a^x = 1$ ,  $(a^x)^t = 1$ , și  $a^{xt} = 1$ , deci  $(a^x)^t = a^{xt}$ . Dacă  $a = 0$ ,  $x > 0$  și  $t > 0$ , avem de asemenea  $(a^x)^t = a^{xt} = 0$ .

Să demonstrăm acum că  $(a^x)^y = a^{xy}$ .

Fie  $(t_n)$  un sir de numere raționale convergent către  $y$ .

Aveam:

$$(a^x)^{t_n} = a^{xt_n}.$$

Dar  $(a^x)^{t_n} \rightarrow (a^x)^y$ , iar  $xt_n \rightarrow xy$ , deci  $a^{xt_n} \rightarrow a^{xy}$ , de unde

$$(a^x)^y = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^x)^{t_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{xt_n} = a^{xy}.$$

Din proprietățile precedente ale puterilor reale se deduc încă următoarele proprietăți:

- 8) Dacă  $0 < a < 1$  și  $x > 0$ , atunci  $a^x < 1$ .
- 9) Dacă  $x < 0$ , atunci  $a^x < 1$  pentru  $a > 1$ ,  
 $a^x > 1$  pentru  $0 < a < 1$ .
- 10) Dacă  $x < y$ , atunci  $a^x < a^y$  pentru  $a > 1$ ,  
 $a^x > a^y$  pentru  $0 < a < 1$ .
- 11) Dacă  $0 < a < b$ , atunci  $a^x < b^x$  pentru  $x > 0$ .  
 $a^x > b^x$  pentru  $x < 0$ .

Demonstrația acestor proprietăți se face ca și pentru puterile întregi și raționale.

*Aplicație.* Dacă  $a \geq 2$ , avem  $a^x > x$  oricare ar fi  $x \in R$ .

Într-adevăr, dacă  $x \leq 0$  avem  $a^x > x$ , deoarece  $a^x > 0$  oricare ar fi  $x \in R$ . Dacă  $0 < x < 1$ , avem  $a^0 < a^x$  și deoarece  $a^0 = 1$ , deducem  $a^x > 1 > x$ . Fie  $x \geq 1$ , și  $n$  un număr natural astfel ca  $n \leq x \leq n+1$ . Atunci:  $a^n \leq a^x < a^{n+1}$ . Dar  $a^n > n+1 > x$ , deci  $a^x \geq a^n > x$ , adică  $a^x > x$ . În particular,  $a^x > x$ , oricare ar fi  $x \in R$ .

## 8. Logaritmi

Să considerăm ecuația:

$$a^x = b$$

și să vedem în ce caz această ecuație are o soluție unică (pozitivă sau negativă).

Deoarece exponentul  $x$  este real, pentru ca puterea  $a^x$  să aibă sens este necesar ca  $a \geq 0$  (dacă  $x \leq 0$  este necesar ca  $a > 0$ ). Atunci, pentru a avea loc egalitatea  $a^x = b$  este necesar de asemenea ca  $b \geq 0$ .

Vom elimina mai întii mai multe cazuri:

1) Dacă  $a = 0$  și  $b = 0$ , ecuația  $0^x = 0$  are ca soluție orice număr real  $x > 0$ , deci are o infinitate de soluții.

2) Dacă  $a = 0$  și  $b > 0$ , ecuația  $0^x = b$  nu are nici o soluție, deoarece  $0^x = 0$  oricare ar fi  $x > 0$ .

Așadar, dacă  $a = 0$ , ecuația  $a^x = b$  nu are o soluție unică, oricare ar fi  $b \geq 0$ .

3) Dacă  $a > 0$  și  $b = 0$ , ecuația  $a^x = 0$  nu are nici o soluție, deoarece  $a^x > 0$ , oricare ar fi  $x \in R$ .

Din 1) și 3) deducem că dacă  $b = 0$ , ecuația  $a^x = b$  nu are o soluție unică, oricare ar fi  $a \geq 0$ .

4) Dacă  $a = 1$  și  $b = 1$ , ecuația  $1^x = 1$  are ca soluție orice număr real  $x \in R$ .

5) Dacă  $a = 1$  și  $b \neq 1$ , ecuația  $1^x = b$  nu are nici o soluție deoarece  $1^x = 1$ .

Așadar, dacă  $a = 1$ , ecuația  $a^x = b$  nu are o soluție unică, oricare ar fi  $b \geq 0$ .

A rămas de studiat cazul cînd  $a > 0$  și  $a \neq 1$ , iar  $b > 0$ .

În acest caz, ecuația  $a^x = b$  are o singură soluție care poate fi pozitivă sau negativă, în particular 0.

**Propozitie.** Dacă  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  și  $b > 0$ , ecuația  $a^x = b$  are o singură soluție.

a) Vom presupune mai întii că  $a > 1$  și  $b \geq 1$ . Sirul  $(a^n)$  este strict crescător și nemărginit:

$$1 < a < a^2 < a^3 < \dots < a^n < \dots$$

Există doi termeni consecutivi în acest sir, între care se află  $b$ .

$$a^k \leq b < a^{k+1} \quad (k \geq 0).$$

Să împărțim intervalul  $[k, k + 1]$  în două părți egale prin punctul  $c$ ; avem  $k < c < k + 1$ , deci

$$a^k < a^c < a^{k+1}.$$

Să notăm cu  $[x_1, y_1]$  acela din segmentele  $[k, c]$  sau  $[c, k + 1]$ , pentru care

$$a^{x_1} \leq b < a^{y_1}.$$

Avem

$$y_1 - x_1 = \frac{1}{2}.$$

Să presupunem că am găsit două numere  $x_n < y_n$  astfel ca

$$a^{x_n} \leq b < a^{y_n} \text{ și } y_n - x_n = \frac{1}{2^n}.$$

Împărțind segmentul  $[x_n, y_n]$  în două părți egale prin punctul  $c_n$ , avem  $x_n < c_n < y_n$  și

$$a^{x_n} < a^{c_n} < a^{y_n}.$$

Numărul  $b$  este cuprins între două puteri consecutive dintre acestea. Să notăm cu  $x_{n+1}$  și  $y_{n+1}$  exponenții celor două puteri consecutive pentru care

$$a^{x_{n+1}} \leq b < a^{y_{n+1}}.$$

Avem de asemenea

$$x_n \leq x_{n+1} < y_{n+1} \leq y_n \text{ și } y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

În acest fel am demonstrat prin inducție completă că putem găsi două siruri  $(x_n)$  și  $(y_n)$ , astfel ca:

$$1^{\circ} \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq y_2 \leq y_1.$$

$$2^{\circ} \quad y_n - x_n = \frac{1}{2^n}, \quad n \in N.$$

$$3^{\circ} \quad a^{x_n} \leq b \leq a^{y_n}, \quad n \in N.$$

Din primele două condiții deducem că cele două siruri au o limită comună  $x_0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0.$$

Atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{y_n} = a^{x_0}$ , și din condiția  $3^{\circ}$  deducem că  $a^{x_0} = b$ , deci  $x_0$  este o soluție a ecuației.

Să remarcăm că dacă  $b > 1$ , atunci  $x_0 > 0$ ; în adevăr, dacă am avea  $x_0 \leq 0$ , deoarece  $a > 1$ , ar rezulta  $a^{x_0} \leq 1$  și cum  $b > 1$  nu am putea avea egalitatea  $a^{x_0} = 1$ .

Dacă  $b = 1$ ,  $x_0 = 0$  este soluție a ecuației deoarece  $a^0 = 1 = b$ .

b) Să presupunem acum  $a > 1$  și  $0 < b < 1$ . Atunci  $\frac{1}{b} > 1$ , deci ecuația  $a^x = \frac{1}{b}$  are o soluție  $y_0 > 0$ ,

$$a^{y_0} = \frac{1}{b},$$

de unde  $a^{-y_0} = b$  și punând  $x_0 = -y_0$  avem  $a^{x_0} = b$ , deci  $x_0 < 0$ , este soluție a ecuației.

Din a) și b) rezultă că, dacă  $a > 1$  și  $b > 0$ , ecuația  $a^x = b$  are o soluție  $x_0$  și anume  $x_0 > 0$  dacă  $b > 1$ ,  $x_0 = 0$  dacă  $b = 1$  și  $x_0 < 0$  dacă  $0 < b < 1$ .

c) Să presupunem  $0 < a < 1$  și  $b > 0$ . Atunci  $\frac{1}{a} > 1$ , deci ecuația

$\left(\frac{1}{a}\right)^x = b$  are o soluție  $y_0$ :

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{y_0} = b$$

sau  $\frac{1}{a^{y_0}} = b$  sau  $a^{-y_0} = b$ . Punînd  $x_0 = -y_0$  obținem  $a^{x_0} = b$ , adică  $x_0$  este soluție a ecuației.

Am demonstrat astfel că în toate cazurile, dacă  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  și  $b > 0$ , ecuația  $a^x = b$  are o soluție.

Rămîne de arătat că în aceste cazuri soluția este unică. Dacă ar exista două numere  $x_1 < x_2$  astfel ca  $a^{x_1} = b$  și  $a^{x_2} = b$ , am ajunge la contradicție. Într-adevăr, dacă  $a > 1$ , atunci  $a^{x_1} < a^{x_2}$ , iar dacă  $0 < a < 1$ , atunci  $a^{x_1} > a^{x_2}$ , deci în ambele cazuri  $a^{x_1} \neq a^{x_2}$ , deci nu putem avea  $a^{x_1} = b = a^{x_2}$ .

Să observăm că ecuația  $a^x = a$  are soluția unică  $x = 1$ :

$$a^1 = a.$$

**D e f i n i t i e .** Fie  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  și  $b > 0$ . Numărul unic  $x$  cără verifică egalitatea  $a^x = b$  se numește **logaritmul lui  $b$  în baza  $a$**  și se notează  $\log_a b$ :

$$x = \log_a b.$$

Așadar

$$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b.$$

O b s e r v a ț i i . Pentru ca logaritmul unui număr  $b$  într-o bază  $a$  să aibă sens, trebuie ca baza să fie strict pozitivă și diferită de 1 ( $a > 0$  și  $a \neq 1$ ), iar numărul  $b$  să fie strict pozitiv ( $b > 0$ ).

Nu au sens logaritmii numerelor negative; în particular nu are sens logaritmul lui 0.

Din definiția logaritmului  $x = \log_a b$ , ca soluție a ecuației  $a^x = b$ , rezultă

$$a^{\log_a b} = b.$$

Avem  $\log_a a = 1$ , deoarece  $a^1 = a$ , și

$\log_a 1 = 0$ , deoarece  $a^0 = 1$ .

De asemenea  $\log_a b = \log_a c$  dacă și numai dacă  $b = c$ .

## 9. Proprietățile logaritmilor

$$1) \log_a xy = \log_a x + \log_a y,$$

$$2) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

În particular,  $\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$ .

$$3) \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$$

4) dacă  $a > 1$ , atunci  $\log_a x > 0$  pentru  $x > 1$ ,  
 $\log_a x < 0$  pentru  $0 < x < 1$ ,

$$5) a^{\log_a x} = x, \log_a a^x = x.$$

6) Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , ( $x_n > 0$ ,  $x > 0$ ), atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a x_n = \log_a x$  și, reciproc, dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a x_n = \log_a x$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

**Demonstrație.** Fie  $u = \log_a x$  și  $v = \log_a y$ , deci  $a^u = x$  și  $a^v = y$ .  
Atunci :

$$a^{u+v} = a^u \cdot a^v = x \cdot y.$$

deci

$$u + v = \log_a(x \cdot y), \text{ adică } \log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y),$$

de unde rezultă proprietatea 1). Mai departe

$$a^{u-v} = a^u \cdot a^{-v} = \frac{a^u}{a^v} = \frac{x}{y},$$

$$\text{deci } u - v = \log_a \frac{x}{y}, \text{ adică } \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y},$$

de unde rezultă proprietate 2). Cazul particular se obține luând  $x = 1$ , deoarece  $\log_a 1 = 0$ .  
Pentru a demonstra proprietatea 3), să punem

$$u = \log_a x, \text{ deci } a^u = x.$$

Atunci

$$a^{\alpha u} = (a^u)^\alpha = x^\alpha,$$

deci  $\alpha u = \log_a x^\alpha$ , adică  $\alpha \log_a x = \log_a x^\alpha$ .

Proprietatea 4) a rezultat în cursul demonstrației proprietății precedente.

Prima proprietate de la 5) a rezultat din definiția logaritmilor, iar partea a doua rezultă din proprietatea 3), luând  $x = a$ :

$$\log_a a^\alpha = \alpha \log_a a = \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

Pentru demonstrarea proprietății 6), să presupunem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Să punem

$$u_n = \log_a x_n \text{ și } u = \log_a x,$$

deci,

$a^{u_n} = x_n$  și  $a^u = x$ . Din condiția  $x_n \rightarrow x$ , adică  $a^{u_n} \rightarrow a^u$  rezultă  $u_n \rightarrow u$ , deoarece  $a > 0$  și  $a \neq 1$ , adică  $\log_a x_n \rightarrow \log_a x$ . Reciproc, să presupunem  $\log_a x_n \rightarrow \log_a x$ , adică  $u_n \rightarrow u$ . Atunci  $a^{u_n} \rightarrow a^u$ , adică  $x_n \rightarrow x$ .

Din proprietățile precedente rezultă încă următoarele proprietăți :

7) Dacă  $a < 1$ , atunci  $\log_a x < 0$  pentru  $x > 1$ ,  
 $\log_a x > 0$  pentru  $0 < x < 1$ .

8) Dacă  $a > 1$  și  $x < y$ , atunci  $\log_a x < \log_a y$ .  
Dacă  $0 < a < 1$  și  $x < y$ , atunci  $\log_a x > \log_a y$ .

Intr-adevăr, notând  $u = \log_a x$  și  $v = \log_a y$ , adică  $a^u = x$  și  $a^v = y$ , dacă  $a > 1$ , atunci  $a^u < a^v$  dacă și numai dacă  $u < v$ , deci  $x < y$  dacă și numai dacă  $\log_a x < \log_a y$ . De asemenea, dacă  $0 < a < 1$ , atunci  $a^u < a^v$  dacă și numai dacă  $u > v$ , deci  $x < y$  dacă și numai dacă  $\log_a x > \log_a y$ .

9) Formula de schimbare a bazei :

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

$$(a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, c > 0).$$

Fie  $u = \log_a b$ , deci  $a^u = b$  și  $v = \log_b c$ , deci  $b^v = c$ . Atunci  $a^{uv} = b^v = c$ , deci  $uv = \log_a c$ , adică

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c.$$

În particular, luând  $c = a$ , avem  $\log_a a = 1$ , deci

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

Logaritmii în baza  $e$  se numesc *logaritmi naturali* sau *logaritmi nepereveni* (de la numele matematicianului Neper). În loc de  $\log_e x$  se scrie:  $\ln x$ , sau  $\log x$ .

Deoarece  $e > 1$ , rezultă

$$\ln x > 0 \text{ dacă } x > 1,$$

$$\ln x < 0 \text{ dacă } x < 1,$$

$$\ln x < \ln y \text{ dacă și numai dacă } x < y.$$

Logaritmii în baza 10 se numesc *logaritmi zecimali*. În loc de  $\log_{10} x$  se scrie  $\lg x$ .

**Propozitie.** Dacă  $a_n \rightarrow a$ , ( $a_n > 0$ ,  $a > 0$ ) și  $\alpha_n \rightarrow \alpha$ , atunci  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow a^\alpha$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\alpha_n} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n}.$$

$$\text{În adevăr, } a_n^{\alpha_n} = e^{\ln a_n^{\alpha_n}} = e^{\alpha_n \ln a_n}.$$

Dar:  $\alpha_n \ln a_n \rightarrow \alpha \ln a$  și deci  $e^{\alpha_n \ln a_n} \rightarrow e^{\alpha \ln a}$ ,

adică:  $e^{\ln a_n^{\alpha_n}} \rightarrow e^{\ln a}$  și deci  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow a^\alpha$ .

**Corolar.** Dacă  $a_n \rightarrow a$ , ( $a_n > 0$ ,  $a > 0$ ), atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\alpha = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^\alpha.$$

**Observație.** Dacă  $\alpha_n > 0$  și  $\alpha > 0$ , propoziția precedentă este adevărată și în cazul cînd  $a_n \geq 0$  și  $a_n \rightarrow 0$ .

În acest caz  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow 0$ .

Intr-adevăr, fie  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  o vecinătate a lui 0, unde  $0 < \varepsilon < 1$ . Să arătăm că  $a_n^{\alpha_n} < \varepsilon$ , pentru toți indicii, cu excepția unui număr finit dintre ei.

Deoarece  $\alpha_n \rightarrow \alpha$ , sirul  $\alpha_n$  este mărginit; fie  $M > 0$  astfel ca  $\alpha_n \leq M$  pentru orice  $n$ . Avem  $e^M < \varepsilon$ , deoarece  $0 < \varepsilon < 1$ .

Deoarece  $a_n \rightarrow 0$ , există un număr  $N(\varepsilon)$  astfel încît  $0 \leq a_n < \varepsilon$  pentru  $n \geq N(\varepsilon)$ .

Deoarece  $\alpha_n > 0$ , avem

$$0 \leq a_n^{\alpha_n} < \varepsilon^{\alpha_n} < e^M < \varepsilon, \quad n \geq N(\varepsilon),$$

adică  $0 \leq a_n^{\alpha_n} < \varepsilon$  pentru  $n \geq N(\varepsilon)$ , de unde rezultă că  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow 0$ .

Dacă însă  $a_n \rightarrow 0$  și  $\alpha_n \rightarrow 0$ , despre sirul  $(a_n^{\alpha_n})$  nu putem afirma nimic. Uneori are limită pozitivă, nulă, finită sau  $+\infty$ ; alteori nu are limită. Mai mult, oricare ar fi  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq +\infty$ , există un sir  $a_n \rightarrow 0$  și un sir  $\alpha_n \rightarrow 0$ , astfel încât  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow \alpha$ .

*Exemple.*

$$1) (a_n) : e^{-1}, e^{-2}, \dots, e^{-n}, \dots \quad a_n \rightarrow 0$$

$$\boxed{2) (\alpha_n) : -\frac{\alpha}{2}, \dots, -\frac{\alpha}{n}, \dots \quad \alpha_n \rightarrow 0}$$

$$(a_n^{\alpha_n}) : e^\alpha, e^\alpha, \dots, e^\alpha, \dots \quad a_n^{\alpha_n} \rightarrow e^\alpha.$$

Dând lui  $\alpha$  toate valorile reale, se obțin pentru  $e^\alpha$  toate valorile strict pozitive.

$$3) (a_n) : e^{-1}, e^{-2^2}, e^{-3^2}, \dots, e^{-n^2}, \dots \quad a_n \rightarrow 0$$

$$(\alpha_n) : 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots \quad \alpha_n \rightarrow 0$$

$$(a_n^{\alpha_n}) : e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, \dots, e^{-n}, \dots \quad a_n^{\alpha_n} \rightarrow 0$$

$$4) (a_n) : e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, \dots, e^{-n}, \dots \quad a_n \rightarrow 0$$

$$(\alpha_n) : -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots \quad \alpha_n \rightarrow 0$$

$$(a_n^{\alpha_n}) : e, e^2, e^3, \dots, e^n, \dots \quad a_n^{\alpha_n} \rightarrow +\infty$$

$$5) (a_n) : e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, e^{-4}, \dots \quad a_n \rightarrow 0$$

$$(\alpha_n) : 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots \quad \alpha_n \rightarrow 0$$

$$(a_n^{\alpha_n}) : e^{-1}, e, e^{-1}, e, \dots \quad a_n^{\alpha_n} \text{ nu are limită.}$$

## Capitolul IV

### DREAPTA INCHEIATĂ

Necesitatea de a îngloba într-o formulare unitară unele propoziții fundamentale ale analizei impune, după cum vom vedea mai jos, introducerea, pe lîngă numerele reale, a două simboluri,  $+\infty$  și  $-\infty$ , numite *numere improprii sau numere infinite*.

Pentru a face o deosebire, numerele reale vor fi numite *uneori numere finite*.

Mulțimea formată din toate numerele reale, împreună cu  $+\infty$  și  $-\infty$ , se numește *dreapta închisă și se notează cu  $\bar{R}$* .

Prin *mulțime de numere* sau *șir de numere* vom înțelege în continuare mulțime de numere finite, respectiv *șir de numere finite*. Simbolurile  $+\infty$  și  $-\infty$  vor apărea doar ca limite ale unor șiruri divergente, sau ca margini ale mulțimilor nemărginite (care se pot reduce tot la limite de șiruri divergente)

#### § 1. Mulțimi nemărginite

##### 1. Mulțimi nemajorate

Stim că orice mulțime *majorată*  $A$  are o *margine superioară*  $M$ , care este cel mai mic majorant al mulțimii  $A$ . În scris:

$$M = \sup A \text{ sau } M = \sup_{x \in A} x.$$

Reamintim că marginea superioară  $M$  este caracterizată de următoarele două proprietăți :

1)  $x \leq M$  pentru orice  $x \in A$ .

2) Dacă  $\alpha < M$ , există cel puțin un punct  $x \in A$ , astfel ca  $\alpha < x$ .

Dacă  $A$  nu este majorată vom spune că *marginea sa superioară este  $+\infty$  (plus infinit)*. În scris :

$$\sup A = +\infty \text{ sau } \sup_{x \in A} x = +\infty.$$

Pentru ca  $+\infty$  să-și justifice denumirea de *margine superioară*, să tem conduși să-i atribuim anumite proprietăți astfel încât fie verificate proprietățile 1) și 2) ale marginii superioare definite anterior.

Pentru aceasta, vom pune prin definiție

$$x < +\infty \text{ pentru orice număr real } x.$$

Atunci :

$$1) x < +\infty \text{ pentru orice } x \in A.$$

2) dacă  $\alpha < +\infty$ , există cel puțin un punct  $x \in A$  astfel ca  $\alpha < x$  (deoarece  $A$  nu este majorată).

Putem acum da următoarea formulare unitară :

**Propozitia 1.** Orică multime  $A$  are o margine superioară  $M$  caracterizată de proprietățile 1) și 2). Marginea superioară  $M$  este finită dacă și numai dacă mulțimea  $A$  este majorată.

**Exemplu.**

$$1) \sup_{n \in N} N = +\infty \text{ sau } \sup_{n \in N} n = +\infty.$$

$$2) \sup_{x \in Q} Q = +\infty \text{ sau } \sup_{x \in Q} x = +\infty.$$

$$3) \sup_{x \in R} R = +\infty \text{ sau } \sup_{x \in R} x = +\infty.$$

$$4) \sup_{n \in N} (2^n) = +\infty.$$

**Observație.** Din inegalitatea  $x < +\infty$  pentru orice  $x \in R$  rezultă în particular  $0 < +\infty$ , ceea ce ne determină să scriem și  $\infty$  în loc de  $+\infty$ , după cum scriem, de exemplu, 5 în loc de +5.

## 2. Multimi neminorate

Stim că orice multime minorată  $A$  are o margine inferioară  $m$ , care este cel mai mare minorant al mulțimii  $A$  :

$$m = \inf_{x \in A} A \text{ sau } m = \inf_{x \in A} x.$$

Marginea inferioară  $m$  este caracterizată de următoarele două proprietăți :

$$1') m \leq x \text{ pentru orice } x \in A;$$

$$2') \text{ dacă } m < \alpha, \text{ există cel puțin un punct } x \in A \text{ astfel încât } x < \alpha.$$

Dacă  $A$  nu este minorată, vom spune că marginea sa inferioară este  $-\infty$  (*minus infinit*).

Vom pune prin definiție

$$-\infty < x \text{ pentru orice număr real } x.$$

Atunci :

- 1')  $-\infty < x$  pentru orice  $x \in A$  ;
- 2') dacă  $-\infty < \alpha$ , există cel puțin un punct  $x \in A$  astfel ca  $x < \alpha$  (deoarece  $A$  nu este minorată).

Putem da acum următoarea formulare unitară :

**Propoziția 2.** Orice mulțime  $A$  are o margine inferioară  $m$ , caracterizată de proprietățile 1') și 2'). Marginea inferioară  $m$  este finită dacă și numai dacă mulțimea  $A$  este minorată.

*Exemplu.*

- 1)  $\inf_{n \in N} (-n) = -\infty$ .
- 2)  $\inf Q = -\infty$  sau  $\inf_{x \in Q} x = -\infty$ .
- 3)  $\inf R = -\infty$  sau  $\inf_{x \in R} x = -\infty$ .
- 4)  $\inf_{x > 0} (\ln x) = -\infty$ .

### 3. Mulțimi nemărginite

Stim că orice mulțime *mărginită*  $A$  are o margine inferioară  $m$  și o margine superioară  $M$  și  $m \leq M$ ; avem  $m < M$  afară de cazul cînd  $A = \{a\}$ , caz în care  $m = M = a$ .

Din cele de mai sus rezultă că putem da următoarea formulare unitară :

**Propoziția 3.** Orice mulțime  $A$  are o margine inferioară  $m$  și o margine superioară  $M$  (finite sau infinite).

Pentru a putea afirma că  $m \leq M$ , și în cazul cînd  $m = -\infty$  și  $M = +\infty$ , vom pune prin definiție

$$-\infty < +\infty.$$

Cu această convenție, avem totdeauna

$$\inf A \leq \sup A,$$

semnul egal avînd loc dacă și numai dacă mulțimea  $A$  este formată dintr-un singur punct.

**Observație.** Prin cele trei convenții de mai sus, am extins structura de ordine la dreapta încheiată  $\bar{R}$ . Cu această structură de ordine, dreapta încheiată este o mulțime *total ordonată*.

Acum se justifică modul de notare a intervalor nemărginite:]

$$\begin{aligned}(a, +\infty) &= \{x \mid x \in R, x > a\}; \\ [a, +\infty) &= \{x \mid x \in R, x \geq a\}; \\ (-\infty, a) &= \{x \mid x \in R, x < a\}; \\ (-\infty, a] &= \{x \mid x \in R, x \leq a\}; \\ (-\infty, +\infty) &= R.\end{aligned}$$

În locul notărilor  $(a, +\infty)$ ,  $[a, +\infty)$ ,  $(-\infty, +\infty)$  se pot folosi respectiv notările  $(a, \infty)$ ,  $[a, \infty)$ ,  $(-\infty, \infty)$ .

#### 4. Funcții nemărginite

Fie funcția reală  $f: E \rightarrow R$  și  $A \subset E$ .

Dacă funcția  $f$  nu este minorată pe  $A$ , marginea sa inferioară pe  $A$  se ia, prin definiție, egală cu  $-\infty$ :

$$\inf_{x \in A} f(x) = -\infty.$$

Dacă funcția  $f$  nu este majorată pe  $A$ , marginea sa superioară pe  $A$  se ia, prin definiție, egală cu  $+\infty$ .

$$\sup_{x \in A} f(x) = +\infty.$$

Rezultă că, în toate cazurile, marginea inferioară și marginea superioară a funcției pe  $A$  sunt egale cu marginea inferioară, respectiv cu marginea superioară a mulțimii  $f(A)$ :

$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf f(A), \quad \sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A).$$

Ca de obicei, cînd vom vorbi de marginile funcției fără a specifica mulțimea pe care se consideră, se subînțelege că această mulțime este domeniul de definiție  $E$ .

Audem  $m = \inf_{x \in E} f(x)$  dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele două condiții:

1)  $m \leq f(x)$  pentru orice  $x \in E$

2) dacă  $m < \alpha$ , atunci există cel puțin un  $x \in E$  astfel ca  $f(x) < \alpha$ .

Audem  $M = \sup_{x \in E} f(x)$  dacă și numai dacă sunt îndeplinite următoarele două condiții:

1)  $f(x) \leq M$  pentru orice  $x \in E$ ;

2) dacă  $\alpha < M$ , atunci există cel puțin un  $x \in E$  astfel ca  $\alpha < f(x)$ .

Dacă funcția  $f$  este constantă,  $f(x) \equiv a$ , atunci

$$\inf_{x \in E} f(x) = \sup_{x \in E} f(x) = a.$$

Dacă funcția  $f$  nu este constantă, atunci

$$-\infty \leq \inf_{x \in E} f(x) < \sup_{x \in E} f(x) \leq +\infty.$$

Funcția  $f$  este minorată dacă și numai dacă  $\inf_{x \in E} f(x)$  este finită; funcția  $f$  este majorată dacă și numai dacă  $\sup_{x \in E} f(x)$  este finită. Rezultă că  $f$  este mărginită dacă și numai dacă ambele margini ale funcției sănt finite.

Următoarele proprietăți se verifică ușor:

1) Dacă  $A \subset B \subset E$ , atunci

$$\inf_{x \in A} f(x) \geq \inf_{x \in B} f(x) \quad \sup_{x \in A} f(x) \leq \sup_{x \in B} f(x).$$

2) Dacă  $f$  și  $g$  sănt două funcții reale definite pe  $E$  și dacă  $f \leq g$ , atunci:

$$\inf_{x \in E} f(x) \leq \inf_{x \in E} g(x), \quad \sup_{x \in E} f(x) \leq \sup_{x \in E} g(x).$$

Deoarece un sir  $(x_n)$  este o funcție definită pe mulțimea  $N$  a numerelor naturale, rezultă următoarele definiții pentru marginile sirului:

$m = \inf_{x \in N} x_n$  dacă și numai dacă:

1)  $m \leq x_n$  oricare ar fi  $n \in N$ ;

2) dacă  $m < \alpha$ , atunci există un termen  $x_n$  din sir astfel ca  $x_n < \alpha$ .

$M = \sup_{n \in N} x_n$  dacă și numai dacă:

1)  $x_n \leq M$  oricare ar fi  $n \in N$ ;

2) Dacă  $\alpha < M$ , atunci există un termen  $x_n$  din sir astfel ca  $\alpha < x_n$ .

Toate proprietățile marginilor de funcții se păstrează, evident, și pentru margini de siruri.

Avem  $\inf x_n = -\infty$  dacă și numai dacă sirul  $(x_n)$  este nemărginit inferior, și  $\sup x_n = +\infty$  dacă și numai dacă sirul  $(x_n)$  nu este mărginit superior.

Putem acum extinde definiția oscilației unei funcții  $f: E \rightarrow R$  pe o mulțime  $A \subset E$ . Dacă funcția  $f$  nu este mărginită pe  $A$  (fie că nu este majorată, fie că nu este minorată), punem prin definiție

$$\omega_f(A) = +\infty.$$

Se verifică și în acest caz egalitatea

$$\omega_f(A) = \sup_{\substack{x' \in A \\ x'' \in A}} |f(x') - f(x'')|$$

și proprietatea:

$$\omega_f(A) < \omega_f(B), \text{ dacă } A \subset B.$$

De asemenea, dacă pentru orice vecinătate  $V$  a unui punct  $x \in E$  avem  $\omega_f(V \cap E) = +\infty$ , atunci se pune prin definiție

$$\omega_f(x) = +\infty.$$

Așadar punctele  $x \in E$  pentru care oscilația  $\omega_f(x)$  este finită sunt cele în jurul cărora  $f$  este mărginită (există o vecinătate  $V$  a lui  $x$  astfel încât  $f$  este mărginită pe  $V \cap E$ ).

## § 2. Extinderea structurii topologice la dreapta încheiată

### 1. Vecinătățile lui $+\infty$ și $-\infty$

Am numit vecinătăți ale unui punct  $x \in R$  mulțimile care conțin intervale deschise și mărginite de forma  $(a, b)$  cu  $a < x_0 < b$ .

Prin extensiune, vom numi:

vecinătăți ale lui  $+\infty$  mulțimile care conțin intervale deschise și nemărginite de forma  $(a, +\infty)$ ;

vecinătăți ale lui  $-\infty$ , mulțimile care conțin intervale deschise și nemărginite de forma  $(-\infty, a)$ .

**Observație.** Vecinătățile lui  $+\infty$  și ale lui  $-\infty$  sunt formate numai din numere finite, adică sunt submulțimi ale dreptei reale  $R$ .

Una din proprietățile vecinătăților unui punct  $x_0 \in R$  este aceea că  $x_0$  aparține fiecărei vecinătăți ale sale. Această proprietate nu se mai păstrează pentru vecinătățile lui  $+\infty$  și ale lui  $-\infty$ \*

A doua proprietate a vecinătăților lui  $x_0$  (intersecția a două vecinătăți ale lui  $x_0$  este de asemenea o vecinătate a lui  $x_0$ ) se păstrează și pentru vecinătățile lui  $+\infty$  și ale lui  $-\infty$ . Într-adevăr, intersecția a două semidrepte  $(a, +\infty)$  și  $(b, +\infty)$  este o semidreaptă de aceeași formă, anume  $(b, +\infty)$  dacă  $a \leq b$ ; intersecția a două semidrepte  $(-\infty, a)$  și  $(-\infty, b)$  este semidreaptă  $(-\infty, a)$  dacă  $a \leq b$ . La fel se arată că se păstrează și celelalte proprietăți ale vecinătăților.

### 2. Puncte de acumulare infinite

Reamintim că un punct  $x_0 \in R$  este punct de acumulare al unei mulțimi  $A$ , dacă fiecare vecinătate a lui  $x_0$  conține cel puțin un punct  $x \in A$  diferit de  $x_0$ . Dacă  $x_0 \notin A$ , condiția  $x \neq x_0$  este verificată de la sine.

Dacă  $A$  nu este majorată, pentru orice număr  $a \in R$  există cel puțin un punct  $x \in A$  astfel ca  $a < x$ , adică astfel ca  $x \in (a, +\infty)$ ; aceasta înseamnă că în orice vecinătate a lui  $+\infty$  există cel puțin un punct  $x \in A$  (evident  $x$  este diferit de  $+\infty$ ).

\* Dacă în  $\bar{R} = [-\infty, +\infty]$  considerăm ca vecinătăți ale lui  $+\infty$  mulțimile care conțin semidrepte  $(a, +\infty]$  care conțin și pe  $+\infty$ , iar ca vecinătăți ale lui  $-\infty$  mulțimile care conțin semidrepte  $[-\infty, a)$  care conțin și pe  $-\infty$ , atunci prima proprietate a vecinătăților este verificată și pentru vecinătățile lui  $+\infty$  și ale lui  $-\infty$ .

Deoarece această proprietate are aceeași formulare ca și proprietatea prin care se definește un punct de acumulare, spunem că  $+\infty$  este punct de acumulare al unei mulțimi nemajorate.

Dacă  $A$  nu este minorată, în orice semidreaptă  $(-\infty, a)$  există cel puțin un punct  $x \in A$ , adică în orice vecinătate a lui  $-\infty$  se află cel puțin un punct  $x \in A$  (evident  $x$  este diferit de  $-\infty$ ). De aceea spunem că  $-\infty$  este punct de acumulare al unei mulțimi neminorante.

Cu aceste denumiri, definiția punctului de acumulare are aceeași formulare, fie că punctul de acumulare este finit, fie că este infinit.

De asemenea, propoziția următoare, demonstrată inițial pentru puncte de acumulare finite, rămîne valabilă și pentru puncte de acumulare infinite.

**Propozitie.**  $x \in \bar{R}$  este punct de acumulare al unei mulțimi  $A \subset R$  dacă și numai dacă în orice vecinătate a lui  $x_0$  se află o infinitate de puncte din  $A$ .

Lăsăm pe seama cititorului, ca exercițiu, verificarea acestei propoziții, în cazul cînd  $x_0 = +\infty$  sau  $x_0 = -\infty$ .

Cu definiția lui  $+\infty$  și  $-\infty$  ca puncte de acumulare ale mulțimilor nemajorate, respectiv neminorante, rezultă următoarea extensiune a teoremei lui Weierstrass-Bolzano :

*Orice mulțime infinită are cel puțin un punct de acumulare. Dacă mulțimea este infinită și mărginită, mulțimea are cel puțin un punct de acumulare finit.*

**Observație.** Vom continua să numim puncte aderente ale unei mulțimi  $A$  numai punctele finite  $x_0$ , care au proprietatea că  $V \cap A \neq \emptyset$ , oricare ar fi vecinătatea  $V$  a lui  $x_0$ .

Deoarece considerăm numai mulțimi de numere finite, este necesar să precizăm propoziția următoare :

*O mulțime  $A$  este închisă, dacă și numai dacă își conține toate punctele de acumulare finite.*

### § 3. Siruri cu limită $+\infty$ sau $-\infty$

Definiția limitei unui sir convergent se extinde și la anumite siruri divergente.

#### 1. Siruri cu limită infinită

**Definiție.** Spunem că  $+\infty$  este limita unui sir  $(a_n)$ , dacă orice vecinătate a lui  $+\infty$  conține toți termenii sirului, cu excepția unui număr finit dintre ei. Scriem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \quad \lim_n a_n = +\infty \text{ sau } a_n \rightarrow +\infty.$$

Luînd vecinătățile lui  $+\infty$  de forma  $(\varepsilon, +\infty)$ , se obține o formulare echivalentă, dată de următoarea

**Propozitie.** Un sir  $(a_n)$  are limita  $+\infty$ , dacă și numai dacă, pentru orice număr  $\varepsilon$ , există un număr  $N(\varepsilon)$  astfel încât, oricare ar fi  $n \geq N(\varepsilon)$  să avem

$$a_n > \varepsilon.$$

În acest enunț nu este necesar ca  $\varepsilon > 0$ .

**Corolar.** Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  atunci  $\sup_{n \in N} a_n = +\infty$ .

*Exemplu.* Sirul numerelor naturale

$$1, 2, 3, \dots, n \dots$$

are limita  $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty, \text{ sau } n \rightarrow +\infty.$$

Acest exemplu justifică în parte semnul  $n \rightarrow \infty$  folosit în notația limitei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Justificarea acestei notații va fi dată în capitolul despre limite de funcții.

**Definiție.** Spunem că  $-\infty$  este limita unui sir  $(a_n)$  dacă orice vecinătate a lui  $-\infty$  conține toți termenii sirului cu excepția unui număr finit dintre ei. Scriem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty, \lim_n a_n = -\infty \text{ sau } a_n \rightarrow -\infty.$$

Luînd vecinătățile lui  $-\infty$  de forma  $(-\infty, \varepsilon)$ , se obține o formulare echivalentă dată de următoarea

**Propozitie.** Un sir  $(a_n)$  are limită  $-\infty$ , dacă și numai dacă, pentru orice număr  $\varepsilon$ , există un număr  $N(\varepsilon)$  astfel încât oricare ar fi  $n \geq N(\varepsilon)$  să avem

$$a_n < \varepsilon.$$

În acest enunț nu este necesar ca  $\varepsilon < 0$ .

**Corolar.** Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ , atunci  $\inf_{n \in N} x_n = -\infty$ .

*Exemplu.* Sirul

$$-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$$

are limita  $-\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty \text{ sau } -n \rightarrow -\infty.$$

**O b s e r v a t i i.** 1° Sirurile care au limita  $+\infty$  sau  $-\infty$  sint nemarginite, deci sint divergente. Vom continua sa numim *siruri convergente* numai sirurile care au *limita finita*.

2° Definitia limitei unui sir cu ajutorul vecinatilor are *aceeași formulare* fie că limita este finită, fie că limita este infinită.

3° Există siruri care nu au limită, nici finită, nici infinită, cum sint sirurile

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \dots, 0, \quad 1 \dots$$

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad 2, \quad 0, \quad 3, \dots, 0, \quad n, \dots$$

$$1, \quad -2, \quad 3, \quad -4, \quad 5, \quad -6, \dots$$

4° Dacă un sir este *convergent* el este *mărginit*, dar dacă este *mărginit* nu este neapărat convergent. Pentru siruri cu limita infinită avem o proprietate asemănătoare :

Dacă un sir are *limita infinită* el este *nemărginit*, dar dacă este *nemărginit* nu are neapărat limită (infinită).

*Aplicații.* 1) Dacă  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este un sir de numere naturale cu limita  $+\infty$ , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e.$$

Să observăm mai întii că, deoarece  $p_n \rightarrow +\infty$ , fiecare termen  $p_n$  din sir se repetă cel mult de un număr finit de ori. Într-adevăr, luând  $a > p_n$ , în afara semidreptei  $(a, +\infty)$  se află un număr finit de termeni, printre care și  $p_n$  și toți termenii egali cu  $p_n$ . Deoarece  $p_n$  sunt numere naturale, termenii  $\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n}$  fac parte din sirul  $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \dots$

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots$$

Dar  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ , deci în afara fiecărei vecinătăți a lui  $e$  se află un număr finit de numere de forma  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , deci cu atit mai mult un număr finit de numere de forma  $\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n}$ , și cum orice asemenea număr se repetă în sirul inițial de un număr finit de ori, rezultă că în afara fiecărei vecinătăți a lui  $e$  se află un număr finit de termeni ai sirului inițial, deci  $\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} \rightarrow e$ .

*Exemplu.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e, \text{ deoarece } n+1 \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e, \text{ deoarece } n^2 \rightarrow +\infty.$$

**O b s e r v a t i e.** Vom folosi notația  $\lim_{p_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$  în loc de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$  dacă  $p_n \rightarrow \infty$ .

## 2. Criterii pentru existența limitelor infinite

Pentru sirurile cu limite infinite avem criterii simple de existență limitei :

- 1) Dacă  $a_n \rightarrow +\infty$  și  $b_n \geq a_n$  pentru orice  $n \in N$ , atunci  $b_n \rightarrow +\infty$ .
- 2) Dacă  $a_n \rightarrow -\infty$  și  $b_n \leq a_n$  pentru orice  $n \in N$ , atunci  $b_n \rightarrow -\infty$ .

Într-adevăr, dacă  $a_n \rightarrow +\infty$  și  $b_n \geq a_n$ . În afara fiecărui vecinătăți a lui  $+\infty$  se află un număr finit de termeni ai sirului  $(a_n)$  și cu atât mai mult un număr finit de termeni ai sirului  $(b_n)$  deci  $b_n \rightarrow +\infty$ .

Se rătăcează în mod asemănător în cazul cind  $a_n \rightarrow -\infty$  și  $b_n \leq a_n$ .

*Exemplu.* 1)  $2n > n$  și  $n \rightarrow +\infty$ , deci  $2n \rightarrow +\infty$ .

2) dacă  $a \geq 2$ ,  $a^n > n$  și  $n \rightarrow +\infty$ , deci  $a^n \rightarrow +\infty$ .

În particular  $2^n \rightarrow +\infty$ ,  $10^n \rightarrow +\infty$ .

3)  $-(2n+1) < -n$  și  $-n \rightarrow -\infty$ , deci  $-(2n+1) \rightarrow -\infty$ .

## 3. Siruri monotone nemărginite

Stim că un sir monoton și mărginit este convergent. Vom arăta acum că sirurile monotone și nemărginite au limită infinită :

- 1) Orice sir crescător și nemărginit are limita  $+\infty$ .

În adevăr, fie  $(a_n)$  un sir crescător și nemărginit, și fie  $(a, +\infty)$  o vecinătate oarecare a lui  $+\infty$ . Deoarece  $(a_n)$  este nemărginit, există în sir un termen  $a_N > a$ , adică  $a_N \in (a, +\infty)$ ; deoarece sirul este crescător, dacă  $n \geq N$ , avem  $a_n > a_N$ , deci  $a_n > a$ , adică  $a_n \in (a, +\infty)$ . În afara semidreptei  $(a, +\infty)$  se află cel mult primii  $N-1$  termeni, în număr finit, deci  $a_n \rightarrow +\infty$ .

- 2) Orice sir descrescător și nemărginit are limita  $-\infty$ .

Demonstrația se face ca mai sus.

Putem da acum următoarea formulare unitară relativă la sirurile monotone :

*Orice sir monoton are limită. Limita este finită dacă și numai dacă sirul este mărginit.*

*Exemplu.*

- 1) Dacă  $a > 1$ , sirul  $(a^n)$  este crescător și nemărginit, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty.$$

2) Dacă  $a > 1$ , iar  $(x_n)$  este crescător și nemărginit, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = +\infty.$$

În adevăr, din  $x_n \leq x_{n+1}$  deducem  $a^{x_n} \leq a^{x_{n+1}}$ , deci sirul  $(a^{x_n})$  este crescător. Dacă sirul  $(a^{x_n})$  ar fi mărginit, el ar avea un majorant  $M = a^\alpha$ .

$$a^{x_n} \leq a^\alpha \text{ pentru orice } n \in N.$$

Rezultă  $x_n \leq \alpha$  pentru orice  $n \in N$ , ceea ce contrazice ipoteza că  $(x_n)$  este nemărginit (mai precis nemajorat). Așadar  $(a^{x_n})$  este nemărginit și, fiind și crescător, deducem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = +\infty.$$

3) Dacă  $a > 1$ , și  $(x_n)$  este crescător și nemărginit, iar  $x_n > 0$  pentru orice  $n \in N$ , atunci

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} \log_a x_n = +\infty.$$

Este evident că sirul  $(\log_a x_n)$  este crescător.

Dacă ar fi mărginit, ar avea un majorant  $M = \log_a \alpha$ :

$$\log_a x_n \leq \log_a \alpha \text{ pentru orice } n \in N,$$

de unde  $x_n \leq \alpha$  pentru orice  $n \in N$ , ceea ce contrazice ipoteza că  $(x_n)$  este nemărginit (nemajorat). Așadar, sirul  $(\log_a x_n)$  este nemărginit și fiind crescător, avem  $\log_a x_n \rightarrow +\infty$ .

4) Dacă  $a > 1$  și  $(x_n)$  este descrescător și are limita 0, iar  $x_n > 0$  pentru orice  $n \in N$ , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_a x_n \rightarrow -\infty.$$

Evident, sirul  $(\log_a x_n)$  este descrescător.

Dacă ar fi mărginit, ar avea un minorant  $m = \log_a \beta$  cu  $\beta > 0$

$$\log_a \beta \leq \log_a x_n \text{ pentru orice } n \in N,$$

deci  $0 < \beta \leq x_n$  pentru orice  $n \in N$ , ceea ce contrazice ipoteza că  $x_n \rightarrow 0$ . Așadar, sirul  $(\log_a x_n)$  este nemărginit, și, fiind descrescător, deducem

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} \log_a x_n = -\infty.$$

5) Dacă  $a > 1$ , iar  $(x_n)$  este descrescător și nemărginit, atunci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = 0.$$

Este evident că sirul  $(a^{x_n})$  este descrescător și mărginit, deoarece  $0 < a^{x_n} \leq a^{x_1}$  pentru orice  $n \in N$ , deci  $(a^{x_n})$  este convergent; fie  $\alpha$  limita sa. Avem  $0 \leq \alpha \leq a^{x_n}$  pentru orice  $n \in N$ . Dacă am avea  $\alpha > 0$ , atunci  $\alpha = a^m$ , și din  $a^m \leq a^{x_n}$  deducem  $m \leq x_n$  pentru orice  $n \in N$ , ceea ce contrazice ipoteza că  $(x_n)$  este nemărginit. Așadar,  $\alpha = 0$ , adică  $a^{x_n} \rightarrow 0$ .

6) Dacă  $\alpha > 0$ , iar  $(x_n)$  este crescător și nemărginit, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^\alpha = +\infty.$$

În adevară, deoarece  $\alpha > 0$ , din  $x_n \leq x_{n+1}$  deducem  $x_n^\alpha \leq x_{n+1}^\alpha$ , adică  $(x_n^\alpha)$  este crescător. Dacă ar fi majorat de un număr  $M = a^\alpha$ , am avea  $x_n^\alpha \leq a^\alpha$ , adică  $x_n \leq a$  pentru orice  $n$ , ceea ce contrazice ipoteza că  $(x_n)$  este nemărginit. Așadar,  $(x_n^\alpha)$  este nemărginit și fiind și crescător avem  $x_n^\alpha \rightarrow +\infty$ .

7) Dacă  $\alpha > 0$ , iar  $(x_n)$  este crescător și nemărginit, atunci  $x_n^{-\alpha} \rightarrow 0$ .

8) Dacă  $\alpha > 0$ , iar  $(x_n)$  este descrescător și are limita 0, atunci  $x_n^{-\alpha} \rightarrow +\infty$ .

Pentru demonstrație se raționează ca mai sus.

#### 4. Proprietăți ale șirurilor cu limite infinite

Dacă  $a_n \rightarrow +\infty$ , în afara fiecărei semidrepte  $(a, +\infty)$  se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului  $(a_n)$  și cu atât mai mult un număr finit de termeni ai oricărui subșir al său, deci :

dacă  $(a_n)$  are limita  $+\infty$ , atunci orice subșir al șirului  $(a_n)$  are de asemenea limita  $+\infty$ .

În mod asemănător :

dacă  $(a_n)$  are limita  $-\infty$ , orice subșir al său are limita  $-\infty$ .

Tinând seama și de proprietatea corespunzătoare a șirurilor convergente, se poate da următoarea formulare unitară :

1) Dacă un șir are limită, orice subșir al său are aceeași limită.

Exemplu.  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n = +\infty$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 1) = +\infty$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} 10^n = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = +\infty$ .

Raționând ca mai sus, propoziția următoare rămîne valabilă și pentru limite infinite :

2) Dacă un șir are limită, prin adăugarea sau înălăturarea unui număr finit de termeni, obținem un șir cu aceeași limită.

Lema lui Cesàro se poate de asemenea extinde la șirurile cu limită infinită.

3) Din orice șir se poate extrage un subșir care are limită. Dacă șirul este mărginit se poate extrage un subșir convergent.

Într-adevăr, dacă sirul este nemajorat, pentru orice număr  $p \in N$  există un termen  $a_{np} > p$  și deoarece  $\lim_{p \rightarrow \infty} p = +\infty$ , rezultă  $\lim_{p \rightarrow \infty} a_{np} = +\infty$  și  $(a_{np})_{p \in N}$  este un subșir al sirului  $(a_n)$ . Se deduce în mod asemănător că, dacă sirul este neminorat, se poate extrage un subșir cu limită  $-\infty$ .

4) Prin schimbarea ordinii termenilor unui sir care are limită, se obține un sir cu aceeași limită.

Într-adevăr, dacă  $a_n \rightarrow +\infty$  și dacă  $(b_n)$  se obține din  $(a_n)$  prin schimbarea ordinii termenilor, în afara fiecărei semidrepte  $(a, +\infty)$  se află un număr finit de termeni ai sirului  $(a_n)$  și deci același număr finit de termeni ai sirului  $(b_n)$ , deci  $b_n \rightarrow +\infty$ . Se raționează la fel în cazul cind  $a_n \rightarrow -\infty$ .

Cazul cind  $(a_n)$  este convergent a fost considerat înainte.

5) Dacă  $a_n \rightarrow +\infty$ , se poate schimba ordinea termenilor astfel încât să obținem un sir crescător cu limită  $+\infty$ .

Să considerăm semidreapta  $V_1 = (1, +\infty)$ . În afara ei, și anume la stînga lui 1, se află un număr finit de termeni, pe care să-i aranjăm în ordine crescătoare

$$b_1, b_2, \dots, b_{n_1}.$$

Dacă am reușit să aranjăm în ordine crescătoare termenii din afara semidreptei  $V_p = (p, +\infty)$ ,

$$b_1, \dots, b_{n_1}, \dots, b_{n_p},$$

termenii în număr finit din afara semidreptei  $V_{p+1} = (p+1, +\infty)$  care apar în plus se aranjază în ordine crescătoare după  $b_{n_p}$

$$b_1, \dots, b_{n_1}, \dots, b_{n_p}, b_{n_{p+1}}, \dots, b_{n_{p+1}}.$$

În acest fel obținem un sir crescător care conține toți termenii sirului inițial.

Tinând seama de proprietatea corespunzătoare a sirurilor convergente, putem da următoarea formulare unitară.

Dacă  $a_n \rightarrow a$ ,  $(-\infty < a \leq +\infty)$  și dacă  $a_n < a$  pentru orice  $n \in N$  se poate schimba ordinea termenilor astfel încât să obținem un sir crescător cu limită  $a$ .

6) Dacă  $a_n \rightarrow -\infty$ , se poate schimba ordinea termenilor ca să obținem un sir descrescător cu limită  $-\infty$ .

Se raționează ca mai sus, folosind vecinătățile  $V_p = (-\infty, -p)$  ale lui  $-\infty$ .

Tinând seama și de proprietatea corespunzătoare de la sirurile convergente, se poate da următoarea formulare unitară :

Dacă  $a_n \rightarrow a$ ,  $(-\infty \leq a < \infty)$  și dacă  $a < a_n$  pentru orice  $n \in N$ , se poate schimba ordinea termenilor ca să obținem un sir descrescător cu limită  $a$ .

*Exemplu.* Dacă  $a > 1$  și dacă  $x_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $a^{x_n} \rightarrow +\infty$ . În loc de  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = +\infty$  vom scrie  $\lim_{x_n \rightarrow \infty} a^{x_n} = \infty$  pentru a pune în evidență faptul că sirul  $(x_n)$  are limita  $\infty$ .

Într-adevăr, fie  $(y_n)$  un sir crescător obținut prin schimbarea ordinii termenilor sirului  $(x_n)$ . Avem  $y_n \rightarrow +\infty$ , deci  $a^{y_n} \rightarrow \infty$ . Schimbând din nou ordinea termenilor sirului  $(ay_n)$ , putem obține sirul  $(ax_n)$  și deci  $ax_n \rightarrow +\infty$ .

2) Dacă  $a > 1$ , și dacă  $x_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $ax_n \rightarrow 0$ . Vom scrie:

$$\lim_{x_n \rightarrow -\infty} ax_n = 0.$$

Fie  $(y_n)$  un sir descrescător obținut din  $(x_n)$  prin schimbarea ordinii termenilor. Avem  $y_n \rightarrow -\infty$ , deci  $a^{y_n} \rightarrow 0$  și deci  $ax_n \rightarrow 0$ .

3) Dacă  $a > 1$  și  $x_n \rightarrow +\infty$ , ( $x_n > 0$ ), atunci  $\log_a x_n \rightarrow +\infty$ . Vom scrie:

$$\lim_{x_n \rightarrow +\infty} \log_a x_n = +\infty.$$

4) Dacă  $a > 1$  și  $x_n \rightarrow 0$ , ( $x_n > 0$ ), atunci  $\log_a x_n \rightarrow -\infty$ . Vom scrie:

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} \log_a x_n = -\infty.$$

În exemplele 3 și 4 se schimbă ordinea termenilor sirului  $(x_n)$  ca să obținem un sir  $(y_n)$  crescător, respectiv descrescător, și apoi se folosesc exemplele de la numărul precedent.

5) Dacă  $a > 1$ , și dacă  $ax_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $x_n \rightarrow +\infty$ , iar dacă  $ax_n \rightarrow 0$ , atunci  $x_n \rightarrow -\infty$ . Se pune  $y_n = ax_n$ , deci  $x_n = \log_a y_n$  și se folosesc exemplele precedente.

6) Dacă  $a > 1$  și dacă  $\log_a x_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $x_n \rightarrow +\infty$ , iar dacă  $\log_a x_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $x_n \rightarrow 0$ .

Se pune  $y_n = \log_a x_n$ , deci  $x_n = a^{y_n}$  și se folosesc exemplele precedente.

Din exemplele de mai sus deducem pentru  $a = e$

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} e^{x_n} = \infty; \quad \lim_{x_n \rightarrow -\infty} e^{x_n} = 0;$$

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} \ln x_n = \infty; \quad \lim_{x_n \rightarrow 0} \ln x_n = -\infty.$$

7) Dacă  $\alpha > 0$  și  $x_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $x_n^\alpha \rightarrow +\infty$ . Vom scrie:

$$\lim_{x_n \rightarrow +\infty} x_n^\alpha = +\infty.$$

8) Dacă  $\alpha > 0$  și  $x_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $x_n^{-\alpha} \rightarrow 0$ . Vom scrie:

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} x_n^{-\alpha} = 0.$$

9) Dacă  $\alpha > 0$  și  $x_n \rightarrow 0$ , ( $x_n > 0$ ), atunci  $x_n^{-\alpha} \rightarrow \infty$ . Vom scrie:

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} x_n^{-\alpha} = +\infty.$$

Pentru demonstrație se schimbă ordinea termenilor sirului  $(x_n)$  ca să obținem un sir monoton  $(y_n)$  și apoi se folosesc proprietățile respective ale sirurilor monotone.

7) Dacă  $a_n \rightarrow +\infty$  și  $b_n \rightarrow +\infty$ , atunci orice sir format cu termenii, sirurilor  $(a_n)$  și  $(b_n)$ , într-o ordine oarecare are, limita  $+\infty$ .

Într-adevăr, în afara oricărei semidrepte  $(a, +\infty)$  se află un număr finit de termeni ai sirului  $(a_n)$  și un număr finit de termeni ai sirului  $(b_n)$ , deci un număr finit de termeni ai oricărui sir  $(c_n)$  format cu termenii celor două siruri, deci  $c_n \rightarrow +\infty$ .

Dacă  $a_n \rightarrow -\infty$  și  $b_n \rightarrow -\infty$ , atunci orice sir format cu termenii celor două siruri, într-o ordine oarecare, are limita  $-\infty$ .

Se rationează ca mai sus.

Tinând seama și de proprietatea corespunzătoare a sirurilor convergente, se poate da următoarea formulare unitară :

Dacă  $(a_n)$  și  $(b_n)$  au aceeași limită  $x_0 \in \bar{R}$ , atunci orice sir format cu termenii sirurilor  $(a_n)$  și  $(b_n)$ , într-o ordine oarecare, are limita  $x_0$ .

## 5. Trecerea la limită în inegalități

Propoziția următoare, demonstrată la început pentru siruri convergente, este adevărată și pentru sirurile cu limită infinită.

Dacă  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt siruri cu limită și dacă  $a_n \leq b_n$  pentru orice  $n \in N$ , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Într-adevăr, în toate cazurile care se pot ivi :

$a_n \rightarrow +\infty$  și  $b_n \rightarrow +\infty$ ;  $a_n \rightarrow x_0$  și  $b_n \rightarrow +\infty$ ;  $a_n \rightarrow -\infty$  și  $b_n \rightarrow x_0$ ;  $a_n \rightarrow -\infty$  și  $b_n \rightarrow -\infty$  în care cel puțin una din cele două limite este infinită, inegalitatea este verificată.

Rezultă de aici că este adevărată și proprietatea următoare :

Dacă  $a_n \leq x_n \leq b_n$ , iar  $(a_n)$  și  $(b_n)$  au aceeași limită  $x_0 \in \bar{R}$ , atunci  $(x_n)$  are limita  $x_0$ .

## 6. Modulul

Dacă  $a_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $|a_n| \rightarrow +\infty$ .

Dacă  $a_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $|a_n| \rightarrow +\infty$ .

Dacă  $a_n \rightarrow +\infty$  în afara semidreptei  $(0, +\infty)$  se află numai un număr finit de termeni; pentru ceilalți termeni, care se află în semidreapta  $(0, +\infty)$ , avem  $a_n > 0$ , deci  $|a_n| = a_n$  și, deoarece limita unui sir nu depinde de un număr finit de termeni, avem :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

- Să presupunem acum că  $a_n \rightarrow -\infty$  și să arătăm că  $|a_n| \rightarrow +\infty$ . Fie pentru aceasta  $(a, +\infty)$  o vecinătate a lui  $+\infty$ ; semidreapta  $(-\infty, -a)$  este atunci o vecinătate a lui  $-\infty$ , deci avem  $a_n < -a$  sau  $|a_n| = -a_n > a$ , adică  $|a_n| \in (a, +\infty)$  pentru toți indicii, cu excepția unui număr finit dintre ei. Rezultă că  $|a_n| \rightarrow +\infty$ .

Pentru a putea afirma și în aceste cazuri că limita modulului este egală cu modulul limitei, sănsem conduși să punem prin definiție.

$$| + \infty | = + \infty \text{ și } | - \infty | = + \infty.$$

## § 4. Operații cu șiruri care au limită

### 1. Suma șirurilor care au limită

Proprietatea cunoscută: *Suma a două șiruri convergente este un șir convergent și limita sumei este egală cu suma limitelor* se extinde, în cazul în care unul cel puțin din cele două șiruri are limita infinită, în felul următor:

- I) Dacă  $a_n \geq \alpha$  și  $b_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $a_n + b_n \rightarrow +\infty$ .
- II) Dacă  $a_n \leq \alpha$  și  $b_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $a_n + b_n \rightarrow -\infty$ .

Intr-adevăr, fie  $(a, +\infty)$  o vecinătate oarecare a lui  $+\infty$ ; atunci  $(a - \alpha, +\infty)$  este de asemenea o vecinătate a lui  $+\infty$ . Deoarece  $b_n \rightarrow +\infty$ , avem  $b_n \in (a - \alpha, +\infty)$ , adică  $b_n > a - \alpha$  pentru toți indicii, cu excepția unui număr finit dintre ei. Atunci

$$a_n + b_n > a + a - \alpha = a,$$

adică  $a_n + b_n \in (a, +\infty)$  pentru toți indicii, cu excepția unui număr finit dintre ei, deci  $a_n + b_n \rightarrow +\infty$ .

Proprietatea II) se demonstrează în mod analog.

Dacă  $(a_n)$  este convergent sau dacă  $a_n \rightarrow +\infty$ , atunci există  $\alpha$  astfel ca  $a_n \geq \alpha$ , pentru orice  $n \in N$ . De asemenea, dacă  $(a_n)$  este convergent, sau dacă  $a_n \rightarrow -\infty$ , există  $\alpha$  astfel ca  $a_n \leq \alpha$  pentru orice  $n \in N$ . Din cele două proprietăți de mai sus rezultă următoarele patru propoziții:

- 1) Dacă  $a_n \rightarrow +\infty$  și  $b_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $a_n + b_n \rightarrow +\infty$ .
- 2) Dacă  $a_n \rightarrow a$  și  $b_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $a_n + b_n \rightarrow +\infty$ .
- 3) Dacă  $a_n \rightarrow a$  și  $b_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $a_n + b_n \rightarrow -\infty$ .
- 4) Dacă  $a_n \rightarrow -\infty$  și  $b_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $a_n + b_n \rightarrow -\infty$ .

Pentru a putea afirma și în aceste cazuri că *limita sumei este egală cu suma limitelor*, sănsem conduși să punem prin definiție (notând  $\infty$  în loc de  $+\infty$ ):

$$\infty + \infty = \infty$$

$$a + \infty = \infty + a = \infty \quad \text{oricare ar fi } a \in R;$$

$$a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty \quad \text{oricare ar fi } a \in R;$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty.$$

**Observație.** În cazul cînd  $a_n \rightarrow +\infty$  și  $b_n \rightarrow -\infty$ , despre sirul  $(a_n + b_n)$  nu putem afirma nimic. Uneori sirul sumă are limită finită sau infinită, alteori nu are limită. Mai mult, oricare ar fi  $a \in R$ , putem găsi un sir  $a_n \rightarrow +\infty$  și un sir  $b_n \rightarrow -\infty$  astfel ca  $a_n + b_n \rightarrow a$ . De aceea nu se acordă nici un sens scrierii  $\infty - \infty$ . Spunem că operația  $\infty - \infty$  nu este definită, sau că este o operație fără sens.

*Exemple.*

1) $(a_n) : 1, 2, 3, \dots, n, \dots$	$a_n \rightarrow +\infty$ ;
$(b_n) : a - 1, a - 2, a - 3, \dots, a - n, \dots$	$b_n \rightarrow -\infty$ ;
$(a_n + b_n) : a, a, a, \dots, a, \dots$	$a_n + b_n \rightarrow a$ .
2) $(a_n) : 2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$	$a_n \rightarrow +\infty$ ;
$(b_n) : -1, -2, -3, -4, \dots, -n, \dots$	$b_n \rightarrow -\infty$ ;
$(a_n + b_n) : 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$	$a_n + b_n \rightarrow +\infty$ .
3) $(a_n) : 1, 2, 3, \dots, n, \dots$	$a_n \rightarrow +\infty$ ;
$(b_n) : -2, -4, -6, \dots, -2n, \dots$	$b_n \rightarrow -\infty$ ;
$(a_n + b_n) : -1, -2, -3, \dots, -n, \dots$	$a_n + b_n \rightarrow -\infty$ .
4) $(a_n) : 2, 2, 4, 4, \dots, 2n, 2n, \dots$	$a_n \rightarrow +\infty$ ;
$(b_n) : -1, -2, -3, -4, \dots, -2n+1, -2n, \dots$	$b_n \rightarrow -\infty$ ;
$(a_n + b_n) : 1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots$	nu are limită.

Putem acum da o formulare unitară care să cuprindă atît teorema relativă la suma a două siruri convergente, cît și cele patru propoziții de mai sus.

**Theoremă.** Dacă sirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  au limită (finită sau infinită) și dacă suma limitelor are sens, atunci sirul sumă  $(a_n + b_n)$  are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Cazul exceptat:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ . Acest caz va fi denumit mai departe „cazul  $\infty - \infty$ ”.

**Observație.** Fie funcțiile  $f: E \rightarrow R$  și  $g: E \rightarrow R$ . Cu operația de adunare extinsă asupra numerelor infinite, avem următoarele relații:

$$\inf_{x \in E} (f(x) + g(x)) \geq \inf_{x \in E} f(x) + \inf_{x \in E} g(x)$$

și:

$$\sup_{x \in E} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in E} f(x) + \sup_{x \in E} g(x).$$

Intr-adevăr, dacă  $m_1 = \inf_{x \in E} f(x)$  și  $m_2 = \inf_{x \in E} g(x)$ , atunci  $m_1 + m_2 \leq f(x) + g(x)$  pentru orice  $x \in E$ , deci,  $m_1 + m_2 \leq \inf_{x \in E} (f(x) + g(x))$ . La fel se demonstrează și a doua relație.

Pentru orice mulțime  $A \subset E$  putem scrie acum egalitatea

$$\omega(A) = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x)$$

fie că marginile sunt finite, fie că sunt infinite.

## 2. Produsul cu scalari al řirurilor care au limită

Stim că dacă  $(b_n)$  este un řir convergent și  $\alpha$  un număr real, atunci řirul  $(\alpha b_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha b_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

În cazul cînd řirul  $(b_n)$  are limită infinită, avem următoarele propoziții :

I)  $b_n \rightarrow +\infty$  dacă și numai dacă  $-b_n \rightarrow -\infty$ .

Să observăm că avem  $b_n > a$  dacă și numai dacă  $-b_n < -a$ , deci  $b_n \in (a, +\infty)$  dacă și numai dacă  $-b_n \in (-\infty, -a)$ . Așadar, în afara semidreptei  $(a, +\infty)$  se află un număr finit de termeni ai řirului  $(b_n)$  dacă și numai dacă în afara semidreptei  $(-\infty, -a)$  se află numai un număr finit de termeni ai řirului  $(-b_n)$ . Aceasta înseamnă că  $b_n \rightarrow +\infty$  dacă și numai dacă  $-b_n \rightarrow -\infty$ .

Proprietatea se poate enunța și astfel :

$a_n \rightarrow -\infty$  dacă și numai dacă  $-a_n \rightarrow +\infty$ .

Într-adevăr, se pune  $a_n = -b_n$ , deci  $-a_n = b_n$  și se aplică proprietatea de mai sus.

1) Dacă  $b_n \rightarrow +\infty$  și  $\alpha > 0$ , atunci  $\alpha b_n \rightarrow +\infty$ .

Să observăm că  $b_n > \frac{a}{\alpha}$  dacă și numai dacă  $\alpha b_n > a$ , deci  $b_n \in \left(\frac{a}{\alpha}, +\infty\right)$  dacă și numai dacă  $\alpha b_n \in (a, +\infty)$ .

Fie o semidreaptă oarecare  $(a, +\infty)$ ; deoarece  $b_n \rightarrow +\infty$ , în afara semidreptei  $\left(\frac{a}{\alpha}, +\infty\right)$  se află numai un număr finit de termeni ai řirului  $(b_n)$ , deci în afara semidreptei  $(a, +\infty)$  se află numai un număr finit de termeni ai řirului  $(\alpha b_n)$  și deci  $\alpha b_n \rightarrow +\infty$ .

Din proprietățile I) și 1) de mai sus rezultă încă următoarele proprietăți :

2) Dacă  $b_n \rightarrow -\infty$  și  $\alpha > 0$ , atunci  $\alpha b_n \rightarrow -\infty$ .

Într-adevăr, în acest caz  $-b_n \rightarrow +\infty$ , deci  $\alpha(-b_n) \rightarrow +\infty$  adică,  $-\alpha b_n \rightarrow +\infty$  și deci  $\alpha b_n \rightarrow -\infty$ .

3) Dacă  $b_n \rightarrow +\infty$  și  $\alpha > 0$ , atunci  $(-\alpha) b_n \rightarrow -\infty$ .

Într-adevăr,  $(-\alpha) b_n = \alpha \cdot (-b_n)$ , iar  $-b_n \rightarrow -\infty$ , deci  $\alpha(-b_n) \rightarrow +\infty$ , adică  $(-\alpha) b_n \rightarrow -\infty$ .

4) Dacă  $b_n \rightarrow -\infty$  și  $\alpha > 0$ , atunci  $(-\alpha) b_n \rightarrow +\infty$ .

Într-adevăr,  $-b_n \rightarrow +\infty$ , deci  $\alpha(-b_n) \rightarrow +\infty$ , sau  $(-\alpha) b_n \rightarrow +\infty$ .

Observație. Proprietatea I) este un caz particular al proprietăților 3) și 4), luind  $\alpha = -1$ .

Pentru a putea scrie și în aceste cazuri ( $\alpha \neq 0$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha b_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

sîntem conduși să punem, pentru orice număr real  $\alpha > 0$ :

$$\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty;$$

$$\alpha(-\infty) = -\infty \cdot \alpha = -\infty;$$

$$(-\alpha)\infty = \infty(-\alpha) = -\infty;$$

$$(-\alpha)(-\infty) = -\infty(-\alpha) = +\infty.$$

Rezultă, în particular, luînd  $\alpha = -1$

$$(-1)\infty = \infty(-1) = -\infty;$$

$$(-1)(-\infty) = (-\infty)(-1) = +\infty.$$

În loc de  $(-1)(-\infty)$  se scrie  $-(-\infty)$ ; deci  $-(-\infty) = \infty$ .

**Observație.** Dacă  $\alpha = 0$ , avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha b_n = 0$ , oricare ar fi sirul  $(b_n)$ , fie că are, fie că nu are limită. Într-adevăr, sirul  $(\alpha b_n)$  este constant și are toți termenii nuli.

### 3. Produsul sirurilor care au limită

Stim că produsul a două siruri convergente este un sir convergent și *limita produsului este egală cu produsul limitelor*.

Dacă unul cel puțin din cele două siruri are limită infinită putem enunța următoarele proprietăți:

I) *Dacă  $a_n \geq \alpha > 0$  și  $b_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $a_n b_n \rightarrow +\infty$ .*

Într-adevăr  $\alpha b_n \rightarrow +\infty$  și  $a_n b_n \geq \alpha b_n$ , deci  $a_n b_n \rightarrow +\infty$ .

II) *Dacă  $a_n \geq \alpha > 0$  și  $b_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $a_n b_n \rightarrow -\infty$ .*

Deoarece  $b_n \rightarrow -\infty$ , avem  $b_n < 0$  (cu excepția unui număr finit de indici) și din  $a_n \geq \alpha$ , deducem  $a_n b_n \leq \alpha b_n$ ; dar  $\alpha b_n \rightarrow -\infty$ , deci  $a_n b_n \rightarrow -\infty$ .

III) *Dacă  $a_n \leq -\alpha < 0$  și  $b_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $a_n b_n \rightarrow -\infty$ .*

Punind  $\beta = -\alpha > 0$ , avem  $-a_n \geq \beta > 0$ , deci  $-a_n b_n \rightarrow +\infty$  și deci  $a_n b_n \rightarrow -\infty$ .

IV) *Dacă  $a_n \leq -\alpha < 0$  și  $b_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $a_n b_n \rightarrow +\infty$ .*

Într-adevăr  $-b_n \rightarrow +\infty$ , deci  $\alpha(-b_n) \rightarrow +\infty$ , adică:  $-\alpha b_n \rightarrow +\infty$ .

Să observăm că dacă  $a_n \rightarrow a > 0$  sau  $a_n \rightarrow +\infty$  există un număr  $\alpha > 0$ , astfel ca  $a_n > \alpha$  pentru toți indicii cu excepția unui număr finit dintre ei.

De asemenea, dacă  $a_n \rightarrow a < 0$  sau  $a_n \rightarrow -\infty$ , există un număr  $\alpha > 0$  astfel ca  $a_n < -\alpha$  pentru toți indicii cu excepția unui număr finit dintre ei. Din cele patru proprietăți de mai sus deducem următoarele propoziții:

- 1) Dacă  $a_n \rightarrow +\infty$  și  $b_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $a_n b_n \rightarrow +\infty$ .
- 2) Dacă  $a_n \rightarrow -\infty$  și  $b_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $a_n b_n \rightarrow -\infty$ .
- 3) Dacă  $a_n \rightarrow -\infty$  și  $b_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $a_n b_n \rightarrow +\infty$ .
- 4) Dacă  $a_n \rightarrow a > 0$  și  $b_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $a_n b_n \rightarrow +\infty$ .
- 5) Dacă  $a_n \rightarrow a > 0$  și  $b_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $a_n b_n \rightarrow -\infty$ .
- 6) Dacă  $a_n \rightarrow a < 0$  și  $b_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $a_n b_n \rightarrow -\infty$ .
- 7) Dacă  $a_n \rightarrow a < 0$  și  $b_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $a_n b_n \rightarrow +\infty$ .

Folosind produsul dintre un număr finit  $\neq 0$  și un număr infinit, definit anterior, în ultimele patru propoziții putem afirma că *limita produsului este egală cu produsul limitelor*.

Pentru a putea afirma și în cazul primelor trei propoziții că limita produsului este egală cu produsul limitelor, săntem conduși să punem:

$$\infty \cdot \infty = \infty; \quad \infty (-\infty) = (-\infty) \infty = -\infty; \quad (-\infty) (-\infty) = \infty.$$

*O b s e r v a t i e.* În cazul cînd  $a_n \rightarrow 0$ , și  $b_n \rightarrow \infty$  sau  $b_n \rightarrow -\infty$ , despre șirul  $(a_n b_n)$  nu putem afirma nimic. Uneori șirul produs are limită (finită sau infinită), alteori nu are limită. Mai mult, oricare ar fi  $a \in R$ , putem găsi un șir  $a_n \rightarrow 0$ , și un șir  $b_n \rightarrow +\infty$  (sau  $b_n \rightarrow -\infty$ ) astfel ca  $a_n b_n \rightarrow a$ . De aceea nu se acordă nici un sens scrierii  $0 \cdot \infty$  sau  $0 \cdot (-\infty)$ . Spunem că operațiile  $0 \cdot \infty$  și  $0 \cdot (-\infty)$  nu sunt definite, sau că sint *operații fără sens*.

*E x e m p l e.*

- 1)  $(a_n) : a, \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \dots, \frac{a}{n}, \dots$   $a_n \rightarrow 0;$   
 $(b_n) : 1, 2, 3, \dots, n, \dots$   $b_n \rightarrow +\infty;$   
 $(a_n b_n) : a, a, a, \dots, a, \dots$   $a_n b_n \rightarrow a.$
- 2)  $(a_n) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$   $a_n \rightarrow 0;$   
 $(b_n) : 1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$   $b_n \rightarrow +\infty;$   
 $(a_n b_n) : 1, 2, 3, \dots, n, \dots$   $a_n b_n \rightarrow +\infty.$
- 3)  $(a_n) : -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots$   $a_n \rightarrow 0;$   
 $(b_n) : 1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$   $b_n \rightarrow +\infty;$   
 $(a_n b_n) : -1, -2, -3, \dots, -n, \dots$   $a_n b_n \rightarrow -\infty.$
- 4)  $(a_n) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n}, \dots$   $a_n \rightarrow 0;$   
 $(b_n) : 2, 2, 6, 4, \dots, 4n-2, 2n, \dots$   $b_n \rightarrow +\infty;$   
 $(a_n b_n) : 2, 1, 2, 1, \dots, 2, 1, \dots$  nu are limită.

Dacă în aceste 4 exemple se ia  $(-b_n)$  în loc de  $(b_n)$  se obțin alte patru exemple în care primul șir are limita 0, iar al doilea șir are limita  $-\infty$ .

Putem da acum o formulare unitară care să cuprindă atât teorema relativă la produsul a două şiruri convergente cît și cele şapte propoziții de mai sus.

**T e o r e m ă.** Dacă şirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  au limită (finită sau infinită) și dacă produsul limitelor are sens, atunci şirul produs  $(a_n b_n)$  are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Cazuri exceptate:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty.$$

Fiecare din aceste două cazuri va fi denumit mai departe „cazul  $0 \cdot \infty$ ”. De altfel, cazul  $0 \cdot (-\infty)$  se reduce la cazul  $0 \cdot \infty$ , deoarece dacă  $a_n \rightarrow 0$  și  $b_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $-a_n \rightarrow 0$  și  $-b_n \rightarrow \infty$  și  $a_n b_n = (-a_n)(-b_n)$ .

#### 4. Cîțul şirurilor care au limită

Ştim că raportul a două şiruri convergente este un şir convergent dacă limita şirului de la numitor este diferită de 0, și limita raportului este egală cu raportul limitelor.

Pentru şirurile care au limite infinite avem următoarea proprietate:

I) Dacă  $b_n \rightarrow +\infty$ , sau dacă  $b_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $\frac{1}{b_n} \rightarrow 0$ .

Din ipoteză deducem că  $|b_n| \rightarrow +\infty$ ; să arătăm că  $\left| \frac{1}{b_n} \right| \rightarrow 0$ , de unde va rezulta că  $\frac{1}{b_n} \rightarrow 0$ .

Fie  $(\alpha, \beta)$  o vecinătate a lui 0,  $\alpha < 0 < \beta$ ; deoarece  $|b_n| \rightarrow +\infty$ , avem  $|b_n| \in \left( \frac{1}{\beta}, +\infty \right)$ , adică  $|b_n| > \frac{1}{\beta}$  și deci  $\frac{1}{|b_n|} < \beta$ , adică  $\left| \frac{1}{b_n} \right| \in (\alpha, \beta)$ , pentru toți indicii, cu excepția unui număr finit dintre ei. Rezultă că  $\left| \frac{1}{b_n} \right| \rightarrow 0$  și deci  $\frac{1}{b_n} \rightarrow 0$ .

Din această proprietate deducem următoarele propoziții:

1) Dacă  $a_n \rightarrow a$  și  $b_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ .

2) Dacă  $a_n \rightarrow a$  și  $b_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ .

Într adevăr, în ambele cazuri  $\frac{1}{b_n} \rightarrow 0$  și

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \rightarrow a \cdot 0 = 0.$$

Pentru a putea afirma și în aceste cazuri că *limita raportului este egală cu raportul limitelor*, sănsem conduși să punem

$$\frac{a}{+\infty} = 0 \text{ și } \frac{a}{-\infty} = 0, \text{ oricare ar fi } a \in R.$$

**Observații.** 1° Dacă ambele șiruri  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  au limite infinite, despre șirul  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  nu mai putem afirma nimic. Uneori șirul cît are limită (finită sau infinită), alteori nu are limită. Mai mult, oricare ar fi numărul  $a \in R$ , putem găsi două șiruri  $(a_n)$  și  $(b_n)$  cu limite infinite astfel ca  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow a$ .

De aceea nu se acordă nici un sens scrierilor  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{-\infty}{\infty}$ ,  $\frac{\infty}{-\infty}$ ,  $\frac{-\infty}{-\infty}$ ; spunem că operațiile respective *nu sunt definite*, sau că sunt *operații fără sens*.

*Exemple.*

- |   |  |
|---|--|
| 1) $(a_n) : a, 2a, 3a, \dots, na, \dots, (a > 0);$                                      | $a_n \rightarrow +\infty;$             |
| $(b_n) : 1, 2, 3, \dots, n, \dots$  | $b_n \rightarrow +\infty;$             |
| $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) : a, a, a, \dots, a, \dots$                               | $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow a.$       |
| 2) $(a_n) : 1, 2, 3, \dots, n, \dots$   | $a_n \rightarrow +\infty;$             |
| $(b_n) : 1, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$  | $b_n \rightarrow +\infty;$             |
| $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ | $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0.$       |
| 3) $(a_n) : 1, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$   | $a_n \rightarrow +\infty;$             |
| $(b_n) : 1, 2, 3, \dots, n, \dots$  | $b_n \rightarrow +\infty;$             |
| $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) : 1, 2, 3, \dots, n, \dots$                               | $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty.$ |
| 4) $(a_n) : 2, 2, 6, 4, \dots, 4n - 2, 2n, \dots$                                       | $a_n \rightarrow +\infty;$             |
| $(b_n) : 1, 2, 3, 4, \dots, 2n - 1, 2n, \dots$  | $b_n \rightarrow +\infty;$             |
| $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) : 2, 1, 2, 1, \dots, 2, 1, \dots$                         | nu are limită.                         |

Înmulțind cu  $-1$  unul sau ambele șiruri din fiecare exemplu, se obțin alte exemple pentru cazul cînd unul sau ambele șiruri au limită  $-\infty$ .

Trebuie observat că dacă  $a_n \rightarrow +\infty$  și  $b_n \rightarrow +\infty$ , sau dacă  $a_n \rightarrow -\infty$  și  $b_n \rightarrow -\infty$ , șirul  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  are termenii pozitivi, cu excepția unui număr finit dintre ei; dacă deci șirul cît are limită, această limită este *pozitivă* (finită sau  $+\infty$ ).

Pentru un număr  $a < 0$ , putem găsi totdeauna un sir  $a_n \rightarrow +\infty$  și un sir  $b_n \rightarrow -\infty$ , astfel ca  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow a$ .

Reamintim că o altă operație fără sens este împărțirea cu 0.

S-a arătat că dacă  $a_n \rightarrow 0$  și  $b_n \rightarrow 0$ , sirul cît  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  are uneori limită (finită sau infinită), alteori nu are limită.

Dacă insă  $a_n \rightarrow a \neq 0$  (sau dacă  $a_n \rightarrow +\infty$  sau  $a_n \rightarrow -\infty$ ) și  $b_n \rightarrow 0$ , sirul cît  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  este totdeauna *nemărginit*; uneori are limită  $+\infty$  sau  $-\infty$ , alteori nu are limită.

Putem acum da o formulare unitară relativă la limita cîțului a două siruri:

**Theoremă.** Dacă sirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  au limită (finită sau infinită) și dacă raportul limitelor are sens, atunci sirul  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$  are limită și:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

Cazuri exceptate:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = +\infty.$$

Fiecare din cele patru cazuri cuprinse aici vor fi denumite „cazul  $\frac{\infty}{\infty}$ ”.

De altfel, cazurile  $\frac{+\infty}{-\infty}$ ,  $\frac{-\infty}{+\infty}$ ,  $\frac{-\infty}{-\infty}$  se reduc la cazul  $\frac{\infty}{\infty}$ ; de exemplu, dacă  $a_n \rightarrow +\infty$  și  $b_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $-b_n \rightarrow +\infty$ , iar  $\frac{a_n}{b_n} = -\frac{a_n}{-b_n}$  etc.

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ . Dacă avem și  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , acest caz va fi denumit mai departe „cazul  $\frac{0}{0}$ ”.

**Observație.** În cazul cînd  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , și  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , avem totdeauna  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = +\infty$ .

Într-adevăr,  $|b_n| \rightarrow 0$ , și  $|b_n| > 0$  deci  $\frac{1}{|b_n|} \rightarrow +\infty$ ; apoi  $|a_n| \rightarrow |a| > 0$ , deci  $|a_n| \cdot \frac{1}{|b_n|} \rightarrow |a| \cdot \infty = \infty$ , adică  $\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \rightarrow \infty$ . Trebuie observat însă că, deși  $\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \rightarrow +\infty$ , este posibil ca sirul  $\left( \frac{a_n}{b_n} \right)$  să nu aibă limită.

## 5. Aplicații

1) Dacă  $x_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \rightarrow e$ . Vom scrie

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Putem presupune  $x_n \geq 1$ , înălțurind, eventual, numărul finit de termeni care nu verifică această condiție.

Pentru fiecare termen  $x_n$  fie  $p_n$  numărul natural care verifică inegalitatele

$$p_n \leq x_n < p_n + 1.$$

Deoarece  $x_n \rightarrow +\infty$  și  $p_n + 1 \geq x_n$ , avem  $p_n + 1 \rightarrow \infty$  și atunci avem de asemenea  $p_n \rightarrow +\infty$ .

Deoarece  $(p_n)$  și  $(p_n + 1)$  sunt formate din numere naturale și au limita  $+\infty$ , rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n + 1}\right)^{p_n + 1} = e.$$

Avem de asemenea  $\frac{1}{p_n} \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{p_n + 1} \rightarrow 0$ , deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right) = 1 \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n + 1}\right) = 1.$$

$$\text{Atunci } \left(1 + \frac{1}{p_n + 1}\right)^{p_n} = \left(1 + \frac{1}{p_n + 1}\right)^{p_n + 1} \left(1 + \frac{1}{p_n + 1}\right)^{-1}.$$

deci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n + 1}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n + 1}\right)^{p_n + 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n + 1}\right)^{-1} = e \cdot 1 = e.$$

De asemenea,

$$\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n + 1} = \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right).$$

deci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

Din inegalitățile  $p_n \leq x_n < p_n + 1$  deducem succesiv

$$\frac{1}{p_n + 1} < \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{p_n}, \quad 1 + \frac{1}{p_n + 1} < 1 + \frac{1}{x_n} \leq 1 + \frac{1}{p_n},$$

$$\left(1 + \frac{1}{p_n + 1}\right)^{p_n} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{p_n} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{x_n} < \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n + 1},$$

adică:

$$\left(1 + \frac{1}{p_n + 1}\right)^{p_n} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n + 1}$$

și, deoarece șirurile de la extremități au limita  $e$ , rezultă că șirul  $\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$  are limita  $e$ .

2) Dacă  $x_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \rightarrow e$ . Vom scrie

$$\lim_{x_n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Să punem  $y_n = -x_n$ . Atunci  $y_n \rightarrow +\infty$ , deci  $y_n - 1 \rightarrow \infty$  și deci

$$\left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n - 1} \rightarrow e.$$

Dar

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} &= \left(1 - \frac{1}{y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n - 1}{y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n - 1}\right)^{y_n} = \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n - 1} \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right). \end{aligned}$$

Deoarece  $y_n - 1 \rightarrow +\infty$ , rezultă că  $\frac{1}{y_n - 1} \rightarrow 0$ , deci  $1 + \frac{1}{y_n - 1} \rightarrow 1$  și deci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n - 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right) = e \cdot 1 = e.$$

3) Dacă  $x_n > 0$  și  $x_n \rightarrow 0$ , atunci  $(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \rightarrow e$ . Vom scrie

$$\lim_{\substack{x_n \rightarrow 0 \\ x_n > 0}} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e.$$

Să punem  $y_n = \frac{1}{x_n} > 0$ ; deoarece  $x_n > 0$  și  $x_n \rightarrow 0$ , rezultă  $y_n \rightarrow \infty$  și deci:

$$\left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \rightarrow e.$$

Dar

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n}$$

și deci:

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \rightarrow e.$$

4) Dacă  $x_n < 0$ , și  $x_n \rightarrow 0$ , atunci  $(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \rightarrow e$ . Vom scrie

$$\lim_{\substack{x_n \rightarrow 0 \\ x_n < 0}} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e.$$

Să punem  $y_n = \frac{1}{x_n}$ ; deoarece  $x_n < 0$  și  $x_n \rightarrow 0$ , avem  $y_n \rightarrow -\infty$ , deci:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} &\rightarrow e. \text{ Dar} \\ (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} &= \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \end{aligned}$$

și deci:

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \rightarrow e.$$

5) Dacă  $x_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $\frac{e^{x_n}}{x_n} \rightarrow +\infty$ . Vom scrie

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} \frac{e^{x_n}}{x_n} = +\infty.$$

Intr-adevăr, deoarece  $e^x \geqslant x$  pentru orice  $x \in R$ , avem:

$$\begin{aligned} \frac{e^{x_n}}{x_n} &= \frac{\left(\frac{x_n}{e^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{x_n^2}\right)^2} = \left(\frac{\frac{x_n}{e^2}}{\frac{1}{x_n^2}}\right)^2 \geqslant \left(\frac{\frac{x_n}{2}}{\sqrt{x_n}}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{x_n}{\sqrt{x_n}}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right) (\sqrt{x_n})^2 = \left(\frac{1}{4}\right) x_n. \end{aligned}$$

adică:

$$\frac{e^{x_n}}{x_n} \geqslant \frac{1}{4} x_n. \text{ Dar } \frac{1}{4} x_n \rightarrow +\infty,$$

deci:

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} \frac{e^{x_n}}{x_n} = \infty,$$

**O b s e r v a t i e.** Răsonamentul de mai sus se aplică pentru orice bază  $a \geqslant 2$ , în loc de  $e$  deoarece pentru  $a \geqslant 2$  avem  $a^x > x$  oricare ar fi  $x$ . Se va arăta mai departe că avem:

$$\lim_{x_n \rightarrow +\infty} \frac{a^{x_n}}{x_n} = +\infty$$

oricare ar fi  $a > 1$ .

6) Din exemplul 5 rezultă

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{e^{x_n}} = 0.$$

7) Dacă  $x_n \rightarrow +\infty$ ,  $x_n > 0$ , avem  $\frac{\ln x_n}{x_n} \rightarrow 0$ . Vom scrie

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} \frac{\ln x_n}{x_n} = 0.$$

Din inegalitatea  $e^x \geqslant x > 0$ , deducem  $x \geqslant \ln x$  pentru  $x > 0$ . Presupunind  $x_n \geqslant 1$ , avem

$$\frac{\ln x_n}{x_n} = \frac{\ln (\sqrt{x_n})^2}{x_n} = 2 \frac{\ln \sqrt{x_n}}{x_n} \leqslant 2 \frac{\sqrt{x_n}}{x_n} = 2 \frac{1}{\sqrt{x_n}},$$

adică  $\frac{\ln x_n}{x_n} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x_n}}$ .

Dar  $x_n \rightarrow +\infty$ , deci  $\sqrt{x_n} \rightarrow \infty$ , și deci  $\frac{2}{\sqrt{x_n}} \rightarrow 0$ .

Aplicind criteriul de convergență al siturilor deducem  $\frac{\ln x_n}{x_n} \rightarrow 0$ .

8) Din exemplul 7 deducem

$$\lim_{x_n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{\ln x_n} = +\infty.$$

Într-adevăr, presupunind  $x_n > 1$ , avem  $\frac{\ln x_n}{x_n} > 0$  și  $\frac{\ln x_n}{x_n} \rightarrow 0$ ;

deducem

$$\frac{x_n}{\ln x_n} \rightarrow +\infty.$$

9) Dacă  $x_n \rightarrow -\infty$ , avem  $x_n \cdot e^{x_n} \rightarrow 0$ . Vom scrie

$$\lim_{x_n \rightarrow -\infty} x_n \cdot e^{x_n} = 0.$$

Într-adevăr, să punem  $x_n = -y_n$ , deci  $y_n \rightarrow +\infty$ . Atunci

$$x_n e^{x_n} = -y_n e^{-y_n} = -\frac{y_n}{e^{y_n}} \rightarrow 0.$$

10) Dacă  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n > 0$ , atunci  $x_n \ln x_n \rightarrow 0$ , Vom scrie

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} x_n \ln x_n = 0.$$

Să punem  $y_n = \frac{1}{x_n}$ ; deoarece  $x_n > 0$  și  $x_n \rightarrow 0$ , avem  $y_n \rightarrow +\infty$ .

Atunci :

$$x_n \ln x_n = \frac{1}{y_n} \ln \frac{1}{y_n} = -\frac{\ln y_n}{y_n} \rightarrow 0.$$

## 6. Puteri

Pentru puteri de șiruri convergente s-a demonstrat că:  
dacă  $a_n \rightarrow a$  și  $\alpha_n \rightarrow \alpha$ , dacă  $a^\alpha$  are sens (adică  $a > 0$  pentru  $\alpha \leq 0$ ,  $a_n \geq 0$  și  $a \geq 0$  pentru  $\alpha > 0$ ), atunci  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow a^\alpha$ , adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\alpha_n} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n}.$$

Pentru șirurile care au limite infinite avem următoarele propoziții:

- 1) Dacă  $a_n \rightarrow \infty$  și  $\alpha_n \rightarrow \infty$ , atunci  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow \infty$ .
- 2) Dacă  $a_n \rightarrow a > 1$  și  $\alpha_n \rightarrow \infty$ , atunci  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow \infty$ .
- 3) Dacă  $a_n \rightarrow +\infty$  și  $\alpha_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow 0$ .
- 4) Dacă  $a_n \rightarrow a > 1$  și  $\alpha_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow 0$ .
- 5) Dacă  $a_n \rightarrow \frac{1}{a}$ ,  $a > 1$  și  $\alpha_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow 0$ .
- 6) Dacă  $a_n \rightarrow 0$  și  $\alpha_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow 0$ .
- 7) Dacă  $a_n \rightarrow \frac{1}{a}$ ,  $a > 1$  și  $\alpha_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow +\infty$ .
- 8) Dacă  $a_n \rightarrow +\infty$  și  $\alpha_n \rightarrow \alpha > 0$ , atunci  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow +\infty$ .
- 9) Dacă  $a_n \rightarrow +\infty$  și  $\alpha_n \rightarrow -\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , atunci  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow 0$ .

Într-adevăr, avem:  $a_n^{\alpha_n} = e^{\ln a_n^{\alpha_n}} = e^{\alpha_n \cdot \ln a_n}$ .

Să observăm că dacă  $a_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $\ln a_n \rightarrow +\infty$ , dacă  $a_n \rightarrow a > 1$ , atunci  $\ln a_n \rightarrow \rightarrow \ln a > 0$ , iar dacă  $a_n \rightarrow \frac{1}{a}$ ,  $a > 1$ , atunci  $\ln a_n \rightarrow \ln \frac{1}{a} < 0$ . De asemenea, dacă  $\beta_n \rightarrow +\infty$ , atunci  $e^{\beta_n} \rightarrow +\infty$ , iar dacă  $\beta_n \rightarrow -\infty$ , atunci  $e^{\beta_n} \rightarrow 0$ . Cu excepția propoziției 6) toate celelalte se demonstrează folosind teoremele privitoare la produsul de șiruri aplicate produsului  $\alpha_n \ln a_n$ .

Pentru exemplificare, să demonstrăm propoziția 9). Deoarece  $a_n \rightarrow +\infty$ , avem  $\ln a_n \rightarrow +\infty$ ; și deoarece  $\alpha_n \rightarrow -\alpha < 0$ , avem  $\alpha_n \cdot \ln a_n \rightarrow -\infty$ , deci  $e^{\alpha_n \cdot \ln a_n} \rightarrow 0$ , adică  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow 0$ .

Propoziția 6) se demonstrează astfel: deoarece  $a_n \rightarrow 0$ , există un număr finit de indici. Dar  $\alpha_n \rightarrow +\infty$ , și pe baza proprietății 5) deducem  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow 0$ ; deoarece  $a_n > 0$  (cu excepția unui număr finit de indici), din  $a_n \leq a$  deducem  $a_n^{\alpha_n} \leq a^{\alpha_n} \rightarrow 0$ , deci  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow 0$ .

Lăsăm pe seama cititorului, ca exercițiu, demonstrarea celorlalte propoziții.

Pentru a putea scrie și în aceste cazuri, ca și pentru șirurile convergente, că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^{\alpha_n}) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n}$$

sîntem conduși să punem ( $a > 1$ ,  $\alpha > 0$ )

$$\infty^\infty = \infty; a^\infty = \infty; \infty^{-\infty} = 0; a^{-\infty} = 0; \left(\frac{1}{a}\right)^\infty = 0;$$

$$0^\infty = 0; \left(\frac{1}{a}\right)^{-\infty} = \infty; \infty^\alpha = \infty;$$

**O b s e r v a t i e.** Nu se acordă nici un sens scierilor  $1^\infty$ ,  $1^{-\infty}$  și  $\infty^0$  deoarece dacă  $a_n \rightarrow 1$  și  $\alpha_n \rightarrow +\infty$  sau  $\alpha_n \rightarrow -\infty$ , respectiv dacă  $a_n \rightarrow \infty$  și  $\alpha_n \rightarrow 0$ , despre sirul  $a_n^{\alpha_n}$  nu se poate afirma nimic. Uneori are limită finită pozitivă sau  $+\infty$ , alteori nu are limită. Mai mult, oricare ar fi  $a \geq 0$ , putem găsi două siruri  $a_n \rightarrow 1$  și  $\alpha_n \rightarrow +\infty$ , respectiv  $a_n \rightarrow +\infty$  și  $\alpha_n \rightarrow 0$  astfel ca  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow a$ . Spunem că operațiile  $1^\infty$ ,  $1^{-\infty}$  și  $\infty^0$  nu sunt definite sau că sunt operații fără sens.

*Exemple.*

#### Cazul $1^\infty$

- 1)  $(a_n) : e^\alpha, e^{\frac{1}{2}}, \dots, e^{\frac{\alpha}{n}}, \dots, a_n \rightarrow 1;$   
 $(\alpha_n) : 1, 2, \dots, n, \dots a_n \rightarrow +\infty;$   
 $(a_n^{\alpha_n}) : e^\alpha, e^\alpha, \dots, e^\alpha, \dots a_n^{\alpha_n} \rightarrow e^\alpha.$

Dind lui  $\alpha$  toate valorile reale, obținem pentru  $e^\alpha$  toate valorile strict pozitive.

- 2)  $(a_n) : e, e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{1}{3}}, \dots, e^{\frac{1}{n}}, \dots, a_n \rightarrow 1;$   
 $(\alpha_n) : 1, 2^2, 3^3, \dots, n^2, \dots, \alpha_n \rightarrow +\infty;$   
 $(a_n^{\alpha_n}) : e, e^2, e^3, \dots, e^n, \dots a_n^{\alpha_n} \rightarrow +\infty.$
- 3)  $(a_n) : e^{-1}, e^{\frac{-1}{2}}, \dots, e^{\frac{-1}{n}}, \dots, a_n \rightarrow 1;$   
 $(\alpha_n) : 1, 2^2, \dots, n^2, \dots, b_n \rightarrow +\infty;$   
 $(a_n^{\alpha_n}) : e^{-1}, e^{-2}, \dots, e^{-n}, \dots a_n^{\alpha_n} \rightarrow 0.$
- 4)  $(a_n) : e^{-1}, e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{-1}{3}}, e^{\frac{1}{4}}, \dots, a_n \rightarrow 1;$   
 $(\alpha_n) : 1, 2, 3, 4, \dots, \alpha_n \rightarrow +\infty;$   
 $(a_n^{\alpha_n}) : e^{-1}, e, e^{-1}, e, \dots$  nu are limită.

Schimbind pe  $\alpha_n$  în  $-\alpha_n$ , obținem alte patru exemple pentru cazul  $1^{-\infty}$ .

#### Cazul $\infty^0$

- 1)  $(a_n) : e, e^2, e^3, \dots, e^n, \dots a_n \rightarrow \infty;$   
 $(\alpha_n) : \alpha, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{3}, \dots, \frac{\alpha}{n}, \dots \alpha_n \rightarrow 0;$   
 $(a_n^{\alpha_n}) : e^\alpha, e^\alpha, e^\alpha, \dots, e^\alpha, \dots a_n^{\alpha_n} \rightarrow e^\alpha;$

dind lui  $\alpha$  toate valorile reale se obțin pentru  $e^\alpha$  toate valorile strict pozitive.

2)  $(a_n) : e, e^2, e^3, \dots, e^n, \dots a_n \rightarrow +\infty;$

$(\alpha_n) : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \alpha_n \rightarrow 0;$

$(a_n^{\alpha_n}) : e, e^2, e^3, \dots, e^n, \dots, a_n^{\alpha_n} \rightarrow +\infty.$

3)  $(a_n) : e, e^2, e^3, \dots, e^{n^2}, \dots a_n \rightarrow +\infty;$

$(\alpha_n) : -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, -\frac{1}{n}, \dots, \alpha_n \rightarrow 0;$

$(a_n^{\alpha_n}) : e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, \dots, e^{-n}, \dots a_n^{\alpha_n} \rightarrow 0.$

4)  $(a_n) : e, e^2, e^3, \dots, e^n, \dots, a_n \rightarrow +\infty;$

$(\alpha_n) : -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n}, \dots, \alpha_n \rightarrow 0;$

$(a_n^{\alpha_n}) : e^{-1}, e, e^{-1}, e, \dots$  nu are limită.

Reamintim că altă operație fără sens este  $0^0$ . În cazul cînd  $a_n \rightarrow 0$ ,  $(a_n > 0)$  și  $\alpha_n \rightarrow 0$ , despre sirul  $(a_n^{\alpha_n})$  nu se poate afirma nimic. Uneori are limită finită pozitivă, sau  $+\infty$ , alteori nu are limită. Mai mult, oricare ar fi  $a \geqslant 0$ , există un sir  $a_n \rightarrow 0$  și un sir  $\alpha_n \rightarrow 0$ , astfel ca  $a_n^{\alpha_n} \rightarrow a$ .

Putem acum da o formulare unitară care să înglobeze atît teorema privitoare la puterile sirurilor convergente, cît și cele nouă propoziții de mai sus.

**Theoremă.** Dacă  $(a_n)$  și  $(\alpha_n)$  sunt două siruri cu limită (finită sau  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ ) și dacă puterea  $(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^{n \rightarrow \infty}$  are sens, atunci sirul  $(a_n^{\alpha_n})$  are limită și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\alpha_n} = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n}.$$

Cazuri exceptate:

$a_n \rightarrow 1$  și  $\alpha_n \rightarrow +\infty$  sau  $\alpha_n \rightarrow -\infty$ . Fiecare dintre aceste două cazuri vor fi denumite „cazul  $1^\infty$ ”;

$a_n \rightarrow \infty$  și  $\alpha_n \rightarrow 0$ , denumit „cazul  $\infty^0$ ”;

$a_n \rightarrow 0$  și  $\alpha_n \rightarrow 0$ , denumit „cazul  $0^0$ ”.

## § 5. Puncte limită ale unui sir

Un număr  $a$ , finit sau infinit, se numește punct limită al unui sir  $(a_n)$ , dacă orice vecinătate a lui  $a$  conține o infinitate de termeni ai sirului.

**Observații.** 1° Dacă un număr se repetă într-un sir de o infinitate de ori, acest număr este punct limită al sirului.

2° Un sir poate avea *mai multe* puncte limită. De exemplu, sirul

$$0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots$$

are două puncte limită, și anume 0 și 1.

3° Există siruri care au o *infinite de puncte limită*. De exemplu, sirul

$$1, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 4, 5; \dots; 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

are o mulțime numărabilă de puncte limită și anume fiecare număr natural este punct limită al acestui sir (deoarece fiecare număr natural se repetă de o infinitate de ori). De asemenea,  $+\infty$  este punct limită.

4° Există siruri pentru care mulțimea punctelor limită este toată dreapta reală.

Într-adevăr, deoarece mulțimea numerelor raționale este numărabilă, putem așeza *toate* numerele raționale într-un sir :

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Fie  $x_0$  un număr *real* oarecare,  $(\alpha, \beta)$  o vecinătate oarecare a lui  $x_0$ . Orice interval conține o infinitate de numere raționale. Deci vecinătatea  $(\alpha, \beta)$  a lui  $x_0$  conține o infinitate de termeni ai sirului  $(a_n)$ ; rezultă că  $x_0$  este punct limită al acestui sir. Cum  $x_0$  a fost ales arbitrar, rezultă că orice număr real este punct limită al sirului  $(a_n)$ .

De asemenea,  $+\infty$  și  $-\infty$  sunt puncte limită ale acestui sir.

5° Dacă  $a$  este punct limită al sirului  $(a_n)$ , în afara unei vecinătăți a lui  $a$  se pot, de asemenea, afla o infinitate de termeni ai sirului.

De exemplu, pentru sirul  $1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots$  numărul 1 este punct limită al sirului. În afara vecinătății  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$  a lui 1 se află o infinitate de termeni ai sirului, și anume, toți termenii nuli.

6° Există siruri care nu au nici un punct limită finit, de exemplu sirul numelor naturale  $1, 2, 3, \dots$

**Propozitie.** Un număr  $a$  este punct limită al unui sir  $(a_n)$  dacă și numai dacă există un subșir al acestuia care tinde către  $a$ .

Dacă există un subșir care tinde către  $a$ , atunci în fiecare vecinătate a lui se află toți termenii subșirului, cu excepția unui număr finit dintre ei, adică o infinitate de termeni ai sirului  $(a_n)$ , deci  $a$  este punct limită al sirului  $(a_n)$ .

Reciproc, fie  $a$  un punct limită al sirului  $(a_n)$ . Să presupunem întâi că  $a$  este finit. În vecinătatea  $V_1 = (a - 1, a + 1)$  a lui  $a$  se află o infinitate de termeni ai sirului: fie  $a_{n_1}$  unul dintre aceștia. Avem  $|a_{n_1} - a| < 1$ .

Să presupunem că am ales un termen  $a_{n_p}$  în vecinătatea

$V_p = \left(a - \frac{1}{p}, a + \frac{1}{p}\right)$ . În vecinătatea  $V_{p+1} = \left(a - \frac{1}{p+1}, a + \frac{1}{p+1}\right)$  se află o infinitate de termeni ai sirului; alegem în  $V_{p+1}$  un termen  $a_{n_{p+1}}$  cu  $n_{p+1} > n_p$ . Avem  $|a_{n_{p+1}} - a| < \frac{1}{p+1}$ .

Așadar, prin inducție completă putem alege un subșir de numere naturale  $n_1 < n_2 < \dots < n_p < \dots$ , astfel ca

$$|a_{n_p} - a| < \frac{1}{p} \text{ pentru orice } p \in N;$$

$(a_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$  este un subșir al sirului inițial și din inegalitățile precedente, folosind criteriul de convergență, deducem că

$$\lim_{p \rightarrow \infty} a_{n_p} = a.$$

Dacă  $a = +\infty$  se aleg vecinătățile  $V_p = (p, +\infty)$  ale lui  $+\infty$  și se procedează ca mai sus. Dacă  $a = -\infty$ , se iau vecinătățile  $V = (-\infty, -p)$ .

**Observație.** Din lema lui Cesăro rezultă că un sir mărginit are cel puțin un punct limită. De asemenea, din extensiunea acestei leme rezultă că orice sir are cel puțin un punct limită.

**Lemă.** Mulțimea  $A$  a punctelor limită finite ale unui sir  $(a_n)$  este închisă.

Dacă  $A = \emptyset$ , atunci  $A$  este închisă. Să presupunem că  $A \neq \emptyset$  și fie  $a$  un punct aderent al lui  $A$ . Fie de asemenea o vecinătate  $V$  a lui  $a$ ; în această vecinătate se află cel puțin un punct  $b \in A$ , iar  $V$  este și o vecinătate a lui  $b$ . Deoarece  $b$  este punct limită al sirului, în vecinătatea  $V$  al lui  $b$  se află o infinitate de termeni ai sirului. Așadar, în orice vecinătate  $V$  a lui  $a$  se află o infinitate de termeni ai sirului, deci  $a$  este punct limită al sirului, adică  $a \in A$ . Deoarece multimea  $A$  își conține toate punctele aderente, este închisă.

Din această lemură rezultă că dacă  $A$  nu este vidă, și dacă este minorată, atunci  $\inf A \in A$ , iar dacă este majorată, atunci  $\sup A \in A$ .

**Propozitie.** Pentru orice sir  $(a_n)$  există un cel mai mic punct limită (finit sau infinit) și un cel mai mare punct limită (finit sau infinit).

Intr-adevăr, dacă sirul  $(a_n)$  este nemajorat, atunci  $+\infty$  este punct limită al sirului, deci  $+\infty$  este cel mai mare punct limită al sirului.

Să presupunem că  $(a_n)$  este majorat și fie  $A$  mulțimea punctelor sale limită finite. Dacă  $A$  este vidă, inseamnă că singurul punct limită al sirului este  $-\infty$ , deci  $-\infty$  este și cel mai mare punct limită al sirului. Dacă  $A$  nu este vidă, mulțimea  $A$  este majorată, ca și sirul  $(a_n)$ , iar sup  $A \in A$ , adică sup  $A$  este punct limită, și deci cel mai mare punct limită al sirului.

Existenta celui mai mic punct limită al sirului se demonstrează în mod asemănător.

**D e f i n i t i e .** Fie  $(a_n)$  un sir. Cel mai mic punct limită al sirului se numește limită inferioară a sirului și se notează  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$  sau  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ ; cel mai mare punct limită al sirului se numește limită superioară a sirului și se notează  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  sau  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Cele două limite extreme ale șirului sunt caracterizate de următoarele proprietăți:

I)  $l = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$  dacă și numai dacă, pentru orice vecinătate  $(\alpha, \beta)$  a lui  $l$ , sătăcătoarele conditii:

- 1) mulțimea indicilor  $n$  pentru care  $a_n \leq \alpha$  este finită sau vidă;  
 2) mulțimea indicilor  $n$  pentru care  $a_n \leq \beta$  este infinită.

II)  $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  dacă și numai dacă, pentru orice vecinătate  $(\alpha, \beta)$  a lui  $L$ , sînt îndeplinite următoarele condiții:

- 1) mulțimea indicilor  $n$  pentru care  $\beta \leq a_n$  este finită sau vidă;
- 2) mulțimea indicilor  $n$  pentru care  $\alpha \leq a_n$  este infinită.

Următoarea relație se verifică fără dificultate:

$$-\infty \leq \inf_{n \in N} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \sup_{n \in N} a_n \leq +\infty.$$

**Propozitie.** Un sir are limită dacă și numai dacă limitele sale extreme sunt egale. Dacă sirul are limită, limitele extreme și limita sirului sunt egale.

Dacă sirul  $(a_n)$  are limita  $a$ , atunci în afara oricărei vecinătăți  $(\alpha, \beta)$  a lui  $a$  se află cel mult un număr finit de termeni ai sirului, deci inegalitățile  $a_n \leq \alpha$  și  $\beta \leq a_n$  sunt verificate cel mult de un număr finit de termeni, iar inegalitățile  $a_n \leq \beta$  și  $\alpha \leq a_n$  sunt verificate de o infinitate de termeni ai sirului. Rezultă că

$$a = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ și } a = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

deci limitele extreme sunt egale între ele și egale cu limitele sirului.

Reciproc, să presupunem că limitele extreme sunt egale și să notăm cu  $a$  valoarea lor comună. Pentru orice vecinătate  $(\alpha, \beta)$  a lui  $a$ , inegalitățile  $a_n \leq \alpha$  și  $\beta \leq a_n$  sunt verificate cel mult de un număr finit de indici, adică în afara vecinătății  $(\alpha, \beta)$  se află cel mult un număr finit de termeni ai sirului. Rezultă că  $a$  este limita sirului.

**Corolar.** Un sir are limită dacă și numai dacă are un singur punct limită.

**Propozitie.** Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ , atunci

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ și } \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

oricare ar fi sirul  $(a_n)$ .

$$\text{Să notăm } \omega = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ și } \omega' = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Există un subșir  $a_{n_p} \xrightarrow[p]{} \omega$ ; atunci  $a_{n_p} \rightarrow 1$ , deci  $a_{n_p} c_{n_p} \rightarrow \omega$  și deci  $\omega$  este punct limită al sirului  $(a_n)$ , de unde rezultă că  $\omega \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \omega'$ .

Există de asemenea un subșir  $a_{n_k} a_{n_k} \xrightarrow[k]{} \omega'$ ; atunci  $a_{n_k} \rightarrow 1$ , deci

$$a_{n_k} = \frac{a_{n_k} a_{n_k}}{a_{n_k}} \xrightarrow{} \omega', \text{ deci } \omega' \text{ este punct de limită al sirului } (a_n), \text{ de unde rezultă că}$$

$$\omega' \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \omega.$$

Așadar,  $\omega' = \omega$ , adică

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

La fel se demonstrează și cealaltă egalitate.

**Propozitie.** Dacă  $a_n \leq b_n$  pentru orice  $n$ , atunci

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ și } \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Fie  $\omega = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ ; există un subşir  $a_{n_p} \rightarrow \omega$ ; orice subşir al şirului  $(a_{n_p})$  are limita  $\omega$ . Atunci, dacă un subşir al şirului  $(b_{n_p})$  are limită, ea este mai mare sau egală cu  $\omega$ , adică orice punct limită al şirului  $(b_{n_p})$  este mai mare decât  $\omega$ .

Cum punctele limită ale şirului  $(b_{n_p})$  sunt și punctele limită ale şirului  $(b_n)$ , rezultă că  $\omega \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

Cealaltă inegalitate se demonstrează la fel.

Se demonstrează următoarele egalități:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in N} \sup_{p > 0} a_{n+p};$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in N} \inf_{p > 0} a_{n+p}$$

## **Capitolul V**

# **LIMITE DE FUNCȚII. CONTINUITATE**

### **§ 1. Limita unei funcții într-un punct**

#### **1. Punerea problemei**

Într-unul din capitolele precedente au fost studiate limitele unor funcții particulare, anume șirurile. Un șir  $(a_n)$  are limita  $a$  (finită sau infinită) dacă pentru valori ale indicelui  $n$  suficient de mari (suficient de vecine cu  $+\infty$ ) putem realiza ca termenii șirului să fie cît dorim de apropiat (vecini) de  $a$ .

În acest capitol va fi studiată noțiunea de limită într-un punct a unei funcții oarecare. Problema care se pune acum se poate formula astfel:

Dându-se o funcție reală de variabilă reală  $f: E \rightarrow R$ , să se cerceteze comportarea sa în jurul unui punct  $x_0$ , adică să se cerceteze ce se întâmplă cu valorile  $f(x)$  ale funcției atunci când argumentul  $x$  se apropie din ce în ce mai mult de  $x_0$ . Se apropie și valorile funcției din ce în ce mai mult de un anumit număr  $l$  (finit sau infinit)? Altfel spus, problema care se pune este dacă pentru valorile argumentului  $x$  suficient de vecine cu  $x_0$ , putem realiza ca valorile funcției  $f(x)$  să fie cît dorim de vecine cu un anumit număr  $l$  (finit sau infinit).

Problema astfel pusă necesită unele precizări. Comportarea funcției  $f$  în jurul lui  $x_0$ , se referă *nu* la valoarea funcției în  $x_0$ , ci în celealte puncte vecine cu  $x_0$ ; prin urmare, problema comportării funcției în jurul lui  $x_0$  se poate pune chiar dacă funcția *nu* este definită în  $x_0$ . Pe de altă parte, pentru a putea studia comportarea funcției în jurul lui  $x_0$ , trebuie să existe puncte  $x \neq x_0$  oricără vecine cu  $x_0$ , în care funcția  $f$  să fie definită, adică  $x_0$  trebuie să fie punct de acumulare pentru mulțimea  $E$  pe care este definită funcția  $f$ .

Dacă mulțimea  $E$  este *nemajorată*, ea are punctul  $+\infty$  ca punct de acumulare. În acest caz se poate pune problema comportării funcției în jurul lui  $+\infty$ , dând argumentului  $x$  valori din ce în ce mai vecine cu  $+\infty$  (adică din ce în ce mai mari) și văzind ce se întâmplă cu valorile funcției.

Dacă mulțimea  $E$  este *neminorată* ea are punctul  $-\infty$  ca punct de acumulare. În acest caz se poate pune problema comportării funcției în jurul lui  $-\infty$ .

## 2. Definiția limitei cu ajutorul vecinătăților

Considerațiile precedente ne conduc la definiția limitei unei funcții într-un punct.

Fie funcția  $f: E \rightarrow R$ , și  $x_0$  un punct de acumulare al mulțimii  $E$  ( $x_0$  finit sau infinit).

**D e f i n i ţ i e .** Se spune că un număr  $l$  (finit sau infinit) este limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$ , dacă pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $l$  există o vecinătate  $V$  a lui  $x$ , astfel încât, oricare ar fi  $x \neq x_0$  din  $V \cap E$ , să avem  $f(x) \in U$ .

În această definiție,  $V$  depinde, natural, de  $U$ .

Limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$  se notează:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) \text{ sau, mai simplu, } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

și se citește

„limită de  $f(x)$  cînd  $x$  tinde către  $x_0$ ”.

**O b s e r v a ț i i .** 1° În loc de  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  vom scrie adesea „ $f(x) \rightarrow l$  cînd  $x \rightarrow x_0$ ” sau, uneori,  $f(x) \longrightarrow l$ . Notațiile:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , sau  $f(x) \rightarrow l$ , sau  $x \rightarrow x_0$  scrise separat nu au sens.

2° După cum s-a specificat la început, problema existenței limitei funcției  $f$  în punctul  $x_0$  se poate pune chiar dacă  $f$  nu este definită în  $x_0$ , adică dacă  $x_0 \notin E$  ( $x_0$  fiind însă punct de acumulare al lui  $E$ ). În acest caz, restricția  $x \neq x_0$  din definiția limitei este de prisos, fiind verificată de la sine (deoarece  $x \in V \cap E$  și  $x_0 \notin E$ ).

În particular, dacă  $E$  nu este majorată, se poate lua  $x_0 = +\infty$ , iar dacă  $E$  nu este minorată, se poate lua  $x_0 = -\infty$ . În aceste cazuri condiția  $x \neq x_0$  este verificată de la sine.

Dacă însă  $x_0$  nu este punct de acumulare al mulțimii  $E$  (adică dacă este un punct izolat al lui  $E$  sau punct exterior al lui  $E$ ), definiția limitei nu se mai poate aplica. Problema existenței limitei funcției nu are sens într-un asemenea punct.

De exemplu, pentru funcția  $f(x) = \ln x$  definită pe  $E = (0, +\infty)$  nu are sens  $\lim_{x \rightarrow -1}$  sau  $\lim_{x \rightarrow -5} \ln x$ , deoarece  $-1$  și  $-5$  nu sunt puncte de acumulare (ci sunt puncte exterioare) ale mulțimii  $E$ .

De asemenea, pentru funcția  $f(x) = n^x$ , definită pe mulțimea  $N$  a numerelor naturale, nu are sens  $\lim_{n \rightarrow 5} n^x$ , deoarece  $5$  nu este punct de acumulare (ci este punct izolat) al mulțimii  $N$ .

3° Dacă  $f$  este definită în  $x_0$ , adică dacă  $x_0 \in E$ , ( $x_0$  fiind punct de acumulare pentru  $E$ ), funcția  $f$  poate să aibă în punctul  $x_0$  limită diferită de valoarea  $f(x_0)$  a funcției în acest punct, adică putem avea  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ . Funcțiile pentru care avem  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  (adică

$f(x) \rightarrow f(x_0)$  cind  $x \rightarrow x_0$  se numesc funcții *continue* în punctul  $x_0$  și vor fi studiate în capitolul următor.

4° Definiția limitei unei funcții într-un punct conține în particular definiția limitei unui sir.

În adevăr, un sir  $(a_n)$  este o funcție  $f(n) = a_n$  definită pe mulțimea  $N$  a numerelor naturale, care are un singur punct de acumulare,  $+\infty$ . Se poate considera deci limita acestei funcții în punctul  $+\infty$ .

Definiția limitei acestei funcții în punctul  $+\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ , este echivalentă cu definiția anterioară a limitei sirului  $(a_n)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a_x$ .

5° A spune că  $l$  nu este limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$ , înseamnă că: există o vecinătate  $U_0$  a lui  $l$ , cu proprietatea că, pentru fiecare vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , există un punct  $x \neq x_0$  din  $V \cap E$ , astfel încât  $f(x) \notin U_0$  (în această propoziție,  $x$  depinde de  $V$ ).

A spune că funcția  $f$  nu are limită în punctul  $x_0$  (sau că  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  nu există) înseamnă că: oricare ar fi numărul  $l$  (finit sau infinit) există o vecinătate  $U$  a lui  $l$  ( $U$  depinde de  $l$ ) cu proprietatea că, pentru fiecare vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  putem găsi un punct  $x \neq x_0$  din  $V \cap E$  ( $x$  depinde atât de  $V$  cât și de  $l$ ) astfel încât  $f(x) \notin U$ .

6° Definiția de mai sus a limitei se aplică pentru orice funcție  $f: E \rightarrow F$ , unde  $E$  și  $F$  sunt spații topologice oarecare (în acest caz  $x_0$  este punct de acumulare al lui  $E$ , iar  $l \in F$ )

### 3. Definiția cu $\varepsilon$ și $\delta$ a limitei

În definiția cu vecinătăți a limitei, să luăm vecinătățile  $U$  ale lui  $l$  de forma :

$$\begin{aligned} & (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \text{ cu } \varepsilon > 0, \text{ dacă } l \text{ este finit;} \\ & (\varepsilon, +\infty), \text{ dacă } l = +\infty \text{ (}\varepsilon \text{ oarecare, nu neapărat } > 0\text{);} \\ & (-\infty, \varepsilon), \text{ dacă } l = -\infty \text{ (}\varepsilon \text{ oarecare, nu neapărat } < 0\text{).} \end{aligned}$$

și vecinătățile  $V$  ale lui  $x_0$  de forma :

$$\begin{aligned} & (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ cu } \delta > 0, \text{ dacă } x_0 \text{ este finit;} \\ & (\delta, +\infty), \quad \text{dacă } x_0 = +\infty, (\delta \text{ nu neapărat } > 0); \\ & (-\infty, \delta) \quad \text{dacă } x_0 = -\infty (\delta \text{ nu neapărat } < 0). \end{aligned}$$

A spune că  $x \in V$  înseamnă :

$$\begin{aligned} & |x - x_0| < \delta, \quad \text{dacă } x_0 \text{ este finit;} \\ & x > \delta \quad \text{dacă } x_0 = +\infty; \\ & x < \delta, \quad \text{dacă } x_0 = -\infty. \end{aligned}$$

A spune că  $f(x) \in U$  înseamnă :

$$\begin{aligned} & |f(x) - l| < \varepsilon, \quad \text{dacă } l \text{ este finit;} \\ & f(x) > \varepsilon, \quad \text{dacă } l = +\infty; \\ & f(x) < \varepsilon, \quad \text{dacă } l = -\infty. \end{aligned}$$

Tinând seama că în enunțul definiției,  $V$  depinde de  $U$ , rezultă că  $\delta$  depinde de  $\varepsilon$ , ceea ce se pune în evidență scriind  $\delta(\varepsilon)$ .

Tinând seama de faptul că în definiția limitei putem folosi numai vecinătățile simetrice ale punctelor finite (deoarece orice vecinătate a unui punct finit conține o vecinătate simetrică a acestui punct) și transcriind,

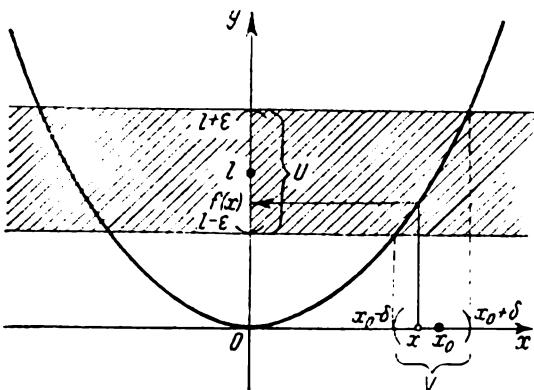


Fig. 46

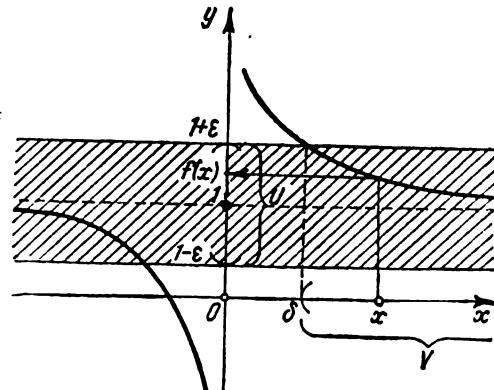


Fig. 47

cu notațiile de mai sus, definiția limitei, se obțin nouă definiții particolare, după cum  $x_0$  sau  $l$  sunt finite sau infinite. Se obțin astfel așa-numitele „definiții cu  $\varepsilon$  și  $\delta$ ” ale limitei.

În enunțurile de mai jos,  $x_0$  și  $l$  sunt considerate finite.

1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  (sau  $f(x) \rightarrow l$  cînd  $x \rightarrow x_0$ ) inseamnă:

pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta > 0$ , astfel încît oricare ar fi  $x \in E$ ,  $x \neq x_0$ , cu  $|x - x_0| < \delta$ , să avem  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

*Exemplu.*  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^2 = x_0^2 = l$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  (sau  $f(x) \rightarrow l$  cînd  $x \rightarrow +\infty$ ) inseamnă:

pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există un  $\delta$ , astfel încît, oricare ar fi  $x \in E$ , cu  $x > \delta$  să avem  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

*Exemplu.*  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1 = l$ .

De aici se deduce în particular definiția cu  $\varepsilon$  a limitei unui sir convergent,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  (sau  $f(x) \rightarrow l$  cînd  $x \rightarrow -\infty$ ) inseamnă:

pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există un  $\delta$ , astfel încît oricare ar fi  $x \in E$  cu  $x < \delta$  să avem  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

*Exemplu.*  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x} = 1 = l$ .

4)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  (sau  $f(x) \rightarrow +\infty$  cînd  $x \rightarrow x_0$ ) înseamnă:  
pentru orice  $\varepsilon$ , există un  $\delta > 0$ , astfel încît, oricare ar fi  $x \in E$ ,  $x \neq x_0$ , cu  
 $|x - x_0| < \delta$ , să avem  $f(x) > \varepsilon$ .

*Exemplu.*  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x^2 - 1)^2} = +\infty$ .

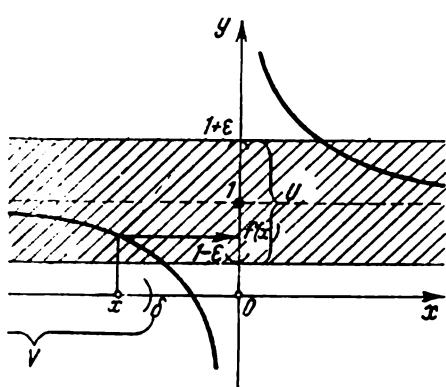


Fig. 48

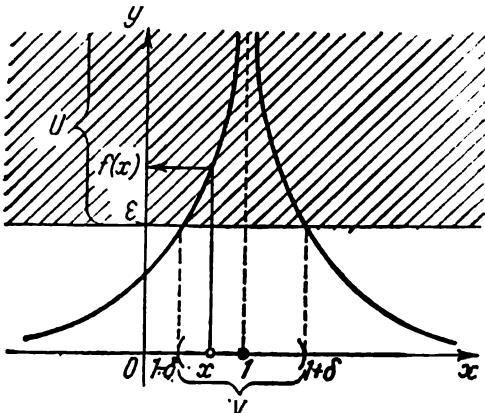


Fig. 49

5)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  (sau  $f(x) \rightarrow -\infty$  cînd  $x \rightarrow x_0$ ) înseamnă:  
pentru orice  $\varepsilon$ , există un  $\delta > 0$ , astfel încît, oricare ar fi  $x \in E$ ,  $x \neq x_0$ , cu  
 $|x - x_0| < \delta$ , să avem  $f(x) < \varepsilon$ .

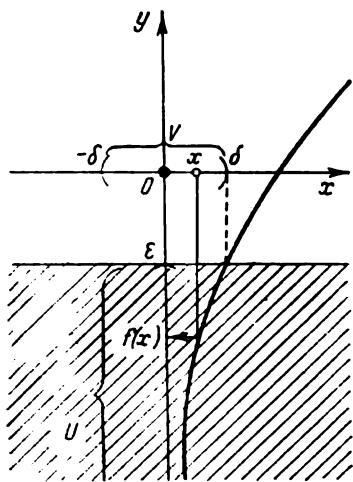


Fig. 50

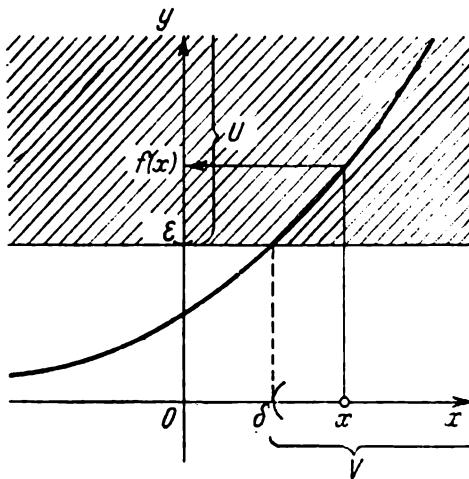


Fig. 51

*Exemplu.*  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ .

6)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (sau  $f(x) \rightarrow +\infty$  cînd  $x \rightarrow +\infty$ ) înseamnă: pentru orice  $\varepsilon$ , există un  $\delta$ , astfel încît oricare ar fi  $x \in E$  cu  $x > \delta$ , să avem  $f(x) > \varepsilon$ .

*Exemplu.*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

Acest caz conține în particular șirurile cu limita  $+\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  (sau  $f(x) \rightarrow -\infty$  cînd  $x \rightarrow +\infty$ ) înseamnă: pentru orice  $\varepsilon$  există un  $\delta$ , astfel încît oricare ar fi  $x \in E$  cu  $x > \delta$ , să avem  $f(x) < \varepsilon$ .

*Exemplu.*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$ .

Acest caz conține în particular șirurile cu limita  $-\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  (sau  $f(x) \rightarrow +\infty$  cînd  $x \rightarrow -\infty$ ) înseamnă: pentru orice  $\varepsilon$ , există un  $\delta$ , astfel încît oricare ar fi  $x \in E$ , cu  $x < \delta$ , să avem  $f(x) > \varepsilon$ .

*Exemplu.*  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ .

9)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  (sau  $f(x) \rightarrow -\infty$  cînd  $x \rightarrow -\infty$ ) înseamnă: pentru orice  $\varepsilon$ , există un  $\delta$ , astfel încît oricare ar fi  $x \in E$  cu  $x < \delta$ , să avem  $f(x) < \varepsilon$ .

*Exemplu.*  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ .

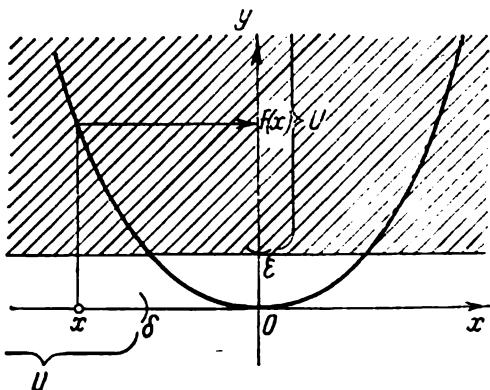


Fig. 52

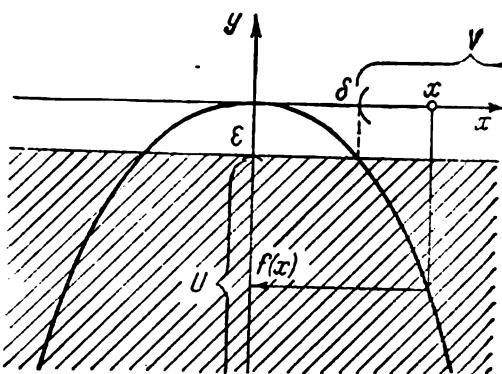


Fig. 53

**O b s e r v a t i i .** 1° Dacă se iau numai vecinătățile  $V$  ale lui  $x_0$  de forma  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  sau  $(\delta, +\infty)$  sau  $(-\infty, \delta)$ , se obțin următoarele trei definiții (fie că  $l$  este finit, fie că este infinit):

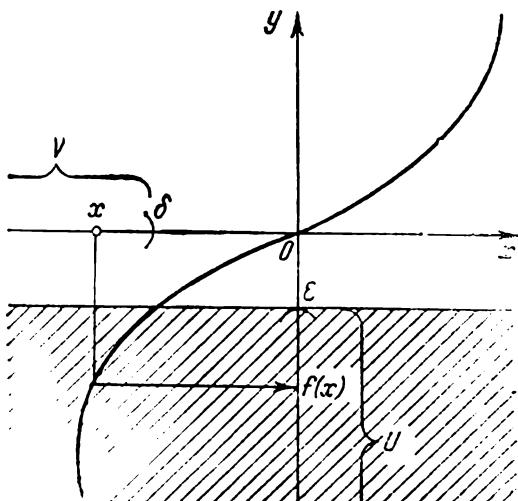


Fig. 54

1)  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ,  $x_0$  finit,

dacă și numai dacă, pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $l$ , există un număr  $\delta > 0$  (care depinde de  $U$ ) astfel încât, pentru orice  $x \neq x_0$  din  $E$  cu  $|x - x_0| < \delta$  să avem  $f(x) \in U$ .

2)  $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , dacă și numai dacă, pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $l$ , există un număr  $\delta = \delta(U)$ , astfel încât, pentru orice  $x \neq x_0$  din  $E$  cu  $x > \delta$  să avem  $f(x) \in U$ .

3)  $l = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , dacă și numai dacă, pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $l$ , există un număr  $\delta = \delta(U)$  astfel încât, pentru orice  $x \neq x_0$  din  $E$  cu  $x < \delta$  să avem  $f(x) \in U$ .

2° Dacă se iau numai vecinătățile  $U$  ale lui  $l$  de forma  $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ , sau  $(\varepsilon, +\infty)$  sau  $(-\infty, \varepsilon)$  se obțin alte trei definiții (fie că  $x_0$  este finit, fie că este infinit).

1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ,  $l$  finit, dacă și numai dacă pentru orice număr  $\varepsilon > 0$ , există o vecinătate  $V$  (care depinde de  $\varepsilon$ ) a lui  $x_0$ , astfel încât, pentru orice  $x \neq x_0$  din  $V \cap E$  să avem  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , dacă și numai dacă pentru orice număr  $\varepsilon$ , există o vecinătate  $V = V(\varepsilon)$  a lui  $x_0$ , astfel încât, pentru orice  $x \neq x_0$  din  $V \cap E$  să avem  $f(x) > \varepsilon$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , dacă și numai dacă, pentru orice număr  $\varepsilon$  există o vecinătate  $V = V(\varepsilon)$  a lui  $x_0$ , astfel încât, pentru orice  $x \neq x_0$ , din  $V \cap E$  să avem  $f(x) < \varepsilon$ .

#### 4. Definiția cu siruri a limitei

S-a observat mai înainte că limita unui sir este un caz particular de limită de funcție.

Limitele de siruri pot fi însă folosite pentru a da o definiție a limitelor de funcții, echivalentă cu cea precedentă.

**T e o r e m ā.** Funcția  $f$  are limita  $l$  în punctul  $x_0$ , dacă și numai dacă pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ) avem  $f(x_n) \rightarrow l$ .

Să presupunem că  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  și să arătăm că este verificată condiția din enunțul teoremelor. Fie un sir oarecare  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ); să arătăm că  $f(x_n) \rightarrow l$ . Să alegem o vecinătate arbitrară  $U$  a lui  $l$ . Deoarece  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  astfel încât, pentru orice  $x \neq x_0$  din  $V \cap E$  să avem  $f(x) \in U$ . Dar  $x_n \rightarrow x_0$ , deci avem  $x_n \in V \cap E$  și deci  $f(x_n) \in U$ , cu excepția unui număr finit de indici, adică  $f(x_n) \rightarrow l$ . Reciproc, să presupunem că pentru toate sirurile  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ) sirurile corespunzătoare ( $f(x_n)$ ) au o limită comună,  $l$ , și să arătăm că  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

Să presupunem, prin absurd, că  $l$  nu este limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$ . Aceasta înseamnă că: există o vecinătate  $U_0$  a lui  $l$ , cu proprietatea că, oricare ar fi vecinătatea  $V$  a lui  $x_0$ , există un punct  $x_V \neq x_0$  din  $V \cap E$ , astfel încât  $f(x_V) \notin U_0$ .

Deoarece vecinătatea  $V$  este arbitrară, putem lua un sir  $(V_n)$  de vecinătăți ale lui  $x_0$ , de forma:

$$V_n = \left( x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \right), \text{ dacă } x_0 \text{ este finit}$$

$$V_n = (n, +\infty), \quad \text{dacă } x_0 = +\infty$$

$$V_n = (-\infty, -n), \quad \text{dacă } x_0 = -\infty.$$

În fiecare vecinătate  $V_n$  există un punct  $x_n \neq x_0$  din  $E$ , astfel ca  $f(x_n) \notin U_0$ . Am obținut astfel un sir  $(x_n)$  de puncte din  $E$  diferite de  $x_0$ , și  $x_n \rightarrow x_0$  (deoarece,  $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$  sau  $x_n > n$  sau  $x_n < -n$ , după cum  $x_0$  este finit,  $x_0 = +\infty$  sau  $x_0 = -\infty$ ). Conform ipotezei, rezultă că  $f(x_n) \rightarrow l$ , deci în vecinătatea  $U_0$  a lui  $l$  se află toți termenii  $f(x_n)$  cu excepția unui număr finit dintre ei, ceea ce este în contradicție cu relația  $f(x_n) \notin U_0$ , oricare ar fi  $n \in N$ .

Deoarece presupunerea că  $l$  nu-ar fi limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$  ne duce la contradicție, rezultă că  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  și teorema este complet demonstrată.

**O b s e r v a t i i.** 1º Teorema precedentă exprimă o condiție echivalentă cu cea din enunțul definiției limitei cu ajutorul vecinătăților. De aceea condiția din enunțul teoremei poate fi luată ca definiție a limitei, iar enunțul definiției precedente devine o teoremă.

Definiția limitei unei funcții într-un punct, cu ajutorul sirurilor, se numește *definiția lui Heine*. În continuare, va fi folosită o definiție sau alta, după cum va fi mai convenabil.

2° Dacă din  $x_n \rightarrow x_0$  rezultă  $f(x_n) \rightarrow l$ , am folosit adesea notația  $\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = l$  în loc de  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ .

Notația limitei unei funcții,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , se obține, formal, din cea precedentă, dacă nu se mai scrie indicele  $n$ .

3° Notația „ $f(x) \rightarrow l$  cind  $x \rightarrow x_0$ ” capătă acum o justificare, dacă prin  $x \rightarrow x_0$ , înțelegem un sir arbitrar  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \neq x_0$ ). Anume, prin notația „ $f(x) \rightarrow l$  cind  $x \rightarrow x_0$ ” trebuie să înțelegem „ $f(x_n) \rightarrow l$  oricare ar fi sirul  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \neq x_0$ )”.

4° În enunțul teoremei precedente (deci și în definiția lui Heine) s-a pus condiția ca *toate* sirurile ( $f(x_n)$ ) să aibă o limită comună,  $l$ , independentă de sirul  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \neq x_0$ ).

Este suficient să presupunem că pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ) sirul ( $f(x_n)$ ) are limită. Rezultă atunci că limita este aceeași pentru *toate* sirurile ( $f(x_n)$ ), independentă de sirul  $x_n \rightarrow x_0$ .

Intr-adevăr, dacă pentru două siruri  $x'_n \rightarrow x_0$  și  $x''_n \rightarrow x_0$  am avea  $f(x'_n) \rightarrow l$  și  $f(x''_n) \rightarrow l'$  și  $l' \neq l''$ , atunci sirul

$$x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots, x'_n, x''_n, \dots$$

tinde de asemenea către  $x_0$ , dar sirul valorilor funcției

$$f(x'_1), f(x''_1), f(x'_2), f(x''_2), \dots, f(x'_n), f(x''_n), \dots$$

nu mai are limită, deoarece dacă ar avea o limită,  $l$ , din faptul că ( $f(x'_n)$ ) și ( $f(x''_n)$ ) sunt sub-siruri ale celui de mai sus, ar rezulta  $f(x'_n) \rightarrow l$  și  $f(x''_n) \rightarrow l$ . Din unicitatea limitei unei siruri deducem atunci  $l = l'$  și  $l'' = l$ , deci  $l' = l''$  și am ajunge la o contradicție.

5° Din raționamentul precedent deducem în particular că: funcția  $f$  nu are limită în  $x_0$  (sau că  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  nu există) dacă și numai dacă există cel puțin un sir  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ) astfel încât sirul ( $f(x_n)$ ) să nu aibă limită.

## 5. Exemple

Cu definiția lui Heine putem calcula limitele unor funcții, folosind limitele unor siruri cunoscute.

- 1) Pentru funcția constantă  $f(x) \equiv c$  definită pe  $R$ , avem  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$ , oricare ar fi  $x_0$  (finit sau infinit). Scriem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c.$$

Intr-adevăr,  $\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow x_0} c = c$ , oricare ar fi sirul  $x_n \rightarrow x_0$ .

2) Pentru funcția identică  $f(x) = x$  definită pe  $R$ , avem  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0$ , oricare ar fi  $x_0$  (finit sau infinit). Scriem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$

Într-adevăr  $\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow x_0} x_n = x_0$ , oricare ar fi sirul  $x_n \rightarrow x_0$ .

În particular,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ .

3) Pentru funcția  $f(x) = x^k$ , ( $k$  natural) definită pe  $R$ , avem  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0^k$ , oricare ar fi  $x_0$  (finit sau infinit). Scriem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^k = x_0^k, \text{ (sau } x^k \rightarrow x_0^k \text{ cind } x \rightarrow x_0\text{).}$$

Într-adevăr,  $\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow x_0} x_n^k = x_0^k$ , oricare ar fi sirul  $x_n \rightarrow x_0$ .

În particular,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2k} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2k+1} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ .

4) Pentru funcția  $f(x) = \frac{1}{x^k}$ , ( $k \in N$ ) definită pe  $R - \{0\}$ , avem  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{1}{x_0^k}$  dacă  $x_0 \neq 0$  (finit sau infinit). Scriem :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{x_0^k}, \quad (x \neq x_0)$$

$$\left( \text{sau } \frac{1}{x^k} \rightarrow \frac{1}{x_0^k} \text{ dacă } x \rightarrow x_0 \neq 0 \right).$$

În particular,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ .

Avem de asemenea

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty.$$

Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n \neq 0$ , atunci  $x_n^{2k} \rightarrow 0$  și  $x_n^{2k} > 0$ , deci

$$\frac{1}{x_n^{2k}} \rightarrow +\infty, \text{ adică } \lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{1}{x_n^{2k}} = +\infty, \text{ de unde } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty.$$

Funcția  $f(x) = \frac{1}{2^{2k-1}}$ , ( $k \in N$ ) nu are limită în 0.

Intr-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow 0$  și  $x_n > 0$ , atunci  $x_n^{2k-1} \rightarrow 0$  și  $x_n^{2k-1} > 0$ , deci  $\frac{1}{x_n^{2k-1}} \rightarrow +\infty$ ; dacă  $x_n \rightarrow 0$ , și  $x_n < 0$ , atunci  $x_n^{2k-1} \rightarrow 0$ , și  $x_n^{2k-1} < 0$ , deci  $\frac{1}{x_n^{2k-1}} \rightarrow -\infty$ .

5) Pentru funcția  $f(x) = x^\alpha$ , ( $\alpha > 0$ ) definită pe  $[0, +\infty)$ , avem  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0^\alpha$ , ori care ar fi  $x_0$  (finit sau  $+\infty$ ).

Scriem :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \text{ (sau } x^\alpha \rightarrow x_0^\alpha \text{ dacă } x \rightarrow x_0\text{).}$$

În particular,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$  (sau  $x^\alpha \rightarrow +\infty$  cind  $x \rightarrow +\infty$ ).

6) Pentru funcția  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ , ( $\alpha > 0$ ), definită pe  $(0, +\infty)$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{x_0^\alpha} \text{ dacă } x_0 > 0 \quad \left( \text{sau } \frac{1}{x^\alpha} \rightarrow \frac{1}{x_0^\alpha} \text{ cind } x \rightarrow x_0 \right).$$

În particular,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$  (sau  $\frac{1}{x^\alpha} \rightarrow 0$  cind  $x \rightarrow +\infty$ )

De asemenea :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty \quad \left( \text{sau } \frac{1}{x^\alpha} \rightarrow +\infty \text{ cind } x \rightarrow 0 \right).$$

7) Pentru funcția  $f(x) = a^x$ , ( $a > 0$ ) definită pe  $R$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}, \quad x_0 \text{ finit.}$$

În particular,  $\lim_{x \rightarrow 1} a^x = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ .

Dacă  $a > 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ .

Dacă  $0 < a < 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ .

8) Pentru funcția  $f(x) = \ln x$  definită pe  $(0, +\infty)$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0, \quad x_0 \text{ finit.}$$

În particular,  $\lim_{x \rightarrow e} \ln x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$ .

De asemenea, avem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

**O b s e r v a t i e.** Pentru toate funcțiile din exemplele precedente avem  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  oricare ar fi punctul  $x_0$  din domeniul lor de definiție. Rezultă că aceste funcții sunt *continue* în orice punct din domeniul lor de definiție.

9) Pentru funcția  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  definită pe  $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$  avem

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$\text{Într-adevăr, } \lim_{x_n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e, \quad \lim_{x_n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

## § 2. Limite laterale

### 1. Limite relative la submulțimi

Fie funcția  $f: E \rightarrow R$ , și o submulțime  $A \subset E$ ; fie  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $A$ , deci și al lui  $E$ . Să considerăm restricția  $f_A$  a lui  $f$  la mulțimea  $A$ :

$$f_A(x) = f(x), \text{ pentru } x \in A.$$

**D e f i n i t i e.** Spunem că funcția  $f$  are limita  $l$  în  $x_0$ , relativ la submulțimea  $A$ , dacă restricția  $f_A$  are limita  $l$  în  $x_0$ ; se notează  $l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x)$ :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_A(x).$$

Rezultă că  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , dacă și numai dacă pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \neq x_0$ , format din puncte  $x_n \in A$ , avem  $f(x_n) \rightarrow l$ .

**P r o p o z i t i a 1.** Dacă funcția  $f$  are limita  $l$  în  $x_0$ , atunci are în  $x_0$  aceeași limită, relativ la submulțimea  $A$ .

Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \neq x_0$ ,  $x_n \in A$ , atunci  $x_n \in E$ , și deci  $f(x_n) \rightarrow l$ .

**O b s e r v a t i i.** 1° În cazul particular al sirurilor, se deduce că, dacă sirul  $(a_n)$  are limita  $l$ , orice subșir al său are aceeași limită.

2° Propoziția reciprocă nu este adevărată; funcția  $f$  poate avea în  $x_0$  limită relativ la submulțimea  $A$ , fără să aibă limită în  $x_0$  (relativ la  $E$ ).

*Exemplu.*  $E = [-1, 1]$ ,  $f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ ;  $A = [0, 1]$ ,  $f_A(x) = 1$ .

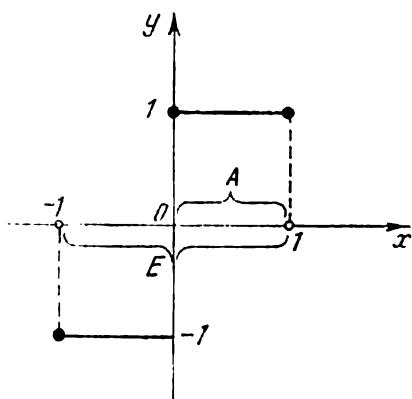


Fig. 55

Aveam  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in A}} f(x) = 1$ , dar  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in E}} f(x)$  nu există. În-

tr-adevăr, dacă alegem sirul  $(x_n)$  astfel:

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n}, \dots$$

atunci  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n \neq 0$ , dar sirul  $(f(x_n))$  este

$$-1, 1, -1, 1, \dots$$

și nu are limită.

3° Dacă submulțimea  $A$  este definită printr-o anumită proprietate  $P$ , în notația  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x)$

se poate înlocui, pentru simplificare, semnul  $x \in A$ , cu proprietatea  $P$ .

*Exemplu.* Dacă  $A = (a, b) = \{x|a < x < b\}$ , vom scrie:  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x)$ .

Dacă  $A = (x_0, +\infty) = \{x|x > x_0\}$ , vom scrie  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ .

Dacă  $A = (-\infty, x_0) = \{x|x < x_0\}$ , vom scrie:  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$  etc.

**Propoziția 2.** Dacă submulțimea  $A$  este intersecția lui  $E$  cu o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ ,  $A = V \cap E$ , atunci  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x)$  există dacă și numai dacă există și  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x)$ ; cele două limite sunt egale în acest caz.

Conform propoziției precedente dacă există  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x)$ , atunci există

și  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x)$  și sunt egale. Reciproc, să presupunem că există  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = l$

și să arătăm atunci că există și  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) = l$ .

Fie, într-adevăr,  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \neq x_0$ ,  $x_n \in E$ . Deoarece  $x_n \rightarrow x_0$  avem  $x_n \in V$ , deci  $x_n \in A = V \cap E$ , cu excepția unui număr finit de indici; deoarece  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = l$  există prin ipoteză, avem  $f(x_n) \rightarrow l$ , deci  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x_n) = l$ ,

de unde  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) = l$ .

**Observații.** 1° Din propoziția 2) rezultă că pentru a cerceta limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$  este suficient să luăm o vecinătate  $V$  oarecare a lui  $x_0$ , aleasă după voie, și să considerăm funcția  $f$  definită numai pe  $V \cap E$  (restricția lui  $f$  la  $V \cap E$ ); sau, cu alte cu-

vinte, este suficient ca în definiția limitei să considerăm siruri  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \neq x_0$ ), formate numai din puncte din  $V \cap E$ .

2° În cazul particular al sirurilor, vecinătățile lui  $+\infty$  sint de forma  $V = (a, +\infty)$ . A considera intersecția  $V \cap N = (a, +\infty) \cap N$  revine la a considera numai indicii  $n > a$ , deci la a înălțatura un număr finit de termeni ai sirului  $(a_n)$ .

Propoziția 2) are în acest caz următorul enunț: sirul  $(a_n)$  are limita  $l$ , dacă și numai dacă, prin înălțarea unui număr finit de termeni, sirul obținut are limita  $l$ .

## 2. Limita la stînga

Fie funcția  $f: E \rightarrow R$  și  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $E$ . Să presupunem că  $x_0$  este de asemenea punct de acumulare al mulțimii  $A = E \cap (-\infty, x_0]$ . Aceasta înseamnă că există siruri  $x_n \rightarrow x_0$  formate din puncte din  $E$  de la stînga lui  $x_0$ . A spune că  $x \in A$ , înseamnă că  $x \in E$  și  $x < x_0$ . În acest caz se poate considera limita lui  $f$  în  $x_0$ , relativ la submulțimea  $A$ . Ajungem astfel la următoarea:

**D e f i n i t i e.** Un număr  $l_s$  (finit sau infinit) se numește limita la stînga a funcției  $f$  în punctul  $x_0$ , dacă pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $l_s$  există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  astfel încât, oricare ar fi  $x < x_0$  din  $V \cap E$  să avem  $f(x) \in U$ .

Se folosesc următoarele notății:

$$l_s = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = f(x_0 - 0).$$

**O b s e r v a t i i .** 1° Pentru  $x_0 = +\infty$ , definiția limitei în punctul  $+\infty$  este echivalentă cu definiția limitei la stînga în punctul  $+\infty$ .

Mai general, dacă  $E = (a, b)$  definiția limitei în punctul  $b$  este echivalentă cu definiția limitei la stînga în punctul  $b$ , deoarece  $(a, b) \cap (-\infty, b) = (a, b)$ .

În punctul  $a$  (în particular în punctul  $-\infty$ ), definiția precedentă nu se poate aplica, deoarece  $(a, b) \cap (-\infty, a) = \emptyset$ . Spunem că în punctul  $a$  limita la stînga nu are sens.

2° Dacă în definițiile limitei cu  $\epsilon$  și  $\delta$  se înlocuiește condiția  $x \neq x_0$  cu  $x < x_0$ , se obțin definiții ale limitei la stînga echivalente cu cea de mai sus.

De asemenea, dacă în definiția lui Heine se înlocuiește condiția  $x_n \neq x_0$  cu  $x_n < x_0$ , se obține o definiție echivalentă a limitei la stînga:

**P r o p o z i t i a 1.** Un număr  $l_s$  este limita la stînga a funcției  $f$  în punctul  $x_0$ , dacă și numai dacă, pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in E$ ,  $x_n < x_0$ ), avem  $f(x_n) \rightarrow l_s$ .

**O b s e r v a t i e .** Pentru ca să existe limita la stînga  $f(x_0 - 0)$  este necesar și suficient ca pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ,  $x_n < x_0$ ) sirul  $(f(x_n))$  să aibă limită. Rezultă atunci că limita este aceeași oricare ar fi sirul  $(x_n)$  ales.

Definiția limitei la stînga se poate formula numai cu ajutorul sirurilor crescătoare  $(x_n)$ , după cum rezultă din

**Propoziția 2.**  $l_s = \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$  dacă și numai dacă, pentru orice sir crescător  $x_n \nearrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ,  $x_n < x_0$ ) avem  $f(x_n) \rightarrow l_s$ .

Dacă  $l_s = \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ , avem  $f(x_n) \rightarrow l_s$  pentru orice sir  $x_n \nearrow x_0$  ( $x_n \in E$ ,  $x_n < x_0$ ), în particular pentru orice sir crescător  $x_n \nearrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ,  $x_n < x_0$ ).

Reciproc, să presupunem că avem  $f(y_n) \rightarrow l_s$  pentru orice sir crescător  $y_n \nearrow x_0$  ( $y_n \in E$ ,  $y_n < x_0$ ).

Fie atunci un sir oarecare  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in E$ ,  $x_n < x_0$ ). Putem schimba ordinea termenilor în sirul  $(x_n)$ , astfel încât să obținem un sir crescător  $y_n \nearrow x_0$  și deci  $f(y_n) \rightarrow l_s$ ; putem schimba acum din nou ordinea termenilor în sirul  $(f(y_n))$  ca să obținem sirul  $(f(x_n))$  și deci  $f(x_n) \rightarrow l_s$ , adică  $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = l_s$ .

Sirul  $(x_n)$  fiind ales arbitrar, rezultă că  $l_s = \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ .

Definiția limitei la stînga se poate de asemenea formula numai cu ajutorul sirurilor strict crescătoare.

**Propoziția 3.**  $l_s = \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ , dacă și numai dacă pentru orice sir strict crescător  $x_n \nearrow x_0$  ( $x_n \in E$ ) avem  $f(x_n) \rightarrow l_s$ .

Evident, dacă  $l_s = \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ , avem  $f(x_n) \nearrow l_s$  pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in E$ ,  $x_n < x_0$ ),

în particular pentru orice sir strict crescător

$$x_n \nearrow x_0 \quad (x_n \in E).$$

Reciproc, să presupunem că pentru orice sir strict crescător  $y_n \nearrow x_0$  ( $y_n \in E$ ) avem  $f(y_n) \rightarrow l_s$ .

Fie atunci un sir crescător  $x_n \nearrow x_0$  ( $x_n \in E$ ,  $x_n < x_0$ ). Deoarece toți termenii sirului  $(x_n)$  sunt diferenți de limita sa  $x_0$ , rezultă că fiecare termen din acest sir se repetă cel mult de un număr finit de ori. Putem atunci extrage un subșir  $(x_{n_p})$  format numai din termenii distincți ai sirului  $(x_n)$ . Evident,  $x_{n_p} \nearrow x_0$  și subșirul  $(x_{n_p})$  este strict crescător, deoarece termenii săi sunt distincți. Atunci  $f(x_{n_p}) \rightarrow l_s$ . Aceasta înseamnă că orice vecinătate  $U$  al lui  $l_s$  conține toți termenii  $f(x_{n_p})$  cu excepția unui număr finit dintre ei. Cum fiecare termen  $f(x_n)$  este egal cu unul din termenii  $f(x_{n_p})$ , iar fiecare termen  $f(x_n)$  se repetă de un număr finit de ori, rezultă că în afara vecinătății  $U$  a lui  $l_s$  se află un număr finit de termeni  $f(x_n)$ , deci  $f(x_n) \rightarrow l_s$ . Cum sirul crescător  $x_n \nearrow x_0$  ( $x_n \in E$ ,  $x_n < x_0$ ) a fost ales arbitrar, deducem că  $l_s = \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ .

### 3. Limita la dreapta

Să presupunem acum că  $x_0$  este punct de acumulare al mulțimii  $A = E \cap (x_0, +\infty)$ . Aceasta înseamnă că există siruri  $x_n \rightarrow x_0$  formate din puncte din  $E$  de la dreapta lui  $x_0$ . A spune că  $x \in A$  înseamnă  $x \in E$

și  $x > x_0$ . În acest caz se poate considera limita lui  $f$  în  $x_0$ , relativ la submulțimea  $A$ . Ajungem astfel la următoarea

**D e f i n i t i e.** Un număr  $l_d$  (finit sau infinit) este limita la dreapta a funcției  $f$  în punctul  $x_0$ , dacă pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $l_d$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât, oricare ar fi  $x > x_0$  din  $V \cap E$ , să avem  $f(x) \in U$ .

Se folosesc următoarele notații:

$$l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{\substack{z \rightarrow x_0 \\ z > x_0}} f(z) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0 + 0).$$

**O b s e r v a t i i.** 1° Pentru  $x_0 = -\infty$ , definiția limitei în punctul  $-\infty$  este echivalentă cu definiția limitei la dreapta în punctul  $-\infty$ .

Mai general, dacă  $E = (a, b)$ , definiția limitei în punctul  $a$  este echivalentă cu definiția limitei la dreapta în punctul  $a$ , deoarece  $(a, b) \cap (a, +\infty) = (a, b)$ .

În punctul  $b$  (în particular în punctul  $+\infty$ ), limita la dreapta nu are sens, deoarece  $(a, b) \cap (b, +\infty) = \emptyset$ .

2° Dacă în definițiile limitei cu  $\epsilon$  și  $\delta$  se înlocuiește condiția  $x \neq x_0$  cu  $x > x_0$ , se obțin definiții ale limitei la dreapta echivalente cu cea de mai sus.

De asemenea, dacă în definiția lui Heine se înlocuiește condiția  $x_n \neq x_0$  cu  $x_n > x_0$ , se obține o definiție echivalentă a limitei la dreapta:

**P r o p o z i t i a 4.**  $l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$  dacă și numai dacă pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ,  $x_n > x_0$ ), avem  $f(x_n) \rightarrow l_d$ .

**O b s e r v a t i e.** Pentru ca să existe limita la dreapta  $f(x_0 + 0)$ , este necesar și suficient ca pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in E$ ,  $x_n > x_0$ ), sirul  $(f(x_n))$  să aibă limită. Rezultă atunci că limita este aceeași oricare ar fi sirul  $(x_n)$  ales.

Definiția limitei la dreapta se poate formula numai cu ajutorul sirurilor descrescătoare sau numai cu ajutorul sirurilor strict descrescătoare.

**P r o p o z i t i a 5.**  $l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$  dacă și numai dacă pentru orice sir strict descrescător  $x_n \searrow x_0$  ( $x_n \in E$ ), avem  $f(x_n) \rightarrow l_d$ .

#### 4. Calculul limitei cu ajutorul limitelor laterale

Să presupunem acum că  $x_0$  este punct de acumulare atât pentru mulțimea  $A = E \cap (-\infty, x_0)$  cât și pentru mulțimea  $B = E \cap (x_0, +\infty)$ . Aceasta înseamnă că există atât siruri  $x_n \rightarrow x_0$  cu  $x_n \in E$  și  $x_n < x_0$ , cât și siruri  $y_n \rightarrow x_0$  cu  $y_n \in E$  și  $y_n > x_0$ .

În acest caz au sens ambele limite laterale în  $x_0$ .

Legătura dintre limită și limitele laterale este dată de

**Propoziția 6.** Funcția  $f$  are limită în  $x_0$ , dacă și numai dacă are în  $x_0$  limite laterale egale. În acest caz

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Într-adevăr, dacă există  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = l$ , aceasta înseamnă că  $f$  are în  $x_0$  limite relative la  $A$  și la  $B$  egale cu  $l$ :

$$l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = f(x_0 - 0) \text{ și } l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in B}} f(x) = f(x_0 + 0),$$

deci limitele laterale există și sunt egale amândouă cu  $l$ .

Reciproc, să presupunem că limitele laterale în punctul  $x_0$  există și sunt egale:  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = l$ .

Fie atunci  $U$  o vecinătate oarecare a lui  $l$ . Deoarece  $f(x_0 - 0) = l$ , există o vecinătate  $V_1$  a lui  $x_0$  astfel încât dacă  $x \in V_1 \cap E$  și  $x < x_0$  să avem  $f(x) \in U$ . Deoarece  $f(x_0 + 0) = l$ , există o vecinătate  $V_2$  a lui  $x_0$ , astfel încât dacă  $x \in V_2 \cap E$  și  $x > x_0$ , să avem  $f(x) \in U$ .

Să notăm  $V = V_1 \cap V_2$ . Avem  $V \cap E \subset V_1 \cap E$  și  $V \cap E \subset V_2 \cap E$  și  $V$  este o vecinătate a lui  $x_0$ . Fie  $x \neq x_0$  un punct oarecare din  $V \cap E$ . Atunci  $x \in V_1 \cap E$  și  $x \in V_2 \cap E$ . Dacă  $x < x_0$ , atunci  $f(x) \in U$  (deoarece  $x \in V_1 \cap E$ ), iar dacă  $x > x_0$ , atunci, de asemenea,  $f(x) \in U$  (deoarece  $x \in V_2 \cap E$ ). Așadar, oricare ar fi  $x \neq x_0$  din  $V \cap E$ , avem  $f(x) \in U$ , și deci  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in E}} f(x) = l$ .

**Corolar.**  $l = \lim f(x)$  dacă și numai dacă pentru orice sir strict monoton  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in E$ ) avem  $f(x_n) \rightarrow l$ .

**Observație.** Uneori este mai ușor de calculat limitele laterale în  $x_0$  și din compararea lor să deducem dacă funcția are limită în  $x_0$ .

**Propoziția 7.** O funcție monotonă pe mulțimea  $E$  are limite laterale în orice punct de acumulare al mulțimii  $E$ .

Pentru a face o alegere, să presupunem că funcția  $f$  este crescătoare pe  $E$ . Fie  $x_0$  un punct de acumulare de puncte ale lui  $E$  de la stînga lui  $x_0$ , și să arătăm că  $f(x_0 - 0)$  există. Pentru aceasta este suficient să folosim numai siruri crescătoare  $x_n \nearrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ),  $x_n < x_0$ .

Deoarece  $f$  este crescătoare, sirurile  $(f(x_n))$  sunt de asemenea crescătoare, deci au limită (finită sau  $+\infty$ ).

Rezultă că limita sirurilor  $(f(x_n))$  este aceeași și deci funcția  $f$  are limită la stînga în  $x_0$ .

Dacă  $x_0$  este punct de acumulare de puncte din  $E$  de la dreapta lui  $x_0$ , se folosesc siruri strict descrescătoare  $x_n \searrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ) și se deduce că mai sus că  $f(x_0 + 0)$  există.

În cazul cînd  $f$  este descrescătoare, demonstrația se face în mod asemănător.

**O b s e r v a t i e .** 1° Există funcții care nu au nici limită la dreapta, nici limită la stînga în unele puncte.

**E x e m p l e .** 1) Funcția  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  definită pe  $R - \{0\}$  nu are limite laterale în punctul 0.

Fie  $x_n = \frac{2}{n\pi}$ ; avem  $x_n \rightarrow 0$  și  $x_n > 0$ .

Dar  $f(x_n) = \sin n \frac{\pi}{2}$ , deci sirul  $(f(x_n))$  este

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots$$

și nu are limită. Așadar  $f(x)$  nu are limită la dreapta în punctul 0.

Luind sirul  $x_n = -\frac{2}{n\pi}$ , avem  $x_n \rightarrow 0$  și  $x_n < 0$ .

Sirul  $(f(x_n))$  este:

$$-1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \dots$$

și nu are limită, deci  $f$  nu are limită la stînga în punctul 0.

2) Funcția lui Dirichlet definită pe  $R$  prin

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ 0 & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$$

nu are limite laterale în nici un punct.

Fie  $x_0 \in R$  oarecare. Există siruri  $(x_n)$  de numere raționale și siruri  $(y_n)$  de numere iraționale, astfel ca  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $y_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n > x_0$ ,  $y_n > x_0$ . Atunci

$$f(x_n) = 1, \text{ deci } f(x_n) \rightarrow 1, \text{ și } f(y_n) = 0, \text{ deci } f(y_n) \rightarrow 0.$$

Rezultă că  $f$  nu are limită la dreapta în  $x_0$ .

Luind sirurile  $(x_n)$  și  $(y_n)$  astfel ca  $x_n < x_0$ ,  $y_n < x_0$ , se deduce că  $f$  nu are nici limită la stînga în  $x_0$ .

2° Pentru o funcție  $f: E \rightarrow R$ , despre care se știe că are limită într-un punct  $x_0$  de acumulare al lui  $E$ , limita sa  $l$  se poate calcula folosind un singur sir  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ):

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

De asemenea, dacă  $f$  are limită la stînga  $l_s$  în  $x_0$ , luind un singur sir  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in E$ ,  $x_n < x_0$ ) obținem  $f(x_n) \rightarrow l_s$ ; iar dacă  $f$  are limită la dreapta  $l_d$  în  $x_0$ , luind un singur sir  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ,  $x_n > x_0$ ) obținem  $f(x_n) \rightarrow l_d$ .

În particular, acest procedeu se poate aplica pentru funcțiile monotone, despre care știm că au limite laterale în fiecare punct de acumulare al domeniului de definiție.

*Exemplu.* 1) Funcția  $f(x) = a^x$  este monotonă pe  $\mathbb{R}$ ; ea are deci limite în punctele  $-\infty$  și  $+\infty$ . Atunci :

Dacă  $a > 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{n \rightarrow -\infty} a^{-n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^n} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Dacă  $0 < a < 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{n \rightarrow -\infty} a^n = +\infty.$$

2) Funcția  $f(x) = \ln x$  este monotonă pe  $(0, +\infty)$ ; ea are deci limite în punctele  $0$  și  $+\infty$ . Atunci :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{n} = -\infty.$$

3) Funcția  $f(x) = x^\alpha$ , ( $\alpha > 0$ ), definită pe  $[0, +\infty)$ , este monotonă, deci are limită în  $+\infty$ . Atunci :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty.$$

4) Funcția  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ , ( $\alpha > 0$ ), definită pe  $(0, +\infty)$ , este monotonă, deci are limite în  $0$  și  $+\infty$ . Atunci :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

5) Fie funcția  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  definită pe  $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$ .

Aveam :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Intr-adevăr, fie  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n > 0$ . Punind  $y_n = \frac{1}{x_n}$ , avem  $y_n \rightarrow +\infty$ .

Atunci :

$$f(x_n) = (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \rightarrow e,$$

sau :

$$\lim_{\substack{x_n \rightarrow 0 \\ x_n > 0}} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e, \text{ de unde } \lim_{x \downarrow x_0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Fie acum  $x_n \rightarrow 0$ ,  $x_n < 0$ . Punind  $y_n = \frac{1}{x_n}$ , avem  $y_n \rightarrow -\infty$

$$f(x_n) = (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \rightarrow e$$

sau :

$$\lim_{\substack{x_n \rightarrow 0 \\ x_n < 0}} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e, \text{ de unde } \lim_{x \nearrow x_0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Funcția  $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ , avind limitele laterale în 0 egale cu  $e$ , rezultă că are limită în 0 egală cu  $e$ .

6) Pentru funcția  $f(x) = \frac{1}{x^{2k}}$ ,  $k \in N$ , definită pe  $R - \{0\}$ ,

avem :

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x^{2k}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^{2k}} = +\infty.$$

7) Pentru funcția  $f(x) = \frac{1}{x^{2k-1}}$ ,  $k \in N$ , definită pe  $R - \{0\}$ , avem :

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x^{2k-1}} = -\infty, \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x^{2k-1}} = +\infty.$$

### § 3. Proprietățile limitelor de funcții

#### 1. Proprietăți ale limitelor

În cele ce urmează vor fi studiate proprietățile limitelor. Proprietățile limitelor laterale sunt aceleași, deoarece limitele laterale sunt limite ale unor restricții de funcții.

Deoarece limita unei funcții într-un punct se poate defini cu ajutorul limitelor de siruri, o serie de proprietăți ale limitelor de siruri se transmit limitelor de funcții.

Fie funcția  $f: E \rightarrow R$  și  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $E$ .

**Propozitie 1.** Dacă limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$  există, această limită este unică.

În adevăr, dacă funcția are limita  $l$  în punctul  $x_0$ , avem  $f(x_n) \rightarrow l$ , oricare ar fi sirul  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ), iar sirurile  $(f(x_n))$  au toate limita unică  $l$ .

**Propozitie 2.** Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)|.$$

În adevăr, dacă  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ), atunci  $f(x_n) \rightarrow l$ , deci  $|f(x_n)| \rightarrow |l|$ , adică  $\lim_{x_n \rightarrow x_0} |f(x_n)| = |l|$ , de unde  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$ .

*Exemplu.*  $\lim_{x \rightarrow x_0} |x| = |x_0|$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$ ;

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty, \quad \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty, \quad \text{deci } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$

**O b s e r v a t i e .** 1° Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , deoarece dacă  $|f(x_n)| \rightarrow 0$  atunci  $f(x_n) \rightarrow 0$ .

2° Dacă însă  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = l > 0$  să ar putea ca  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  să nu existe.

*Exemplu.*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2}} = +\infty$ ,

dar:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ nu există, deoarece } \lim_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \text{ și } \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Dacă însă există și  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , atunci avem sau  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , sau  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -l$ , deoarece în acest

caz  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\pm l| = |\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)|$ .

**P r o p o z i t i a 3.** Dacă  $l$  este finit, avem  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  dacă și numai dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - l] = 0$ .

În adevăr, oricare ar fi sirul  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ) avem  $f(x_n) \rightarrow l$  dacă și numai dacă  $f(x_n) - l \rightarrow 0$ , adică  $\lim f(x_n) = l$  dacă și numai dacă  $\lim_{x_n \rightarrow x_0} [f(x_n) - l] = 0$ , de unde  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  dacă și numai dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - l] = 0$ .

*Exemplu.* Deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$  ( $x_0$  finit), avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [x - x_0] = 0 \quad (\text{sau } x - x_0 \rightarrow 0 \text{ cind } x \rightarrow x_0).$$

Rezultă atunci că  $\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0$  (sau  $|x - x_0| \rightarrow 0$  cind  $x \rightarrow x_0$ ).

**P r o p o z i t i a 4.** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  definite pe  $E$  coincid pe o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  (cu excepția lui  $x_0$ ) și dacă una dintre ele are limită în  $x_0$ , atunci și cealaltă funcție are limită în  $x_0$ , și limitele sunt egale.

Dacă există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , atunci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in V \cap E}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Deoarece, conform ipotezei, avem  $f(x) = g(x)$  pentru  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ , rezultă că funcția  $g$  are limită în  $x_0$  relativ la  $V \cap E$  și

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in V \cap E}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in V \cap E}} f(x) = l.$$

Deoarece  $V$  este o vecinătate a lui  $x_0$ , rezultă că funcția  $g$  are limită în  $x_0$  (relativ la  $E$ ) și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in V \cap E}} g(x) = l.$$

**Propozitia 5.** Dacă funcțiile  $g$ ,  $f$  și  $h$  definite pe  $E$  au limită în  $x_0$ , și dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât să avem  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  pentru orice  $x \in V \cap E$ , ( $x \neq x_0$ ), atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} h(x).$$

Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ), putem presupune că  $x_n \in V$  pentru orice  $n$ , îndepărând, la nevoie, numărul finit de termeni din afară lui  $V$ . Atunci

$$g(x_n) \leq f(x_n) \leq h(x_n) \text{ și deci } \lim_{x_n \rightarrow x_0} g(x_n) \leq \lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) \leq \lim_{x_n \rightarrow x_0} h(x_n),$$

de unde :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} h(x).$$

**Corolarul 1.** Dacă  $f$  are limită în  $x_0$  și dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  astfel încât, pentru două numere  $\alpha$  și  $\beta$  să avem  $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ , oricare ar fi  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ , atunci

$$\alpha \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \beta.$$

**Corolarul 2.** Dacă  $f$  are limită în  $x_0$  și dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât să avem  $f(x) \geq 0$  pentru orice  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$ .

**Observație.** Dacă  $f(x) > 0$ , ( $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ ) nu rezultă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , ci numai  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$  (eventual  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ).

**Exemplu.**  $|x| > 0$ , pentru  $x \neq 0$ , dar  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ .

**Corolarul 3.** Dacă  $f$  are limită în  $x_0$  și dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât să avem  $f(x) \leq 0$  pentru orice  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$ .

**Observație.** Putem avea  $f(x) < 0$  pentru orice  $x \in E$ ,  $x \neq x_0$ , și totuși  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

**Propoziția 6.** Dacă funcțiile  $g$  și  $h$  definite pe  $E$  au limite egale în  $x_0$ , și dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât să avem  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  pentru orice  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ , atunci funcția  $f$  are limită în  $x_0$ , egală cu limita comună a celor două funcții  $g$  și  $h$ .

Într-adevăr, fie  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ . Dacă  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in V \cap E$ ,  $x_n \neq x_0$ ), atunci  $\lim_{x_n \rightarrow x_0} g(x_n) \leq \lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) \leq \lim_{x_n \rightarrow x_0} h(x_n)$  și deoarece  $\lim_{x_n \rightarrow x_0} g(x_n) = l$  și  $\lim_{x_n \rightarrow x_0} h(x_n) = l$ , rezultă

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_n) = l, \text{ de unde } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

## 2. Proprietăți ale funcțiilor deduse din proprietățile limitelor

În propozițiile următoare se arată că, dacă limita unei funcții într-un punct are o anumită proprietate, atunci funcția are această proprietate pe o întreagă vecinătate a punctului.

**Propoziția 7.** Dacă funcția  $f: E \rightarrow R$  are limită în  $x_0$  și dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \alpha$ , atunci există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  astfel încât să avem  $f(x) > \alpha$  pentru orice  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ .

Fie  $U$  o vecinătate a numărului  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , cu extremitatea stângă în  $\alpha$ , deci de forma  $U = (\alpha, \beta)$  sau  $U = (\alpha, +\infty)$ , după cum limita este finită sau  $+\infty$ . Există atunci o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât, pentru orice  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ , să avem  $f(x) \in U$ , adică  $f(x) > \alpha$ .

**Corolarul 1.** Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel ca  $f(x) > 0$  pentru orice  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ .

**Corolarul 2.** Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel ca  $f(x) = 0$  pentru orice  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ .

Într-adevăr,  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)| > 0$ , deci există  $V$ , astfel încât pentru orice  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ , să avem  $|f(x)| > 0$ , adică  $f(x) \neq 0$ .

**Propoziția 8.** Dacă funcția  $f: E \rightarrow R$  are limită în  $x_0$ , și dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \beta$ , atunci există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât să avem  $f(x) < \beta$  pentru orice  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ .

Demonstrația se face la fel ca pentru propoziția 7, luând vecinătățile  $V$  ale lui  $f(x_0)$  de forma  $(\alpha, \beta)$  sau  $(-\infty, \beta)$  după cum limita este finită sau  $-\infty$ .

**Corolar.** Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , atunci există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât să avem  $f(x) < 0$ , oricare ar fi  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ .

**Propozitie 9.** Dacă  $f$  are limită finită în  $x_0$  și dacă  $\alpha < \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \beta$ , atunci există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât  $\alpha < f(x) < \beta$  pentru orice  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ .

Într-adevăr,  $U = (\alpha, \beta)$  este o vecinătate a numărului  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . Există atunci o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  astfel ca, dacă  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ , să avem  $f(x) \in U$ , adică  $\alpha < f(x) < \beta$ .

**Corolar.** Dacă  $f$  are limită finită în  $x_0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , pe care funcția este mărginită.

**Observatie.** Dacă  $f$  este mărginită pe o vecinătate a lui  $x_0$ , nu rezultă că  $f$  are limită în  $x_0$ , chiar dacă  $f$  este monotonă. Dacă  $f$  este nmonotonă, are limite laterale în  $x_0$ , dar, eventual, diferite.

**Propozitie 10.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt definite pe  $E$  și au limite în punctul  $x_0$ , și dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , atunci există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât  $f(x) < g(x)$  pentru orice  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ .

Alegem un număr  $\alpha$  astfel ca  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \alpha < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . Există o vecinătate  $V_1$  a lui  $x_0$ , astfel ca  $f(x) < \alpha$  pentru  $x \in V_1 \cap E$ ,  $x \neq x_0$ , și o vecinătate  $V_2$  a lui  $x_0$ , astfel ca  $\alpha < g(x)$  pentru  $x \in V_2 \cap E$ ,  $x \neq x_0$ . Multimea  $V = V_1 \cap V_2$  este o vecinătate a lui  $x_0$ , și dacă  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ , atunci  $x \in V_1 \cap E$  și  $x \in V_2 \cap E$  deci  $f(x) < \alpha < g(x)$ , de unde  $f(x) < g(x)$ .

### 3. Criterii de existență a limitelor de funcții

Pentru siruri, criteriul lui Cauchy ne asigură de convergență unui sir fără a-i cunoaște limită.

Pentru funcții, avem un criteriu (necesar și suficient) de existență a *limitei finite*, fără a cunoaște această limită.

Fie funcția  $f: E \rightarrow R$  și  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $E$ .

**Criteriul lui Cauchy - Bolzano.** Funcția  $f$  are limită finită în punctul  $x_0$  dacă și numai dacă, pentru orice număr  $\epsilon > 0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel, încât oricare ar fi punctele  $x' \neq x_0$  și  $x'' \neq x_0$  din  $V \cap E$  să avem  $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ .

Să presupunem că există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  și că  $l$  este *finit*.

Aceasta înseamnă că pentru orice număr  $\varepsilon > 0$  (adică pentru orice vecinătate  $U = \left(l - \frac{\varepsilon}{2}, l + \frac{\varepsilon}{2}\right)$  a lui  $l$ ) există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât, oricare ar fi  $x \neq x_0$  din  $V \cap E$ , să avem  $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$  (adică  $f(x) \in U$ ); atunci pentru orice  $x' \neq x_0$  și  $x'' \neq x_0$  din  $V \cap E$  avem:

$$|f(x') - l| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ și } |f(x'') - l| < \frac{\varepsilon}{2},$$

deci :

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - l| + |f(x'') - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Reciproc, să presupunem că este verificată condiția din enunț și să arătăm că  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  există și este finită.

Fie un sir oarecare  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ) și un număr oarecare  $\varepsilon > 0$ . Conform ipotezei, există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  astfel încât, dacă  $x' \neq x_0$ ,  $x'' \neq x_0$ ,  $x', x'' \in V \cap E$  atunci  $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Vecinătatea  $V$  a lui  $x_0$  depinde de  $\varepsilon$ .

Deoarece  $x_n \rightarrow x_0$ , există un număr natural  $N$  (care depinde de  $V$ , deci de  $\varepsilon$ ), astfel încât oricare ar fi  $p \geq N$  să avem  $x_p \in V \cap E$ . Așadar, oricare ar fi  $n \geq N$ , și  $m \geq N$ , avem  $x_n, x_m \in V \cap E$ , de unde

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că  $(f(x_n))$  este un sir fundamental, și deci este convergent, conform criteriului lui Cauchy.

Am arătat astfel că oricare ar fi sirul  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ), sirul  $(f(x_n))$  are limită finită.

Rezultă că această limită finită este independentă de sirul  $(x_n)$  ales, deci limita comună a sirurilor  $(f(x_n))$  este limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$ .

Așadar,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  există și este finită.

Criteriile care urmează dau condiții suficiente de existență a limitei.

**Propozitia 1.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt definite pe  $E$ , dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  și dacă există un număr finit  $l$ , și o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât să avem  $|f(x) - l| \leq g(x)$ , pentru orice  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ , atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Fie  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ . Putem presupune  $x_n \in V$ , pentru orice  $n$ . Atunci  $|f(x_n) - l| \leq g(x_n)$  și deoarece  $g(x_n) \rightarrow 0$ , pe baza criteriului de la siruri, deducem  $f(x_n) \rightarrow l$ , adică  $\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = l$ , de unde  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ .

**Observație.** Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ . În adevăr, notind  $g(x) = |f(x)|$ , avem  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  și  $|f(x) - 0| \leq g(x)$ , deci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

*Exemple.* 1) Pentru funcția  $f(x) = \sin x$ , definită pe  $R$ , avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \quad (x_0 \text{ finit})$$

(sau  $\sin x \rightarrow \sin x_0$  cînd  $x \rightarrow x_0$ ).

Într-adevăr:

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= 2 \left| \cos \frac{x+x_0}{2} \right| \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \cdot \frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|. \end{aligned}$$

deoarece  $|\cos \alpha| \leq 1$  și  $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$  oricare ar fi  $\alpha$  (fie că  $\alpha$  este măsurat în radiani, fie că este măsurat în grade). Deoarece  $|x-x_0| \rightarrow 0$  cînd  $x \rightarrow x_0$ , deducem că  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ .

2) Pentru funcția  $f(x) = \cos x$  definită pe  $R$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0 \quad (x_0 \text{ finit})$$

(sau  $\cos x \rightarrow \cos x_0$  cînd  $x \rightarrow x_0$ ).

În adevăr

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos x_0| &= 2 \left| \sin \frac{x+x_0}{2} \right| \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \cdot \frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|. \end{aligned}$$

deoarece  $|\sin \alpha| \leq 1$ , oricare ar fi  $\alpha$ . Deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} |x-x_0| = 0$ , deducem  $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$ .

**Observații.** 1° Pentru funcțiile  $f(x) = \sin x$  și  $f(x) = \cos x$  avem  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , pentru orice  $x_0 \in R$ , deci funcțiile sin și cos sunt continue în orice punct din domeniul lor de definiție.

2° În punctele  $+\infty$  și  $-\infty$ , funcțiile sin și cos nu au limită.

Fie  $x_n = n \frac{\pi}{2} \rightarrow +\infty$ . Sirul  $(\sin x_n)$  este:

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots, 1, 0, -1, 0, \dots$$

deci nu are limită. Așadar, funcția sin nu are limită în punctul  $+\infty$ . Se arată la fel că nici funcția cos nu are limită în punctul  $+\infty$ .

Lăsând  $x_n = -n \frac{\pi}{2} \rightarrow -\infty$ , deducem că funcțiile  $\sin x$  și  $\cos x$  nu au limită în punctul  $-\infty$ .

3) Pentru funcția  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  definită pe  $R - \{0\}$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

În adevăr, pentru  $x \in V = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  avem

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|$$

dacă  $x$  este măsurat în *radiani*. Pentru  $x \neq 0$ , avem atunci

$$\frac{1}{|\operatorname{tg} x|} < \frac{1}{|x|} < \frac{1}{|\sin x|}$$

sau:

$$\frac{|\cos x|}{|\sin x|} < \frac{1}{|x|} < \frac{1}{|\sin x|}.$$

de unde

$$|\cos x| < \left| \frac{\sin x}{x} \right| < 1.$$

Dar  $\lim_{x \rightarrow 0} |\cos x| = |\cos 0| = 1$  și  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ . Rezultă că funcția  $\left| \frac{\sin x}{x} \right|$  are limită în 0, și această limită este egală cu 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 1.$$

Dar pentru  $x \in V$ ,  $x \neq 0$ ,  $\sin x$  și  $x$  au același semn, deci  $\frac{\sin x}{x} > 0$ , de unde

$$\frac{\sin x}{x} = \left| \frac{\sin x}{x} \right| \text{ și deci } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

4) Pentru funcția  $f(x) = \frac{\ln x}{x^\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , definită pe  $(0, +\infty)$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

$$\left( \text{sau } \frac{\ln x}{x^\alpha} \rightarrow 0 \text{ cînd } x \rightarrow +\infty \right).$$

Aveam:

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\ln \left( x^{\frac{2}{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{2}}}{x^\alpha} = \frac{2}{\alpha} \frac{\ln x^{\frac{\alpha}{2}}}{x^\alpha} < \frac{2}{\alpha} \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{x^\alpha} = \frac{2}{\alpha} \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

deoarece  $\ln z < z$ , oricare ar fi  $z > 0$ . Dar  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\alpha} \frac{1}{\frac{x}{x^2}} = 0$

și deci  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ .

Se spune că funcția logaritmică  $\ln x$  crește mai încet decât orice putere cu exponentul strict pozitiv.

**Propoziția 2.** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sunt definite pe  $E$ , dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$  și dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât să avem  $f(x) \geq g(x)$  pentru orice  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ .

Intr-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in V \cap E$ ,  $x_n \neq x_0$ ), avem  $f(x_n) \geq g(x_n)$  și, deoarece  $g(x_n) \rightarrow +\infty$ , avem  $f(x_n) \rightarrow +\infty$ , adică  $\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = +\infty$ , de unde  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ .

*Exemplu.* Pentru funcția  $f(x) = \frac{e^x}{x^\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , definită pe  $(0, +\infty)$ ,

avem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\left( \text{sau } \frac{e^x}{x^\alpha} \rightarrow +\infty, \text{ cind } x \rightarrow +\infty \right).$$

avem:

$$\frac{e^x}{x^\alpha} = \frac{\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}}\right)^{2x}}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{2x}} = \left(\frac{\frac{e^{2x}}{e^{2x}}}{\frac{1}{x^2}}\right)^{2x} > \left(\frac{\frac{x}{2x}}{\frac{1}{x^2}}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{2x} x^\alpha$$

deoarece  $e^x > z$ , oricare ar fi  $z$ . Dar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{2x} x^\alpha = +\infty$  și deci  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ . Se spune că funcția exponențială  $e^x$  crește mai repede decât orice putere cu exponentul strict pozitiv.

**Propoziția 3.** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sunt definite pe  $E$ , dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$  și dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât să avem  $f(x) \leq g(x)$ , pentru orice  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ .

Intr-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in V \cap E$ ,  $x_n \neq x_0$ ), avem  $f(x_n) \leq g(x_n)$  și, deoarece  $g(x_n) \rightarrow -\infty$ , avem  $f(x_n) \rightarrow -\infty$ , adică  $\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = -\infty$ , de unde  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ .

#### 4. Operații cu funcțiile care au limită

Fie funcțiile  $f: E \rightarrow R$  și  $g: E \rightarrow R$ , și  $x_0$  un punct de acumulare al mulțimii  $E$ .

**T e o r e m ă.** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  au limite în punctul  $x_0$  (finite sau infinite), atunci :

1) Dacă suma limitelor are sens, funcția  $f + g$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

(cazul exceptat :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ ).

2) Dacă produsul limitelor are sens, funcția  $fg$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

(cazul exceptat  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$ ).

3) Funcția  $\alpha f$  are limită în  $x_0$ , oricare ar fi  $\alpha \in R$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha f(x) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \text{ dacă } \alpha \neq 0$$

și  $\lim_{x \rightarrow x_0} 0 \cdot f(x) = 0$ .

4) Dacă raportul limitelor are sens, funcția  $\frac{f}{g}$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

(cazuri exceptate : 1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$ ).

5) Dacă  $f \geqslant 0$  și dacă puterea  $[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$  are sens, atunci funcția  $f^g$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

Fie  $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  și  $b = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ . Fie  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ).

Din ipoteză rezultă că  $f(x_n) \rightarrow a$  și  $g(x_n) \rightarrow b$ .

Dacă  $a + b$  are sens, atunci  $f(x_n) + g(x_n) \rightarrow a + b$ , adică

$$\begin{aligned}\lim_{x_n \rightarrow x_0} [f(x_n) + g(x_n)] &= a + b, \text{ de unde } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = a + b = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).\end{aligned}$$

Celelalte puncte ale teoremei se demonstrează la fel.

O b s e r v a ᄀ i i . 1° Dacă raportul limitelor are sens, înseamnă că  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ , deci  $g(x) \neq 0$  pe o întreagă vecinătate  $V \cap E$  a lui  $x_0$ , deci raportul funcțiilor  $\frac{f}{g}$  este definit cel puțin pe  $V \cap E$ , iar  $x_0$  este punct de acumulare al acestei mulțimi, deci are sens  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

De asemenea, dacă  $[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]$  are sens, atunci sau  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  este oarecare (finită sau infinită), sau  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) > 0$  (finiță sau  $+\infty$ ).

În primul caz, avem  $f(x) > 0$  pe o vecinătate  $V \cap E$  a lui  $x_0$ , deci funcția  $f(x) \frac{g(x)}{g(x)}$  este definită cel puțin pe  $V \cap E$ , și deci limita sa în punctul  $x_0$  are sens.

În al doilea caz, avem  $g(x) > 0$ , pe o vecinătate  $V \cap E$  a lui  $x_0$ , deci funcția  $f(x) \frac{g(x)}{g(x)}$  este de asemenea definită pe  $V \cap E$  și deci limita sa în  $x_0$  are sens.

2° În cazul cînd  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , se pot face următoarele precizări:

a) Dacă  $g(x) > 0$ , pentru  $x \neq x_0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = +\infty$ .

b) Dacă  $g(x) < 0$ , pentru  $x \neq x_0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = -\infty$ .

Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ), atunci  $g(x_n) \rightarrow 0$ ; dacă  $g(x_n) > 0$ , atunci  $\frac{1}{g(x_n)} \rightarrow +\infty$ . iar dacă  $g(x_n) < 0$ , atunci  $\frac{1}{g(x_n)} \rightarrow -\infty$ .

c) Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  și  $g(x) \neq 0$  pentru  $x \neq x_0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{|g(x)|} = +\infty$ .

Într-adevăr,  $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = 0$ , și  $|g(x)| > 0$ , pentru  $x \neq x_0$ .

Reciproc, dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$ .

Într-adevăr,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{|g(x)|} = 0$ , deci  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$ .

3° Mulțimea  $\mathcal{F}(E, x_0)$  a funcțiilor definite pe  $E$ , care au limită finită în  $x_0$ , este o algebră, deoarece suma, produsul și produsul cu scalari, efectuate asupra funcțiilor din această mulțime, ne conduc la funcții care fac parte din aceeași mulțime.

Dacă notăm  $L(f) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  pentru  $f \in \mathcal{F}(E, x_0)$ , avem

$$L(f+g) = L(f) + L(g) \quad (\text{aditivitatea}),$$

$$L(\alpha f) = \alpha L(f) \quad (\text{omogenitatea}),$$

$$L(fg) = L(f)L(g) \quad (\text{multiplicativitatea}).$$

Aplicația  $L : \mathcal{F}(E, x_0) \rightarrow R$  este o funcție liniară (aditivă și omogenă) și multiplicativă pe algebra  $\mathcal{F}(E, x_0)$ .

Din teorema de mai sus rezultă de asemenea că:

6) Funcția  $-f$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

7) Dacă diferența limitelor are sens, funcția  $f-g$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

(cazul exceptat:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$ ).

Pentru demonstrarea proprietății 6) se aplică proprietatea 3) cu  $\alpha = -1$ . Pentru a demonstra 7) se aplică apoi 1) și 6).

Se demonstrează prin recurență că proprietățile 1) și 3) rămân valabile pentru mai multe funcții  $f_1, f_2, \dots, f_n$  care au limite în  $x_0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) + \dots + \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x); \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x)f_2(x) \dots f_n(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \dots \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x),$$

dacă suma sau produsul limitelor din membrul drept sunt definite (au sens).

În particular, din ultima egalitate se obține:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^n \quad (n \in N).$$

**C o r o l a r .** Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  și dacă  $g$  este mărginită pe o vecinătate a lui  $x_0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$

Fie  $V$  o vecinătate a lui  $x_0$  pe care  $g$  este mărginită, și fie  $M > 0$  astfel ca

$$|g(x)| \leq M \text{ pentru } x \in V.$$

atunci

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq M|f(x)|$$

și  $\lim_{x \rightarrow x_0} M|f(x)| = M \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ , de unde

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0.$$

## 5. Exemple

1) Pentru orice polinom  $P(x)$  definit pe  $R$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0) \quad (x_0 \text{ finit}).$$

(Orice polinom este o funcție continuă în punctele domeniului său de definiție.)

Într-adevăr, fie  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ . Toți termenii sumei au limite finite în  $x_0$ , deci suma limitelor are sens și deci  $P(x)$  are limită în  $x_0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_1 x) + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 = \\ &= a_n x_0 + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0). \end{aligned}$$

2) Pentru orice polinom  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , definit pe  $R$ ,  $a_n \neq 0$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = a_n (+\infty)^n, \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = a_n (-\infty)^n.$$

Aveam, pentru  $x \neq 0$ ,

$$P(x) = x^n \left( a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} \right).$$

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ , ( $k \in N$ ), suma din paranteză are limită  $a_n \neq 0$

iar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = (+\infty)^n$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = (-\infty)^n$ . Rezultă că  $P(x)$  are limită în punctele  $+\infty$  și  $-\infty$

și

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_0 \frac{1}{x^n} \right) = (+\infty)^n \cdot a_n;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_0 \frac{1}{x^n} \right) = (-\infty)^n \cdot a_n.$$

Așadar, în punctele  $+\infty$  și  $-\infty$ , limita unui polinom este egală cu limita termenului cu gradul cel mai mare.

3) Orice funcție rațională  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  are limită într-un punct  $x_0$  în care nu se anulează numitorul,  $Q(x_0) \neq 0$ , și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

(O funcție rațională este continuă în orice punct din domeniul său de definiție.)

Într-adevăr, deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) = Q(x_0) \neq 0$ , rezultă:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

4) Fie  $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $b_m \neq 0$ .

a) Dacă  $n < m$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ .

b) Dacă  $n = m$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m}$ .

c) Dacă  $n > m$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m} (+\infty)^{n-m}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m} (-\infty)^{n-m}$ .

Într-adevăr, pentru  $x \neq 0$ , avem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n \left( a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_0 \frac{1}{x^n} \right)}{x^m \left( b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \dots + b_0 \frac{1}{x^m} \right)} = \frac{x^n}{x^m} \cdot R(x),$$

unde

$$R(x) = \frac{a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_0 \frac{1}{x^n}}{b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \dots + b_0 \frac{1}{x^m}}.$$

Avem:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} R(x) = \frac{a_n}{b_m} \neq 0$ .

Dacă  $n < m$ , avem  $\frac{x^n}{x^m} = \frac{1}{x^{m-n}}$

și deci

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^n}{x^m} = 0,$$

decic

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \cdot \frac{a_n}{b_m} = 0.$$

Dacă  $n = m$ , avem  $\frac{x^n}{x^m} = 1$ , deci, pentru  $x \neq 0$ ,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x),$$

de unde

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_n}.$$

Dacă  $n > m$ , avem  $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$  cu  $n - m > 0$ , deci

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{x^m} = (+\infty)^{n-m} \text{ și } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^n}{x^m} = (-\infty)^{n-m},$$

de unde

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{x^m} \lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = \frac{a_n}{b_m} (+\infty)^{n-m}$$

și

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^n}{x^m} \lim_{x \rightarrow -\infty} R(x) = \frac{a_n}{b_m} (-\infty)^{n-m}.$$

5) Fie funcția rațională  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  definită pe  $R$ , și  $x_0$  o rădăcină a numitorului,  $Q(x_0) = 0$ . Dacă  $p$  și  $q$  sunt ordinele de multiplicitate ale rădăcinii  $x_0$ , respectiv pentru  $P$  și  $Q$ , avem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x - x_0)^p P_1(x)}{(x - x_0)^q Q_1(x)},$$

unde  $p$  și  $q$  sunt numere naturale sau 0, iar  $P_1(x_0) \neq 0$ ,  $Q_1(x_0) \neq 0$ .

a) Dacă  $p > q$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0.$$

b) Dacă  $p = q$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}.$$

c) Dacă  $p < q$  și  $q - p = 2k$ ,  $k \in N$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

d) Dacă  $p < q$  și  $q - p = 2k - 1$ ,  $k \in N$ , avem

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = -\infty \cdot \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}$$

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty \cdot \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)},$$

deci funcția  $\frac{P}{Q}$  nu are limită în  $x_0$ .

Într-adevăr, dacă  $p > q$ ,  $\frac{(x - x_0)^p}{(x - x_0)^q} = (x - x_0)^{p-q}$ .

deci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)^p}{(x - x_0)^q} = 0.$$

Dacă  $q = p$ ,  $\frac{(x - x_0)^p}{(x - x_0)^q} \equiv 1$ .

Dacă  $p < q$ , avem  $\frac{(x - x_0)^p}{(x - x_0)^q} = \frac{1}{(x - x_0)^{q-p}}$ .

În acest caz:

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^{q-p}} = (-\infty)^{p-q}; \lim_{x \searrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^{q-p}} = (+\infty)^{q-p},$$

deci, dacă  $p - q = 2k$ , limitele laterale sunt ambele egale cu  $+\infty$ , iar dacă  $p - q = 2k - 1$  limita la stînga este  $-\infty$ , iar limita la dreapta este  $+\infty$ .

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Într-adevăr, pentru  $x \neq 0$ , avem  $\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$  și deci

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Într-adevăr, pentru  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $x \neq 0$ , avem

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x},$$

deci

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \cdot \cos 0 = 1.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1,$$

deoarece pentru  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $x \neq 0$ , avem  $\frac{x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} x}{x}}$ .

9) Pentru  $x_0 \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ ,  $k$  întreg, avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0.$$

(Funcția  $\operatorname{tg} x$  este continuă în orice punct din domeniul său de definiție.)

Într-adevăr,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0 \neq 0$ ,

deci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x}{\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x} = \frac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0.$$

**Observații.** 1° Dacă  $x_0 = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ , funcția  $\operatorname{tg} x$  are în  $x_0$  limite laterale infinite, și diferite, deci nu are limită într-un asemenea punct.

De exemplu,  $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = +\infty$ ,  $\lim_{x \searrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty$ .

$$x \nearrow \frac{\pi}{2} \quad x \searrow \frac{\pi}{2}$$

2° În punctele  $+\infty$  și  $-\infty$ , funcția  $\operatorname{tg} x$  nu are limite.

Într-adevăr, luând  $x_n = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$ , avem  $x_n \rightarrow +\infty$ , iar sirul  $(\operatorname{tg} x_n)$ ,

$$-1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, \dots$$

nu are limită, deci  $\operatorname{tg} x$  nu are limită în punctul  $+\infty$ .

Luând  $x_n = -n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$ , avem  $x_n \rightarrow -\infty$ , dar sirul  $(\operatorname{tg} x_n)$  nu are limită, deci  $\operatorname{tg} x$  nu are limită în  $-\infty$ .

10) Pentru  $x_0 \neq k\pi$ ,  $k$  întreg, avem:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0.$$

(Funcția  $\operatorname{ctg} x$  este continuă în orice punct din domeniul său de definiție.)

Într-adevăr,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \neq 0$ ,

deci :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos x_0}{\sin x_0} = \operatorname{ctg} x_0.$$

**Observații.** 1° Dacă  $x_0 = k\pi$ , funcția  $\operatorname{ctg} x$  are în  $x_0$  limite laterale infinite, dar diferite, deci nu are limită în  $x_0$ .

De exemplu,  $\lim_{x \nearrow 0} \operatorname{ctg} x = -\infty$ ,  $\lim_{x \searrow 0} \operatorname{ctg} x = +\infty$ .

2° În punctele  $+\infty$  și  $-\infty$ , funcția  $\operatorname{ctg} x$  nu are limite.

11) Pentru funcția  $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$  definită pe  $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$  avem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

## 6. Limitele funcțiilor compuse

Fie funcțiile  $u: E \rightarrow F$ ;  $f: F \rightarrow R$  și funcția compusă  $f \circ u: E \rightarrow R$ ,  
 $(f \circ u)(x) = f(u(x))$ , pentru  $x \in E$ .

Fie  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $E$  și  $u_0$  un punct de acumulare al lui  $F$ .

**Theoremă.** Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$ , dacă  $u(x) \neq u_0$  pentru  $x \neq x_0$ , și dacă  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = l$ , atunci funcția compusă  $f \circ u$  are limită în  $x_0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$ .

Intr-adevăr, fie  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ,  $x_n \neq x_0$ ). Notând  $u_n = u(x_n)$  avem  $u_n \neq u_0$ . Deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$ , avem  $u(x_n) \rightarrow u_0$ , adică  $u_n \rightarrow u_0$ , ( $u_n \in F$ ,  $u_n \neq u_0$ ). Deoarece  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = l$ , avem  $f(u_n) \rightarrow l$ , adică  $f(u(x_n)) \rightarrow l$ , sau  $\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(u(x_n)) = l$ , de unde  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = l$ .

Observație. Răsonamentul de mai sus se poate schematiza astfel: dacă  $x \rightarrow x_0$ , atunci  $u(x) \rightarrow u_0$  și deci  $f(u(x)) \rightarrow l$ .

**Corolarul 1.** Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0$ , dacă  $u_0 \in F$  și dacă  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$ , atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)).$$

**Corolarul 2.** Dacă  $x_0 \in E$ , dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0) = u_0$  și dacă  $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$ , atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = f(u(x_0)).$$

*Exemplu.* 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$ , ( $\beta \neq 0$ ).

Să punem  $u(x) = \alpha x$ , deci  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha x = 0$

(sau  $u(x) \rightarrow 0$  cind  $x \rightarrow 0$ ). Atunci:

$$\frac{\sin \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\sin u(x)}{u(x)},$$

deci :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} \alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha x}{\alpha x} = \frac{\alpha}{\beta} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u} = \frac{\alpha}{\beta} (\beta \neq 0).$$

3) Fie funcția  $u: E \rightarrow R$ , și  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $E$ .

Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ , și dacă  $u(x) \neq 0$  pentru  $x \neq x_0$ , atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e.$$

Intr-adevăr

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e.$$

4) Fie funcțiile  $u, v: E \rightarrow R$ , și  $x_0$  un punct de acumulare al lui  $E$ .

Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$  și  $u(x) \neq 0$  pentru  $x \neq x_0$ , și dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) v(x) = A$  (finit sau infinit), atunci :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + u(x))^{v(x)} = e^A.$$

Intr-adevăr

$$(1 + u(x))^{v(x)} = \left[ (1 + u(x))^{\frac{1}{u(x)}} \right]^{u(x)v(x)}$$

Dacă  $x \rightarrow x_0$ , atunci  $u(x) \rightarrow 0$ , deci

$$(1 + u(x))^{\frac{1}{u(x)}} \rightarrow e \text{ și deci } (1 + u(x))^{v(x)} \rightarrow e^A.$$

## § 4. Funcții continue

### 1. Definiția continuității

În paragraful precedent s-a studiat comportarea unei funcții  $f$  în jurul unui punct  $x_0$ , care este punct de acumulare pentru multimea  $E$  pe care este definită  $f$ . Punctul  $x_0$  nu aparține în mod necesar lui  $E$ , și chiar dacă  $x_0 \in E$ , valoarea funcției în punctul  $x_0$  nu este luată în considerație.

În acest paragraf se studiază comportarea funcției  $f$  nu numai în jurul lui  $x_0$ , dar și în  $x_0$ , și anume se compară valoarea funcției în  $x_0$  cu valorile sale în punctele vecine cu  $x_0$ . Pentru aceasta, este necesar ca funcția  $f$  să fie definită în  $x_0$ , adică  $x_0 \in E$ .

Problema care se pune acum se poate formula astfel :

Fiind dată o funcție  $f: E \rightarrow R$  și  $x_0$  un punct din  $E$ , să se cerceteze dacă, atunci când  $x$  se apropie de  $x_0$ ,  $f(x)$  se apropie de  $f(x_0)$ . Altfel spus,

problema care se pune este dacă, pentru valori ale argumentului  $x$  suficient de vecine cu  $x_0$ , putem realiza ca valorile funcției  $f(x)$  să fie cît dorim de vecine cu  $f(x_0)$ .

Aceste considerații ne conduc la următoarea

**D e f i n i t i e.** Se spune că o funcție  $f : E \rightarrow R$  este continuă într-un punct  $x_0$  din  $E$ , dacă pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $f(x_0)$  există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât, oricare ar fi  $x \in V \cap E$ , să avem  $f(x) \in U$ .

În această definiție,  $V$  depinde de  $U$ .

Dacă  $f$  este continuă în punctul  $x_0 \in E$ , se spune că  $x_0$  este punct de continuitate al funcției  $f$ .

**O b s e r v a t i e.** Definiția continuității este asemănătoare cu definiția limitei. Există însă și deosebiri, datorite faptului că în definiția limitei se impune condiția  $x \neq x_0$ , în timp ce în definiția continuității această condiție nu se impune.

În definiția limitei,  $x_0$  este punct de acumulare pentru  $E$ , dar nu aparține în mod necesar lui  $E$ .

De exemplu, dacă  $E = (a, b)$ , se poate considera limita funcției în punctele  $x_0 = a$  și  $x_0 = b$ , chiar dacă  $a = -\infty$  sau  $b = +\infty$ .

În definiția continuității,  $x_0$  aparține lui  $E$  dar nu este în mod necesar punct de acumulare pentru  $E$ , ci poate fi și punct izolat al lui  $E$ .

*Problema continuității nu are sens în punctele în care funcția nu este definită; definiția continuității nu se poate aplica în aceste puncte.*

În particular, problema continuității nu se pune în punctele  $+\infty$  și  $-\infty$ , deoarece domeniul de definiție al unei funcții este format numai din puncte finite.

*Exemplu.* 1) Pentru funcția  $f(x) = \ln x$  definită pe  $(0, +\infty)$ , nu are sens problema continuității în punctul 0, sau în punctul  $-\infty$ .

2) Pentru funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$  definită pe  $R - \{0\}$  nu se pune problema continuității în punctul 0.

3) Pentru funcția  $f(x) = \operatorname{tg} x$  definită pentru  $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k$  întreg, nu are sens problema continuității în punctele  $\dots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

Definiția continuității, dată mai sus, se aplică fără nici o modificare pentru funcții  $f : E \rightarrow F$ , oricare ar fi spațiile topologice  $E$  și  $F$ .

Dată fiind asemănarea dintre definiția limitei și definiția continuității, o serie întreagă de proprietăți ale limitelor rămân valabile și pentru funcții continue, și cu aceleași demonstrații, cu singura deosebire că nu se mai pune condiția  $x \neq x_0$ .

Dăm mai întâi cîteva propoziții care dau condiții necesare și suficiente de continuitate, și al căror enunț poate fi luat ca definiție a continuității.

**P r o p o z i t i a 1.** Funcția  $f : E \rightarrow R$  este continuă în punctul  $x_0 \in E$ , dacă și numai dacă, pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \in E$ , avem  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

**O b s e r v a t i i .** 1° În această propoziție este suficient să presupunem că pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \in E$ , sirul  $(f(x_n))$  are limită. Rezultă atunci că *toate* sirurile  $(f(x_n))$  au aceeași limită, și anume  $f(x_0)$ , oricare ar fi sirul  $x_n \rightarrow x_0$ .

Faptul că *toate* sirurile  $(f(x_n))$  au aceeași limită se demonstrează ca și pentru limite de funcții, fără a mai pune condiția  $x_n \neq x_0$ . Faptul că această limită comună este  $f(x_0)$  rezultă din faptul că, pentru sirul constant  $x_n = x_0$ , avem  $x_n \rightarrow x_0$  și  $f(x_n) = f(x_0)$ , deci  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

2° Definiția continuuității cu ajutorul sirurilor se poate aplica numai în acele spații topologice, în care topologia se poate defini cu ajutorul sirurilor.

**P r o p o z i t i a 2.** Funcția  $f: E \rightarrow R$  este continuă în punctul  $x_0 \in E$ , dacă și numai dacă, pentru orice număr  $\varepsilon > 0$ , există un număr  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât oricare ar fi  $x \in E$  cu  $|x - x_0| < \delta$ , să avem  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Pentru demonstrație, se folosește definiția continuuității, ținând seama de faptul că  $x_0$  și  $f(x_0)$  sunt finite, deci vecinătățile lui  $f(x_0)$  se pot lua de forma  $U = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$  cu  $\varepsilon > 0$ , iar vecinătățile lui  $x_0$  se pot lua de forma  $V = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  cu  $\delta > 0$ . Deoarece  $V$  depinde de  $U$ , rezultă că  $\delta$  depinde de  $\varepsilon$ . Condiția  $x \in V$  este echivalentă cu  $|x - x_0| < \delta$ , iar condiția  $f(x) \in U$  este echivalentă cu  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

**O b s e r v a t i e.** Definiția continuuității cu  $\varepsilon$  și  $\delta$  se aplică numai în acele spații topologice în care s-au definit atât operația de adunare (în grupuri) cât și modulul (sau altă noțiune cu proprietățile modulului, de exemplu norma în spații vectoriale).

Sunt utile și următoarele două propoziții, în care se dău definiții cu vecinătăți și cu  $\varepsilon$  sau  $\delta$ :

*f este continuă în  $x_0$  dacă și numai dacă pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $f(x_0)$ , există un număr  $\delta > 0$  (care depinde de  $U$ ) astfel încât pentru orice  $x \in E$  cu  $|x - x_0| < \delta$  să avem  $f(x) \in U$ .*

*f este continuă în  $x_0$  dacă și numai dacă, pentru orice  $\varepsilon > 0$  există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } x \in V.$$

**P r o p o z i t i a 3.** O funcție  $f: E \rightarrow R$  este continuă în orice punct izolat al domeniului ei de definiție.

Fie  $x_0$  un punct izolat al lui  $E$ . Aceasta înseamnă că există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  astfel ca  $V \cap E = \{x_0\}$ . Dacă  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ), vecinătatea  $V$  conține toți termenii sirului cu excepția unui număr finit dintre ei. Există deci un număr  $N$ , astfel încât pentru  $n \geq N$  să avem  $x_n \notin V$ , și, deoarece  $x_n \in E$ , rezultă că  $x_n \in V \cap E$ , adică  $x_n \rightarrow x_0$ . Atunci, pentru  $n \geq N$  avem  $f(x_n) = f(x_0)$  și deci  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . Cum sirul  $x_n \rightarrow x_0$  a fost ales arbitrar, rezultă că  $f$  este continuă în  $x_0$ .

*Exemplu.* 1) Dacă mulțimea  $E$  este finită,  $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , atunci  $E$  este formată numai din puncte izolate, deci orice funcție definită pe  $E$  este continuă în orice punct din  $E$ .

2) Un sir  $(a_n)$  este o funcție definită pe mulțimea  $N$  a numerelor naturale. Deoarece mulțimea  $N$  este formată numai din puncte izolate, rezultă că orice sir este o funcție continuă în orice punct  $n$  din domeniul său de definiție  $N$ .

Dacă  $x_0 \in E$  este punct de acumulare pentru  $E$ , atunci are sens atât problema continuării în  $x_0$ , cât și problema limitei în  $x_0$ . În acest caz, definiția continuării se poate formula cu ajutorul limitei:

**Propozitia 4.** O funcție  $f: E \rightarrow R$  este continuă într-un punct de acumulare  $x_0 \in E$  dacă și numai dacă funcția are limită în  $x_0$  egală cu  $f(x_0)$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

(sau  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  cînd  $x \rightarrow x_0$ ).

Să presupunem întîi că  $f$  este continuă în  $x_0$ . Aceasta înseamnă că pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $(x_n \in E)$  avem  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . În particular, pentru sirurile  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $(x_n \in E)$  cu  $x \neq x_0$ , avem de asemenea  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ , deci  $f(x_0)$  este limita funcției în punctul  $x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Reciproc, să presupunem că  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  și să arătăm că  $f$  este continuă în  $x_0$ . Aceasta înseamnă că, pentru orice  $\epsilon > 0$ , există un număr  $\delta = \delta(\epsilon)$ , astfel încît oricare ar fi  $x \in E$ ,  $x \neq x_0$ , cu  $|x - x_0| < \delta$ , să avem  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ . Dar dacă  $x = x_0$ , atunci  $|x - x_0| = 0 < \delta$  și  $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \epsilon$ , astfel încît restricția  $x \neq x_0$  este de pratos. Conform propoziției 2, rezultă că  $f$  este continuă în  $x_0$ .

**Observații.** 1° Limita funcției în punctul  $x_0$  poate fi infinită. Dacă însă  $f$  este continuă, această limită este  $f(x_0)$ , deci este finită (deoarece o funcție are numai valori finite).

2° În cazul cînd mulțimea  $E$  nu are nici un punct izolat, enunțul propoziției 4 poate fi luat ca definiție a continuării, echivalentă cu celelalte trei definiții, cu vecinătăți, cu siruri, sau cu  $\epsilon$  și  $\delta$ .

Vom folosi una sau alta din aceste definiții, după cum va fi mai convenabil pentru simplificarea raționamentelor.

Pentru demonstrarea criteriului de integrabilitate al lui Lebesgue, vom folosi propoziția următoare, din care rezultă că proprietatea de continuitate se poate defini și cu ajutorul oscilației.

**Propozitia 5.** Funcția  $f: E \rightarrow R$  este continuă într-un punct  $x_0 \in E$  dacă și numai dacă oscilația sa în acest punct este nulă:

$$\omega_f(x_0) = 0.$$

Să presupunem întâi că  $f$  este continuă în  $x_0$ , și fie  $\varepsilon > 0$ . Există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât, pentru orice punct  $x \in V \cap E$  să avem  $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Pentru orice puncte  $x', x'' \in V \cap E$  avem atunci

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

de unde

$$\omega_f(V \cap E) = \sup_{\substack{x' \in V \cap E \\ x'' \in V \cap E}} |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon$$

și deci

$$\omega_f(x_0) = \inf_{V \ni x_0} \omega_f(V \cap E) \leq \varepsilon.$$

Așadar,  $\omega_f(x_0) \leq \varepsilon$ , oricare ar fi  $\varepsilon > 0$ . Cum  $\omega_f(x_0)$  este  $\geq 0$  și independent de  $\varepsilon$ , rezultă că  $\omega_f(x_0) = 0$ .

Reciproc, să presupunem că  $\omega_f(x_0) = 0$  și fie  $\varepsilon > 0$ . Deoarece

$$\omega_f(x_0) = \inf_{V \ni x_0} \omega_f(V \cap E) = 0$$

rezultă că există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât

$$\omega_f(V \cap E) < \varepsilon.$$

Deoarece  $|f(x') - f(x'')| \leq \omega_f(V \cap E)$ , oricare ar fi  $x', x'' \in V \cap E$ , rezultă în particular că

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi } x \in V \cap E,$$

deci  $f$  este continuă în  $x_0$ , și cu aceasta propoziția este demonstrată.

**Definiție.** Se spune că o funcție  $f : E \rightarrow R$  este continuă pe o mulțime  $A \subset E$ , dacă este continuă în fiecare punct din  $A$ .

Dacă funcția este continuă pe tot domeniul său de definiție, se spune uneori, mai simplu, că este continuă, fără a mai specifica mulțimea pe care are această proprietate.

Continuitatea funcției  $f$  pe mulțimea  $A$  se exprimă prin una din următoarele propoziții echivalente :

1) Oricare ar fi  $x \in A$  și oricare ar fi vecinătatea  $U$  a lui  $f(x)$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x$  ( $V$  depinde și de  $U$  și de  $x$ ), astfel încât pentru orice  $x' \in V \cap E$  să avem  $f(x') \in U$ .

2) Oricare ar fi  $x \in A$  și oricare ar fi sirul  $x_n \rightarrow x$  ( $x_n \in E$ ) avem  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

3) Oricare ar fi  $x \in A$  și oricare ar fi numărul  $\varepsilon > 0$ , există un număr  $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ , astfel încât pentru orice punct  $x' \in E$  cu  $|x' - x| < \delta$  să avem  $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ .

Dacă  $A$  este formată numai din puncte de acumulare ale lui  $E$ , atunci se poate da o formulare echivalentă cu ajutorul limitelor :

4) Oricare ar fi  $x \in A$  avem  $\lim_{x' \rightarrow x} f(x') = f(x)$ .

**O b s e r v a t i e.** Funcțiile elementare sunt definite pe intervale sau pe reuniuni de intervale, iar acestea sunt formate *numai* din puncte de acumulare. Așadar, pentru funcțiile elementare se poate aplica definiția continuității cu ajutorul limitei.

Pentru funcțiile elementare, limita într-un punct  $x_0$  din domeniul de definiție se obține înlocuind direct pe  $x$  cu  $x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

deci *funcțiile elementare sunt continue în orice punct din domeniul lor de definiție*.

*Exemple.*

1)  $f(x) \equiv c$ , definită pe  $R$ . Oricare ar fi  $x_0 \in R$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} c = c = f(x_0).$$

2)  $f(x) = x$ , definită pe  $R$ . Oricare ar fi  $x_0 \in R$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 = f(x_0).$$

3)  $f(x) = x^n$ ,  $n \in N$ , definită pe  $R$ . Oricare ar fi  $x_0 \in R$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n = f(x_0).$$

4)  $f(x) = \frac{1}{x^n}$ ,  $n \in N$ , definită pe  $R - \{0\}$ . Oricare ar fi  $x_0 \neq 0$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x_0^n}.$$

5) Pentru polinomul  $P(x)$ , definit pe  $R$ , avem pentru orice  $x_0 \in R$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$$

6) Pentru funcția ratională  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , și pentru orice  $x_0 \in R$ , pentru care  $(x_0) \neq 0$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

7)  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , definită pe  $[0, +\infty]$ . Oricare ar fi  $x_0 \geq 0$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha = x_0^\alpha = f(x_0).$$

8)  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ , definită pe  $(0, +\infty)$ . Oricare ar fi  $x_0 > 0$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{x_0^\alpha} = f(x_0).$$

9)  $f(x) = a^x$ , ( $a > 0$ ), definită pe  $R$ . Oricare ar fi  $x_0 \in R$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}.$$

10)  $f(x) = \log_a x$ , ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ), definită pe  $(0, +\infty)$ . Oricare ar fi  $x_0 > 0$  avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0.$$

11)  $f(x) = \sin x$ , definită pe  $R$ . Oricare ar fi  $x_0 \in R$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0.$$

12)  $f(x) = \cos x$ , definită pe  $R$ . Oricare ar fi  $x_0 \in R$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0.$$

13)  $f(x) = \operatorname{tg} x$ , definită pentru  $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k$  întreg. Oricare ar fi  $x_0 \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0.$$

14)  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ , definită pentru  $x \neq k\pi$ ,  $k$  întreg. Oricare ar fi  $x_0 \neq k\pi$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0.$$

Se va arăta mai departe că și funcțiile trigonometrice inverse sunt continue pe tot domeniul lor de definiție.

## 2. Puncte de discontinuitate

Fie funcția  $f: E \rightarrow R$  și  $x_0 \in E$ . Dacă funcția  $f$  nu este continuă în  $x_0$ , se spune că  $f$  este discontinuă în  $x_0$ , iar  $x_0$  se numește punct de discontinuitate al funcției. Deoarece  $f$  este continuă în punctele izolate ale lui  $E$ , un punct de discontinuitate  $x_0 \in E$  este în mod necesar un punct de acumulare pentru  $E$ .

Înțînd seama de definițiile continuății, prin negație deducem că funcția  $f$  este discontinuă într-un punct  $x_0 \in E$ , dacă și numai dacă este verificată una din următoarele condiții echivalente :

- 1) Există o vecinătate  $U$  a lui  $f(x_0)$ , astfel încât, oricare ar fi vecinătatea  $V$  a lui  $x_0$ , să existe un punct  $x \in V \cap E$ , astfel ca  $f(x) \notin U$  ( $x$  depinde de  $V$ ).
- 2) Există un număr  $\epsilon$ , astfel încât, oricare ar fi  $\delta > 0$ , să existe un punct  $x \in E$  cu  $|x - x_0| < \delta$  astfel încât  $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$  ( $x$  depinde de  $\delta$ ).
- 3) Există cel puțin un sir  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ) astfel încât sirul  $(f(x_n))$  să nu aibă limită  $f(x_0)$  (eventual să nu aibă nici o limită).
- 4)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  nu există, sau  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  există dar este diferită de  $f(x_0)$ .

5) Oscilația funcției în  $x_0$  este strict pozitivă :  $\omega_f(x_0) > 0$ .

O b s e r v a t i e. Discontinuitatea funcției  $f$  s-a definit ca o proprietate contrară continuății. Prin aceasta s-a dat sens discontinuității exact în aceleași puncte în care are sens și continuitatea, adică numai în punctele domeniului de definiție.

Dacă  $x_0$  nu aparține domeniului de definiție, nu are sens să se spună nici că funcția este continuă, nici că este discontinuă în acest punct, chiar dacă  $x_0$  este punct de acumulare al domeniului de definiție, și chiar dacă există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

Rezultă că problema discontinuității, ca și cea a continuății, nu se poate pune decit pentru punctele din domeniul de definiție al funcției.

*Exemplu.* 1) Pentru funcția  $f(x) = \ln x$  definită pe  $(0, +\infty)$  nu are sens să se spună că este continuă sau discontinuă în punctul 0, deși funcția are limită în acest punct ( $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ ); de asemenea nu are sens să se pună problema discontinuității acestei funcții în punctul  $-1$ .

2) Pentru funcția  $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{pentru } x > 0 \\ 1 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$  definită pe  $[0, +\infty)$  are sens să se pună problema continuății în punctul 0, deoarece funcția este definită în 0; anume, funcția este discontinuă în acest punct, deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ .

3) Pentru funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$  definită pe  $R - \{0\}$  nu are sens să se spună că este discontinuă în 0.

4) Funcția  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 1 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$  definită pe  $R$  este discontinuă în punctul 0, deoarece deși este definită în 0 nu are limită în acest punct.

5) Pentru funcția  $f(x) = \operatorname{tg} x$ , definită pentru  $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k$  întreg, nu are sens să se spună că este discontinuă în punctul  $\frac{\pi}{2}$ .

6) Pentru funcția  $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{pentru } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{pentru } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$  definită pe  $(0, \pi)$ , are sens să se spună că este continuă în punctul  $\frac{\pi}{2}$ , anume, această afirmație este falsă. De asemenea, are sens să se spună că ea este discontinuă în punctul  $\frac{\pi}{2}$ , anume, această afirmație este adevărată, deoarece funcția nu are limită în  $\frac{\pi}{2}$ .

7) Pentru funcția  $f(x) = x$  definită pe  $R - \{0\}$ , nu are sens nici una din următoarele două propoziții :

- funcția este continuă în punctul 0;
- funcția este discontinuă în punctul 0.

8) Pentru funcția  $f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$  definită pe  $R$ , au sens amândouă propozițiile următoare :

- funcția este continuă în punctul 0;
- funcția este discontinuă în punctul 0.

Prima propoziție este falsă, iar a doua este adevărată, deoarece funcția are limită în punctul 0, anume  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , dar este diferită de  $f(0) = 1$ .

9) Pentru funcția  $f(x) = x$  definită pe  $R$ , au sens amândouă propozițiile din exemplul precedent, și anume: prima este adevărată ( $f$  este continuă în 0), iar a doua este falsă.

Punctele de discontinuitate ale unei funcții se împart în două categorii: puncte de discontinuitate de prima specie și puncte de discontinuitate de specă a două.

*Un punct de discontinuitate  $x_0$  al funcției  $f$  se numește punct de discontinuitate de prima specie, dacă funcția are limite laterale finite în  $x_0$ .*

În cazul cînd limitele laterale sunt egale, evident, ele sunt diferențe de  $f(x_0)$ , deoarece funcția nu este continuă în  $x_0$ .

Dacă  $x_0$  este extremitatea stîngă (respectiv dreaptă) a unui interval  $I$ , și este punct de discontinuitate al funcției  $f$ , atunci  $x_0$  este punct de discontinuitate de specă întâi dacă există limită la dreapta în  $x_0$  și este finită (respectiv dacă există limită la stînga în  $x_0$  și este finită), deoarece în acest caz cealaltă limită laterală nu are sens. Evident, în acest caz  $f(x_0 + 0)$  (respectiv  $f(x_0 - 0)$ ) este diferit de  $f(x_0)$ , deoarece în caz contrar funcția ar fi continuă în  $x_0$ .

Celelalte puncte de discontinuitate ale funcției, care nu sunt de prima specie, se numesc puncte de discontinuitate de specă a două.

Așadar,  $x_0$  este punct de discontinuitate de specă a două pentru funcția  $f$ , dacă cel puțin una dintre limitele laterale (în cazul cînd are sens) nu există, sau este infinită.

*Exemple.*

$$1) f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } x \neq 0 \\ 1 & \text{pentru } x = 0 \end{cases} \text{ definită pe } R.$$

Aveam  $f(0 - 0) = 0$  și  $f(0 + 0) = 0$ , dar  $f(0) = 1$ , deci 0 este punct de discontinuitate de prima specie.

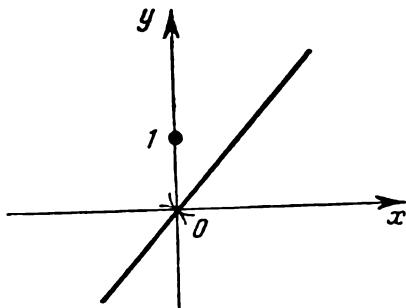


Fig. 56

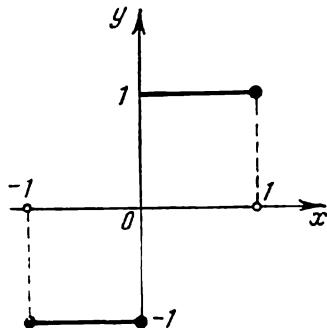


Fig. 57

$$2) f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{dacă } 0 < x \leq 1 \end{cases} \text{ definită pe } [-1, 1].$$

Aveam  $f(0 - 0) = -1$  și  $f(0 + 0) = 1$ , deci 0 este punct de discontinuitate de prima specie.

$$3) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x = -1 \\ x & \text{dacă } -1 < x < 1 \\ -1 & \text{dacă } x = 1 \end{cases} \text{ definită pe } [-1, 1].$$

Punctul  $-1$  este punct de discontinuitate de prima specie.

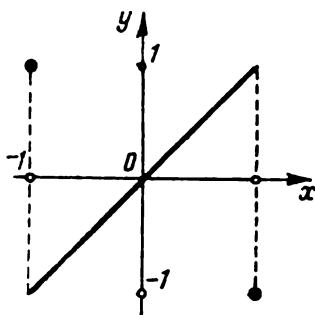


Fig. 58

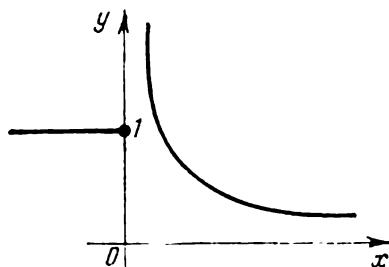


Fig. 59

Aveam  $f(-1 + 0) = -1$  și  $f(-1) = +1$ . Aici  $f(-1 - 0)$  nu are sens. Punctul 1 este punct de discontinuitate de prima specie. Aveam  $f(1 - 0) = 1$  și  $f(1) = -1$ . Aici  $f(1 + 0)$  nu are sens.

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dacă } x > 0 \\ 1 & \text{dacă } x \leq 0 \end{cases} \text{ definită pe } (-\infty, +\infty).$$

Punctul 0 este punct de discontinuitate de specia a doua, deoarece  $f(0 - 0) = 1$ , dar  $f(0 + 0) = +\infty$ .

$$5) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \text{ este rational} \\ 0 & \text{dacă } x \text{ este irational} \end{cases} \text{ definită pe } R.$$

Orice punct este punct de discontinuitate de speță a două, deoarece această funcție nu are limite laterale în nici un punct.

$$6) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases} \text{ definită pe } R.$$

Punctul 0 este de discontinuitate de speță a două, deoarece  $f(0 - 0)$  și  $f(0 + 0)$  nu există.

Dacă  $x_0$  este punct interior al unui interval  $I$  și dacă limitele laterale în  $x_0$  există și sunt finite, diferența  $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$  se numește *saltul funcției f în punctul  $x_0$* .

Dacă  $I = [a, b]$ , și dacă  $f(a + 0)$  există și este finit, atunci  $f(a + 0) - f(a)$  se numește saltul funcției  $f$  în punctul  $a$ , iar dacă  $f(b - 0)$  există și este finit,  $f(b) - f(b - 0)$  se numește saltul funcției  $f$  în punctul  $b$ .

Evident, saltul funcției într-un punct de continuitate este zero.

Saltul funcției poate fi zero și într-un punct de discontinuitate din *interiorul* intervalului, dacă  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ .

**Propozitia 1.** Toate punctele de discontinuitate ale unei funcții monotone pe un interval,  $f: I \rightarrow R$ , sint de prima speță.

Se stie că o funcție monotonă are limite laterale în fiecare punct din domeniul său de definiție. (Dacă extremitățile aparțin intervalului, la extremități numai una dintre limitele laterale are sens.)

Trebue să arătăm că aceste limite laterale sunt finite. Să presupunem că  $f$  este crescătoare. Fie  $x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 < x_2$ . Dacă  $x_1 < x < x_2$ , atunci  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$  și prin trecere la limită obținem

$$f(x_1) \leq \lim_{x \downarrow x_1} f(x) \leq f(x_2), \quad f(x_1) \leq \lim_{x \nearrow x_1} f(x) \leq f(x_2),$$

adică:  $f(x_1) \leq f(x_1 + 0) \leq f(x_2)$  și  $f(x_1) \leq f(x_2 - 0) \leq f(x_2)$ .

Dar  $f(x_1)$  și  $f(x_2)$  sunt finite, ca valori ale funcției. Rezultă că  $f(x_1 + 0)$  și  $f(x_2 - 0)$  sunt de asemenea finite. Deoarece  $x_1$  și  $x_2$  au alese fost arbitrar, rezultă că în orice punct din  $I$  funcția are limită la stînga finită (cu excepția extremității stîngi, unde această limită nu are sens) și limită la dreapta finită (cu excepția extremității drepte).

Rezultă că punctele de discontinuitate — dacă există — sunt de prima speță.

Dacă  $f$  este descrescătoare, demonstrația se face la fel.

**Observație.** Să presupunem că  $f$  este crescătoare pe  $I$ . Din demonstrația propoziției precedente deducem că dacă  $x_1 < x_2$ , atunci

$$f(x_1) \leq f(x_1 + 0) \leq f(x_2 - 0) \leq f(x_2).$$

Intr-adevăr, alegind  $\alpha \in I$  astfel ca  $x_1 < \alpha < x_2$ , avem:

$$f(x_1) \leq f(x_1 + 0) \leq f(\alpha) \leq f(x_2 - 0) \leq f(x_2).$$

În particular, pentru orice punct  $x_0$  din interiorul lui  $I$  avem:

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0),$$

deci saltul  $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$  este pozitiv. Dacă  $x_0$  este punct de discontinuitate, acest salt este strict pozitiv și, evident, dacă  $x_0$  este punct de continuitate, saltul este 0.

Dacă  $x'$  și  $x''$  sunt două puncte de discontinuitate și dacă  $x' < x''$ , atunci, pe axa  $Oy$ , intervalul  $[f(x' - 0), f(x' + 0)]$  se află sub intervalul  $[f(x'' - 0), f(x'' + 0)]$ , putind avea în comun o extremitate, iar cele două intervale sunt de lungime strict pozitivă.

**Propoziția 2.** Multimea punctelor de discontinuitate ale unei funcții monotone  $f: I \rightarrow R$  este cel mult numărabilă.

Vom presupune la început că intervalul este închis și mărginit,  $I = [a, b]$  și că  $f$  este crescătoare.

Avgem:  $f(a) \leq f(a + 0) \leq f(x - 0) \leq f(x + 0) \leq f(b - 0) \leq f(b)$ , ori care ar fi  $a < x < b$ . Fie  $\alpha > 0$  și fie  $n$  puncte interioare  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , în care saltul funcției este mai mare sau egal cu  $\alpha$ :

$$f(x_i + 0) - f(x_i - 0) \geq \alpha, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{Avem } f(x_i + 0) \leq f(x_{i+1} - 0) \text{ sau } f(x_{i+1} - 0) - f(x_i + 0) \geq 0, \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Atunci

$$f(b) - f(a) \geq f(x_n + 0) - f(x_1 - 0) = \sum_{i=1}^n [f(x_i + 0) - f(x_i - 0)] + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} [f(x_{i+1} - 0) - f(x_i + 0)] \geq \sum_{i=1}^n [f(x_i + 0) - f(x_i - 0)] \geq n\alpha,$$

$$\text{de unde: } n \leq \frac{f(b) - f(a)}{\alpha}.$$

Rezultă că numărul punctelor în care saltul este mai mare decât  $\alpha$  este finit sau eventual 0. Printre aceste puncte putem considera și extremitățile, dacă este cazul.

Să notăm cu  $S_1$  mulțimea punctelor în care saltul este  $\geq 1$  și, pentru fiecare număr natural  $n \geq 2$ , să notăm cu  $S_n$  mulțimea punctelor în care saltul este  $\geq \frac{1}{n}$  și  $< \frac{1}{n-1}$

$$S_1 = \{x \mid x \in I, f(x + 0) - f(x - 0) \geq 1\},$$

$$S_n = \left\{ x \mid x \in I, \frac{1}{n} \leq f(x + 0) - f(x - 0) < \frac{1}{n-1} \right\}, \quad n \geq 2.$$

Din cele de mai sus rezultă că fiecare mulțime  $S_n$  este finită sau vidă. Reuniunea  $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$  este formată din toate punctele în care saltul este strict pozitiv, deci din toate punctele de discontinuitate.

Dar  $S$  este o mulțime cel mult numărabilă, fiind o reuniune numărabilă de mulțimi finite sau vide, și teorema este demonstrată în acest caz.

Dacă  $f$  este descrescătoare, demonstrația se face la fel.

Dacă intervalul  $I$  nu este închis și mărginit, el se poate scrie ca o reuniune numărabilă de intervale închise și mărginite  $I_n$ , care au în comun, două cîte două, cîte o extremitate :

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Dacă  $I = (a, b]$ ,  $a \geq -\infty$  luăm  $I_1 = [\alpha_1, b]$ ,  $I_2 = [\alpha_2, \alpha_1]$ , ...,  $I_n = [\alpha_n, \alpha_{n-1}]$ , ... unde  $(\alpha_n)$  este un sir strict descrescător, astfel ca  $\alpha_n \rightarrow a$ .

Dacă  $I = [a, b)$ ,  $b \leq +\infty$ , luăm  $I_1 = [a, \beta_1]$ ,  $I_2 = [\beta_1, \beta_2]$ , ...,  $I_n = [\beta_{n-1}, \beta_n]$ , ..., unde  $(\beta_n)$  este un sir strict crescător astfel ca  $\beta_n \rightarrow b$ .

Dacă  $I = (a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , luăm

$$I_1 = [\alpha_1, \beta_1], I_2 = [\alpha_2, \beta_2], \dots, I_n = [\alpha_n, \beta_n], \dots$$

unde  $(\alpha_n)$  este strict descrescător astfel ca  $\alpha_n \rightarrow a$ , iar  $(\beta_n)$  este strict crescător astfel ca  $\beta_n \rightarrow b$  și  $\alpha_1 < \beta_1$ .

În fiecare interval  $I_n$ , mulțimea punctelor de discontinuitate este cel mult numărabilă. Deoarece reuniunea unei familii numărabile de mulțimi numărabile este de asemenea numărabilă, rezultă că mulțimea punctelor de discontinuitate din toate intervalele  $(I_n)$  este numărabilă, și cu aceasta propoziția este complet demonstrată.

### 3. Continuitatea relativă la o submulțime

Fie funcția  $f: E \rightarrow R$ ,  $A$  o submulțime a lui  $E$  și  $x_0 \in A$ .

**D e f i n i ţ i e .** Se spune că funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0$  relativ la submulțimea  $A$ , dacă restricția  $f_A$  a lui  $f$  la  $A$  este continuă în  $x_0$ .

Aceasta înseamnă că oricare ar fi sirul  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \in A$ , avem  $f_A(x_n) \rightarrow f_A(x_0)$ .

Dar pentru  $x \in A$  avem  $f_A(x) = f(x)$ . Așadar, a spune că funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0$  relativ la submulțimea  $A$ , înseamnă că pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$  format din puncte din  $A$ ,  $x_n \in A$  să avem  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

Se pot da definiții ale continuității relative la  $A$ , echivalente cu cea de mai sus, folosind vecinătățile, sau  $\epsilon$  și  $\delta$ , și punând condiția  $x \in A$  (în loc de  $x \in E$ ).

Dacă  $x_0$  este punct de acumulare al lui  $A$  (deci și al lui  $E$ ) se poate folosi definiția continuității cu ajutorul limitei :

$f$  este continuă în  $x_0$  relativ la  $A$  dacă

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_A(x) = f(x_0), \text{ adică dacă } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in A}} f(x) = f(x_0).$$

**P r o p o z i ţ i e .** Dacă  $f$  este continuă în  $x_0$  (relativ la  $E$ ), atunci  $f$  este continuă în  $x_0$  și relativ la  $A$ .

**Intr-adevăr**, dacă  $f$  este continuă în  $x_0$  relativ la  $E$ , pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$  format din puncte din  $E$  avem  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . În particular, deoarece  $A \subset E$ , pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$  format din puncte din  $A$  avem de asemenea  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ , adică  $f$  este continuă în  $x_0$  relativ la  $A$ .

**Observație.** Propoziția reciprocă nu este adevărată. Funcția  $f$  poate fi continuă în  $x_0$  relativ la  $A$ , fără a fi continuă în  $x_0$  (relativ la  $E$ ).

$$\text{Exemplu. } f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{pentru } 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{definită pe } E = [-1, 1], \text{ și } A = [0, 1];$$

avem  $f_A(x) \equiv 1$ . (pentru  $x \in A$ ), deci  $f_A$  este continuă în 0, deci  $f$  este continuă în 0, relativ la intervalul  $A = [0, 1]$ . Totuși  $f$  nu este continuă în 0, relativ la  $E = [-1, 1]$ , deoarece nu are limită în 0. Într-adevăr  $f(0^-) = -1$  și  $f(0^+) = 1$ . (Se poate folosi definiția cu limită a continuității, deoarece 0 este punct de acumulare pentru  $E$ .)

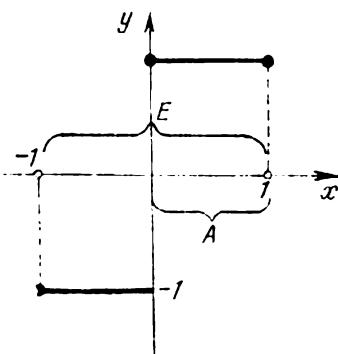


Fig. 60

În anumite cazuri este adevărată și propoziția reciprocă:

**Propoziție.** Dacă  $A$  este intersecția lui  $E$  cu o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ ,  $A = E \cap V$ , și dacă  $f$  este continuă în  $x_0$  relativ la  $A$ , atunci  $f$  este continuă în  $x_0$  (relativ la  $E$ ).

Prin ipoteză,  $f$  este continuă în  $x_0$  relativ la  $A$ , deci oricare ar fi sirul  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \in A$ , avem  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

Dacă  $x_n$  este format din puncte din  $E$ , și dacă  $x_n \rightarrow x_0$ , avem  $x_n \in V$ , deci  $x_n \in A$  pentru toți termenii, cu excepția unui număr finit dintre ei, și deci  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . Așadar, oricare ar fi sirul  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \in E$ , avem  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ , adică  $f$  este continuă în  $x_0$  relativ la  $E$ .

#### 4. Continuitatea laterală

Fie funcția  $f: E \rightarrow R$  și  $x_0 \in E$ .

Dacă luăm mulțimea  $A = E \cap (-\infty, -x_0] = \{x \mid x \in E, x \leq x_0\}$ , putem defini continuitatea lui  $f$  în  $x_0$ , relativ la submulțimea  $A$ .

**Definiție.** Se spune că funcția  $f$  este continuă la stînga în punctul  $x_0$ , dacă pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$  format din puncte  $x_n \leq x_0$  din  $E$ , avem  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

Dacă în definițiile continuității cu vecinătăți sau cu  $\epsilon$  și  $\delta$ , se pune condiția ca  $x \leq x_0$ , se obțin definiții ale continuității la stînga, echivalente cu cea de mai sus.

**Observații.** 1. Dacă  $E = [a, b)$ , orice funcție definită pe  $E$  este continuă la stînga în  $a$ .

**Intr-adevăr**, dacă  $x_n \rightarrow a$ ,  $x_n \leq a$ , și  $x_n \in [a, b)$ , rezultă că  $x_n = a$ , deci  $f(x_n) = f(a)$  și deci  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

2° Dacă  $E = (a, b]$ , definiția continuății în punctul  $b$  este echivalentă cu definiția continuății la stînga în punctul  $b$ , deoarece condiția  $x_n \in (a, b]$  este echivalentă cu condiția  $x_n \in (a, b]$  și  $x_n \leq b$ .

Așadar,  $f$  este continuă în  $b$ , dacă și numai dacă este continuă la stînga în  $b$ .

3°. Dacă  $x_0$  este punct de acumulare al mulțimii  $A = E \cap (-\infty, x_0] = \{x \mid x \in E, x \leq x_0\}$ , atunci definiția continuății la stînga în  $x_0$  se poate formula cu ajutorul limitei la stînga în  $x_0$ :  $f$  este continuă la stînga în  $x_0$ , dacă și numai dacă are limită la stînga în  $x_0$ , egală cu  $f(x_0)$ :

$$f(x_0 - 0) = f(x_0). \quad \blacksquare$$

Dacă  $E = [a, b]$ , limita la stînga în  $a$  nu are sens, deci continuitatea la stînga în  $a$  nu se poate formula cu ajutorul limitei. Însă continuitatea la stînga în  $a$  este totdeauna asigurată.

Dacă luăm mulțimea  $B = E \cap [x_0, +\infty) = \{x \mid x \in E, x \geq x_0\}$ , putem defini continuitatea lui  $f$  în  $x_0$  relativ la mulțimea  $B$ .

**D e f i n i ᄀ i e .** Se spune că funcția  $f$  este continuă la dreapta în punctul  $x_0$ , dacă, pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$  format din puncte  $x_n \geq x_0$  din  $E$ ; avem  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .

Dacă în definițiile continuății cu vecinătate sau cu  $\epsilon$  și  $\delta$  se pune condiția  $x \geq x_0$ , se obțin definiții ale continuății la dreapta în  $x_0$ , echivalente cu cea de mai sus.

**O b s e r v a ᄀ i i .** 1° Dacă  $E = (a, b]$ , orice funcție definită pe  $E$  este continuă la dreapta în  $b$ . Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow b$ ,  $x_n \geq b$  și  $x_n \in (a, b]$ , atunci  $x_n = b$ , deci  $f(x_n) = f(b)$  și deci  $f(x_n) \rightarrow f(b)$ .

2° Dacă  $E = [a, b]$ , definiția continuății în  $a$  este echivalentă cu definiția continuății la dreapta în  $a$ , deoarece condiția  $x_n \in [a, b]$  este echivalentă cu condiția  $x_n \in [a, b)$  și  $x_n \geq a$ .

Așadar, funcția  $f$  este continuă în  $a$ , dacă și numai dacă este continuă la dreapta în  $a$ .

3° Dacă  $x_0$  este punct de acumulare al mulțimii  $B = E \cap [x_0, +\infty) = \{x \mid x \in E, x \geq x_0\}$ , atunci definiția continuății la dreapta în  $x_0$  se poate formula cu ajutorul limitei la dreapta în  $x_0$ :

$f$  este continuă la dreapta în  $x_0$ , dacă și numai dacă are limită la dreapta în  $x_0$ , egală cu  $f(x_0)$ :

$$f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Dacă  $E = [a, b]$ , limita la dreapta în  $b$  nu are sens, deci continuitatea la dreapta în  $b$  nu se poate formula cu ajutorul limitei la dreapta. Însă continuitatea la dreapta în  $b$  este totdeauna asigurată.

**P r o p o z i ᄀ i e .** Funcția  $f: E \rightarrow R$  este continuă în punctul  $x_0 \in E$ , dacă și numai dacă este continuă la stînga și la dreapta în  $x_0$ .

Dacă  $f$  este continuă în  $x_0$ , atunci pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \in E$  avem  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ . Aceasta este adevarată în particular pentru sirurile  $x_n \rightarrow x_0$  cu  $x_n \leq x_0$ , deci  $f$  este continuă la stînga în  $x_0$  și pentru sirurile  $x_n \rightarrow x_0$  cu  $x_n \geq x_0$ , deci  $f$  este continuă la dreapta în  $x_0$ .

Reciproc, să presupunem că  $f$  este continuă la dreapta și la stînga în  $x_0$ . Aceasta înseamnă că pentru orice număr  $\epsilon > 0$ , putem găsi un număr  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , astfel încât dacă  $x \in E$ ,  $x \leq x_0$ , și  $|x - x_0| < \delta$  să avem

$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$  (deoarece  $f$  este continuă la stînga în  $x_0$ ) și dacă  $x \in E$ ,  $x \geqslant x_0$  și  $|x - x_0| < \delta$  să avem  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$  (deoarece  $f$  este continuă la dreapta în  $x_0$ ). Așadar, oricare ar fi  $x \in E$  cu  $|x - x_0| < \delta$  (fie că  $x \leqslant x_0$ , fie că  $x \geqslant x_0$ ), avem  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ , adică  $f$  este continuă în  $x_0$ .

**O b s e r v a t i e.** Dacă  $x_0$  este punct de acumulare al lui  $E$ , pentru care ambele limite laterale  $f(x_0 - 0)$  și  $f(x_0 + 0)$  au sens, funcția  $f$  este continuă în  $x_0$ , dacă și numai dacă limitele laterale există și sunt egale cu  $f(x_0)$ :

$$f(x_0 - 0) = f(x_0), \quad f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

*Exemplu.*

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{dacă } 1 < x \leqslant 2 \end{cases} \quad \text{definită pe } [0, 2].$$

$f(1 - 0) = -1$ ,  $f(1 + 0) = 1$ ,  $f(1) = -1$ , deci  $f(1 - 0) \neq f(1 + 0)$ . Funcția este continuă la stînga în 1, dar nu este continuă la dreapta în 1, deci nu este continuă în 1.

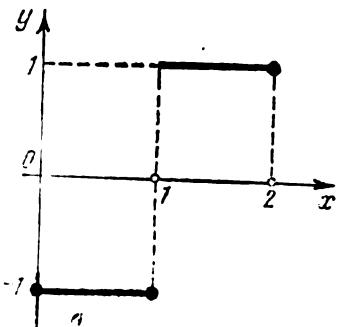


Fig. 61

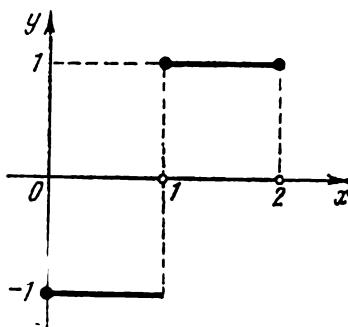


Fig. 62

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{dacă } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \quad \text{definită pe } [0, 2].$$

Avem  $f(1 - 0) = -1$ ,  $f(1 + 0) = 1$ ,  $f(1) = 1$ , deci  $f(1 - 0) = f(1 + 0)$ . Funcția este continuă la dreapta în 1, dar nu este continuă la stînga în 1, deci nu este continuă în 1.

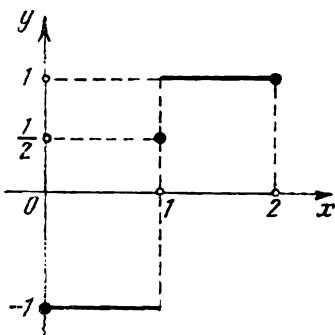


Fig. 63

$$3) \quad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } 0 \leqslant x < 1 \\ 0,5 & \text{dacă } x = 1 \\ 1 & \text{dacă } 1 < x \leqslant 2 \end{cases} \quad \text{definită pe } [0, 2].$$

Avem  $f(1 - 0) = -1$ ,  $f(1 + 0) = 1$ ,  $f(1) = 0,5$ , deci funcția nu este continuă nici la stînga, nici la dreapta în 1.

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{x} & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Avem  $f(0 - 0) = 1$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(0 + 0) = +\infty$ . Funcția este continuă la stânga în 0, dar nu este continuă la dreapta în 0.

$$5) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0, \\ 1 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Funcția are limite laterale infinite în 0, deci nu este continuă nici la stânga, nici la dreapta în 0.

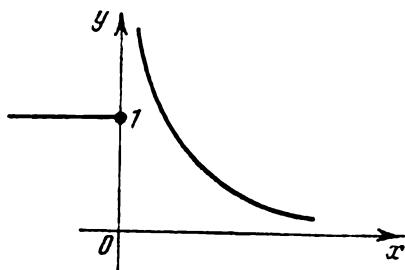


Fig. 64

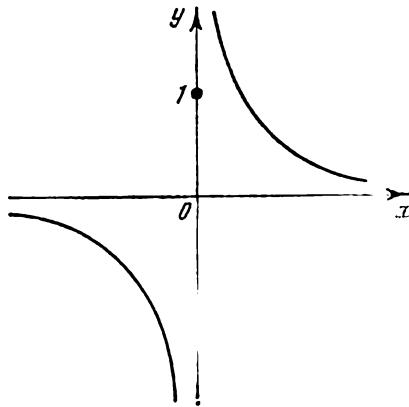


Fig. 65

## § 5. Proprietățile funcțiilor continue

### 1. Operații cu funcții continue

Vom arăta acum că efectuând operațiile obișnuite asupra funcțiilor continue, se obțin tot funcții continue.

**T e o r e m ă.** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  definite pe mulțimea  $E$  sunt continue intr-un punct  $x_0 \in E$ , atunci:

- 1)  $f + g$  este continuă în  $x_0$ ;
- 2)  $\alpha f$  este continuă în  $x_0$ , oricare ar fi  $\alpha \in R$ ;
- 3)  $fg$  este continuă în  $x_0$ ;
- 4) dacă  $g(x_0) \neq 0$  (adică dacă  $\frac{f}{g}$  este definită în  $x_0$ ), funcția  $\frac{f}{g}$  este continuă în  $x_0$ .
- 5) dacă  $f(x_0) \neq g(x_0)$  are sens, atunci funcția  $f^g$  este continuă în  $x_0$ .

Deoarece  $f$  și  $g$  sunt continue în  $x_0$ , pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in E$ ), avem  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  și  $g(x_n) \rightarrow g(x_0)$ , deci:

- 1)  $f(x_n) + g(x_n) \rightarrow f(x_0) + g(x_0)$ , adică  $f + g$  este continuă în  $x_0$ ;
- 2)  $\alpha f(x_n) \rightarrow \alpha f(x_0)$ , adică  $\alpha f$  este continuă în  $x_0$ ;
- 3)  $f(x_n) g(x_n) \rightarrow f(x_0) g(x_0)$ , adică  $fg$  este continuă în  $x_0$ ;

4) dacă  $g(x_0) \neq 0$ ,  $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ , adică  $\frac{f}{g}$  este continuă în  $x_0$ ;

5) dacă  $f(x_0)^{g(x_0)}$  are sens,  $f(x_n)^{g(x_n)} \rightarrow f(x_0)^{g(x_0)}$  adică  $f^g$  este continuă în  $x_0$ .

**O b s e r v a t i o n i.** 1° Luând în proprietatea 3)  $\alpha = -1$ , rezultă că dacă  $f$  este continuă în  $x_0$ , atunci  $-f$  este continuă în  $x_0$ .

2° Dacă  $f$  și  $g$  sunt continue în  $x_0$ , atunci  $f - g$  este continuă în  $x_0$ , deoarece  $f - g = f + (-g)$ .

3° Prin recurență se demonstrează că suma și produsul a  $n$  funcții continue în  $x_0$  sunt de asemenea continue în  $x_0$ .

4° Multimea funcțiilor definite pe  $E$  și continue într-un punct  $x_0 \in E$  este o *algebră*.

**C o r o l a r .** Dacă  $f$  și  $g$  sunt continue pe  $E$ , iar  $\alpha$  și  $\beta$  sunt numere reale, atunci funcțiile  $\alpha f + \beta g$  și  $fg$  sunt continue pe  $E$ , iar funcțiile  $\frac{f}{g}$  și  $f^g$  sunt continue pe domeniul lor de definiție.

**O b s e r v a t i o n i.** Multimea funcțiilor definite pe  $E$  și continue pe  $E$  este o *algebră*.

## 2. Proprietățile locale ale funcțiilor continue

**P r o p o z i t i o n a l a 1.** Dacă funcția  $f: E \rightarrow R$  este continuă în  $x_0 \in E$ , atunci funcția  $|f|$  este continuă în  $x_0$ .

Dacă  $x_0$  este punct izolat, atunci  $|f|$  este continuă în  $x_0$ . Dacă  $x_0$  este punct de acumulare al lui  $E$ , continuitatea lui  $f$  în  $x_0$  înseamnă

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

de unde

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|,$$

adică  $|f|$  este continuă în  $x_0$ .

**O b s e r v a t i o n i.** Este posibil ca  $|f|$  să fie continuă în  $x_0$  fără ca  $f$  să fie continuă în  $x_0$ .

**E x e m p l u .** Funcția  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ -1 & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$

este discontinuă în orice punct, deoarece nu are limită în nici un punct. Funcția  $|f|$  este continuă în orice punct, deoarece este constantă,  $|f(x)| \equiv 1$ .

**C o r o l a r u l 1.** Dacă  $f$  este continuă pe  $E$ , atunci  $|f|$  este continuă pe  $E$ .

**C o r o l a r u l 2.** Funcția  $f: E \rightarrow R$  este continuă în  $x_0$  (sau pe  $E$ ) dacă și numai dacă  $f^+$  și  $f^-$  sunt continue în  $x_0$  (sau pe  $E$ ).

Într-adevăr, dacă  $f$  este continuă atunci  $|f|$  este continuă și din egalitatele

$$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

rezultă că  $f^+$  și  $f^-$  sunt continue.

Reciproc, dacă  $f^+$  și  $f^-$  sunt continue, din egalitatea

$$f = f^+ - f^-$$

rezultă că și  $f$  este continuă.

**Corolarul 3.** Dacă funcțiile  $f, g : E \rightarrow R$  sunt continue în  $x_0$  (sau pe  $E$ ), atunci funcțiile  $\sup(f, g)$  și  $\inf(f, g)$  sunt continue în  $x_0$  sau pe  $E$ .

Într-adevăr, funcțiile  $f + g$  și  $f - g$  sunt continue, deci  $|f - g|$  este continuă și din egalitatea

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

rezultă că  $\sup(f, g)$  este continuă.

De asemenea, funcțiile  $-f$  și  $-g$  sunt continue, deci  $\sup(-f, -g)$  este continuă și din egalitatea

$$\inf(f, g) = -\sup(-f, -g)$$

rezultă că și  $\inf(f, g)$  este continuă.

**Propoziția 2.** Dacă funcția  $f : E \rightarrow R$  este continuă într-un punct  $x_0 \in E$  și dacă  $\alpha < f(x_0) < \beta$ , atunci există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât să avem  $\alpha < f(x) < \beta$ , pentru orice  $x \in V \cap E$ .

Mulțimea  $U = (\alpha, \beta)$  este vecinătate a lui  $f(x_0)$ . Deoarece  $f$  este continuă în  $x_0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât pentru orice  $x \in V \cap E$  să avem  $f(x) \in U$ , adică  $\alpha < f(x) < \beta$ .

**Corolarul 1.** Dacă  $f$  este continuă în  $x_0$ , atunci există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  pe care  $f$  este mărginită.

**Corolarul 2.** Dacă  $f$  este continuă în  $x_0$ , și dacă  $f(x_0) > 0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  astfel ca  $f(x) > 0$  pentru orice  $x \in V \cap E$ .

Se aplică propoziția precedentă pentru  $\alpha = 0$  și  $\beta > f(x_0)$  oarecare.

**Corolarul 3.** Dacă  $f$  este continuă în  $x_0$ , și dacă  $f(x_0) < 0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel ca  $f(x) < 0$  pentru orice  $x \in V \cap E$ .

Se aplică propoziția precedentă pentru  $\beta = 0$  și  $\alpha < f(x_0)$  oarecare.

**Corolarul 4.** Dacă  $f$  este continuă în  $x_0$  și dacă  $f(x_0) \neq 0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel ca  $f(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in V \cap E$ .

Într-adevăr,  $|f|$  este continuă în  $x_0$  și  $|f(x_0)| > 0$ , deci există o vecinătate a lui  $x_0$ , pe care avem  $|f(x)| > 0$ , adică  $f(x) \neq 0$ .

**Corolarul 5.** Dacă  $f$  este continuă în  $x_0$  și dacă în orice vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  există puncte în care  $f$  are valori  $< 0$  și puncte în care  $f$  are valori  $> 0$ , atunci  $f(x_0) = 0$ .

**Propozitia 3.** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  definite pe  $E$  sunt continue în punctul  $x_0 \in E$ , și dacă  $f(x_0) < g(x_0)$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel ca  $f(x) < g(x)$  pentru orice  $x \in V \cap E$ .

Alegem  $\alpha$  astfel ca  $f(x_0) < \alpha < g(x_0)$ . Există atunci două vecinătăți  $V_1$  și  $V_2$  ale lui  $x_0$ , astfel că dacă  $x \in V_1 \cap E$  să avem  $f(x) < \alpha$ , iar dacă  $x \in V_2 \cap E$  să avem  $g(x) > \alpha$ . Dar  $V = V_1 \cap V_2$  este o vecinătate a lui  $x_0$ . Dacă  $x \in V \cap E$ , atunci  $x \in V_1 \cap E$  și  $x \in V_2 \cap E$ , deci  $f(x) < \alpha$  și  $g(x) > \alpha$ , adică  $f(x) < \alpha < g(x)$ , de unde  $f(x) < g(x)$ .

**Propozitia 4.** Dacă  $f$  este continuă în  $x_0$ , atunci, pentru orice număr  $\varepsilon > 0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât, oricare ar fi punctele  $x'$ ,  $x'' \in V$ , să avem  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .

Într-adevăr, deoarece  $f$  este continuă în  $x_0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât pentru orice  $x \in V$  să avem

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dacă  $x'$ ,  $x'' \in V$  avem atunci

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &\leq |f(x') - f(x_0) + f(x_0) - f(x'')| \leq \\ &\leq |f(x') - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

### 3. Prelungirea prin continuitate a unei funcții

Fie o mulțime  $E$ , un punct de acumulare  $x_0 \in E$  și o funcție  $f$  definită pe  $E - \{x_0\}$ . Funcția se poate prelungi în mai multe feluri în punctul  $x_0$ , și anume dându-i în punctul  $x_0$  o valoare arbitrară. Este posibil ca nici una dintre aceste prelungiri să nu fie continuă în  $x_0$ .

Dacă însă funcția  $f$  are limită finită în punctul  $x_0$ , una dintre aceste prelungiri este continuă în  $x_0$ , după cum rezultă din următoarea

**Propozitie.** Dacă funcția  $f$  are limită finită  $y_0$  în punctul  $x_0$ , funcția  $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \neq x_0 \\ y_0 & \text{dacă } x = x_0, \end{cases}$  definită pe  $E$ , este continuă în  $x_0$ .

Într-adevăr, deoarece pentru  $x \neq x_0$ ,  $x \in E$  avem  $\tilde{f}(x) = f(x)$ , și deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ , rezultă că  $\tilde{f}$  are limita  $y_0$  în  $x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x) = y_0 = \tilde{f}(x_0)$$

adică  $\tilde{f}$  este continuă în  $x_0$ .

Funcția  $\tilde{f}$  se numește *prelungirea funcției f prin continuitate în punctul  $x_0$* .

Se spune de asemenea că funcția  $\tilde{f}$  se obține din funcția  $f$ , prelungind-o prin continuitate în  $x_0$ .

**Observație.** Dacă  $x_0 \in E$  este punct izolat, orice prelungire a lui  $f$  în  $x_0$  este continuă în  $x_0$ .

*Exemplu.* 1)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  definită pe  $R - \{0\}$ . Avem  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , deci  $f$  se poate prelungi prin continuitate în punctul 0.

Prelungirea sa prin continuitate este

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dacă } x \neq 0, \\ 1 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

2)  $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  definită pe  $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$ . Avem

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \text{ deci funcția}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{dacă } x \neq 0 \\ e & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

definită pe  $(-1, +\infty)$  este prelungirea prin continuitate a lui  $f$  în punctul 0.

3)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  definită pe  $R - \{0\}$ . Avem  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ , deci funcția  $f$  nu se poate prelungi prin continuitate în punctul 0. Într-adevăr, oricare ar fi  $\alpha \in R$ , funcția

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{dacă } x \neq 0 \\ \alpha & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

nu este continuă în 0.

4)  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  definită pe  $R - \{0\}$  nu are limită în punctul 0, deci nu se poate prelungi prin continuitate în 0.

5)  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  definită pe  $R - \{0\}$ . Avem

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \text{ pentru } x \neq 0,$$

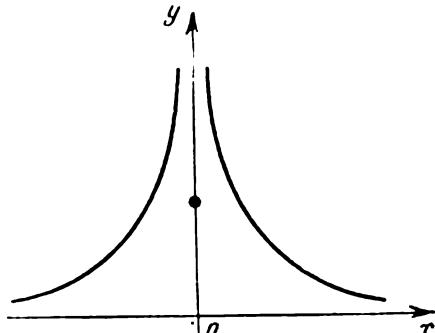


Fig. 66

deoarece  $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ . Deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ , rezultă că  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ , deci  $f$  se poate prelungi prin continuitate în 0, și anume:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

**O b s e r v a t i e.** După cum se va vedea mai departe (regula lui l'Hospital), problema prelungirii prin continuitate a fost, încă de la începuturile analizei matematice, o problemă care a preocupat mult pe matematicieni (Bernoulli, l'Hospital etc.). Cum însăși noțiunea de funcție nu era bine clarificată, se identifica o funcție cu prelungirea sa prin continuitate. Ulterior, dezvoltarea matematicilor moderne a impus necesitatea de a distinge între ele aceste două funcții.

#### 4. Proprietatea lui Darboux

Funcțiile continue definite pe un *interval* au proprietatea importantă că nu pot trece de la o valoare la alta fără a trece prin *toate* valorile intermediare, adică dacă iau două valori diferite, iau toate valorile cuprinse între ele. Mai precis:

**T e o r e m ă.** Dacă  $f$  este o funcție continuă pe un interval  $I$ , atunci oricare ar fi punctele  $a < b$  din  $I$ , și oricare ar fi numărul  $\lambda$  cuprins între  $f(a)$  și  $f(b)$ , există cel puțin un punct  $c_\lambda$  între  $a$  și  $b$ , astfel încât să avem  $f(c_\lambda) = \lambda$ .

Pentru a face o alegere, să presupunem că  $f(a) \leq f(b)$ . Dacă  $f(a) = f(b)$  și dacă  $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ , atunci  $\lambda = f(a)$  și luând  $c_\lambda = a$ , avem  $f(c_\lambda) = \lambda$ , și teorema este demonstrată în acest caz.

Să presupunem deci că  $f(a) < f(b)$  și fie  $\lambda$  un număr astfel că  $f(a) < \lambda < f(b)$ . Să notăm cu  $A$  mulțimea punctelor dintre  $a$  și  $b$  în care funcția  $f$  are valori  $\leq \lambda$ :

$$A = \{x | a \leq x \leq b, f(x) \leq \lambda\}.$$

Avem  $a \in A \subset [a, b]$ , deci  $A$  este nevidă și mărginită. Fie  $c = \sup A$ . Evident,  $a \leq c \leq b$ . Vom arăta că  $f(c) = \lambda$ . Într-adevăr, există un sir  $x_n \rightarrow c$ , format din puncte din  $A$  ( $x_n \leq c$ , eventual  $x_n = c$ , dacă  $c \in A$ ). Deoarece  $f$  este continuă pe  $I$ ,  $f$  este continuă în  $c$ , deci  $f(x_n) \rightarrow f(c)$ . Dar  $f(x_n) \leq \lambda$  (deoarece  $x_n \in A$ ) și prin trecere la limită obținem  $f(c) \leq \lambda$ .

Deoarece  $f(b) > \lambda$ , rezultă că  $c \neq b$ , și anume  $c < b$ . Dacă  $c < y < b$ , atunci  $f(y) > \lambda$  (deoarece dacă am avea  $f(y) \leq \lambda$ , atunci  $y \in A$ , deci  $y \leq c = \sup A$ ). Fie atunci un sir  $y_n \rightarrow c$ , astfel ca  $c < y_n < b$ . Deoarece  $f$  este continuă în  $c$ , avem  $f(y_n) \rightarrow f(c)$  și, deoarece  $f(y_n) > \lambda$ , prin trecere la limită obținem  $f(c) \geq \lambda$ . Din inegalitățile  $f(c) \leq \lambda$  și  $f(c) \geq \lambda$ , deducem  $f(c) = \lambda$ .

**O b s e r v a t i i.** 1° Condiția ca funcția  $f$  să fie definită pe un *interval* este esențială. Dacă funcția continuă  $f$  este definită pe o mulțime care

nu este un interval, ci, de exemplu, o reuniune de intervale disjuncte, este posibil ca funcția să ia două valori diferite, dar să nu mai ia nici o valoare intermedieră.

*Exemplu.* Funcția  $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } x < 0 \\ 1 & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$  definită pe  $R - \{0\}$  este continuă pe domeniul ei de definiție, ia numai valorile  $-1$  și  $1$  și nu mai ia nici o valoare intermedieră.

2° Proprietatea pusă în evidență în teorema precedentă nu este caracteristică funcțiilor continue. Darboux a dat un exemplu de funcție care are această proprietate și care nu este continuă în nici un punct.

Iată un exemplu simplu de funcție discontinuă într-un punct, care are proprietatea din enunțul teoremei:

$$\text{Funcția } f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases} \text{ definită pe } R \text{ este discontinuă în punctul } 0$$

(deoarece nu are limită în 0), și se verifică ușor că nu trece de la o valoare  $f(a)$  la o valoare  $f(b)$  fără a lua într-un interval  $(a, b)$  orice valoare cuprinsă între  $f(a)$  și  $f(b)$ .

Proprietatea pusă în evidență pentru funcțiile continue în teorema precedentă se numește *proprietatea lui Darboux*:

**D e f i n i ț i e .** O funcție  $f$  definită pe un interval  $I$  are proprietatea lui Darboux, dacă, oricare ar fi punctele  $a, b \in I$ ,  $a < b$ , și oricare ar fi numărul  $\lambda$  cuprins între  $f(a)$  și  $f(b)$ , există un punct  $c_\lambda$  cuprins între  $a$  și  $b$  astfel că  $f(c_\lambda) = \lambda$ .

Cu această definiție, teorema precedentă se enunță astfel: *Orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux*.

Se va arăta mai departe că și funcțiile derivate, definite pe un interval, au proprietatea lui Darboux. De aceea vom demonstra mai întâi cîteva propoziții pentru funcțiile cu proprietatea lui Darboux, care vor fi adevărate atât pentru funcțiile continue cât și pentru funcțiile derivate. În aceste propoziții funcțiile se consideră definite pe un interval  $I$ .

**P r o p o z i ț i a 1.** Fie funcția  $f: I \rightarrow R$  și  $a < b$  două puncte din  $I$ . Dacă  $f$  are proprietatea lui Darboux și dacă  $f(a) < 0$  și  $f(b) > 0$  (sau dacă  $f(a) > 0$  și  $f(b) < 0$ ) atunci există cel puțin un punct cuprins între  $a$  și  $b$  în care funcția se anulează.

Pentru demonstrație, se aplică definiția precedentă pentru  $\lambda = 0$ .

**C o r o l a r .** Dacă funcția  $f: I \rightarrow R$  are proprietatea lui Darboux și nu se anulează în nici un punct din  $I$ , atunci funcția păstrează același semn pe tot intervalul  $I$ .

Într-adevăr, dacă ar exista două puncte  $a$  și  $b$  din  $I$  în care funcția ar avea semne diferite, de exemplu  $f(a) < 0$  și  $f(b) > 0$ , atunci funcția s-ar anula cel puțin într-un punct din  $I$  cuprins între  $a$  și  $b$ , ceea ce ar contrazice ipoteza.

**O b s e r v a t i i .** Dacă funcția  $f: I \rightarrow R$  are proprietatea lui Darboux și nu se anulează pe  $I$ , pentru a vedea ce semn au *totale* valorile sale pe intervalul  $I$  este suficient să vedem semnul valorii funcției într-un *singur* punct din interval.

**P r o p o z i t i a 2.** O funcție  $f: I \rightarrow R$  are proprietatea lui Darboux dacă și numai dacă transformă orice interval  $J \subset I$ , tot într-un interval,  $f(J)$ .

Să presupunem întâi că  $f$  are proprietatea lui Darboux.

Fie intervalul  $J \subset I$ ; să notăm

$$m = \inf_{x \in J} f(x) = \inf f(J), \quad M = \sup_{x \in J} f(x) = \sup f(J).$$

Avem  $-\infty \leq m \leq M \leq +\infty$ . Dacă  $f$  este constantă pe  $J$  atunci mulțimea  $f(J)$  este formată dintr-un singur punct, deci este un interval (cu extremitățile egale) și propoziția este demonstrată în acest caz.

Să presupunem că  $f$  nu este constantă pe  $J$ , deci  $m < M$ . Să arătăm că mulțimea  $f(J)$  conține întregul interval  $(m, M)$ . Fie  $\lambda$  un număr oarecare din intervalul  $(m, M)$ , adică  $m < \lambda < M$ .

Deoarece  $m = \inf_{x \in J} f(x)$  și  $m < \lambda$  există un punct  $a \in J$  astfel ca  $m \leq f(a) < \lambda$ .

Deoarece  $M = \sup_{x \in J} f(x)$  și  $\lambda < M$ , există un punct  $b \in J$  astfel ca  $\lambda < f(b) \leq M$ .

Așadar,  $f(a) < \lambda < f(b)$ . Deoarece  $f$  are proprietatea lui Darboux, există un punct  $c_\lambda \in (a, b) \subset J$  astfel ca  $f(c_\lambda) = \lambda$  și deci  $\lambda \in f(J)$ .

Cum  $\lambda$  a fost ales arbitrar în intervalul  $(m, M)$  rezultă că  $(m, M) \subset f(J)$ .

Deoarece  $m$  și  $M$  sunt marginile mulțimii  $f(J)$ , această mulțime poate să mai conțină, în afară de punctele intervalului  $(m, M)$ , cel mult extremitățile  $m$  și  $M$  (dacă acestea sunt finite). Rezultă deci că  $f(J)$  este un interval.

Reciproc, să presupunem că oricare ar fi intervalul  $J \subset I$ , imaginea sa  $f(J)$  este tot un interval.

Fie atunci două puncte  $a < b$  din  $I$ .

Să notăm  $J = [a, b]$ ; atunci  $f(J)$  este un interval și avem  $f(a) \in f(J)$ ,  $f(b) \in f(J)$ ; deci dacă  $\lambda$  se află cuprins între  $f(a)$  și  $f(b)$ , atunci  $\lambda \in f(J)$ , deci există un punct  $c_\lambda \in [a, b]$  astfel ca  $f(c_\lambda) = \lambda$ , adică  $f$  are proprietatea lui Darboux, și cu aceasta propoziția este demonstrată.

**Corolar.** Dacă funcția  $f: I \rightarrow R$  are proprietatea lui Darboux, atunci  $f(I)$  este interval.

Observații. 1° Afirmația reciprocă nu este în general adevărată: dacă  $f(I)$  este interval, nu rezultă că  $f$  are proprietatea lui Darboux.

$$\text{Exemplu: } f := \begin{cases} 1 & \text{dacă } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \text{ definită pe } I = [-1, 1].$$

Aveam  $f(I) = [0, 1]$ , deci  $f(I)$  este interval, dar  $f$  nu are proprietatea lui Darboux pe  $I$ . Într-adevăr, dacă luăm intervalul  $J = [-1, 0] \subset I$  avem  $f(J) = \{0, 1\}$ , deci  $f(J)$  nu este interval între  $f(-1) = 1$  și  $f(0) = 0$ , funcția nu mai ia nici o valoare intermedie pe intervalul  $[-1, 0]$ .

2° Intervalele se numesc mulțimi conexe\* ale dreptei adică mulțimi formate dintr-o „singură bucată”. Cu această denumire, proprietatea exprimată în propoziția precedentă se enunță astfel:

O funcție are proprietatea lui Darboux dacă și numai dacă transformă mulțimile conexe tot în mulțimi conexe.

În spații topologice oarecare, această proprietate se poate lua ca definiție a funcțiilor cu proprietatea lui Darboux.

Se știe că o funcție strict monotonă este biunivocă, dar că există funcții biunivoce care nu sunt strict monotone.

Pentru funcțiile definite pe un interval care au proprietatea lui Darboux, este adevărată și afirmația reciprocă, după cum rezultă din

**Propoziția 3.** Dacă funcția  $f: I \rightarrow R$  are proprietatea lui Darboux și este biunivocă, atunci  $f$  este strict monotonă.

Să presupunem, prin absurd, că  $f$  nu este nici strict crescătoare, nici strict descrescătoare. Aceasta înseamnă că există trei puncte  $x_1 < x_2 < x_3$  din  $I$ , astfel încât să nu avem nici  $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$  și nici  $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$ , adică  $f(x_2)$  nu se află cuprins între  $f(x_1)$  și  $f(x_3)$ .

Pentru a face o alegere, să presupunem că  $f(x_1) < f(x_3)$ . Atunci avem:

sau  $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$  sau  $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ .

(Nu putem avea  $f(x_2) = f(x_1)$  sau  $f(x_2) = f(x_3)$ , deoarece  $x_2 \neq x_1$ ,  $x_2 \neq x_3$  și  $f$  este biunivocă.)

Deoarece  $f$  are proprietatea lui Darboux, în primul caz există un punct  $c_1$  cuprins între  $x_2$  și  $x_3$  (deci  $c_1 \neq x_1$ ), astfel ca  $f(c_1) = f(x_1)$ . În al

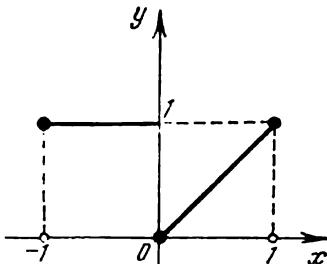


Fig. 67

\* Un spațiu topologic  $E$  este *conex* dacă nu există două mulțimi deschise, nevide și disjuncte, a căror reuniune să fie  $E$ . Se dă o definiție echivalentă a conexiunii, cu mulțimi închise, nevide și disjuncte.

doilea caz există un punct  $c_3$  cuprins între  $x_1$  și  $x_2$  (deci  $c_3 \neq x_3$ ), astfel ca  $f(c_3) = f(x_3)$ .

În ambele cazuri funcția ia aceeași valoare în două puncte diferite, deci nu este biunivocă, ceea ce contrazice ipoteza.

Rezultă deci că  $f$  este strict monotonă pe  $I$ .

**Propozitie 4.** Dacă funcția  $f: I \rightarrow R$  are proprietatea lui Darboux și dacă există una din limitele laterale într-un punct  $x_0 \in I$ , atunci ea este egală cu  $f(x_0)$ .

Să presupunem să există limita la stînga  $f(x_0 - 0)$  (finită sau infinită) și că ea este diferită de  $f(x_0)$ . Pentru a face o alegere, să presupunem că  $f(x_0 - 0) < f(x_0)$ .

Fie  $\lambda$  un număr astfel ca  $f(x_0 - 0) < \lambda < f(x_0)$ . Deoarece  $f(x_0 - 0) < \lambda$  există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  astfel încât pentru orice  $x < x_0$  din  $V \cap I$  să avem  $f(x) < \lambda$ . Fie  $a \in V \cap I$  astfel ca  $a < x_0$ , deci  $f(a) < \lambda < f(x_0)$ . Oricare ar fi  $x \in (a, x_0)$ ,  $a < x < x_0$ , avem  $x \in V$  deci  $f(x) < \lambda$ . Așadar, funcția nu ia valoarea  $\lambda$  în nici un punct cuprins între  $a$  și  $x_0$ , ceea ce contrazice ipoteza că  $f$  are proprietatea lui Darboux.

Așadar, dacă există  $f(x_0 - 0)$ , atunci  $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ . În mod asemănător se demonstrează că dacă există  $f(x_0 + 0)$ , atunci  $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ .

**Observație.** Propoziția afirmă că dacă există limita la stînga  $f(x_0 - 0)$ , atunci  $f$  este continuă la stînga în  $x_0$ , iar dacă există limita la dreapta  $f(x_0 + 0)$ , atunci  $f$  este continuă la dreapta în  $x_0$ . În particular, dacă există ambele limite laterale, funcția este continuă în  $x_0$ .

**Corolar.** Dacă funcția  $f: I \rightarrow R$  are proprietatea lui Darboux, atunci ea nu are nici un punct de discontinuitate de prima specie.

În adevăr, dacă există  $f(x_0 - 0)$  și  $f(x_0 + 0)$ , atunci avem  $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$ , deci  $x_0$  nu este punct de discontinuitate.

Rezultă deci că, dacă  $x_0$  este punct de discontinuitate, cel puțin una din limitele laterale nu există, deci  $x_0$  este punct de discontinuitate de speță a două.

**Observație.** Dacă  $f(x_0 + 0)$  sau  $f(x_0 - 0)$  există și este diferită de  $f(x_0)$ , în particular dacă este infinită, funcția nu are proprietatea lui Darboux.

*Exemplu.*

$$1) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \end{cases} \quad \text{definită pe } R.$$

Funcția are proprietatea lui Darboux. În punctul 0 funcția nu are nici limită la stînga, nici limită la dreapta.

$$2) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x} & \text{pentru } x > 0 \end{cases} \quad \text{definită pe } R.$$

Funcția are proprietatea lui Darboux. Avem  $f(0^-) = 1$  și  $f(0) = 1$ , deci  $f(0^-) = f(0)$ . Funcția nu are limită la dreapta în 0.

$$3) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x < 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & \text{pentru } x > 0 \end{cases} \quad \text{definită pe } R.$$

Avem  $f(0^-) = 1$  și  $f(0) = 0$ , deci  $f(0^-) \neq f(0)$ . Rezultă că funcția nu are proprietatea lui Darboux pe  $R$  (și pe nici un interval care conține pe 0).

$$4) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x < 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{dacă } x > 0 \end{cases} \quad \text{definită pe } R.$$

Avem  $f(0^+) = +\infty$ , deci funcția nu are proprietatea lui Darboux.

Deoarece o funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux, toate propozițiile relative la funcțiile cu proprietatea lui Darboux rămân adevărate și pentru funcții continue pe un interval:

**Corolarul 1.** Dacă o funcție continuă pe un interval  $I$  ia valori de semne contrare în două puncte  $a < b$  din  $I$ , atunci ea se anulează cel puțin într-un punct dintre  $a$  și  $b$ .

**Corolarul 2.** Dacă o funcție continuă nu se anulează pe un interval, atunci ea păstrează același semn pe acest interval.

**Corolarul 3.** Dacă  $f$  este continuă pe un interval  $I$ , atunci  $f(I)$  este interval.

**Corolarul 4.** Dacă  $f$  este biunivocă și continuă pe un interval  $I$ , atunci  $f$  este strict monotonă pe  $I$ .

**Observație.** Dacă funcția este biunivocă și continuă pe o mulțime care nu este interval, s-ar putea ca funcția să nu fie strict monotonă pe această mulțime.

$$\text{Exemplu. } \text{Funcția } f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } 0 \leq x < 1 \\ x - 3 & \text{dacă } 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{definită pe } [0,1) \cup (1,2]$$

este continuă și biunivocă. Funcția este strict crescătoare pe fiecare din intervalele  $[0, 1)$  și  $(1, 2]$ , dar nu este strict crescătoare pe reuniunea lor, deoarece  $f(0) = 0$  și  $f(2) = -1$ .

**Aplicații.** Folosind proprietatea: dacă  $f$  este continuă pe un interval  $I$ , atunci  $f(I)$  este interval; vom determina mulțimea valorilor unor funcții elementare.

1) Funcția  $f(x) = x^n$ ,  $n \in N$ , definită pe  $I = [0, +\infty)$  este continuă, deci  $f(I)$  este interval, și anume  $f(I) = [0, +\infty)$ .

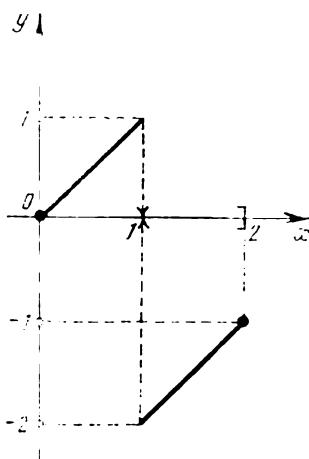


Fig. 68

Într-adevăr,  $f(0) = 0$  și  $m = \inf_{x>0} x^n = 0$ ; pe de altă parte  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ , deci  $x^n$  ia valori oricât de mari și deci:

$M = \sup_{x>0} x^n = +\infty$ . Deoarece  $m = 0 \in f(I)$ , rezultă că  $f(I) = [0, +\infty)$ .

2) Funcția  $f(x) = x^{2n-1}$ ,  $n \in N$ , definită pe  $R = (-\infty, +\infty)$  este continuă, deci  $f(R)$  este interval, și anume  $f(R) = R$ .

Aveam  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n-1} = -\infty$  și  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n-1} = +\infty$ , deci funcția ia valori oricât de departe spre  $-\infty$  și oricât de departe spre  $+\infty$ . Rezultă  $m = \inf_{x \in R} x^{2n-1} = -\infty$  și  $M = \sup_{x \in R} x^{2n-1} = +\infty$ , deci  $f(R) = (-\infty, +\infty) = R$ .

3) Funcția  $f(x) = a^x$ , ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) definită pe  $R$  este continuă, deci  $f(R)$  este interval și anume  $f(R) = (0, +\infty)$ .

Într-adevăr, dacă  $a > 1$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty,$$

deci

$$m = \inf_{x \in R} a^x = 0 \quad \text{și} \quad M = \sup_{x \in R} a^x = +\infty.$$

Deoarece funcția  $a^x$  nu ia valoarea 0, rezultă că  $f(R) = (0, +\infty)$ . În cazul cind  $0 < a < 1$ , se demonstrează la fel.

4) Funcția  $f(x) = \sin x$  definită pe  $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  este continuă pe  $I$ . Rezultă că  $f(I)$  este interval, și anume  $f(I) = [-1, 1]$ .

Aveam  $-1 \leq f(x) \leq 1$ , deci  $(-1, 1) \subset f(I)$ . Dar  $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$  și  $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ , deci  $-1 \in f(I)$ , și  $1 \in f(I)$  de unde rezultă că

$$f(I) = [-1, 1].$$

5)  $f(x) = \cos x$  definită pe  $I = [0, \pi]$  este continuă pe  $I$ . Rezultă că  $f(I)$  este interval și se arată ca la exemplul 4 că  $f(I) = [-1, 1]$ .

6)  $f(x) = \operatorname{tg} x$  definită pe  $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  este continuă pe  $I$ . Rezultă că  $f(I)$  este interval, și anume  $f(I) = R = (-\infty, +\infty)$ .

**Intr-adevăr**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x < -\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = -\infty \text{ și } \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = +\infty,$$

deci

$$m = \inf_{x \in I} \operatorname{tg} x = -\infty \text{ și } M = \sup_{x \in I} \operatorname{tg} x = +\infty,$$

de unde  $f(I) = (-\infty, +\infty) = R$ .

7)  $f(x) = \operatorname{ctg} x$  definită pe  $I = (0, \pi)$  este continuă pe  $I$ . Rezultă că  $f(I)$  este interval și se arată ca în exemplul 6 că  $f(I) = R = (-\infty, +\infty)$ .

**5. Rezolvarea ecuațiilor  $x^n = a$  și  $a^x = b$** 

**Intr-un capitol anterior s-a demonstrat existența și unicitatea soluției pozitive a ecuației  $x^n = a$  ( $a \geq 0$ ,  $n$  natural) și a soluției ecuației  $a^x = b$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ). Vom da acum demonstrații mai simple ale existenței soluțiilor acestor ecuații.**

1) *Ecuația  $x^n = a$ ,  $a \geq 0$ ,  $n \in N$  are o soluție pozitivă și numai una.*

Intr-adevăr, funcția  $f(x) = x^n$  aplică semidreapta  $I = [0, +\infty)$  pe întregă semidreaptă  $[0, +\infty)$ , adică  $f(I) = [0, +\infty)$ . Deoarece  $a > 0$ , avem  $a \in f(I) = [0, +\infty)$ , deci există un punct  $x_0 \in I$  ( $x_0 \geq 0$ ) astfel ca  $f(x_0) = a$ , adică astfel ca  $x_0^n = a$ . Aceasta înseamnă că  $x_0$  este o soluție pozitivă a ecuației. Deoarece funcția  $x^n$  este strict crescătoare, este biunivocă, deci nu poate lua valoarea  $a$  decât în punctul  $x_0$ , deci  $x_0$  este singura soluție pozitivă a acestei ecuații.

După cum se știe, soluția pozitivă  $x_0$  a ecuației  $x^n = a$  s-a notat cu  $\sqrt[n]{a}$ .

2) *Ecuația  $x^{2n-1} = a$ ,  $a < 0$ ,  $n \in N$  are o soluție strict negativă și numai una.*

Intr-adevăr, funcția  $f(x) = x^{2n-1}$  aplică dreapta  $R$  pe întreaga dreaptă  $R$ , adică  $f(R) = R$ . Există deci un punct  $x_0 \in R$ , astfel că  $f(x_0) = a$ , adică astfel că  $x_0^{2n-1} = a$ . Aceasta înseamnă că  $x_0$  este soluția ecuației  $x^{2n-1} = a$ . Deoarece funcția  $x^{2n-1}$  este strict crescătoare pe  $R$ , ea nu mai poate lua valoarea  $a$  în alt punct afară de  $x_0$ , deci  $x_0$  este singura soluție a ecuației. Să observăm că dacă am avea  $x_0 \geq 0$ , atunci  $x_0^{2n-1} \geq 0$  și deoarece  $a < 0$ , nu am putea avea  $x_0^{2n-1} = a$ . Așadar,  $x_0 < 0$ , adică este o soluție strict negativă a ecuației, care s-a notat  $\sqrt[2n-1]{a}$ .

3) *Ecuația  $a^x = b$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ , are o soluție reală și numai una.*

Intr-adevăr, funcția  $f(x) = a^x$  aplică dreapta  $R$  pe întreaga semidreaptă  $(0, +\infty)$ , adică  $f(R) = (0, +\infty)$ . Deoarece  $b > 0$ , avem  $b \in f(R) = (0, +\infty)$ , deci există  $x_0 \in R$ , astfel ca  $a^{x_0} = b$ . Faptul că  $x_0$  este sin-

gura soluție a acestei ecuații rezultă din aceea că funcția  $f(x) = a^x$  este strict monotonă pe  $R$ .

Soluția  $x_0$  a ecuației  $a^x = b$  s-a notat  $\log_a b$ .

## 6. Continuitatea funcțiilor compuse

Fie funcțiile  $u: E \rightarrow F$  și  $\varphi: F \rightarrow R$ .

Să considerăm funcția compusă  $f = \varphi \circ u: E \rightarrow R$ ,  $f(x) = \varphi(u(x))$  pentru  $x \in E$ .

**T e o r e m ā.** Dacă funcția  $u$  este continuă într-un punct  $x_0 \in E$  și dacă funcția  $\varphi$  este continuă în punctul corespunzător  $u_0 = u(x_0) \in F$ , atunci funcția compusă  $f = \varphi \circ u$  este continuă în punctul  $x_0 \in E$ .

Fie  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \in E$ . Deoarece  $u$  este continuă în  $x_0$ , avem  $u(x_n) \rightarrow u(x_0) = u_0$ . Să notăm  $u_n = u(x_n) \in F$ . Deoarece  $u_n \rightarrow u_0$  și  $\varphi$  este continuă în  $u_0$ , avem  $\varphi(u_n) \rightarrow \varphi(u_0)$ , adică  $\varphi(u(x_n)) \rightarrow \varphi(u(x_0))$ , sau  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ , adică  $f$  este continuă în  $x_0$ .

**O b s e r v a ᄃ i i.** Dacă  $x_0 \in E$  este punct de acumulare al lui  $E$  și  $u_0 = u(x_0) \in F$  este punct de acumulare al lui  $F$ , continuitatea în  $x_0$  și  $u_0$  se poate formula cu ajutorul limitelor:

Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0) = u_0$  și dacă  $\lim_{u \rightarrow u_0} \varphi(u) = \varphi(u_0)$ , atunci :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(u(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} \varphi(u) = \varphi(\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)).$$

**C o r o l a r .** Dacă  $u$  este continuă pe  $E$  și  $\varphi$  este continuă pe  $F$ , atunci  $f = \varphi \circ u$  este continuă pe  $E$ .

(Prin compunerea a două funcții continue se obține tot o funcție continuă.)

## 7. Continuitatea funcțiilor inverse

Vom demonstra mai întâi următoarea

**P r o p o z i ᄃ i e .** Dacă funcția  $f: E \rightarrow R$  este monotonă și dacă multimea valorilor,  $f(E)$ , este un interval, atunci  $f$  este continuă pe  $E$ .

Vom considera cazul cînd  $f$  este crescătoare pe  $E$ . Fie  $x_0 \in E$  arbitrar și  $y_0 = f(x_0)$ . Fie  $U$  o vecinătate a lui  $y_0$ . Să presupunem întâi că  $y_0$  este punct interior al intervalului  $f(E)$ ; există atunci un interval închis  $[\alpha, \beta] \subset f(E) \cap U$  astfel ca  $y_0 \in (\alpha, \beta)$  (fig. 69). Deoarece  $\alpha, \beta \in f(E)$ , există două puncte  $\alpha', \beta' \in E$  astfel ca  $\alpha = f(\alpha')$  și  $\beta = f(\beta')$ . Deoarece  $f$  este crescătoare și  $\alpha < y_0 < \beta$ , avem  $\alpha' < x_0 < \beta'$ , deci  $V = (\alpha', \beta')$  este o vecinătate a lui  $x_0$ . Pentru orice  $x \in V$ , avem  $\alpha' < x < \beta'$ , deci  $f(\alpha') \leq f(x) \leq f(\beta')$ , adică  $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ , adică  $f(x) \in [\alpha, \beta] \subset U$ .

Rezultă, aşadar, că  $f$  continuă în  $x_0$ .

Să presupunem că  $y_0$  este extremitatea stângă a intervalului  $f(E)$ , deci  $y_0 \leq f(x)$  pentru orice  $x \in E$ . Deoarece  $f$  este crescătoare, pentru orice punct  $x < x_0$  din  $E$  avem  $f(x) \leq f(x_0) = y_0$ , deci  $f(x) = y_0$ . Fie  $U$  o vecinătate a lui  $y_0$  și  $\beta$  un punct din  $f(E) \cap U$ , astfel ca  $y_0 < \beta$  (fig. 70).

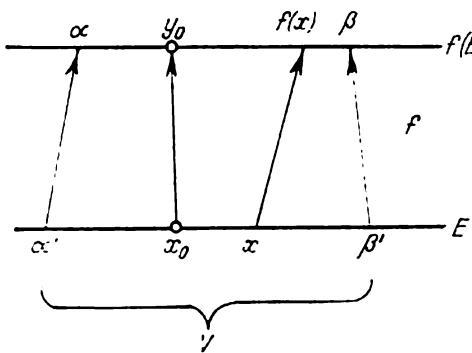


Fig. 69

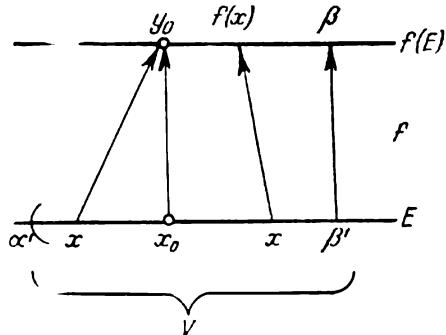


Fig. 70

Există un punct  $\beta' \in E$ , astfel ca  $f(\beta') = \beta$ . Deoarece  $f$  este crescătoare și  $y_0 < f(\beta')$  avem  $x_0 < \beta'$ . Luând  $\alpha' < x_0$  oarecare, intervalul  $V = (\alpha', \beta')$  este o vecinătate a lui  $x_0$ .

Fie  $x \in V$  oarecare. Dacă  $x \leq x_0$ , atunci  $f(x) = y_0$ , deci  $f(x) \in U$ ; dacă  $x_0 < x < \beta'$ , atunci  $y_0 < f(x) < \beta$ , deci  $f(x) \in U$ . Aşadar, pentru orice  $x \in V$  avem  $f(x) \in U$ , deci  $f$  este continuă în  $x_0$ .

Dacă  $y_0$  este extremitatea dreaptă a intervalului  $f(E)$ , se raționează la fel.

Dacă  $f$  este descrescătoare, atunci  $-f$  este crescătoare și  $-f(E)$  este simetricul intervalului  $f(E)$  față de origine și deci  $-f(E)$  este interval; conform celor de mai sus,  $-f$  este continuă pe  $E$ . Atunci  $f$  este de asemenea continuă pe  $E$ .

**Theoremă.** Dacă  $f$  este o aplicație strict monotonă a unui interval  $I$  pe un interval  $J$ , atunci funcția  $f$  și inversa sa  $f^{-1}$  sunt continue.

Într-adevăr,  $f$  și  $f^{-1}$  sunt ambele strict monotone; deoarece  $f(I) = J$  este interval,  $f$  este continuă pe  $I$ . De asemenea,  $f^{-1}(J) = I$  și  $I$  este interval, deci  $f^{-1}$  este continuă pe  $J$ .

**Corolar.** Dacă  $f: I \rightarrow R$  este o funcție continuă și strict monotonă definită pe intervalul  $I$ , atunci funcția sa inversă  $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$  este continuă pe  $f(I)$ .

Într-adevăr,  $f^{-1}$  este strict monotonă și este definită pe  $J = f(I)$  care este interval.

*Exemplu.* 1) Funcția  $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  este continuă și strict crescătoare.

Rezultă că și funcția sa inversă arc sin:  $[-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  este continuă (și strict crescătoare). Așadar,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \text{arc sin } x = \text{arc sin } x_0, -1 \leq x_0 \leq 1.$$

2) Funcția cos:  $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  fiind continuă și strict descrescătoare, funcția sa inversă arc cos:  $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  este continuă (și strict descrescătoare). Așadar,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \text{arc cos } x = \text{arc cos } x_0, -1 \leq x_0 \leq 1.$$

3) Funcția tg:  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-\infty, +\infty)$  este continuă și strict crescătoare, deci funcția sa inversă arc tg:  $(-\infty, +\infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  este continuă (și strict crescătoare). Așadar,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \text{arc tg } x = \text{arc tg } x_0, x_0 \in R.$$

4) Funcția ctg:  $(0, \pi) \rightarrow (-\infty, +\infty)$  este continuă și strict descrescătoare, deci funcția sa inversă arc tg:  $(-\infty, +\infty) \rightarrow (0, \pi)$  este continuă (și strict descrescătoare). Așadar,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \text{arc ctg } x = \text{arc ctg } x_0, x_0 \in R.$$

## 8. Proprietățile funcțiilor continue pe mulțimi compacte

Fie funcția  $f: E \rightarrow R$ . Reamintim că  $f$  este mărginită pe  $E$  dacă mulțimea  $f(E)$  este mărginită, adică dacă există un număr  $M > 0$  astfel încât, oricare ar fi  $x \in E$ , să avem:

$$|f(x)| \leq M.$$

**Theoremă 1. O funcție continuă pe o mulțime compactă este mărginită pe această mulțime.**

Fie  $E$  o mulțime compactă și funcția  $f: E \rightarrow R$  continuă pe această mulțime.

Să presupunem, prin absurd, că  $f$  nu este mărginită pe  $E$ . Aceasta înseamnă că, pentru orice număr  $M > 0$ , există un punct  $x_M \in E$  astfel încât  $|f(x_M)| > M$ .

Luând  $M = n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), găsim un punct  $x_n \in E$  astfel ca  $|f(x_n)| > n$ . Am obținut astfel un sir  $(x_n)$  de puncte din  $E$ . Dar  $E$  fiind compactă, este mărginită, deci sirul  $(x_n)$  este mărginit. Conform lemei lui Cesàro, el conține un subșir convergent,  $x_{n_p} \xrightarrow{p} x_0$ . Deoarece  $E$  este com-

păctă; este închisă, deci o dată cu termenii șirului  $(x_{n_p})$  conține și limita sa,  $x_0 \in E$ . Funcția  $f$ , fiind continuă pe  $E$ , este în particular continuă în  $x_0$ , deci deoarece  $x_{n_p} \xrightarrow{p} x_0$  re ultă că  $f(x_{n_p}) \xrightarrow{p} f(x_0)$  și deci  $|f(x_{n_p})| \xrightarrow{p} |f(x_0)|$ . Dar din inegalitățile  $|f(x_{n_p})| > n_p$ , deducem că  $|f(x_{n_p})| \xrightarrow{p} +\infty$ , deoarece  $n_p \xrightarrow{p} +\infty$ . Am ajuns astfel la o contradicție (deoarece  $|f(x_0)|$  este finit).

Rezultă, aşadar, că  $f$  este mărginită.

**Observație.** Dacă mulțimea nu este compactă, este posibil ca o funcție continuă pe  $E$  să nu fie mărginită.

**Exemplu.** 1)  $f(x) = \frac{1}{x}$  definită

pe  $I = (0, 1)$  este continuă pe  $I$ , dar nu este mărginită. Aici, intervalul  $I$  este mărginit dar nu este închis.

2)  $f(x) = x$  definită pe  $I = [0, +\infty)$  este continuă pe  $I$ , dar nu este mărginită. Aici, intervalul  $I$  este închis, dar nu este mărginit.

**Theoremă 2.** Dacă  $f$  este o funcție continuă pe o mulțime compactă  $E$ , atunci  $f(E)$  este compactă.

Din teorema 1 rezultă că  $f$  este mărginită pe  $E$ , adică mulțimea  $f(E)$  este mărginită. Rămîne de arătat că este închisă. Pentru aceasta este suficient să arătăm că, oricare ar fi șirul convergent format din puncte din  $f(E)$ , limita sa aparține de asemenea lui  $f(E)$ .

Fie  $y_n \rightarrow y_0$ ,  $y_n \in f(E)$ . Pentru fiecare  $n$ , există un punct  $x_n \in E$  astfel ca  $f(x_n) = y_n$ . Am obținut astfel un șir  $(x_n)$  de puncte din  $E$ . Se arată că în demonstrația teoremei precedente că  $(x_n)$  conține un subșir  $x_{n_p} \rightarrow x_0 \in E$ . Deoarece  $f$  este continuă în  $x_0$  deducem  $f(x_{n_p}) \xrightarrow{p} f(x_0) \in f(E)$ , și, deoarece  $f(x_{n_p}) = y_{n_p}$ , rezultă  $y_{n_p} \xrightarrow{p} f(x_0)$ . Dar, deoarece  $y_n \rightarrow y_0$  și  $(y_{n_p})$  este un subșir al șirului  $(y_n)$ , rezultă că  $y_{n_p} \xrightarrow{p} y_0$ , și, cum limita unui șir este unică, deducem  $y_0 = f(x_0)$ , de unde  $y_0 \in f(E)$ , și teorema este demonstrată.

Acest rezultat se enunță prescurtat astfel: *imaginea unei mulțimi compacte printr-o funcție continuă este o mulțime compactă*.

**Observație.** Dacă  $E$  nu este compact, este posibil ca  $f(E)$  să nu fie compact.

**Exemplu.** 1)  $f(x) = x$  definită pe  $I = (0, 1)$ . Avem  $f(I) = (0, 1)$ .

Mulțimea  $f(I)$  este mărginită, dar nu este închisă.

2)  $f(x) = \frac{1}{x}$  definită pe  $I = (0, 1)$ . Avem  $f(I) = [1, +\infty)$ .

Mulțimea  $f(I)$  este închisă dar nu este mărginită.

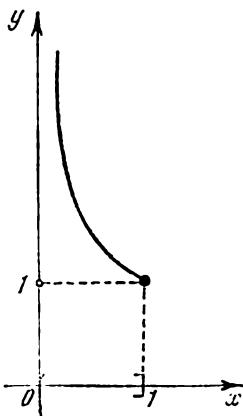


Fig. 71

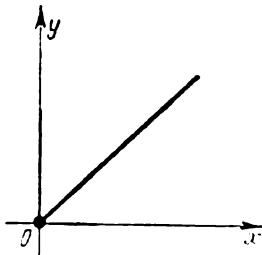


Fig. 72

**C o r o l a r .** Imaginea unui interval compact printr-o funcție continuă este un interval compact.

Într-adevăr, conform proprietății lui Darboux, imaginea unui interval printr-o funcție continuă este un interval. Restul corolarului rezultă din teorema precedentă.

Spunem că o funcție minorată  $f: E \rightarrow R$  își atinge marginea inferioară  $m = \inf_{x \in E} f(x)$ , dacă există un punct  $x_m \in E$  astfel ca  $m = f(x_m)$ .

Spunem că o funcție majorată  $f: E \rightarrow R$  își atinge marginea superioară  $M = \sup_{x \in E} f(x)$ , dacă există un punct  $x_M \in E$  astfel ca  $f(x_M) = M$ .

**T e o r e m a 3. O funcție continuă pe o mulțime compactă își atinge marginile pe această mulțime.**

Fie  $f: E \rightarrow R$  continuă și  $E$  compactă. Mulțimea  $f(E)$  este compactă, adică închisă și mărginită. Să notăm  $M = \sup f(E)$  și  $m = \inf f(E)$ . Deoarece  $f(E)$  este închisă, avem  $m \in f(E)$  și  $M \in f(E)$ .

Există deci două puncte  $x_m \in E$  și  $x_M \in E$  astfel ca

$$f(x_m) = \inf f(E) = \inf_{x \in E} f(x),$$

$$f(x_M) = \sup f(E) = \sup_{x \in E} f(x)$$

și teorema este demonstrată.

**O b s e r v a t i i.** 1° Deoarece  $m \leq f(x) \leq M$  pentru orice  $x \in E$ , rezultă că  $f(E) \subset [m, M]$ .

2° Dacă  $E$  nu este compactă, este posibil ca  $f$  să fie mărginită fără ca să-și atingă marginile.

*Exemplu.*  $f(x) = x$  definită pe  $E = (0, 1)$ . Avem  $m = \inf_{x \in I} f(x) = 0$  și  $M = \sup_{x \in I} f(x) = 1$ , dar funcția  $f(I) = (0, 1)$ , deci  $f$  nu ia în nici un punct nici valoarea  $m = 0$ , nici valoarea  $M = 1$ .

## 9. Funcții uniform continue

Fie funcția  $f: E \rightarrow R$ . A spune că  $f$  este continuă pe  $E$  înseamnă că pentru orice  $x \in E$ ,  $f$  este continuă în  $x$ , adică:

*Oricare ar fi*  $x \in E$  și *oricare ar fi*  $\epsilon > 0$ , *există un număr*  $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$ , *astfel încât, oricare ar fi*  $x' \in E$  cu  $|x' - x| < \delta$ , să avem  $|f(x') - f(x)| < \epsilon$ .

Pentru un punct  $x \in E$ , fixat, corespondența  $\epsilon \rightarrow \delta(\epsilon, x)$  caracterizează într-un anumit sens „gradul” de continuitate al funcției  $f$  în punctul  $x$ .

tul  $x$ . Dacă  $x'$  este alt punct din  $E$ , și dacă pentru fiecare  $\varepsilon > 0$  avem  $\delta(\varepsilon, x') \leq \delta(\varepsilon, x)$ , am putea spune că funcția este „mai continuă” în punctul  $x'$  decât în punctul  $x$ .

Evident, în cazul a două puncte (sau al unui număr finit de puncte), putem alege totdeauna același  $\delta(\varepsilon)$ , și anume pe cel mai mic dintre numerele  $\delta(\varepsilon, x')$  și  $\delta(\varepsilon, x)$ .

În cazul unei multimi infinite de puncte din  $E$ , nu mai este totdeauna posibil să alegem același  $\delta(\varepsilon) > 0$ , deoarece s-ar putea ca pentru un  $\varepsilon > 0$  fixat, marginea inferioară a numerelor  $\delta(\varepsilon, x)$  să fie 0. Am putea spune că, în acest caz, funcția nu este „la fel de continuă” în toate punctele.

Dacă este posibil ca pentru fiecare  $\varepsilon > 0$  să găsim un număr  $\delta(\varepsilon) > 0$  unic, același pentru toate punctele  $x \in E$  (adică  $\delta$  să depindă numai de  $\varepsilon$ , dar nu și de  $x$ ), atunci am putea spune că funcția este „la fel de continuă” în toate punctele din  $E$ , sau că este *uniform continuă pe E*. În acest caz, deoarece  $\delta$  nu mai depinde de  $x$ , afirmația „oricare ar fi  $x \in E$ ” trebuie să figureze după afirmația relativă la  $\delta$ . Așadar:

**Definiție.** O funcție  $f: E \rightarrow R$  este *uniform continuă* (pe  $E$ ) dacă, oricare ar fi  $\varepsilon > 0$ , există un număr  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât, oricare ar fi  $x'$  și  $x''$  din  $E$  cu  $|x' - x''| < \delta$ , să avem  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .

**Observație.** Din punct de vedere geometric, a spune că  $f$  este uniform continuă înseamnă că, dacă alegem pe axa  $Ox$  un interval  $I$  de lungime  $< \delta$ , imaginea sa  $f(I)$  are lungimea  $< \varepsilon$ , oriunde s-ar afla  $I$  în mulțimea  $E$ .

**Exemplu.** 1) Funcția constantă  $f(x) \equiv c$  definită pe  $R$  este uniform continuă pe  $R$ .

Într-adevăr,  $|f(x') - f(x'')| = |c - c| = 0$ , deci pentru orice  $\varepsilon > 0$  putem alege  $\delta(\varepsilon) = 1$  și atunci, dacă  $|x' - x''| < \delta$ , avem într-adevăr  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .

2) Funcția identică  $f(x) = x$  definită pe  $R$  este uniform continuă pe  $R$ .

Într-adevăr,  $|f(x') - f(x'')| = |x' - x''|$ , deci pentru fiecare  $\varepsilon > 0$  putem alege  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$  și atunci, dacă  $|x' - x''| < \delta$  avem într-adevăr  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .

3) Funcția  $f(x) = x^2$  definită pe  $R$  nu este uniform continuă pe  $R$ .

Să presupunem prin absurd că funcția ar fi uniform continuă pe  $R$ . Fie  $\varepsilon > 0$ ; există deci  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât dacă  $|x' - x''| < \delta$  să avem  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ . Dacă alegem punctele  $x'$  și  $x''$  astfel ca  $|x' - x''| = \delta$  avem  $|f(x') - f(x'')| = |x'^2 - x''^2| = |x' - x''||x' + x''| = \delta|x' + x''|$ .

Această egalitate este îndeplinită oriunde s-ar afla  $x'$  și  $x''$  pe dreapta.

Să luăm atunci  $x' > \frac{\varepsilon}{\delta}$  și  $x'' > \frac{\varepsilon}{\delta}$ , ( $|x' - x''| = \delta$ ).

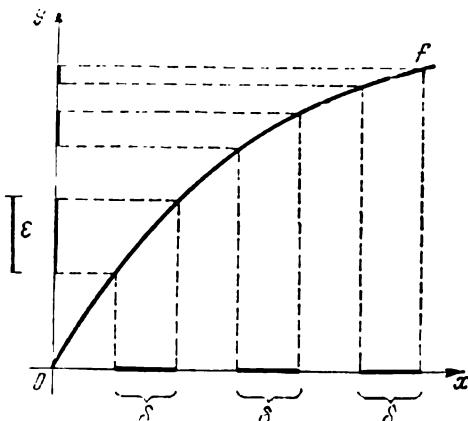


Fig. 73

Atunci  $|x' + x''| = x' + x'' > \frac{2\epsilon}{\delta}$  și deci

$$|x'^2 - x''^2| = \delta |x' + x''| > \delta \frac{2\epsilon}{\delta} = 2\epsilon,$$

adică  $|f(x') - f(x'')| > 2\epsilon$ , ceea ce contrazice inegalitatea  $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$  obținută mai sus.

Așadar,  $f(x) = x^2$  nu este uniform continuă pe  $R$ .

**Propozitie.** Orice funcție uniform continuă este continuă.

Această propoziție rezultă din definiția continuității uniforme luând  $x_0 = x''$  și înindu-l fixat.

**Observații.** 1° Proprietatea de continuitate are un caracter *punctual*, ea se definește într-un punct. Proprietatea de continuitate uniformă are un caracter *global*, ea se definește pe o mulțime.

2° Afirmația reciprocă propoziției precedente nu este în general adevărată: există funcții continue care nu sunt uniform continue, de exemplu funcția  $f(x) = x^2$  definită pe  $R$ .

Dacă însă domeniul de definiție este *compact*, este adevărată și afirmația reciprocă:

**Teorema.** O funcție continuă pe o mulțime compactă este uniform continuă pe această mulțime.

Întră  $E$  o mulțime *compactă* (închisă și mărginită), și o funcție continuă  $f: E \rightarrow R$ . Să arătăm că  $f$  este uniform continuă pe  $E$ . Să presupunem, prin absurd, că  $f$  nu este uniform continuă pe  $E$ . Aceasta înseamnă că: există un număr  $\epsilon_0 > 0$ , astfel încât, oricare ar fi numărul  $\delta > 0$ , există două puncte  $x'_\delta$  și  $x''_\delta$  din  $E$  astfel încât  $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$  dar  $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| > \epsilon_0$ .

Luând  $\delta = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , obținem două siruri  $(x'_n)$  și  $(x''_n)$  de puncte din  $E$ , astfel ca pentru orice  $n \in N$  să avem

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \text{ și } |f(x'_n) - f(x''_n)| > \epsilon_0.$$

Mulțimea  $E$  este mărginită (fiind compactă), deci și sirul  $(x'_n)$  este mărginit. În baza lemei lui Cesăro, el conține un subșir convergent  $x'_{n_p} \xrightarrow{p} x_0$ , iar limita  $x_0$  aparține lui  $E$ , deoarece  $E$  este închisă.

Deoarece  $|x'_{n_p} - x''_{n_p}| < \frac{1}{n_p} \xrightarrow{p} 0$ , deducem că

$$x'_{n_p} - x''_{n_p} \xrightarrow{p} 0,$$

deci:  $x''_{n_p} = x'_{n_p} - (x'_{n_p} - x''_{n_p}) \xrightarrow{p} x_0 - 0 = x_0$ .

Deoarece  $x'_{n_p} \rightarrow x_0$  și  $x''_{n_p} \rightarrow x_0$ , iar  $f$  este continuă în  $x_0$  (fiind continuă pe  $E$ ), deducem

$$f(x'_{n_p}) \xrightarrow{p} f(x_0) \text{ și } f(x''_{n_p}) \xrightarrow{p} f(x_0),$$

deci :

$$f(x'_{n_p}) - f(x''_{n_p}) \xrightarrow{p} 0.$$

Dar din inegalitățile  $|f(x'_{n_p}) - f(x''_{n_p})| > \varepsilon_0$ , pentru orice  $p \in N$ , deducem că sirul  $(f(x'_{n_p}) - f(x''_{n_p}))$  nu are limita 0, și am ajuns astfel la o contradicție.

Deoarece presupunerea că  $f$  n-ar fi uniform continuă ne duce la contradicție, rezultă că  $f$  este uniform continuă și teorema este demonstrată.

**O b s e r v a t i e.** Teorema precedentă rezultă și ca o consecință imediată a proprietăției relative la oscilația funcției (cap. II, § 5, nr.7). Într-adevăr, deoarece  $f$  este continuă, avem  $\omega_f(x) = 0$  pentru orice  $x \in E$ , deci  $\omega = \sup_{x \in E} \omega_f(x) = 0$ . Conform propoziției menționate,

pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât pentru orice interval  $I$  de lungime  $< \delta(\varepsilon)$  să avem  $\omega_f(I \cap E) < \varepsilon$ . Deducem că oricare ar fi punctele  $x'$ ,  $x'' \in E$  cu  $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ , notind  $I = [x', x'']$  avem  $\omega_f(I \cap E) < \varepsilon$ , deci, în particular,  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .

**O b s e r v a t i i.** 1° Dacă  $f$  este continuă pe o mulțime care nu este compactă, este posibil să nu fie uniform continuă.

*Exemplu.* 1)  $f(x) = x^2$  definită pe  $R$ , este continuă, dar nu este uniform continuă. Aici mulțimea de definiție este închisă, dar nu este mărginită.

2)  $f(x) = \frac{1}{x}$  definită pe  $(0, 1]$  este continuă, dar nu este uniform continuă — după cum se va vedea mai departe (deoarece nu este mărginită). Aici mulțimea de definiție este mărginită, dar nu este închisă.

2° Condiția ca  $E$  să fie compactă este suficientă, dar nu și necesară pentru ca o funcție continuă să fie uniform continuă. De exemplu, funcția  $f(x) = x$  definită pe  $R$  este uniform continuă.

Putem acum recapitula proprietățile funcțiilor *continue pe mulțimi compacte*:

- 1) Sunt mărginite.
- 2) Își ating efectiv marginile.
- 3) Sunt uniform continue.

Spunem că o funcție  $f: E \rightarrow R$  este lipschitziană\* dacă există un număr  $M > 0$  astfel încât oricare ar fi punctele  $x'$ ,  $x'' \in E$  să avem

$$|f(x') - f(x'')| \leq M |x' - x''|.$$

Inegalitatea aceasta se numește *condiția lui Lipschitz*.

**P r o p o z i ᄀ i e.** Dacă funcția  $f: E \rightarrow R$  este lipschitziană atunci ea este uniform continuă.

\* De la numele matematicianului Lipschitz.

În adevăr, fie  $\epsilon > 0$ ; să luăm  $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{M}$ . Atunci, dacă

$$|x' - x''| < \delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{M},$$

avem

$$|f(x') - f(x'')| \leq M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon,$$

deci  $f$  este uniform continuă pe  $E$ .

Rezultă în particular că funcțiile lipschitziene sunt continue.

**O b s e r v a t i i.** 1° Dacă  $f$  este uniform continuă pe  $E$  atunci  $|f|$  este uniform continuă pe  $E$ . Afirmația reciprocă nu este în general adevărată.

2° Dacă  $f$  și  $g$  sunt uniform continue pe  $E$ , atunci  $f + g$  și  $\alpha f$  sunt uniform continue pe  $E$ , oricare ar fi  $\alpha \in R$ . Mulțimea funcțiilor uniform continue pe  $E$  este deci un spațiu vectorial. Această mulțime nu este în general o algebră, deoarece produsul a două funcții uniform continue poate să nu fie uniform continuu.

*Exemplu.* Funcțiile  $f(x) = x$  și  $g(x) = x$  sunt uniform continue pe  $R$ , dar produsul lor  $f(x)g(x) = x^2$  nu este uniform continuu pe  $R$ .

3° O funcție  $f$  uniform continuă pe o mulțime mărginită  $E$  este mărginită pe  $E$ .

Rezultă că funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$  nu este uniform continuă pe  $(0, 1)$ , deoarece nu este mărginită.

4° Dacă  $f$  și  $g$  sunt uniform continue pe o mulțime mărginită  $E$ , atunci produsul lor  $fg$  este uniform continuu pe  $E$ .

Rezultă că mulțimea funcțiilor uniform continue pe o mulțime mărginită este o algebră.

5° Dacă  $f$  este uniform continuă pe  $E$ , atunci  $f$  se poate prelungi prin continuitate în orice punct de acumulare (finit) al lui  $E$ , iar funcția prelungită este de asemenea uniform continuă.

Rezultă că dacă o funcție nu are limită finită într-un punct de acumulare (finit) al lui  $E$ , atunci ea nu este uniform continuă pe  $E$ .

*Exemplu.* Funcția  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  definită pe  $(0, 1)$  nu are limită în 0, deci nu este uniform continuă.

## 10. Funcțiile semicontinuе

Fie funcție  $f: E \rightarrow R$  și  $x_0 \in E$ .

Spunem că funcția  $f$  este semicontinuă inferior în punctul  $x_0$ , dacă pentru orice număr  $\epsilon > 0$  există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât

$$f(x) > f(x_0) - \epsilon, \text{ pentru orice } x \in V \cap E.$$

Spunem că funcția  $f$  este semicontinuă superior în punctul  $x_0$ , dacă pentru orice număr  $\epsilon > 0$  există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât să avem

$$f(x) < f(x_0) + \epsilon, \text{ pentru orice } x \in V \cap E.$$

Din această definiție rezultă că dacă în  $x_0$  funcția are un minim, atunci este semicontinuă inferior în  $x_0$ , iar dacă în  $x_0$  are un maxim, atunci este semicontinuă superior în  $x_0$ . O funcție este continuă în  $x_0$ , dacă și numai dacă este semicontinuă inferior și superior în  $x_0$ .

O funcție este semicontinuă inferior (respectiv superior) pe mulțimea  $E$ , dacă are această proprietate în fiecare punct din  $E$ .

Se verifică ușor că suma  $f + g$  a două funcții semicontinuе inferior (sau superior) este de asemenea o funcție semicontinuă inferior (sau superior). Dacă  $f$  este semicontinuă inferior, atunci  $-f$  este semicontinuă superior și reciproc.

Dacă  $f$  este semicontinuă inferior (sau superior) și  $\alpha \geq 0$ , atunci  $\alpha f$  este semicontinuă inferior (sau superior).

Mulțimea funcțiilor semicontinuе inferior (sau superior) în  $x_0$  sau pe  $E$  nu este un spațiu vectorial, dar este un con convex în spațiul vectorial al tuturor funcțiilor definite pe  $E$ . Lăsăm pe seama cititorului să verifice următoarele proprietăți:

1) Dacă  $(f_i)_{i \in I}$  este o familie oarecare de funcții semicontinuе inferior, atunci anvelopa superioară  $\sup_{i \in I} f_i$  este semicontinuă inferior (în toate punctele  $x \in E$  în care  $\sup_{i \in I} f_i(x) < +\infty$ ).

2) Dacă  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  este o familie finită de funcții semicontinuе inferior, atunci anvelopa inferioară  $\inf_{1 \leq i \leq n} f_i$  este semicontinuă inferior.

## Capitolul VI

# DERIVATE

### § 1. Originea geometrică și fizică a derivatei

#### 1. Problema tangentei

Fie  $f$  o funcție definită pe un interval  $I$  continuă pe acest interval. Să notăm cu  $C$  graficul său:

$$C = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}.$$

Graficul funcției este o curbă în plan (fig. 74).

Fie  $x_0$  un punct din  $I$  și  $M_0(x_0, f(x_0))$  punctul corespunzător de pe grafic. Să luăm un punct oarecare  $x \neq x_0$  din  $I$ ; pe grafic îi corespunde punctul  $M(x, f(x))$ .

Unind punctele  $M_0$  și  $M$  obținem o dreaptă care formează unghiul  $\alpha$  cu axa  $Ox$ .

Paralela prin  $M_0$  la  $Ox$  taie paralela prin  $M$  la  $Oy$  în punctul  $N$ . S-a format triunghiul dreptunghic  $M_0NM$  care are cateta  $M_0N$  de lungime

$$x - x_0 \text{ și cateta } MN \text{ de lungime}$$

$$f(x) - f(x_0).$$

Coefficientul unghiular  $m = \operatorname{tg} \alpha$  al secantei  $M_0M$  este dat de egalitatea

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Lăudănd alt punct  $x' \neq x_0$  din  $I$ , căruia îi corespunde pe grafic punctul  $M'(x', f(x'))$ , dreapta  $M_0M'$  are coefficientul unghiular

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}.$$

Pentru punctele  $x$  diferite, obținem diferențe secante  $M_0M$  care au, în general, coeficienți unghiulari diferenți.

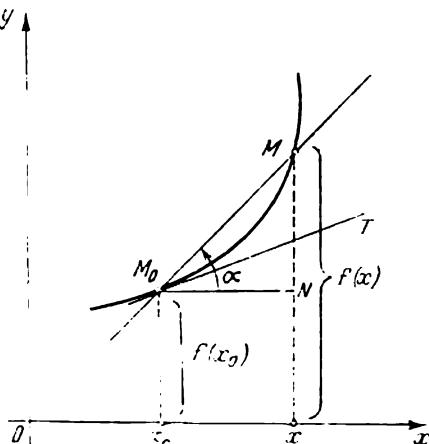


Fig. 74

Dacă  $x$  se apropiie de  $x_0$ , punctul  $M$  se apropiie pe grafic de punctul  $M_0$ . Se apropiie oare și secanta  $M_0M$ , ca poziție, de o dreaptă  $M_0T$ ? Sau, cu alte cuvinte, se apropiie și coeficientul unghiular  $\tan \alpha$  al secantei  $M_0M$  de o valoare  $\tan \alpha_0$ ?

Sîntem astfel conduși să considerăm limita funcției  $\tan \alpha$  cînd  $x \rightarrow x_0$ , adică

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă această limită există și este finită, spunem că graficul  $C$  admite tangentă în punctul  $M_0$ , și anume tangentă la grafic în punctul  $M_0$  este, prin definiție, dreapta  $M_0T$  al cărei coeficient unghiular este

$$\tan \alpha_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă limita precedentă există și este infinită ( $+\infty$  sau  $-\infty$ ), vom spune de asemenea că graficul  $C$  admite tangentă în punctul  $M_0$ , și anume tangentă la grafic în punctul  $M_0$  este, prin definiție, dreapta  $M_0T$  paralelă cu axa  $Oy$  (dreapta a cărei ecuație este  $x = x_0$ ).

## 2. Problema vitezei

Să considerăm un mobil  $M$  în mișcare rectilinie și uniformă (fig. 75). Aceasta înseamnă că traectoria sa este o linie dreaptă și că spațiul este proporțional cu timpul în care este parcurs. Să alegem un punct de referință  $O$ , un sens pozitiv și o unitate de lungime pe dreapta pe care se mișcă mobilul  $M$ . Să alegem de asemenea un moment de referință pe care să-l notăm 0.

Să notăm cu  $s(0)$  abscisa mobilului în acest moment. În fiecare moment  $t$  să notăm cu  $s(t)$  abscisa punctului de pe traectorie, în care se află mobilul la momentul respectiv.

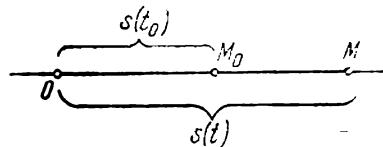


Fig. 75

Spațiul parcurs de mobil din momentul inițial pînă într-un moment oarecare  $t$  este  $s(t) - s(0)$ . Să notăm cu  $v$  raportul constant dintre spațiu și timpul  $t$  în care a fost parcurs:

$$\frac{s(t) - s(0)}{t} = v,$$

de unde  $s(t) = vt + s(0)$ .

Spațiul parcurs între două momente oarecare  $t_1 < t_2$  este  $s(t_2) - s(t_1)$ . Raportul dintre spațiul  $s(t_2) - s(t_1)$  și timpul  $t_2 - t_1$  în care a fost parcurs este

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{vt_2 - vt_1}{t_2 - t_1} = v.$$

Raportul constant  $v$  dintre spațiu și timpul în care a fost parcurs se numește *viteza* mobilului în mișcare rectilinie și uniformă. În acest caz, viteza este egală (numeric) cu spațiul parcurs în unitatea de timp.

Viteza  $v$  este aceeași în fiecare moment.

Să presupunem acum că mobilul  $M$  se mișcă rectiliniu, dar neuniform. Aceasta înseamnă că spațiul nu mai este proporțional cu timpul în care a fost parcurs. Ce se înțelege în acest caz prin viteza pe care mobilul o are la un anumit moment  $t_0$ ?

Să considerăm un moment oarecare  $t > t_0$  și să facem raportul dintre spațiul  $s(t) - s(t_0)$  și timpul  $t - t_0$  în care a fost parcurs:

$$v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Acest raport îl putem considera ca o viteză medie a mobilului în intervalul de timp dintre  $t_0$  și  $t$ , în sensul că un alt mobil în mișcare rectilinie și uniformă care ar avea viteza  $v_m$  ar parcurge în timpul  $t - t_0$  același spațiu  $s(t) - s(t_0)$  ca și mobilul inițial.

Dacă alegem alt moment  $t' > t_0$ , obținem viteza medie

$$v'_m = \frac{s(t') - s(t_0)}{t' - t_0},$$

care este în general diferită de  $v_m$ . Intuitiv, ne dăm seama ușor că, cu cât intervalul de timp dintre  $t_0$  și  $t$  este mai mic, cu atât mișcarea mobilului diferă mai puțin de o mișcare uniformă pe intervalul de timp considerat. Sîntem astfel conduși să considerăm limita vitezei medii cînd timpul  $t - t_0$  tinde către 0, adică

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Dacă această limită există și este finită, ea este, prin definiție, viteza  $v(t_0)$  a mobilului în momentul  $t_0$ :

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

### 3. Densitatea liniară a unei bare materiale

Să considerăm o bară materială omogenă rectilinie și cu secțiunea constantă. Aceasta înseamnă că masa unei porțiuni din bară este proporțională cu lungimea acestei porțiuni.

Luînd în considerare numai lungimea barei și neglijînd celelalte dimensiuni, să aşezăm bara de-a lungul unei axe  $Ox$ , cu un capăt în  $O$ , și cu celă-

lalt capăt în sensul pozitiv al axei (fig. 76). Pentru fiecare punct de pe bară de abscisă  $x$ , să notăm cu  $m(x)$  masa porțiunii  $Ox$ .

Pentru două puncte oarecare  $x_1 < x_2$  de pe bară, masa porțiunii dintre  $x_1$  și  $x_2$  este  $m(x_2) - m(x_1)$  iar lungimea sa este  $x_2 - x_1$ . Să notăm cu  $\rho$  raportul constant dintre masă și lungime:

$$\rho = \frac{m(x_2) - m(x_1)}{x_2 - x_1}.$$



Fig. 76

Deoarece  $m(0) = 0$ , pentru orice punct de pe bară de abscisă  $x$ , avem

$$\rho = \frac{m(x) - m(0)}{x - 0} = \frac{m(x)}{x},$$

adică  $m(x) = \rho x$ .

Raportul constant  $\rho$  dintre masă și lungime se numește *densitatea* barei. Densitatea este aceeași,  $\rho$ , în orice punct al barei.

Să presupunem acum că bara materială nu este omogenă. Aceasta înseamnă că masa unei porțiuni din bară nu mai este proporțională cu lungimea acestei porțiuni. Ce se înțelege în acest caz prin densitatea barei într-un punct  $x_0$ ?

Să considerăm un punct oarecare  $x > x_0$  de pe bară și să formăm raportul dintre masa  $m(x) - m(x_0)$  (a porțiunii dintre punctele  $x_0$  și  $x$ ) și lungimea sa  $x - x_0$

$$\rho_m = \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}.$$

Acest raport îl putem considera ca o densitate medie a porțiunii dintre punctele  $x_0$  și  $x$ , în sensul că o bară omogenă de lungime  $x - x_0$ , care ar avea densitatea  $\rho_m$ , ar avea aceeași masă  $m(x) - m(x_0)$  ca și a porțiunii din bara neomogenă.

Dacă alegem alt punct  $x' > x_0$ , obținem densitatea medie

$$\rho'_m = \frac{m(x') - m(x_0)}{x' - x_0},$$

care este în general diferită de  $\rho_m$ . Cu cît lungimea  $x - x_0$  este mai mică, cu atât porțiunea din bară diferă mai puțin de o bară omogenă. Sintem astfel conduși să considerăm limita densității medii cind lungimea  $x - x_0$  tinde către 0, adică

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă această limită există și este finită, ea este, prin definiție, densitatea  $\rho(x_0)$  a barei în punctul  $x_0$ :

$$\rho(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}.$$

## § 2. Derivata

### 1. Definiția derivatei

Cele trei probleme diferite puse în paragraful precedent, două din fizică și una din geometrie, ca de altfel și alte probleme din fizică, ne conduc, toate, la cercetarea existenței limitei unui raport de forma  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

Dată fiind importanța teoretică și practică a acestor probleme diferite, vom studia dintr-un punct de vedere unitar limita raportului considerat, independent de problema concretă din care provine.

Rezultatele obținute pe această cale se interpretează apoi pentru fiecare problemă în parte, după specificul ei.

Fie  $f$  o funcție definită pe un interval  $I$  și  $x_0$  un punct din  $I$ . Pentru fiecare punct  $x \neq x_0$  din  $I$ , să considerăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$R(x)$  este o funcție definită pentru toate punctele  $x \in I$  cu excepția lui  $x_0$ , în care numitorul (ca și numărătorul) se anulează. Deși funcția  $R(x)$  nu este definită în  $x_0$ , se poate pune problema existenței limitei acestei funcții în punctul  $x_0$ , deoarece  $x_0$  este un punct de acumulare al mulțimii  $I - \{x_0\}$ .

**D e f i n i t i e .** Se spune că funcția  $f: I \rightarrow R$  este derivabilă în punctul  $x_0 \in I$ , dacă raportul  $R(x)$  are în punctul  $x_0$  limită finită. Limita însăși se numește derivata funcției  $f$  în punctul  $x_0$  și se notează cu  $f'(x_0)$ :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pentru derivata  $f'(x_0)$  se folosesc de asemenea notațiile

$$\frac{df(x_0)}{dx} \text{ și } Df(x_0).$$

Pentru a pune în evidență argumentul  $x$ , se spune adesea că  $f'(x_0)$  este derivata lui  $f$  în raport cu  $x$  în punctul  $x_0$ . În acest caz, mai ales, se folosește notația

$$\frac{df(x_0)}{dx} \text{ sau } f'_x(x_0).$$

Dacă limita raportului este infinită ( $+\infty$  sau  $-\infty$ ), ea se numește de asemenea derivata funcției  $f$  în punctul  $x_0$  și se notează tot cu  $f'(x_0)$ . În acest caz nu mai spunem însă că funcția este derivabilă în  $x_0$ . Vom distinge astfel expresia „funcția  $f$  are derivată (finită sau infinită)” de expresia „funcția  $f$  este derivabilă”.

Tinând seama de diferențele definițiilor echivalente ale limitei, cu siruri, cu vecinătăți, sau cu  $\varepsilon$  și  $\delta$ , egalitatea

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

este echivalentă cu fiecare din propozițiile următoare:

1) Oricare ar fi sirul  $x_n \rightarrow x_0$ , ( $x_n \in I$ ,  $x_n \neq x_0$ ), avem

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \rightarrow f'(x_0).$$

2) Pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $f'(x_0)$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât, oricare ar fi  $x \in V \cap I$ ,  $x \neq x_0$ , să avem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in U.$$

3) Dacă  $f'(x_0)$  este finit: pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există un număr  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât oricare ar fi  $x \in I$ ,  $x \neq x_0$ , cu  $|x - x_0| < \delta$ , să avem

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Din studiul problemei tangentei de la § 1, rezultă următoarea interpretare geometrică a derivatei:

Dacă funcția  $f$  are derivată în punctul  $x_0$ , graficul său admite tangentă în punctul corespunzător  $M_0(x_0, f(x_0))$ ; dacă derivata este finită, coeficientul unghiular  $\operatorname{tg} \alpha_0$  al acestei tangente este egal cu derivata  $f'(x_0)$ ; dacă derivata este infinită, tangentă este paralelă cu axa  $Oy$ .

**O b s e r v a t i i.** 1° Derivabilitatea și derivata  $f'(x_0)$  sunt, respectiv, aspectul calitativ și cel cantitativ al aceleiași noțiuni. Pentru a putea calcula derivata  $f'(x_0)$  trebuie mai întâi să ne asigurăm că ea există, adică trebuie să ne asigurăm că funcția este derivabilă în  $x_0$ .

2° Derivata  $f'(x_0)$  este un număr.

3° Derivabilitatea este o noțiune cu caracter punctual și are sens numai în punctele în care funcția este definită. De exemplu, nu are sens problema derivabilității funcției  $f(x) = \ln x$  în punctul 0 sau în punctul  $-1$ , sau a funcției  $\operatorname{tg} x$  în punctul  $\frac{\pi}{2}$ , sau a funcției  $\frac{1}{x}$  în punctul 0 etc.

4° Problema derivatei se poate pune nu numai pentru funcții definite pe un interval, ci și pe o mulțime oarecare  $E$ , dacă  $x_0$  este punct de acumulare pentru  $E$ .

De exemplu, funcția  $f(x) = x$  definită numai pe mulțimea  $Q$  a numerelor rationale este derivabilă în punctul 0, și are derivata egală cu 1. Într-adevăr, pentru orice  $x \in Q$ ,  $x \neq 0$ , avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - 0}{x - 0} \equiv 1,$$

deci

$$f'(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in Q}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

Totuși, în continuare, funcțiile vor fi considerate definite pe un interval. Rezultatele obținute sunt valabile și pentru funcții definite pe o reuniune de intervale.

## 2. Continuitatea funcțiilor derivabile

În definiția derivatei nu s-a impus continuitatea funcției. Continuitatea rezultă însă din derivabilitate, așa cum se arată în următoarea

**Theoremă.** Dacă funcția  $f: I \rightarrow R$  este derivabilă în punctul  $x_0 \in I$ , atunci  $f$  este continuă în  $x_0$ .

Într-adevăr, pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$  avem egalitatea

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0).$$

Dar,  $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$ , și, conform ipotezei,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad (\text{finit}).$$

Rezultă atunci că  $f$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0),$$

adică  $f$  este continuă în  $x_0$ .

**Observații.** 1° Afirmația reciprocă nu este, în general, adevărată: o funcție poate fi continuă în  $x_0$ , fără a fi derivabilă în  $x_0$ .

Mulțimea funcțiilor  $f: I \rightarrow R$  derivabile într-un punct  $x_0 \in I$  este conținută în mulțimea funcțiilor continue în acest punct.

**Exemplu.** Funcția  $f(x) = |x|$  definită pe  $R$  este continuă pe  $R$ ; în particular, este continuă în 0. Dar funcția nu este derivabilă în 0. Într-adevăr, să formăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x > 0 \\ -1 & \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

Raportul  $R(x)$  are în punctul 0 limită la stînga  $-1$ , și limită la dreapta  $1$ , deci nu are limită în punctul 0, adică funcția  $f(x) = |x|$  nu este derivabilă în 0.

Pe figura 77 se constată că în origine graficul funcției nu are tangentă.

2° Dacă  $f$  are derivată *infinited* în punctul  $x_0$ , nu rezultă că  $f$  este continuă în acest punct.

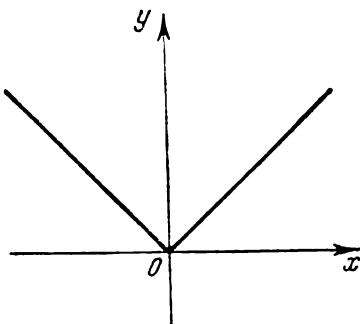


Fig. 77

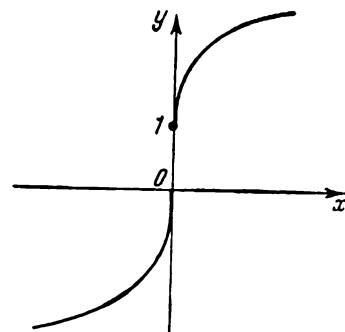


Fig. 78

*Exemplu.* Funcția  $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x} & \text{dacă } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$

este discontinuă în punctul 0, totuși are derivata  $+\infty$  în acest punct.

### 3. Derivate laterale

Fie funcția  $f: I \rightarrow R$  și  $x_0 \in I$ . Pentru  $x \neq x_0$  din  $I$  să formăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Din exemplul precedent se constată că este posibil ca raportul  $R(x)$  să nu aibă limită în  $x_0$ , dar să aibă limite laterale în  $x_0$ . Sîntem conduși astfel la următoarea

**D e f i n i t i e . 1)** Se spune că funcția  $f$  este derivabilă la stînga în punctul  $x_0$ , dacă raportul  $R(x)$  are limită la stînga finită în  $x_0$ . Această limită se numește derivata la stînga a funcției  $f$  în  $x_0$  și se notează  $f'_s(x_0)$ :

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

2) Se spune că funcția  $f$  este derivabilă la dreapta în punctul  $x_0$ , dacă raportul  $R(x)$  are limită la dreapta finită în  $x_0$ . Această limită se numește derivata la dreapta a funcției  $f$  în  $x_0$  și se notează  $f'_d(x_0)$ :

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

*Exemplu.* Pentru funcția  $f(x) = |x|$  definită pe  $R$ , avem

$$f'_s(0) = -1 \text{ și } f'_d(0) = 1.$$

Se pot da definiții echivalente ale derivatelor laterale, cu siruri, cu vecinătăți, sau cu  $\varepsilon$  și  $\delta$ .

O b s e r v a t i i. 1° Dacă raportul  $R(x)$  are în punctul  $x_0$  limită la stînga infinită ( $+\infty$  sau  $-\infty$ ), funcția  $f$  nu este derivabilă la stînga în  $x_0$ . Totuși, limita la stînga în  $x_0$  a raportului se notează de asemenea  $f'_s(x_0)$  și se numește derivata la stînga a funcției  $f$  în punctul  $x_0$ .

De asemenea, dacă raportul  $R(x)$  are în punctul  $x_0$  limită la dreapta infinită ( $+\infty$  sau  $-\infty$ ), funcția  $f$  nu este derivabilă la dreapta în  $x_0$ . Totuși, limita la dreapta în  $x_0$  a raportului se notează de asemenea  $f'_d(x_0)$  și se numește derivata la dreapta a funcției  $f$  în punctul  $x_0$ .

2° Dacă intervalul este compact (închis și mărginit),  $I = [a, b]$ , în punctul  $a$  nu are sens limita la stînga a raportului  $R(x)$ , iar în punctul  $b$  nu are sens limita la dreapta a acestui raport. De asemenea, definiția limitei în  $a$  este echivalentă cu definiția limitei la dreapta în  $a$ , iar definiția limitei în  $b$  este echivalentă cu definiția limitei la stînga în  $b$ .

Pentru deriveate, aceste fapte se transpun astfel:

a) În punctul  $a$  nu are sens problema derivatei la stînga, iar definiția derivatei în  $a$  este echivalentă cu definiția derivatei la dreapta în  $a$ . Așadar :

*Funcția  $f$  are derivată în punctul  $a$  dacă și numai dacă are derivată la dreapta în  $a$ .*

În acest caz  $f'(a) = f'_d(a)$ .

b) În punctul  $b$  nu are sens problema derivatei la dreapta, iar definiția derivatei în  $b$  este echivalentă cu definiția derivatei la stînga în  $b$ . Așadar :

*Funcția  $f$  are derivată în  $b$  dacă și numai dacă are derivată la stînga în  $b$ .*

În acest caz  $f'(b) = f'_s(b)$ .

Dacă însă  $x_0$  este punct interior al intervalului  $[a, b]$ , adică dacă  $a < x_0 < b$ , atunci au sens ambele deriveate laterale în  $x_0$ .

Funcția  $f$  poate avea în  $x_0$  deriveate laterale diferite.

**P r o p o z i t i e .** O funcție  $f: I \rightarrow R$  are derivată într-un punct interior  $x_0 \in I$ , dacă și numai dacă are deriveate laterale egale în  $x_0$ . În acest caz,

$$f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0).$$

Această propoziție rezultă din faptul că raportul  $R(x)$  are limită în punctul  $x_0$ , dacă și numai dacă are limite laterale egale în  $x_0$ .

Propoziția conține și cazul în care derivatele sunt infinite. În particular dacă derivatele sunt finite, deducem că

*Funcția  $f$  este derivabilă în punctul  $x_0$  dacă și numai dacă este derivabilă la stînga și la dreapta în  $x_0$ , și derivatele laterale sunt egale.*

Dacă în demonstrația teoremei de continuitate a funcțiilor derivabile se consideră numai limita la stînga ( $x < x_0$ ), sau numai limita la dreapta ( $x > x_0$ ), se obține următoarea

**Propozitie.** Dacă  $f$  este derivabilă la stînga în  $x_0$ , atunci  $f$  este continuă la stînga în  $x_0$ .

Dacă  $f$  este derivabilă la dreapta în  $x_0$ , atunci  $f$  este continuă la dreapta în  $x_0$ .

**Corolar.** Dacă  $f$  este derivabilă la stînga și la dreapta în  $x_0$ , atunci  $f$  este continuă în  $x_0$ .

Funcția  $f(x) = |x|$  definită pe  $R$  este derivabilă la stînga și la dreapta în 0, deci continuă în 0 (deși nu este derivabilă în 0).

**Observație.** O funcție poate fi continuă la stînga (sau la dreapta) într-un punct fără a fi derivabilă la stînga (respectiv la dreapta) în acest punct.

$$\text{Exemplu. Funcția } f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases} \text{ definită pe } R \text{ este continuă în}$$

punctul 0, dar nu are derivate laterale în 0.

Intr-adevăr,  $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$  și  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ , deci

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

adică  $f$  este continuă în punctul 0.

Pentru  $x \neq 0$  să formăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}.$$

Funcția  $\sin \frac{1}{x}$  nu are nici limită la stînga, nici limită la dreapta în 0, deci funcția  $f$  nu are nici derivată la stînga, nici derivată la dreapta în 0.

Reluind problema tangentei se constata că derivatele laterale au de asemenea o interpretare geometrică simplă.

Să luăm numai puncte  $x \in I$  la dreapta lui  $x_0$ ,  $x > x_0$ , și să considerăm semidreapta  $M_0M$ , cu extremitatea în  $M_0$ . Coeficientul ei unghiular este

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

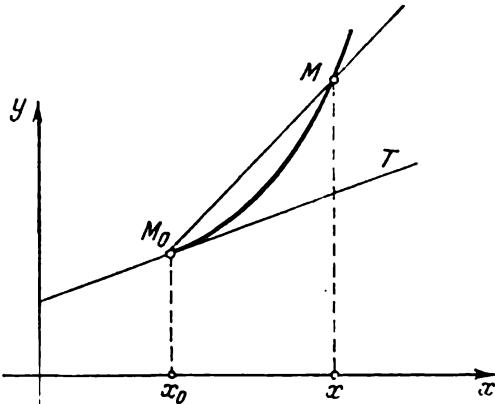


Fig. 79

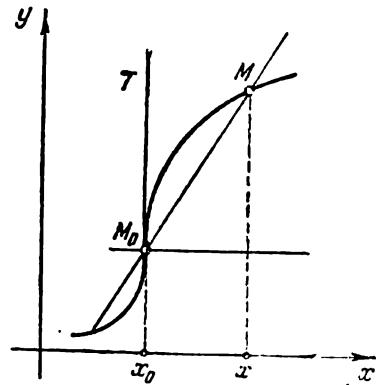


Fig. 80

Dacă acest coeficient unghiular are o limită finită  $\operatorname{tg} \alpha_0$  cînd  $x$  se apropiie de  $x_0$  de la dreapta, spunem că graficul are în punctul  $M_0$  semitangentă la dreapta, care este, prin definiție, semidreapta cu extremitatea în  $M_0$ , care se află în semiplanul de la dreapta lui  $M_0$  ( $x \geq x_0$ ) și care are coeficientul unghiular  $\operatorname{tg} \alpha_0$ .

Așadar: *Dacă funcția  $f$  este derivabilă la dreapta în punctul  $x_0$ , graficul funcției are în punctul corespunzător  $M_0$  ( $x_0, f(x_0)$ ) semitangentă la dreapta, al cărei coeficient unghiular este egal cu  $f'_d(x_0)$ .*

Dacă  $f'_d(x_0) = +\infty$ , graficul admite, prin definiție, semitangentă în punctul  $M_0(x_0, f(x_0))$ , o semidreaptă  $M_0T$  paralelă cu axa  $Oy$ , situată deasupra punctului  $M_0$  (fig. 80).

Dacă  $f'_d(x_0) = -\infty$ , graficul admite, prin definiție, ca semitangentă situată sub punctul  $M_0$  (fig. 81).

Considerații analoge ne conduc la interpretarea geometrică a derivatei la stînga:

Dacă funcția  $f$  este derivabilă la stînga în punctul  $x_0$ , graficul său are în punctul  $M_0(x_0, f(x_0))$  semitangentă la stînga o semidreaptă  $M_0T$

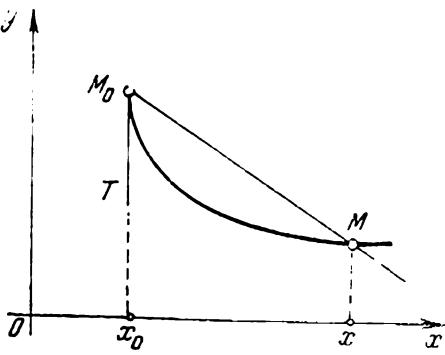


Fig. 81

cu coeficientul unghiular  $f'_s(x_0)$ , situată în semiplanul de la stînga lui  $M_0$  ( $x \leqslant x_0$ ) (fig. 82).

Dacă  $f_s(x_0) = +\infty$ , graficul admite, prin definiție, ca semitangentă la stînga în punctul  $M_0(x_0, f(x_0))$ , o semidreaptă  $M_0T$  paralelă cu axa  $Oy$ , situată sub punctul  $M_0$  (fig. 83).

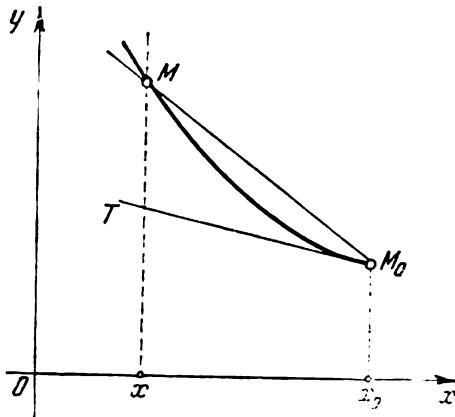


Fig. 82

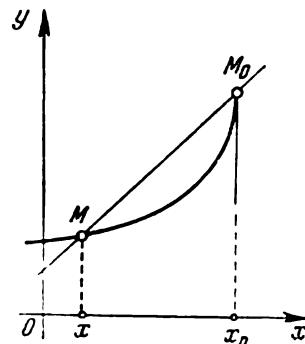


Fig. 83

Dacă  $f_s(x_0) = -\infty$ , graficul admite, prin definiție, ca semitangentă la stînga în punctul  $M_0(x_0, f(x_0))$ , o semidreaptă  $M_0T$  paralelă cu axa  $Oy$ , situată deasupra punctului  $M_0$  (fig. 84).

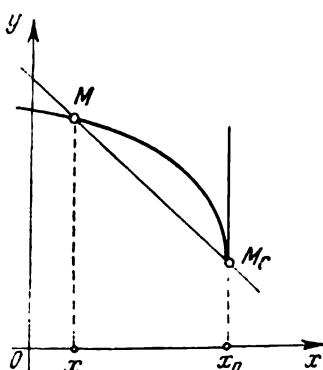


Fig. 84

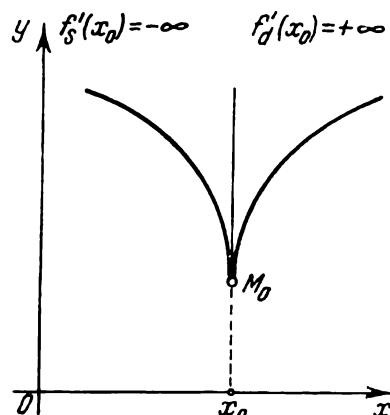


Fig. 85

Dacă funcția  $f$  are în  $x_0$  derivate laterale egale, cele două semitangente sint în prelungire, deci graficul are tangentă în punctul  $M_0$ .

Dacă funcția  $f$  are în  $x_0$  derivate laterale diferite, cele două semitangente nu mai sint în prelungire.

Dacă una dintre derivatele laterale este  $+\infty$  și cealaltă este  $-\infty$  cele două semitangente sănt suprapuse (fig. 85 și 86).

În acest caz, punctul  $M_0(x_0, f(x_0))$  de pe grafic se numește *punct de înțoarcere* al graficului.

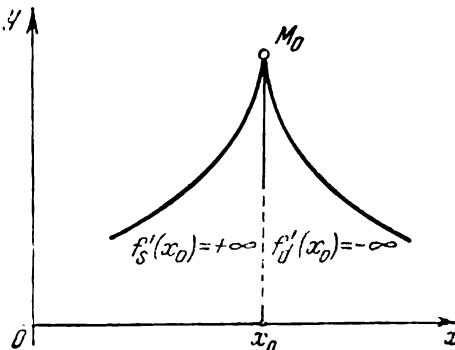


Fig. 86

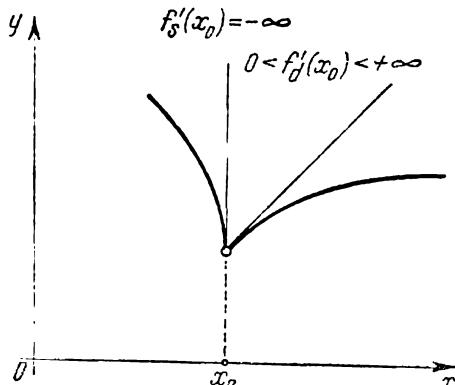


Fig. 87

Dacă funcția  $f$  are în punctul  $x_0$  derivate laterale diferite, și cel puțin una din ele este finită, cele două semitangente laterale nu sunt nici suprapuse, nici în prelungire. În acest caz, punctul  $M_0(x_0, f(x_0))$  de pe grafic se numește *punct unghiular* al graficului (fig. 87).

#### 4. Derivata pe un interval

**D e f i n i t i e .** Se spune că funcția  $f: I \rightarrow R$  este derivabilă pe o submulțime  $A \subset I$ , dacă este derivabilă în fiecare punct din  $A$ .

Dacă funcția  $f$  este derivabilă pe tot domeniul ei de definiție, se spune uneori, mai simplu, că este derivabilă, fără a mai specifica mulțimea pe care are această proprietate.

**P r o p o z i t i e .** Dacă funcția  $f: I \rightarrow R$  este derivabilă pe  $I$ , atunci  $f$  este continuă pe  $I$ .

Intr-adevăr,  $f$  este derivabilă în fiecare punct din  $I$ , deci este continuă în fiecare punct din  $I$ .

**O b s e r v a t i e .** Există funcții continue pe un interval care nu sunt derivabile în nici un punct din acest interval\*.

Mulțimea funcțiilor derivabile pe un interval este conținută în mulțimea funcțiilor continue pe acest interval.

\* Un astfel de exemplu a fost dat, pentru prima oară, de K. Weierstrass. Ulterior s-au dat exemple mai simple (a se vedea M. N. Analiză mat. II, p. 353)

Fie funcția  $f: I \rightarrow R$  derivabilă pe  $I$ . Fiecare punct  $x \in I$  vom face să-i corespundă numărul  $f'(x)$ .

Obținem astfel o funcție  $x \rightarrow f'(x)$  definită pe  $I$ , care se numește *funcția derivată* a lui  $f$  sau, mai simplu, derivata lui  $f$ . Derivata funcției  $f$  se notează  $f'$ . Se folosesc de asemenea notațiile  $\frac{df}{dx}$  și  $Df$ .

Trebuie făcută distincție între *derivata funcției*  $f$  în punctul  $x$ , care este un *număr*,  $f'(x)$ , și *derivata funcției*  $f$ , care este o *funcție*,  $f'$ . Derivata  $f'(x_0)$  se mai notează adesea  $(f'(x))_{x=x_0}$  sau  $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}$ .

Dacă punem  $y = f(x)$ , se folosesc notațiile  $y' = f'(x)$  sau  $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$  sau încă  $y'_x = f'_x(x)$ .

## 5. Exemple de funcții derivabile

1) Funcția constantă  $f(x) \equiv c$  definită pe  $R$  este derivabilă și  $f'(x) \equiv 0$ . Scriem aceasta astfel:

$$c' = 0.$$

Într-adevăr, fie  $x_0 \in R$  oarecare. Să formăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \quad (x \neq x_0).$$

Atunci:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ , adică  $f'(x_0) = 0$ . Deoarece  $x_0$  a fost ales arbitrar, rezultă că  $f'(x) = 0$ , oricare ar fi  $x \in R$ .

**Observație.** Prin notația  $c'$  nu trebuie să se înțeleagă derivata *numărului*  $c$ , ci a funcției constante care are în toate punctele valoarea  $c$ . Notiunea de derivată nu se atașează numerelor, ci numai funcțiilor.

2) Funcția identică  $f(x) = x$  definită pe  $R$  este derivabilă și  $f'(x) \equiv 1$ . Scriem astfel:

$$x' = 1.$$

Într-adevăr, fie  $x_0 \in R$  oarecare. Pentru  $x \neq x_0$  avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} \equiv 1,$$

deci:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$ , adică  $f'(x_0) = 1$ . Deoarece  $x_0$  a fost ales arbitrar, rezultă  $f'(x) = 1$ , oricare ar fi  $x \in R$ .

**O b s e r v a t i e.** Prin notația  $x'$  nu trebuie să se înțeleagă derivata argumentului, ci a funcției identice. Noțiunea de derivată nu se atâșează argumentului, ci numai funcțiilor.

3) Funcția  $f(x) = x^n$ ,  $n \in N$ , definită pe  $R$ , este derivabilă și  $f'(x) = nx^{n-1}$ . Scriem:

$$(x^n)' = n x^{n-1}.$$

Fie  $x_0 \in R$  oarecare. Pentru  $x \neq x_0$  avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + x^{n-3} \cdot x_0^2 + \dots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}.$$

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} x^k = x_0^k$ ,  $k \in N$  avem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-2} \cdot x_0 + \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-3} \cdot x_0^2 + \dots \lim_{x \rightarrow x_0} x \cdot x_0^{n-2} + \\ &+ x_0^{n-1} = x_0^{n-1} + x_0^{n-2} \cdot x_0 + x_0^{n-3} \cdot x_0^2 + \dots + x_0 \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1} = \\ &= \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-2} + x_0^{n-3} + \dots + x_0^{n-1} + x_0^{n-1}}_{n \text{ ori}} = nx_0^{n-1}, \end{aligned}$$

adică  $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$ . Deoarece  $x_0$  a fost ales arbitrar, rezultă  $f'(x) = nx^{n-1}$  pentru orice  $x \in R$ .

4) Funcția  $f(x) = \sqrt{x}$  definită pe  $[0, +\infty)$  este derivabilă pe semi-dreapta deschisă  $(0, +\infty)$  și pentru  $x > 0$  avem  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

Scriem:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Fie  $x_0 > 0$  oarecare. Pentru  $x \neq x_0$ ,  $x \geq 0$ , avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}.$$

Dar  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \neq 0$ , deci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

adică  $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ . Deoarece  $x_0 > 0$  a fost ales arbitrar, rezultă că pentru orice  $x > 0$

avem  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**O b s e r v a t i e.** În punctul 0, funcția  $f(x) = \sqrt{x}$  nu este derivabilă, dar derivata sa în acest punct există și este  $+\infty$ ,  $f'(0) = +\infty$ .

Într-adevăr, pentru  $x > 0$ , avem

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Deoarece  $\sqrt{x} > 0$  și  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ , rezultă că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ ,

adică:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty, \text{ deci } f'(0) = +\infty.$$

5) Funcția  $f(x) = \sin x$  definită pe  $R$  este derivabilă și  $f'(x) = \cos x$ . Scriem

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Fie  $x_0 \in R$  oarecare. Pentru  $x \neq x_0$  avem

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} = \\ &= \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}. \end{aligned}$$

Dar  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{2} = 0$ , deci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

Pe de altă parte, funcția  $\cos \frac{x + x_0}{2}$  este continuă ca funcție compusă a funcțiilor

continue  $\cos u$  și  $\frac{x + x_0}{2}$ , deci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos \frac{x + x_0}{2} = \cos \frac{x_0 + x_0}{2} = \cos \frac{2x_0}{2} = \cos x_0.$$

Așadar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \cos \frac{x + x_0}{2} = \cos x_0,$$

adică  $f'(x_0) = \cos x_0$ . Deoarece  $x_0$  a fost ales arbitrar, rezultă că  $f'(x) = \cos x$  oricare ar fi  $x \in R$ .

6) Funcția  $f(x) = \cos x$  definită pe  $R$  este derivabilă și  $f'(x) = -\sin x$ . Scriem :

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Fie  $x_0 \in R$  oarecare. Pentru  $x \neq x_0$  avem

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \frac{-2 \sin \frac{x - x_0}{2} \sin \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} = \\ &= -\frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \sin \frac{x + x_0}{2}. \end{aligned}$$

Deoarece funcția compusă  $\sin \frac{x + x_0}{2}$  este continuă, avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin \frac{x + x_0}{2} = \sin \frac{x_0 + x_0}{2} = \sin \frac{2x_0}{2} = \sin x_0.$$

Atunci :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \sin \frac{x + x_0}{2} = -\sin x_0,$$

adică  $f'(x_0) = -\sin x_0$ . Deoarece  $x_0$  a fost ales arbitrar, rezultă că  $f'(x) = -\sin x$ , oricare ar fi  $x \in R$ .

7) Funcția  $f(x) = \ln x$  definită pe semidreapta  $(0, +\infty)$  este derivabilă și  $f'(x) = \frac{1}{x}$ . Scriem :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

Fie  $x_0 > 0$  oarecare. Pentru  $x \neq x_0$ ,  $x > 0$ , avem

$$R(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \ln \frac{x}{x_0}.$$

Dar:  $\frac{x}{x_0} = 1 - 1 + \frac{x}{x_0} = 1 + \frac{x - x_0}{x_0}$ , deci

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1}{x - x_0} \ln \frac{x}{x_0} = \frac{1}{x_0} \frac{x_0}{x - x_0} \ln \left( 1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right) = \\ &= \frac{1}{x_0} \ln \left( 1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right)^{\frac{x_0}{x - x_0}}. \end{aligned}$$

A vom  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x_0} = 0$ , deci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}} = \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

și deoarece funcția logarithmică este continuă,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}} = \ln \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}} = \ln e = 1.$$

Așadar:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \ln \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}} = \frac{1}{x_0}.$$

adică  $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$ . Deoarece  $x_0 > 0$  a fost ales arbitrar, rezultă că pentru orice  $x > 0$  avem  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

O b s e r v a t i e. Funcția  $f(x) = \ln x$  este derivabilă pe semidreapta  $(0, +\infty)$ , deci derivata sa  $f'(x) = \frac{1}{x}$  este definită tot pe semidreapta  $(0, +\infty)$ , deși operația de împărțire cu  $x$ , prin care se calculează derivata în punctul  $x > 0$ , are sens și pentru  $x < 0$ .

Așadar, nu trebuie confundată derivata  $f'(x) = \frac{1}{x}$ , care este definită pe semidreapta  $(0, +\infty)$  cu funcția elementară  $h(x) = \frac{1}{x}$  al cărei domeniu maxim de definiție este  $R - \{0\}$ . Funcțiile  $f'$  și  $h$  coincid pe semidreapta  $(0, +\infty)$ .

### § 3. Operații cu funcții derivabile

Ca și pentru funcțiile continue, operațiile algebrice de adunare, înmulțire și înmulțire cu scalari, operația de compunere și, cu anumite restricții, operația de inversare, aplicate funcțiilor derivabile, conduc tot la funcții derivabile.

#### 1. Operații algebrice

P r o p o z i t i a 1. Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  definite pe un interval  $I$  sunt derivabile într-un punct  $x_0 \in I$ , atunci funcția  $f + g$  este derivabilă în  $x_0$  și

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Să notăm  $h = f + g$ . Pentru fiecare  $x \neq x_0$  din  $I$ , avem

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - [f(x_0) + g(x_0)]}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Deoarece  $f$  și  $g$  sunt derivabile în  $x_0$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0).$$

Rezultă că și raportul  $R(x)$  are limită (finită) în  $x_0$ , deci funcția  $h$  este derivabilă în  $x_0$  și

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0) + g'(x_0), \end{aligned}$$

adică

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

**O b s e r v a t i e.** Propoziția rămîne adeverată și dacă una sau ambele derivate  $f'(x_0)$  și  $g'(x_0)$  sunt infinite, dacă  $f'(x_0) + g'(x_0)$  are sens (cazul exceptat este cel în care una din derivate este  $+\infty$ , iar cealaltă  $-\infty$ ).

**C o r o l a r .** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sunt derivabile pe un interval  $I$ , atunci  $f + g$  este derivabilă pe  $I$  și

$$(f + g)' = f' + g'.$$

Se demonstrează prin recurență că dacă  $f_1, f_2, \dots, f_n$  sunt  $n$  funcții definite pe  $I$  și derivabile pe  $I$  (sau într-un punct  $x_0 \in I$ ), atunci suma lor este de asemenea derivabilă pe  $I$  (respectiv în  $x_0$ ) și

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f'_1 + f'_2 + \dots + f'_n$$

sau

$$\left( \sum_{i=1}^n f_i \right)' = \sum_{i=1}^n f'_i.$$

**P r o p o z i t i a 2.** Dacă funcția  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  este derivabilă într-un punct  $x_0 \in I$ , atunci funcția  $cf$  este derivabilă în  $x_0$ , oricare ar fi numărul  $c$ , și

$$(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$

Să notăm  $h = cf$ . Pentru fiecare  $x \neq x_0$  din  $I$  avem

$$R(x) = \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{cf(x) - cf(x_0)}{x - x_0} = c \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Deoarece, prin ipoteză,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$  rezultă că raportul  $R(x)$  are limită (finită) în  $x_0$ , deci funcția  $h$  este derivabilă în  $x_0$ , și

$$h'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c f'(x_0),$$

adică  $(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$ .

**O b s e r v a t i e.** Propoziția rămîne adevărată și dacă  $f'(x_0)$  este infinită. În acest caz, dacă  $c = 0$ , avem  $(cf)'(x_0) = 0$ .

**C o r o l a r.** Dacă funcția  $f$  este derivabilă pe  $I$ , atunci funcția  $cf$  este derivabilă pe  $I$  și

$$(cf)' = c \cdot f'.$$

Luinăd în acest corolar  $c = -1$ , rezultă că:

Dacă  $f$  este derivabilă pe  $I$  (sau în  $x_0$ ) atunci funcția  $-f$  este derivabilă pe  $I$  (respectiv în  $x_0$ ) și

$$(-f)' = -f'.$$

Folosind această ultimă proprietate și propoziția 1, rezultă că:

Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sunt derivabile pe  $I$  (sau în  $x_0$ ) atunci funcția  $f - g$  este derivabilă pe  $I$  (respectiv în  $x_0$ ) și

$$(f - g)' = f' - g'.$$

Într-adevăr,  $f - g = f + (-g)$  și deoarece  $g$  este derivabilă,  $(-g)$  este de asemenea derivabilă, și deci și suma  $f + (-g)$  este derivabilă. Atunci

$$(f - g)' = (f + (-g))' = f' + (-g)' = f' + (-g') = f' - g'.$$

Dacă una sau ambele deriveate  $f'(x_0)$  și  $g'(x_0)$  sunt infinite și dacă  $f'(x_0) - g'(x_0)$  are sens, atunci  $f' - g'$  are derivată în  $x_0$  și  $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$ .

**O b s e r v a t i i.** 1º Multimea  $\mathfrak{D}(I, x_0)$  a funcțiilor definite pe  $I$  și derivabile în  $x_0 \in I$  este un spațiu vectorial. Operația de derivare în punctul  $x_0$  face să corespundă fiecărei funcții  $f \in \mathfrak{D}(I, x_0)$ , numărul  $f'(x_0)$ , adică operația de derivare este o funcțională  $L : f \rightarrow f'(x_0)$  definită pe spațiul vectorial  $\mathfrak{D}(I, x_0)$ . Această operație este o funcțională liniară (aditivă și omogenă)

$$L(f + g) = (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) = L(f) + L(g);$$

$$L(\alpha f) = (\alpha f)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) = \alpha L(f).$$

2º Multimea  $\mathfrak{D}(I)$  a funcțiilor definite și derivabile pe  $I$  este un spațiu vectorial. Să notăm cu  $\mathfrak{D}'(I)$  multimea derivatelor funcțiilor din  $\mathfrak{D}(I)$ . Multimea  $\mathfrak{D}'(I)$  este de asemenea un spațiu vectorial.

Operația de derivare  $D$  face să corespundă fiecărei funcții  $f \in \mathfrak{D}(I)$ , derivata sa  $f' \in \mathfrak{D}'(I)$ :

$$D : f \rightarrow f' \text{ sau } Df = f'.$$

Operația de derivare este o *operație liniară* definită pe spațiul vectorial  $\mathfrak{D}(I)$  cu valori în spațiul vectorial  $\mathfrak{D}'(I)$ :

$$D(f+g) = Df + Dg;$$

$$D(\alpha f) = \alpha Df.$$

*Exemplu.* 1) Funcția  $f(x) = |x|$  definită pe  $\mathbb{R}$  este derivabilă pe  $\mathbb{R} - \{0\}$  și  $(|x|)' = \begin{cases} -1 & \text{dacă } x < 0 \\ 1 & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ .

Într-adevăr, pentru  $x < 0$  avem  $f(x) = |x| = -x$ , deci  $f'(x) = (-x)' = -x' = -1$ , iar pentru  $x > 0$ , avem  $f(x) = |x| = x$ , deci  $f'(x) = x' = 1$ .

$$2) (ax^n)' = a(x^n)' = a \cdot nx^{n-1} = na x^{n-1}.$$

3) Un polimon  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  definit pe  $\mathbb{R}$  este o funcție derivabilă și:

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1.$$

4) Dacă  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , funcția  $f(x) = \log_a x$  definită pe  $(0, +\infty)$  este derivabilă și

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Într-adevăr, dacă  $x > 0$ ,  $\ln x = \ln a \log_a x$ , deci  $\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$  și deci  $(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$ .

**Propoziția 3.** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  definite pe  $I$  sunt derivabile într-un punct  $x_0 \in I$ , atunci funcția  $fg$  este derivabilă în  $x_0$  și

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Să notăm  $h = fg$ . Pentru fiecare  $x \neq x_0$  din  $I$ , avem

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \\ &\quad + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Prin ipoteză avem  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0).$$

Pe de altă parte, funcția  $g$  fiind derivabilă în  $x_0$ , este continuă în  $x_0$ , deci  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ .

Așadar, toți termenii din ultimul membru al șirului precedent de egalități au limite (finite) în  $x_0$ , iar  $f(x_0)$  este un număr. Rezultă că și raportul  $R(x)$  are limită (finită) în  $x_0$ , adică  $h$  este derivabilă în  $x_0$  și

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \end{aligned}$$

adică :

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

**C o r o l a r.** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sunt derivabile pe  $I$ , atunci funcția  $fg$  este derivabilă pe  $I$  și

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Prin recurență se demonstrează că dacă  $f_1, f_2, \dots, f_n$  sunt  $n$  funcții derivabile pe  $I$  (sau în  $x_0$ ) atunci produsul lor este de asemenea o funcție derivabilă pe  $I$  (respectiv în  $x_0$ ) și

$$(f_1 f_2 \dots f_n)' = \sum_{i=1}^n f_1 f_2 \dots f_{i-1} f'_i f_{i+1} \dots f_n.$$

Pentru  $n = 2$  formula a fost deja demonstrată. S-o presupunem adevarată pentru  $n$  funcții, și să arătăm atunci că este adevarată și pentru  $n+1$  funcții :

$$\begin{aligned} (f_1 f_2 \dots f_n f_{n+1})' &= (f_1 f_2 \dots f_n)' f_{n+1} + (f_1 f_2 \dots f_n) f'_{n+1} = \\ &= \sum_{i=1}^n f_1 f_2 \dots f_{i-1} f'_i \cdot f_{i+1} \dots f_n f_{n+1} + f_1 f_2 \dots f_n f'_{n+1} = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} f_1 f_2 \dots f_{i-1} f'_i f_{i+1} \dots f_n f_{n+1}. \end{aligned}$$

Conform principiului inducției complete, formula este adevarată pentru orice  $n$ .

Dacă cele  $n$  funcții sunt egale cu o funcție  $f$  derivabilă pe  $I$ , deducem că funcția  $f^n$  este derivabilă pe  $I$  și

$$(f^n)' = n f^{n-1} f'.$$

În particular, deoarece  $x' = 1$ , avem

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Acest rezultat va fi obținut de asemenea mai departe din teorema relativă la derivarea funcțiilor compuse.

**Observații.** 1° Multimea  $\mathfrak{D}(I, x_0)$  este o algebră. Operația de derivare în punctul  $x_0$ ,  $L(f) = f'(x_0)$  nu este însă multiplicativă.

2° Multimea  $\mathfrak{D}(I)$  este o algebră. Operația de derivare  $D(f) = f'$  nu este multiplicativă.

**Propozitie 4.** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  definite pe  $I$  sunt derivabile într-un punct  $x_0 \in I$ , și dacă  $g(x_0) \neq 0$ , atunci funcția  $\frac{f}{g}$  este derivabilă în  $x_0$  și

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Să notăm  $h = \frac{f}{g}$ . Să observăm mai întii că funcția  $g$  este continuă în  $x_0$  (fiind derivabilă în  $x_0$ ); deoarece  $g(x_0) \neq 0$ ; există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât  $g(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in V \cap I$ . Așadar, funcția  $\frac{f}{g}$  este definită cel puțin pe intervalul  $V \cap I$  care conține pe  $x_0$ . Pentru orice  $x \neq x_0$  din  $V \cap I$  avem

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} = \\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} = \\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right]. \end{aligned}$$

Deoarece  $g$  este continuă în  $x_0$ , avem  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0$ . Deoarece  $f$  și  $g$  sunt derivabile în  $x_0$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0).$$

Tinând seama de faptul că  $f(x_0)$  și  $g(x_0)$  sunt numere, toți termenii din ultimul membru al sărului de egalitate de mai sus au limite (finite) în  $x_0$ . Rezultă că și  $R(x)$  are limită (finită) în  $x_0$ , adică funcția  $h$  este derivabilă în  $x_0$ , și

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \cdot g(x_0)} \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - \right. \\ &\quad \left. - f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] = \frac{1}{(g(x_0))^2} [f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)], \end{aligned}$$

adică

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

**C o r o l a r .** Dacă  $f$  și  $g$  sunt derivabile pe  $I$ , atunci funcția  $\frac{f}{g}$  este derivabilă pe domeniul ei de definiție (format din toate punctele  $x \in I$  în care  $g(x) \neq 0$ ) și

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{fg' - fg'}{g^2}.$$

**E x e m p l e .** 1) O funcție rațională  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  este derivabilă pe tot domeniul ei de definiție (ca raport de polinoame care sunt derivabile), adică în toate punctele  $x$  în care  $Q(x) \neq 0$ . Derivata se calculează după regula de derivare a cîntului, dată în propoziția 4.

2) Funcția  $f(x) = \operatorname{tg} x$  este derivabilă pe tot domeniul său de definiție (format din punctele  $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k$  întreg) și  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ . Scriem

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Într-adevăr, dacă } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ atunci } \cos x \neq 0 \text{ și } (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \\ &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

3) Funcția  $f(x) = \operatorname{ctg} x$  este derivabilă pe tot domeniul său de definiție (format din punctele  $x \neq k\pi$ ,  $k$  întreg) și

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x).$$

Scriem

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

**Într-adevăr, dacă**  $x \neq k\pi$ , atunci  $\sin x \neq 0$  și

$$\begin{aligned} (\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

4) Funcția  $f(x) = \frac{1}{x^n}$ ,  $n \in N$ , definită pe  $R - \{0\}$ , este derivabilă și

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}} \text{ sau } (x^{-n})' = -nx^{-n-1}.$$

**Intr-adevăr**, pentru  $x \neq 0$ , avem

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{1' \cdot x^n - 1(x^n)'}{x^{2n}} = \frac{0 - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

**O b s e r v a t i e.** Pentru orice  $k$  întreg avem

$$(x^k)' = kx^{k-1}.$$

Se va arăta mai departe că această formulă este adevărată pentru orice exponent *real*.

## 2. Derivabilitatea funcțiilor compuse

Fie funcțiile  $u : I \rightarrow J$  și  $\varphi : J \rightarrow R$ ,  $I$  și  $J$  fiind intervale. Să considerăm funcția compusă  $f = \varphi \circ u$  definită pentru orice  $x \in I$  prin egalitatea

$$f(x) = \varphi(u(x)).$$

**T e o r e m ă.** Dacă funcția  $u$  este derivabilă într-un punct  $x_0 \in I$  și funcția  $\varphi$  este derivabilă în punctul corespunzător  $y_0 = u(x_0) \in J$ , atunci funcția compusă  $f = \varphi \circ u$  este derivabilă în punctul  $x_0$  și

$$f'(x_0) = \varphi'(u(x_0)) \cdot u'(x_0).$$

Prin ipoteză avem

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \varphi'(y_0).$$

Să considerăm funcția  $\alpha(y)$  definită pentru  $y \in J$  astfel:

$$\alpha(y) = \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} - \varphi'(y_0) \text{ dacă } y \neq y_0; \quad \alpha(y_0) = 0.$$

Avem :

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \alpha(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} - \varphi'(y_0) = \varphi'(y_0) - \varphi'(y_0) = 0 = \alpha(y_0),$$

deci funcția  $\alpha(y)$  este *continuă* în punctul  $y_0$  și are, evident, valoarea 0 în acest punct.

Din egalitatea prin care se definește funcția  $\alpha(y)$ , deducem pentru  $y \neq y_0$ :

$$\varphi(y) - \varphi(y_0) = [\varphi'(y_0) + \alpha(y)](y - y_0).$$

Această egalitate este adevărată și pentru  $y = y_0$ , deoarece ambii membri sunt egali cu 0 în acest caz. Așadar egalitatea este adevărată pentru orice  $y \in J$ .

În particular, pentru orice  $x \in I$  avem  $u(x) \in J$  și deci egalitatea precedentă este adevărată, dacă o scriem pentru  $u(x)$  în loc de  $y$ , oricare ar fi  $x \in I$ :

$$\begin{aligned} \varphi(u(x)) - \varphi(y_0) &= [\varphi'(y_0) + \alpha(u(x))] (u(x) - y_0) = \\ &= [\varphi'(y_0) + \alpha(u(x))] (u(x) - u(x_0)). \end{aligned}$$

Să observăm că funcția  $u$  este continuă în punctul  $x_0$  (fiind derivabilă în acest punct), iar funcția  $\alpha(y)$  este continuă în punctul corespunzător  $y_0 = u(x_0)$ . Rezultă că funcția compusă  $\alpha(u(x))$  este continuă în punctul  $x_0$  și deci:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(u(x)) = \alpha(u(x_0)) = \alpha(y_0) = 0.$$

Să formăm acum raportul  $R(x)$  pentru funcția  $f(x) = \varphi(u(x))$ . Pentru orice  $x \neq x_0$ , avem

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\varphi(u(x)) - \varphi(u(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \frac{[\varphi'(y_0) + \alpha(u(x))] (u(x) - u(x_0))}{x - x_0} = [\varphi'(y_0) + \alpha(u(x))] \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Termenii din ultimul membru al șirului de egalități au toți limite (finite) în  $x_0$ : într-adevăr,  $\varphi'(y_0)$  este număr,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(u(x)) = 0 \text{ și } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0).$$

Rezultă că și raportul inițial are limită (finită) în  $x_0$ , deci funcția  $f$  este derivabilă în  $x_0$  și

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = [\varphi'(y_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(u(x))] \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = \\ &= [\varphi'(y_0) + 0] u'(x_0) = \varphi'(y_0) \cdot u'(x_0) = \varphi'(u(x_0)) \cdot u'(x_0). \end{aligned}$$

**C o r o l a r .** Dacă funcția  $u$  este derivabilă pe  $I$  și funcția  $\varphi$  este derivabilă pe  $J$ , atunci funcția compusă  $f = \varphi \circ u$  este derivabilă pe  $I$  și

$$f'(x) = \varphi'(u(x)) \cdot u'(x), \quad x \in I.$$

**O b s e r v a ț i e.** Teorema precedentă rămîne valabilă și în cazul compunerii mai multor funcții.

Dacă în egalitatea  $f(x) = \varphi(u(x))$  pentru  $x \in I$ , prin care se definește funcția compusă  $f = \varphi \circ u$ , nu se mai pune în evidență argumentul  $x$ , se scrie

$$f = \varphi(u).$$

Atunci  $f' = [\varphi(u)]'$ .

Dacă în egalitatea  $f'(x) = \varphi'(u(x)) \cdot u'(x)$  pentru  $x \in I$ , nu se mai pune în evidență argumentul  $x$ , se scrie

$$f' = \varphi'(u) \cdot u'$$

și deoarece  $f' = [\varphi(u)]'$ , obținem egalitatea

$$[\varphi(u)]' = \varphi'(u) \cdot u'.$$

Această formulă este foarte utilă pentru calculul derivatelor funcțiilor compuse. Nu trebuie însă pierdut din vedere că în această formulă  $u$  nu este variabila independentă a funcției  $\varphi$ , ci este o funcție derivabilă.

Semnificația precisă a ultimei egalități este dată de egalitatea următoare :

$$(\varphi \circ u)' = (\varphi' \circ u) \cdot u'.$$

Aplicând formula de derivare a funcțiilor compuse în cazul funcțiilor elementare, se obțin următoarele reguli de derivare (în care  $u$  este o funcție derivabilă pe un interval  $I$  sau pe o reuniune de intervale) :

- 1)  $(u^n)' = n u^{n-1} u'$   $n$  întreg  
(dacă  $n \leq 0$ , este necesar ca  $u(x) \neq 0$  pentru  $x \in I$ ).
- 2)  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}},$   $u(x) > 0$  pentru  $x \in I$ ,
- 3)  $(\sin u)' = \cos u \cdot u'.$
- 4)  $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$
- 5)  $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u},$   $u(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$  pentru  $x \in I$ .
- 6)  $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u},$   $u(x) \neq k\pi$  pentru  $x \in I$ .
- 7)  $(\ln u)' = \frac{u'}{u},$   $u(x) > 0$  pentru  $x \in I$ .
- 8)  $(\ln |x|)' = \frac{1}{x},$   $(x \neq 0).$

Ultima regulă se obține astfel :

$$(\ln |x|)' = \frac{(|x|)'}{|x|} = \begin{cases} \frac{-1}{|x|} = \frac{1}{-|x|} = \frac{1}{x} & \text{dacă } x < 0, \\ \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

**Observație.** Dacă punem  $y = \varphi(u)$ ,  $u = u(x)$  și  $y = f(x)$ , atunci formula de derivare a funcției compuse  $y = f(x)$  se scrie :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

În această egalitate, membrul stâng se obține din membrul drept — formal — prin simplificare cu  $du$ .

### 3. Derivabilitatea funcțiilor inverse

Fie  $f$  o aplicație strict monotonă a unui interval  $I$  pe un interval  $J$ :

$$f: I \rightarrow J, \quad f(I) = J.$$

Fie  $\varphi = f^{-1}$  funcția inversă a lui  $f$ :

$$\varphi: J \rightarrow I.$$

Stim că  $y = f(x)$  dacă și numai dacă  $x = \varphi(y)$ ,  $x \in I$ ,  $y \in J$ .

**Teoremă.** Dacă funcția  $f$  este derivabilă într-un punct  $x_0 \in I$  și dacă  $f'(x_0) \neq 0$ , atunci funcția sa inversă  $\varphi = f^{-1}$  este derivabilă în punctul corespunzător  $y_0 = f(x_0) \in J$  și

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Să observăm mai întâi că  $f$  și  $f^{-1}$  sunt continue, deoarece ambele sunt strict monotone și multimea valorilor fiecareia este un interval.

Prin ipoteză avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \neq 0$$

deci, pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \in I$ ,  $x_n \neq x_0$ , avem

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \rightarrow f'(x_0).$$

Să formăm acum raportul  $R(y)$  pentru funcția  $\varphi$ ,  $y \neq y_0$ ,

$$R(y) = \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0}.$$

Pentru ca să arătăm că acest raport are în punctul  $y_0$  limita  $\frac{1}{f'(x_0)}$ , este suficient să arătăm că pentru orice sir  $y_n \rightarrow y_0$ ,  $y_n \in J$ ,  $y_n \neq y_0$ , avem

$$\frac{\varphi(y_n) - \varphi(y_0)}{y_n - y_0} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Fie deci un sir oarecare  $y_n \rightarrow y_0$ ,  $y_n \in J$ ,  $y_n \neq y_0$ .

Deoarece  $y \in J = f(I)$ , pentru fiecare  $n \in N$  există un punct  $x_n \in I$  astfel ca

$$y_n = f(x_n) \text{ deci } x_n = \varphi(y_n).$$

Deoarece  $y_n \neq y_0$ , iar funcția  $\varphi$  este strict monotonă avem

$$\varphi(y_n) \neq \varphi(y_0) \text{ adică } x_n \neq x_0, \text{ sau } x_n - x_0 \neq 0.$$

Deoarece  $\varphi$  este continuă în  $y_0$  și  $y_n \rightarrow y_0$ , avem

$$\varphi(y_n) \rightarrow \varphi(y_0) \text{ adică } x_n \rightarrow x_0.$$

Am obținut astfel un sir  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \in I$ ,  $x_n \neq x_0$  și deci

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Atunci

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$$

(s-a împărțit și numărătorul și numitorul cu  $x_n - x_0 \neq 0$ ).

Așadar

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

deci funcția  $\varphi$  este derivabilă în punctul  $y_0$  și

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

**C o r o l a r .** Dacă funcția  $f$  este derivabilă pe  $I$  și  $f'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in I$ , atunci funcția sa inversă  $\varphi = f^{-1}$  este derivabilă pe  $J$  și

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ sau } \varphi'(y) \cdot f'(x) = 1,$$

unde  $x$  și  $y$  sunt în relațiile  $y = f(x)$  și  $x = \varphi(y)$ .

*Interpretarea geometrică.* Graficele funcțiilor  $f$  și  $\varphi$  sunt simetrice față de prima bisectoare.

Punctul  $(x_0, y_0)$  se află pe graficul lui  $f$ , iar punctul  $(y_0, x_0)$  se află pe graficul lui  $\varphi$ , și aceste două puncte sunt simetrice față de prima bisectoare.

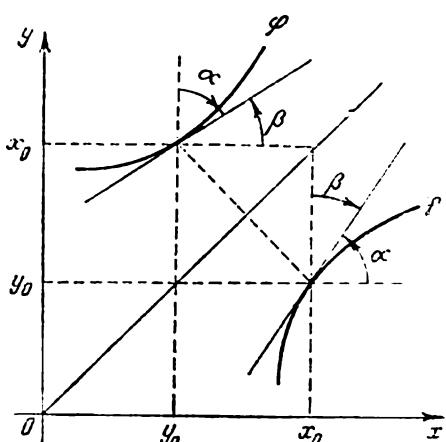


Fig. 88

Faptul că funcția  $f$  este derivabilă în  $x_0$  înseamnă că graficul său admite în punctul  $(x_0, y_0)$  tangentă, cu coeficientul unghiular  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$ .

Faptul că funcția  $\varphi$  este derivabilă în  $y_0$  înseamnă că graficul său admite în punctul  $(y_0, x_0)$  tangentă, cu coeficientul unghiular  $\operatorname{tg} \beta = \varphi'(y_0)$ .

Din egalitatea  $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

deducem  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$ , adică

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

**O b s e r v a ḣ i e.** Dacă funcția  $f$  are derivata nulă  $f'(x_0) = 0$  într-un

punct  $x_0 \in I$ , atunci funcția sa inversă  $\varphi$  nu este derivabilă în punctul corespunzător,  $y_0 = f(x_0)$ ; ea are însă derivată infinită, și anume  $\varphi'(y_0) = +\infty$  dacă funcția  $f$  (ca și  $\varphi$ ) este strict crescătoare (fig. 89), și  $\varphi'(y_0) = -\infty$  dacă funcția  $f$  este strict descrescătoare (fig. 90).

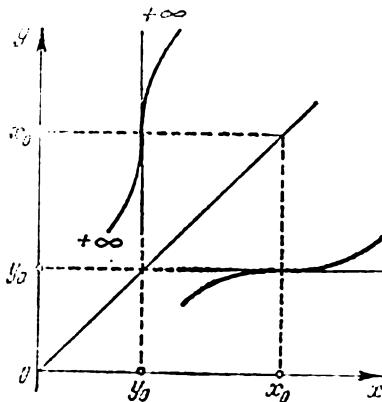


Fig. 89

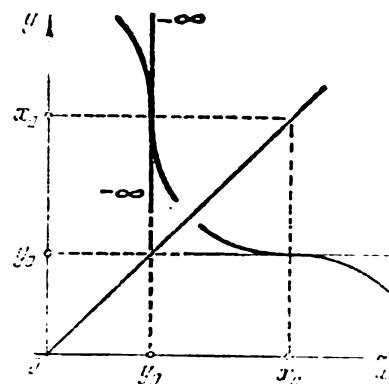


Fig. 90

Într-adevăr, dacă  $f$  este strict crescătoare, atunci  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ . Cu notațiile din teorema precedentă, dacă  $y_n \rightarrow y_0$ ,  $y \in J$ ,  $y_n \neq y_0$ , atunci

$$\frac{\varphi(y_n) - \varphi(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}}$$

și deoarece  $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} > 0$  și  $\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \rightarrow 0$ ,

rezultă că

$$\frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} \rightarrow +\infty$$

adică :

$$\frac{\varphi(y_n) - \varphi(y_0)}{y_n - y_0} \rightarrow +\infty,$$

de unde

$$\varphi'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = +\infty.$$

Dacă  $f$  este strict descrescătoare, atunci

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I$$

și, urmărind un raționament asemănător cu cel precedent, deducem

$$\varphi'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = -\infty.$$

Explicația geometrică este simplă: deoarece  $f'(x_0) = 0$ , tangenta în punctul  $(x_0, y_0)$  la graficul funcției  $f$  este paralelă cu axa  $Ox$ , și prin simetrie față de prima bisectoare, deducem că tangenta în punctul  $(y_0, x_0)$  la graficul funcției  $\varphi$  este paralelă cu axa  $Oy$ .

*Exemplu.* 1) Dacă  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , funcția  $f(x) = a^x$  definită pe  $R$  este derivabilă și  $f'(x) = a^x \ln a$ . Scriem.

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Intr-adevăr, funcția  $f(x) = a^x : R \rightarrow (0, +\infty)$  este inversa funcției  $\varphi(y) = \log_a y : (0, +\infty) \rightarrow R$ .

Funcția  $\log_a y$  este derivabilă și derivata sa nu se anulează pe domeniul său de definiție  $(0, +\infty)$ :

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y \ln a}.$$

Rezultă atunci că funcția  $f(x) = a^x$  este de asemenea derivabilă pe domeniul său de definiție  $R$ , și

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = y \ln a$$

unde  $x = \log_a y$  și  $y = a^x$ , deci  $f'(x) = a^x \ln a$ .

În particular, pentru  $a = e$ , avem  $\ln e = 1$ , deci

$$(e^x)' = e^x.$$

**Observație.** Pentru  $a = 1$ , avem  $f(x) = 1^x \equiv 1$ , deci  $f'(x) \equiv 0$ , iar  $\ln 1 = 0$ . Formula de derivare a funcțiilor exponentiale este deci valabilă pentru orice  $a > 0$ .

2) Funcția  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha \in R$ , definită pe  $(0, +\infty)$ , este derivabilă și  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ . Scriem:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Intr-adevăr, pentru  $x > 0$ , avem

$$f(x) = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x},$$

deci funcția  $x^\alpha$  este o funcție compusă de funcții derivabile: funcția exponentială  $e^x$  și funcția logarithmică  $\alpha \ln x$ . Rezultă că și funcția putere  $x^\alpha$  este derivabilă, și derivând după regula de derivare a funcțiilor compuse, obținem:

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

În particular, pentru  $\alpha = \frac{1}{n}$ , deducem că funcția  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  definită pe  $(0, +\infty)$  este derivabilă și

$$(\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

**Observație.** Pentru  $\alpha > 0$ , funcția  $f(x) = x^\alpha$  este definită pe semidreapta inchisă  $[0, +\infty)$ . În punctul  $x = 0$  nu mai putem aplica procedeul anterior pentru a vedea dacă funcția  $x^\alpha$  este derivabilă în 0, deoarece funcția  $\ln x$  nu este definită în punctul  $x = 0$ .

Pentru a vedea dacă funcția putere este derivabilă în acest caz în punctul 0, folosim direct definiția derivatei. Pentru  $x > 0$  formăm raportul

$$R(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^\alpha - 0^\alpha}{x - 0} = \frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1}.$$

$$\text{Dacă } \alpha - 1 > 0, \text{ avem } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} = 0, \text{ deci:}$$

dacă  $\alpha > 1$ , funcția  $f(x) = x^\alpha$  este derivabilă și în punctul 0 și  $f'(0) = 0 = \alpha 0^{\alpha-1}$ , adică derivata se obține în acest caz după aceeași regulă ca și în punctele  $x > 0$ .

Dacă  $\alpha - 1 < 0$  atunci  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{1-\alpha}} = +\infty$ , adică  $f'(0) = +\infty$ , deci:

dacă  $0 < \alpha < 1$ , funcția  $f(x) = x^\alpha$  nu este derivabilă în punctul 0, dar are o derivată egală cu  $+\infty$  în 0.

Dacă  $\alpha = 1$ , avem  $f(x) = x^\alpha = x$ , deci  $f'(x) \equiv 1$ , și în particular  $f'(0) = 1$ . În acest caz, derivata  $f'(0)$  nu se poate obține din formula  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ , făcând  $\alpha = 1$  și  $x = 0$ .

3) Dacă funcțiile  $u$  și  $v$  sunt derivabile pe un interval  $I$  și dacă  $u(x) > 0$  pentru orice  $x \in I$ , atunci funcția  $u^v$  este derivabilă pe  $I$  și

$$(u^v)' = v u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

Să scriem, în adevăr,

$$u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}$$

(în  $u$  are sens deoarece  $u(x) > 0$  pentru orice  $x \in I$ ).

Funcția  $e^{v \ln u}$  este o funcție compusă de funcții derivabile deci  $u^v$  este derivabilă și

$$\begin{aligned} (u^v)' &= (e^{v \ln u})' = e^{v \ln u} (v \ln u)' = e^{v \ln u} \left( v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right) = e^{\ln u^v} \left( v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right) = \\ &= u^v \left( v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right) = u^v v' \ln u + v \frac{u^v u'}{u} = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'. \end{aligned}$$

Funcția  $u^v$  se derivează deci astfel: întii se consideră că  $v$  este constant și se derivează ca o putere, apoi se consideră că  $u$  este constant și se derivează ca o exponentială, și se adună apoi cele două derivate.

*Exemplu.*  $f(x) = x^x$  definită pe  $(0, +\infty)$  este derivabilă și

$$(x^x)' = xx^{x-1}x' + x^x \ln x \cdot x' = xx^{x-1} + x^x \ln x = x^x + x^x \ln x = x^x(1 + \ln x).$$

4) Funcția  $f(x) = \arcsin x$  definită pe  $[-1, 1]$  este derivabilă pe intervalul deschis  $(-1, 1)$  și

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

În punctele  $-1$  și  $1$ , funcția  $\arcsin x$  nu este derivabilă, dar are derivată egală cu  $+\infty$  în aceste puncte.

Într-adevăr, funcția  $f(x) = \arcsin x : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  este inversa funcției  $\varphi(y) = \sin y : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ , care este derivabilă pe  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  și

$$\varphi'(y) = \cos y.$$

A vom:

$$\varphi'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ și } \varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0, \text{ deci în punctele corespunzătoare}$$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \text{ și } \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

funcția sa inversă  $f(x) = \arcsin x$  nu este derivabilă, dar are derivata  $+\infty$  (fiind strict crescătoare).

În celelalte puncte  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ , avem  $\varphi'(y) = \cos y > 0$ , deci în punctele corespunzătoare  $x = \varphi(y) = \sin y$ ,  $(-1 < x < 1)$ , funcția inversă  $f(x) = \arcsin x$  este derivabilă și

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(x)} \text{ sau } (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y}.$$

Dar, deoarece pentru  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$  avem  $\cos y > 0$ , rezultă că

$$\cos y = \sqrt{\cos^2 y} = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

și deci

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

5) Funcția  $f(x) = \arccos x$  definită pe  $[-1, 1]$  este derivabilă pe intervalul deschis  $(-1, 1)$  și

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

În punctele  $-1$  și  $1$  funcția  $\arccos x$  nu este derivabilă, dar are derivată egală cu  $-\infty$  în aceste puncte.

Într-adevăr, funcția  $f(x) = \arccos x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  este inversa funcției  $\varphi(y) = \cos y : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  care este derivabilă pe  $[0, \pi]$  și

$$\varphi'(y) = -\sin y.$$

Aveam

$$\varphi'(0) = \sin 0 = 0 \text{ și } \varphi'(\pi) = \sin \pi = 0,$$

deci în punctele corespunzătoare

$$\varphi(0) = \cos 0 = 1 \quad \text{și} \quad \varphi(\pi) = \cos \pi = -1,$$

funcția sa inversă  $f(x) = \arccos x$  nu este derivabilă, dar are derivata  $-\infty$  (fiind strict descrescătoare). În celealte puncte  $0 < y < \pi$  avem  $\varphi'(y) = -\sin y < 0$ , deci în punctele corespunzătoare  $x = \varphi(y) = \cos y$ , ( $-1 < x < 1$ ) funcția inversă  $f(x) = \arccos x$  este derivabilă și

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \text{ sau } (\arccos x)' = \frac{1}{-\sin y}.$$

Dar, deoarece pentru  $0 < y < \pi$  avem  $\sin y > 0$ , rezultă că

$$\sin y = \sqrt{\sin^2 y} = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

și deci

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6) Funcția  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  definită pe  $R$  este derivabilă pe domeniul său de definiție și

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Într-adevăr, funcția  $f(x) = \operatorname{arctg} x : R \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  este inversa funcției  $\varphi(y) = \operatorname{tg} y : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow R$  care este derivabilă și

$$\varphi'(y) = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y.$$

Deoarece  $\varphi'(y) \neq 0$  pentru orice  $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , rezultă că funcția inversă  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  este derivabilă pe  $R$  și

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \text{ sau } (\operatorname{arc tg} x)' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y},$$

unde  $x$  și  $y$  sunt în relația  $x = \varphi(y) = \operatorname{tg} y$ , deci

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

7) Funcția  $f(x) = \operatorname{arcctg} x$  definită pe  $R$  este derivabilă pe domeniul său de definiție și

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Într-adevăr, funcția  $f(x) = \operatorname{arcctg} x : R \rightarrow (0, \pi)$  este inversa funcției  $\varphi(y) = \operatorname{ctg} y : (0, \pi) \rightarrow R$ , care este derivabilă și

$$\varphi'(y) = -\frac{1}{\sin^2 y} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 y).$$

Deoarece  $\varphi'(y) \neq 0$  pentru orice  $y \in (0, \pi)$ , rezultă că funcția inversă  $f(x) = \operatorname{arcctg} x$  este derivabilă pe  $R$  și

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} \text{ sau } (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{-(1 + \operatorname{ctg}^2 y)},$$

unde  $x$  și  $y$  sunt în relația  $x = \varphi(y) = \operatorname{ctg} y$ , deci

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

8) Să punem  $y = f(x)$ , de unde  $x = \varphi(y)$ . Atunci formula de derivare a funcției inverse se scrie astfel:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \text{ sau } \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1.$$

În aceste egalități, unul din membri se obține — formal — din celălalt prin operații algebrice obișnuite.

Această notație este adesea utilă pentru calculul derivatelor.

Să considerăm funcțiile  $y = \varphi(t)$  și  $x = \psi(t)$  definite pe un interval  $I$ . Să presupunem că funcția  $x = \psi(t)$  este continuă și strict monotonă,

deci admite o funcție inversă  $t = \psi^{-1}(x)$  definită pe intervalul  $J = \psi(I)$ .

Putem atunci considera funcția compusă  $y = \varphi(\psi(x)) = f(x)$  definită pe  $J$ :

$$J \xrightarrow{\psi} I \xrightarrow{\varphi} R.$$

Dacă  $y = \varphi(t)$  și  $x = \psi(t)$  sunt derivabile în raport cu  $t$  pe intervalul  $I$  și dacă derivata  $\frac{dy}{dt}$  nu se anulează pe  $I$ , atunci funcția  $y = f(x)$  este derivabilă în raport cu  $x$  pe intervalul  $J$  și

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dt}{dx}}.$$

Fie  $x_0 \in J$  și  $t_0 = \psi^{-1}(x_0) \in I$ . Fie  $(x_n)$  un sir de puncte din  $J$ ,  $x_n \neq x_0$  și  $x_n \rightarrow x_0$ . Pentru fiecare  $n$  să notăm  $t_n = \psi^{-1}(x_n) \in I$ . Avem  $t_n \neq t_0$  deoarece  $\psi^{-1}$  este strict monotonă, ca și  $\psi$ . De asemenea,  $t_n \rightarrow t_0$ , deoarece  $\psi$  este continuă. Atunci

$$\frac{\varphi(t_n) - \varphi(t_0)}{t_n - t_0} \rightarrow \varphi'(t_0), \quad \frac{\psi(t_n) - \psi(t_0)}{t_n - t_0} \rightarrow \psi'(t_0),$$

deci :

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{\varphi(\psi(x_n)) - \varphi(\psi(x_0))}{x_n - x_0} = \frac{\varphi(t_n) - \varphi(t_0)}{\psi(t_n) - \psi(t_0)} = \frac{\frac{\varphi(t_n) - \varphi(t_0)}{t_n - t_0}}{\frac{\psi(t_n) - \psi(t_0)}{t_n - t_0}} \rightarrow \frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}.$$

Rezultă atunci că

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}.$$

Deoarece  $x_0$  a fost ales arbitrar, rezultă că

$$f'(x) = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

unde  $t = \psi^{-1}(x)$  sau  $x = \psi(t)$ , sau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

## - § 4. Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile

### 1. Teorema lui Fermat

Fie funcția  $f: I \rightarrow R$  și  $x_0 \in I$ .

**D e f i n i ț i e .** Se spune că  $x_0$  este un punct de maxim relativ (sau local) al funcției  $f$ , dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât să avem

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ pentru orice } x \in V \cap I.$$

Se spune că  $x_0$  este un punct de minim relativ (sau local) al funcției  $f$ , dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât să avem :

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ pentru } x \in V \cap I.$$

Punctele de maxim și de minim relativ ale funcției  $f$  se numesc *puncte de extrem* relativ (sau local) ale lui  $f$ .

Dacă  $x_0$  este un punct de maxim (relativ) al funcției  $f$ , numărul  $f(x_0)$  se numește *maxim (relativ) al funcției  $f$* , iar punctul  $(x_0, f(x_0))$  de pe grafic se numește *punct de maxim (relativ) al graficului*.

Dacă  $x_0$  este un punct de minim (relativ) al funcției  $f$ , numărul  $f(x_0)$  se numește *minim (relativ) al funcției  $f$* , iar punctul  $(x_0, f(x_0))$  de pe grafic se numește *punct de minim (relativ) al graficului*.

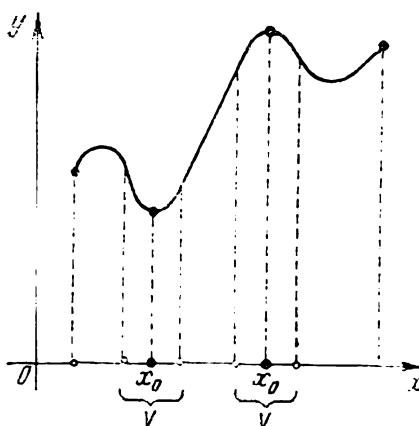


Fig. 91

Maximele și minimele funcției  $f$  (adică valorile funcției în punctele sale de maxim sau de minim) se numesc *extreme ale funcției*, iar punctele de maxim sau de minim ale graficului se numesc *puncte de extrem ale graficului*.

**Observații.** 1° Un punct de maxim relativ nu este în mod necesar un punct de maxim absolut (în care funcția are cea mai mare valoare pe întreg intervalul  $I$ ).

Un punct de maxim absolut este însă în același timp și un punct de maxim relativ.

De asemenea, un punct de minim relativ nu este în mod necesar un punct de minim absolut (în care funcția are cea mai mică valoare pe întreg intervalul  $I$ ). Un punct de minim absolut este însă și un punct de minim relativ.

2° Este posibil ca un minim (relativ) al funcției să fie mai mare decât un maxim (relativ) al său.

În cele ce urmează va fi omis calificativul „relativ”.

În legătură cu punctele de extrem ale unei funcții, avem următoarea

**Teoremă (Fermat).** Dacă funcția  $f$  are derivată într-un punct de extrem  $x_0$  din interiorul intervalului  $I$ , atunci derivata sa este nulă în acest punct,  $f'(x_0) = 0$ .

Să presupunem că  $x_0$  este un punct de *maxim* al funcției.

Aceasta înseamnă că există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât să avem

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ sau } f(x) - f(x_0) \leq 0 \text{ pentru orice } x \in V \cap I.$$

Prin ipoteză avem

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Deci pentru orice sir  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \in V \cap I$ ,  $x_n \neq x_0$ , avem

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \rightarrow f'(x_0).$$

În particular, luând sirul  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \in V \cap I$ , astfel ca  $x_n < x_0$ , adică  $x_n - x_0 < 0$ , avem

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geq 0$$

(deoarece numitorul și numărătorul sunt negativi) și prin trecere la limită deducem că și limita  $f'(x_0)$  a sirului este pozitivă:

$$f'(x_0) \geqslant 0.$$

Luând acum sirul  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \in V \cap I$ , astfel ca  $x_n > x_0$ , adică  $x_n - x_0 > 0$ , avem:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \leqslant 0$$

(deoarece numărătorul este  $\leqslant 0$  și numitorul este  $> 0$ ).

Prin trecere la limită, deducem că și limita  $f'(x_0)$  a sirului este negativă

$$f'(x_0) \leqslant 0.$$

Din cele două inegalități obținute, rezultă  $f'(x_0) = 0$ .

✓ În cazul cînd  $x_0$  este punct de minim, se procedează la fel, sau se observă că  $x_0$  este un punct de maxim pentru funcția  $h' = -f$ , și deci, conform primei părți a demonstrației, avem  $h'(x_0) = 0$ , adică  $f'(x_0) = 0$ .

**O b s e r v a ț i i .** 1° Dacă punctul de extrem  $x_0$  nu se află în interiorul intervalului  $I$ , ci la o extremitate a sa, este posibil ca funcția să aibă derivată în  $x_0$ , dar derivata sa să nu se anuleze în acest punct.

**E x e m p l u .** Funcția  $f(x) = x$  definită pe  $I = [0, 1]$  are un minim în punctul 0 și un maxim în punctul 1, dar derivata sa nu se anulează în aceste puncte. Într-adevăr,  $f'(x) \equiv 1$ , oricare ar fi  $x \in [0, 1]$ .

2° Funcția  $f$  poate avea un extrem într-un punct  $x_0$  fără a avea derivată în acest punct.

**E x e m p l u .** Funcția  $f(x) = |x|$  are un minim în punctul 0, dar nu are derivată în acest punct.

3° Reciproca teoremei lui Fermat nu este, în general, adevărată. Derivata unei funcții se poate anula într-un punct  $x_0$  din interiorul intervalului, fără ca  $x_0$  să fie punct de extrem.

**E x e m p l u .**  $f(x) = x^3$  definită pe  $R$ . Avem  $f'(x) = 3x^2$  și  $f'(0) = 0$ , dar 0 nu este punct de extrem al acestei funcții.

4° În teorema lui Fermat, condiția ca domeniul de definiție al funcției să fie interval nu este esențială. Funcția poate fi definită, de exemplu, și pe o reuniune de intervale disjuncte.

*Interpretarea geometrică a teoremei lui Fermat este următoarea:*

Dacă graficul funcției admite tangentă într-un punct de extrem, care nu coincide cu extremitățile graficului, atunci tangentă în acest punct este paralelă cu axa  $Ox$  (fig. 92).

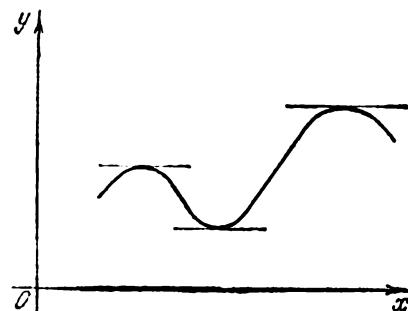


Fig. 92

## 2. Teorema lui Rolle

Teorema lui Fermat dă condiții suficiente (dar nu și necesare) pentru ca derivata într-un punct să fie nulă.

O altă teoremă care dă condiții suficiente pentru că derivata să se anuleze este

**T e o r e m a l u i R o l l e .** Fie  $f$  o funcție definită pe un interval  $I$  și  $a < b$  două puncte din  $I$ . Dacă :

- 1) funcția  $f$  este continuă pe intervalul închis  $[a, b]$ ;
- 2) funcția  $f$  este derivabilă pe intervalul deschis  $(a, b)$ ;
- 3)  $f(a) = f(b)$ ,

atunci există cel puțin un punct  $c \in (a, b)$ ,  $a < c < b$ , în care derivata se anulează,  $f'(c) = 0$ .

Dacă funcția  $f$  este constantă pe  $[a, b]$ ,  $f(x) \equiv \alpha$ , avem  $f'(x) \equiv 0$ , deci, pentru orice punct  $c \in (a, b)$  avem  $f'(c) = 0$  și teorema este demonstrată în acest caz.

Să presupunem deci că funcția  $f$  nu este constantă.

Deoarece funcția  $f$  este continuă pe intervalul compact  $[a, b]$ , ea este mărginită și își atinge marginile pe acest interval. Există deci două puncte  $x_m$  și  $x_M$  în intervalul  $[a, b]$ , astfel încât să avem

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \text{ pentru orice } x \in [a, b].$$

În plus, deoarece  $f$  nu este constantă, avem

$$f(x_m) < f(x_M)$$

$x_m$  și  $x_M$  sunt puncte de extrem ale funcției, pe intervalul  $[a, b]$ .

Dacă  $x_m$  este punct interior al acestui interval, adică dacă  $a < x_m < b$  atunci, conform teoremei lui Fermat, avem  $f'(x_m) = 0$  și luând  $c = x_m$  teorema este demonstrată în acest caz.

Dacă  $x_m = a$  sau  $x_m = b$ , atunci

$$f(a) = f(b) = f(x_m) < f(x_M),$$

deci  $x_M$  nu poate fi egal nici cu  $a$ , nici cu  $b$ : aşadar,  $x_M$  se află în interiorul intervalului  $[a, b]$ , adică  $a < x_M < b$ ; conform teoremei lui Fermat, avem  $f'(x_M) = 0$  și luând  $c = x_M$ , teorema este demonstrată și în acest caz.

Aşadar, în toate cazurile putem găsi un punct  $c \in (a, b)$  astfel ca  $f'(c) = 0$ .

*Interpretarea geometrică* a teoremei lui Rolle este următoarea : Dacă graficul funcției  $f$  admite tangentă în fiecare punct (cu excepția, eventual, a extremităților) și dacă dreapta care unește extremitățile graficului este

paralelă cu axa  $Ox$ , atunci există cel puțin un punct de pe grafic (care nu coincide cu extremitățile graficului) în care tangenta este de asemenea paralelă cu axa  $Ox$  (fig. 93).

**Observații.** 1° Dacă una din cele trei condiții ale teoremei nu este verificată, concluzia teoremei lui Rolle poate să nu mai fie adevărată.

**Exemplu.** 1) Funcția  $f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$

definită pe  $[0, 1]$  este discontinuă numai în punctul 1, este derivabilă pe intervalul deschis  $(0, 1)$  și anume  $f'(x) \equiv 1$  pentru  $x \in (0, 1)$ , și are valori egale la capete,  $f(0) = f(1) = 0$ . Derivata nu se anulează în nici un punct din  $(a, b)$ .

Fig. 93

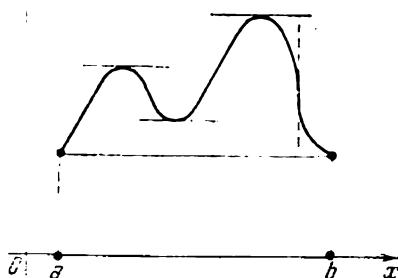


Fig. 93

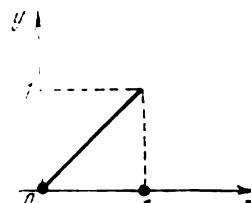


Fig. 94

2) Funcția  $f(x) = |x|$  definită pe  $[-1, 1]$  este continuă pe intervalul inchis  $[-1, 1]$ , are valori egale la capete,  $f(-1) = |-1| = 1$ ,  $f(1) = |1| = 1$  și este derivabilă în toate

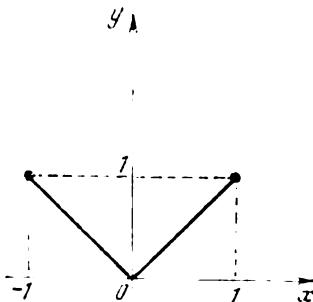


Fig. 95

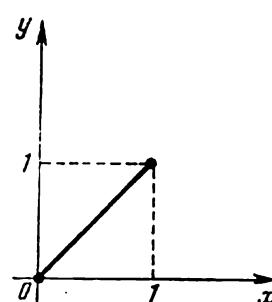


Fig. 96

punctele intervalului, cu excepția punctului 0 în care nu este derivabilă. Derivata nu se anulează în nici un punct. Într-adevăr:

$$(|x|)' = \begin{cases} -1 & \text{dacă } x < 0 \\ 1 & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

3) Funcția  $f(x) = x$  definită pe  $[0, 1]$  este continuă pe  $[0, 1]$ , derivabilă pe  $[0, 1]$  și anume  $f'(x) \equiv 1$ , dar nu ia valori egale la capete:  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ . Derivata nu se anulează în nici un punct.

2° Condiția ca domeniul de definiție al funcției să fie interval este esențială pentru valabilitatea teoremei lui Rolle.

*Exemplu.* Funcția  $f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{pentru } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

definită pe mulțimea  $[0, 1] \cap (1, 2]$  (care nu este interval) este continuă și derivabilă pe tot domeniul său de definiție și ia valori egale la extremități:

$$f(0) = 0, f(2) = 2 - 2 = 0.$$

Derivata sa nu se anulează în nici un punct. Într-adevăr,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{pentru } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

În toate rezultatele care folosesc teorema lui Rolle, condiția ca domeniul de definiție să fie interval va fi esențială.

3° Teorema lui Rolle rămîne adevărată dacă se presupune că pe intervalul deschis  $(a, b)$  funcția  $f$  are derivată finită sau infinită. Într-adevăr, în demonstrație s-a folosit teorema lui Fermat, în care nu se presupune a priori, că derivata este finită.

Teorema lui Rolle rămîne adevărată, în particular, dacă funcția derivabilă  $f$  se anulează în  $a$  și  $b$ ,  $f(a) = 0$  și  $f(b) = 0$ , adică dacă  $a$  și  $b$  sunt rădăcini ale funcției. În acest caz, teorema se poate enunța astfel:

*Între două rădăcini ale funcției se află cel puțin o rădăcină a derivatei.*

O proprietate duală este următoarea:

*Între două rădăcini consecutive ale derivatei se află cel mult o rădăcină a funcției.*

Într-adevăr, fie  $x_1 < x_2$  două rădăcini consecutive ale derivatei,  $f'(x_1) = 0$  și  $f'(x_2) = 0$ . Aceasta înseamnă că între  $x_1$  și  $x_2$  nu mai există nici o altă rădăcină a derivatei.

Să presupunem, prin absurd, că funcția ar avea două rădăcini diferite  $a$  și  $b$  între  $x_1$  și  $x_2$ :

$$x' < a < b < x_2, f(a) = f(b) = 0.$$

În baza proprietății precedente, ar rezulta că între rădăcinile  $a$  și  $b$  ale funcției s-ar afla cel puțin o rădăcină  $c$  a derivatei

$$x_1 < a < c < b < x_2, f'(c) = 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza că  $x_1$  și  $x_2$  sunt rădăcini consecutive ale funcției.

### 3. Teorema lui Lagrange

Vom folosi acum teorema lui Rolle pentru a demonstra o teoremă importantă, cu numeroase aplicații în analiză, cunoscută sub numele de „teorema lui Lagrange” sau „teorema creșterilor finite” sau încă „prima teoremă a creșterilor finite”.

**Teorema lui Lagrange.** Fie  $f$  o funcție definită pe un interval  $I$  și  $a < b$  două puncte din  $I$ . Dacă :

1)  $f$  este continuă pe intervalul închis  $[a, b]$ ;

2)  $f$  este derivabilă pe intervalul deschis  $(a, b)$ , atunci există cel puțin un punct  $c \in (a, b)$ ,  $a < c < b$ , astfel încât să avem

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Pentru demonstrație, se aplică teorema lui Rolle funcției ajutătoare  $h$ , definită pe  $I$  astfel

$$h(x) = f(x) - kx, \quad x \in I,$$

unde  $k$  este un număr ce urmează a fi determinat astfel ca

$$h(a) = h(b);$$

$$h(a) = f(a) - ka, \quad h(b) = f(b) - kb.$$

Pentru ca  $h(a) = h(b)$  este necesar și suficient ca  $f(a) - ka = f(b) - kb$ , de unde

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pentru această valoare a lui  $k$ , funcția  $h$  verifică ipotezele teoremei lui Rolle : funcția  $h(x)$  este continuă pe  $[a, b]$  și derivabilă pe  $(a, b)$  ca diferență a funcțiilor  $f(x)$  și  $kx$ , care sunt continue pe  $[a, b]$  și derivabile pe  $(a, b)$ . În plus,  $h(a) = h(b)$ . Există deci cel puțin un punct  $c \in (a, b)$  astfel ca  $h'(c) = 0$ . Dar pentru  $x \in (a, b)$  avem

$$h'(x) = f'(x) - k,$$

deci  $h'(c) = f'(c) - k$ , adică  $0 = f'(c) - k$ , de unde  $k = f'(c)$  și deci

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ sau } f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

și teorema este demonstrată.

Fiecare din ultimele două egalități poartă numele de *formula creșterilor finite* sau *formula mediei*, sau, uneori, *prima formulă a creșterilor finite*.

*Interpretarea geometrică* a teoremei creșterilor finite este următoarea : Dacă graficul funcției  $f$  admite tangentă în fiecare punct (cu excepția, eventual, a extremităților), există cel puțin un punct de pe grafic (care nu coincide cu extremitățile), în care tangentă este paralelă cu coarda care unește extremitățile.

Într-adevăr, coeficientul unghiular al tangentei în punctul  $(c, f(c))$  este  $f'(c)$ , iar coeficientul unghiular al coardei  $AB$  este  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Formula creşterilor finite

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

arată că cele două drepte au coeficienții unghiulari egali, deci sunt paralele.

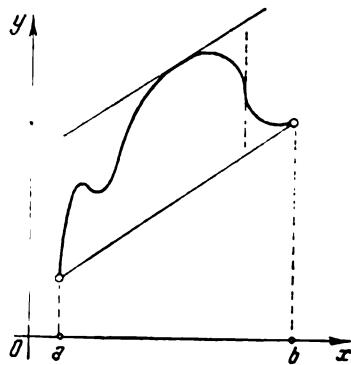


Fig. 97

**O b s e r v a t i i .** 1° Teorema lui Lagrange conține ca un caz particular teorema lui Rolle. Într-adevăr, dacă  $f(a) = f(b)$ , din formula creşterilor finite obținem  $f'(c) = 0$ .

2° Teorema lui Lagrange rămîne adevarată dacă se presupune că funcția  $f$  are derivată finită sau infinită pe intervalul deschis.

3° Punctul intermediar  $c$  din formula creşterilor finite depinde atât de funcția  $f$  cât și de punctele  $a$  și  $b$ . Pentru o aceeași funcție  $f$  și pentru intervalele  $[a_1, b_1]$  și  $[a_2, b_2]$  diferite, obținem, în general, puncte intermediare  $c_1$  și  $c_2$  diferite, astfel ca

$$\frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1} = f'(c_1)$$

$$\frac{f(b_2) - f(a_2)}{b_2 - a_2} = f'(c_2).$$

Pentru același interval  $[a, b]$  și pentru funcții  $f_1$  și  $f_2$  diferite, obținem, în general, puncte intermediare  $c_1$  și  $c_2$  diferite, astfel ca

$$\frac{f_1(b) - f_1(a)}{b - a} = f'_1(c_1)$$

$$\frac{f_2(b) - f_2(a)}{b - a} = f'_2(c_2),$$

chiar dacă  $f_1(a) = f_2(a)$  și  $f_1(b) = f_2(b)$ .

4° Formula creşterilor finite se poate scrie și sub forma

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c) \text{ sau } f(a) - f(b) = (a - b)f'(c).$$

Așadar, în formula creşterilor finite este indiferent dacă  $a < b$  sau  $b < a$ .

**C o r o l a r .** Dacă  $f$  este derivabilă pe intervalul  $I$ , atunci pentru orice puncte  $a$  și  $x$  din  $I$  există un punct  $\xi$  astfel că

$a < \xi < x$  sau  $x < \xi < a$  (după cum  $a < x$  sau  $x < a$ ) și astfel că

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} = f'(\xi) \text{ adică } f(a) - f(x) = (a - x)f'(\xi).$$

În adevăr,  $f$  este derivabilă pe intervalul închis cu extremitățile în  $a$  și  $x$  (deci și pe intervalul deschis cu aceste extremități), deoarece  $f$  este derivabilă

pe întreg intervalul  $I$ . Rezultă atunci că  $f$  este continuă pe intervalul închis cu extremitățile în  $a$  și  $x$ , și deci i se poate aplica teorema creșterilor finite pe acest interval.

Dacă funcția  $f$  și punctul  $a$  se mențin fixate, iar punctul  $x$  este arbitrar, atunci punctul intermediar  $\xi$  depinde de  $x$ .

De exemplu, luând un sir  $x_n \rightarrow a$ ,  $x_n \neq a$ , obținem un sir  $\xi_n \rightarrow a$ ,  $\xi_n \neq a$  astfel ca

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(\xi_n) \text{ pentru fiecare } n.$$

Faptul că  $\xi_n \rightarrow a$ , rezultă din inegalitățile  $|\xi_n - a| < |x_n - a|$  și din aceea că  $|x_n - a| \rightarrow 0$ , folosind criteriul de convergență a sirurilor.

#### 4. Consecințe ale teoremei creșterilor finite

1) Se știe că dacă  $f$  este o funcție constantă pe un interval  $I$  (sau pe o reuniune de intervale), atunci  $f'(x) = 0$  pentru orice  $x \in I$ . Reciproc:

**P r o p o z i t i a 1.** Dacă  $f$  are derivată nulă pe un interval  $I$ , atunci funcția  $f$  este constantă pe acest interval.

Într-adevăr, să alegem un punct  $a \in I$ . Aplicând teorema creșterilor finite, deducem că pentru orice punct  $x \neq a$  din  $I$  există un punct  $\xi \in I$  (cuprins între  $x$  și  $a$ ) astfel ca

$$f(x) - f(a) = (x - a) f'(\xi).$$

Dar  $f'(x) \equiv 0$ , deci  $f'(\xi) = 0$  și deci  $f(x) - f(a) = 0$ , de unde

$$f(x) = f(a) \text{ pentru orice } x \in I,$$

adică  $f$  este constantă pe  $I$ .

**O b s e r v a ᄃ i e.** Dacă  $f$  are derivata nulă pe o mulțime care nu este interval, ci, de exemplu, o reuniune de intervale disjuncte, nu rezultă că  $f$  este constantă pe această mulțime.

*Exemplu.* Funcția  $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } x < 0 \\ 1 & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$

definită pe  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  nu este constantă pe domeniul său de definiție dar are derivata nulă

$$f'(x) = 0 \text{ pentru orice } x \neq 0.$$

2) Dacă  $f$  și  $g$  sunt două funcții derivabile pe un interval  $I$  (sau o reuniune de intervale) și dacă diferența lor este constantă pe  $I$ , atunci derivele lor sunt egale pe  $I$ .

Într-adevăr, din ipoteza  $f(x) - g(x) \equiv c$ ,  $x \in I$ , deducem  $f'(x) - g'(x) \equiv 0$ ,  $x \in I$ , deci

$$f'(x) = g'(x) \quad \text{pentru orice } x \in I.$$

Reciproc:

**Propoziția 2.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt două funcții derivabile pe un interval  $I$ , și dacă derivatele lor sunt egale pe intervalul  $I$ , atunci diferența lor este constantă pe acest interval.

Să notăm  $h = f - g$ . Ipoteza afirmă că  $f' = g'$ . Rezultă că  $h' = f' - g' = 0$ . În baza proprietății 1 deducem că  $h(x) = c$ , adică  $f(x) - g(x) = c$  pentru orice  $x \in I$ .

**Observație.** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  au deriveate egale pe o mulțime care nu este interval, nu rezultă că diferența lor este constantă pe această mulțime.

**Exemplu.** Fie funcțiile  $f$  și  $g$  definite pe  $A = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  astfel:

$$f(x) = \operatorname{tg} x;$$

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x + 1 & \text{pentru } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \operatorname{tg} x - 1 & \text{pentru } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \end{cases}$$

Avem  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$  și  $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ , deci  $f'(x) = g'(x)$  pentru orice  $x \in A$ . Dar funcția  $f - g$  nu este constantă pe  $A$ :

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & \text{pentru } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}.$$

Din propoziția 2 rezultă că, dacă  $f$  este derivabilă pe un interval  $I$ , orice altă funcție derivabilă pe  $I$  care are aceeași derivată  $f'$  ca și  $f$  este de forma  $f + C$  (unde  $C$  este o constantă convenabilă, care depinde de funcția  $g$ ).

Mulțimea  $\{f + C\}_{C \in \mathbb{R}}$  conține deci *toate* funcțiile definite pe  $I$  care au derivata egală cu  $f'$ .

Funcțiile derivabile pe  $I$  care au derivata egală cu  $f'$  se numesc *primitive* ale lui  $f'$ . Primitivele sunt studiate în capitolul despre integrale.

3) Fie  $f$  o funcție derivabilă pe un interval  $I$  (sau pe o reuniune de intervale).

Dacă  $f$  este *crescătoare*, derivata sa  $f'$  este *pozitivă*.

Dacă  $f$  este *descrescătoare*, derivata sa  $f'$  este *negativă*.

Într-adevăr, fie un punct oarecare  $x \in I$ .

Dacă  $f$  este crescătoare avem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I$$

și prin trecere la limită obținem

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

Dacă  $f$  este descrescătoare, avem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0 \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I$$

și prin trecere la limită obținem

$$f'(x) \leqslant 0.$$

**O b s e r v a ț i e.** Dacă  $f$  este strict crescătoare pe  $I$ , nu rezultă că derivata  $f'$  este strict pozitivă. De asemenea, dacă  $f$  este strict descrescătoare pe  $I$ , nu rezultă că  $f'$  este strict negativă.

*Exemplu.* Funcția  $f(x) = x^3$ , definită pe  $\mathbb{R}$ , este strict crescătoare, dar derivata sa  $f'(x) = 3x^2$  se anulează în punctul 0.

Reciproc avem însă

**P r o p o z i ț i a 3.** Fie  $f$  o funcție derivabilă pe un interval  $I$ . Dacă  $f'$  este strict pozitivă pe  $I$ ,  $f$  este strict crescătoare pe  $I$ . Dacă  $f'$  este strict negativă pe  $I$ ,  $f$  este strict descreșătoare pe  $I$ .

Fie  $x_1 < x_2$  două puncte oarecare din  $I$ . Aplicînd teorema creșterilor finite pe intervalul  $[x_1, x_2]$  deducem că există un punct  $\xi \in (x_1, x_2)$ , astfel încît să avem

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi).$$

Să observăm că  $x_2 - x_1 > 0$ .

Dacă  $f'$  este strict pozitivă pe  $I$ , avem  $f'(\xi) > 0$ , deci  $(x_2 - x_1)f'(\xi) > 0$  și deci  $f(x_2) - f(x_1) > 0$  sau

$$f(x_1) < f(x_2),$$

adică  $f$  este strict crescătoare pe  $I$ .

Dacă  $f'$  este strict negativă pe  $I$ , avem  $f'(\xi) < 0$ , deci  $(x_2 - x_1)f'(\xi) < 0$  și deci  $f(x_2) - f(x_1) < 0$ , sau

$$f(x_1) > f(x_2),$$

adică  $f$  este strict descrescătoare pe  $I$ .

**O b s e r v a ț i i.** 1° Dacă  $f'$  este pozitivă pe  $I$ ,  $f$  este crescătoare pe  $I$ ; dacă  $f'$  este negativă pe  $I$ ,  $f$  este descreșătoare pe  $I$ .

În adevăr, din demonstrația propoziției precedente deducem că dacă  $f' \geq 0$ , atunci  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , adică  $f$  este crescătoare; iar dacă  $f' \leq 0$ , atunci  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , adică  $f$  este descrescătoare.

2° Dacă derivata  $f'$  nu se anulează pe  $I$ , atunci  $f$  este strict monotonă pe  $I$ .

În adevăr, oricare ar fi  $x_1 \neq x_2$  din  $I$ , aplicînd teorema creșterilor finite, găsim un punct  $\xi$  cuprins între  $x_1$  și  $x_2$  astfel ca

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2) f'(\xi).$$

Dar  $x_1 - x_2 \neq 0$  și  $f'(\xi) \neq 0$ , deci  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , adică  $f$  este biunivocă pe  $I$ . Fiind și continuă pe  $I$ , rezultă că este strict monotonă.

Acest rezultat se va deduce mai departe și din proprietatea lui Darboux.

3° Propoziția 3 și observațiile precedente nu mai sunt, în general, adevărate, dacă funcția este definită pe o mulțime care nu este interval, ci, de exemplu, o reuniune de intervale.

*Exemplu.* Funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$ , definită pe  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , este derivabilă, și  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$  pentru orice  $x \neq 0$ . Funcția  $\frac{1}{x}$  este strict descrescătoare pe fiecare din intervalele  $(-\infty, 0)$  și  $(0, +\infty)$ , dar nu este strict descrescătoare pe reuniunea lor. Într-adevăr  $-1 < 1$  dar  $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$ .

4) Fie  $f$  o funcție definită pe un interval  $I$  și  $x_0 \in I$ .

**Propoziția 4.** Dacă  $f$  este derivabilă pe  $I - \{x_0\}$  și dacă derivata sa  $f'$  are limită (finită sau infinită) în punctul  $x_0$ , atunci  $f'(x_0)$  există și

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x).$$

Să notăm  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ . Fie un sir oarecare  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \in I$ ,  $x_n \neq x_0$ . Aplicînd teorema creșterilor finite pe intervalele cu o extremitate în  $x_0$  și cu cealaltă extremitate în  $x_n$ , obținem un sir de puncte intermediare  $\xi_n \rightarrow x_0$ ,  $\xi_n \in I$ ,  $\xi_n \neq x_0$ , astfel ca

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(\xi_n), \quad n \in N.$$

Deoarece  $\xi_n \rightarrow x_0$ ,  $\xi_n \neq x_0$ , rezultă că  $f'(\xi_n) \rightarrow l$  și deci

$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \rightarrow l$ . Deoarece sirul  $(x_n)$  a fost ales arbitrar astfel ca  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $(x_n \neq x_0)$ , rezultă că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l,$$

adică  $f$  are derivată (finită sau infinită) în  $x_0$ , egală cu  $l$ :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x).$$

În particular, dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$  există și este finită atunci  $f$  este derivabilă în  $x_0$ , iar derivata  $f'$  este continuă în  $x_0$ .

O b s e r v a t i e. Dacă derivata  $f'$  are limită la stînga (respectiv la dreapta) în  $x_0$ , atunci există derivata la stînga  $f'_s(x_0)$  (respectiv derivata la dreapta  $f'_d(x_0)$ ) și  $f'_s(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} f'(x)$  (respectiv  $f'_d(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f'(x)$ ).

5) Fie funcția  $f: I \rightarrow R$

**P r o p o z i t i a 5.** Dacă  $f$  are derivată mărginită pe intervalul  $I$ , atunci  $f$  este lipschitziană pe  $I$ , deci este uniform continuă pe  $I$ .

Fie  $M > 0$  un număr astfel ca  $|f'(x)| \leq M$  pentru orice  $x \in I$ .

Fie  $x'$  și  $x''$  două puncte arbitrale din  $I$ . Să aplicăm teorema creșterilor finite funcției  $f$  pe intervalul cu extremitățile în  $x'$  și  $x''$ : există un punct  $\xi$  cuprins între  $x'$  și  $x''$  astfel ca

$$f(x') - f(x'') = f'(\xi)(x' - x'').$$

Atunci

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi)| |x' - x''| \leq M |x' - x''|,$$

deci  $f$  este lipschitziană. Rezultă atunci că  $f$  este uniform continuă pe  $I$ .

**C o r o l a r .** Dacă intervalul  $I$  este mărginit și dacă  $f$  are derivată mărginită pe  $I$ , atunci  $f$  este mărginită pe  $I$ .

Într-adevăr,  $f$  este uniform continuă pe intervalul mărginit  $I$ , deci  $f$  este mărginită pe  $I$ .

Acest corolar se poate enunța și în forma următoare:

Dacă  $f$  este derivabilă pe intervalul mărginit  $I$ , și dacă  $f$  este nemărginită pe  $I$ , atunci derivata  $f'$  este de asemenea nemărginită pe  $I$ .

## 5. Teorema lui Cauchy

O altă teoremă a cărei demonstrație folosește teorema lui Rolle este *teorema lui Cauchy*, sau *a doua teoremă a creșterilor finite*.

**T e o r e m a l u i C a u c h y.** Fie  $f$  și  $g$  două funcții definite pe un interval  $I$  și  $a < b$  două puncte din  $I$ . Dacă:

1)  $f$  și  $g$  sunt continue pe intervalul închis  $[a,b]$ ;

2)  $f$  și  $g$  sunt derivabile pe intervalul deschis  $(a,b)$ ;

3)  $g'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in (a, b)$ ,

atunci  $g(a) \neq g(b)$  și există un punct  $c \in (a, b)$ ,  $a < c < b$  astfel încât să avem

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Să arătăm mai întii că  $g(a) \neq g(b)$ . Dacă am avea  $g(a) = g(b)$ , funcția  $g$  ar verifica ipotezele teoremei lui Rolle și deci ar exista un punct  $\xi$  astfel ca  $g'(\xi) = 0$ , ceea ce contrazice ipoteza 3.

Pentru demonstrația celeilalte părți a concluziei, se aplică teorema lui Rolle funcției ajutătoare  $h$ , definită pe  $I$  astfel:

$$h(x) = f(x) - kg(x), \quad x \in I,$$

unde  $k$  este un număr ce urmează a fi determinat astfel încât să avem  $h(a) = h(b)$ . Dar

$$h(a) = f(a) - kg(a), \quad h(b) = f(b) - kg(b).$$

Pentru ca  $h(a) = h(b)$  este necesar și suficient ca

$$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b),$$

de unde :

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Pentru această valoare a lui  $k$ , funcția  $h$  verifică ipotezele teoremei lui Rolle :  $h$  este continuă pe  $[a, b]$  și derivabilă pe  $(a, b)$  ca diferență a funcțiilor  $f$  și  $kg$  care sunt continue pe  $[a, b]$  și derivabile pe  $(a, b)$ . În plus,  $h(a) = h(b)$ . Există deci cel puțin un punct  $c \in (a, b)$  astfel ca  $h'(c) = 0$ . Dar pentru  $x \in (a, b)$  avem

$$h'(x) = f'(x) - kg'(x),$$

deci  $h'(c) = f'(c) - kg'(c)$ , adică  $0 = f'(c) - kg'(c)$ , de unde

$$k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

și deci

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

și teorema este demonstrată.

Ultima egalitate poartă numele de „a doua formulă a creșterilor finite” sau „a doua formulă a mediei”.

**O b s e r v a t i i .** 1° Teorema lui Lagrange se obține ca un caz particular din teorema lui Cauchy, luând  $g(x) = x$ ,  $x \in I$ , într-adevăr,  $g$  este continuă și derivabilă pe întreg intervalul  $I$ , și  $g'(x) \equiv 1$ , deci derivata lui  $g$  nu se anulează în nici un punct. În particular,  $g'(c) = 1$ . Scriind a doua formulă a creșterilor finite, în acest caz particular, în care  $g(b) = b$  și  $g(a) = a$ , se obține prima formulă a creșterilor finite.

Teorema lui Cauchy rămîne adevărată dacă se presupune că funcțiile  $f$  și  $g$  au derivată finită sau infinită pe intervalul deschis  $(a, b)$  și dacă în fiecare punct  $t \in (a, b)$  cel puțin una din derivele  $f'(t)$  și  $g'(t)$  este finită.

2° Punctul intermediar  $c$ , din a doua formulă a creșterilor finite, depinde atât de funcțiile  $f$  și  $g$  cât și de punctele  $a$  și  $b$ .

$3^{\circ}$  Amplificînd cu  $-1$  membrul stîng al formulei a doua a creșterilor finite, se constată că ea este adevărată fie că  $a < b$ , fie că  $a > b$ .

**C o r o l a r .** Dacă  $f$  și  $g$  sunt derivabile pe  $I$ , dacă  $g'$  nu se anulează pe  $I$  și dacă  $f(a) = g(a) = 0$ , atunci pentru orice punct  $x \in I$  există un punct  $\xi$  cuprins între  $a$  și  $x$  ( $\xi \neq a$ ,  $\xi \neq x$ ), astfel încît să avem

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Într-adevăr, deoarece  $f(a) = 0$  și  $g(a) = 0$ , avem  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$ .

Aplicînd teorema lui Cauchy deducem că există un punct  $\xi$  cuprins între  $a$  și  $x$  astfel ca  $\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$  și deci  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ .

## 6. Teorema lui Darboux

În capitolul precedent s-a arătat că funcțiile continue au proprietatea lui Darboux, dar că există și alte funcții care au această proprietate, fără a fi continue.

Vom arăta că funcțiile derivate au de asemenea proprietatea lui Darboux.

Să transcriem mai întîi, pentru derivate, un rezultat despre limite. Fie  $f$  o funcție definită pe un interval  $I$ , derivabilă într-un punct  $x_0 \in I$ :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă  $\alpha < f'(x_0) < \beta$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  astfel încît să avem

$$\alpha < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \beta \quad \text{pentru } x \in V \cap I.$$

În particular, dacă  $f'(x_0) > 0$ , atunci

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad \text{pentru } x \in V \cap I,$$

iar dacă  $f'(x_0) < 0$ , atunci

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \quad \text{pentru } x \in V \cap I.$$

**T e o r e m a l u i D a r b o u x .** Dacă  $f'$  este derivata unei funcții derivabile  $f$  pe un interval  $I$ , atunci derivata  $f'$  are proprietatea lui Darboux pe acest interval.

Fie două puncte  $a < b$  din  $I$  pentru care  $f'(a) \neq f'(b)$ ; pentru a face o alegere, să presupunem că  $f'(a) < f'(b)$ . Fie de asemenea  $\lambda$  un număr astfel ca  $f'(a) < \lambda < f'(b)$ . Vom arăta că putem găsi un punct  $c_\lambda$ , astfel ca

$a < c_\lambda < b$  și  $f'(c_\lambda) = \lambda$ . Pentru demonstrație, vom aplica teorema lui Fermat funcției ajutătoare  $h$ , definită pe  $I$  astfel:

$$h(x) = f(x) - \lambda x \quad x \in I.$$

Funcția  $h$  este derivabilă pe  $I$  și

$$h'(x) = f'(x) - \lambda, \quad x \in I.$$

Pe de altă parte, funcția  $h$  este continuă (fiind derivabilă) pe intervalul compact  $[a, b]$ , deci este mărginită și atinge marginile pe acest interval. Din inegalitățile  $f'(a) < \lambda < f'(b)$ , deducem  $f'(a) - \lambda < 0$  și  $f'(b) - \lambda > 0$ , deci

$$h'(a) < 0, \quad h'(b) > 0.$$

Deoarece  $h'(a) < 0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $a$  astfel încât să avem

$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} < 0 \quad \text{pentru } x \in V \cap I.$$

În particular, dacă  $x \in V \cap [a, b]$  atunci  $x > a$ , deci  $x - a > 0$ , de unde rezultă că  $h(x) - h(a) < 0$ , adică

$$h(x) < h(a) \quad \text{pentru } x \in V \cap [a, b].$$

Aceasta înseamnă că funcția  $h$  își atinge marginea inferioară pe intervalul  $[a, b]$  într-un punct diferit de  $a$ .

Deoarece  $h'(b) > 0$ , există o vecinătate  $W$  a lui  $b$  astfel încât să avem

$$\frac{h(x) - h(b)}{x - b} > 0 \quad \text{pentru } x \in W \cap I.$$

În particular, dacă  $x \in W \cap [a, b]$ , atunci  $x < b$ , deci  $x - b < 0$ , de unde rezultă că  $h(x) - h(b) < 0$ , adică

$$h(x) < h(b) \quad \text{pentru } x \in W \cap [a, b].$$

Aceasta înseamnă că funcția  $h$  își atinge marginea inferioară pe intervalul  $[a, b]$  într-un punct diferit de  $b$ .

Din cele de mai sus rezultă că funcția  $h$  își atinge *marginea inferioară* într-un punct  $c$  din *interiorul* intervalului  $[a, b]$ .

Dacă  $c$  este un punct de *minim (absolut)* al funcției  $h$ , pe  $[a, b]$ , iar pe de altă parte  $h$  fiind derivabilă pe  $I$  este derivabilă în  $c$ . Aplicând teorema lui Fermat, deducem că  $h'(c) = 0$ . Cum  $h'(c) = f'(c) - \lambda$ , rezultă că  $f'(c) - \lambda = 0$ , adică  $f'(c) = \lambda$ .

Luând  $c_\lambda = c$ , teorema este demonstrată.

Deoarece funcțiile derivate (pe un interval) au proprietatea lui Darboux, toate propozițiile demonstate pentru funcțiile cu proprietatea lui Darboux rămân adevărate pentru funcțiile derivate:

**C o r o l a r u l 1.** Dacă o derivată  $f'$ , definită pe un interval  $I$ , are intr-un punct  $a \in I$  o valoare  $< 0$  și intr-un punct  $b \in I$  o valoare  $> 0$ , ea se anulează cel puțin într-un punct cuprins între  $a$  și  $b$ .

**Corolarul 2.** Dacă o derivată  $f'$  definită pe un interval  $I$  nu se anulează în nici un punct din  $I$ , atunci ea păstrează același semn pe tot intervalul  $I$  (deci primitiva sa  $f$  este strict monotonă pe  $I$ ).

**Corolarul 3.** O derivată  $f'$  nu are nici un punct de discontinuitate de prima specie.

Acest corolar rezultă și din observația după propoziția 4 de la pct. 4 (pag. 270).

*Exemplu.* 1) Funcția  $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$  definită pe  $\mathbb{R}$  nu poate fi derivata altei funcții, deoarece 0 este punct de discontinuitate de prima specie.

**Observație.** Funcția  $g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$  definită pe  $\mathbb{R} - \{0\}$  este derivata funcției

$G(x) = |x|$ , dar funcția  $g$  nu este definită pe un interval, ci pe reuniunea intervalor disjuncte  $(-\infty, 0)$  și  $(0, +\infty)$ . În punctul 0, ea nu este definită.

2) Funcția  $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  definită pe  $\mathbb{R}$  are în 0 o discontinuitate

de specie a doua. Ea ar putea fi derivata altei funcții. Într-adevăr, funcția  $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  definită pe  $\mathbb{R}$  este derivabilă și  $F' = f$ .

## § 5. Derivate de ordin superior. Formula lui Taylor

### 1. Derivate de ordin superior

Fie  $f$  o funcție definită pe un interval  $I$  (sau pe o reuniune de intervale) și  $x_0$  un punct din  $I$ .

Dacă funcția  $f$  este derivabilă pe o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , derivata sa  $f'$ , definită pe  $V$ , poate fi la rândul său derivabilă în punctul  $x_0$ .

**Definiție.** Dacă derivata  $f'$  este derivabilă în punctul  $x_0$  se spune că funcția  $f$  este derivabilă de două ori în punctul  $x_0$ ; derivata lui  $f'$  în  $x_0$  se notează  $f''(x_0)$  sau  $\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}$  sau  $D^2f(x_0)$  și se numește derivata a doua (sau derivata de ordinul 2) a funcției  $f$  în punctul  $x_0$ :

$$f''(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in V}} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Pentru a face o deosebire, derivata  $f'(x_0)$  se mai numește *derivata întâi* (sau de ordinul întâi) a funcției  $f$  în punctul  $x_0$ .

**Observație.** Dacă funcția  $f$  este derivabilă numai în punctul  $x_0$  (sau pe o mulțime care nu are pe  $x_0$  ca un punct de acumulare), nu se mai poate defini derivata a două a lui  $f$  în punctul  $x_0$ . Așadar, dacă funcția  $f$  este derivabilă de două ori în  $x_0$ , aceasta înseamnă că derivata întâi  $f'$  există pe o întreagă vecinătate a lui  $x_0$ .

Dacă funcția  $f$  este derivabilă de două ori pe intervalul  $I$ , se definește *derivata a doua* a funcției  $f$ , pe intervalul  $I$ , ca fiind funcția care asociază fiecărui punct  $x \in I$  numărul  $f''(x)$ . Derivata a doua se notează cu  $f''$  sau  $\frac{d^2f}{dx^2}$  sau  $D^2f$ :

$$f'' = (f')' ; \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right) ; D^2f = D(Df).$$

Se definesc în mod asemănător *derivata a treia* (sau de ordinul trei) a funcției  $f$ , notată  $f'''$  sau  $\frac{d^3f}{dx^3}$  sau  $D^3f$ , *derivata a patra* (sau de ordinul patru) a funcției  $f$ , notată  $f^{IV}$  sau  $\frac{d^4f}{dx^4}$  sau  $D^4f$  etc.

Pentru omogenitatea limbajului, se spune că funcția  $f$  însăși este derivata sa de ordinul zero.

Pentru aceste deriveate se folosesc de asemenea următoarele notări:

$$f^{(0)} = f ; f^{(1)} = f' ; f^{(2)} = f'' ; f^{(3)} = f'''.$$

Se definește prin recurență derivata de un ordin  $n$  oarecare ( $n \in N$ ).

**Definiție.** Dacă funcția  $f$  este derivabilă de  $n - 1$  ori pe o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , și dacă derivata  $f^{(n-1)}$  este derivabilă în  $x_0$ , se spune că funcția  $f$  este derivabilă de  $n$  ori în  $x_0$ ; derivata lui  $f^{(n-1)}$  în punctul  $x_0$  se notează cu  $f^{(n)}(x_0)$  sau  $\frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$  sau  $D^n f(x_0)$  și se numește *derivata de ordinul n a funcției f în punctul  $x_0$* :

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in V}} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă funcția  $f$  este derivabilă de  $n$  ori pe intervalul  $I$ , se definește *derivata de ordinul n a funcției f*, pe acest interval, ca fiind funcția care asociază fiecărui punct  $x \in I$ , numărul  $f^{(n)}(x)$ . Derivata de ordinul  $n$  a lui  $f$  se notează  $f^{(n)}$  sau  $\frac{d^n f}{dx^n}$  sau  $D^n f$ :

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})' ; \frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right) ; D^n f = D(D^{n-1} f).$$

Se spune, de asemenea, „funcția  $f$  admite derivată de ordinul  $n$ ” sau „derivata de ordinul  $n$  a funcției  $f$  există” în loc de „funcția  $f$  este derivabilă de  $n$  ori”.

**Observație.** Dacă funcția este derivabilă de  $n$  ori în punctul  $x_0$ , rezultă că derivata de ordinul  $n - 1$  (ca și derivele de ordin mai mic decât  $n - 1$ ) există nu numai în punctul  $x_0$ , ci pe o întreagă vecinătate a lui  $x_0$ .

*Exemple*

$$1) P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0;$$

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 3 a_3 x^2 + 2 a_2 x + a_1;$$

$$P''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \dots + 3 \cdot 2 a_3 x + 2 \cdot 1 a_2;$$

$$P'''(x) = n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + \dots + 3 \cdot 2 \cdot 1 a_3;$$

$$P^{(n-1)}(x) = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 a_n x = n! a_n x;$$

$$P^{(n)}(x) \equiv n! a_n;$$

$$P^{(n+1)}(x) \equiv 0; \quad P^{(n+k)}(x) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Un polinom  $P(x)$  are derive de orice ordin (este o funcție indefinit derivabilă), iar derivele sale de ordin mai mare decât gradul său sunt identice nule.

Reciproc, dacă o funcție  $P(x)$  are derivata de ordinul  $n + 1$  identic nulă,  $P(x)$  este un polinom de grad cel mult egal cu  $n$ .

Într-adevăr, din egalitatea

$$P^{(n+1)}(x) \equiv 0$$

deducem succesiv

$$P^{(n)}(x) \equiv C_n;$$

$$P^{(n-1)}(x) = C_n x + C_{n-1};$$

$$P^{(n-2)}(x) = C_n \frac{x^2}{1 \cdot 2} + C_{n-1} x + C_{n-2};$$

$$P^{(n-3)}(x) = C_n \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + C_{n-1} \frac{x^2}{2} + C_{n-2} x + C_{n-3};$$

$$P'(x) = C_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_{n-1} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_2 x + C_1;$$

$$P(x) = C_n \frac{x^n}{n!} + C_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_1 x + C_0,$$

unde  $C_0, C_1, \dots, C_n$  sunt niște numere dintre care unele pot fi nule.

2) Funcția  $f(x) = ce^x$  definită pe  $R$  are derive de orice ordin pe  $R$  (este indefinit derivabilă)

$$f'(x) = ce^x; \quad f''(x) = ce^x; \quad \dots; \quad f^{(n)}(x) = ce^x.$$

3) Funcția  $f(x) = \sin x$  definită pe  $\mathbb{R}$  este indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= \sin x, & f'(x) &= \cos x; & f''(x) &= -\sin x; & f'''(x) &= -\cos x; \\ f^{IV}(x) &= \sin x; & \dots & \end{aligned}$$

$$f^{(4k)}(x) = \sin x; \quad f^{(4k+1)}(x) = \cos x; \quad f^{(4k+2)}(x) = -\sin x;$$

$$f^{(4k+3)}(x) = -\cos x; \quad f^{(4k+4)}(x) = \sin x.$$

4) Funcția  $f(x) = \cos x$  definită pe  $\mathbb{R}$  este indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R}$ :

$$f^{(0)}(x) = \cos x; \quad f'(x) = -\sin x; \quad f''(x) = -\cos x;$$

$$f'''(x) = \sin x; \quad f^{IV}(x) = \cos x;$$

$$f^{(4k)}(x) = \cos x; \quad f^{(4k+1)}(x) = -\sin x; \quad f^{(4k+2)}(x) = -\cos x;$$

$$f^{(4k+3)}(x) = \sin x; \quad f^{(4k+4)}(x) = \cos x.$$

5) Funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$  definită pe  $\mathbb{R} - \{0\}$  este indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

$$f^{(0)}(x) = \frac{1}{x}; \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}; \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}; \quad f'''(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \quad \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

6) Funcția  $f(x) = \ln x$  definită pe  $(0, +\infty)$  este indefinit derivabilă pe  $(0, +\infty)$  și

$$f^{(0)}(x) = \ln x; \quad f'(x) = \frac{1}{x}; \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}; \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3};$$

$$f^{IV}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \dots$$

## 2. Operații cu funcții derivabile de $n$ ori

**Propoziție.** Fie funcțiile  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  și  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Dacă  $f$  și  $g$  sunt derivabile de  $n$  ori într-un punct  $x_0 \in I$ , atunci funcțiile  $f + g$ ,  $af$  ( $a$  număr real) și  $fg$  sunt derivabile de  $n$  ori în  $x_0$ , iar dacă  $g(x_0) \neq 0$ , atunci  $\frac{f}{g}$  este derivabilă de  $n$  ori în  $x_0$ .

Propoziția a fost demonstrată pentru  $n = 1$ . S-o presupunem adevarată pentru  $n$  oarecare și să-o demonstrăm presupunând că  $f$  și  $g$  sunt derivabile de  $n+1$  ori în  $x_0$ . Atunci  $f$  și  $g$  sunt derivabile o dată pe o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , iar derivatele  $f'$  și  $g'$  sunt derivabile de  $n$  ori în  $x_0$ . Deoarece  $g$  este continuă în  $x_0$  (fiind derivabilă), dacă  $g(x_0) \neq 0$ , rezultă că

$g$  este diferită de zero pe o întreagă vecinătate a lui  $x_0$ , și putem presupune că această vecinătate este  $V$ , lăsând-o la nevoie mai mică. Avem următoarele formule, valabile pe vecinătatea  $V$ :

$$(f + g)' = f' + g', \quad (\alpha f)' = \alpha f', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Deoarece funcțiile din membrul al doilea al acestor egalități sunt derivabile de  $n$  ori în  $x_0$ , și deoarece asupra lor se efectuează doar operațiile de adunare, înmulțire cu scalari, înmulțire și împărțire, care păstrează derivabilitatea, urmează, conform presupunerii, că funcțiile din dreapta egalităților, deci și cele din stînga egalităților, sunt derivabile de  $n$  ori în  $x_0$ , deci funcțiile  $f+g$ ,  $\alpha f$  și  $fg$  sunt derivabile de  $n+1$  ori în  $x_0$ , iar dacă  $g(x_0) \neq 0$ , funcția  $\frac{f}{g}$  este derivabilă de  $n+1$  ori în  $x_0$ .

Conform principiului inducției complete, propoziția este adevărată pentru orice  $n$ .

**C o r o l a r .** Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sunt derivabile de  $n$  ori pe  $I$ , atunci  $f + g$ ,  $\alpha f$  și  $fg$  sunt derivabile de  $n$  ori pe  $I$  și

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}, \quad (\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)};$$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i f^{(n-i)} g^{(i)} = f^{(n)} g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + C_n^2 f^{(n-2)} g^{(2)} + \dots + fg^{(n)},$$

iar funcția  $\frac{f}{g}$  este derivabilă de  $n$  ori pe mulțimea sa de definiție.

Rămîne să demonstrăm numai formulele. Demonstrația se face prin inducție completă. Demonstrarea primelor două formule o lăsăm pe seama cititorului, ca exercițiu ușor.

Să demonstrăm ultima formulă. Pentru  $n = 1$ , formula este adevărată:  $(fg)' = f'g + fg'$ . S-o presupunem adevărată pentru  $n$ . Atunci

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= [(fg)^{(n)}]' = \left[ \sum_{i=0}^n C_n^i f^{(n-i)} g^{(i)} \right]' = \sum_{i=0}^n C_n^i [f^{(n-i+1)} g^{(i)} + f^{(n-i)} g^{(i+1)}] = \\ &= C_n^0 f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{i=1}^n f^{(n+1-i)} g^{(i)} [C_n^i + C_n^{i-1}] + C_n^n f^{(0)} g^{(n+1)} = \\ &= C_{n+1}^0 f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{i=1}^n C_{n+1}^i f^{(n+1-i)} g^{(i)} + C_{n+1}^{n+1} f^{(0)} g^{(n+1)} = \sum_{i=0}^n C_{n+1}^i f^{(n+1-i)} g^{(i)}. \end{aligned}$$

Astfel formula este adevărată pentru orice  $n$ .

**O b s e r v a ţ i e.** Ultima egalitate din corolar se numește *formula lui Leibniz* de derivare a unui produs de două funcții. Membrul drept al formulei amintește formula lui Newton de dezvoltare a binomului.

Primele două formule din corolar exprimă faptul că operația de derivare de  $n$  ori este liniară.

**Propozitie.** Fie funcțiile  $u: I \rightarrow J$  și  $\varphi: J \rightarrow R$ . Dacă funcția  $u$  este derivabilă de  $n$  ori în punctul  $x_0 \in I$  și dacă funcția  $\varphi$  este derivabilă de  $n$  ori în punctul corespunzător  $y_0 = u(x_0) \in J$ , atunci funcția compusă  $f = \varphi \circ u: I \rightarrow R$  este derivabilă de  $n$  ori în punctul  $x_0$ .

Pentru  $n = 1$  propoziția a fost deja demonstrată. Să presupunem că ea este adevărată pentru cazul cînd se compun două funcții derivabile de  $n$  ori.

Să demonstrăm atunci propoziția în cazul cînd  $u$  este derivabilă de  $n + 1$  ori în  $x_0$ , iar  $\varphi$  este derivabilă de  $n + 1$  ori în  $y_0$ . Atunci  $u$  este derivabilă de  $n$  ori într-o vecinătate  $U$  a lui  $x_0$ , iar  $\varphi$  este derivabilă de  $n$  ori într-o vecinătate  $V$  a lui  $y_0$ , și putem alege vecinătatea  $V$  astfel ca  $u(U) \subset V$ ; atunci funcția compusă este derivabilă de  $n$  ori pe  $U$  și avem

$$f'(x) = \varphi'(u(x)) \cdot u'(x) \quad \text{pentru } x \in U.$$

Dar funcția  $\varphi'(u(x))$  este derivabilă de  $n$  ori în  $x_0$ , deoarece  $u$  este derivabilă de  $n$  ori (chiar de  $n + 1$  ori) în  $x_0$ , iar  $\varphi'$  este derivabilă de  $n$  ori în  $x_0$ ; de asemenea,  $u'$  este derivabilă de  $n$  ori în  $x_0$ . Atunci și produsul  $\varphi'(u(x)) \cdot u'(x)$  este derivabil de  $n$  ori în  $x_0$ , adică  $f'(x)$  este derivabilă de  $n$  ori în  $x_0$ , de unde rezultă că  $f$  este derivabilă de  $n + 1$  ori în  $x_0$ .

Conform principiului inducției complete, propoziția este adevărată pentru orice  $n$ .

**Corolar.** Dacă  $u$  este derivabilă de  $n$  ori pe  $I$ , iar  $\varphi$  este derivabilă de  $n$  ori pe  $J$ , atunci funcția compusă  $f = \varphi \circ u$  este derivabilă de  $n$  ori pe  $I$ .

În ceea ce privește derivele de ordin superior ale funcției  $f = \varphi \circ u$  plecăm de la derivata de ordinul 1 :

$$f'(x) = \varphi'(u(x)) \cdot u'(x)$$

și se derivează succesiv

$$f''(x) = \varphi''(u(x)) \cdot u'^2(x) + \varphi'(u(x)) \cdot u''(x);$$

$$f'''(x) = \varphi'''(u(x))u'^3(x) + 3\varphi''(u(x))u'(x)u''(x) + \varphi'(u(x))u'''(x) \text{ etc.}$$

**Observație.** Notind  $y = f(x)$  și  $y = \varphi(u)$ , apoi  $y'_x = f'$ ,  $y'_u = \varphi'$  și  $u'_x = u'$ , formulele precedente se scriu

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x;$$

$$y''_x = y''_u u'^2_x + y'_u u''_x;$$

$$y'''_x = y'''_u u'^3_x + 3y''_u u'_x \cdot u''_x + y'_u u'''_x$$

**Propoziție.** Fie  $f: I \rightarrow J$  o funcție strict monotonă cu  $f(I) = J$ , și fie  $\varphi: J \rightarrow I$  funcția sa inversă. Dacă  $f$  este derivabilă de  $n$  ori într-un punct  $x_0 \in I$  și dacă  $f'(x_0) \neq 0$ , atunci funcția inversă  $\varphi = f^{-1}$  este derivabilă de  $n$  ori în punctul corespunzător  $y_0 = f(x_0) \in J$ .

Propoziția a fost demonstrată pentru  $n = 1$ . S-o presupunem adevărată pentru un  $n$  oarecare și să-o demonstrăm pentru cazul cînd  $f$  este derivabilă de  $n + 1$  ori în  $x_0$ .

Atunci  $f$  este derivabilă de  $n$  ori, deci este derivabilă o dată într-o vecinătate  $U_1$  a lui  $x_0$ , iar derivata  $f'$  este continuă în  $x_0$ . Deoarece  $f'(x_0) \neq 0$ , rezultă că există o vecinătate  $U$  a lui  $x_0$  astfel ca  $f'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in U$ . Dacă notăm cu  $V = f(U)$ , funcția inversă  $\varphi$  este derivabilă de  $n$  ori pe  $V$ , conform presupunerii, deci este derivabilă o dată pe  $V$  și

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(\varphi(y))} \quad \text{pentru } y \in V.$$

Dar  $\varphi$  este derivabilă de  $n$  ori în  $y_0$ , iar  $f'$  este derivabilă de  $n$  ori în punctul  $x_0 = \varphi(y_0)$ , deci funcția compusă  $f'(\varphi(y))$  este derivabilă de  $n$  ori în  $y_0$ , și de asemenea funcția  $\frac{1}{f'(\varphi(y))}$  este derivabilă de  $n$  ori în  $y_0$ , adică  $\varphi'$  este derivabilă de  $n$  ori în  $y_0$ . Rezultă că  $\varphi$  este derivabilă de  $n + 1$  ori în  $y_0$ .

Conform principiului inducției complete, propoziția este adevărată pentru orice  $n$ .

**Corolar.** Dacă  $f$  este derivabilă de  $n$  ori pe  $I$  și dacă derivata  $f'$  nu se anulează pe  $I$ , atunci funcția inversă  $\varphi = f^{-1}$  este derivabilă de  $n$  ori pe  $J = f(I)$ .

Plecind de la egalitatea

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(\varphi(y))}, \quad y \in J$$

și derivând o dată, obținem

$$\varphi''(y) = -\frac{f''(\varphi(y))\varphi'(y)}{f'^2(\varphi(y))} = -\frac{f''(\varphi(y))}{f'^3(\varphi(y))}.$$

Derivând încă o dată, obținem

$$\begin{aligned} \varphi'''(y) &= -\frac{f'''(\varphi(y))\varphi'(y)f'^3(\varphi(y)) - f''(\varphi(y))3f'^2(\varphi(y))f''(\varphi(y))\varphi'(y)}{f'^4(\varphi(y))} = \\ &= -\frac{[f'''(\varphi(y))f'(\varphi(y)) - 3f''^2(\varphi(y))] \varphi'(y)}{f'^4(\varphi(y))} = -\frac{f'''(\varphi(y))f'(\varphi(y)) - 3f''^2(\varphi(y))}{f'^5(\varphi(y))}. \end{aligned}$$

**Observație.** Notind  $y = f(x)$  și  $x = \varphi(y)$ , apoi  $y'_x = f'$  și  $x'_y = \varphi'$ , egalitățile de mai sus se scriu

$$x'_y = \frac{1}{y'_x};$$

$$x''_y = -\frac{y''_x}{y'^3_x};$$

$$x'''_y = -\frac{y'''_x y'_x - 3y''_x^2}{y'^5_x}.$$

**Propozitie.** Fie funcțiile  $x = \varphi(t)$  și  $y = \psi(t)$  definite pe un interval  $I$ , astfel că funcția  $\varphi$  este strict monotonă și continuă pe  $I$ , și fie funcția  $y = f(x) = \psi(\varphi(x))$  definită pentru  $x \in \varphi(I) = J$ .

Dacă funcțiile  $\varphi$  și  $\psi$  sunt derivabile de  $n$  ori într-un punct  $t_0 \in I$  și dacă  $\varphi'(t_0) \neq 0$ , atunci funcția  $y = f(x)$  este derivabilă de  $n$  ori în punctul corespunzător  $x_0 = \varphi(t_0)$ .

Propoziția a fost demonstrată deja pentru  $n = 1$ . S-o presupunem adevărată pentru  $n$  oarecare și s-o demonstrăm în cazul în care  $\varphi$  și  $\psi$  sunt derivabile de  $n + 1$  ori în  $t_0$ . Atunci  $\varphi$  și  $\psi$  sunt derivabile de  $n$  ori într-o vecinătate  $U$  a lui  $t_0$  și  $\varphi'(t) \neq 0$  pentru  $t \in U$ . Rezultă că funcția inversă  $\varphi^{-1}(x)$  este derivabilă de  $n$  ori în vecinătatea  $V = \varphi(U)$  a lui  $x_0$ . Avem

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(\varphi(x))}{\varphi'(\varphi(x))}, \quad x \in V;$$

dacă  $\psi'$  și  $\varphi'$  sunt derivabile de  $n$  ori în  $t_0$ , deci și funcțiile compuse  $\psi'(\varphi(x))$  și  $\varphi'(\varphi(x))$  sunt derivabile de  $n$  ori în  $x_0$ . Atunci cîntul lor,  $f'(x)$ , este derivabil de  $n$  ori în  $x_0$ , adică  $f$  este derivabilă de  $n + 1$  ori în  $x_0$ . Conform principiului inducției complete, propoziția este adevărată pentru orice  $n$ .

**Coral.** Dacă  $\varphi$  și  $\psi$  sunt derivabile de  $n$  ori pe  $I$ , atunci  $f$  este derivabilă de  $n$  ori pe  $J$ .

Derivind egalitatea

$$f'(x) = \frac{\psi'(\varphi(x))}{\varphi'(\varphi(x))}$$

obținem :

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{\psi''(\varphi(x)) \varphi'(\varphi(x))^{-1} - \psi'(\varphi(x)) \varphi''(\varphi(x))^{-1}}{\varphi'^2(\varphi(x))} \cdot (\varphi'(x))^{-1} = \\
 &= \frac{\psi''(\varphi(x)) \varphi'(\varphi(x))^{-1} - \psi'(\varphi(x)) \varphi''(\varphi(x))^{-1}}{\varphi'^2(\varphi(x))} \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi(x))^{-1}} = \\
 &= \frac{\psi''(\varphi(x)) \varphi'(\varphi(x))^{-1} - \psi'(\varphi(x)) \varphi''(\varphi(x))^{-1}}{\varphi'^3(\varphi(x))}.
 \end{aligned}$$

**O b s e r v a t i e.** Notând  $y'_t = \varphi'$  și  $x'_t = \psi'$ , egalitățile precedente se scriu

$$f'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad f''_x = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{x'^3_t}.$$

### 3. Formula lui Taylor

Fie funcția  $f: I \rightarrow R$ , derivabilă de  $n$  ori într-un punct  $a \in I$ . Aceasta înseamnă că primele  $n - 1$  derive există nu numai în  $a$ , dar pe o întreagă vecinătate a lui  $a$ . Pentru simplitatea expunerii, vom presupune că primele  $n - 1$  derive există pe întreg intervalul  $I$ .

Pentru fiecare  $x \in I$  să definim polinomul

$$T_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Polinomul  $T_n$ , definit pe  $I$ , se numește *polinomul lui Taylor* de gradul  $n$ , atașat funcției  $f$ , în punctul  $a$ .

Dacă pentru fiecare  $x \in I$  notăm

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x),$$

atunci :

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \text{ adică}$$

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x),$$

oricare ar fi  $x \in I$ . Această egalitate, valabilă pentru orice  $x \in I$ , se numește *formula lui Taylor* de ordinul  $n$ , corespunzătoare funcției  $f$ , în punctul  $a$ .

Funcția  $R_n$  definită pe  $I$  se numește *restul* de ordinul  $n$  al formulei lui Taylor.

În cele ce urmează vom căuta să scriem restul  $R_n$  în altă formă, mai convenabilă pentru calcule.

Să calculăm mai întii derivatele polinomului lui Taylor

$$T'_n(x) = f'(a) + \frac{x-a}{1!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a);$$

$$T''_n(x) = f''(a) + \frac{x-a}{1!} f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} f^{(n)}(a);$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$T_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + \frac{x-a}{1!} f^{(n)}(a);$$

$$T_n^{(n)}(x) \equiv f^{(n)}(a); \quad T_n^{(n+1)}(x) \equiv 0; \quad T_n^{(n+k)}(x) \equiv 0.$$

Valorile derivatelor succesive ale acestui polinom, în punctul  $a$ , sînt\*:

$$T_n(a) = f(a);$$

$$T'_n(a) = f'(a);$$

$$T''_n(a) = f''(a);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a);$$

$$T_n^{(n+1)}(a) = 0.$$

Deoarece  $f$  și  $T$  au derive de ordinul  $n$  în  $a$ , rezultă că și restul  $R_n = f - T_n$  are derive de ordinul  $n$  în  $a$ . De asemenea, deoarece  $f$  și  $T_n$  au derive pînă la ordinul  $n - 1$  inclusiv, pe întreg intervalul  $I$ , rezultă că și restul  $R_n$  are derive pînă la ordinul  $n - 1$  inclusiv pe întreg intervalul  $I$ .

Vom avea astfel:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \quad x \in I;$$

$$R'_n(x) = f'(x) - T'_n(x), \quad x \in I;$$

$$R''_n(x) = f''(x) - T''_n(x), \quad x \in I;$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$R_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x), \quad x \in I;$$

$$R_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - T_n^{(n)}(a).$$

Rezultă atunci

$$R_n(a) = 0; R'_n(a) = 0; R''_n(a) = 0, \dots R_n^{(n-1)}(a) = 0; R_n^{(n)}(a) = 0.$$

O b s e r v a t i e. Deoarece  $R_n$  este derivabilă pe  $I$ , este continuă pe  $I$ ; în particular este continuă în  $a$ , deci

$$\lim_{x \rightarrow a} R_n(x) = R_n(a) = 0.$$

\* Polinomul lui Taylor de gradul  $n$ , atașat funcției  $f$ , a fost construit tocmai astfel încît să verifice condițiile scrise.

Aceasta înseamnă că, pentru  $x$  suficient de aproape de  $a$ , restul  $R_n(x)$  este oricărât de mic, adică diferența  $f(x) - T_n(x)$  poate fi făcută oricărât de mică; mai precis, putem realiza ca diferența  $f(x) - T_n(x)$  să fie cît dorim de mică, dacă luăm pe  $x$  suficient de aproape de  $a$ . Aceasta înseamnă că pentru valorile lui  $x$  suficient de apropiate de  $a$ , funcția  $f(x)$  poate fi aproximată prin polinomul lui Taylor  $T_n(x)$ .

Vom preciza, încă, acest rezultat, arătând că nu numai  $R_n(x)$ , dar chiar raportul  $\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}$  poate fi făcut oricărât de mic, dacă  $x$  este suficient de apropiat de  $a$ . Mai precis, vom arăta următoarea:

Lemă.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Într-adevăr, să notăm  $g(x) = (x-a)^n$ . Avem

$$\begin{aligned} g'(x) &= n(x-a)^{n-1}; \\ g''(x) &= n(n-1)(x-a)^{n-2}; \\ &\dots \\ g^{(n-1)}(x) &= n! (x-a); \\ g^{(n)}(x) &= n! \end{aligned}$$

Atunci :

$$\begin{aligned} g(a) &= 0 & R_n(a) &= 0; \\ g'(a) &= 0 & R'_n(a) &= 0; \\ g''(a) &= 0 & R''_n(a) &= 0; \\ &\dots \\ g^{(n-1)}(a) &= 0 & R_n^{(n-1)}(a) &= 0; \\ g^{(n)}(a) &= n! \neq 0 & R_n^{(n)}(a) &= 0. \end{aligned}$$

Fie  $x \in I$  arbitrar. Deoarece  $R_n(a) = 0$  și  $g(a) = 0$ , aplicînd corolarul teoremei lui Cauchy există un punct  $c_1$ , cuprins între  $a$  și  $x$ , astfel încît

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R'_n(c_1)}{g'(c_1)}.$$

Deoarece  $R'_n(a) = 0$  și  $g'(a) = 0$ , aplicînd încă o dată corolarul teoremei lui Cauchy, există un punct  $c_2$  cuprins între  $a$  și  $c_1$  (deci între  $a$  și  $x$ ), astfel încît

$$\frac{R'_n(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{R''(c_2)}{g''(c_2)} \text{ și deci } \frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R''_n(c_2)}{g''(c_2)}.$$

Aplicând de  $n - 1$  ori corolarul teoremei lui Cauchy găsim un punct  $\xi$  cuprins între  $a$  și  $x$ ,  $\xi \neq a$ ,  $\xi \neq x$ , astfel încât

$$\begin{aligned} \frac{R_n(x)}{g(x)} &= \frac{R_n^{(n-1)}(\xi)}{g^{(n-1)}(\xi)} = \frac{R_n^{(n-1)}(\xi) - R_n^{(n-1)}(a)}{g^{(n-1)}(\xi) - g^{(n-1)}(a)} = \\ &= \frac{\frac{R_n^{(n-1)}(\xi) - R_n^{(n-1)}(a)}{\xi - a}}{\frac{g^{(n-1)}(\xi) - g^{(n-1)}(a)}{\xi - a}} \end{aligned}$$

(deoarece  $R_n^{(n-1)}(a) = 0$ ,  $g^{(n-1)}(a) = 0$  și  $\xi \neq a$ ).

Dacă alegem un sir  $x_k \xrightarrow{k} a$ ,  $x_k \neq a$ , atunci  $\xi_k \rightarrow a$  și  $\xi_k \neq a$ , deci:

$$\frac{R_n^{(n-1)}(\xi_k) - R_n^{(n-1)}(a)}{\xi_k - a} \xrightarrow{k} R_n^{(n)}(a) = 0,$$

$$\frac{g^{(n-1)}(\xi_k) - g^{(n-1)}(a)}{\xi_k - a} \xrightarrow{k} g^{(n)}(a) = n! \neq 0$$

și deci:

$$\frac{R_n(x_k)}{g(x_k)} \xrightarrow{k} \frac{R_n^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)} = 0.$$

Deoarece sirul  $x_k \rightarrow a$ ,  $x_k \neq a$  a fost ales arbitrar, rezultă că

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{g(x)} = 0,$$

adică

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

**Propozitie.** Dacă  $f$  este derivabilă de  $n$  ori în punctul  $a \in I$ , atunci există o funcție  $\alpha(x)$  definită pe  $I$  astfel ca

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 = \alpha(a)$$

și astfel ca pentru orice  $x \in I$  să avem

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{x - a}{1} f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \\ &\quad + \frac{(x - a)^n}{n!} \alpha(x). \end{aligned}$$

Într-adevăr, deoarece  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x - a)^n} = 0$ , definim funcția  $\alpha$  astfel:

$$\alpha(x) = n! \frac{R_n(x)}{(x - a)^n} \text{ dacă } x \neq a \text{ și } \alpha(a) = 0.$$

Atunci  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} n! \frac{R_n(x)}{(x - a)^n} = 0 = \alpha(a)$ , și

$$R_n(x) = \frac{(x - a)^n}{n!} \alpha(x)$$

pentru orice  $x \in I$  (chiar pentru  $x = a$ ). Înlocuind în formula lui Taylor restul  $R_n(x)$  cu  $\frac{(x - a)^n}{n!} \alpha(x)$ , se obține formula din enunțul propoziției.

În propoziția precedentă s-a presupus că funcția  $f$  este derivabilă de  $n$  ori numai în punctul  $a$ .

În propozițiile următoare vom presupune că  $f$  este derivabilă de  $n + 1$  ori pe întreg intervalul  $I$ , și vom da alte forme restului formulei Taylor.

Fie  $a$  și  $x$  două puncte arbitrară diferite din  $I$  pe care le fixăm.

Fie de asemenea  $p$  un număr natural oarecare.

Restul  $R_n(x)$  de ordinul  $n$ , al formulei lui Taylor în punctul  $a$ , se poate scrie sub forma

$$R_n(x) = (x - a)^p K,$$

unde  $K$  este un număr (care se schimbă o dată cu  $x$  și  $a$ ). Formula lui Taylor de ordinul  $n$  în punctul  $a$  se scrie deci pentru punctul  $x$  ales, astfel:

$$f(x) = f(a) + \frac{x - a}{1!} f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^n(a) + (x - a)^p K.$$

Să considerăm acum funcția  $\varphi(t)$  definită pentru orice  $t \in I$  prin egalitatea următoare:

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{x - t}{1!} f'(t) + \frac{(x - t)^2}{2!} f''(t) + \dots + \frac{(x - t)^n}{n!} f^n(t) + (x - t)^p K.$$

Se verifică ușor că funcția  $\varphi$  este derivabilă pe  $I$ , deoarece toate funcțiile din membrul drept sunt derivabile pe  $I$ .

Aveam:

$$\varphi(x) = f(x) \text{ și } \varphi(a) = f(x).$$

Putem aplica teorema lui Rolle funcției  $\varphi$  pe intervalul cu extremitățile  $a$  și  $x$ : există un punct  $\xi$  cuprins între  $a$  și  $x$  astfel ca  $\varphi'(\xi) = 0$ . Dar

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(t) + \frac{x - t}{1!} f''(t) - f'(t) + \frac{(x - t)^2}{2!} f'''(t) - \frac{x - t}{1!} f''(t) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) - p(x - t)^{p-1} K = \\ &= \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - p(x - t)^{p-1} K. \end{aligned}$$

Egalitatea  $\varphi'(\xi) = 0$  se scrie atunci

$$\frac{(x - \xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) - p(x - \xi)^{p-1} K = 0,$$

de unde:

$$K = \frac{(x - \xi)^{n-p+1}}{n! p} f^{(n+1)}(\xi).$$

Așadar, restul  $R_n$  se scrie

$$R_n(x) = \frac{(x - a)^p (x - \xi)^{n-p+1}}{n! p} f^{(n+1)}(\xi).$$

Sub această formă,  $R_n$  se numește *restul lui Schlömlich-Roche*. Luind  $p = 1$  obținem *restul lui Cauchy*

$$R_n(x) = \frac{(x - a)(x - \xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Luind  $p = n + 1$ , obținem *restul lui Lagrange*

$$R_n(x) = \frac{(x - a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

**Observație.** Punctul intermediar  $\xi$  depinde atât de  $a$  și de  $x$  cât și de  $n$  și  $p$ . Așadar, în formula lui Cauchy, punctul  $\xi$  este diferit de cel din formula lui Lagrange.

Deoarece  $\xi$  este cuprins între  $a$  și  $x$ , există un număr  $\theta$  (care depinde, ca și  $\xi$ , de  $a$ ,  $x$ ,  $n$  și  $p$ ) astfel ca  $0 < \theta < 1$  și

$$\xi = a + \theta(x - a).$$

Notând  $h = x - a$ , atunci  $\xi = a + \theta h$ , iar formula lui Taylor se scrie:

$$f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n,$$

unde restul  $R_n$  poate avea una din formele

$$R_n = \frac{h^{n+1}(1 - \theta)^{n-p+1}}{n! p} f^{(n+1)}(a + \theta h) \quad (\text{Schlömlich-Roche});$$

$$R_n = \frac{h^{n+1}(1 - \theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta h) \quad (\text{Cauchy});$$

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h) \quad (\text{Lagrange}).$$

În particular, dacă  $0 \in I$ , și dacă luăm  $a = 0$ , formula lui Taylor cu restul lui Lagrange se scrie astfel:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

unde  $0 < \theta < x$  ( $\theta$  depinde de  $x$  și de  $n$ ).

Restul lui Cauchy se scrie în acest caz astfel:

$$R_n = (n!)^{-1} x^{n+1} (1 - \theta)^{n+1} f^{(n+1)}(\theta x).$$

*Exemplu.* 1) Pentru funcția  $f(x) = e^x$  definită pe  $\mathbb{R}$ , avem:  $f^{(n)}(x) = e^x$  și  $f^{(n)}(0) = 1$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ , deci formula lui Taylor cu restul lui Lagrange în punctul 0 se scrie:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

2) Pentru funcția  $f(x) = \sin x$  definită pe  $\mathbb{R}$ , avem

$$f(x) = 0; f'(0) = 1; f''(0) = 0; f'''(0) = -1; f^{(IV)}(0) = 0, \dots$$

Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange în punctul 0 se scrie

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x, \quad 0 < \theta < 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

3) Pentru funcția  $f(x) = \cos x$  definită pe  $\mathbb{R}$ , avem

$$f(0) = 1; f'(0) = 0; f''(0) = -1; f'''(0) = 0; f^{(IV)}(0) = 1, \dots$$

Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange în punctul 0 se scrie

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cos \theta x, \quad 0 < \theta < 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

4) Pentru funcția  $f(x) = \ln(1+x)$  definită pe  $(-1, +\infty)$  avem:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}; \quad f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3};$$

$$f^{(IV)}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}; \dots; \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}; \dots$$

deci :

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 1; \quad f''(0) = -1; \quad f'''(0) = 2; \dots; \quad f^{(IV)}(0) = -3!$$

Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange în punctul 0 se scrie:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

unde  $0 < \theta < 1$ ,  $\theta$  depinde de  $x$  și de  $n$ , iar  $x > -1$ .

#### 4. Puncte de extrem ale unei funcții

Fie  $f$  o funcție reală definită pe un interval  $I$ .

Teorema lui Fermat afirmă că într-un punct de extrem din interiorul intervalului, derivata funcției se anulează (dacă funcția este derivabilă în acest punct).

Stim însă că din  $f'(x_0) = 0$ , nu rezultă că  $x_0$  este un punct de extrem.

Se va arăta mai departe că, studiind semnul derivatei într-o vecinătate a lui  $x_0$ , putem decide dacă  $x_0$  este sau nu un punct de extrem, și, în caz afirmativ, dacă este punct de maxim sau de minim.

Dacă nu cunoaștem semnul derivatei în punctele din jurul lui  $x_0$ , putem folosi derivatele de ordin superior ale funcției în  $x_0$  (și numai în  $x_0$ ) pentru a vedea dacă  $x_0$  este punct de extrem.

**Theoremă.** Fie  $f$  o funcție derivabilă de  $n$  ori,  $n \geq 2$ , într-un punct  $a \in I$ , astfel încât

$$f'(a) = 0, f''(a) = 0, \dots, f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0.$$

1) Dacă  $n$  este par, atunci  $a$  este punct de extrem al lui  $f$ ; dacă  $f^{(n)}(a) < 0$  atunci  $a$  este punct de maxim, iar dacă  $f^{(n)}(a) > 0$ , atunci  $a$  este punct de minim.

2) Dacă  $n$  este impar, iar  $a$  este punct interior al intervalului  $I$ , atunci  $a$  nu este punct de extrem al funcției  $f$ .

Doarece primele  $n - 1$  derive se anulează în  $a$ , formula lui Taylor, de ordinul  $n$ , în punctul  $a$ , se scrie, pentru orice  $x \in I$ :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \alpha(x),$$

unde

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0, \text{ și } \alpha(a) = 0,$$

atunci

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!} [f^{(n)}(a) + \alpha(x)].$$

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow a} [f^{(n)}(a) + \alpha(x)] = f^{(n)}(a).$$

Dacă  $f^{(n)}(a) > 0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $a$  astfel ca

$$f^{(n)}(a) + \alpha(x) > 0 \text{ pentru } x \in V.$$

Dacă  $f^{(n)}(a) < 0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $a$  astfel ca

$$f^{(n)}(a) + \alpha(x) < 0 \text{ pentru } x \in V.$$

Dacă  $n$  este par, avem  $(x-a)^n \geq 0$  pentru orice  $x \in I$ , deci:

Dacă  $f^{(n)}(a) > 0$ , atunci  $f^{(n)}(a) + \alpha(x) > 0$  pentru  $x \in V$ , de unde rezultă că  $f(x) - f(a) \geq 0$  sau

$$f(x) \geq f(a) \text{ pentru } x \in V,$$

adică  $a$  este un punct de *minim*.

Dacă  $f^{(n)}(a) < 0$ , atunci  $f^{(n)}(a) + \alpha(x) < 0$  pentru  $x \in V$ , de unde rezultă că  $f(x) - f(a) \leq 0$  sau

$$f(x) \leq f(a) \text{ pentru } x \in V$$

adică  $a$  este un punct de maxim.

Să considerăm acum cazul cînd  $a$  este punct interior al intervalului  $I$  iar  $n$  este impar. Atunci  $(x - a^n) < 0$  dacă  $x < a$  și  $(x - a^n) > 0$  dacă  $x > a$ , deci :

dacă  $f^{(n)}(a) > 0$ , atunci  $f^{(n)}(a) + \alpha(x) > 0$ , pentru  $x \in V$ , de unde rezultă că :

$$f(x) - f(a) < 0 \quad \text{adică } f(x) < f(a) \quad \text{dacă } x < a, x \in V,$$

$$f(x) - f(a) > 0 \quad \text{adică } f(x) > f(a) \quad \text{dacă } x > a, x \in V$$

și deci  $a$  nu este punct de extrem;

$$\text{dacă } f^{(n)}(a) < 0 \quad \text{atunci}$$

$$f(x) > f(a) \quad \text{dacă } x < a, \quad x \in V,$$

$$f(x) < f(a) \quad \text{dacă } x > a, \quad x \in V$$

și deci nici în acest caz  $a$  nu este punct de extrem.

**O b s e r v a t i i.** Doearece  $f''(a)$  există, rezultă că  $f'$  există într-o întreagă vecinătate a lui  $a$ . Dacă  $n$  este par, iar  $a$  este punct interior al intervalului  $I$ , atunci derivata  $f'$  are semne diferite de o parte și de alta a lui  $a$ . Într-adevăr, dacă ar avea același semn într-o vecinătate a lui  $a$ , atunci  $f$  ar fi strict monotonă în această vecinătate și deci  $a$  nu-ar mai fi punct de extrem al lui  $f$ .

**C o r o l a r u l 1.** Fie  $f$  o funcție derivabilă de două ori în punctul  $a \in I$ , astfel încit  $f'(0) = 0$  și  $f''(a) \neq 0$ .

- 1) Dacă  $f''(a) < 0$ , atunci  $a$  este punct de maxim.
- 2) Dacă  $f''(a) > 0$ , atunci  $a$  este punct de minim.

Corolarul următor stabilește o proprietate reciprocă :

**C o r o l a r u l 2.** Dacă  $f$  este derivabilă de două ori într-un punct interior  $a \in I$  și dacă  $f$  are în  $a$  un minim, atunci  $f''(a) \geq 0$ , iar dacă  $f$  are în  $a$  un maxim, atunci  $f''(a) \leq 0$ .

Să presupunem că  $a$  este un punct de minim, deci  $f'(a) = 0$ . Dacă am avea  $f''(a) < 0$ , atunci din corolarul precedent ar rezulta că  $a$  este un punct de maxim și am ajunge la o contradicție : aşadar  $f''(a) \geq 0$ .

La fel se demonstrează că dacă  $a$  este un punct de maxim, atunci  $f''(a) \leq 0$ .

**Corolarul 3.** Dacă  $f$  este derivabilă de trei ori în punctul interior  $a \in I$  și dacă  $f'(a) = 0, f''(a) = 0, f'''(a) \neq 0$ ; atunci  $a$  nu este punct de extrem al funcției  $f$ .

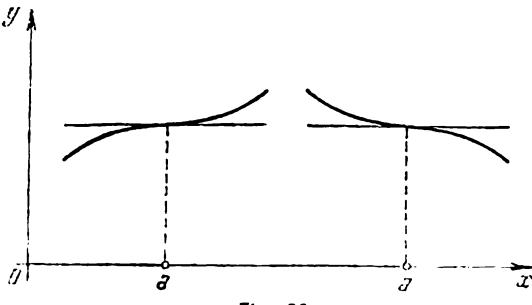


Fig. 98

**Observație.** În cazul cînd  $n$  este impar, tangenta la grafic în punctul  $(a, f(a))$  este paralelă cu axa  $Ox$  și traversează graficul (fig. 98).

Un asemenea punct, în care tangenta traversează graficul, se numește *punct de inflexiune*.

## § 6. Regulile lui l'Hospital

În cazurile excepțate de teoremele relative la operațiile cu limitele de funcții, trebuie întreprins un studiu direct pentru a vedea dacă există limită.

Uneori derivatele pot fi de folos în aceste cazuri, prin așa-numitele „reguli ale lui l'Hospital”.

Aceste reguli se aplică în cazul  $\frac{0}{0}$  și în cazul  $\frac{\infty}{\infty}$ . Celelalte cazuri se reduc la acestea.

### 1. Cazul $\frac{0}{0}$

Fie  $I$  un interval,  $x_0$  un punct de acumulare al său ( $x_0$  finit sau infinit) și funcțiile  $f$  și  $g$  definite pe intervalul  $I$ , cu excepția, eventual, a lui  $x_0$ . Vom presupune că  $g(x) \neq 0$  pentru  $x \neq x_0, x \in I$ . Dacă

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0 \text{ și } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

funcția  $\frac{f(x)}{g(x)}$  poate să aibă sau poate să nu aibă limită în punctul  $x_0$ .

În orice caz, deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = 0$  și  $|g(x)| > 0$  pentru  $x \neq x_0, x \in I$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{|g(x)|} = +\infty$$

și deci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty.$$

Așadar, sînt posibile trei situații: sau  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ , sau  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

sau  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  nu există, dar  $\frac{f(x)}{g(x)}$  este nemărginită în orice vecinătate a lui  $x_0$ .

Vom cerceta în continuare cazul în care ambele funcții au limită 0 în punctul  $x_0$ .

Teorema următoare este cunoscută sub numele de „regula lui l'Hospital pentru cazul  $\frac{0}{0}$ ”.

**Teorema 1.** Fie  $x_0$  un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval  $I$ ,  $f$  și  $g$  două funcții definite pe  $I$ , cu excepția, eventual, a lui  $x_0$ . Dacă:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ;
- 2)  $f$  și  $g$  sunt derivabile pe  $I$ , cu excepția, eventual, a lui  $x_0$ ;
- 3)  $g'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ ;
- 4) există  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$  (finită sau infinită).

Atunci:

a)  $g(x) \neq 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ ;

b) funcția  $\frac{f}{g}$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Demonstrație.** Vom considera mai întîi cazul cînd  $x_0$  este *finit*. Deoarece  $g'$  nu se anulează nici la stînga lui  $x_0$ , nici la dreapta lui  $x_0$ , rezultă că  $g'$  păstrează un semn constant atît la stînga lui  $x_0$ , cît și la dreapta lui  $x_0$ , deci funcția  $g$  este *strict monotonă* atît la stînga lui  $x_0$ , cît și la dreapta lui  $x_0$ . Rezultă atunci că  $g(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  adică  $g(x) \neq 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ .

Să definim acum funcțiile  $\tilde{f}$  și  $\tilde{g}$  pe mulțimea  $I \cup \{x_0\}$  astfel:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \neq x_0 \\ 0 & \text{dacă } x = x_0 \end{cases}; \quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{dacă } x \neq x_0 \\ 0 & \text{dacă } x = x_0 \end{cases}.$$

Avem:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \tilde{f}(x_0)$ ;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{g}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 = \tilde{g}(x_0)$$

deci funcțiile  $\tilde{f}$  și  $\tilde{g}$  sînt *continue* în punctul  $x_0$  (dacă  $f$  și  $g$  nu sînt definite în  $x_0$ , atunci  $\tilde{f}$  și  $\tilde{g}$  sînt prelungirile prin continuitate în punctul  $x_0$  ale funcțiilor  $f$  și  $g$ ).

În orice punct  $x \neq x_0$  din  $I$ , funcțiile  $\tilde{f}$  și  $\tilde{g}$  sînt derivabile (fiind egale, în vecinătatea lui  $x$ , respectiv cu funcțiile derivabile  $f$  și  $g$ ) și

$$\tilde{f}'(x) = f'(x), \quad \tilde{g}'(x) = g'(x) \neq 0.$$

Dacă alegem un sir oarecare  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \in I$ ,  $x_n \neq x_0$ , pentru fiecare  $n$  putem aplica funcțiilor  $\bar{f}$  și  $\bar{g}$  teorema lui Cauchy pe intervalul cu extremitățile în  $x_0$  și  $x_n$ : există un punct  $\xi_n$  cuprins între  $x_0$  și  $x_n$ ,  $\xi_n \neq x_0$ ,  $\xi_n \neq x_n$ , astfel ca

$$\frac{\bar{f}(x_n) - \bar{f}(x_0)}{\bar{g}(x_n) - \bar{g}(x_0)} = \frac{\bar{f}'(\xi_n)}{\bar{g}'(\xi_n)}.$$

În plus,  $\bar{g}(x_n) \neq \bar{g}(x_0)$  adică  $\bar{g}(x_n) \neq 0$ .

Dar  $\bar{f}(x_n) = f(x_n)$ ,  $\bar{f}(x_0) = 0$ ,  $\bar{f}'(\xi_n) = f'(\xi_n)$ ;

$$\bar{g}(x_n) = g(x_n), \quad \bar{g}(x_0) = 0, \quad \bar{g}'(\xi_n) = g'(\xi_n)$$

și egalitatea precedentă se scrie

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

În plus  $g(x_n) \neq 0$ .

Să observăm că  $|\xi_n - x_0| < |x_n - x_0|$  și  $|x_n - x_0| \rightarrow 0$ , deci  $\xi_n \rightarrow x_0$ , iar  $\xi_n \neq x_0$ .

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$  și  $\xi_n \rightarrow x_0$ ,  $\xi_n \neq x_0$ , avem  $\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \rightarrow A$  și deci

$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow A$ . Sirul  $(x_n)$ , fiind ales arbitrar, rezultă că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

și teorema este demonstrată în cazul cînd  $x_0$  este finit.

Să trecem acum la cazul cînd  $x_0$  este infinit. Pentru a face o alegere, să presupunem că  $x_0 = +\infty$  (cazul cînd  $x_0 = -\infty$  se tratează la fel).

Putem presupune că intervalul  $I$  este de forma  $I = (a, +\infty)$  cu  $a > 0$  considerînd, în caz contrar, restricțiile funcțiilor  $f$  și  $g$  la un asemenea interval, ceea ce nu modifică existența limitei funcției  $\frac{f}{g}$  în punctul  $+\infty$ .

Să considerăm atunci funcțiile  $F$  și  $G$  definite pe intervalul  $\left(0, \frac{1}{a}\right)$  astfel :

$$F(y) = f\left(\frac{1}{y}\right), \quad G(y) = g\left(\frac{1}{y}\right), \quad 0 < y < \frac{1}{a}.$$

Să observăm că  $F$  și  $G$  se obțin compunînd respectiv funcțiile  $f$  și  $g$  cu funcția  $u(y) = \frac{1}{y}$ , definită pentru  $y \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$  cu valori în  $(a, +\infty)$ .

Funcțiile  $F$  și  $G$  verifică toate ipotezele teoremei (pentru punctul  $x_0 = 0$ ).

1)  $\lim_{y \rightarrow 0^+} F(y) = 0$  și  $\lim_{y \rightarrow 0^+} G(y) = 0$ .

Într-adevăr, fie  $y_n \rightarrow 0^+$ ,  $0 < y_n < \frac{1}{a}$ . Dacă notăm  $x_n = \frac{1}{y_n}$ , avem

$x_n \rightarrow +\infty$ , deci  $f(x_n) \rightarrow 0$  și  $g(x_n) \rightarrow 0$ . Dar  $f(x_n) = f\left(\frac{1}{y_n}\right)$  și  $g(x_n) = g\left(\frac{1}{y_n}\right)$ .

Rezultă că

$$F(y_n) = f\left(\frac{1}{y_n}\right) \rightarrow 0 \text{ și } G(y_n) = g\left(\frac{1}{y_n}\right) \rightarrow 0.$$

Deoarece sirul  $y_n \rightarrow 0$ ,  $y_n > 0$  a fost ales arbitrar, deducem

$$\lim_{y \rightarrow 0} F(y) = 0 \text{ și } \lim_{y \rightarrow 0} G(y) = 0.$$

2) Funcțiile  $F$  și  $G$  sunt derivabile pe  $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ , deoarece funcția  $u(y) = \frac{1}{y}$  este derivabilă pe  $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ , iar  $f$  și  $g$  sunt derivabile pe  $(a, +\infty)$ . Avem

$$F'(y) = -\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right);$$

$$G'(y) = -\frac{1}{y^2} g'\left(\frac{1}{y}\right).$$

3)  $G'(y) \neq 0$  pentru orice  $y \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$ , deoarece  $\frac{1}{y^2} \neq 0$  și  $g'\left(\frac{1}{y}\right) \neq 0$ .

$$4) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(\frac{1}{x})}{g'(\frac{1}{x})} = A.$$

Într-adevăr,

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} \text{ pentru } y \in \left(0, \frac{1}{a}\right).$$

Fie  $y_n \rightarrow 0$ ,  $0 < y_n < \frac{1}{a}$ , și să notăm  $x_n = \frac{1}{y_n}$ ; atunci  $x_n \rightarrow +\infty$ , deci

$$\frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} \rightarrow A, \text{ sau } \frac{f'\left(\frac{1}{y_n}\right)}{g'\left(\frac{1}{y_n}\right)} \rightarrow A$$

și deci

$$\frac{F'(y_n)}{G'(y_n)} \rightarrow A.$$

Cum sirul  $y_n \rightarrow 0$ ,  $y_n > 0$  a fost ales arbitrar, rezultă că

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} = A.$$

Putem deci aplica teorema demonstrată mai sus, funcțiilor  $F$  și  $G$ , în punctul 0. Deducem că  $G(y) \neq 0$  pentru orice  $y \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$  și

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{F'(y)}{G'(y)} = A.$$

Rezultă atunci că  $g(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in (a, +\infty)$ . Să arătăm că  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ .

Fie un sir oarecare  $x_n \rightarrow +\infty$ ,  $x_n > a$ ; notind  $y_n = \frac{1}{x_n}$  avem  $y_n \rightarrow 0$ ,  $y_n > 0$  si deci

$$\frac{F(y_n)}{G(y_n)} \rightarrow A.$$

Dar

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f\left(\frac{1}{y_n}\right)}{g\left(\frac{1}{y_n}\right)} = \frac{F(y_n)}{G(y_n)}$$

si deci

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow A.$$

Deoarece sirul  $x_n \rightarrow +\infty$  a fost ales arbitrar, rezulta ca

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si teorema este complet demonstrata.

**O b s e r v a t i i .** 1° Conditia ca  $g'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  dintr-o anumita vecinatate a lui  $x_0$  este esentiala. Daca celelalte trei conditii sunt verificate dar  $g'$  se anuleaza in puncte oricar de apropiate de  $x_0$ , este posibil ca functia  $\frac{f}{g}$  sa nu aiba limita in  $x_0$ .

**Exemplu.** Fie functiile

$$f(x) = e^{-2x} (\cos x + 2 \sin x), \quad g(x) = e^{-x} (\cos x + \sin x) \text{ definite pe } R.$$

$$1) \text{ Avem } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ si } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0;$$

$$2) f \text{ si } g \text{ sunt derivabile pe } R \text{ si}$$

$$f'(x) = -5 \sin x \cdot e^{-2x}; \quad g'(x) = -2 \sin x \cdot e^{-x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{2} e^{-x} = 0.$$

Totusi functia

$$\frac{f(x)}{g(x)} = e^{-x} \frac{1 + 2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = e^{-x} \left(1 + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} x}\right)$$

nu are limita in punctul  $+\infty$ .

Regula lui l'Hospital nu este aplicabila la acest caz, deoarece derivata  $g'$  se anuleaza intr-un sir de puncte care tind catre  $+\infty$ , si anume in punctele  $k\pi$ ,  $k$  natural.

2° Reciproca regulii lui l'Hospital nu este, in general, adevarata.

Daca  $\frac{f}{g}$  are limita in  $x_0$ , nu rezulta ca si  $\frac{f'}{g'}$  are limita in  $x_0$ ; altfel spus, daca  $\frac{f'}{g'}$  nu are limita in  $x_0$ , nu rezulta ca  $\frac{f}{g}$  nu are limita in  $x_0$ .

*Exemplu.* Fie funcțiile  $f$  și  $g$  definite pe  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$  astfel:

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x};$$

$$g(x) = \sin x.$$

Avem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Funcțiile  $f$  și  $g$  sunt derivabile pe  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$  și  $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ ,  $g'(x) = \cos x$ , iar derivata  $g'$  nu se anulează pe  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ . Totuși funcția  $\frac{f'}{g'}$  nu are limită în punctul 0:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x - \cos x}.$$

Avem  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x}}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$ , dar  $\cos \frac{1}{x}$  nu are limită în 0, și nici raportul  $\frac{\cos \frac{1}{x}}{\cos x}$ , deci nici funcția  $\frac{f'}{g'}$ .

3° Aplicind regula lui l'Hospital funcției  $\frac{\sin x}{x}$  în punctul 0, obținem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

Aceasta nu constituie o demonstrație a faptului că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , ci doar o verificare, deoarece derivata funcției  $\sin x$ , care s-a folosit mai sus, s-a calculat ea însăși cu ajutorul acestei limite.

În cazul cînd și derivatele  $f'$  și  $g'$  au limită 0 în punctul  $x_0$ , limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  se poate calcula — dacă este posibil — aplicînd încă o dată regula lui l'Hospital funcțiilor  $f'$  și  $g'$  și procedeul se poate itera.

*Exemplu.* Aplicînd regula lui l'Hospital de trei ori, obținem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x} \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x} \cos^2 x + e^{\sin x} \sin x}{\sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x} \cos^3 x + 2e^{\sin x} \sin x \cos x + e^{\sin x} \cos x \sin x + e^{\sin x} \cos x}{\cos x} = 1. \end{aligned}$$

În regula lui l'Hospital s-a folosit existența derivatelor într-o vecinătate a lui  $x_0$ , dar nu neapărat în  $x_0$ .

Teorema următoare dă o regulă de calcul care necesită existența derivatelor numai în punctul  $x_0$ , nu și în celelalte puncte vecine cu  $x_0$ .

**Theoremă 2 (Cauchy).** Fie  $f$  și  $g$  două funcții definite pe un interval  $I$  și un punct  $x_0 \in I$ . Dacă :

- 1)  $f(x_0) = 0$  și  $g(x_0) = 0$ ;
  - 2)  $f$  și  $g$  sunt derivabile în punctul  $x_0$ ;
  - 3)  $g'(x_0) \neq 0$ ,
- atunci :

a) există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel ca  $g(x) \neq 0$  pentru  $x \neq x_0$  din  $V$  și

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Să observăm mai întâi că, deoarece  $g'(x_0) \neq 0$  și

$$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât, pentru orice  $x \neq x_0$  din  $V$ , să avem

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \neq 0,$$

adică  $g(x) \neq g(x_0)$ , sau (deoarece  $g(x_0) = 0$ ),  $g(x) \neq 0$ .

Pentru  $x \neq x_0$  din  $V$  avem

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

(deoarece  $f(x_0) = 0$  și  $g(x_0) = 0$ ). Atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

**Observații.** 1° Regula lui l'Hospital și teorema lui Cauchy nu au același cimp de aplicabilitate. În unele cazuri, una din funcțiile  $f$  și  $g$  este derivabilă numai în  $x_0$ , deci în aceste cazuri nu se poate aplica regula lui l'Hospital, ci numai teorema lui Cauchy.

*Exemplu.* Fie funcțiile  $f$  și  $g$  definite pe  $R$  astfel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \text{ este rațional,} \\ 0 & \text{dacă } x \text{ este irațional;} \end{cases}$$

$$g(x) = \sin x.$$

Aveam  $f(0) = 0$  și  $g(0) = 0$ .

Funcția  $f$  este derivabilă numai în punctul 0 și  $f'(0) = 0$ . Funcția  $g$  este derivabilă pe  $R$  și  $g'(x) = \cos x$ , iar  $g'(0) = 1$ . Aplicând teorema lui Cauchy, obținem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Regula lui l'Hospital nu este aplicabilă aici.

2° Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sunt derivabile pe întreg intervalul  $I$  și în  $x_0$ , este posibil ca teorema lui Cauchy să se poată aplica, dar regula lui l'Hospital să nu se poată aplica.

*Exemplu.* Fie funcțiile  $f$  și  $g$  definite pe  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  astfel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0 & \text{dacă } x = 0; \end{cases}$$

$$g(x) = \sin x.$$

Avem  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 0$ .

Funcțiile  $f$  și  $g$  sunt derivabile pe  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  și

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0 & \text{dacă } x = 0; \end{cases}$$

$$g'(x) = \cos x, \quad g'(0) = 1,$$

iar  $g'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Aplicând teorema lui Cauchy, obținem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Totuși, regula lui l'Hospital nu se poate aplica deoarece funcția  $\frac{f'}{g'}$  nu are limită în punctul 0.

## 2. Cazul $\frac{\infty}{\infty}$

Pentru a demonstra regula lui l'Hospital în cazul  $\frac{\infty}{\infty}$ , avem nevoie de

**L e m a l u i S t o l z.** Fie  $(a_n)$  și  $(b_n)$  două siruri. Dacă sirul  $(b_n)$  este strict monoton și nemărginit, și dacă  $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \rightarrow A$  (finit sau infinit), atunci  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow A$ .

Să presupunem că sirul  $(b_n)$  este strict crescător, deci (fiind nemărginit)  $b_n \rightarrow +\infty$ .

Vom considera întii cazul cînd  $A$  este *finit*. Fie  $V = (\alpha, \beta)$  o vecinătate oarecare a lui  $A$ ,  $\alpha < A < \beta$ .

Să alegem o vecinătate  $V' = (\alpha', \beta')$  a lui  $A$ , astfel ca  $\alpha < \alpha' < A < \beta' < \beta$ .

Deoarece  $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \rightarrow A$ , și  $V'$  este o vecinătate a lui  $A$ , există un număr  $N'$ , astfel încît pentru orice  $n \geq N'$  să avem:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \in V \text{ adică}$$

$$\alpha' < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < \beta', \quad n \geq N'.$$

Înmulțind toți termenii cu  $b_{n+1} - b_n > 0$  (deoarece sirul  $(b_n)$  este strict crescător), obținem

$$\alpha'(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < \beta'(b_{n+1} - b_n), \quad n \geq N'.$$

Scriind aceste inegalități pentru  $N', N' + 1, N' + 2, \dots, n - 1$ , în loc de  $n$ , adunând membru cu membru și făcînd reducerile necesare, obținem

$$\alpha'(b_n - b_{N'}) < a_n - a_{N'} < \beta'(b_n - b_{N'}),$$

oricare ar fi  $n > N'$ .

Deoarece  $b_n \rightarrow +\infty$ , putem alege de la început  $N'$  astfel ca  $b_{N'} > 0$  și deci și  $b_n > 0$ , oricare ar fi  $n > N'$ . Împărțind atunci cu  $b_n > 0$ , obținem:

$$\alpha' \left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right) < \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{N'}}{b_n} < \beta' \left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right),$$

de unde

$$\alpha' \left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right) + \frac{a_{N'}}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{a_{N'}}{b_n} + \beta' \left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right).$$

Dar  $\frac{b_{N'}}{b_n} \rightarrow 0$ , și  $\frac{a_{N'}}{b_n} \rightarrow 0$ , deci

$$\alpha' \left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right) + \frac{a_{N'}}{b_n} \rightarrow \alpha' \text{ și } \beta' \left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right) + \frac{a_{N'}}{b_n} \rightarrow \beta'.$$

Deoarece  $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ , există un număr  $N > N'$  astfel încît, pentru orice  $n \geq N$ , să avem

$$\alpha < \alpha' \left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right) + \frac{a_{N'}}{b_n} \text{ și } \beta' \left(1 - \frac{b_{N'}}{b_n}\right) + \frac{a_{N'}}{b_n} < \beta,$$

deci pentru  $n \geq N$ ,

$$\alpha < \frac{a_n}{b_n} < \beta$$

sau  $\frac{a_n}{b_n} \in V = (\alpha, \beta)$ . Deoarece vecinătatea  $V$  a lui  $A$  a fost aleasă arbitrar, rezultă că  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow A$ .

Să considerăm acum cazul cînd  $A = +\infty$ . În acest caz, luăm o vecinătate oarecare  $V = (\alpha, +\infty)$  a lui  $+\infty$ . Alegem apoi vecinătatea  $V' = (\alpha', +\infty)$  a lui  $+\infty$ , astfel ca  $\alpha < \alpha'$ .

Deoarece :

$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \rightarrow +\infty$ , există un număr  $N'$  astfel ca pentru orice  $n \geq N'$  să avem

$$\alpha' < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

Raționamentul continuă ca mai sus, folosind numai inegalitățile din stînga și găsim un număr  $N > N'$  astfel ca pentru orice  $n \geq N$  să avem

$$\alpha < \frac{a_n}{b_n},$$

adică  $\frac{a_n}{b_n} \in V$ , de unde deducem că  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$ .

În cazul cînd  $A = -\infty$ , raționamentul se face la fel, folosind numai inegalitățile din dreapta și deducem că  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow -\infty$ .

Dacă sirul  $(b_n)$  este strict descrescător, sirul  $(c_n) = (-b_n)$  este strict crescător, și

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{c_{n+1} - c_n} = -\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \rightarrow -A,$$

deci, în baza raționamentului precedent, rezultă că

$$\frac{a_n}{c_n} \rightarrow -A,$$

de unde

$$\frac{a_n}{b_n} = -\frac{a_n}{c_n} \rightarrow A.$$

Putem acum trece la demonstrarea regulii lui l'Hospital pentru cazul  $\frac{\infty}{\infty}$ . Vom demonstra următoarea teoremă mai generală :

**T e o r e m a 3.** Fie  $x_0$  un punct de acumulare (fînit sau infinit) al unui interval  $I$ ,  $f$  și  $g$  două funcții definite pe  $I$ , cu excepția, eventual, a lui  $x_0$ . Dacă :

1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$ ;

2)  $f$  și  $g$  sunt derivabile pe  $I$ , cu excepția, eventual, a lui  $x_0$ ;

- 3)  $g'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ ;  
 4) există  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$  (finită sau infinită).

Atunci: funcția  $\frac{f}{g}$  are limită în  $x_0$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Vom considera întâi cazul cînd  $x_0$  nu este extremitatea stîngă a intervalului  $I$  și vom arăta că funcția  $\frac{f}{g}$  are în  $x_0$  limită la stînga egală cu  $A$ . Pentru aceasta este suficient să folosim numai șiruri strict crescătoare  $x_n \nearrow x_0$  (cu  $x_n < x_0$ ).

Deoarece  $g'(x) \neq 0$  pe intervalul  $I \cap (-\infty, x_0)$ , conform proprietății lui Darboux, derivata  $g'$  păstrează același semn pe acest interval. Pentru a face o alegere, să presupunem că  $g'(x) > 0$  pentru orice  $x < x_0$  din  $I$ .

Rezultă că funcția  $g$  este strict crescătoare la stînga lui  $x_0$ .

Fie acum un șir strict crescător  $x_n \nearrow x_0$ , ( $x_n \in I$ ,  $x_n < x_0$ ). Atunci șirul  $(g(x_n))$  este de asemenea strict crescător. Deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$ , rezultă că  $|g(x_n)| \rightarrow +\infty$ , deci șirul  $(g(x_n))$  este nemărginit.

Să aplicăm teorema lui Cauchy funcțiilor  $f$  și  $g$  pe fiecare interval  $[x_n, x_{n+1}]$ : găsim un punct  $\xi_n \in (x_n, x_{n+1})$ , deci  $x_n < \xi_n < x_0$  astfel ca

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Dar, deoarece  $x_n \rightarrow x_0$ , rezultă că  $\xi_n \rightarrow x_0$  și  $\xi_n < x_0$  și din

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ deducem că } \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \rightarrow A \text{ și deci}$$

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} \rightarrow A.$$

Dar șirul  $(g(x_n))$  este strict monoton și nemărginit. Putem deci aplica lema lui Stolz, și deducem că

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow A.$$

Cum șirul strict crescător  $x_n \rightarrow x_0$  a fost ales arbitrar, aceasta înseamnă că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Același rezultat se obține și dacă se consideră că  $g'(x) < 0$  pentru orice  $x < x_0$  din  $I$ .

Dacă  $x_0$  nu este extremitatea dreaptă a intervalului  $I$ , se raționează în mod asemănător și se deduce că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Dacă  $x_0$  este o extremitate a intervalului  $I$ , limita în  $x_0$  este egală cu acea limită laterală care are sens în acest punct, și prin aceasta, din cele demonstreate mai sus rezultă că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Dacă  $x_0$  este punct interior al intervalului  $I$ , din egalitatea limitelor laterale rezultă că funcția  $\frac{f}{g}$  are limită în  $x_0$ , egală cu  $A$ , și teorema este complet demonstrată.

*Exemplu.* Avem  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$  și dacă  $\alpha > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = \infty$ . Apoi

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \neq 0 \text{ pentru } x \neq 0 \text{ și}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \text{ de unde, aplicind regula lui l'Hospital, obținem :}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Acest rezultat a fost obținut mai înainte pe altă cale.

*O b s e r v a t i i.* 1° Condiția ca  $g'$  să nu se anuleze în nici un punct  $x \neq x_0$  din  $I$  este și aici esențială.

2° Dacă  $\frac{f'}{g'}$  nu are limită în punctul  $x_0$ , nu rezultă că nici  $\frac{f}{g}$  nu are limită în acest punct.

3° Practic, regula lui l'Hospital se poate folosi cînd *stîm* să calculăm  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (în cazul cînd există).

Sînt cazuri în care limita raportului  $\frac{f'}{g'}$  nu se calculează mai ușor decît limita raportului  $\frac{f}{g}$ , și deci în acest caz nu este indicat a se folosi regula lui l'Hospital.

*Exemplu.* 1) Fie  $f(x) = e^x - e^{-x}$  și  $g(x) = e^x + e^{-x}$  definite pe  $R$ .

Avem  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  și  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

Apot  $f'(x) = e^x + e^{-x}$ ,  $g'(x) = e^x - e^{-x} \neq 0$  pentru  $x \neq 0$ .

Aveam

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Dacă nu știm de la început să calculăm  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ , atunci nu știm să calculăm nici  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  și deci regula lui l'Hospital nu poate fi utilizată (chiar dacă știm că limita există).

Limita funcției  $\frac{f}{g}$  se poate calcula însă direct:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

2) Fie funcțiile  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$  și  $g(x) = x$  definite pe  $\mathbb{R}$ . Avem  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ . Apoi

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad g'(x) = 1.$$

Aveam

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}, \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Aplicarea regulii lui l'Hospital în acest caz nu ne ajută, dacă nu știm de la început să calculăm limita funcției  $\frac{f'}{g}$ .

Această limită se poate calcula însă direct:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = \sqrt{0+1} = 1.$$

Regula lui l'Hospital se poate aplica de mai multe ori, fie pentru cazul  $\frac{0}{0}$ , fie pentru cazul  $\frac{\infty}{\infty}$ :

**C o r o l a r u l 1.** Fie  $x_0$  un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval  $I$ ,  $f$  și  $g$  două funcții definite pe  $I$ , cu excepția, eventual, a lui  $x_0$ . Dacă

1) funcțiile  $f$  și  $g$  sunt derivabile de  $n$  ori pe  $I$ , cu excepția, eventual a lui  $x_0$ ;

2)  $g^{(n)}(x) \neq 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(i)}(x) = 0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g^{(i)}(x) = 0$ , sau  $\lim_{x \rightarrow x_0} |g^{(i)}(x)| = +\infty$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ;

4) există  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = A$  (finită sau infinită).

Atunci :

a)  $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0, \dots, g^{(n-1)}(x) \neq 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ ;

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Pentru  $n = 1$  corolarul este deja demonstrat (în teorema 1 și teorema 3). Să-l presupunem adevărat pentru  $n - 1$ , și să arătăm atunci că este adevărat și pentru  $n$ .

Aplicând teorema 1 sau teorema 3 funcțiilor  $f^{(n-1)}$  și  $g^{(n-1)}$ , deducem că  $g^{(n-1)}(x) \neq 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$  și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = A.$$

Deoarece am presupus corolarul adevărat pentru  $n - 1$ , rezultă că:

$g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0, \dots, g^{(n-1)}(x) \neq 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ ,

de unde rezultă punctul a) al corolarului, și că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}$$

de unde rezultă și punctul b) al corolarului.

*Exemplu.* S-a arătat mai înainte că dacă  $\alpha > 0$ , atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty.$$

Vom regăsi acest rezultat aplicând regula lui l'Hospital de  $n$  ori, unde  $n$  este un număr natural astfel ca

$$n - 1 < \alpha \leq n.$$

Atunci  $\alpha - n \leq 0$  sau  $n - \alpha \geq 0$ , deci  $\frac{1}{x^{\alpha-n}} = x^{n-\alpha}$  și  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-\alpha} > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^{\alpha-n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-\alpha} e^x = +\infty.$$

Putem deci aplica de  $n$  ori regula lui l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}} = +\infty.$$

**Corolarul 2. Dacă**

1) funcțiile  $f$  și  $g$  sunt derivabile de  $n$  ori în punctul  $x_0 \in I$ ;

2)  $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ,

$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ ,

3)  $g^{(n)}(x_0) \neq 0$ .

**Atunci :**

a) există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel că pentru orice  $x \neq x_0$  din  $V$  să avem  $g(x) \neq 0$ ,  $g'(x) \neq 0$ , ...,  $g^{(n-1)}(x) \neq 0$ ;

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

Aplicând teorema lui Cauchy funcțiilor  $f^{(n-1)}$  și  $g^{(n-1)}$  deducem că : există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  astfel că

$$g^{(n-1)}(x) \neq 0 \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } V$$

și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

Deoarece funcțiile  $f$ ,  $g$ ,  $f'$ ,  $g'$ , ...,  $f^{(n-2)}$ ,  $g^{(n-2)}$  sunt continue în punctul  $x_0$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g^{(k)}(x) = g^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-2.$$

Se poate aplica deci corolarul regulii lui l'Hospital pentru  $n-1$  și se obține concluzia corolarului de față.

*Exemplu.* Fie funcția  $f: I \rightarrow R$ , derivabilă de  $n$  ori în punctul  $a \in I$ . Dacă  $R_n$  este restul de ordinul  $n$  al formulei lui Taylor corespunzătoare acestei funcții, în punctul  $a$ , s-a demonstrat că :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Această egalitate o putem demonstra acum folosind corolarul 2. Avem :

$$R_n(a) = 0, R'_n(a) = 0, \dots, R_n^{(n)}(a) = 0.$$

Dacă notăm  $g(x) = (x-a)^n$ , avem

$$g(a) = 0, g'(a) = 0, \dots, g^{(n-1)}(a) = 0, g^{(n)}(a) = n! \neq 0.$$

Aplicând corolarul deducem că :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{0}{n!} = 0.$$

### 3. Alte cazuri

Pentru celelalte cazuri nu avem reguli asemănătoare cu regula lui l'Hospital, însă aceste cazuri se pot reduce la unul din cazurile  $\frac{0}{0}$  sau  $\frac{\infty}{\infty}$ , și astfel se poate aplica regula lui l'Hospital. Vom lua pe rînd celelalte cazuri care se ivesc, la adunare ( $\infty - \infty$ ), la înmulțire ( $0 \cdot \infty$ ) și la puteri ( $0^0$ ,  $1^\infty$  și  $\infty^0$ ).

1) *Cazul  $\infty - \infty$ .* Fie  $x_0$  un punct de acumulare (finit sau infinit) al intervalului  $I$ ,  $f$  și  $g$  două funcții definite și derivabile pe  $I$ , cu excepția, eventual, a lui  $x_0$ .

Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ ,

atunci pentru  $f - g$  suntem în cazul  $\infty - \infty$ .

Putem presupune că  $f(x) \neq 0$  și  $g(x) \neq 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ , restrîngînd, la nevoie, domeniul de definiție al funcțiilor  $f$  și  $g$ .

Pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$  avem

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{f(x) - g(x)}{1}}{\frac{f(x) g(x)}{1}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) g(x)}}$$

și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) g(x)} = 0.$$

Am redus astfel cazul  $\infty - \infty$  la cazul  $\frac{0}{0}$ . Dacă în acest ultim caz se poate aplica regula lui l'Hospital, atunci putem calcula limita funcției

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) g(x)}} \text{ și apoi } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) g(x)}}.$$

**O b s e r v a t i i .** 1º Pentru a putea aplica regula lui l'Hospital ultimului raport, trebuie ca derivata funcției de la numitor să nu se anuleze în nici un punct  $x \neq x_0$  din  $I$ . Dar

$$\left( \frac{1}{f(x) g(x)} \right)' = - \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{[f(x)g(x)]^2},$$

deci trebuie ca  $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ . Deoarece  $f(x) > 0$  și  $g(x) > 0$ , o condiție suficientă pentru ca  $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \neq 0$ , este ca  $f'$  și  $g'$  să nu se anuleze în aceleasi puncte, adică  $f$  și  $g$  să nu aibă în comun nici un punct de extrem în vecinătatea lui  $x_0$ .

2) Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$ , atunci putem reduce cazul  $\infty - \infty$  la cazul  $\frac{0}{0}$  și în modul următor:

$$f - g = f \left( 1 - \frac{g}{f} \right) = \frac{1 - \frac{g}{f}}{\frac{1}{f}}$$

sau:

$$f - g = \left( \frac{f}{g} - 1 \right) g = \frac{\frac{f}{g} - 1}{\frac{1}{g}}.$$

Pentru a putea aplica regula lui l'Hospital în acest caz, trebuie ca  $f'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ , sau  $g'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ .

Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} \neq 1$ , atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ 1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right] = \pm \infty$$

după cum  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$  este  $< 1$  sau  $> 1$ .

*Exemplu.* 1) Pentru  $x > 0$  avem

$$x - \ln x = x \left( 1 - \frac{\ln x}{x} \right),$$

deci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \right) = \infty (1 - 0) = \infty.$$

2) Pentru  $x \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ ,  $x \neq 0$ , avem

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x} \text{ și } \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} x \sin x = 0,$$

deci

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

2) *Cazul*  $0 \cdot \infty$ . Fie  $x_0$  un punct de acumulare al intervalului  $I$ ,  $f$  și  $g$  două funcții definite și derivabile pe  $I$ , cu excepția, eventual, a lui  $x_0$ .

Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$

atunci, pentru funcția  $f|g|$  sătem în cazul  $0 \cdot \infty$ .

Putem presupune că  $g(x) \neq 0$  (restrîngînd, la nevoie, domeniul de definiție). Atunci

$$f(x) g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

și  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$ . Am redus astfel cazul  $0 \cdot \infty$  la cazul  $\frac{0}{0}$ . Dacă în acest caz se poate aplica regula lui l'Hospital, atunci putem calcula limita funcției  $\frac{1}{g}$  și apoi

$$\frac{1}{g}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

Pentru a putea aplica regula lui l'Hospital în acest caz, trebuie ca  $g'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ .

**O b s e r v a t i e.** Dacă  $f'(x) \neq 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ , atunci  $f(x) \neq f(x_0)$ , deci  $f(x) \neq 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ .

Putem deci scrie

$$f(x) g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

și am redus astfel cazul  $0 \cdot \infty$  la cazul  $\frac{\infty}{\infty}$ . Regula lui l'Hospital este aplicabilă în acest caz, deoarece  $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \neq 0$ .

**E x e m p l u .** Dacă  $\alpha > 0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0$ , ( $x > 0$ ).

A v e m  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$  și  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ .

Pentru  $x > 0$  putem scrie

$$x^\alpha \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\alpha}}$$

deci

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0.$$

3) **Cazurile  $0^0$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ .** Fie  $x_0$  un punct de acumulare al intervalului  $I$ ,  $f$  și  $g$  două funcții definite și derivabile pe  $I$ , cu excepția, eventual, a punctului  $x_0$ . Presupunem că

$$f'(x) > 0 \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I.$$

Pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$  avem

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Dacă există  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x) = A$  (finit sau infinit) atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^A.$$

Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , sănsem în cazul  $0^0$ , și deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x) = -\infty$ , acest caz se reduce la cazul  $0 \cdot \infty$ .

Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ , sănsem în cazul  $1^\infty$  și deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x) = 0$ , acest caz se reduce de asemenea la cazul  $0 \cdot \infty$ .

Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , sănsem în cazul  $\infty^0$  și deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln f(x) = +\infty$ , și acest caz se reduce la cazul  $0 \cdot \infty$ .

Pentru a calcula limita funcției  $g(x) \ln f(x)$ , scriem

$$g(x) \ln f(x) = \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ dacă } g(x) \neq 0 \text{ pentru } x \neq x_0$$

sau

$$g(x) \ln f(x) = \frac{\frac{g(x)}{1}}{\ln f(x)} \text{ dacă } f(x) \neq 1 \text{ pentru } x \neq x_0$$

și astfel acest caz se reduce la cazul  $\frac{0}{0}$  sau  $\frac{\infty}{\infty}$ .

O b s e r v a t i i . 1° Dacă notăm

$$h = f^g,$$

aplicînd logaritmii, obținem

$$\ln h(x) = g(x) \ln f(x).$$

Trebuie deci să calculăm  $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln h(x) = A$  și apoi  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = e^A$ .

Pe de altă parte, putem scrie

$$f^g = [1 + (f - 1)]^g = \{[1 + (f - 1)]^{\frac{1}{f-1}}\}^{g(f-1)},$$

dacă  $f(x) \neq 1$  pentru  $x \neq x_0$ . Deci în cazul  $1^\infty$ , adică în cazul cînd  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [1 + (f - 1)]^{\frac{1}{f-1}} = e.$$

Așadar, dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)[f(x) - 1] = A$ , atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^g = e^A.$$

Total revine deci, în cazul  $1^\infty$ , la cercetarea limitei

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)[f(x) - 1].$$

Observăm că suntem în cazul  $0 \cdot \infty$  pe care-l putem reduce la unul din cazurile  $\frac{0}{0}$  sau  $\frac{\infty}{\infty}$ , scriind

$$g(x)[f(x) - 1] = \frac{f(x) - 1}{\frac{1}{g(x)}}$$

sau:

$$g(x)[f(x) - 1] = \frac{\frac{g(x)}{1}}{f(x) - 1}.$$

*Exemplu.*

1)  $h(x) = x^x$  — definită pentru  $x > 0$ .

Avem

$$\ln h(x) = x \ln x \text{ și } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

deci

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = e^0 = 1.$$

2)  $h(x) = \cos x^{\frac{1}{x^2}}$  definită pentru  $x \neq 0$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Avem

$$\ln h(x) = \frac{1}{x^2} \ln \cos x$$

$$\text{și } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg} x}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = -\frac{1}{2},$$

deci

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

3)  $h(x) = \left(\frac{1}{1 - \cos x}\right)^{\sin x}$  definită pentru  $x \neq 0$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Avem

$$\ln h(x) = \sin x \ln \frac{1}{1 - \cos x} = -\sin x \ln(1 - \cos x)$$

și

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln(1 - \cos x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 x \cos x}{\sin x} \cdot 1 = -\lim_{x \rightarrow 0} 3 \sin x \cos x = 0, \\ \text{deci } \lim_{x \rightarrow 0} \ln h(x) &= 0 \text{ și deci } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 - \cos x} \right)^{\sin x} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

## § 7. Aplicațiile derivatelor la studiul funcțiilor

În acest paragraf vom arăta că derivatele de ordinul întâi și de ordinul doi ne dău indicații importante asupra comportării funcțiilor.

### I. Derivata întâi. Intervale de monotonie.

#### Puncte de extrem

Fie  $f$  o funcție definită pe o mulțime  $E$ , care este o reuniune (finită și infinită) de *intervale*.

Vom presupune că funcția  $f$  este derivabilă pe mulțimea  $E$ , cu excepția unei mulțimi finite sau numărabile de puncte din  $E$ .

Fie  $E'$  submulțimea lui  $E$  pe care  $f$  este derivabilă.

Mulțimea  $E'$  este de asemenea o reuniune finită sau infinită de intervale.

Reamintim următoarele rezultate :

Dacă derivata  $f'$  este strict pozitivă pe un interval  $I \subset E'$ , atunci funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $I$ .

Dacă derivata  $f'$  este strict negativă pe un interval  $I \subset E'$ , atunci funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $I$ .

Dacă derivata  $f'$  nu se anulează pe un interval  $I \subset E'$ , atunci  $f'$  păstrează același semn pe întreg intervalul  $I$ .

Din aceste proprietăți deducem că funcția  $f$  este strict monotonă pe aceleași intervale pe care derivata  $f'$  nu se anulează.

Rezultă astfel calea de urmat pentru a determina intervalele pe care funcția  $f$  este strict monotonă (intervale de monotonie ale funcției) :

1) Se determină mulțimea  $E' \subset E$  pe care funcția  $f$  este derivabilă, și se calculează derivata  $f'$  pe mulțimea  $E'$ .

2) Se determină punctele din  $E'$ , în care derivata  $f'$  se anulează (rădăcinile derivelei), adică se rezolvă ecuația

$$f'(x) = 0, \quad x \in E'.$$

3) Se descompune mulțimea  $E$  în intervale disjuncte astfel încât pe nici un asemenea interval derivata  $f'$  nu se mai anulează. Aceste intervale, pe care derivata nu se anulează, se obțin din intervalele mulțimii  $E$  pe care este definită funcția, împărțindu-le mai departe prin punctele în care funcția nu este derivabilă și prin punctele în care derivata se anulează (presupunând că derivata nu se anulează pe un interval întreg).

4) Pe fiecare interval  $I$  pe care derivata  $f'$  nu se anulează, ea păstrează același semn. Se determină semnul derivatei pe  $I$ , calculând valoarea derivatei într-un singur punct din  $I$ .

5) În funcție de semnul derivatei  $f'$  pe un interval  $I$ , se determină dacă funcția  $f$  este strict crescătoare sau strict descrescătoare pe  $I$ : dacă  $f'$  are semnul  $+$ ,  $f$  este strict crescătoare, iar dacă  $f'$  are semnul  $-$ ,  $f$  este strict descrescătoare.

Rezultă apoi și punctele de extrem ale funcției:

a) Fie  $x_0$  un punct interior al mulțimii  $E$ , în care funcția  $f$  este continuă, și fie  $I$  intervalul din  $E$  care-l conține pe  $x_0$  și astfel că derivata  $f'$  nu se mai anulează pe  $I$ , cu excepția, eventual, a lui  $x_0$  (dacă  $f$  este derivabilă în  $x_0$ ).

Dacă pe  $I$  funcția  $f$  este strict crescătoare la stînga lui  $x_0$  și strict descrescătoare la dreapta lui  $x_0$ , atunci  $x_0$  este un punct de maxim al funcției.

Într-adevăr, deoarece  $f$  este strict crescătoare la stînga lui  $x_0$ , funcția are limită la stînga în  $x_0$  și

$$f(x) < f(x_0 - 0) \quad \text{dacă } x < x_0, x \in I.$$

Deoarece  $f$  este strict descrescătoare la dreapta lui  $x_0$ , funcția are limită la dreapta în  $x_0$  și

$$f(x_0 + 0) > f(x) \quad \text{dacă } x_0 < x, x \in I.$$

Deoarece  $f$  este continuă în  $x_0$  avem  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ , deci

$$f(x) < f(x_0), \text{ oricare ar fi } x \neq x_0 \text{ din } I,$$

adică  $x_0$  este un punct de maxim al funcției.

Se demonstrează la fel că:

Dacă pe  $I$  funcția  $f$  este strict descrescătoare la stînga lui  $x_0$  și strict crescătoare la dreapta lui  $x_0$ , atunci  $x_0$  este un punct de minim al funcției.

Din aceste observații rezultă următoarea regulă:

Dacă pe  $I$ , derivata  $f'$  are semnul  $+$  la stînga lui  $x_0$  și semnul  $-$  la dreapta lui  $x_0$ , atunci  $x_0$  este un punct de maxim al funcției  $f$ ; dacă pe  $I$ , derivata  $f'$  are semnul  $-$  la stînga lui  $x_0$  și semnul  $+$  la dreapta lui  $x_0$ , atunci  $x_0$  este punct de minim al funcției  $f$ .

Dacă derivata  $f'$  are același semn de o parte și de alta a lui  $x_0$ , atunci  $x_0$  nu este punct de extrem al funcției.

Dacă funcția  $f$  este derivabilă în punctul de extrem  $x_0$ , atunci, conform teoremei lui Fermat, avem în mod necesar  $f'(x_0) = 0$ .

b) Să presupunem că punctul  $x_0 \in E$  este extremitatea stîngă a unui interval  $I \subset E$ , în interiorul căruia derivata nu se mai anulează, și că

funcția  $f$  este continuă în  $x_0$ . Să presupunem de asemenea că  $x_0$  nu este extremitate dreaptă a nici unui interval din  $E$ . În aceste condiții:

— dacă pe  $I$  (la dreapta lui  $x_0$ ) derivata are semnul  $-$ , atunci  $x_0$  este un punct de maxim;

— dacă pe  $I$  (la dreapta lui  $x_0$ ) derivata are semnul  $+$ , atunci  $x_0$  este un punct de minim.

Intr-adevăr, în primul caz, funcția este strict descrescătoare la dreapta lui  $x_0$ , deci

$$f(x_0) = f(x_0 + 0) > f(x) \text{ pentru } x \in I,$$

adică  $x_0$  este punct de maxim, iar în al doilea caz funcția este strict crescătoare la dreapta lui  $x_0$ , deci

$$f(x_0) = f(x_0 + 0) < f(x) \text{ pentru } x \in I,$$

adică  $x_0$  este punct de minim.

c) Să presupunem că punctul  $x_0 \in E$  este extremitatea dreaptă a unui interval  $I$  (din care este formată mulțimea  $E$ ) în interiorul căruia derivata nu se mai anulează, că funcția  $f$  este continuă în  $x_0$  și că  $x_0$  nu este extremitate stângă a nici unui interval din  $E$ . În aceste condiții:

— dacă pe  $I$  (la stînga lui  $x_0$ ) derivata are semnul  $-$ , atunci  $x_0$  este punct de minim;

— dacă pe  $I$  (la stînga lui  $x_0$ ) derivata are semnul  $+$ , atunci  $x_0$  este punct de maxim.

Demonstrația este analogă cu cea a cazului precedent.

Observație. În ultimele două cazuri, funcția  $f$  poate fi derivabilă în  $x_0$ , fără ca derivata să se anuleze în  $x_0$ .

Rezultatele privitoare la intervalele de monotonie și la punctele de extrem se trec într-un tablou cu trei linii: în prima linie se trec punctele care delimită intervalele mulțimii  $E$ , punctele în care derivata nu există și punctele în care derivata se anulează. În linia a doua se trece semnul derivelei  $f'$ . În linia a treia se trec extremele funcției, și se indică prin săgeți comportarea funcției ( $\nearrow$ dacă este strict crescătoare și  $\searrow$ dacă este strict descrescătoare).

*Exemplu. 1)* Fie funcția  $f(x) = e^x - x$  definită pe  $R$ .

Aveți  $f'(x) = e^x - 1$  pentru orice  $x \in R$ . Ecuația  $e^x - 1 = 0$  are soluția  $x = 0$ . Intervalele pe care derivata nu se anulează sunt  $(-\infty, 0)$  și  $(0, +\infty)$ ; pe primul interval avem  $f'(x) < 0$  deoarece  $f'(-1) = e^{-1} - 1 < 0$ ; pe al doilea interval avem  $f'(x) > 0$  deoarece  $f'(1) = e^1 - 1 > 0$ .

Punctul 0 este punct de minim al funcției și  $f(0) = e^0 = 1$ . Tabloul variației funcției este:

$x$	0
$f'$	- - 0 + +
$f$	$\searrow$ $m$ $\nearrow$ (1)

Deoarece minimul funcției este 1, rezultă că  $f(x) \geqslant 1$  pentru orice  $x \in R$ , adică  $e^x - x \geqslant 1$  sau

$$e^x \geqslant x + 1, \quad x \in R.$$

Atunci, cu atit mai mult

$$e^x > x \text{ pentru orice } x \in R.$$

Acest rezultat a fost obținut anterior pe altă cale.

2) Fie funcția  $f(x) = \ln x - x$  definită pe  $(0, +\infty)$ .

Avem  $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$  pentru orice  $x > 0$ . Ecuația  $\frac{1}{x} - 1 = 0$  are soluția  $x = 1$ . Intervalele pe care derivata nu se anulează sunt  $(0, 1)$  și  $(1, +\infty)$ . Avem  $f'(x) > 0$  pentru  $x \in (0, 1)$ , deoarece  $f'(\frac{1}{2}) = 1 > 0$ , și  $f'(x) < 0$  pentru  $x > 1$  deoarece  $f'(2) = \frac{1}{2} - 1 < 0$ .

Punctul 1 este un punct de maxim al funcției și  $f(1) = \ln 1 - 1 = -1$ . Tabloul variației funcției este :

$x$	0	1	
$f'$	+	0	---
$f$	↗	M	↘ (-1) ↘

Deoarece maximul funcției este  $-1$ , rezultă că  $f(x) \leqslant -1$  pentru orice  $x > 0$ , adică  $\ln x \leqslant x - 1$ , sau

$$\ln x \leqslant x - 1, \quad x > 0.$$

Atunci cu atit mai mult

$$\ln x < x \text{ pentru orice } x > 0.$$

Acest rezultat a fost obținut anterior prin logaritmarea inegalității  $e^x > x$ , ( $x > 0$ ).

3)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$  definită pe  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ .

Avem

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

Ecuația  $x^2 - 2x - 1 = 0$  are soluțiile  $x_1 = 1 + \sqrt{2}$  și  $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ ; în aceste puncte, derivata se anulează.

Avem  $f(1 + \sqrt{2}) = 2(1 + \sqrt{2})$ ,  $f(1 - \sqrt{2}) = 2(1 - \sqrt{2})$ .

Tabloul variației funcției este :

$x$	1 - $\sqrt{2}$	1	1 + $\sqrt{2}$	
$f'$	+	0	-	
$f$	↗ M	↓	↓ m	↗ 2(1 + $\sqrt{2}$ )

## 2. Derivata a doua. Convexitate și concavitate.

### Punțe de inflexiune

Simpla cunoaștere a faptului că o funcție  $f$  este, de exemplu, strict crescătoare pe un interval  $I$ , nu este totdeauna suficientă pentru a ne da seama de forma graficului său.

De exemplu, funcția  $f(x) = \sqrt{x}$  definită pe  $[0, +\infty)$  este strict crescătoare, însă acest fapt nu este suficient pentru a decide dacă graficul său

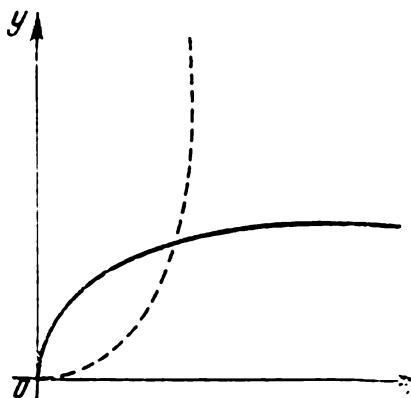


Fig. 99



Fig. 100

are forma indicată cu linie continuă sau cea indicată cu linie întreruptă în figura 99.

O funcție derivabilă  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  poate fi strict crescătoare pe  $I$  în două moduri, după cum tangenta la grafic, în fiecare punct, se află sub grafic sau deasupra graficului (fig. 100).

În primul caz graficul este o curbă *convexă*, iar în al doilea caz, o curbă *concavă*.

De asemenea, funcția derivabilă  $f$  poate fi strict descrescătoare pe  $I$  în două moduri, după cum tangenta la grafic, în fiecare punct, se află sub grafic sau deasupra graficului (fig. 101).

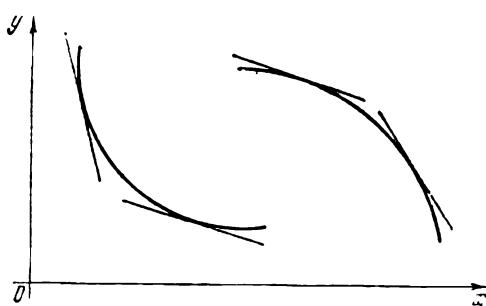


Fig. 101

În primul caz, graficul este o curbă *convexă*, iar în al doilea caz, o curbă *concavă*.

Vom da acum o definiție precisă a convexității și concavității și vom arăta că derivata a doua (dacă există) ne dă indicații precise în această privință.

Fie  $f$  o funcție derivabilă pe un interval  $I$  și  $x_0$  un punct din  $I$ .

Tangenta la graficul funcției în punctul  $M_0(x_0, f(x_0))$  are ecuația

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Funcția liniară

$$F(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(definită pe  $R$ ) are ca grafic tangenta  $M_0T$  (fig. 102).

Spunem că tangenta  $M_0T$  se află *sub grafic* dacă

$$F(x) \leq f(x) \text{ pentru orice } x \in I$$

și că se află *strict sub grafic* dacă

$$F(x) < f(x) \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I.$$

Spunem că tangenta se află *deasupra graficului* dacă

$$F(x) \geq f(x) \text{ pentru orice } x \in I$$

și că se află *strict deasupra graficului* dacă

$$F(x) > f(x) \text{ pentru orice } x \neq x_0 \text{ din } I.$$

**D e f i n i ţ i e.** Funcția  $f$  este convexă (respectiv strict convexă) pe intervalul  $I$ , dacă tangenta dusă în orice punct al graficului se află sub grafic (respectiv strict sub grafic).

Funcția  $f$  este concavă (respectiv strict concavă) pe intervalul  $I$ , dacă tangenta dusă în orice punct al graficului se află deasupra graficului (respectiv strict deasupra graficului).

Spunem că graficul funcției  $f$  este o curbă convexă (strict convexă) sau concavă (strict concavă) dacă funcția  $f$  are proprietatea respectivă.

*Exemplu.* O funcție liniară  $f(x) = ax + b$  are ca grafic o dreaptă. Ea este în același timp convexă și concavă, deoarece tangentă într-un punct oarecare al graficului coincide cu graficul, deci se află în același timp sub grafic și deasupra graficului.

Reciproc, dacă funcția  $f$  este și convexă și concavă pe  $I$ , atunci tangentă într-un punct oarecare al graficului coincide cu graficul, deci graficul este un segment de dreaptă și deci funcția este liniară.

Fie  $f$  o funcție derivabilă de două ori pe un interval  $I$ .

Dacă funcția  $f$  este convexă pe  $I$ , derivata a doua  $f''$  este pozitivă pe  $I$ .

Dacă funcția  $f$  este concavă pe  $I$ , derivata a doua  $f''$  este negativă pe  $I$ .

Într-adevăr, să presupunem că  $f$  este convexă pe  $I$  și să arătăm că derivata întâi  $f'$  este crescătoare pe  $I$ , de unde va rezulta că derivata sa  $f''$  este pozitivă pe  $I$ .

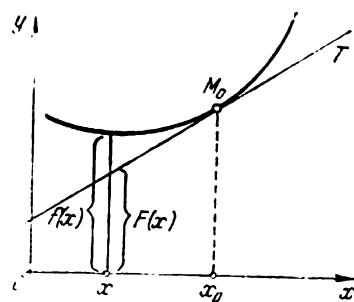


Fig. 102

Fie  $x_1 < x_2$  două puncte oarecare din  $I$ .

Ducind tangentă la grafic în punctul  $M_1(x_1, f(x_1))$ , avem :

$$F_1(x) \leq f(x) \text{ pentru orice } x \in I,$$

unde  $F_1(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$ .

În particular,  $F_1(x_2) \leq f(x_2)$  adică

$$(*) f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) \leq f(x_2).$$

Ducind tangentă la grafic în punctul  $M_2(x_2, f(x_2))$ , avem de asemenea

$$F_2(x) \leq f(x) \text{ pentru orice } x \in I,$$

unde  $F_2(x) = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2)$ .

În particular,  $F_2(x_1) \leq f(x_1)$  adică

$$(**) f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \leq f(x_1).$$

Adunînd membru cu membru inegalitățile (\*) și (\*\*) obținem :

$$f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \leq 0$$

sau

$$[f'(x_1) - f'(x_2)](x_2 - x_1) \leq 0$$

și deoarece  $x_2 - x_1 > 0$ , rezultă  $f'(x_1) - f'(x_2) \leq 0$  sau  $f'(x_1) \leq f'(x_2)$  adică derivata  $f'$  este crescătoare pe  $I$  și deci derivata a doua  $f''$  este pozitivă pe  $I$ .

În cazul cînd  $f$  este concavă, demonstrația se face la fel.

**O b s e r v a t i e.** Dacă  $f$  este strict convexă pe  $I$  nu rezultă că derivata a doua  $f''$  este strict pozitivă pe  $I$ .

Este posibil ca funcția  $f$  să fie strict convexă și derivata a doua  $f''$  să se anuleze în unele puncte.

**E x e m p l u.** Funcția  $f(x) = x^4$  definită pe  $R$  este strict convexă pe  $R$ . Avem  $f'(x) = 4x^3$  și  $f''(x) = 12x^2$ , iar  $f''(0) = 0$ .

Reciproc, avem însă următoarea

**P r o p o z i t i e.** Fie  $f$  o funcție derivabilă de două ori pe intervalul  $I$ .

1) Dacă derivata a doua  $f''$  este pozitivă pe  $I$ , funcția  $f$  este convexă pe  $I$ .

Dacă derivata a doua  $f''$  este strict pozitivă pe  $I$ , funcția  $f$  este strict convexă pe  $I$ .

**2) Dacă derivata a două  $f''$  este negativă pe  $I$ , funcția  $f$  este concavă pe  $I$ .**

**Dacă derivata a două  $f''$  este strict negativă pe  $I$ , funcția  $f$  este strict concavă pe  $I$ .**

Fie  $x_0$  un punct *oarecare* din  $I$ . Să scriem formula lui Taylor de ordinul întâi în punctul  $x_0$ :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(\xi),$$

unde  $x \in I$  iar  $\xi$  este cuprins între  $x$  și  $x_0$ .

Să scriem și funcția al cărei grafic este tangenta în punctul  $M_0(x_0, f(x_0))$  la graficul funcției  $f$ :

$$F(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

Atunci, pentru orice  $x \in I$  avem

$$F(x) - f(x) = -\frac{(x - x_0)^2}{2} f''(\xi).$$

Deoarece  $(x - x_0)^2 > 0$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ , semnul diferenței  $F(x) - f(x)$  este contrar semnului lui  $f''(\xi)$ .

Dacă  $f''$  este *pozitivă*, avem  $f''(\xi) \geq 0$  și deci  $F(x) - f(x) \leq 0$  sau  $F(x) \leq f(x)$  pentru orice  $x \in I$ , adică funcția  $f$  este *convexă*.

Dacă  $f''$  este *strict pozitivă*, avem  $f''(\xi) > 0$  și deci  $F(x) - f(x) < 0$  sau  $F(x) < f(x)$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ , adică funcția  $f$  este *strict convexă*.

Dacă  $f''$  este *negativă*, avem  $f''(\xi) \leq 0$  deci  $F(x) \geq f(x)$  pentru orice  $x \in I$ , adică funcția  $f$  este *concavă*.

Dacă  $f''$  este *strict negativă*, avem  $f''(\xi) < 0$  și deci  $F(x) > f(x)$  pentru orice  $x \neq x_0$  din  $I$ , adică  $f$  este *strict concavă*.

Fie acum o funcție  $f$  definită pe o mulțime  $E$  care este o reuniune (finită sau infinită) de intervale. Vom presupune că funcția  $f$  este de două ori derivabilă pe  $E$ , cu excepția unei mulțimi finite sau numărabile de puncte din  $E$ . Mulțimea  $E'' \subset E$ , pe care  $f$  este derivabilă de două ori, este, de asemenea, reuniune (finită sau infinită) de intervale.

Din propoziția precedentă deducem că funcția  $f$  este strict convexă sau strict concavă pe același interval pe care derivata a două păstrează același semn. Deoarece derivata a două are, de asemenea, proprietatea lui Darboux, deducem că funcția  $f$  este strict convexă sau strict concavă pe același interval pe care derivata a două nu se anulează.

Rezultă astfel calea de urmat pentru determinarea intervalelor pe care funcția este strict concavă sau strict convexă:

1) Se determină mulțimea  $E'' \subset E$  pe care funcția  $f$  este derivabilă de două ori, și se calculează derivata a doua  $f''$  pe mulțimea  $E''$ .

2) Se determină punctele din  $E''$  în care derivata a doua  $f''$  se anulează, adică se rezolvă ecuația

$$f''(x) = 0, x \in E''.$$

3) Se descompune mulțimea  $E$  în intervale disjuncte, astfel încât, pe nici un asemenea interval, derivata a doua  $f''$  să nu se mai anuleze. Aceste intervale pe care derivata a doua nu se mai anulează se obțin din intervalele mulțimii  $E$  pe care este definită funcția, împărțindu-le mai departe prin punctele în care funcția nu este de două ori derivabilă și prin punctele în care derivata a doua se anulează (presupunând că derivata a doua nu se anulează pe un întreg interval).

4) Pe fiecare interval  $I$  pe care derivata a doua  $f''$  nu se mai anulează, ea păstrează același semn. Se determină semnul derivatei a doua pe întregul interval  $I$  calculând valoarea ei într-un singur punct din  $I$ .

5) În funcție de semnul derivatei a doua pe un interval  $I$  se determină dacă funcția  $f$  este strict convexă sau strict concavă: dacă  $f''$  are semnul  $+$ ,  $f$  este strict convexă, iar dacă  $f''$  are semnul  $-$ ,  $f$  este strict concavă.

La tabloul în care se trec rezultatele privind intervalele de monotonie și extremele unei funcții se mai adaugă o linie în care se trece semnul derivatei a doua. În prima linie trebuie trecute atunci și valorile argumentului în care funcția nu este derivabilă de două ori, cum și rădăcinile derivatei a doua.

*Exemplu.* Fie funcția  $f(x) = \frac{1}{x}$  definită pe  $R - \{0\}$ .

Avem:  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$  și  $f''(x) = \frac{2}{x^3}$  pentru orice  $x \neq 0$

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'$	— —		— —
$f$	0 ↘	— $\infty$   + $\infty$ ↘	0
$f''$	— —		+ +

Pe intervalul  $(-\infty, 0)$  funcția este concavă, iar pe intervalul  $(0, +\infty)$  funcția este convexă.

În tablou am trecut și limitele funcției în punctele  $-\infty$  și  $+\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ și } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

cum și limitele laterale în punctul 0 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Putem acum trasa graficul funcției (fig. 103).

De mai multe ori s-a vorbit înainte despre *puncte de inflexiune*, și anume cu ocazia definirii derivatelor infinite și cu ocazia determinării punctelor de extrem ale funcției cu ajutorul valorilor derivatelor succesive într-un punct.

Fie  $f$  o funcție definită pe un interval  $I$  și  $x_0$  un punct *interior* al lui  $I$ .

**D e f i n i t i e.** Se spune că punctul interior  $x_0 \in I$  este punct de inflexiune al funcției  $f$ , dacă funcția are derivată (finită sau infinită) în punctul  $x_0$ , și dacă funcția este convexă de o parte a lui  $x_0$  și concavă de cealaltă parte a lui  $x_0$ .

Dacă  $x_0$  este punct de inflexiune al funcției, punctul  $M_0(x_0, f(x_0))$  de pe grafic se numește *punct de inflexiune al graficului*.

Geometric, a spune că  $M_0$  este punct de inflexiune al graficului înseamnă că graficul admite tangentă în punctul  $M_0$  (paralelă sau neparalelă cu axa  $Oy$ ) și că de o parte a lui  $M_0$  graficul este o curbă convexă, iar de cealaltă parte a lui  $M_0$  graficul este o curbă concavă sau că de o parte a lui  $M_0$  tangenta se află sub grafic, iar de cealaltă parte a lui  $M_0$  tangenta se află deasupra graficului.

Rezultă că tangenta dusă într-un punct de inflexiune al graficului traversează graficul, deoarece de o parte a lui  $M_0$  tangenta se află sub grafic, iar de cealaltă parte a lui  $M_0$  tangenta se află deasupra graficului.

După ce s-au determinat intervalele pe care funcția este strict convexă sau strict concavă rezultă și punctele de inflexiune ale funcției :

Fie  $f$  o funcție definită pe o mulțime  $E$  care este reuniune (finită sau infinită) de intervale, și  $x_0$  un punct din *interiorul* unui interval al mulțimii  $E$ , astfel încât derivata  $f'(x_0)$  există (finită sau infinită).

Dacă de o parte și de alta a lui  $x_0$  derivata a două  $f''$  are semne diferite, atunci  $x_0$  este punct de inflexiune al funcției  $f$ .

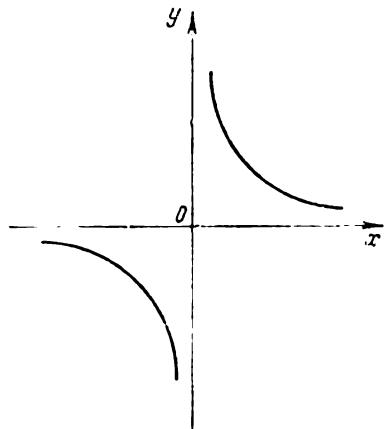


Fig. 103

Dacă derivata a două are același semn de o parte și de alta a lui  $x_0$ , atunci  $x_0$  nu este punct de inflexiune al funcției.

Dacă într-un punct de inflexiune  $x_0$  funcția este derivabilă de două ori, atunci avem în mod necesar  $f''(x_0) = 0$ .

Într-adevăr,  $x_0$  este punct de extrem al derivatei  $f'$ , deci derivata  $f''$  a lui  $f'$  se anulează în  $x_0$ , conform teoremei lui Fermat.

**O b s e r v a t i e.** Dacă derivata a două se anulează într-un punct  $x_0$ , nu rezultă că  $x_0$  este punct de inflexiune.

**Exemplu.** Fie funcția  $f(x) = x^4$  definită pe  $R$ . Avem  $f'(x) = 4x^3$  și  $f''(x) = 12x^2$ , iar  $f''(0) = 0$ , dar 0 nu este punct de inflexiune, ci punct de minim al funcției.

Punctele de inflexiune în care derivata a două se anulează se pot identifica fără a studia semnul derivatei a două în jurul acestor puncte, ci semnul derivatelor succesive numai în aceste puncte:

**P r o p o z i t i e.** Fie  $f$  o funcție derivabilă de  $n$  ori într-un punct interior  $a$  al unui interval  $I$ . Dacă :

$$f'(a) = 0, f''(a) = 0, \dots, f^{(n-1)}(a) = 0,$$

$$f^{(n)}(a) \neq 0, n \geq 3$$

și  $n$  este impar, atunci  $a$  este punct de inflexiune al funcției.

Să notăm  $h = f'$ ; avem :

$$h(a) = 0, h'(a) = 0, \dots, h^{(n-2)}(a) = 0, h^{(n-1)}(a) \neq 0,$$

iar  $n - 1$  este par, deci  $a$  este punct de extrem al funcției  $h$ , iar derivata sa  $h'$  are semne diferite de o parte și de alta a lui  $a$  (dacă  $h'$  ar avea același semn de o parte și de alta a lui  $a$ , atunci  $a$  n-ar mai fi punct de extrem pentru  $h$ ). Rezultă că  $f'' = h'$  are semne diferite de o parte și de alta a lui  $a$ , deci  $a$  este punct de inflexiune al funcției  $f$ .

**C o r o l a r .** Dacă într-un punct interior  $a \in I$ , avem

$$f'(a) = 0, f''(a) = 0, f'''(a) \neq 0,$$

atunci  $a$  este punct de inflexiune al funcției  $f$ .

**Exemplu.** Fie funcția  $f(x) = x^3$ . Avem  $f'(x) = 3x^2$ ,  $f''(x) = 6x$ ,  $f'''(x) = 6$ . Deci,  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = 0$ ,  $f'''(0) = 6$ . Rezultă că 0 este punct de inflexiune al funcției  $f$ .

### 3. Asimptote

Fie  $f$  o funcție definită pe o mulțime  $E$  care este reuniune (finită sau infinită) de intervale.

În cazul cînd funcția  $f$  este nemărginită, sau mulțimea  $E$  este nemărginită, graficul funcției este o mulțime nemărginită de puncte din plan (în sensul că nu există nici un dreptunghi sau nici un cerc care să conțină graficul în întregime).

Spunem în acest caz că graficul funcției are ramuri nemărginîte.

Dacă o ramură nemărginită a graficului se apropie necontenit (într-un sens care va fi precizat mai departe) de o anumită dreaptă, spunem că această dreaptă este *asimptotă* la graficul funcției. Pentru studiu, asimptotele se împart în două categorii: asimptote verticale (sau paralele cu axa  $Oy$ ) și asimptote oblice (sau neparalele cu axa  $Oy$ ).

a) *Asimptote verticale*. Asimptotele verticale se definesc pentru *funcții nemărginîte* chiar dacă sunt definite pe mulțimi mărginîte.

Dacă  $x_0$  este punctul de acumulare (finit) al mulțimii  $E$  și dacă cel puțin una din limitele laterale  $f(x_0 - 0)$  și  $f(x_0 + 0)$  există și este *infinită*, spunem că dreapta

$$x = x_0,$$

paralelă cu axa  $Oy$ , este *asimptotă verticală* la graficul funcției  $f$ .

Evident, dacă  $x \in E$  și dacă funcția  $f$  este continuă în  $x_0$ , atunci limitele laterale sunt egale cu  $f(x_0)$ , deci sunt *finite*. Așadar, asimptotele verticale trebuie căutate în punctele de discontinuitate ale funcției (mai precis în punctele de discontinuitate de speță a două) și în punctele de acumulare ale lui  $E$  care nu aparțin lui  $E$  (deci în care funcția  $f$  nu este definită).

*Exemplu.* 1)  $f(x) = \frac{1}{x}$  definită pe  $R - \{0\}$ . Avem  $f(0 - 0) = -\infty$  și  $f(0 + 0) = +\infty$ , deci dreapta  $x = 0$  (axa  $Oy$ ) este asimptotă verticală a graficului.

2)  $f(x) = \operatorname{tg} x$  definită pentru  $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k$  întreg. Avem  $f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = +\infty$  și  $f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\infty$ , deci dreapta  $x = \frac{\pi}{2}$  este asimptotă verticală a graficului.

3)  $f(x) = \ln x$  definită pe  $(0, +\infty)$ . Avem  $f(0 + 0) = -\infty$  (limita la stînga în 0 nu are sens). Dreapta  $x = 0$  (axa  $Oy$ ) este asimptotă verticală a graficului.

4)  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , definită pe  $(0, +\infty)$ . Avem  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty$  (limita la stînga în 0 nu are sens). Dreapta  $x = 0$  (axa  $Oy$ ) este asimptotă verticală a graficului.

$$5) f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1}, & \text{dacă } x \neq 1 \\ 5, & \text{dacă } x = 1 \end{cases} \quad \text{definită pe } \mathbb{R}.$$

Avem  $f(1^-) = -\infty$  și  $f(1^+) = +\infty$ . Funcția  $f$  este definită în 1, dar este discontinuă în acest punct. Dreapta  $x = 1$  este asymptotă verticală a graficului.

6)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  definită pe intervalul  $(-1, 1)$ . Dreptele  $x = -1$  și  $x = 1$  sunt asymptote verticale ale graficului. Din acest exemplu se constată că funcția poate avea asymptote verticale chiar dacă este definită pe o mulțime mărginită.

**O b s e r v a ḥ i e.** Dacă dreapta  $x = x_0$  este asymptotă verticală la graficul funcției  $f$ , distanța dintre grafic și asymptotă, măsurată pe orizontală, descrește neconitenit cind punctul de pe grafic se depărtează neconitenit (cind abscisa punctului de pe grafic se apropie de  $x_0$ ).

b) *A s i m p t o t e o b l i c e.* Asimptotele oblice se definesc pentru funcții definite pe mulțimi nemărginite, chiar dacă funcțiile sunt mărginite.

Dacă mulțimea  $E$  pe care este definită funcția este nemărginită la dreapta (nemajorată), atunci  $+\infty$  este punct de acumulare al mulțimii  $E$ . În acest caz :

*Spunem că o dreaptă  $y = mx + n$  este asymptotă (oblică) la ramura spre  $+\infty$  a graficului dacă*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - n] = 0.$$

În loc de „asimptotă la ramura spre  $+\infty$  a graficului” vom spune, mai simplu, „asimptotă la  $+\infty$ ”.

Dacă mulțimea  $E$  este nemărginită la stînga (neminorată), atunci  $-\infty$  este punct de acumulare al mulțimii  $E$ . În acest caz :

*Spunem că o dreaptă  $y = m'x + n'$  este asymptotă (oblică) la ramura spre  $-\infty$  a graficului dacă*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - m'x - n'] = 0.$$

În loc de „asimptotă la ramura spre  $-\infty$  a graficului” vom spune „asimptotă la  $-\infty$ ”.

Vom studia întîi asimptotele la  $+\infty$ . Asimptotele la  $-\infty$  se studiază la fel.

Să presupunem deci că mulțimea  $E$  este nemajorată și că dreapta  $y = mx + n$  este asymptotă la  $+\infty$ , adică

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - n] = 0.$$

Aveți atunci

$$f(x) - mx = [f(x) - mx - n] + n,$$

deci :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = n.$$

Mai departe, pentru  $x > 0$ , avem

$$\frac{f(x)}{x} - m = \frac{f(x) - mx}{x},$$

deci

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - m \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - mx}{x} = \frac{n}{+\infty} = 0$$

și, deoarece

$$\frac{f(x)}{x} = \left[ \frac{f(x)}{x} - m \right] + m,$$

rezultă

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m.$$

Așadar, dacă dreapta  $y = mx + n$  este asimptotă la  $+\infty$ , coeficien-  
tul unghiular  $m$  și ordonata la origine  $n$  verifică egalitățile următoare :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx].$$

Reciproc, să presupunem că :

$$\text{există } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ și este finită;}$$

$$\text{există } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = n \text{ și este finită;}$$

*atunci dreapta  $y = mx + n$  este asimptotă la  $+\infty$ .*

Într-adevăr, în acest caz,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - n] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] - n = 0.$$

**Observații.** 1° Dacă  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  nu există sau este infinită, graficul funcției nu are asimptotă la  $+\infty$ .

Dacă există  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$  și este finită, dar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$  nu există sau este infinită, graficul funcției nu are asimptotă la  $+\infty$ .

2° Dacă există  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$  și este finită, atunci dreapta  $y = a$  este asimptotă la  $+\infty$ , paralelă cu axa  $Ox$  (asimptotă orizontală).

Într-adevăr,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - a] = 0$ .

3° Dacă  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  nu există (nici finită, nici infinită), atunci graficul funcției nu are asimptotă la  $+\infty$ .

Să presupunem că există  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ .

Dacă  $m = 0$ , atunci  $f(x) - mx = f(x)$  și deoarece  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  nu există, nici  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$  nu există, deci graficul nu are asimptotă la  $+\infty$ .

Dacă  $m \neq 0$ , atunci pentru  $x > 0$  avem  $f(x) = \frac{f(x)}{x} \cdot x$  și deci ar exista  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m\infty$ , ceea ce contrazice ipoteza.

Așadar, o condiție necesară (dar nu suficientă) pentru ca graficul să aibă asimptotă la  $+\infty$  este să existe  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  (finită sau infinită). În cazul cind această limită nu există, este inutil a mai căuta asimptotă la  $+\infty$ .

Din considerațiile precedente rezultă calea de urmat pentru a vedea dacă există asimptotă la  $+\infty$ , iar în cazul cind există, pentru a o determina :

1) Se caută  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

Dacă există  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$  și este finită, atunci dreapta  $y = a$  este asimptotă la  $+\infty$ .

Dacă există  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  și este infinită, atunci :

2) Se caută  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

Dacă există  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$  și este finită, atunci :

3) Se caută  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$ .

Dacă există  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = n$  și este finită, atunci dreapta  $y = mx + n$  este asimptotă la  $+\infty$ .

*Exemplu.* 1)  $f(x) = \sin x$  definită pe  $R$ . Nu există  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ , deci graficul funcției nu are asimptotă la  $+\infty$ .

2)  $f(x) = x^2$  definită pe  $R$ . Avem  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ , deci este posibil ca graficul să aibă asimptotă la  $+\infty$  și atunci calculăm :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

Deoarece această limită este infinită, graficul nu are asimptotă la  $+\infty$ .

3)  $f(x) = \ln x$  definită pe  $(0, +\infty)$ .

Aveam  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ .

deci calculăm mai departe limita

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

care este *finită*, deci calculăm mai departe limita

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

care este infinită, deci graficul nu are asimptotă la  $+\infty$ .

4)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  definită pe  $R - \{1\}$ . Avem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1,$$

deci dreapta  $y = 1$  este asimptotă la  $+\infty$ .

5)  $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$  definită pe  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ .

Avem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x^2 - 1} = +\infty,$$

deci calculăm mai departe limita

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 2$$

care este *finită*, deci calculăm mai departe limita

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2\sqrt{x^2 - 1} - 2x] = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0. \end{aligned}$$

Așadar, dreapta  $y = 2x$  este asimptotă la  $+\infty$ .

Să presupunem că mulțimea  $E$  este neminorată. Făcind considerații asemănătoare cu cele din cazul precedent, rezultă calea de urmat pentru a vedea dacă există asimptotă la  $-\infty$ , iar în cazul cînd există, pentru a o calcula :

1) Se caută  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

Dacă există  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$  și este *finită*, dreapta  $y = a$  este asimptotă la  $-\infty$ .

Dacă există  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  și este *infinită*, atunci :

2) Se caută  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

Dacă există  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m'$  și este finită, atunci :

3) Se caută  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - m'x]$ .

Dacă există  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - m'x] = n'$  și este finită, atunci :

dreapta  $y = m'x + n'$  este asimptotă la  $-\infty$ .

**O b s e r v a t i i.** Dacă nu există  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , graficul funcției nu are asimptotă la  $-\infty$ .

Dacă există  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  (finită sau infinită), dar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  nu există sau nu este finită, atunci graficul funcției nu are asimptotă la  $-\infty$ .

Dacă există  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  (finită sau infinită) și dacă există  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m$  și este finită, dar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx]$  nu există sau este infinită, atunci graficul funcției nu are asimptotă la  $-\infty$ .

**Exemplu.** 1)  $f(x) = \operatorname{tg} x$ , definită pe  $R$ . Nu există  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{tg} x$ , deci graficul nu are asimptotă la  $-\infty$ .

2)  $f(x) = x^2$  definită pe  $R$ . Avem  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ , deci calculăm mai departe limita

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

care este infinită, deci graficul nu are asimptotă la  $-\infty$ .

3)  $f(x) = \ln |x|$  definită pe  $R - \{0\}$ . Avem  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln |x| = +\infty$ , deci calculăm mai departe limita

$$m' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln |x|}{-|x|} = 0$$

care este finită, deci calculăm mai departe limita

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln |x| = +\infty$$

care este infinită, deci graficul nu are asimptotă la  $-\infty$ .

4)  $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$  definită pe  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ .

Avem

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2\sqrt{x^2 - 1} = +\infty,$$

deci calculăm mai departe limita

$$m' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{-\sqrt{x^2}} = -2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = -2.$$

care este finită, deci calculăm mai departe limita

$$n' = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - m'x] = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - 1} + x] = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = 0,$$

care este finită, deci dreapta  $y = -2x$  este asimptotă la  $-\infty$ .

5)  $f(x) = e^x$  definită pe  $R$ . Avem

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

decid dreapta  $y = 0$  este asimptotă la  $-\infty$ .

#### 4. Reprezentarea grafică a funcțiilor

Cercetările întreprinse în cadrul acestui paragraf sunt suficiente pentru a putea trasa graficul unei funcții care admite derivată de ordinul doi în toate punctele sau cu excepția unei multimi numărabile de puncte. De cele mai multe ori se pune problema trasării graficului unei *funcții elementare*. În acest scop se procedează pe etape în modul următor:

I) Domeniul de definiție. 1) Dacă domeniul de definiție a unei funcții elementare nu este specificat, se subînțelege că este domeniul maxim de definiție, format din toate punctele pentru care operațiile au sens. Se determină acest domeniu maxim de definiție.

2) Se calculează  $f(0)$  dacă funcția este definită în 0. În punctul  $(0, f(0))$  graficul taie axa  $Oy$ .

3) Se rezolvă  $f(x) = 0$ . Soluțiile acestei ecuații, dacă există, reprezintă abscisele punctelor în care graficul taie axa  $Ox$ .

4) Dacă domeniul de definiție este nemajorat, se cercetează  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , iar dacă domeniul de definiție este neminorat, se cercetează  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

II) Derivata întâi. 1) Se determină multimea  $E' \subset E$  pe care funcția este derivabilă și se calculează derivata întâi  $f'$ .

2) Se rezolvă ecuația  $f'(x) = 0$ . Rădăcinile derivatei întâi pot fi puncte de extrem ale funcției.

3) Se determină intervalele pe care derivata întâi păstrează același semn și se determină semnul derivatei întâi pe aceste intervale.

III) Derivata a doua. 1) Se determină multimea  $E'' \subset E'$  pe care funcția este derivabilă de două ori; se calculează derivata a doua  $f''$ .

2) Se rezolvă ecuația  $f''(x) = 0$ . Rădăcinile derivatei a doua pot fi puncte de inflexiune.

3) Se determină intervalele pe care derivata a doua păstrează același semn și se determină semnul derivatei a doua pe aceste intervale.

IV) Asimptote. 1) Se cercetează dacă există asimptote verticale și, dacă există, se calculează aceste asimptote.

2) Se cercetează dacă există asimptote oblice și, dacă există, se calculează aceste asimptote.

V) Tabloul rezultatele obținute anterior se trec, pentru sistematizare, într-un tablou cu linii orizontale.

1) În linia întâi se trec valorile remarcabile ale argumentului, obținute anterior (rădăcinile funcției, derivatei întâi și derivatei a doua, punctele în care funcția și derivatele nu sunt definite, extremitățile intervalelor pe care funcția este definită etc.). Dacă domeniul de definiție este nemărginit, se trec și punctele  $+\infty$  și  $-\infty$ .

2) În linia a doua se trec rezultatele privind derivata întâi; se trage o linie verticală în dreptul punctelor în care funcția este definită, dar derivata întâi nu este definită; de o parte și de alta a acestei linii se scriu limitele laterale ale derivatei întâi, dacă există. Se scrie 0 în dreptul rădăcinilor derivatei și se trece semnul derivatei.

3) În linia a treia se trec valorile funcției în dreptul valorilor argumentului din linia întâi. Se marchează cu săgeți creșterea sau descreșterea funcției. Se trage o linie verticală, în dreapta punctelor în care funcția nu este definită. De o parte și de alta a acestei linii se trec, dacă există, limitele laterale ale funcției.

În dreptul lui  $+\infty$  și  $-\infty$  se trec limitele funcției în aceste puncte. Se marchează cu literele  $m$ ,  $M$  și  $i$ , respectiv, punctele de minim, de maxim și de inflexiune ale funcției.

4) În linia a patra se trec rezultatele privind derivata a două; se trage o linie verticală în dreptul punctelor în care  $f$  sau derivata întâi  $f'$  este definită, dar derivata a două nu este definită. Se scrie 0 în dreptul rădăcinilor derivatei a două. Se trece semnul derivatei a două.

VI) Graficul. Rezultatele sistematizate în tablou permit trasarea graficului funcției pe o bucată de hîrtie pe care s-a desenat un sistem de axe ortogonale  $Ox$  și  $Oy$ . Se trasează întâi asimptotele. Se trec apoi punctele  $(x, f(x))$  care rezultă din tablou. În punctele de extrem ale graficului se trasează un mic segment de dreaptă orizontal. În punctele de inflexiune ale graficului se trasează o porțiune din tangenta la grafic în acest punct. Se unesc apoi punctele printr-o linie, ținând seama de indicațiile din tablou privind creșterea sau descreșterea, cum și convexitatea sau concavitatea funcției. Linia astfel obținută ne dă forma graficului funcției.

$$\text{Exemplu. } f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

I) Domeniul de definiție. Se pune condiția ca  $\frac{x+1}{x-1} \geq 0$  și ca  $x-1 \neq 0$ . Se obține domeniul  $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$ .

În punctul 0 funcția nu este definită, deci graficul nu tăie axa  $Oy$ . Rădăcinile funcției:  $-1$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty.$$

$$\text{II) Derivata întii. } f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

definită pe  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ . Pe această mulțime derivata  $f'$  nu se anulează. Semnul derivatei întii este  $-$  în ambele intervale. Avem  $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = -\infty$ .

$$\text{III) Derivata a doua. } f''(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{2x^2 + 3x + 1}{(x-1)^3}$$

definită pe  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

Derivata a doua nu se anulează pe această mulțime.

Semnul derivatei a doua este  $-$  pe primul interval și  $+$  pe al doilea interval.

**IV) Asimptotele.** Deoarece  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ , dreapta  $x = 1$  este asimptotă verticală.

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$ , dreapta  $x = -1$  nu este asimptotă verticală.

Asimptotele oblice au rezultat la punctul I: dreapta  $y = 1$  este asimptotă atât la  $+\infty$  cât și la  $-\infty$ .

**V) Taboul.**

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f$	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$-$
$f'$	$+$	$0$	$+$	$+$
$f''$	$+$	$0$	$+$	$+$

**VI) Graficul.**

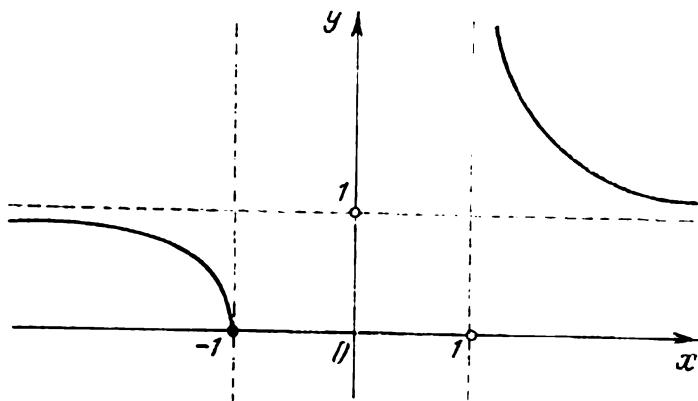


Fig. 104

## § 8. Diferențiale

### 1. Definiția diferențialei

Fie  $f$  o funcție definită pe un interval  $I$  și  $x_0 \in I$ .

**D e f i n i t i e.** Se spune că funcția  $f$  este diferențierabilă în punctul  $x_0 \in I$ , dacă există un număr  $A \in R$  și o funcție  $\alpha$  definită pe  $I$ , continuă în  $x_0$  și nulă în  $x_0$ , astfel încât pentru orice  $x \in I$ , să avem

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0).$$

Deoarece funcția  $\alpha$  este continuă în  $x_0$  și nulă în acest punct, avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha(x_0) = 0.$$

Dacă funcția  $f$  este diferențierabilă în fiecare punct din  $I$ , spunem că este diferențierabilă pe  $I$ .

**P r o p o z i t i e.** Funcția  $f$  este diferențierabilă într-un punct  $x_0 \in I$  dacă și numai dacă este derivabilă în  $x_0$ .

Să presupunem întâi că  $f$  este diferențierabilă în  $x_0$ , deci

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \quad x \in I,$$

unde  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ . Pentru  $x \neq x_0$  putem împărti cu  $x - x_0$  și obținem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \alpha(x), \quad x \neq x_0.$$

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ , deducem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = A,$$

deci  $f$  este derivabilă în  $x_0$  și  $f'(x_0) = A$ .

Reciproc, să presupunem că  $f$  este derivabilă în  $x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Să definim funcția  $\alpha$  pe  $I$  astfel :

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), & \text{dacă } x \neq x_0 \\ 0 & , \text{dacă } x = x_0 \end{cases}$$

Atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0 = \alpha(x_0),$$

deci funcția  $\alpha$  este continuă în punctul  $x_0$  și nulă în acest punct.

Din definiția funcției  $\alpha$ , rezultă că pentru  $x = x_0$  avem

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)$$

și această egalitate este adevărată și pentru  $x = x_0$ , deci funcția  $f$  este diferențiabilă în punctul  $x_0$ .

**O b s e r v a t i i .** 1° Din demonstrația acestei propoziții, rezultă că funcția  $f$  este diferențiabilă în punctul  $x_0$  dacă și numai dacă avem

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \quad x \in I,$$

unde  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$  și  $\alpha(x_0) = 0$ . Funcția  $\alpha$  este perfect determinată de această egalitate în toate punctele  $x = x_0$  din  $I$ .

2° Propoziția precedentă afirmă că noțiunile de derivabilitate și de diferențiabilitate sunt echivalente, în sensul că dacă funcția are una din aceste proprietăți, atunci are și cealaltă proprietate.

3° Din egalitatea prin care se definește diferențiabilitatea rezultă

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \quad x \in I.$$

Această egalitate este tocmai formula lui Taylor de ordinul întâi.

**Egalitatea**

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \quad x \in I,$$

se scrie de asemenea

$$f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + \alpha(x)](x - x_0), \quad x \in I$$

și avem  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f'(x_0) + \alpha(x)] = f'(x_0)$ . Aceasta înseamnă că, pentru valori ale argumentului suficient de apropiate de  $x_0$ , avem

$$f'(x_0) + \alpha(x) \approx f'(x_0)$$

și deci

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0), \quad x \approx x_0, \quad x \in I.$$

Așadar, creșterea  $f(x) - f(x_0)$  a funcției se poate approxima cu produsul  $f'(x_0)$  și  $(x - x_0)$ , dintre derivata în  $x_0$  și creșterea  $x - x_0$  a argumentului (pentru creșteri ale argumentului suficient de mici).

Să notăm cu  $h$  creșterea de la  $x_0$  la  $x$  a argumentului,  $h = x - x_0$ . Atunci  $x = x_0 + h$ , și deci, pentru  $h$  suficient de mic,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h, \quad x_0 + h \in I.$$

Această relație este foarte utilă, deoarece în loc să calculăm valorile funcției în punctele  $x_0$  și  $x_0 + h$  din  $I$  pentru a afla creșterea funcției, această creștere se poate obține mai ușor, dar cu aproximare, făcând produsul  $f'(x_0)h$ , care este o funcție liniară în  $h$ .

Să observăm că în această relație trebuie să avem atât  $x_0 \in I$ , cît și  $x_0 + h \in I$ , pentru a putea scrie diferența  $f(x_0 + h) - f(x_0)$ , dar produsul  $f'(x_0)h$  are sens oricare ar fi  $h \in R$ .

**D e f i n i t i e.** Funcția liniară  $h \rightarrow f'(x_0)h$  definită pentru orice  $h \in R$  se numește diferențiala funcției  $f$  în punctul  $x_0$  și se notează  $df(x_0)$ :

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h.$$

Relația de aproximare se scrie atunci

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx df(x_0)(h), \quad x_0 + h \in I.$$

Trebuie observat că, în timp ce derivata funcției  $f$  în punctul  $x_0$  este un număr,  $f'(x_0)$ , diferențiala funcției  $f$  în punctul  $x_0$  este o funcție liniară,  $h \rightarrow f'(x_0)h$ , definită pentru orice  $h \in R$ .

Deoarece diferențiala  $df(x_0)$  este o funcție, ea are un grafic, care este o dreaptă ce trece prin origine și are coeficientul unghiular  $\operatorname{tg} x = f'(x_0)$ , deci este paralelă cu tangentă la graficul funcției  $f$  (în punctul  $M_0(x_0, f(x_0))$ )

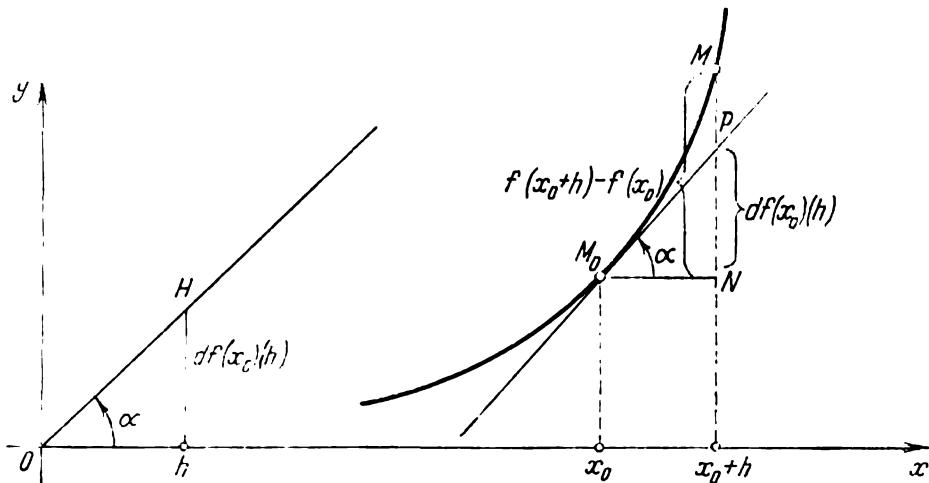


Fig. 105

(fig. 105). De aici rezultă și interpretarea geometrică a diferențialei. Avem  $MN = f(x_0 + h) - f(x_0)$ ,  $NP = df(x_0)(h)$ . Relația de aproximare

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx df(x_0)(h), \quad x_0 + h \in I,$$

exprimă faptul că segmentul  $PM$  poate fi făcut oricăr de mic, dacă se ia creșterea  $h$  suficient de mică.

Diferențiala funcției într-un punct oarecare  $x \in I$  este

$$df(x)(h) = f'(x) \cdot h, \quad h \in R.$$

Pentru funcția identică  $\varphi(x) = x$  definită pe  $R$ , avem  $\varphi'(x) \equiv 1$ , deci diferențiala sa  $d\varphi(x_0)$  verifică egalitatea

$$d\varphi(x_0)(h) = h, \quad h \in R.$$

Pentru orice  $x \in I$  avem  $d\varphi(x)(h) = h$ ,  $h \in I$ , deci  $d\varphi(x) = d\varphi(x_0)$ . Atunci

$$\frac{df(x_0)(h)}{d\varphi(x_0)} = \frac{f'(x_0)h}{h} = f'(x_0), \text{ oricare ar fi } h \neq 0,$$

deci

$$\frac{df(x_0)}{d\varphi(x_0)} = f'(x_0).$$

Derivata  $f'(x_0)$  este egală deci cu raportul *constant* dintre diferențiala sa  $df(x_0)$  și diferențiala funcției identice,  $d\varphi(x_0)$ .

Pentru un punct arbitrar  $x \in I$  avem atunci

$$\frac{df(x)}{d\varphi(x)} = f'(x).$$

Pentru diferențiala funcției identice  $\varphi(x) = x$  se folosește notația  $dx$ , astfel încât

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

Se justifică astfel una din notațiile derivatei, specificată la începutul capitolului.

Diferențiala  $dx$  a funcției identice se numește, mai simplu, diferențiala lui  $x$ . Uneori se întrebuițează și denumirea „diferențiala variabilei independente”, dar această denumire este impropriu, deoarece noțiunea de diferențială se referă *numai* la funcții.

Din ultima egalitate se deduce

$$df(x) = f'(x)dx,$$

adică diferențiala funcției  $f$  este egală cu produsul dintre derivata sa și diferențiala lui  $x$ .

Trebue observat că pentru o valoare fixată  $x$  a argumentului, avem  $dx(h) = h$ , oricare ar fi  $h \in R$ .

*Exemplu.* 1) Pentru  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in R$  avem

$$df(x) = d \sin x = \cos x dx.$$

$$2) \quad d \ln x = \frac{1}{x} dx.$$

$$3) \quad de^x = e^x dx.$$

$$4) \quad d \arctg x = \frac{1}{1+x^2} dx.$$

$$5) \quad d(x^2 + 3) = 2x dx.$$

Regulile demonstreate anterior pentru derivate se păstrează și pentru diferențiale:

$$d(u + v) = du + dv; \quad d(u - v) = du - dv;$$

$$d(\alpha u) = \alpha du;$$

$$d(uv) = v du + u dv;$$

$$d \frac{u}{v} = \frac{v du - u dv}{v^2},$$

unde  $u$  și  $v$  sunt funcții derivabile.

$$\text{Exemplu. 1)} \quad d \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1) d(x+1) - (x+1) d(x-1)}{(x-1)^2} = \\ = \frac{(x-1) dx - (x+1) dx}{(x-1)^2} = \frac{-2 dx}{(x-1)^2}.$$

$$\begin{aligned} 2) \quad d \sin x \cos x &= \cos x d \sin x + \sin x d \cos x = \\ &= \cos x \cdot \cos x dx + \sin x (-\sin x) dx = \cos^2 x dx - \sin^2 x dx = (\cos^2 x - \sin^2 x) dx. \end{aligned}$$

## 2. Diferențiala funcțiilor compuse

Fie două funcții derivabile  $u: I \rightarrow J$  și  $\varphi: J \rightarrow R$  și funcția compusă  $f = \varphi \circ u: I \rightarrow R$ :

$$f(x) = \varphi(u(x)), \quad x \in I.$$

Funcția  $f$  este de asemenea derivabilă. Diferențiala sa este

$$df(x) = f'(x)dx = \varphi'(u(x))u'(x)dx$$

sau

$$d[\varphi(u(x))] = \varphi'(u(x)) \cdot u'(x)dx.$$

Dar

$$u'(x)dx = du(x),$$

deci

$$d[\varphi(u(x))] = \varphi'(u(x))du(x).$$

Dacă nu se mai pune în evidență argumentul  $x$ , atunci ultima egalitate se scrie

$$d\varphi(u) = \varphi'(u)du.$$

Trebuie observat că în această egalitate  $u$  este o funcție, dar că egalitatea are aceeași formă ca și cînd  $u$  ar fi argumentul funcției  $\varphi$ .

În exemplele următoare,  $u$  este o funcție derivabilă:

$$1) du = nu^{n-1} du;$$

$$7) d \arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du;$$

$$2) d \sqrt{u} = \frac{1}{2\sqrt{u}} du;$$

$$8) d \arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du;$$

$$3) d \sin u = \cos u du;$$

$$9) d \arctg u = \frac{1}{1+u^2} du;$$

$$4) d \cos u = -\sin u du;$$

$$10) d \text{arcctg } u = -\frac{1}{1+u^2} du;$$

$$5) d \tg u = \frac{1}{\cos^2 u} du;$$

$$11) d \ln u = \frac{1}{u} du;$$

$$6) d \ctg u = -\frac{1}{\sin^2 u} du;$$

$$12) de^u = e^u du.$$

### 3. Diferențiale de ordin superior

Fie funcția  $f: I \rightarrow R$  și  $x_0 \in I$ .

Spunem că funcția  $f$  este diferențiabilă de două ori în punctul  $x_0$ , dacă este derivabilă într-o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  și dacă derivata  $f'$  este diferențiabilă în  $x_0$ .

Aceasta revine la a spune că  $f$  este derivabilă de două ori în  $x_0$ .

Diferențiala de ordinul doi în  $x_0$  se notează  $d^2f(x_0)$  și se definește prin egalitatea

$$d^2f(x_0) = f''(x_0)dx^2.$$

În mod analog, spunem că  $f$  este diferențiabilă de  $n$  ori în punctul  $x_0$ , dacă are derivată de ordinul  $n-1$  într-o vecinătate a lui  $x_0$  și dacă derivata  $f^{(n-1)}$  este diferențiabilă în  $x_0$ .

Aceasta revine la a spune că  $f$  este derivabilă de  $n$  ori în  $x_0$ .

Diferențiala de ordinul  $n$  în  $x_0$  se notează  $d^n f(x_0)$  și se definește prin egalitatea

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0) dx^n.$$

Diferențiala de ordinul  $n$  în  $x_0$  este o funcție de argumentul  $dx$ ; mai precis, este un polinom de gradul  $n$  în  $dx$ .

## § 9. Aplicațiile derivatei în fizică

Mărimile fizice se schimbă cu timpul (variază în timp). O asemenea mărime fizică se descrie în matematică printr-o funcție  $f(t)$ , unde argumentul  $t$  semnifică timpul, iar valorile  $f(t)$  ale funcției reprezintă măsura mărimii respective, la momentele  $t$ . De cele mai multe ori este convenabil să utilizăm ecuația  $y = f(t)$ , unde  $y$  semnifică măsura mărimii respective. Este important adesea să se cunoască „viteza de variație” a unei mărimi, care este o nouă mărime fizică și a cărei măsură este derivata  $\frac{df}{dt}$  a funcției  $f$  în raport cu timpul.

### 1. Viteza în mișcarea rectilinie

Să considerăm un mobil  $M$  în mișcare rectilinie (v. fig. 75). Dacă alegem un punct de referință  $O$ , un sens pozitiv de parcursare pe dreapta pe care se mișcă mobilul și un moment inițial  $t_0 = 0$ , abscisa  $s$  a mobilului  $M$  la un moment  $t$  este dată de o ecuație

$$s = f(t)$$

numită legea de mișcare a mobilului.

$s$  are semnificația „spațiului parcurs de mobil” din momentul inițial pînă la momentul  $t$ .

La începutul capitolului, s-a definit viteza  $v(t_0)$  a mobilului la un moment  $t_0$ , ca fiind limita

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = v(t_0).$$

Așadar

$$v(t_0) = f'(t_0)$$

adică, viteza în mișcarea rectilinie este derivata spațiului în raport cu timpul.

În scris:  $v = s' = \frac{ds}{dt}$ .

Dacă viteza este constantă spunem că mișcarea este *uniformă*. *Mișcarea mobilului este uniformă dacă și numai dacă legea de mișcare este de forma  $s = \alpha t + \beta$  ( $\alpha, \beta \in R$ )*.

Într-adevăr, dacă  $s = \alpha t + \beta$  atunci  $v = s' = \alpha \equiv \text{ct.}$ ; reciproc, dacă viteza este constantă,  $v = \alpha = \text{ct.}$ , adică  $s' = \alpha$ , atunci  $s = \alpha t + \beta$ .

În particular, dacă viteza este nulă,  $v = 0$ , atunci legea de mișcare este  $s = \beta = \text{ct.}$ , adică mobilul nu se mișcă. Reciproc, dacă mobilul nu se mișcă, avem  $s = \beta = \text{ct.}$ , deci  $v = s' = 0$ .

*Viteza este pozitivă, dacă și numai dacă mobilul se mișcă în sensul pozitiv al axei.*

Într-adevăr,  $v \geq 0$  dacă și numai dacă funcția  $f(t)$  este crescătoare.

Aceasta înseamnă că dacă  $t_1 < t_2$ , atunci  $f(t_1) \leq f(t_2)$ , deci mobilul se mișcă de la  $s_1 = f(t_1)$  la  $s_2 = f(t_2)$  în sensul pozitiv al axei. În mod asemănător :

*Viteza este negativă, dacă și numai dacă mobilul se mișcă în sensul negativ al axei.*

Dacă  $v(t_0) = 0$  și dacă înainte de  $t_0$  și după  $t_0$  viteza are semne diferite, atunci în momentul  $t$  mobilul își schimbă sensul mișcării (în acest moment mobilul „se întoarce”).

Dacă  $v(t_0) = 0$  și dacă viteza are același semn înainte și după  $t_0$ , mobilul are un moment de oprire în punctul  $s_0 = f(t_0)$  după care își continuă mișcarea în același sens ca și mai înainte.

## 2. Accelerația în mișcarea rectilinie

„Viteza de variație” a vitezei  $v$  cu care se mișcă mobilul se numește *accelerație*. Așadar :

*Accelerația în mișcarea rectilinie este derivata vitezei în raport cu timpul sau derivata a doua a spațiului în raport cu timpul.*

Pentru accelerăție folosim litera  $a$ :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Dacă accelerăția este constantă, spunem că mișcarea este *uniform accelerată*.

*Mișcarea mobilui este uniform accelerată dacă și numai dacă legea de mișcare este de forma  $s = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ .*

Într-adevăr, dacă accelerăția este constantă  $a \equiv A$ , atunci  $v = At + \beta$  și deci  $s = \frac{1}{2}At^2 + \beta t + \gamma$ .

Reciproc, dacă  $s = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ , atunci  $v = 2\alpha t + \beta$ , deci  $a = 2\alpha = \text{ct.}$

*Mișcarea mobilului este uniformă dacă și numai dacă accelerăția este nulă.*

În adevăr, mișcarea este uniformă,  $s = \alpha t + \beta$ , dacă și numai dacă viteza este constantă,  $v = \alpha = \text{ct.}$ , deci dacă și numai dacă accelerăția este nulă,  $a = v' = 0$ .

Un exemplu important de mișcare uniform accelerată este căderea corporilor în vid, în care legea de mișcare este :

$$s = \frac{1}{2} gt^2.$$

Accelerația mișcării este egală cu accelerația gravitației  $g$ .

### 3. Viteza și accelerația unghiulară

Să considerăm un mobil  $M$  care se mișcă pe o traiectorie circulară (fig. 106). Poziția mobilului în fiecare moment  $t$  este perfect determinată de unghiul la centru  $\alpha$  format de raza  $OM$  cu o dreaptă fixă  $OA$ , măsurat în sens trigonometric. Așadar, mișcarea mobilului este dată de o ecuație  $\alpha = f(t)$ .

Unghiul la centru descris de mobil, în intervalul de timp dintre un moment  $t_0$  și un alt moment  $t$ , este  $f(t) - f(t_0)$ .  
Raportul

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

se numește viteza unghiulară medie a mobilului în intervalul de timp de la  $t_0$  la  $t$ . Limita

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

(dacă există și este finită) se numește viteza unghiulară a mobilului în momentul  $t_0$ . Așadar :

Viteza unghiulară în mișcarea circulară este derivata unghiului la centru, în raport cu timpul.

Dacă viteza unghiulară este constantă, spunem că mișcarea circulară este uniformă.

Derivata a doua a unghiului la centru într-o mișcare circulară se numește acceleratie unghiulară.

Mișcarea circulară este uniformă dacă și numai dacă acceleratia unghiulară este nulă.

### 4. Debitul unui lichid

Să considerăm un lichid în scurgere printr-un tub. Să notăm cu  $Q(t)$  cantitatea de lichid care trece printr-o secțiune a tubului, în intervalul de timp  $t$ , începînd de la un anumit moment de referință, pe care-l notăm cu 0.

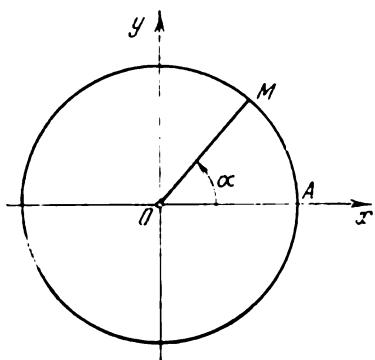


Fig. 106.

Diferența  $Q(t) - Q(t_0)$  exprimă cantitatea de lichid scursă între momentele  $t_0$  și  $t$ .

Dacă în intervale de timp egale se scurg cantități de lichid egale, se spune că scurgerea lichidului are debit constant.

În acest caz se numește debit cantitatea de lichid scursă în unitatea de timp.

Dacă debitul lichidului nu este constant, considerăm debitul mediu

$$\frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$$

în intervalul de timp de la  $t_0$  la  $t$ . Limita

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0} = Q'(t_0)$$

se numește debitul scurgerii lichidului în momentul  $t_0$ . Așadar :

*Debitul este derivata cantității de lichid în raport cu timpul.*

## 5. Intensitatea curentului electric

Un curent electric care trece printr-un conductor se poate asemula cu un lichid în scurgere printr-o conductă. Putem vorbi și în acest caz de cantitatea de electricitate  $Q(t)$  scursă prin conductor într-un timp  $t$ , începând de la un anumit moment de referință.

Putem vorbi de asemenea de debitul de electricitate. Debitul de electricitate se numește intensitatea curentului electric. Așadar :

*Intensitatea curentului electric este derivata cantității de electricitate în raport cu timpul.*

## 6. Densitatea unei repartiții liniare de masă

Problema definirii densității unei bare liniare a fost pusă, la începutul acestui capitol, ca una din problemele ce conduc la noțiunea de derivată :

*Densitatea unei repartiții liniare de masă este derivata masei în raport cu lungimea.*

## Capitolul VII

# INTEGRAREA

### § 1. Multimi măsurabile în sensul lui Jordan

#### 1. Multimi pe dreaptă măsurabile Jordan

Vom nota cu  $\mathcal{P}$  clasa multimilor care sunt *reuniuni finite de intervale mărginite* (închise, deschise sau semideschise). Se verifică imediat că  $\mathcal{P}$  are următoarele proprietăți :

- 1) Reuniunea a două sau mai multe multimi (în număr finit) din  $\mathcal{P}$  este tot o mulțime din  $\mathcal{P}$ .
- 2) Diferența a două multimi din  $\mathcal{P}$  este tot o mulțime din  $\mathcal{P}$ .

(Într-adevăr, se observă că diferența a două intervale este vidă, un interval, sau o reuniune de două intervale.)

Clasa  $\mathcal{P}$  a reuniunilor finite de intervale mărginite este un *clan*\*. Să observăm că orice mulțime  $P \subseteq \mathcal{P}$  se poate pune sub forma reuniunii

\* Fie  $E$  o mulțime. O clasă  $\mathcal{X}$  nevidă de părți ale lui  $E$  se numește clan, dacă reuniunea  $A \cup B$  și diferența  $A - B$  a două multimi  $A$  și  $B$  din  $\mathcal{X}$  aparțin lui  $\mathcal{X}$ . Rezultă atunci că intersecția  $A \cap B$  a două multimi  $A, B \in \mathcal{X}$  aparține lui  $\mathcal{X}$  deoarece  $A \cap B = A - (A - B)$ . Prin inducție completă se arată că reuniunea și intersecția unei familii finite de părți din  $\mathcal{X}$  aparțin lui  $\mathcal{X}$ .

O funcție  $m: \mathcal{X} \rightarrow X$  definită pe un clan  $\mathcal{X}$  cu valori într-un spațiu vectorial  $X$  se numește *funcție aditivă* de mulțime, dacă  $A, B \in \mathcal{X}$  și  $A \cap B = \emptyset$  implică  $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ . Funcțiile aditive de mulțime se numesc *măsuri aditive* sau, mai simplu, *măsuri*.

O măsură  $\mu: \mathcal{X} \rightarrow R$  cu valori reale se numește *măsură reală*; dacă în plus  $\mu(A) \geq 0$  pentru orice  $A \in \mathcal{X}$ ,  $\mu$  se numește *măsură pozitivă*. Din definiția măsurii rezultă următoarele

- proprietăți : (i)  $m\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n m(A_i)$ , dacă mulțimile  $A_i$  sunt disjuncte două cîte două.
- (ii)  $m(A - B) = m(A) - m(B)$ , dacă  $B \subset A$  ( $m$  este *subtractivă*).
- O măsură pozitivă  $\mu$  are în plus următoarele proprietăți :
- (iii)  $\mu(A) \leq \mu(B)$ , dacă  $A \subset B$  ( $\mu$  este crescătoare).
- (iv)  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ , oricare ar fi mulțimile  $A_i$  din  $\mathcal{X}$  ( $\mu$  este *subaditivă*).

unei familii  $(I_i)_{1 \leq i \leq n}$  de intervale care nu au în comun, două cîte două, decît cel mult o extremitate. Dacă notăm cu  $m(I)$  lungimea unui interval, se definește *măsură* sau *lungimea*  $m(P)$  a mulțimii  $P$  din  $\mathcal{P}$  prin egalitatea

$$m(P) = \sum_{i=1}^n m(I_i).$$

Se demonstrează că  $m(P)$  nu depinde de familia  $(I_i)_{1 \leq i \leq n}$  de intervale care nu au în comun decît cel mult extremități și a căror reuniune este  $P$ , ci depinde numai de  $P$ .

Funcția reală  $m : \mathcal{P} \rightarrow R$  definită pe clanul  $\mathcal{P}$  al reuniunilor finite de intervale mărginite, are următoarele proprietăți:

- 1)  $m(P) \geq 0$ , oricare ar fi  $P \in \mathcal{P}$ ;
- 2)  $m(P \cup Q) = m(P) + m(Q)$ , dacă  $P \cap Q = \emptyset$ .

Lungimea  $m$  este o *măsură aditivă* pe clasa  $\mathcal{P}$ .

Rezultă atunci că măsură  $m$  are, încă, următoarele proprietăți:

- 3)  $m(Q - P) = m(Q) - m(P)$ , dacă  $P \subset Q$ ;
- 4)  $m(P) \leq m(Q)$ , dacă  $P \subset Q$ ;
- 5)  $m(P \cup Q) \leq m(P) + m(Q)$ , oricare ar fi  $P, Q \in \mathcal{P}$ .

Vom căuta acum să extindem noțiunea de lungime (sau măsură) de la clasa  $\mathcal{P}$  la o clasă mai largă de mulțimi de pe dreaptă, pe care le vom numi *mulțimi măsurabile în sensul lui Jordan*, sau, mai simplu, *mulțimi măsurabile Jordan*. Vom arăta că această clasă de mulțimi este tot un clan și că, pe acest clan, lungimea păstrează proprietățile sale fundamentale de a fi pozitivă și aditivă.

Vom defini mai întîi, pentru orice mulțime mărginită, o lungime interioară și o lungime exterioară.

Fie  $A \subset R$  o mulțime mărginită oarecare.

Există totdeauna reuniuni de intervale  $P \subset A$  (eventual  $P = \emptyset$  sau  $P$  format dintr-un singur punct) și reuniuni de intervale  $Q \supset A$ , care acoperă pe  $A$ .

Oricare ar fi reuniunea de intervale  $P \subset A$  și reuniunea de intervale  $Q \supset A$ , avem  $P \subset Q$ , deci  $m(P) \leq m(Q)$ . Să notăm

$$m_i(A) = \sup_{P \subset A} m(P), \quad m_e(A) = \inf_{Q \supset A} m(Q).$$

Numerele  $m_i(A)$  și  $m_e(A)$  se numesc, respectiv, *măsură* (sau lungimea) *interioară* și *măsură* (sau lungimea) *exterioară* – în sensul lui Jordan – a lui  $A$ , și avem

$$m(P) \leq m_i(A) \leq m_e(A) \leq m(Q)$$

oricare ar fi mulțimile  $P$  și  $Q$  din  $\mathcal{P}$  astfel ca  $P \subset A \subset Q$ .

**D e f i n i ţ i e.** Spunem că o mulțime mărginită  $A$  are lungime, sau este măsurabilă Jordan, dacă măsura interioară și măsura exterioară sunt egale :

$$m_i(A) = m_e(A).$$

Dacă  $A$  este măsurabilă, valoarea comună a măsurii interioare și a măsurii exterioare se numește măsura Jordan (sau lungimea) mulțimii  $A$  și se notează  $m(A)$  :

$$m(A) = m_i(A) = m_e(A).$$

Urmează că dacă  $A$  este măsurabilă, avem  $m(P) \leq m(A) \leq m(Q)$  oricare ar fi reuniunile de intervale  $P$  și  $Q$  din  $\mathcal{P}$ , astfel ca  $P \subset A \subset Q$ . Rezultă de asemenea că  $m(A) \geq 0$ .

Dacă  $A$  este o reuniune finită de intervale mărginite, din  $\mathcal{P}$ , putem lua în particular  $P = A$  și  $Q = A$  și atunci

$$m_i(A) = \sup_{P \subset A} m(P) = m(A) \text{ și } m_e(A) = \inf_{Q \supset A} m(Q) = m(A),$$

deci  $m_i(A) = m_e(A) = m(A)$ , adică reuniunile finite de intervale mărginite sunt măsurabile, iar măsura lor, considerate ca mulțimi măsurabile, este egală cu lungimea lor definită anterior.

Clasa  $\mathcal{M}$  a mulțimilor măsurabile conține deci clasa  $\mathcal{P}$ . Vom arăta că  $\mathcal{M}$  este un clan și că măsura  $m$  este aditivă pe  $\mathcal{M}$ .

**O b s e r v a ţ i e.** Măsura interioară a unei mulțimi poate fi diferită de măsura sa exterioară.

**Exemplu.** Fie  $A$  mulțimea punctelor raționale din intervalul  $[0, 1]$ . Mulțimea  $A$  nu are nici un punct interior, deci singurele intervale conținute în  $A$  sunt punctele. Urmează că orice reuniune finită de intervale  $P \subset A$  este o mulțime finită de puncte, deci are lungimi nule și deci

$$m_i(A) = \sup_{P \subset A} m(P) = 0.$$

Orice reuniune finită de intervale  $Q \supset A$  conține intervalul  $[0, 1]$ , deci  $m(Q) \geq m([0, 1]) = 1$  și deci  $m_e(A) = \inf_{Q \supset A} m(Q) = 1$ .

Avem deci  $m_i(A) < m_e(A)$ . Mulțimea  $A$  nu este măsurabilă Jordan. Această mulțime nu are lungime, în sensul definiției de mai sus.

Vom da acum unele criterii de măsurabilitate ; enunțurile acestor criterii pot fi luate ca definiții ale măsurabilității, echivalente cu definiția de mai sus.

**P r o p o z i ţ i a 1.** O mulțime mărginită  $A \subset R$  este măsurabilă Jordan, dacă și numai dacă pentru orice număr  $\epsilon > 0$  există o reuniune finită de intervale mărginite  $P_\epsilon \subset A$  și o reuniune finită de intervale mărginite  $Q_\epsilon \supset A$  astfel ca

$$m(Q_\epsilon) - m(P_\epsilon) < \epsilon.$$

Să presupunem întâi că  $A$  este măsurabilă, deci

$$m(A) = \sup_{P \subset A} m(P) = \inf_{Q \supset A} m(Q).$$

Fie  $\varepsilon > 0$ . Există două reuniuni finite de intervale  $P_\varepsilon$  și  $Q_\varepsilon$  din  $\mathcal{P}$  astfel ca  $P_\varepsilon \subset A \subset Q_\varepsilon$  și

$$m(A) < m(P_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$m(Q_\varepsilon) < m(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Adunând membru cu membru aceste inegalități, obținem

$$m(Q_\varepsilon) < m(P_\varepsilon) + \varepsilon,$$

adică

$$m(Q_\varepsilon) - m(P_\varepsilon) < \varepsilon,$$

Reciproc, să presupunem că pentru fiecare  $\varepsilon > 0$  există două reuniuni finite  $P_\varepsilon$  și  $Q_\varepsilon$  din  $\mathcal{P}$  astfel ca  $P_\varepsilon \subset A \subset Q_\varepsilon$  și  $m(Q_\varepsilon) - m(P_\varepsilon) < \varepsilon$  și să arătăm că  $A$  este măsurabilă. Avem

$$m(P_\varepsilon) \leq m_i(A) \leq m_e(A) \leq m(Q_\varepsilon),$$

de unde

$$m_e(A) - m_i(A) \leq m(Q_\varepsilon) - m(P_\varepsilon) < \varepsilon,$$

adică  $m_e(A) - m_i(A) \leq \varepsilon$ . Deoarece  $\varepsilon > 0$  este arbitrar, rezultă că  $m_e(A) - m_i(A) = 0$ , adică  $m_i(A) = m_e(A)$ , deci  $A$  este măsurabilă.

**Propozitia 2.** Dacă  $A$  este o mulțime măsurabilă Jordan și dacă pentru un anumit număr  $I$  avem  $m(P) \leq I \leq m(Q)$ , oricare ar fi reuniunile finite de intervale  $P$  și  $Q$  din  $\mathcal{P}$ , astfel ca  $P \subset A \subset Q$ , atunci  $I = m(A)$ .

Într-adevăr, din inegalitatea  $m(P) \leq I \leq m(Q)$ , deducem  $\sup_{P \subset A} m(P) \leq I \leq \inf_{Q \supset A} m(Q)$ , adică  $m_i(A) \leq I \leq m_e(A)$ ; deoarece  $A$  este măsurabilă, avem  $m_i(A) = m_e(A) = m(A)$ , de unde  $I = m(A)$ .

**Propozitia 3.** O mulțime mărginită  $A \subset R$  este măsurabilă Jordan dacă și numai dacă există două șiruri  $(P_n)$  și  $(Q_n)$  de reuniuni finite de intervale mărginite, astfel încât  $P_n \subset A \subset Q_n$  pentru fiecare  $n$  și astfel ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} m(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(Q_n)$ . Limita comună este egală cu măsura mulțimii  $A$ :

$$m(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(Q_n).$$

Să presupunem întâi că  $A$  este măsurabilă. Luând  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ), există reuniuni finite de intervale mărginite  $P_n$  și  $Q_n$  astfel încât  $P_n \subset A \subset Q_n$  și

$$m(Q_n) - m(P_n) < \frac{1}{n}.$$

Pe de altă parte

$$m(P_n) \leq m(A) \leq m(Q_n).$$

Rezultă atunci că

$$m(A) - m(P_n) \leq m(Q_n) - m(P_n) < \frac{1}{n}$$

$$m(Q_n) - m(A) \leq m(Q_n) - m(P_n) < \frac{1}{n}$$

și deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} [m(A) - m(P_n)] = 0$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} [m(Q_n) - m(A)] = 0$ , adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(Q_n) = m(A).$$

Reciproc, să presupunem că există două siruri  $(P_n)$  și  $(Q_n)$  de reuniuni finite de intervale mărginite astfel ca  $P_n \subset A \subset Q_n$  pentru fiecare  $n$  și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(Q_n).$$

Deoarece

$$m(P_n) \leq m_i(A) \leq m_e(A) \leq m(Q_n)$$

pentru orice  $n$ , rezultă că

$$m_i(A) = m_e(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(Q_n),$$

deci  $A$  este măsurabilă Jordan.

**Propozitie 4.** Dacă  $A_1$  și  $A_2$  sunt multimi măsurabile Jordan, atunci  $A_1 \cup A_2$  și  $A_1 - A_2$  sunt măsurabile Jordan. Dacă, în plus  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  atunci

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2).$$

Fie  $\epsilon > 0$ . Deoarece  $A_1$  și  $A_2$  sunt măsurabile, există patru reuniuni finite de intervale mărginite  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$ , astfel ca

$$P_1 \subset A_1 \subset Q_1, \quad P_2 \subset A_2 \subset Q_2$$

și

$$m(Q_1 - P_1) < \frac{\epsilon}{2}, \quad m(Q_2 - P_2) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Să arătăm întâi că  $A_1 \cup A_2$  este măsurabilă. Avem

$$P_1 \cup P_2 \subset A_1 \cup A_2 \subset Q_1 \cup Q_2$$

și

$$(Q_1 \cup Q_2) - (P_1 \cup P_2) = (Q_1 \cup Q_2) \cap C(P_1 \cup P_2) = (Q_1 \cup Q_2) \cap \\ \cap (CP_1 \cap CP_2) = (Q_1 \cap CP_1 \cap CP_2) \cup (Q_2 \cap CP_1 \cap CP_2) \subset (Q_1 \cap CP_1) \cup \\ \cup (Q_2 \cap CP_2) = (Q_1 - P_1) \cup (Q_2 - P_2)$$

deci

$$m[(Q_1 \cup Q_2) - (P_1 \cup P_2)] \leq m(Q_1 - P_1) + m(Q_2 - P_2) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

adică  $A_1 \cup A_2$  este măsurabilă.

Să arătăm că  $A_1 - A_2$  este măsurabilă. Avem

$$P_1 - Q_2 \subset A_1 - A_2 \subset Q_1 - P_2$$

și

$$(Q_1 - P_2) - (P_1 - Q_2) = (Q_1 \cap CP_2) \cap C(P_1 \cap CQ_2) = (Q_1 \cap CP_2) \cap \\ \cap (CP_1 \cup Q_2) = (Q_1 \cap CP_2 \cap CP_1) \cup (Q_1 \cap CP_2 \cap Q_2) \subset (Q_1 \cap CP_1) \cup \\ \cup (Q_2 \cap CP_2) = (Q_1 - P_1) \cup (Q_2 - P_2)$$

de unde

$$m[(Q_1 - P_2) - (P_1 - Q_2)] \leq m(Q_1 - P_1) + m(Q_2 - P_2) < \epsilon$$

adică  $A_1 - A_2$  este măsurabilă.

Să presupunem acum că  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  și să arătăm că

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2).$$

Fie  $(P_1^n), (Q_1^n), (P_2^n), (Q_2^n)$  patru siruri de reuniuni finite de intervale mărginite astfel încât

$$P_2^n \subset A_1 \subset Q_1^n \text{ și } P_2^n \subset A_2 \subset Q_2^n, \text{ pentru orice } n \in N,$$

$$\text{și } \lim_{n \rightarrow \infty} m(P_1^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(Q_1^n) = m(A_1), \lim_{n \rightarrow \infty} m(P_2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(Q_2^n) = m(A_2).$$

Deoarece  $A_1$  și  $A_2$  sunt disjuncte și  $P_1^n \subset A_1, P_2^n \subset A_2$ , avem  $P_1^n \cap P_2^n = \emptyset$  pentru fiecare  $n$ , deci

$$m(P_1^n \cup P_2^n) = m(P_1^n) + m(P_2^n).$$

Pe de altă parte,

$$m(Q_1^n \cup Q_2^n) \leq m(Q_1^n) + m(Q_2^n).$$

Atunci

$$m(P_1^n) + m(P_2^n) \leq m(A_1 \cup A_2) \leq m(Q_1^n) + m(Q_2^n).$$

Trecind la limită în aceste inegalități obținem

$$m(A_1) + m(A_2) \leq m(A_1 \cup A_2) \leq m(A_1) + m(A_2),$$

adică

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2).$$

O b s e r v a t i e . Deoarece  $\mathcal{M}$  este un clan, rezultă că intersecția  $A \cap B$  a două mulțimi măsurabile  $A$  și  $B$ , este tot o mulțime măsurabilă.

Ca și pentru reuniunile finite de intervale mărginite, măsura mulțimilor măsurabile Jordan are, încă, următoarele proprietăți :

$$1) \quad m(A_1 \cup A_2) \leq m(A_1) + m(A_2);$$

$$2) \quad m\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n m(A_i);$$

$$3) \quad m\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n m(A_i), \text{ dacă mulțimile } A_i \text{ sunt disjuncte două cîte două;}$$

$$4) \quad m(A_1) \leq m(A_2), \text{ dacă } A_1 \subset A_2;$$

$$5) \quad m(A_1 - A_2) = m(A_1) - m(A_2), \text{ dacă } A_2 \subset A_1.$$

Putem da acum criterii de măsurabilitate cu ajutorul mulțimilor măsurabile însăși. De aici va rezulta, în particular, că aplicind mulțimilor măsurabile procedeul de extensiune aplicat reuniunilor finite de intervale mărginite rămînem tot în clasa mulțimilor măsurabile Jordan. (Se poate depăși această clasă aplicind alt procedeu, de exemplu, folosind reuniuni infinite de intervale mărginite; se obțin atunci mulțimile măsurabile în sensul lui Lebesgue.)

**P r o p o z i t i a 5.** Fie  $M \subset R$  o mulțime mărginită. Dacă, pentru orice număr  $\epsilon > 0$ , există două mulțimi măsurabile Jordan  $A$  și  $B$  astfel ca  $A \subset M \subset B$  și  $m(B) - m(A) < \epsilon$  atunci  $M$  este măsurabilă Jordan.

Fie  $\epsilon > 0$  și fie  $A$  și  $B$  două mulțimi măsurabile astfel ca  $A \subset M \subset B$  și  $m(B) - m(A) < \frac{\epsilon}{2}$ . Deoarece

$$\sup_{P \subset A} m(P) = m(A) \text{ și } \inf_{Q \supset B} m(Q) = m(B),$$

există o reuniune finită de intervale mărginite  $P \subset A$  și o reuniune finită de intervale mărginite  $Q \supset B$ , astfel ca

$$m(A) - m(P) < \frac{\epsilon}{4}, \quad m(Q) - m(B) < \frac{\epsilon}{4}.$$

Atunci  $P \subset M \subset Q$  și

$$m(Q) - m(P) = m(Q) - m(B) + m(B) - m(A) + m(A) - m(P) < \frac{\epsilon}{2} +$$

$$+ \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$$

deci  $M$  este măsurabilă.

**C o r o l a r.** Dacă există două şiruri  $(A_n)$  și  $(B_n)$  de multimi măsurabile Jordan astfel ca  $A_n \subset M \subset B_n$  pentru orice  $n \in N$  și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(B_n)$$

atunci  $M$  este măsurabilă și măsura sa  $m(M)$  este egală cu limita comună a celor două şiruri de măsuri.

Avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} [m(B_n) - m(A_n)] = 0$ , deci pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $N(\varepsilon)$ , astfel încât, pentru orice  $n > N(\varepsilon)$  să avem

$$m(B_n) - m(A_n) < \varepsilon,$$

deci  $M$  este măsurabilă. Atunci

$$m(A_n) \leq m(M) \leq m(B_n)$$

și deci, trecând la limită,

$$m(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(B_n).$$

## 2. Multimi de măsură Jordan nulă

Multimile care au măsura Jordan nulă prezintă un interes deosebit. Reamintim întâi că avem totdeauna

$$0 \leq m_i(A) \leq m_\epsilon(A)$$

pentru orice mulțime  $A \subset R$ . Rezultă de aici că:

*Orice mulțime cu măsura exterioară nulă este măsurabilă Jordan și are măsură nulă.*

De aceea nu vom mai spune mulțime măsurabilă Jordan de măsură nulă, ci, mai simplu, mulțime de măsură Jordan nulă.

**P r o p o z i t i a 6.** O mulțime mărginită  $A \subset R$  este de măsură Jordan nulă dacă și numai dacă, pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există o familie finită de intervale deschise mărginite  $I_1, I_2, \dots, I_n$  care acoperă pe  $A$ , astfel încât

$$\sum_{i=1}^n m(I_i) < \varepsilon.$$

Să presupunem întâi că  $m(A) = 0$ , deci  $m_\epsilon(A) = 0$ , și fie  $\varepsilon > 0$ . Deoarece

$$m_\epsilon(A) = \inf_{Q \supset A} m(Q),$$

unde  $Q$  sunt reuniuni finite de intervale mărginite, există o asemenea mulțime  $Q \supset A$  cu  $m(Q) < \frac{\epsilon}{2}$ . Să scriem  $Q$  sub formă de reuniune finită de intervale mărginite disjuncte:

$$Q = \bigcup_{i=1}^n J_i.$$

Avem deci

$$\sum_{i=1}^n m(J_i) = m(Q) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Fie căruia interval  $J_i$ , cu extremitățile  $a_i$  și  $b_i$ , să-i adăugăm intervale deschise,  $\left(a_i - \frac{\epsilon}{8^n}, a_i + \frac{\epsilon}{8^n}\right)$  și  $\left(b_i - \frac{\epsilon}{8^n}, b_i + \frac{\epsilon}{8^n}\right)$  fiecare de lungime  $\frac{\epsilon}{8^n}$ . Obținem un interval deschis  $I_i$ , a cărui lungime verifică inegalitatea

$$m(I_i) \leq m(J_i) + \frac{\epsilon}{4^n} + \frac{\epsilon}{4^n} \leq m(J_i) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Familia de intervale mărginite deschise  $I_1, I_2, \dots, I_n$  acoperă pe  $A$  și

$$\sum_{i=1}^n m(I_i) \leq \sum_{i=1}^n \left(m(J_i) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) = \sum_{i=1}^n m(J_i) + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Reciproc, dacă pentru orice  $\epsilon > 0$ , există o familie finită de intervale mărginite (deschise sau nu)  $I_1, I_2, \dots, I_n$  care acoperă pe  $A$ , cu  $\sum_{i=1}^n m(I_i) < \epsilon$ , rezultă că  $m_\epsilon(A) < \epsilon$  pentru orice  $\epsilon > 0$ , deci  $m_\epsilon(A) = 0$ , și deci  $A$  este de măsură Jordan nulă.

Proprietățile mulțimilor de măsură Jordan nulă sunt următoarele:

**1) Dacă  $A$  este de măsură Jordan nulă, atunci orice submulțime  $B \subset A$  este de măsură Jordan nulă.**

Într-adevăr,  $m_\epsilon(B) \leq m_\epsilon(A) = 0$ .

**2) Dacă  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sunt de măsură Jordan nulă, atunci reuniunea lor este de măsură Jordan nulă.**

Într-adevăr, reuniunea lor este măsurabilă și

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n m(A_i) = 0.$$

Se poate da acum un criteriu de măsurabilitate Jordan, cu ajutorul mulțimilor de măsură nulă.

**Propoziția 7.** O mulțime mărginită  $A \subset E$  este măsurabilă Jordan, dacă și numai dacă frontieră sa are măsura Jordan nulă.

Să presupunem întâi că  $A$  este măsurabilă și fie  $\epsilon > 0$ . Există două reuniuni finite de intervale mărginute  $P$  și  $Q$  astfel încât  $P \subset A \subset Q$  și  $m(Q) - m(P) < \epsilon$ . Să notăm cu  $\dot{P}$  interiorul mulțimii  $P$  (obținut din  $P$  prin înălțarea extremităților intervalelor ce compun pe  $P$ ) și cu  $\bar{Q}$  aderența lui  $Q$  (obținută din  $Q$  prin adăugarea extremităților intervalelor ce compun pe  $Q$ ). Evident,  $\dot{P} \subset P$  și  $Q \subset \bar{Q}$  deci  $\dot{P} \subset A \subset \bar{Q}$ , iar  $m(\dot{P}) = m(P)$  și  $m(\bar{Q}) = m(Q)$  (deoarece punctele adăugate sau înălțurate au măsura nulă), deci  $M(\bar{Q}) - m(\dot{P}) < \epsilon$ , sau

$$m(\bar{Q} - \dot{P}) < \epsilon.$$

Deoarece  $\dot{P} \subset A$  și  $\dot{P}$  este deschisă, nici un punct frontieră al mulțimii  $A$  nu aparține lui  $\dot{P}$ , deci  $\text{Fr } A \subset \complement \dot{P}$ . Pe de altă parte  $A \subset \bar{Q}$  deci  $\text{Fr } A \subset \bar{Q}$ . Deducem atunci că  $\text{Fr } A \subset \bar{Q} \cap \complement \dot{P} = \bar{Q} - \dot{P}$ , deci  $\bar{Q} - \dot{P}$  este o reuniune finită de intervale mărginute, care conține mulțimea  $\text{Fr } A$ .

Deoarece  $m(\bar{Q} - \dot{P}) < \epsilon$ , rezultă că  $m_{\epsilon}(\text{Fr } A) < \epsilon$ ; și fiind arbitrar deducem că  $m_0(\text{Fr } A) = 0$ , deci  $m(\text{Fr } A) = 0$ .

Reciproc, să presupunem că  $m(\text{Fr } A) = 0$  și fie  $\epsilon > 0$ . Există o reuniune finită de intervale mărginute  $S \supset \text{Fr } A$ , astfel ca  $m(S) < \epsilon$ .

Să notăm cu  $P$  mulțimea punctelor din  $A$  care nu aparțin mulțimii  $S$ , adică  $P = A - S$ . Avem  $P \subset A$  și  $P \cap S = \emptyset$ . Dar mulțimea  $P$  este o reuniune finită de intervale mărginute, având ca extremități o parte din extremitățile intervalelor din  $S$ . Într-adevăr, mulțimea  $A - S$  nu mai are nici un punct frontieră, deci toate punctele sale îi sunt puncte interioare, și o dată cu un punct  $x$  conține un întreg interval  $\dot{I}_x$ .

Mulțimea  $Q = P \cup S$  este o reuniune finită de intervale mărginute și  $A \subset Q$ , deoarece

$$Q = P \cup S = (A - S) \cup S = (A \cap \complement S) \cup S = A \cup S \supset A.$$

Pe de altă parte, deoarece  $P \cap S = \emptyset$ , avem  $m(P \cup S) = m(P) + m(S)$  deci  $m(Q) - m(P) = m(P \cup S) - m(P) = m(S) = m(S) - m(P) = m(S) < \epsilon$  adică  $A$  este măsurabilă.

*Exemplu.* 1) Orice mulțime formată dintr-un singur punct,  $\{x\}$ , are măsură Jordan nulă, deoarece pentru orice  $\epsilon > 0$ , intervalul  $\left(a - \frac{\epsilon}{2}, a + \frac{\epsilon}{2}\right)$ , acoperă pe  $\{x\}$  și are lungimea  $< \epsilon$ .

2) O mulțime finită  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  are măsura Jordan nulă, deoarece este reuniunea mulțimilor  $\{a_1\}, \{a_2\} \dots, \{a_n\}$ .

3) Se poate arăta că mulțimea triadică a lui Cantor este perfectă (inchisă și fără puncte izolate), nu este numărabilă (este echivalentă cu mulțimea tuturor numerelor reale) și are măsura Jordan nulă.

Mulțimea triadică a lui Cantor se obține astfel: Se împarte intervalul  $[0, 1]$  în trei părți egale și se scoate interiorul segmentului de la mijloc. Fiecare din cele două intervale rămase se împarte în cîte trei părți egale și se scoad interioarele intervalelor de la mijloc. Fiecare din cele patru părți rămase se împarte în cîte trei părți egale și se îndepărtează interioarele intervalelor de la mijloc, și așa mai departe, indefinit.

4) Mulțimile numărabile nu au, în general, măsura Jordan nulă. Într-adevăr, în general, aceste mulțimi nici nu sunt măsurabile Jordan, cum este de exemplu mulțimea punctelor rationale din  $[0, 1]$ .

### 3. Mulțimi neglijabile

După cum am specificat mai înainte, putem depăși clasa mulțimilor măsurabile Jordan, dacă folosim, nu reuniuni finite de intervale mărginite, ci reuniuni numărabile de asemenea intervale. Se obțin astfel mulțimile măsurabile (în sensul lui) Lebesgue.

Noi vom avea nevoie numai de mulțimile de măsură Lebesgue nulă, care vor fi numite, de asemenea, mulțimi neglijabile.

Pentru a simplifica scrisul, vom da următoarea definiție, care, de altfel, va fi reluată în capitolul despre serii. Dacă  $(\alpha_n)$  este un sir de numere  $\geq 0$ , atunci limita  $\alpha$  (finită sau  $+\infty$ ) a șirului crescător al sumelor  $\left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \right)_{1 \leq n < +\infty}$  va fi numită suma numerelor  $(\alpha_n)_{1 \leq n < +\infty}$  și vom scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha.$$

Așadar,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

**Definiție.** Spunem că o mulțime  $A \subset R$  (mărginită sau nemărginită) este de măsură Lebesgue nulă, sau neglijabilă, dacă pentru orice număr  $\epsilon > 0$  există un șir  $(I_n)$  de intervale deschise care acoperă pe  $A$ , astfel încît

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \epsilon.$$

Unele din intervalele  $I_n$  pot fi, eventual, vide. Pentru intervalele vide  $I_n$  avem  $m(I_n) = 0$ .

Din propoziția 6 deducem că:

*Orice mulțime de măsură Jordan nulă este neglijabilă.*

Există însă mulțimi neglijabile care nu sunt măsurabile Jordan. De exemplu, mulțimea punctelor raționale din  $[0,1]$  nu este măsurabilă Jordan, dar, după cum va rezulta mai jos, este neglijabilă, fiind numărabilă.

Proprietățile mulțimilor neglijabile sunt următoarele :

1) Dacă  $A$  este neglijabilă, atunci orice submulțime  $B \subset A$  este neglijabilă.

2) Dacă  $(A_n)$  este un sir de mulțimi neglijabile, atunci reuniunea lor este o mulțime neglijabilă.

Să demonstrăm întâi prima proprietate. Deoarece  $A$  este neglijabilă, pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un sir  $(I_n)$  de intervale deschise care acoperă pe  $A$ , deci și pe  $B$ , astfel încât

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \varepsilon.$$

Urmează că  $B$  este de asemenea neglijabilă.

Să demonstrăm a doua proprietate. Fie  $\varepsilon > 0$ . Deoarece mulțimile  $A_n$  sunt neglijabile, pentru fiecare  $n$  există un sir  $(I_{np})_{1 \leq p < +\infty}$  de intervale deschise care acoperă pe  $A_n$ , astfel încât

$$\sum_{p=1}^{\infty} m(I_{np}) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Atunci sirul dublu  $(I_{np})$  de intervale deschise acoperă reuniunea  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  și suma lungimilor acestor intervale este

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} m(I_{np}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

deci  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  este neglijabilă.

*Exemplu.* 1) Orice mulțime formată dintr-un număr finit de puncte este neglijabilă, deoarece are măsură Jordan nulă.

2) Orice mulțime numărabilă  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$  este neglijabilă, deoarece este reuniunea sirului de mulțimi neglijabile  $A_n = \{a_n\}$ .

Rezultă că mulțimea  $N$  a numerelor naturale și mulțimea  $Q$  a numerelor raționale sunt neglijabile, deoarece sunt numărabile.

3) Există mulțimi infinite nenumărabile care sunt neglijabile. De exemplu mulțimea triadică a lui Cantor este neglijabilă, fiind de măsură Jordan nulă.

#### 4. Mulțimi plane măsurabile Jordan

Să considerăm planul  $R^2$  ca produs cartezian  $R \times R$  al dreptei reale ca ea însăși. Aceasta revine la a considera punctele din plan raportate la două axe rectangulare.

Vom considera apoi dreptunghiurile pline, care au laturile paralele cu axele de coordonate, putîndu-și conține una sau mai multe laturi, adică de forma

$$I_1 \times I_2 = \{(x, y) | x \in I_1, y \in I_2\}$$

unde  $I_1$  și  $I_2$  sunt intervale mărginite pe dreaptă, care-și pot conține sau nu una sau ambele extremități. Aria unui asemenea dreptunghi se definește prin egalitatea

$$s(I_1 \times I_2) = m(I_1) \cdot m(I_2).$$

Conform acestei definiții, punctele sau segmentele paralele cu una din axe sunt dreptunghiuri cu aria nulă. De asemenea, mulțimea vidă  $\emptyset \subset R^2$  este un dreptunghi cu aria nulă.

Vom nota cu  $\mathcal{P}$  clasa mulțimilor plane care sunt *reuniuni finite de dreptunghiuri cu laturile paralele cu axele*.

Se verifică imediat că  $\mathcal{P}$  este un clan :

- 1) *Reuniunea a două mulțimi din  $\mathcal{P}$  este tot o mulțime din  $\mathcal{P}$ ;*
- 2) *Diferența a două mulțimi din  $\mathcal{P}$  este tot o mulțime din  $\mathcal{P}$ .*

(Într-adevăr, diferența a două dreptunghiuri din  $\mathcal{P}$  este vidă, un dreptunghi, sau o reuniune de mai multe dreptunghiuri din  $\mathcal{P}$ .) Orice mulțime  $P$  din  $\mathcal{P}$  se poate pune sub forma reuniunii unei familii  $(D_i)_{1 \leq i \leq n}$  de dreptunghiuri din  $\mathcal{P}$  care n-au în comun două cîte două, decît cel mult cîte o latură :

$$P = \bigcup_{i=1}^n D_i.$$

Se definește măsura sau aria  $s(P)$  a lui  $P$  prin egalitatea

$$s(P) = \sum_{i=1}^n m(D_i).$$

Se demonstrează că aria  $s(P)$  depinde numai de  $P$ , și nu depinde de modul particular în care  $P$  se scrie ca reuniune de dreptunghiuri care n-au în comun decît cel mult laturi.

Aria s definită pe clanul  $\mathcal{P}$  este *pozitivă și aditivă*, este deci o *măsură*.

Vom căuta acum să extindem noțiunea de arie de la clasa  $\mathcal{P}$  la o clasă mai largă de mulțimi plane, care vor fi numite mulțimi măsurabile în sensul lui Jordan.

Fie  $A \subset R^2$  o mulțime mărginită oarecare. Se definesc aria (sau măsura) Jordan interioară  $s_i(A)$  și aria (sau măsura) Jordan exterioară  $s_e(A)$  prin egalitățile

$$s_i(A) = \sup_{P \subset A} s(P), \quad s_e(A) = \inf_{Q \supset A} s(Q)$$

unde marginea superioară se ia pentru toate mulțimile  $P \subset A$  din  $\mathcal{P}$ , iar marginea inferioară pentru toate mulțimile  $Q \supset A$  din  $\mathcal{P}$ .

**D e f i n i t i e .** Spunem că mulțimea mărginită  $A \subset R^2$  are arie Jordan sau este măsurabilă Jordan, dacă  $s_i(A) = s_e(A)$ . Dacă  $A$  este măsurabilă, se definește aria (sau măsura Jordan)  $s(A)$  a lui  $A$ , prin egalitatea

$$s(A) = s_i(A) = s_e(A).$$

Toate propozițiile relative la mulțimile măsurabile pe dreaptă rămân valabile și pentru mulțimi plane măsurabile, și cu aceleași demonstrații, înlocuind reuniunile finite de intervale mărginite, cu reuniuni finite de dreptunghiuri cu laturile paralele cu axele, iar lungimea  $m$  cu aria  $s$ .

**P r o p o z i t i a 1.** O mulțime mărginită  $A \subset R^2$  este măsurabilă Jordan dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există o reuniune finită de dreptunghiuri  $P_\varepsilon \subset A$  din  $\mathcal{P}$  și o reuniune finită de dreptunghiuri  $Q_\varepsilon \supset A$  din  $\mathcal{P}$  astfel ca  $s(Q_\varepsilon) - s(P_\varepsilon) < \varepsilon$ .

**P r o p o z i t i a 2.** O mulțime mărginită  $A \subset R^2$  este măsurabilă Jordan dacă și numai dacă există două siruri de reuniuni finite de dreptunghiuri  $(P_n)$  și  $(Q_n)$  din  $\mathcal{P}$  cu  $P_n \subset A \subset Q_n$  pentru fiecare  $n$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} s(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(Q_n)$ . În acest caz avem:

$$s(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(Q_n).$$

**P r o p o z i t i a 3.** Dacă  $A_1$  și  $A_2$  sunt măsurabile Jordan, atunci  $A_1 \cup A_2$  și  $A_1 - A_2$  sunt măsurabile Jordan. Dacă, în plus,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , atunci  $s(A_1 \cup A_2) = s(A_1) + s(A_2)$ .

Așadar, clasa  $\mathcal{M}$  a mulțimilor plane măsurabile Jordan este un clan, iar aria  $s$  este o măsură pe acest clan.

Se demonstrează că poligoanele pline și cercurile pline sunt mulțimi măsurabile, iar aria lor Jordan este egală cu aria lor obișnuită. Propoziția următoare arată că putem defini aria Jordan plecînd de la alte mulțimi măsurabile decît de la reuniunile finite de dreptunghiuri ; de exemplu, plecînd de la reuniuni finite de poligoane oarecare, sau segmente de cercuri.

**P r o p o z i t i a 4.** Fie  $M \subset R^2$  o mulțime mărginită. Dacă pentru orice  $\epsilon > 0$  există două mulțimi plane măsurabile  $A$  și  $B$  cu  $A \subset M \subset B$  și  $s(B) - s(A) < \epsilon$ , atunci  $M$  este măsurabilă Jordan.

**P r o p o z i t i a 5.** Dacă există două șiruri  $(A_n)$  și  $(B_n)$  de mulțimi plane măsurabile cu  $A_n \subset M \subset B_n$  pentru orice  $n$  și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(B_n)$$

atunci  $M$  este măsurabilă Jordan și

$$s(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(B_n).$$

Mulțimile  $A \subset R$  cu aria exterioară nulă,  $s_e(A) = 0$ , sunt mulțimile plane de arie (sau măsură) Jordan nulă. Orice submulțime a unei mulțimi de măsură nulă are de asemenea măsură nulă. Orice reuniune finită de mulțimi de măsură nulă are măsura Jordan nulă.

**P r o p o z i t i a 6.** O mulțime mărginită  $A \subset R^2$  este măsurabilă dacă și numai dacă frontiera sa are arie nulă.

Din această propoziție rezultă că poligoanele sunt măsurabile, deoarece frontiera lor este o linie poligonală, care are arie nulă.

## 5. Mulțimi măsurabile Jordan în spațiul $R^3$

Toate rezultatele enunțate pentru mulțimile măsurabile plane rămân adevărate și pentru mulțimile măsurabile în spațiu, dacă se înlocuiesc dreptunghiurile cu laturile paralele cu axe, cu paralelipipedele pline cu fețele parelele cu planele de coordonate și ariile  $s$  cu volumele  $v$ .

Printre mulțimile măsurabile Jordan din spațiu se află poliedrele (pliene), sferele, cilindrii, conurile și toate corpurile studiate în geometrie, iar volumul lor Jordan coincide cu volumul lor obișnuit.

De asemenea, pentru definirea volumului se poate pleca de la reuniuni finite de poliedre, de cilindri, sau alte mulțimi măsurabile, în locul reuniunilor finite de paralelipipede.

**O b s e r v a ḥ i e .** Toate rezultatele privind mulțimile măsurabile de pe dreaptă, din plan sau din spațiu se pot formula unitar, dacă se înlocuiesc cuvintele : lungime, arie și volum, prin măsură și se desemnează, toate, printre aceeași literă, de exemplu  $m$ , în loc de  $s$  sau  $v$ . Rezultatele enunțate în acest mod unitar rămân valabile pentru mulțimi din spațiul  $R^n$  cu  $n$  dimensiuni.

## § 2. Integrala în sensul lui Riemann

### 1. Probleme care conduc la noțiunea de integrală

a) *Problema ariei.* Fie  $f$  o funcție pozitivă mărginită pe un interval  $[a, b]$ .

Graficul său  $G$  este situat deasupra axei  $Ox$ . Ne punem problema dacă trapezul curbiliniu  $abBA$  mărginit de axa  $Ox$ , graficul  $G$  și dreaptele  $x = a$  și  $x = b$  este o mulțime măsurabilă și cum se poate calcula aria sa.

Să observăm întâi că, deoarece intervalul  $[a, b]$  și funcția  $f$  sunt mărginite, trapezul curbiliniu  $abBA$  este o mulțime mărginită în plan. Pentru a vedea dacă este măsurabilă, vom căuta să-l aproximăm din interior și din exterior cu poligoane particulare, cu laturile paralele cu axele de coordinate. Anume, să considerăm o diviziune  $(d)$  a intervalului  $[a, b]$ :

$$(d) : a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

Pe fiecare interval parțial  $[x_i, x_{i+1}]$ , ca bază, să construim dreptunghiul cu cea mai mare înălțime posibilă  $m_i$ , astfel încât acest dreptunghi să fie conținut în întregime în trapezul curbiliniu :

$$m_i = \inf_{x_i < x < x_{i+1}} f(x).$$

Ariile dreptunghiurilor astfel construite sunt respectiv

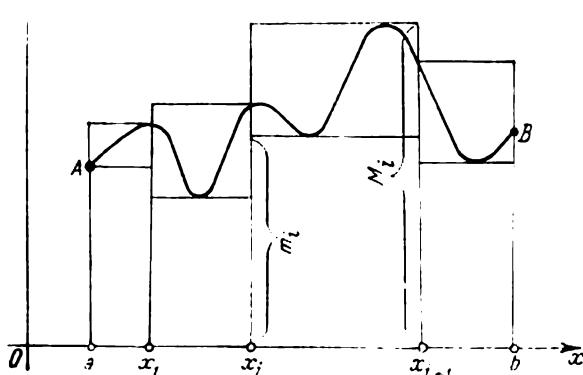


Fig. 107

$$m_0(x_1 - x_0), m_1(x_2 - x_1), \dots, m_i(x_{i+1} - x_i), \dots, m_{n-1}(x_n - x_{n-1}).$$

Reuniunea acestor dreptunghiuri este un poligon  $P$  conținut în trapezul curbiliniu, a cărui aria este

$$s = s(P) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i).$$

Pe fiecare interval parțial  $[x_i, x_{i+1}]$ , ca bază, să construim acum dreptunghiul cu cea mai mică înălțime  $M_i$ , astfel încât acest dreptunghi să conțină în întregime porțiunea din graficul funcției aflată deasupra intervalului  $[x_i, x_{i+1}]$ :

$$M_i = \sup_{x_i < x < x_{i+1}} f(x).$$

Ariile acestor dreptunghiuri sunt respectiv

$$M_0(x_1 - x_0), M_1(x_2 - x_1), \dots, M_i(x_{i+1} - x_i), \dots, M_{n-1}(x_n - x_{n-1}).$$

Reuniunea acestor dreptunghiuri este un poligon  $Q$ , care conține în întregime trapezul curbiliniu, și a cărui aria este

$$S = s(Q) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Avem  $P \subset Q$  și  $s(P) \leq s(Q)$ . Poligonul  $Q - P$  conține în întregime graficul funcției și aria sa este

$$s(Q - P) = s(Q) - s(P).$$

Poligoanele  $P$  și  $Q$  aproximează trapezul curbiliniu respectiv prin lipsă și prin exces.

Cu cât numărul intervalor parțiale este mai mare și cu cât lungimea fiecărui interval parțial este mai mică, cu atât poligoanele  $P$  și  $Q$  aproximează mai bine trapezul curbiliniu.

Sintem astfel conduși să considerăm un sir  $(d_n)$  de diviziuni din ce în ce mai fine (cu intervale parțiale din ce în ce mai multe și mai mici). Obținem două siruri de poligoane  $(P_n)$  și  $(Q_n)$ . Dacă ariile lor au o limită comună  $I$ ,

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

atunci trapezul curbiliniu este o mulțime măsurabilă și aria sa este  $I$ .

Să observăm că putem aproxima trapezul curbiliniu și în alt mod: să alegem în fiecare interval parțial  $[x_i, x_{i+1}]$  un punct arbitrar  $\xi_i$ , și să construim pe acest interval un dreptunghi cu înălțimea  $f(\xi_i)$ . Ariile dreptunghiurilor astfel construite sunt respectiv

$$f(\xi_0)(x_1 - x_0), f(\xi_1)(x_2 - x_1), \dots, f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \dots, f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Reuniunea acestor dreptunghiuri este un poligon  $R$ , a cărui aria este

$$\sigma = s(R) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Poligonul  $R$  este cuprins între poligoanele  $P$  și  $Q$ ,  $P \subset R \subset Q$ , deci  $s(P) \leq s(R) \leq s(Q)$ , sau

$$s < \sigma < S.$$

Dacă alegem un sir de diviziuni  $(d_n)$  din ce în ce mai fine, și pentru fiecare diviziune în parte alegem niște puncte intermediare  $\xi_i$  în mod arbitrar, între ariile poligoanelor  $(P_n)$ ,  $(Q_n)$  și  $(R_n)$  avem relația

$$s_n \leq \sigma_n \leq S_n.$$

Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = I$ , atunci de asemenea  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = I$ , astfel încât trapezul curbiliniu se poate aproxima și cu dreptunghiuri  $R$ , care nu sunt nici complet conținute în trapezul curbiliniu, dar nici nu-l conțin în întregime.

b) *Masa unei bare rectilinii.* Să considerăm o bară materială rectilinie, așezată de-a lungul axei  $Ox$ ; fie  $a$  și  $b$  abscisele extremităților barei. Să presupunem că se cunoaște densitatea liniară  $f(x)$  a barei în fiecare punct  $x \in [a, b]$ , și că  $f$  este o funcție continuă.

Dacă densitatea este constantă,  $f(x) \equiv \rho$ , adică dacă bara este omogenă, masa sa este egală cu produsul dintre densitate și lungime,  $\rho(b - a)$ .

Dacă densitatea nu este constantă (adică dacă bara nu este omogenă) procedăm în felul următor: împărțim bara în mai multe părți; aceasta revine la a considera o diviziune  $(d)$  a intervalului  $[a, b]$ :

$$(d): a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

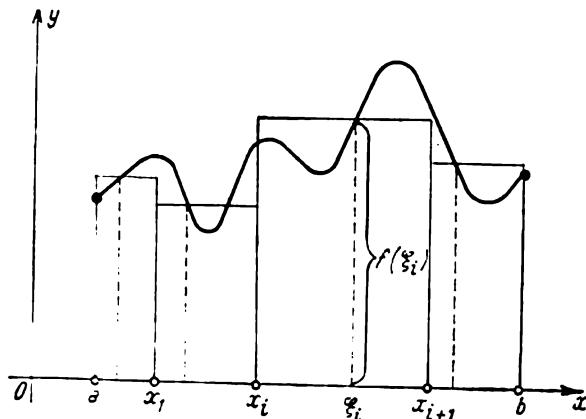


Fig. 108

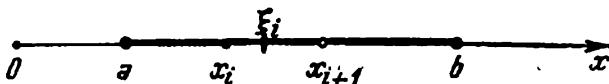


Fig. 109

În fiecare interval parțial  $[x_i, x_{i+1}]$ , să alegem un punct intermediar  $\xi_i$ , și să considerăm, într-o primă aproximare, că, pe acest interval, bara este omogenă și că densitatea sa pe acest interval este egală cu densitatea  $f(\xi_i)$  în punctul  $\xi_i$  ales. Masa porțiunii din bară cuprinsă între  $x_i$  și  $x_{i+1}$ , considerată omogenă, cu densitatea  $f(\xi_i)$ , este  $f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ .

Masele approximative ale porțiunilor din bară cuprinse între diferitele puncte ale diviziunii sunt respectiv:

$$f(\xi_0)(x_1 - x_0), f(\xi_1)(x_2 - x_1), \dots, f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \dots, f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Masa totală a barei, calculată cu aproximarea corespunzătoare diviziunii  $(d)$  și alegerii punctelor intermediare  $\xi_i$ , este

$$m_d = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Eroarea comisă provine din faptul că pe fiecare interval parțial am considerat densitatea constantă. Ne dăm seama ușor, intuitiv, că dacă

intervalele parțiale sunt din ce în ce mai multe și mai mici (dacă diviziunea este din ce în ce mai fină), atunci și densitatea variază mai puțin în fiecare interval parțial în parte și, deci, eroarea pe care o facem considerind densitatea constantă pe fiecare asemenea interval este din ce în ce mai mică.

Sîntem astfel conduși să considerăm un sir  $(d_n)$  de diviziuni din ce în ce mai fine. Dacă sirul  $(md_n)$  al maselor aproximative are o limită  $m$ , este natural să considerăm că  $m$  este masa totală a barei.

## 2. Definiția integralei în sensul lui Riemann

Cele două exemple anterioare, diferite, unul din geometrie și altul din fizică, impun cercetarea sumelor de forma  $\sum_i f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i)$ , chiar pentru funcții care nu sunt pozitive. Studiul acestor sume ne va conduce la noțiunea de integrală în sensul lui Riemann.

Fie  $[a, b]$  un interval (închis și mărginit),  $a \leq b$ . O familie finită de puncte  $d = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  astfel ca

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_i \leq x_{i+1} \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

se numește *diviziune* a intervalului  $[a, b]$ . Fiecare din intervalele  $[x_i, x_{i+1}]$  se numește *interval parțial* al diviziunii  $d$ . Un interval parțial  $[x_i, x_{i+1}]$  poate conține un singur punct, dacă  $x_i = x_{i+1}$ .

Spunem că o diviziune  $d'$  este mai fină decât o diviziune  $d$ , și scriem  $d' \supset d$  sau  $d \subset d'$ , dacă diviziunea  $d'$  conține *toate* punctele diviziunii  $d$  (și eventual și alte puncte în plus), adică, dacă fiecare interval parțial al diviziunii  $d'$  este conținut în întregime într-un interval parțial al diviziunii  $d$ .

Lungimea celui mai mare interval parțial al unei diviziuni  $d = (x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  se numește *normă diviziunii*  $d$  și se notează  $v(d)$ .

$$v(d) = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Evident,  $x_{i+1} - x_i \leq v(d)$  și dacă  $v(d) < \delta$ , atunci  $x_{i+1} - x_i < \delta$ , oricare ar fi  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

Dacă  $d'$  este mai fină decât  $d$  atunci  $v(d') \leq v(d)$ . (Cu cât o diviziune este mai fină, cu atât norma sa este mai mică.)

Dacă însă  $v(d') \leq v(d)$ , nu rezultă că diviziunea  $d'$  este mai fină decât diviziunea  $d$ . Diviziunea  $d'$  poate fi formată din intervale parțiale mai mici decât cele ale diviziunii  $d$ , fără ca diviziunea  $d'$  să conțină toate punctele diviziunii  $d$ .

$$\text{Exemplu. } d = \left( a, \frac{a+b}{2}, b \right), \quad d' = \left( a, \frac{a+b}{3}, \frac{2(a+b)}{3}, b \right).$$

Avem  $v(d) = \frac{a+b}{2}$  și  $v(d') = \frac{a+b}{3}$ , deci  $v(d') < v(d)$ , dar diviziunea  $d'$  nu este mai fină decât diviziunea  $d$ .

Dacă în fiecare interval parțial  $[x_i, x_{i+1}]$  al unei diviziuni  $d$ , alegem un punct  $\xi_i$ ,  $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ , punctele alese  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n-1}$  se numesc *puncte intermediare* ale diviziunii  $d$ .

Evident, pentru aceeași diviziune  $d$ , putem alege punctele intermediare  $(\xi_i)$  într-o infinitate de moduri, dacă  $a < b$ .

Dacă  $a = b$ , orice diviziune  $d$  a intervalului  $[a, b]$  este formată numai din puncte care coincid cu  $a$ . Toate intervalele parțiale ale diviziunii  $d$  au lungimea nulă, deci  $v(d) = 0$ . În acest caz, putem alege punctele intermediare  $\xi_i$ , într-un singur mod și anume  $\xi_i = a$ .

Fie  $f$  o funcție definită pe un interval  $[a, b]$ .

Să considerăm o diviziune  $d$  a acestui interval:

$$d : a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_i \leq x_{i+1} \leq \dots \leq x_n = b.$$

În fiecare interval parțial  $[x_i, x_{i+1}]$  să alegem un punct intermediar  $\xi_i$ ,  $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ , și să formăm produsul  $f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$  dintre valoarea funcției  $f$  în punctul intermediar  $\xi_i$  și lungimea intervalului parțial  $[x_i, x_{i+1}]$ . Obținem astfel produsele:

$$f(\xi_0)(x_1 - x_0), f(\xi_1)(x_2 - x_1), \dots, f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \dots, f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Suma acestor produse se notează  $\sigma_d(f)$  sau  $\sigma_d$  și se numește *sumă riemanniană* (de la numele matematicianului Riemann) a funcției  $f$ , corespunzătoare diviziunii  $d$  și punctelor intermediare  $\xi_i$ :

$$\sigma_d = \sigma_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Sumele riemanniene se mai numesc *sume integrale*.

Dacă  $a = b$ , atunci  $x_{i+1} = x_i$ , deci  $x_{i+1} - x_i = 0$  și deci  $\sigma_d(f) = 0$  oricare ar fi diviziunea  $d$  a intervalului  $[a, a]$ .

Evident, dacă  $a < b$ , pentru o aceeași diviziune  $d$  putem forma o infinitate de sume integrale, corespunzătoare diferitelor moduri posibile de alegere a punctelor intermediare  $\xi_i$ . Notația  $\sigma_d(f)$  a sumei integrale nu este completă; ea ar trebui să conțină și punctele intermediare de care depinde, dar aceasta ar complica notația.

Să observăm că dacă unul din intervalele parțiale are lungimea nulă,  $x_{i+1} - x_i = 0$ , „contribuția” sa în suma integrală este nulă, astfel încât, dacă  $a < b$ , putem să considerăm numai diviziuni formate din *puncte distincte*:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

Problema care se pune acum este dacă, alegind diviziuni din ce în ce mai fine, formate din intervale din ce în ce mai multe și mai mici, sumele integrale se apropiie din ce în ce mai mult de un anumit număr  $I$  (finit). Ajungem astfel la următoarea

**Definiție.** Se spune că funcția  $f$  este integrabilă (în sensul lui Riemann) pe intervalul  $[a, b]$  dacă pentru orice sir de diviziuni  $(d_n)$  cu norma

tinind către 0,  $v(d_n) \rightarrow 0$ , și pentru orice alegere a punctelor intermediare  $\xi_i^n$ , sirurile corespunzătoare  $(\sigma_{d_n})$  de sume integrabile au o limită finită comună  $I$ .

Numărul  $I$  se numește integrala funcției  $f$  pe intervalul  $[a, b]$  (în sensul lui Riemann) și se notează

$$\int_a^b f(x) dx \text{ sau } \int_a^b f(x) \text{ sau } \int_a^b f \text{ dx sau } \int_a^b f.$$

Notația  $\int_a^b f(x) dx$  se citește *integrală de la a la b din f(x) dx*.

Semnul  $\int$  se numește *semn de integrare*, sau *semnul integralei*;  $a$  și  $b$  se numesc limite de integrare:  $a$  este *limita inferioară*, iar  $b$  este *limita superioară*; intervalul  $[a, b]$  se numește *interval de integrare*; funcția  $f$  se numește *funcția de integrat*;  $x$  se numește *variabila de integrare*. Variabila de integrare se poate nota cu orice literă,  $t, u, v, y, x$  etc. Astfel

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(z) dz = \int_a^b f(\alpha) d\alpha.$$

Dacă  $a < b$ , se definește  $\int_b^a f(x) dx$  prin egalitatea

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

*Exemplu.* 1) Orice funcție  $f$  definită pe un interval  $[a, a]$  cu extremitățile egale este integrabilă pe acest interval și

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Intr-adevăr, avem  $\sigma_d(f) = 0$ , oricare ar fi diviziunea  $d$  a intervalului  $[a, a]$ . Așadar, dacă  $v(d_n) \rightarrow 0$ , atunci  $\sigma_{d_n} \rightarrow 0$ , deci  $f$  este integrabilă și  $\int_a^a f(x) dx = 0$ .

2) Orice funcție constantă  $f(x) \equiv \alpha$  definită pe un interval  $[a, b]$  este integrabilă și

$$\int_a^b \alpha dx = \alpha(b - a).$$

Într-adevăr, oricare ar fi diviziunea  $d$  și punctele intermediare  $\xi_i$  avem  $f(\xi_i) = \alpha$ , deci

$$\sigma_d = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha(x_{i+1} - x_i) = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \alpha(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \dots + x_n - x_{n-1}) = \alpha(x_n - x_0) = \alpha(b - a).$$

Pentru orice sir  $(d_n)$  de diviziuni cu  $v(d_n) \rightarrow 0$  avem  $\sigma_{d_n} \rightarrow \alpha(b - a)$ , deci  $f$  este integrabilă și  $\int_a^b f(x) dx = \alpha(b - a)$ , adică  $\int_a^b \alpha dx = \alpha(b - a)$ .

3) Funcția  $f$  definită pe intervalul  $[a, b]$ ,  $a < b$ , astfel:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ 1, & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$$

nu este integrabilă în sensul lui Riemann.

În adevăr, fie  $(d_n)$  un sir de diviziuni cu  $v(d_n) \rightarrow 0$ . Dacă în fiecare diviziune alegem punctele intermediare  $\xi_i$  *raționale*, avem  $f(\xi_i) = 0$ , deci sumele integrale corespunzătoare  $\sigma_{d_n}$  sunt toate nule și deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{d_n} = 0$ . Dacă în fiecare diviziune alegem punctele intermediare  $\xi'_i$  *iraționale*, avem  $f(\xi'_i) = 1$  și sumele integrale corespunzătoare  $\sigma'_{d_n}$  sunt toate egale cu  $b - a$ :

$$\sigma'_{d_n} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi'_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = x_n - x_0 = b - a,$$

deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma'_{d_n} = b - a \neq 0$ . Așadar, pentru alegeri diferite ale punctelor intermediare, sumele integrale au limite *diferite*. Rezultă că funcția  $f$  nu este integrabilă în sensul lui Riemann.

**O b s e r v a t i o n e l** 1° După o definiție mai generală a integralei dată de Lebesgue, funcția din exemplul 3 este integrabilă (în sensul lui Lebesgue), și integrala sa (în sensul lui Lebesgue) este egală cu 0.

2° În definiția integrabilității este suficient să se presupună că pentru fiecare sir  $(d_n)$  de diviziuni cu  $v(d_n) \rightarrow 0$ , și pentru fiecare alegere a punctelor intermediare, sirul sumelor integrale ( $\sigma_{d_n}$ ) are limită finită. Rezultă atunci că toate sirurile ( $\sigma_{d_n}$ ) au o limită finită comună  $I$ , oricare ar fi sirul de diviziuni  $(d_n)$  cu  $v(d_n) \rightarrow 0$  și oricare ar fi punctele intermediare.

Într-adevăr, dacă pentru două siruri de diviziuni  $(d'_n)$  și  $(d''_n)$  cu  $v(d'_n) \rightarrow 0$  și  $v(d''_n) \rightarrow 0$  am avea  $\sigma'_{d_n} \rightarrow I'$  și  $\sigma''_{d_n} \rightarrow I''$  cu  $I' \neq I''$ , atunci pentru următorul sir de diviziuni

$$d'_1, d''_1, d'_2, d''_2, \dots, d'_n, d''_n, \dots$$

sirul normelor

$$v(d'_1), v(d''_1), \dots, v(d'_n), v(d''_n), \dots$$

tinde de asemenea către 0, dar sirul sumelor integrale

$$\sigma'_{d'_1}, \sigma''_{d'_1}, \dots, \sigma'_{d'_n}, \sigma''_{d'_n}, \dots$$

nu ar avea limită.

3° Dacă știm că funcția  $f$  este integrabilă pe intervalul  $[a, b]$ , pentru calculul integralei este suficient să luăm un singur sir particular  $(d_n)$  de diviziuni cu  $v(d_n) \rightarrow 0$ , și de asemenea

niște puncte intermediare particulare în fiecare diviziune. Știm atunci că  $\sigma_{d_n} \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ .

Astfel, putem alege diviziunea  $d_n$  formată din  $n$  intervale parțiale, de aceeași lungime, și anume  $\frac{b-a}{n}$ ; în fiecare asemenea interval parțial putem alege punctul intermediar la una din extremitățile acestui interval sau la mijlocul său.

Sumele integrale corespunzătoare se pot calcula mai ușor. Alegind diviziunea  $(d_n)$  cu un număr suficient de mare de intervale parțiale, suma integrală corespunzătoare  $\sigma_{d_n}$  poate să difere oricât de puțin de valoarea integralei.

În acest mod se calculează integrala cu aproximare.

4° Să considerăm un singur sir  $(\Delta_n)$  de diviziuni, și anume, pentru fiecare  $n \in N$ , diviziunea  $\Delta_n$  este formată din  $n$  intervale parțiale de aceeași lungime  $\frac{b-a}{n}$ :

$$\Delta_n: a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \dots, a + \frac{i(b-a)}{n}, \dots, a + \frac{n(b-a)}{n} = b.$$

$$\text{Avem } v(\Delta_n) = \frac{b-a}{n}, \text{ deci } v(\Delta_n) \rightarrow 0.$$

Pentru o alegere oarecare a punctelor intermediare, să notăm cu  $\sigma_n$  suma integrală corespunzătoare diviziunii  $\Delta_n$ :

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \frac{b-a}{n}.$$

Se poate arăta că funcția  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  dacă și numai dacă sirul  $(\sigma_n)$  are o limită finită unică  $I$ , independentă de alegerea punctelor intermediare; limita  $I$  este egală cu integrala generală  $\int_a^b f(x) dx$ .

Lăsăm demonstrația acestui fapt pe seama cititorului, ca exercițiu.

5° La începuturile analizei, suma integrală  $\sum f(\xi_i) \frac{b-a}{n}$  era notată  $\sum_a^b f(x) \Delta x$ , unde

$\Delta x$  reprezenta lungimea comună a intervalelor unei diviziuni  $\Delta_n$ . Notația  $\int_a^b f(x) dx$  amintește această notație a sumei integrale: semnul de integrare  $\int$  provine din litera  $S$  prin alungire, iar  $dx$  provine din  $\Delta x$ .

Trebuie observat că semnul de diferențială  $dx$  care apare în notația integralei nu are justificare teoretică, dar s-a păstrat prin tradiție. Avantajul semnului de diferențială este acela că dacă  $f$  este o funcție de două sau mai multe variabile semnul diferențialei indică variabila de integrare, de exemplu

$$\int_a^b f(x, y) dx \text{ sau } \int_a^b f(x, y) dy.$$

Semnul de diferențială prezintă de asemenea un avantaj la calculul integralei unei funcții compuse prin metoda schimbării de variabilă, unde, dacă în mod formal se interpretează  $dx$  ca o diferențială, se pot da reguli simple pentru calculul integralei prin metoda schimbării de variabilă.

Se observă o analogie între definiția integralei și definiția cu siruri a limitei unei funcții. Ca și pentru limite de funcții, se poate da o definiție cu  $\epsilon$  și  $\delta$  a integralei, așa cum rezultă din teorema următoare :

**Theoremă.** Functia  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  dacă și numai dacă există un număr finit  $I$  cu proprietatea că, pentru orice număr  $\epsilon > 0$ , există un număr  $\delta(\epsilon) > 0$ , astfel încât, oricare ar fi diviziunea  $d$  cu  $v(d) < \delta(\epsilon)$ , și oricare ar fi alegerea punctelor intermediare în diviziunea  $d$ , să avem  $|\sigma_d - I| < \epsilon$ .

În acest caz  $I = \int_a^b f(x) dx$ .

**Demonstratie.** Să presupunem întâi că  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și să arătăm că numărul  $I = \int_a^b f(x) dx$  îndeplinește condiția din enunțul teoremei.

Să presupunem, prin absurd, că numărul  $I$  ales nu îndeplinește condiția din enunț. Aceasta înseamnă că : există un număr  $\epsilon_0 > 0$ , astfel încât oricărui număr  $\delta > 0$  îi corespunde o diviziune  $d$  (care depinde de  $\delta$ ) cu  $v(d) < \delta$ , și o alegere a punctelor intermediare  $\xi_i$ , astfel încât pentru suma integrală corespunzătoare să avem  $|\sigma_d - I| > \epsilon_0$ .

Deoarece  $\delta > 0$  este arbitrar, să luăm  $\delta = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Există deci o diviziune  $d_n$  cu  $v(d_n) < \frac{1}{n}$  și niște puncte intermediare  $\xi_i$ , astfel încât  $|\sigma_{d_n} - I| > \epsilon_0$ .

Am obținut astfel un sir  $(d_n)$  de diviziuni cu  $v(d_n) \rightarrow 0$  și un sir  $(\sigma_{d_n})$  de sume integrale cu  $|\sigma_{d_n} - I| > \epsilon_0$ , pentru orice  $n \in N$ . Aceasta înseamnă că  $I$  nu este limita sirului  $(\sigma_{d_n})$ , adică sirul  $(\sigma_{d_n})$  nu tinde către  $\int_a^b f(x) dx$ , ceea ce este în contradicție cu ipoteza că  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

Reciproc, să presupunem că există un număr finit  $I$  care îndeplinește condiția din enunțul teoremei ; să arătăm în acest caz că  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și că  $I = \int_a^b f(x) dx$ .

Fie  $(d_n)$  un sir oarecare de diviziuni cu  $v(d_n) \rightarrow 0$  și fie  $(\sigma_{d_n})$  sirul corespunzător de sume integrale, pentru o alegere arbitrară a punctelor intermediare în fiecare diviziune.

Pentru a arăta că  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  trebuie să arătăm că  $\sigma_{d_n} \rightarrow I$ .

Fie pentru aceasta un număr  $\varepsilon > 0$  oarecare. Lui  $\varepsilon$  ales îi corespunde un număr  $\delta(\varepsilon)$  astfel încât  $v(d) < \delta(\varepsilon)$  să implice  $|\sigma_d - I| < \varepsilon$ .

Dar  $v(d_n) \rightarrow 0$ , deci, pentru numărul  $\delta(\varepsilon) > 0$  obținut, există un număr  $N(\delta(\varepsilon)) = N(\varepsilon)$ , astfel încât oricare ar fi  $n \geq N(\varepsilon)$  să avem  $v(d_n) < \delta(\varepsilon)$ , și deci  $|\sigma_{d_n} - I| < \varepsilon$ .

Așadar, pentru numărul  $\varepsilon > 0$  ales, am găsit un număr  $N(\varepsilon)$ , astfel încât pentru orice  $n \geq N(\varepsilon)$  să avem  $|\sigma_{d_n} - I| < \varepsilon$ . Aceasta înseamnă că  $\sigma_{d_n} \rightarrow I$ .

Cum sirul  $(d_n)$  cu  $v(d_n) \rightarrow 0$  a fost ales arbitrar, rezultă că funcția  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și că  $I = \int_a^b f(x) dx$ .

**O b s e r v a t i e.** Analogia dintre definiția integralei și definiția limitei unei funcții se poate extinde și asupra notațiilor.

Dacă  $v(d_n) \rightarrow 0$  implică  $\sigma_{d_n} \rightarrow I$ , în loc de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{d_n} = I$  putem scrie  $\lim_{v(d_n) \rightarrow 0} \sigma_{d_n} = I$  (sau, incă,  $\sigma_{d_n} \rightarrow I$  cind  $v(d_n) \rightarrow 0$ ).

Dacă pentru orice sir  $(d_n)$  cu  $v(d_n) \rightarrow 0$  avem  $\sigma_{d_n} \rightarrow I$ , vom scrie, ca și pentru funcții:

$$\lim_{v(d) \rightarrow 0} \sigma_d = I$$

(sau  $\sigma_d \rightarrow I$  cind  $v(d) \rightarrow 0$ ). Cum limita  $I$  este, conform definiției, integrala funcției  $f$ , avem

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{v(d) \rightarrow 0} \sigma_d(f)$$

$$(sau \sigma_d(f) \rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ cind } v(d) \rightarrow 0).$$

**În definiția integrabilității nu s-a impus condiția ca funcția  $f$  să fie mărginită. Această condiție este însă verificată de la sine, așa cum rezultă din următoarea**

**P r o p o z i t i e.** Dacă funcția  $f$  este integrabilă pe intervalul  $[a, b]$ , atunci  $f$  este mărginită pe  $[a, b]$ .

Fie  $\varepsilon > 0$ ; deoarece  $f$  este integrabilă, putem găsi o diviziune  $d$  astfel încât oricare ar fi punctele intermediare  $\xi_i$  să avem

$$|\sigma_d - I| < \varepsilon \text{ sau } I - \varepsilon < \sigma_d < I + \varepsilon, \text{ unde } I = \int_a^b f.$$

Să presupunem, prin absurd, că funcția  $f$  nu este mărginită pe  $[a, b]$ ; atunci există cel puțin un interval al diviziunii  $d$  pe care  $f$  nu este mărginită; fie  $[x_j, x_{j+1}]$  un asemenea interval, și, pentru a face o alegere, să presupunem că  $f$  nu este mărginită superior pe intervalul  $[x_j, x_{j+1}]$ :

$$\sup_{x_j < x < x_{j+1}} f(x) = +\infty.$$

Să alegem punctele  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$  pentru  $i \neq j$ , și să notăm

$$\Omega = \sum_{i \neq j} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i).$$

Putem alege acum punctul  $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$  astfel ca

$$f(\xi_j) > \frac{I - \Omega + 2\epsilon}{x_{j+1} - x_j}.$$

(Evident,  $x_{j+1} - x_j > 0$ , deoarece, în caz contrar, intervalul  $[x_j, x_{j+1}]$  se reduce la un punct și funcția ar fi mărginită pe acest interval.)

Atunci  $f(\xi_j) (x_{j+1} - x_j) > I - \Omega + 2\epsilon$

și

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i \neq j} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i) + f(\xi_j) (x_{j+1} - x_j) = \\ &= \Omega + f(\xi_j) (x_{j+1} - x_j) > \Omega + I - \Omega + 2\epsilon = I + 2\epsilon, \end{aligned}$$

adică  $\sigma_d > I + 2\epsilon$ , ceea ce contrazice inegalitățile  $I - \epsilon < \sigma_d < I + \epsilon$ , care au rezultat din alegerea diviziunii  $d$ .

Dacă  $f$  nu este mărginită inferior pe intervalul  $[x_j, x_{j+1}]$ , se alege un punct  $\xi_j$  în acest interval, astfel ca  $f(\xi_j) (x_{j+1} - x_j) < I - \Omega - 2\epsilon$  și se obține inegalitatea  $\sigma_d < I - 2\epsilon$ , ceea ce contrazice inegalitatea  $I - \epsilon < \sigma_d < I + \epsilon$ .

rezultă deci că funcția  $f$  este mărginită.

### 3. Criteriul lui Darboux

Vom demonstra acum un criteriu de integrabilitate, în care nu intervine valoarea integralei, și care este analogul criteriului lui Cauchy de la siruri, sau al criteriului lui Cauchy-Bolzano de la limite de funcții.

Fie  $f$  o funcție mărginită definită pe un interval  $[a, b]$ ,  $a < b$ , și fie  $m$  și  $M$  marginile sale pe acest interval :

$$m = \inf_{a < x < b} f(x), \quad M = \sup_{a < x < b} f(x).$$

Avem deci  $m \leq f(x) \leq M$  pentru orice  $x \in [a, b]$ .

Să considerăm o divizionă  $(d)$  a intervalului  $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

Funcția  $f$  este mărginită pe fiecare interval parțial  $[x_i, x_{i+1}]$ ; să notăm cu  $m_i$  și  $M_i$  marginile funcției pe acest interval :

$$m_i = \inf_{x_i < x < x_{i+1}} f(x), \quad M_i = \sup_{x_i < x < x_{i+1}} f(x).$$

Avem  $m_i \leq f(x) \leq M_i$ , oricare ar fi  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ .

Să formăm sumele

$$s_d = s_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i),$$

$$S_d = S_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Sumele  $s_d$  și  $S_d$  se numesc *sume de Darboux* ale funcției  $f$ , corespunzătoare diviziunii  $d$ ;  $s_d$  este *suma inferioară Darboux*, iar  $S_d$  este *suma superioară Darboux*. Avem

$$m(b-a) \leq s_d \leq \sigma_d \leq S_d \leq M(b-a),$$

oricare ar fi alegerea punctelor intermediare cu ajutorul cărora s-a format suma riemanniană  $\sigma_d$ .

Într-adevăr, oricare ar fi punctul intermediar  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ , avem

$$m \leq m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i \leq M.$$

Înmulțind toți termenii cu numărul pozitiv  $x_{i+1} - x_i$  obținem

$$\begin{aligned} m(x_{i+1} - x_i) &\leq m_i(x_{i+1} - x_i) \leq f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \leq M_i(x_{i+1} - x_i) \leq \\ &\leq M(x_{i+1} - x_i). \end{aligned}$$

Adunând membru cu membru cele  $n$  inegalități, obținem

$$\begin{aligned} m \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) \leq M \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i), \end{aligned}$$

adică

$$m(b-a) \leq s_d \leq \sigma_d \leq S_d \leq M(b-a).$$

Trebuie observat că, pentru o diviziune dată  $d$ , putem forma o infinitate de sume riemanniene  $\sigma_d$ , dar numai două sume Darboux,  $s_d$  și  $S_d$ .

Legătura dintre sumele Darboux și sumele riemanniene corespunzătoare unei *aceleiasi* diviziuni  $d$  este dată de egalitatea

$$s_d = \inf_{\xi_i} \sigma_d, \quad S_d = \sup_{\xi_i} \sigma_d,$$

unde marginea inferioară și cea superioară se consideră pentru toate alegările posibile ale punctelor intermediare  $\xi_i$ .

În adevară, fie  $\epsilon > 0$ ; deoarece  $m_i = \inf_{x_i < x < x_{i+1}} f(x)$ , în fiecare interval

parțial  $[x_i, x_{i+1}]$  există un punct  $\xi_i$  astfel ca  $f(\xi_i) - m_i < \frac{\epsilon}{b-a}$ . Atunci

$$\begin{aligned} \sigma_d - s_d &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} [f(\xi_i) - m_i](x_{i+1} - x_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{b-a} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon, \end{aligned}$$

deci

$$\sigma_d - \varepsilon \leq s_d \leq \sigma_d. \text{ Rezultă că } s_d = \inf_{\xi_i} \sigma_d.$$

La fel se demonstrează cea de-a doua egalitate.

S-a arătat mai sus că pentru o aceeași diviziune  $d$ , suma inferioară  $s_d$  este mai mică sau egală cu suma superioară  $S_d$ . Vom arăta acum că orice sumă inferioară este mai mică decât orice sumă superioară, chiar dacă suma inferioară și cea superioară provin din diviziuni diferite. Pentru aceasta avem nevoie de următoarea

**L e m ă .** Dacă diviziunea  $d'$  este mai fină decât diviziunea  $d$ , atunci

$$s_d \leq s_{d'}, \quad s_{d'} \leq S_d.$$

(Prin trecerea de la o diviziune la o diviziune mai fină, sumele inferioare cresc, iar sumele superioare descresc.)

Fie  $[x_i, x_{i+1}]$  un interval parțial al diviziunii  $d$ ; să presupunem că diviziunea  $d'$  mai are un punct  $c$  în acest interval,  $x_i < c < x_{i+1}$ . Așadar, pentru diviziunea  $d'$  există două intervale parțiale  $[x_i, c]$  și  $[c, x_{i+1}]$  în locul intervalului  $[x_i, x_{i+1}]$  al diviziunii  $d$ .

Să notăm

$$m_i = \inf_{x_i < x < x_{i+1}} f(x), \quad m' = \inf_{x_i < x < c} f(x), \quad m'' = \inf_{c < x < x_{i+1}} f(x).$$

Avem, evident,  $m_i \leq m'$  și  $m_i \leq m''$ , deci

$$m_i(c - x_i) \leq m'(c - x_i), \quad m_i(x_{i+1} - c) \leq m''(x_{i+1} - c)$$

și prin adunarea membru cu membru a acestor inegalități se obține

$$m_i(x_{i+1} - x_i) \leq m'_i(c - x_i) + m''_i(x_{i+1} - c).$$

Așadar, termenul  $m_i(x_{i+1} - x_i)$  corespunzător intervalului  $[x_i, x_{i+1}]$  în suma  $s_d$  se înlocuiește printr-un număr mai mare sau egal,  $m'_i(c - x_i) + m''_i(x_{i+1} - c)$  pentru a obține suma  $s(d')$ . Acest fapt rămâne valabil dacă diviziunea  $d'$  are în intervalul  $[x_i, x_{i+1}]$  mai multe puncte de diviziune; pe de altă parte acest fapt este valabil pentru fiecare interval parțial al diviziunii  $d$ . Rezultă atunci că  $s_d \leq s_{d'}$ .

Inegalitatea  $s_{d'} \leq S_d$  se demonstrează la fel.

**P r o p o z i t i e .** Oricare ar fi diviziunile  $d_1$  și  $d_2$  avem  $s_{d_1} \leq S_{d_2}$ .

(Orice sumă inferioară este mai mică sau egală cu orice sumă superioară.)

Să notăm cu  $d$  diviziunea formată atât cu punctele diviziunii  $d_1$ , cât și cu punctele diviziunii  $d_2$ . Evident,  $d$  este mai fină și decât  $d_1$  și decât  $d_2$ . Atunci

$$s_{d_1} \leq s_d \leq S_d \leq S_{d_2},$$

$$s_{d_2} \leq s_d \leq S_d \leq S_{d_1},$$

de unde  $s_{d_1} \leq s_d \leq S_d \leq S_{d_2}$  și deci  $s_{d_1} \leq S_{d_2}$ .

**C o r o l a r.** Avem

$$\sup_d s_d \leqslant \inf_d S_d,$$

unde marginile superioare și inferioare se consideră pentru toate diviziunile posibile  $d$ , ale intervalului  $[a, b]$ .

Fie  $d_0$  o diviziune oarecare. Pentru orice diviziune  $d$  avem

$$s_d \leqslant S_{d_0},$$

deci mulțimea  $\{s_d\}$  a sumelor inferioare este majorată de numărul  $S_{d_0}$  (care este un majorant al ei). Această mulțime are deci o margine superioară finită  $\underline{I}$  (cel mai mic majorat) și  $\underline{I} \leqslant S_{d_0}$ .

Deoarece diviziunea  $d_0$  a fost aleasă arbitrar, rezultă că pentru orice diviziune  $d$  avem  $\underline{I} \leqslant S_d$ . Așadar, mulțimea  $\{S_d\}$  a sumelor superioare este minorată ( $\underline{I}$  este un minorant al ei). Această mulțime are deci o margine inferioară finită  $\bar{I}$  (cel mai mare minorant) și  $\underline{I} \leqslant \bar{I}$ , adică

$$\sup_d s_d \leqslant \inf_d S_d.$$

Numerele  $\underline{I} = \sup_d s_d$  și  $\bar{I} = \inf_d S_d$  se numesc *integralele Darboux* ale funcției  $f$ ;  $\underline{I}$  este *integrala inferioară Darboux* iar  $\bar{I}$  este *integrala superioară Darboux*.

Pentru orice diviziune  $d$  avem

$$s_d \leqslant \underline{I} \leqslant \bar{I} \leqslant S_d.$$

Integralele Darboux se mai notează și astfel:

$$\underline{I} = \int_a^b f(x) dx \text{ și } \bar{I} = \int_a^b f(x) dx.$$

Sîntem acum în măsură să dăm un criteriu de integrabilitate foarte important, care folosește sumele Darboux.

**T e o r e m ă.** O funcție mărginită  $f: [a, b] \rightarrow R$  este integrabilă pe  $[a, b]$  dacă și numai dacă, pentru orice număr  $\epsilon > 0$ , există un număr  $\delta(\epsilon) > 0$ , astfel încât oricare ar fi diviziunea  $d$  cu  $v(d) < \delta(\epsilon)$  să avem  $S_d - s_d < \epsilon$ .

Să presupunem întîi că  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și să notăm cu  $I$  integrala sa. Fie  $\epsilon > 0$ ; conform primului criteriu de integrabilitate, există un număr  $\delta(\epsilon) > 0$ , astfel încât, oricare ar fi diviziunea  $d$  cu  $v(d) < \delta(\epsilon)$  și oricare ar fi alegerea punctelor intermediare, să avem  $|s_d - I| < \frac{\epsilon}{2}$  sau

$$I - \frac{\epsilon}{2} < s_d < I + \frac{\epsilon}{2}.$$

Pentru fiecare asemenea diviziune  $d$  avem deci

$$I - \frac{\epsilon}{2} \leq \inf_{\xi_i} \sigma_d \leq \sup_{\xi_i} \sigma_d \leq I + \frac{\epsilon}{2},$$

adică

$$I - \frac{\epsilon}{2} \leq s_d \leq S_d \leq I + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{și deci } S_d - s_d \leq I + \frac{\epsilon}{2} - \left( I - \frac{\epsilon}{2} \right) = \epsilon.$$

Așadar, dacă  $f$  este integrabilă, atunci pentru orice  $\epsilon > 0$  există un număr  $\delta(\epsilon)$  astfel încât  $v(d) < \delta(\epsilon)$  implică  $S_d - s_d < \epsilon$ .

Reciproc, să presupunem că această condiție este verificată, și să arătăm că  $f$  este integrabilă.

Rezultă mai întii că  $\bar{I} = \underline{I}$ . Într-adevăr, din inegalitatea  $s_d \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_d$  deducem, pentru  $v(d) \leq \delta(\epsilon)$ ,

$$0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq S_d - s_d \leq \epsilon,$$

adică  $0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq \epsilon$ ; deoarece  $\epsilon$  este arbitrar rezultă că  $\underline{I} = \bar{I}$ . Să notăm cu  $I$  valoarea comună a integralelor Darboux. Avem:

$$s_d \leq I \leq S_d \quad \text{și} \quad s_d \leq \sigma_d \leq S_d,$$

deci  $|\sigma_d - I| \leq S_d - s_d$ .

Dacă  $v(d) < \delta(\epsilon)$  atunci  $S_d - s_d < \epsilon$  și deci

$$|\sigma_d - I| < \epsilon,$$

adică  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și  $\int_a^b f(x) dx = I$ .

Această teoremă va fi numită *criteriul lui Darboux*.

**Observație.** Din demonstrația acestei teoreme, rezultă că, dacă  $f$  este integrabilă, integralele Darboux sunt egale între ele și egale cu integrala Riemann:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\bar{b}} f(x) dx = \int_a^{\underline{b}} f(x) dx.$$

Reciproc, se poate arăta că, dacă integralele Darboux sunt egale, funcția este integrabilă în sensul lui Riemann.

Pentru funcția definită pe  $[a, b]$  cu  $a < b$ , prin

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ 1, & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$$

avem  $\int_a^b f(x) dx = 0$  și  $\int_a^{\bar{b}} f(x) dx = 1$ .

#### 4. Clase de funcții integrabile

**Propoziția 1.** Orice funcție  $f$  monotonă pe  $[a, b]$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

Pentru a face o alegere să presupunem că  $f$  este crescătoare și că nu este constantă, deci  $f(a) < f(b)$ . (Pentru funcțiile constante s-a arătat deja că sunt integrabile.)

Fie  $d$  o diviziune a intervalului  $[a, b]$ . Avem

$$f(x_i) \leq f(x) \leq f(x_{i+1}) \text{ pentru } x_i \leq x \leq x_{i+1},$$

deci  $m_i = f(x_i)$  și  $M_i = f(x_{i+1})$ . Atunci

$$\begin{aligned} S_d - s_d &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))(x_{i+1} - x_i). \end{aligned}$$

Fie  $\epsilon > 0$ ; dacă  $v(d) < \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$ , atunci  $x_{i+1} - x_i < \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$  pentru  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , deci, deoarece  $f(x_{i+1}) - f(x_i) \geq 0$ , avem

$$\begin{aligned} S_d - s_d &= \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)](x_{i+1} - x_i) \leq \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) = \\ &= \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} (f(x_n) - f(x_0)) = \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \epsilon. \end{aligned}$$

Așadar, luând  $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}$ , criteriul lui Darboux este verificat, deci  $f$  este integrabilă. Dacă  $f$  este descrescătoare, demonstrația se face la fel, îninind seama că  $m_i = f(x_{i+1})$  și  $M_i = f(x_i)$ .

**Propoziția 2.** Orice funcție continuă pe  $[a, b]$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

Fie  $d$  o diviziune. Deoarece  $f$  este continuă pe intervalul compact  $[x_i, x_{i+1}]$ , este mărginită și atinge marginile pe acest interval; există deci două puncte  $x'_i$  și  $x''_i$  din  $[x_i, x_{i+1}]$ , astfel ca

$$f(x'_i) = m_i, f(x''_i) = M_i.$$

Atunci

$$S_d - s_d = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x'_i) - f(x''_i))(x_{i+1} - x_i).$$

Fie acum  $\epsilon > 0$ . Deoarece  $f$  este continuă pe intervalul compact  $[a, b]$ , este uniform continuă pe acest interval; numărului  $\epsilon$  ales îi corespunde deci un număr  $\delta(\epsilon) > 0$ , astfel încât pentru orice  $x', x'' \in [a, b]$  cu  $|x' - x''| < \delta(\epsilon)$  să avem  $|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{b-a}$ .

Pentru orice diviziune  $d$  cu  $v(d) < \delta(\epsilon)$ , avem  $|x_{i+1} - x_i| < \delta(\epsilon)$ , deci  $|x_i'' - x'| < \delta(\epsilon)$ , și, prin urmare,  $|f(x_i'') - f(x_i')| < \frac{\epsilon}{b-a}$ . Așadar, dacă  $v(d) < \delta(\epsilon)$ , atunci

$$\begin{aligned} S_d - s_d &= |S_d - s_d| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_i'') - f(x_i')| (x_{i+1} - x_i) \leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\epsilon}{b-a} (b - a) = \epsilon \end{aligned}$$

și deci  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

## 5. Criteriul lui Lebesgue

Pentru cele două clase de funcții integrabile, funcțiile continue și funcțiile monotone, mulțimea punctelor de discontinuitate este — într-un anumit sens — excepțională: vidă, la funcțiile continue și cel mult numărabilă, la funcțiile monotone (cap. V, § 4, nr. 2, propoziția 2). Criteriul lui Lebesgue, care va fi demonstrat mai jos, arată că mulțimea punctelor de continuitate caracterizează complet funcțiile integrabile în sensul lui Riemann. Spre deosebire de celealte criterii de integrabilitate, care folosesc sumele integrale, criteriul lui Lebesgue are meritul deosebit de a caracteriza funcțiile integrabile numai prin structura acestor funcții. Vom demonstra mai întâi o teoremă ajutătoare, care constituie ea însăși un criteriu de integrabilitate.

**Theoremă 1. (Paul du Bois Reymond).** O funcție  $f: [a, b] \rightarrow R$  este integrabilă în sensul lui Riemann pe  $[a, b]$  dacă și numai dacă este mărginită și pentru orice număr  $\epsilon > 0$ , mulțimea

$$E_\epsilon = \{x \mid \omega_f(x) \geq \epsilon\}$$

este de măsură Jordan nulă.

Să presupunem întâi că  $f$  este integrabilă. Atunci  $f$  este mărginită. Să presupunem prin absurd că ar exista un număr  $\epsilon_0 > 0$  cu proprietatea că mulțimea  $E_{\epsilon_0}$  nu este de măsură Jordan nulă, ci de măsură exterioară strict pozitivă:  $m_e(E_{\epsilon_0}) = \alpha > 0$ . Deoarece  $f$  este integrabilă, conform criteriului lui Darboux există o diviziune  $d$  a intervalului  $[a, b]$  astfel încât

$$S_d - s_d < \alpha \epsilon_0.$$

Dacă un interval  $[x_j, x_{j+1}]$  conține puncte  $x$  din  $E_{\epsilon_0}$ , avem

$$M_j - m_j = \omega_f([x_j, x_{j+1}]) \geq \omega_f(x) \geq \epsilon_0,$$

iar reuniunea tuturor intervalelor de acest fel conține pe  $E_\epsilon$ , deci suma lungimilor acestor intervale este  $\geq \alpha$ . Atunci

$$S_d - s_d = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) (x_{i+1} - x_i) \geq$$

$$\geq \sum' (M_j - m_j) (x_{j+1} - x_j) \geq \epsilon_0 \sum (x_{j+1} - x_j) \geq \epsilon_0 \alpha,$$

unde  $\Sigma'$  se referă numai la intervalele parțiale ce conțin puncte din  $E_\epsilon$ . Am ajuns astfel la contradicția  $\epsilon_0 \alpha \leq S_d - s_d < \epsilon_0 \alpha$ . Urmează că, oricare ar fi  $\epsilon > 0$ , mulțimea  $E_\epsilon$  este de măsură Jordan nulă.

Reciproc, să presupunem că pentru orice  $\epsilon > 0$  avem  $m_\epsilon(E_\epsilon) = 0$  și să arătăm că  $f$  este integrabilă. Fie  $\epsilon > 0$ . Să alegem  $\epsilon'$  și  $\epsilon''$  astfel încât

$$\omega_f([a, b]) \epsilon' < \frac{\epsilon}{4} \text{ și } (b - a) \epsilon'' < \frac{\epsilon}{2}.$$

Deoarece  $m_\epsilon(E_\epsilon) = 0$ , există o familie finită de intervale deschise  $(J_i)_{1 \leq i \leq p}$  care acoperă pe  $E_\epsilon$ , cu suma lungimilor  $< \epsilon'$ . Reuniunea  $F$  a acestor intervale este o mulțime deschisă. Diferența  $E = [a, b] - F$  este o reuniune de intervale și este închisă și mărginită, deci compactă. Conform propoziției din cap. II, § 5, nr. 7, pentru  $\epsilon'' > 0$  ales, există un număr  $\delta' > 0$  astfel încât oricare ar fi intervalul  $I \subset [a, b] - F$  de lungime  $< \delta'$  să avem  $\omega_f(I) < \epsilon''$ . Să alegem  $\delta = \min\left(\delta', \frac{\epsilon'}{2p}\right)$ . Fie acum  $d$  o diviziune oarecare a intervalului  $[a, b]$  cu  $v(d) < \delta$ . Pentru a arăta că  $f$  este integrabilă, va fi suficient să arătăm că

$$S_d - s_d < \epsilon.$$

Vom împărți  $S_d - s_d$  în trei părți astfel:

$$S_d - s_d = \sum (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3$$

unde  $\Sigma_1$  se referă la intervalele parțiale care nu au nici un punct comun cu  $F$ ,  $\Sigma_2$  se referă la intervalele parțiale conținute în  $F$ , iar  $\Sigma_3$  se referă la intervalele parțiale care acoperă o extremitate a uneia din intervalele  $J_i$ .

Pentru prima sumă avem :

$$\begin{aligned} \sum_1 (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) &= \sum_1 \omega_f([x_{i+1} - x_i]) (x_{i+1} - x_i) \leq \\ &\leq \epsilon'' \sum_1 (x_{i+1} - x_i) \leq \epsilon''(b - a), \end{aligned}$$

deoarece  $[x_i, x_{i+1}] \subset [a, b] - F$  și lungimea intervalelor  $[x_i, x_{i+1}]$  este  $< \delta$  deci  $< \delta'$ .

Pentru a doua sumă avem :

$$\begin{aligned} \sum_2 (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) &< (M - m) \sum_2 (x_{i+1} - x_i) \leq (M - m) \sum_2 m(J_i) \leq \\ &\leq (M - m) \epsilon'. \end{aligned}$$

Pentru a treia sumă avem :

$$\sum_3 (M_i - m_i) (x_{i+1} - x_i) \leq (M - m) \sum_3 (x_{i+1} - x_i) \leq 2p\delta(M - m) \leq \epsilon'(M - m),$$

deoarece numărul extremităților intervalelor  $J_i$  este  $2p$ . Așadar, avem  $S_d - s_d \leq \epsilon''(b - a) + 2\epsilon'(M - m) = \epsilon''(b - a) + 2\epsilon' \omega_f([a, b]) < \epsilon$  și teorema este complet demonstrată.

Înainte de a enunța criteriul lui Lebesgue, vom demonstra următoarea

**L e m ă . Dacă  $f: [a, b] \rightarrow R$  este o funcție mărginită, atunci pentru orice  $\epsilon > 0$ , mulțimea  $E_\epsilon = \{x | \omega_f(x) \geq \epsilon\}$  este închisă.**

Într-adevăr, fie  $x_0 \in [a, b]$  un punct de acumulare al lui  $E_\epsilon$ .

Să presupunem, prin absurd, că  $x_0 \notin E_\epsilon$ , deci că  $\omega_f(x_0) < \epsilon$ . Există atunci un interval deschis  $I_0$  cu centrul în  $x_0$ , cu  $\omega_f(I_0 \cap [a, b]) < \epsilon$ . În intervalul  $I_0$  există cel puțin un punct  $x \in E_\epsilon$ , deci  $\omega_f(x) \geq \epsilon$ . Intervalul  $I_0$  este o vecinătate a lui  $x$ , deci  $\omega_f(I_0 \cap [a, b]) \geq \omega_f(x) \geq \epsilon$  și am ajuns la o contradicție. Urmează deci că  $x_0 \in E_\epsilon$  și deci mulțimea  $E_\epsilon$  este închisă. Teorema următoare este cunoscută sub numele de „criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann”.

**T e o r e m a 2 (Lebesgue).** O funcție  $f: [a, b] \rightarrow R$  este integrabilă Riemann, dacă și numai dacă este mărginită și mulțimea punctelor în care  $f$  este discontinuă este neglijabilă (de măsură Lebesgue nulă).

Să presupunem întâi că  $f$  este integrabilă. Atunci  $f$  este mărginită. Fie  $(\epsilon_n)$  un sir descrescător de numere  $> 0$ , convergent către 0. În baza teoremei 1, fiecare mulțime  $E_{\epsilon_n} \{x | \omega_f(x) \geq \epsilon_n\}$  este de măsură Jordan nulă, deci este neglijabilă și deci reuniunea lor

$$E_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{\epsilon_n}$$

este de asemenea neglijabilă. Dar

$$E_0 = \{x | x \in [a, b], \omega_f(x) > 0\},$$

deci  $E_0$  este formată din toate punctele de discontinuitate ale lui  $f$ . Așadar, dacă  $f$  este integrabilă, mulțimea  $E_0$  a punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă.

Reciproc, să presupunem că  $f$  este mărginită și că mulțimea  $E_0$  a punctelor de discontinuitate ale lui  $f$  este neglijabilă și să arătăm că  $f$  este integrabilă.

Fie  $\delta > 0$ . Deoarece  $E_0$  este neglijabilă, există un sir  $(I_n)$  de intervale deschise care acoperă mulțimea  $E_0$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m(I_n) < \delta$ . Pentru orice  $\epsilon > 0$ , avem  $E_\epsilon \subset E_0$ , deci  $(I_n)$  constituie o acoperire a lui  $E_\epsilon$ . Deoarece,

conform lemei precedente,  $E_\varepsilon$  este o mulțime închisă și mărginită, deci compactă, din acoperirea  $(I_n)$  se poate extrage o acoperire finită  $(I_i)_{1 \leq i \leq n(\varepsilon)}$  a lui  $E_\varepsilon$ . Deducem că  $m_\varepsilon(E_\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} m(I_i) \leq \delta$ . Cum  $\delta > 0$  este arbitrar, rezultă că  $m_\varepsilon(E_\varepsilon) = 0$ , deci  $E_\varepsilon$  este de măsură Jordan nulă. Conform teoremei 1, deducem că  $f$  este integrabilă și astfel teorema este complet demonstrată.

**O b s e r v a t i i.** 1° Se spune că o proprietate punctuală definită pentru punctele dintr-o mulțime  $E \subset R$  are loc aproape peste tot pe  $E$  dacă mulțimea punctelor din  $E$  în care nu are loc este neglijabilă. Cu această denumire, o funcție este continuă aproape peste tot, dacă mulțimea punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă. Criteriul lui Lebesgue se poate enunța acum astfel:

**O funcție  $f: [a, b] \rightarrow R$  este integrabilă dacă și numai dacă este mărginită, și continuă aproape peste tot pe  $[a, b]$ .**

2° Din criteriul lui Lebesgue rezultă imediat că funcțiile continue și funcțiile monotone sunt integrabile, deoarece la funcțiile continue mulțimea punctelor de discontinuitate este vidă, deci neglijabilă, iar la funcțiile monotone mulțimea punctelor de discontinuitate este cel mult numărabilă, deci de asemenea neglijabilă.

### § 3. Proprietățile funcțiilor integrabile

Cu definiția integralei cu siruri sau cu  $\varepsilon$  și  $\delta$ , se pot demonstra atât proprietățile funcțiilor integrabile cât și proprietăți ale integralei.

Cu criteriul lui Darboux sau cu criteriul lui Lebesgue se pot demonstra numai proprietăți de integrabilitate, dar nu se pot demonstra proprietăți ale integralei, deoarece integrala nu apare în enunțul acestor criterii. Folosirea criteriului lui Lebesgue simplifică mult demonstrațiile.

#### 1. Spațiul funcțiilor integrabile

##### Liniaritatea integralei

**P r o p o z i t i a 1.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe  $[a, b]$  și  $\alpha, \beta \in R$ , atunci funcția  $\alpha f + \beta g$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Vom da întii o demonstrație folosind direct definiția cu șiruri a integrabilității și a integralei. Fie  $d$  o diviziune oarecare a lui  $[a, b]$ ; să alegem arbitrar punctele intermediare  $\xi_i$ . Avem

$$\begin{aligned}\sigma_d(\alpha f + \beta g) &= \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)](x_{i+1} - x_i) = \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) + \beta \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \alpha \sigma_d(f) + \beta \sigma_d(g).\end{aligned}$$

Fie  $(d_n)$  un șir de diviziuni ale intervalului  $[a, b]$  cu  $v(d_n) \rightarrow 0$ .

Pentru fiecare diviziune  $d_n$  avem :

$$\sigma_{d_n}(\alpha f + \beta g) = \alpha \sigma_{d_n}(f) + \beta \sigma_{d_n}(g).$$

Deoarece  $f$  și  $g$  sunt integrabile, avem

$$\sigma_{d_n}(f) \rightarrow \int_a^b f, \quad \sigma_{d_n}(g) \rightarrow \int_a^b g,$$

deci

$$\sigma_{d_n}(\alpha f + \beta g) \rightarrow \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Rezultă că  $\alpha f + \beta g$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și că

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Să dăm acum o demonstrație a integrabilității funcției  $\alpha f + \beta g$  folosind criteriul lui Lebesgue. Să observăm întii că  $f$  și  $g$  sunt mărginite, fiind integrabile, deci funcția  $\alpha f + \beta g$  este de asemenea mărginită. Dacă notăm cu  $A$  mulțimile punctelor de discontinuitate a lui  $f$  și cu  $B$  mulțimea punctelor de discontinuitate a lui  $g$ , mulțimile  $A$  și  $B$  sunt neglijabile, deci  $A \cup B$  este de asemenea neglijabilă. Mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției  $\alpha f + \beta g$  este conținută în  $A \cup B$  deci este neglijabilă, deci  $\alpha f + \beta g$  este integrabilă. Egalitatea din enunț se obține acum astfel : Deoarece știm că toate funcțiile care intervin în egalitate sunt integrabile, putem alege un șir particular de diviziuni  $(d_n)$  ale intervalului  $[a, b]$  cu  $v(d_n) \rightarrow 0$  și în fiecare diviziune putem alege punctele intermediare  $\xi_i$ , într-un mod particular (de exemplu la extremitatea stângă a intervalor parțiale); să formăm sumele integrale relative la funcțiile  $f$ ,  $g$  și  $\alpha f + \beta g$ .

Deoarece știm că toate aceste funcții sunt integrabile, avem

$$\sigma_{d_n}(\alpha f + \beta g) \rightarrow \int_a^b (\alpha f + \beta g)$$

$$\sigma_{d_n}(f) \rightarrow \int_a^b f \quad \text{și} \quad \sigma_{d_n}(g) \rightarrow \int_a^b g.$$

Pentru sumele integrabile, se arată ca mai sus că avem egalitatea

$$\sigma_{d_n}(\alpha f + \beta g) = \alpha \sigma_{d_n}(f) + \beta \sigma_{d_n}(g)$$

de unde, trecind la limită, obținem

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

**O b s e r v a t i i.** 1° Mulțimea funcțiilor integrabile pe intervalul  $[a, b]$  este un spațiu vectorial, iar aplicația  $f \rightarrow \int_a^b f$  este o funcțională liniară pe acest spațiu.

$$2^\circ \text{ Egalitatea } \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g \text{ rămîne adevărată chiar dacă } a > b.$$

3° Dacă  $f + g$  (sau  $f - g$ ) este integrabilă nu rezultă că  $f$  și  $g$  sunt integrabile.

**P r o p o z i t i a 2.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe  $[a, b]$  atunci funcția  $fg$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

Deoarece  $f$  și  $g$  sunt integrabile, ele sunt mărginite, iar mulțimile  $A$  și  $B$  ale punctelor de discontinuitate sunt neglijabile. Rezultă că funcția  $fg$  este mărginită și că mulțimea punctelor sale de discontinuitate este conținută în  $A \cup B$ , deci este neglijabilă, și deci  $fg$  este integrabilă.

**O b s e r v a t i e.** Mulțimea funcțiilor integrabile pe  $[a, b]$  este o *algebră*. Integrala  $\int_a^b f$  nu este însă o funcțională *multiplicativă* pe acest spațiu; în general avem:

$$\int_a^b fg \neq \int_a^b f \int_a^b g.$$

**P r o p o z i t i a 3.** Dacă  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ , dacă  $f$  nu se anulează pe  $[a, b]$  și dacă funcția  $\frac{1}{f}$  este mărginită, atunci  $\frac{1}{f}$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

Într-adevăr funcția  $\frac{1}{f}$  este continuă în aceleasi puncte în care este continuă și  $f$ , deci  $\frac{1}{f}$  este continuă aproape peste tot pe  $[a, b]$  și fiind mărginită, prin ipoteză, este integrabilă pe  $[a, b]$ .

**Propoziția 4.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe  $[a, b]$  și dacă funcția  $f^g$  este definită pe  $[a, b]$  atunci  $f^g$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

Într-adevăr,  $f$  și  $g$  sunt mărginite și continue aproape peste tot, deci  $f^g$  este mărginită și continuă aproape peste tot, deci este integrabilă.

**Corolar.** Dacă  $f \geq 0$  și dacă  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  atunci  $\sqrt{f}$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

## 2. Proprietăți de monotonie ale integralei

**Propoziția 5.** Dacă  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și  $f \geq 0$ , atunci  $\int_a^b f \geq 0$ .

Să observăm întii că pentru orice diviziune  $d$  a intervalului  $[a, b]$  și pentru orice puncte intermediare  $\xi_i$  avem

$$\sigma_d(f) = \sum f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \geq 0$$

deoarece  $f(\xi_i) \geq 0$  și  $x_{i+1} - x_i \geq 0$ .

Să alegem acum un sir particular  $(d_n)$  de diviziuni ale lui  $[a, b]$  și în fiecare diviziune să alegem punctele intermediare  $\xi_i$  într-un mod particular. Pentru sumele integrale corespunzătoare avem:

$$\sigma_{d_n}(f) \rightarrow \int_a^b f.$$

Dar pentru fiecare  $n$  avem, ca mai sus

$$\sigma_{d_n}(f) \geq 0$$

și trecind la limită obținem

$$\int_a^b f \geq 0.$$

**Observație.** Dacă  $f \geq 0$  și  $a \leq b$  avem  $\int_a^b f \leq 0$ .

**Corolarul 1.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe  $[a, b]$  și dacă  $f \leq g$  atunci

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Într-adevăr,  $g - f \geq 0$  și  $f - g$  este integrabilă, deci

$$\int_a^b (f - g) \leq 0.$$

Dar

$$\int_a^b (f - g) = \int_a^b f - \int_a^b g$$

de unde

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Observație. Dacă  $f \leq g$  și  $a \leq b$  avem  $\int_a^b f \geq \int_b^a g$ .

**Corolarul 2.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe  $[a, b]$  și dacă  $m \leq f \leq M$  și  $g \geq 0$ , atunci

$$m \int_a^b g \, dx \leq \int_a^b fg \, dx \leq M \int_a^b g \, dx.$$

Într-adevăr, deoarece  $g \geq 0$ , din inegalitățile  $m \leq f \leq M$  deducem  $mg \leq f \leq Mg$  și deci, prin integrare

$$\int_a^b mg \, dx \leq \int_a^b fg \, dx \leq \int_a^b Mg \, dx$$

de unde

$$m \int_a^b g \, dx \leq \int_a^b fg \, dx \leq M \int_a^b g \, dx.$$

Observație. Dacă  $m \leq f \leq M$  și  $g \geq 0$  și dacă  $a \leq b$ , atunci

$$m \int_b^a g \, dx \geq \int_b^a fg \, dx \geq M \int_b^a g \, dx.$$

**Corolarul 3.** Dacă  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și  $m \leq f \leq M$  atunci

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a).$$

Într-adevăr, se ia  $g(x) \equiv 1$  în corolarul 2, și se observă că

$$\int_a^b g \, dx = b - a.$$

O b s e r v a t i i . 1° Corolarul 3 rezultă și din inegalitățile

$$m(b - a) \leq s_d \leq S_d \leq M(b - a) \text{ și } s_d \leq \int_a^b f < S_d.$$

2° Dacă  $m \leq f \leq M$  și  $a \leq b$ , avem  $m(a - b) \geq \int_a^b f \geq M(a - b)$

**Propozitia 5.** Dacă  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  atunci funcția  $|f|$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Într-adevăr,  $f$  este mărginită și mulțimea  $A$  a punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă. Rezultă că  $|f|$  este mărginită. Deoarece  $|f|$  este continuu în orice punct în care  $f$  este continuă (și, eventual și în alte puncte), rezultă că mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui  $|f|$  este conținută în  $A$ , deci este neglijabilă, și deci  $|f|$  este integrabilă.

Pentru a demonstra inegalitatea din enunț, plecăm de la inegalitatea

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

de unde, prin integrare obținem

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

și deoarece  $\int_a^b |f| \geq 0$ , deducem

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

**O b s e r v a t i i.** 1° Dacă  $|f|$  este integrabilă, nu rezultă că  $f$  este integrabilă.

*Exemplu.* Funcția  $f$  definită pe  $[a, b]$ ,  $a < b$ , astfel:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ -1, & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$$

nu este integrabilă, deoarece mulțimea punctelor sale de discontinuitate este  $[a, b]$  și nu este neglijabilă. Avem însă  $|f(x)| \equiv 1$ , deci  $|f|$  este continuă și deci este integrabilă.

**C o r o l a r u l 1.** Pentru orice funcție integrabilă  $f$  avem

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|$$

fie că  $a \leq b$ , fie că  $a \geq b$ .

Dacă  $a \leq b$ , avem  $\int_a^b |f| \geq 0$  deci

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|$$

iar dacă  $a \geq b$ , avem  $b \leq a$ , deci

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_b^a f(x) dx \right| \leq \int_b^a |f(x)| dx = \left| \int_b^a |f(x)| dx \right|$$

**C o r o l a r u l 2.** Dacă  $f$  este integrabilă și dacă  $|f| \leq M$ , atunci

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M|b - a|$$

fie că  $a \leq b$ , fie că  $a \geq b$ .

**Într-adevăr,** dacă  $a \leq b$ , atunci

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq M(b - a) = M|b - a|$$

deoarece  $b - a \geq 0$ ; iar dacă  $a \geq b$ , atunci

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_b^a f(x) dx \right| \leq M(a - b) = M|a - b|.$$

**C o r o l a r u l 3.** O funcție  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă pe  $[a, b]$  dacă și numai dacă partea pozitivă  $f^+$  și partea negativă  $f^-$  sunt integrabile pe  $[a, b]$ .

Se ține seama de egalitățile

$$\begin{cases} f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \\ f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \end{cases} \text{ și } \begin{cases} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{cases}$$

**C o r o l a r u l 4.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe  $[a, b]$ , atunci anvelopa superioară  $\sup(f, g)$  și anvelopa inferioară  $\inf(f, g)$  sunt integrabile pe  $[a, b]$ .

Se ține seama de egalitățile

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

$$\inf(f, g) = -\sup(-f, -g).$$

### 3. Formule de medie

**P r o p o z i ᄀ i a 6.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe  $[a, b]$  și dacă  $g \geq 0$ , există un număr  $\mu$  cuprins între marginile  $m$  și  $M$  ale funcției  $f$ , astfel că

$$\int_a^b fg \, dx = \mu \int_a^b g \, dx.$$

Din inegalitatea  $m \leq f \leq M$  deducem  $mg \leq fg \leq Mg$  (deoarece  $g \geq 0$ ) și deci

$$m \int_a^b g \, dx \leq \int_a^b fg \, dx \leq M \int_a^b g \, dx.$$

Să observăm că, deoarece  $g \geq 0$  și  $a \leq b$ , avem  $\int_a^b g \, dx \geq 0$ .

Dacă  $\int_a^b g \, dx = 0$ , atunci din aceste inegalități deducem de asemenea

$\int_a^b fg \, dx = 0$ , deci, luând un număr oarecare  $\mu \in [m, M]$ , avem

$$\int_a^b fg \, dx = \mu \int_a^b g \, dx = 0.$$

Dacă  $\int_a^b g \, dx > 0$ , atunci

$$m \leq \frac{\int_a^b fg \, dx}{\int_a^b g \, dx} \leq M$$

$$\text{și, luând } \mu = \frac{\int_a^b fg \, dx}{\int_a^b g \, dx}, \text{ avem } m \leq \mu \leq M \text{ și}$$

$$\int_a^b fg \, dx = \mu \int_a^b g \, dx.$$

Acestă egalitate se numește *formula mediei pentru integrale*.

**Corolarul 1.** Dacă  $f$  este continuă, iar  $g$  este pozitivă și integrabilă pe  $[a, b]$ , există un număr  $\xi \in (a, b)$  astfel că

$$\int_a^b fg \, dx = f(\xi) \int_a^b g \, dx.$$

În adevăr,  $f$  fiind continuă pe  $[a, b]$ , își atinge marginile pe acest interval; există deci două puncte  $x_1$  și  $x_2$  în  $[a, b]$  astfel ca  $f(x_1) = m$  și  $f(x_2) = M$  și deci  $f(x_1) \leq \mu \leq f(x_2)$ , unde  $\mu$  este astfel că

$$\int_a^b fg \, dx = \mu \int_a^b g \, dx.$$

Dar, fiind continuă,  $f$  are proprietatea lui Darboux: ea nu poate trece de la valoarea  $f(x_1)$  la valoarea  $f(x_2)$  fără a trece prin valoarea intermediară  $\mu$ ; există deci un punct  $\xi \in [a, b]$  astfel că  $\mu = f(\xi)$ , și deci

$$\int_a^b fg \, dx = f(\xi) \int_a^b g \, dx.$$

**Observație.** Propoziția 6 și corolarul 1 rămân valabile și dacă  $g \leq 0$ .

**Corolarul 2.** Dacă  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ , există un număr cuprins între marginile funcției  $f$ , astfel că

$$\int_a^b f dx = \mu(b - a).$$

Se aplică formula mediei pentru funcția  $g(x) \equiv 1$ , ținând seama că

$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b 1 \cdot dx = b - a.$$

**Corolarul 3.** Dacă  $f$  este continuă pe  $[a, b]$ , există un punct  $\xi \in (a, b)$ , astfel că

$$\int_a^b f dx = f(\xi)(b - a)$$

Se aplică corolarul 1, pentru funcția  $g(x) \equiv 1$ .

**Observație.** Propoziția 6 și corolarele sale sunt valabile fie ca  $a \leq b$ , fie că  $a \geq b$ .

#### 4. Proprietatea de ereditate

##### Aditivitatea integralei ca funcție de interval

**Aditivitatea integralei ca funcție de interval.** Proprietatea enunțată în propoziția următoare se numește *proprietate de ereditate\**.

**Propoziția 7.** Dacă  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  atunci  $f$  este integrabilă pe orice subinterval  $[a', b'] \subset [a, b]$ .

Într-adevăr,  $f$  este mărginită pe  $[a, b]$ , deci este mărginită și pe  $[a', b']$ . Pe de altă parte mulțimea  $A$  a punctelor de discontinuitate din  $[a, b]$  este neglijabilă, iar mulțimea  $A'$  a punctelor de discontinuitate din  $[a', b']$  este conținută în  $A$ , deci  $A'$  este neglijabilă, și deci  $f$  este integrabilă pe  $[a', b']$ .

Proprietatea exprimată de egalitatea din propoziția 8 se numește proprietatea de *aditivitate a integralei*, considerată ca *funcție de interval*.

\* O proprietate care se referă la o clasă  $\mathcal{C}$  de părți ale unei mulțimi  $E$  este ereditară dacă de îndată ce are loc pentru o mulțime  $A \in \mathcal{C}$  are loc pentru orice submulțime  $A' \subset A$  din  $\mathcal{C}$ .

**Propozitie 8.** Dacă  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ , atunci oricare ar fi punctul  $c \in [a, b]$  avem

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f.$$

Dacă  $c = a$ , atunci  $\int_a^c f = 0$  și  $\int_c^b f = \int_a^b f$ , deci formula este verificată.

De asemenea, formula este verificată dacă  $c = b$ . Să resupunem deci că  $a < c < b$ . Funcția  $f$  este integrabilă pe intervalele  $[a, c]$  și  $[c, b]$ .

Fie  $(d'_n)$  un sir de diviziuni ale intervalului  $[a, c]$  cu  $v(d'_n) \rightarrow 0$ . Atunci

$$\sigma_{d'_n} \rightarrow \int_a^c f,$$

oricare ar fi punctele intermediare alese în fiecare diviziune  $d'_n$ .

Fie  $(d''_n)$  un sir de diviziuni ale intervalului  $[c, b]$  cu  $v(d''_n) \rightarrow 0$ . Atunci

$$\sigma_{d''_n} \rightarrow \int_c^b f,$$

oricare ar fi punctele intermediare alese în fiecare diviziune  $d''_n$ . Pentru fiecare  $n \in N$  să notăm  $d_n = d'_n \cup d''_n$ . Am obținut astfel un sir de diviziuni  $(d_n)$  ale intervalului  $[a, b]$  și avem de asemenea  $v(d_n) \rightarrow 0$ , deoarece  $v(d_n) \leq v(d'_n) + v(d''_n)$ . Atunci

$$\sigma_{d_n} \rightarrow \int_a^b f.$$

Dar

$$\sigma_{d_n} = \sigma_{d'_n} + \sigma_{d''_n},$$

Trecind la limită, obținem

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

**O b s e r v a t i e.** Egalitatea  $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$  este adevărată, oricare ar fi ordinea de succesiune (după mărime) a punctelor  $a, b$  și  $c$ . De exemplu, dacă  $a < b < c$ , avem  $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ , deci

$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Au loc și proprietăți reciproce proprietății de ereditate.

**P r o p o z i t i a 9.** Dacă  $f$  este integrabilă pe intervalele  $[a, c]$  și  $[c, b]$  atunci  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

Intr-adevăr,  $f$  este mărginită pe  $[a, c]$  și  $[c, b]$  deci este mărginită pe  $[a, b]$ . Pe de altă parte, mulțimea  $A$  a punctelor de discontinuitate din  $[a, c]$  și mulțimea  $B$  a punctelor de discontinuitate din  $[c, b]$  sunt neglijabile. Mulțimea punctelor de discontinuitate din  $[a, b]$  este  $A \cup B$ , deci este neglijabilă și deci  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

**C o r o l a r.** Dacă  $f$  este integrabilă pe intervalele  $[a, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, b]$  atunci  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

**P r o p o z i t i a 10.** Dacă  $f$  este mărginită pe  $[a, b]$  și este integrabilă pe orice interval compact  $[a, x]$  cu  $x < b$ , atunci  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

Fie  $(x_n)$  un sir crescător din  $[a, b]$ , convergent către  $b$ . Avem  $x_n < b$  pentru orice  $n$ , deci  $f$  este integrabilă pe orice interval  $[a, x_n]$ , deci mulțimea  $E_n$  a punctelor de discontinuitate din  $[a, x_n]$  ale lui  $f$  este neglijabilă. Cum orice punct de discontinuitate  $x < b$  al lui  $f$  se află într-o mulțime  $E_n$ , urmează că mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui  $f$  este formată de reuniunea  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , și, eventual, din  $b$ , deci este neglijabilă, și deci  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

**P r o p o z i t i a 10'.** Dacă  $f$  este mărginită pe  $[a, b]$  și este integrabilă pe orice interval compact  $[x, b]$  cu  $a < x$ , atunci  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

**C o r o l a r u l 1.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt egale pe  $[a, b]$ , cu excepția unui număr finit de puncte  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , și dacă una din ele este integrabilă pe  $[a, b]$ , atunci și cealaltă este integrabilă pe  $[a, b]$  și integralele lor sunt egale.

Să presupunem că  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ . Atunci  $f$  este integrabilă pe orice interval compact din  $[a, b]$  și este mărginită pe  $[a, b]$ .

Rezultă atunci că și  $g$  este mărginită pe  $[a, b]$  și integrabilă pe orice interval compact din  $[a, b]$  care nu conține nici unul din punctele  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , deci este integrabilă pe  $[a, b]$ .

Fie acum un sir  $(d_n)$  de diviziuni ale lui  $[a, b]$  cu  $v(d_n) \rightarrow 0$ . În fiecare diviziune  $d_n$  să alegem punctele intermediare  $\xi_i$  diferite de punctele  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Atunci  $f(\xi_i) = g(\xi_i)$ , deci

$$\sigma_{d_n}(f) = \sum_i f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_i g(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sigma_{d_n}(g).$$

Prin trecere la limită obținem

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

**C o r o l a r u l 2.** Dacă  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  și dacă se modifică valoarea funcției în mod arbitrar într-un număr finit de puncte din  $[a, b]$  atunci funcția obținută este de asemenea integrabilă pe  $[a, b]$  și are aceeași integrală ca și  $f$ .

## 5. Integrarea pe o reuniune de intervale

Fie  $f$  o funcție definită pe un interval mărginit  $I$ , de forma  $[a, b]$ , sau  $(a, b]$  sau  $[a, b)$ .

Fie  $f_1$  și  $f_2$  două extensiuni ale funcției  $f$  la intervalul închis  $\bar{I} = [a, b]$ :

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in I; \\ \lambda_1, & \text{dacă } x \notin I; \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in I; \\ \lambda_2, & \text{dacă } x \notin I. \end{cases}$$

Funcțiile  $f_1$  și  $f_2$  sunt de asemenea mărginite pe  $\bar{I} = [a, b]$  și sunt egale pe  $\bar{I}$  cu excepția, eventual, a extremităților  $a$  și  $b$ .

Dacă una din funcțiile  $f_1$  și  $f_2$  este integrabilă pe  $[a, b]$ , atunci și cealaltă este integrabilă pe  $[a, b]$  și integralele lor sunt egale,  $\int_a^b f_1 dx = \int_a^b f_2 dx$ .

Așadar, integrabilitatea și integrala unei extensiuni  $f_1$  a lui  $f$  nu depind de valorile date extensiunii în punctele  $a$  și  $b$ , ci numai de funcția  $f$  însăși.

Sintem conduși astfel la următoarea:

**D e f i n i t i e .** Se spune că funcția  $f$  este integrabilă pe intervalul  $I$ , dacă o extensiune a sa  $f_1$  la intervalul  $\bar{I}$  este integrabilă. Integrala funcției  $f$  pe intervalul  $I$  se notează  $\int_I f dx$  sau, încă,  $\int_a^b f dx$  și este egală prin definiție cu integrala extensiunii  $f_1$  pe intervalul  $I = [a, b]$ :

$$\int_I f dx = \int_a^b f dx = \int_a^b f_1 dx.$$

Din propoziția 10 rezultă

**Propoziția 11.** Funcția  $f$  este integrabilă pe  $I$  dacă și numai dacă este mărginită pe  $I$  și este integrabilă pe orice interval compact conținut în  $I$ .

Toate proprietățile integralelor definite pe un interval compact  $[a, b]$  rămân valabile și pentru integralele funcțiilor definite pe intervale mărginite oarecare.

Fie acum  $f$  o funcție definită pe o reuniune de intervale mărginite și disjuncte,  $A = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$ .

**Definiție.** Se spune că funcția  $f$  este integrabilă pe multimea  $A$ , dacă este integrabilă pe fiecare din intervalele  $I_1, I_2, \dots, I_n$ . Integrala funcției  $f$  pe multimea  $A$ , notată  $\int_A f dx$ , este egală prin definiție cu suma integralelor pe cele  $n$  intervale:

$$\int_A f dx = \int_{I_1} f dx + \int_{I_2} f dx + \dots + \int_{I_n} f dx.$$

Se verifică de asemenea ușor că toate proprietățile integralelor definite pe un interval rămân valabile pentru integralele funcțiilor definite pe o reuniune de intervale:

1) Orice funcție integrabilă pe  $A$  este mărginită pe  $A$ .

2) Orice funcție continuă pe  $A$  este integrabilă pe  $A$ .

3) Orice funcție definită pe  $A$  și monotonă pe porțiuni este integrabilă pe  $A$ .

4) Multimea funcțiilor integrabile pe  $A$  este o algebră, iar integrala este o funcțională liniară:

$$\int_A (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_A f dx + \beta \int_A g dx.$$

5) Dacă  $f$  este integrabilă pe  $A$ , atunci  $|f|$  este integrabilă pe  $A$  și

$$\left| \int_A f dx \right| \leq \int_A |f(x)| dx.$$

6. Integrala este o funcțională pozitivă (și monotonă)

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_A f dx \geq 0 \text{ și } (f \leq g \Rightarrow \int_A f dx \leq \int_A g dx).$$

7) Formula mediei: dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe  $A$  și dacă  $g \geq 0$  (sau  $g \leq 0$ ) atunci există un număr  $\mu$  cuprins între marginile  $m$  și  $M$  ale funcției  $f$ , astfel ca

$$\int_A fg dx = \mu \int_A g dx.$$

Pentru fiecare interval  $I_i$  cu extremitățile  $a_i$  și  $b_i$ ,  $a_i < b_i$  să notăm cu  $m(I_i)$  lungimea sa:

$$m(I_i) = b_i - a_i.$$

Să notăm de asemenea cu  $m(A)$  suma lungimilor  $m(I_i)$  ale intervalelor  $I_i$  care o compun

$$m(A) = m(I_1) + m(I_2) + \dots + m(I_n) = (b_1 - a_1) + \\ + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n).$$

8) Dacă  $f(x) \equiv \alpha$  pe  $A$ , atunci

$$\int_A dx = \alpha m(A).$$

Într-adevăr:

$$\int_A \alpha dx = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} \alpha dx = \sum_{i=1}^n \alpha dx = \sum_{i=1}^n \alpha(b_i - a_i) = \alpha \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) = \alpha m(A).$$

Lufind în formula mediei  $g(x) \equiv 1$  rezultă că:

9) Dacă  $f$  este integrabilă pe  $A$ , există un număr  $\mu$  cuprins între marginile  $m$  și  $M$  ale lui  $f$  astfel ca

$$\int_A f dx = \mu m(A).$$

10) Proprietatea de ereditate. Dacă  $f$  este integrabilă pe  $A$ , atunci  $f$  este integrabilă pe orice submulțime  $A' \subset A$ , care este reuniune a unei familii finite de intervale.

11) Proprietatea de aditivitate a integralei ca funcție de mulțime. Dacă  $f$  este integrabilă pe  $A$  și dacă  $A$  este reuniunea unui număr finit de mulțimi  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , disjuncte două cîte două, unde  $A_1, \dots, A_n$  sunt reuniuni finite de intervale, atunci

$$\int_A f dx = \int_{\bigcup_{i=1}^n A_i} f dx = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f dx.$$

Mulțimile care sunt reuniuni finite de intervale mărginite formează un clan  $\mathcal{M}$ : reuniunea, intersecția și diferența a două astfel de mulțimi sunt mulțimi de același fel.

Lungimea  $m(A)$  a mulțimilor  $A \in \mathcal{M}$  este pozitivă și aditivă:

- 1)  $m(A) \geq 0$ ;
- 2)  $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ , dacă  $A \cap B = \emptyset$ .

Fie  $f$  o funcție definită pe  $R$  și integrabilă pe fiecare mulțime  $A \in \mathcal{M}$ . Să notăm

$$\mu(A) = \int_A f dx.$$

Proprietatea de aditivitate a integralei, ca funcție de mulțime, se scrie astfel:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ dacă } A \cap B = \emptyset.$$

Așadar, funcția  $\mu \rightarrow \mu(A)$  definită pe  $\mathcal{M}$  este o măsură reală. Ea se numește *integrală nefiniță* a funcției  $f$ .

Dacă funcția  $f$  este *pozitivă*, atunci integrala sa nefiniță este o măsură pozitivă.

Se spune că măsura  $\mu$  este absolut continuă în raport cu măsura  $m$ , dacă  $m(A) = 0$  implica  $\mu(A) = 0$ .

Din formula mediei

$$\mu(A) = \int_A f dx = \lambda m(A)$$

rezultă că dacă  $m(A) = 0$ , atunci  $\mu(A) = 0$ , deci integrala nefiniță a funcției este absolut continuă în raport cu măsura  $m$ .

**O b s e r v a t i e.** Dacă funcția  $f$  nu este definită pe toată dreapta, ci numai pe o mulțime  $M \subseteq \mathbb{M}$ , o prelungim pe toată dreapta, dându-i valoarea zero pe  $\mathbb{C}M$ . Să notăm tot cu  $f$  prelungirea astfel obținută. Atunci

$$\int_A f = \int_{A \cap M} f, \text{ deci } \int_A f = 0 \text{ dacă } A \cap M = \emptyset.$$

## § 4. Primitive

### 1. Integrala nedefinită

Fie  $f$  o funcție definită pe un interval  $I$  (mărginit sau nemărginit) și integrabilă pe orice interval compact conținut în  $I$ . Fie  $\alpha$  un punct oarecare din  $I$ , pe care îl menținem fixat. Pentru orice punct  $x \in I$ , funcția  $f$  este integrabilă pe intervalul compact  $[\alpha, x]$  sau  $[\alpha, x]$  (după cum  $x \leq \alpha$  sau  $\alpha \leq x$ ).

Să notăm

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt.$$

Funcția  $F(x)$  este definită pentru orice punct  $x \in I$ .  
Dacă  $a$  și  $b$  sunt două puncte din  $I$ , avem

$$\int_a^a f + \int_a^b f = \int_a^b f,$$

deci

$$\int_a^b f = \int_a^b f - \int_a^a f$$

sau, cu notația de mai sus,

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

**O b s e r v a t i i.** 1° Să presupunem că  $\alpha \leq x$  și să notăm  $I_x = [\alpha, x]$ .  
Atunci

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt = \int_{I_x} f(t) dt = \mu(I_x).$$

Așadar, valoarea funcției  $F$  într-un punct  $x \geq \alpha$  este egală cu valoarea integralei definite  $\mu$  a lui  $f$ , pentru intervalul  $I_x = [\alpha, x]$ .

Din această cauză, funcția de punct  $F(x)$  se numește de asemenea, prin abuz de limbaj, *integrala nedefinită* a funcției  $f$ .

2° Pentru fiecare punct  $\alpha \in I$  obținem cîte o funcție  $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$ .

Cunoașterea integralei funcției  $f$  pe orice interval compact din  $I$  ne permite să definim funcția  $F$ . Reciproc, dacă am putea determina pe altă cale funcția  $F$ , am putea apoi calcula foarte ușor integrala funcției  $f$ , din egalitatea

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Vom arăta mai departe că, pentru anumite funcții, acest lucru este posibil. Pentru aceasta va trebui mai întîi să studiem proprietăile funcției  $F$ .

**Propoziția 1.** Funcția  $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$  este continuă pe  $I$ .

Fie  $x_0$  un punct oarecare din  $I$ . Să presupunem întîi că  $x_0$  nu este o extremitate a intervalului  $I$ ; există atunci un interval  $[a, b]$  conținut în  $I$ , și care conține în interiorul său pe  $x_0$ . Funcția  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ , deci este mărginită pe acest interval. Fie

$$M = \sup_{a < t < b} f(t).$$

Pentru orice  $x \in (a, b)$  avem

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t)| dt \right| \leq M|x - x_0|.$$

Dar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| M = 0$$

și deci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in (a, b)}} F(x) = F(x_0),$$

adică  $F$  este continuă în punctul  $x_0$ , relativ la intervalul  $(a, b)$ . Dar intervalul  $(a, b)$  este o vecinătate a lui  $x_0$ , deci  $F$  este continuă în punctul  $x_0$  și relativ la intervalul  $I$ .

Dacă  $x_0$  este extremitatea stîngă a intervalului  $I$ , se consideră un interval  $[x_0, b] \subset I$  cu  $x_0 < b$ . Funcția  $f$  este integrabilă și deci mărginită pe intervalul  $[x_0, b]$ ; fie  $M = \sup_{x_0 < t < b} f(t)$ . Pentru orice  $x \in (x_0, b]$ , avem

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)| dt \leq M(x - x_0),$$

de unde, iarăși, se deduce că  $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$ , adică  $F$  este continuă în  $x_0$ .

Dacă  $x_0$  este extremitatea dreaptă a intervalului  $I$ , demonstrația se face la fel.

**O b s e r v a t i i.** 1° Dacă funcția  $f$  este mărginită pe întregul interval  $I$ , nu mai este nevoie să demonstreăm propoziția separat pentru punctele interioare, și separat pentru extremități. Notând, în acest caz,

$$M = \sup_{t \in I} |f(t)|$$

avem, pentru orice  $x' \in I$  și  $x'' \in I$ ,

$$|F(x') - F(x'')| = \left| \int_{x''}^{x'} f(t) dt \right| \leq M |x' - x''|.$$

Așadar, dacă  $f$  este mărginită pe  $I$  (în particular, dacă intervalul  $I$  este mărginit și  $f$  este integrabilă pe  $I$ ) funcția  $F$  este lipschitziană pe  $I$ , deci este uniform continuă pe  $I$ , și cu atât mai mult, continuă pe  $\bar{I}$ .

2° Relația  $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$  înseamnă :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt.$$

Această egalitate ne permite să calculăm integrala pe intervalul  $[\alpha, x_0]$ , cunoșcind integrala pe celelalte intervale compacte conținute în  $[\alpha, x_0]$ .

**P r o p o z i t i a 2.** Funcția  $F$  este derivabilă în orice punct  $x_0 \in I$  în care funcția  $f$  este continuă și  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

Fie  $\varepsilon > 0$ ; deoarece  $f$  este continuă în  $x_0$ , există un număr  $\delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât pentru orice  $t \in I$  cu  $|t - x_0| < \delta(\varepsilon)$ , să avem  $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ , sau

$$f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Fie  $x > x_0$  cu  $x - x_0 < \delta(\varepsilon)$ . Pentru orice  $t \in [x_0, x]$  avem  $f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon$ , deci

$$\int_{x_0}^x (f(x_0) - \varepsilon) dt \leq \int_{x_0}^x f(t) dt \leq \int_{x_0}^x (f(x_0) + \varepsilon) dt,$$

adică

$[f(x_0) - \varepsilon] (x - x_0) \leq F(x) - F(x_0) \leq [f(x_0) + \varepsilon] (x - x_0)$   
și, împărțind cu  $x - x_0 > 0$ ,

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} < f(x_0) + \varepsilon.$$

Fie  $x < x_0$  cu  $x_0 - x < \delta(\epsilon)$ . Pentru orice  $t \in [x, x_0]$  avem  $f(x_0) - \epsilon < f(t) < f(x_0) + \epsilon$  deci

$$\int_x^{x_0} [f(x_0) - \epsilon] dt \leq \int_x^{x_0} f(t) dt \leq \int_x^{x_0} [f(x_0) + \epsilon] dt,$$

adică

$$[f(x_0) - \epsilon](x_0 - x) \leq F(x_0) - F(x) \leq [f(x_0) + \epsilon](x_0 - x)$$

și, împărțind cu  $x_0 - x > 0$ , obținem

$$f(x_0) - \epsilon \leq \frac{F(x_0) - F(x)}{x_0 - x} \leq f(x_0) + \epsilon$$

sau

$$f(x_0) - \epsilon \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0) + \epsilon.$$

Așadar, oricare ar fi  $x \neq x_0$  cu  $|x - x_0| < \delta(\epsilon)$ , avem

$$f(x_0) - \epsilon \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0) + \epsilon$$

sau

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \epsilon.$$

Rezultă atunci că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$

deci  $F$  este derivabilă în  $x_0$  și  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

**O b s e r v a ţ i i .** 1° Dacă  $F$  este derivabilă într-un punct  $x_0 \in I$ , nu rezultă că  $f$  este continuă în  $x_0$ .

În adevară, plecind de la o funcție  $g$  continuă pe  $I$  (deci integrabilă pe orice interval compact din  $I$ ) și punând

$$F(x) = \int_a^x g(t) dt,$$

avem  $F'(x_0) = g(x_0)$ ; dacă modificăm valoarea funcției  $g$  numai în punctul  $x_0$ , obținem o funcție  $f$  care este integrabilă pe fiecare interval compact din  $I$  și are aceeași integrală ca și  $g$ , deci

$$F(x) = \int_a^x f(z) dz.$$

Dar  $f(x_0) \neq g(x_0)$ , deci  $F'(x_0) \neq f(x_0)$ .

2° Este posibil ca  $F'(x_0) = f(x_0)$  fără ca  $f$  să fie continuă în  $x_0$ , după cum va fi arătat mai departe pe un exemplu.

**Corolar.** Dacă  $f$  este continuă pe întreg intervalul  $I$ , atunci funcția  $F$  este derivabilă pe  $I$  și  $F' = f$ .

Așadar, dacă funcția  $f$  este continuă pe  $I$ , funcția

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

este o *primitivă* a lui  $f$ , oricare ar fi  $a \in I$ , și avem

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

oricare ar fi  $a$  și  $b$  din  $I$ .

## 2. Formula lui Leibniz-Newton

Egalitatea  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  reduce calculul integralei unei funcții continue  $f$ , la găsirea unei primitive  $F$  a lui  $f$ . Se impune astfel un studiu mai detaliat al primitivelor.

Să reamintim mai întâi definiția primitivelor.

Fie  $f$  o funcție definită pe un interval  $I$  care nu se reduce la un punct.

**Definiție.** Se spune că funcția  $f$  are primitive pe intervalul  $I$  dacă există o funcție  $F$  definită și derivabilă pe  $I$  și a cărei derivată să fie egală cu  $f$ .

Dacă  $F' = f$ , atunci  $F$  se numește *funcție primitivă a funcției  $f$  sau, mai simplu, primitivă a lui  $f$* .

Cu această definiție, corolarul precedent se enunță astfel:

*Orice funcție continuă pe  $I$  are primitive pe  $I$ .*

Dacă  $F$  este o primitivă a lui  $f$ , adică dacă  $F' = f$ , atunci funcția  $F + C$  este de asemenea o primitivă a lui  $f$ , oricare ar fi numărul real  $C$ , deoarece

$$(F + C)' = F' + C' = F' = f.$$

Așadar, dacă  $f$  are o primitivă  $F$ , atunci ea are o infinitate de primitive. Întreaga familie de funcții  $(F + C)_{C \in \mathbb{R}}$ , obținute din primitiva  $F$  prin adăugarea unei constante arbitrară  $C$ , este formată din primitive ale lui  $f$ .

Mai mult, familia  $(F + C)_{C \in \mathbb{R}}$  conține *toate* primitivele lui  $f$ . Întradevăr, dacă  $\Phi$  este o primitivă oarecare a lui  $f$ , adică dacă  $\Phi' = f$ , atunci  $\Phi' = F'$ , deci funcțiile  $\Phi$  și  $F$  diferă printr-o constantă,  $\Phi - F = C$ , sau  $\Phi = F + C$ , adică  $\Phi$  se obține din  $F$  prin adăugarea unei constante convenabile și deci  $\Phi$  face parte din familia  $(F + C)_{C \in \mathbb{R}}$ .

Pentru familia de primitive  $(F + C)_{C \in \mathbb{R}}$  se folosește notația mai simplă  $F + C$ , unde se subînțelege că constanta arbitrară  $C$  parcurge *toate* numerele reale.

Fie  $F_1 = F + C_1$  o primitivă oarecare a lui  $f$ . Atunci

$$F_1(b) - F_1(a) = (F(b) + C_1) - (F(a) + C_1) = F(b) - F(a).$$

Așadar, diferența  $F(b) - F(a)$  este aceeași, oricare ar fi primitiva  $F$  a lui  $f$ .

**Propozitie 1.** Dacă  $f$  este o funcție continuă pe  $I$  și dacă  $a, b \in I$ , atunci

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

oricare ar fi primitiva  $F$  a lui  $f$ .

Intr-adevăr, dacă  $\alpha \in I$ , egalitatea aceasta este adevărată pentru primitiva

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt.$$

Deoarece diferența  $F(b) - F(a)$  este aceeași, oricare ar fi primitiva  $F$  a lui  $f$ , rezultă că egalitatea este adevărată oricare ar fi primitiva  $F$  a lui  $f$ .

Egalitatea din enunțul propoziției precedente se numește *formula lui Leibniz-Newton*. Ea reduce calculul integralei unei funcții *continue*  $f$  la găsirea unei primitive particulare  $F$  a lui  $f$ .

Diferența  $F(b) - F(a)$  se mai notează  $F(x) \Big|_a^b$ :

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Cu această notație, formula lui Leibniz-Newton se scrie

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b,$$

unde  $F' = f$ .

Formula lui Leibniz-Newton este valabilă nu numai pentru funcțiile continue, ci și pentru o clasă mai largă de funcții integrabile, acelea care au și primitive.

**Propozitie 2.** Dacă funcția  $f$  este integrabilă pe intervalul  $I = [a, b]$  și dacă are primitive pe acest interval, atunci

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

oricare ar fi primitiva  $F$  a lui  $f$ .

Fie  $F$  o primitivă oarecare a lui  $f$ , adică  $F' = f$ .

Fie  $d$  o diviziune a intervalului  $[a, b]$ :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

Funcția  $F$  este derivabilă, deci continuă pe fiecare interval parțial  $[x_i, x_{i+1}]$ , astfel încât îi putem aplica teorema creșterilor finite pe acest interval: există un punct  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$  astfel ca  $F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$  sau

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Adunând membru cu membru aceste egalități, obținem

$$\sum_{i=0}^{n-1} [F(x_{i+1}) - F(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

sau

$$F(b) - F(a) = \sigma_d(f).$$

Fie acum  $(d_n)$  un sir de diviziuni cu  $v(d_n) \rightarrow 0$ . Dacă pentru fiecare diviziune  $d_n$  formăm suma integrală  $\sigma_{d_n}(f)$  cu punctele intermediare  $\xi_i$  rezultate din formula creșterilor finite, avem

$$\sigma_{d_n}(f) = F(b) - F(a).$$

Așadar, sirul  $(\sigma_{d_n}(f))$  este constant, deci  $\sigma_{d_n}(f) \rightarrow F(b) - F(a)$ . Pe de altă parte, funcția  $f$  este integrabilă și  $v(d_n) \rightarrow 0$ , deci sirul sumelor integrale tinde către integrală:

$$\sigma_{d_n}(f) \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Limita sirului fiind unică, deducem

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

și propoziția este demonstrată.

Înmulțind ambii membri ai egalității cu  $-1$ , obținem

$$-\int_a^b f(x) dx = -F(b) + F(a)$$

sau

$$\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b) = F(x) \Big|_b^a.$$

Așadar, și în cazul funcțiilor integrabile care admit primitive, formula lui Leibniz-Newton este adevărată, oricare ar fi relația de inegalitate dintre limitele de integrare.

**O b s e r v a t i i .** 1° Există funcții integrabile care nu au primitive.

*Exemplu.* Funcția

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{dacă } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

definită pe intervalul  $[0, 2]$  este integrabilă pe acest interval, fiind monotonă. Această funcție nu are însă proprietatea lui Darboux pe  $[0, 2]$ , deci nu poate fi derivata altei funcții, adică nu are primitive pe acest interval.

Se pot da exemple de funcții care au primitive, dar care nu sunt integrabile.

2° Există funcții care sunt integrabile și au primitive, fără a fi continue.

*Exemplu.* Fie funcția

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

definită pe  $[0, 1]$ . Funcția  $F$  este derivabilă pe  $[0, 1]$  și derivata sa  $f = F'$  este

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{dacă } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Așadar,  $f$  are primitiva  $F$ . Funcția  $f$  este de asemenea integrabilă pe  $[0, 1]$ , deoarece este continuă și deci integrabilă pe orice interval compact  $[x, 1]$  cu  $x > 0$ . Funcția  $f$  nu este însă continuă în 0, deoarece nu are limită în acest punct.

Aveam deci  $F'(0) = f(0)$ , fără ca  $f$  să fie continuă în 0.

Fie  $f$  o funcție definită pe un interval  $I$  și  $F$  o primitivă a sa.

Mulțimea  $F + C$  a tuturor primitivelor sale se numește — prin abuz de limbaj — *integrala nedefinită* a funcției  $f$  și se notează  $\int f$  sau  $\int f dx$  sau  $\int f(x) dx$ :

$$\int f dx = F + C$$

sau

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Pentru a face distincție, integrala propriu-zisă  $\int_a^b f(x) dx$  se numește *integrală definită*.

Deoarece  $F'(x) = f(x)$ , ultima egalitate se scrie

$$\int F'(x) dx = F(x) + C.$$

Așadar, dacă se pleacă de la o funcție și se aplică întâi operația de derivare, iar apoi „operația de integrare”, se regăsește funcția inițială cu aproximarea unei constante additive.

Reciproc, dacă, plecind de la o funcție, se aplică întâi „operația de integrare” (și se obține o familie de funcții), iar apoi operația de derivare, se obține funcția inițială.

Într-adevăr

$$\left( \int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Dacă semnul  $dx$ , care apare în notația integralei nedefinite, se interprează ca o diferențială, se obțin alte relații utile pentru calcule :

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

$$d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

Într-adevăr :

$$\int dF(x) = \int F'(x) dx = F(x) + C$$

și

$$d \int f(x) dx = d(F(x) + C) = dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx.$$

*Exemple.*

$$1) \int 0 dx = \int 0' dx = 0 + C = C;$$

$$2) \int 1 \cdot dx = \int dx = x + C;$$

$$3) \int 3x^2 dx = \int (x^3)' dx = x^3 + C;$$

$$4) \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C, \text{ deoarece } \left( -\frac{1}{2} \cos 2x \right)' = \sin 2x;$$

$$5) \int (5x^5 + 7) dx = \frac{5}{6} x^6 + 7x + C, \text{ deoarece } \left( \frac{5}{6} x^6 + 7x \right)' = 5x^5 + 7.$$

O b s e r v a t i e. Fie  $f$  o funcție definită pe o mulțime  $E$ , care este o reuniune (finită sau infinită) de intervale disjuncte. Dacă există o funcție  $F$  definită și derivabilă pe  $E$  astfel ca  $F' = f$ , funcția  $F$  se numește, încă, primitivă a lui  $f$ . Orice funcție de forma  $F + C$  este de asemenea o primitivă

a lui  $f$ . Familia  $(F + C)$  nu conține însă toate primitivele lui  $f$ : există și alte primitive care nu se pot obține din  $F$  prin adăugarea unei constante; adică, diferența a două primitive ale lui  $f$  poate să nu fie constantă.

*Exemplu.* Fie  $F$  o primitivă a lui  $f$  și fie  $I$  unul din intervalele din care este formată mulțimea  $E$ . Funcția  $\Phi$  definită pe  $E$  astfel:

$$\Phi(x) = \begin{cases} F(x) + 1, & \text{dacă } x \in I \\ F(x) + 2, & \text{dacă } x \notin I \end{cases}$$

este de asemenea o primitivă a lui  $f$ , deoarece pentru orice  $x \in E$  avem  $\Phi'(x) = F'(x) = f(x)$ . Dar diferența  $\Phi - F$  nu este constantă pe  $E$ :

$$\Phi(x) - F(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in I, \\ 2, & \text{dacă } x \notin I. \end{cases}$$

deci primitiva  $\Phi$  nu se poate obține din primitiva  $F$  prin adăugarea unei constante.

Integrala nefedinită  $\int f(x) dx$  (mulțimea tuturor primitivele lui  $f$ ) conține deci și alte funcții pe lîngă cele ale familiei  $(F + C)$ . Egalitatea

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

nu mai este adevărată în acest caz.

În continuare, toate funcțiile considerate vor fi presupuse definite pe un interval, chiar dacă nu va fi menționat acest fapt în mod explicit.

Pentru funcțiile definite pe un interval, egalitatea

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (F' = f)$$

este adevărată.

### 3. Tabloul primitiveelor imediate

Din tabloul derivatelor unor funcții elementare, rezultă următorul tablou de integrale nefedinite (numit tabloul integralelor imediate, sau al primitiveelor imediate).

Funcțiile se consideră definite pe un interval conținut în domeniul lor maxim de definiție.

$$1) \int 0 dx = C;$$

$$2) \int dx = \int 1 \cdot dx = x + C;$$

$$3) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ dacă } n \neq -1, \quad (n \text{ întreg});$$

$$\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C \text{ dacă } n \neq 1 \quad (n \text{ întreg});$$

$$4) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \text{ dacă } \alpha \neq -1 \text{ (}\alpha \text{ real)};$$

$$5) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C = \ln K |x|, K > 0;$$

$$6) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C;$$

$$7) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + C = -\text{arc ctg } x + K;$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$$

$$8) \int \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0,$$

$$9) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + K;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$$

$$10) \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln (x + \sqrt{1+x^2}) + C;$$

$$11) \int e^x dx = e^x + C, \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$$

$$12) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$13) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$14) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C;$$

$$15) \int \frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Verificarea acestor egalități se poate face imediat prin derivare, conform formulei  $\int F'(x)dx = F(x) + C$ .

#### 4. Proprietățile primitivelor

În egalitatea de definiție a integralei nefinite

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (F' = f),$$

constanta arbitrară  $C$  poate fi scrisă și în alte forme; esențial este faptul ca ea să parcurgă *toate* numerele reale. Astfel, constanta arbitrară poate fi scrisă în  $C$ , unde  $C$  parcurge toate numerele strict pozitive, sau  $\alpha C$  unde  $\alpha \neq 0$  și  $C$  parcurge toate numerele reale, sau  $\frac{C}{\alpha}$  unde  $\alpha \neq 0$  și  $C$  parcurge toate numerele reale sau  $C_1 + C_2$ , unde  $C_1$  și  $C_2$  (sau numai una din ele) parcurg toate numerele reale.

**Propozitia 1.** Dacă  $f$  și  $g$  au primitive pe un interval  $I$ , atunci funcția  $f + g$  are primitive pe  $I$  și

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Fie  $F$  o primitivă a lui  $f$ , și  $G$  o primitivă a lui  $g$ ; funcțiile  $F$  și  $G$  sunt derivabile și

$$F' = f, \quad G' = g,$$

$$(F + G)' = F' + G' = f + g,$$

adică  $F + G$  este o primitivă a lui  $f + g$ .

Să notăm cu  $C_1$  și  $C_2$  constantele arbitrară ale integralelor nefinite ale funcțiilor  $f$  și  $g$ :

$$\int f(x)dx = F(x) + C_1, \quad \int g(x)dx = G(x) + C_2,$$

unde  $C_1$  și  $C_2$  parcurg toate numerele reale. Să notăm cu  $C_1 + C_2$  constanta arbitrară a integralei nefinite a funcției  $f + g$ ; avem:

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x))dx &= \int (F(x) + G(x))'dx = F(x) + G(x) + C_1 + C_2 = \\ &= (F(x) + C_1) + (G(x) + C_2) = \int f(x)dx + \int g(x)dx. \end{aligned}$$

Prin inducție completă se deduce că dacă funcțiile  $f_1, f_2, \dots, f_n$  au primitive pe  $I$ , atunci și suma lor  $f_1 + f_2 + \dots + f_n$  are primitive pe  $I$  și

$$\int (f_1 + f_2 + \dots + f_n)dx = \int f_1 dx + \int f_2 dx + \dots + \int f_n dx.$$

(Integrala sumei este egală cu suma integralelor.)

**O b s e r v a t i e.** Egalitatea  $\int (f + g)dx = \int f dx + \int g dx$  este o egalitate între două mulțimi de funcții. Dacă  $F, G, H$  sunt niște primitive *particulare*, respectiv ale funcțiilor  $f, g$  și  $f + g$ :

$$F' = f, G' = g, H' = f + g$$

egalitatea  $H = F + G$  poate să nu fie adevărată.

*Exemplu.*

$$\begin{array}{lll} f(x) = 2x, & g(x) = 3x^2, & f(x) + g(x) = 2x + 3x^2; \\ F(x) = x^2; & G(x) = x^3, & H(x) = x^2 + x^3 - 1. \end{array}$$

$$\text{Avem } F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x), \quad H'(x) = f(x) + g(x).$$

$$\text{Dar } F(x) + G(x) = x^2 + x^3 \neq x^2 + x^3 - 1 = H(x).$$

**P r o p o z i t i a 2.** Dacă  $f$  are primitive pe un interval  $I$  și  $\alpha$  este un număr real, atunci funcția  $\alpha f$  are primitive pe  $I$ , iar pentru  $\alpha \neq 0$  avem

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx.$$

Fie  $F$  o primitivă a lui  $f$ ; funcția  $F$  este derivabilă și

$$F' = f.$$

Atunci funcția  $\alpha F$  este de asemenea derivabilă și

$$(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f,$$

adică  $\alpha F$  este o primitivă a lui  $F$ .

Dacă  $\alpha \neq 0$ , să notăm cu  $\frac{C}{\alpha}$  costanta arbitrară a integralei nefinite a funcției  $f$ :

$$\int f(x)dx = F(x) + \frac{C}{\alpha},$$

unde  $C$  parurge toate numerele reale. Să notăm cu  $C$  constanta arbitrară a integralei nefinite a funcției  $\alpha f$ ; avem:

$$\int \alpha f(x)dx = \int (\alpha F(x))'dx = \alpha F(x) + C = \alpha \left( F(x) + \frac{C}{\alpha} \right) = \alpha \int f(x)dx.$$

În particular, luând  $\alpha = -1$ , obținem

$$\int (-f(x))dx = - \int f(x)dx.$$

Atunci

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$$

**O b s e r v a t i i.** 1° Egalitatea  $\int \alpha f dx = \alpha \int f dx$  pentru  $\alpha \neq 0$  este o egalitate între două *mulțimi* de funcții. Dacă  $F$  și  $H$  sunt respectiv primitive *particulare* ale funcțiilor  $f$  și  $\alpha f$ , egalitatea  $H = \alpha F$  poate să nu fie adevărată.

2° Pentru  $\alpha = 0$ , avem

$$\int \alpha f dx = \int 0 dx = C \text{ și } \alpha \int f dx = 0 \int f dx = 0.$$

În acest caz egalitatea

$$\int \alpha f dx = \alpha \int f dx$$

nu mai este adevărată, deoarece mulțimea din membrul stîng este formată din *toate* funcțiile constante, iar mulțimea din membrul drept este formată dintr-o *singură* funcție, funcția identic nulă.

3° Fie  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  un polinom definit pe un interval  $I$ . Aplicînd cele două propoziții, deducem că

$$\int P(x) dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + C.$$

*Exemplu.*

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{5x^3 - 2x^2 - 7x + 3}{x} dx &= \int \left( 5x^2 - 2x - 7 + \frac{3}{x} \right) dx = \\ &= 5 \int x^2 dx - 2 \int x dx - 7 \int dx + 3 \int \frac{1}{x} dx = 5 \frac{x^3}{3} - x^2 - 7x + 3 \ln |x| + C. \end{aligned}$$

$$2) \int \frac{-1}{1+x^2} dx = - \int \frac{1}{1+x^2} dx = -\arctg x + C = \arccotg x + C;$$

$$3) \int \left( 2 \sin x - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx = 2 \int \sin x dx - 3 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -2 \cos x - 3 \operatorname{tg} x + C.$$

Cele două propoziții de mai sus permit să se calculeze primitivele unei funcții  $f$ , dacă se poate scrie ca o combinație liniară de funcții cărora le cunoaștem primitivele

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i;$$

$$\int f dx = \sum_{i=1}^n \int \alpha_i f_i dx.$$

## 5. Metode de calcul al primitivelor

Alte metode de calcul al primitivelor sunt: integrarea prin părți (metoda de calcul a primitivelor prin părți) și schimbarea de variabilă (metoda de calcul a primitivelor funcțiilor compuse).

Să observăm mai întii că

$$\int f dx + C = \int f dx.$$

Într-adevăr, dacă  $F$  este o primitivă a lui  $f$ , atunci

$$\int f dx = F + K,$$

unde  $K$  parurge toate numerele reale. Atunci

$$\int f dx + C = F + K + C,$$

unde  $K + C$  parurge de asemenea toate numerele reale, deci

$$\int f dx = F + K + C,$$

de unde

$$\int f dx + C = \int f dx.$$

**Propozitie.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt două funcții definite pe un interval  $I$  și au derivate continue  $f'$  și  $g'$  pe  $I$ , atunci

$$\int fg' dx = fg - \int f'g dx.$$

Funcțiile  $f$  și  $g$  sunt continue (fiind derivabile). Deoarece  $f'$  și  $g'$  sunt continue, prin ipoteză, funcțiile  $fg'$  și  $f'g$  sunt de asemenea continue, și deci au primitive, astfel încât integralele care apar în egalitatea de mai sus au sens. Rămîne de demonstrat această egalitate. Avem :

$$(fg)' = f'g + fg',$$

deci funcția  $fg$  este o primitivă a funcției  $f'g + fg'$ , deci

$$\int (f'g + fg') dx = fg + C.$$

Dar

$$\int (f'g + fg')dx = \int f'gdx + \int fg'dx,$$

deci

$$\int f'gdx + \int fg'dx = fg + C,$$

de unde

$$\int fg'dx = fg - \int f'gdx + C.$$

Dar

$$\int f'gdx - C = \int f'gdx,$$

astfel încit

$$\int fg'dx = fg - \int f'gdx.$$

Egalitatea  $\int fg'dx = fg - \int f'gdx$  se numește formula de integrare prin părți (pentru integrale nedefinite).

O b s e r v a t i i. 1° Formula de integrare prin părți este o egalitate între două mulțimi de funcții. Dacă  $F_1$  este o primitivă particulară a lui  $fg'$ , iar  $F_2$  este o primitivă particulară a lui  $f'g$ , este posibil ca  $F_1 \neq fg - F_2$ .

2° Dacă notăm funcțiile cu  $u$  și  $v$ , formula de integrare prin părți se scrie

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx.$$

Dacă, acum, se interpretează  $dx$  ca diferențială, avem  $v'dx = dv$  și  $u'dx = du$ , astfel încit formula se scrie

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

3° Dacă se dă de calculat integrala  $\int f dx$ , căutăm să scriem funcția  $f$  sub forma  $f = u \cdot v'$  (sau expresia  $f dx$  sub forma  $f dx = u dv$ ) și apoi aplicăm formula de integrare prin părți. Dacă se poate calcula integrala  $\int vu'dx = \int v du$  din membrul drept, atunci rezultă și integrala din membrul stîng.

*Exemplu.*

1) Să se calculeze  $\int \ln x dx$ .

Luăm  $u = \ln x$ ,  $dv = dx$ .

Deci  $du = \frac{1}{x} dx$ ,  $v = x$ .

Atunci

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= \int u \, dv = uv - \int v \, du = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = \\ &= x(\ln x - 1) + C.\end{aligned}$$

2) Să se calculeze  $\int \operatorname{arc tg} x \, dx.$

Luăm  $u = \operatorname{arc tg} x, dv = dx,$

$$\text{deci } du = \frac{1}{1+x^2} dx, v = x.$$

Atunci

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arc tg} x \, dx &= \int u \, dv = uv - \int v \, du = x \operatorname{arc tg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= x \operatorname{arc tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

3) Să se calculeze  $\int xe^x \, dx.$

Luăm  $u = x, dv = e^x \, dx,$

$$\text{deci } du = dx, v = e^x.$$

Atunci

$$\begin{aligned}\int xe^x \, dx &= \int u \, dv = uv - \int v \, du = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + C = \\ &= e^x(x - 1) + C.\end{aligned}$$

4) Să se calculeze  $\int x \sin x \, dx.$

Luăm  $u = x, dv = \sin x \, dx,$

deci

$$du = dx, v = -\cos x \, dx.$$

Atunci

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= \int u \, dv = uv - \int v \, du = -x \cos x + \int \cos x \, dx = \\ &= -x \cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

Observație. Dacă am fi luat

$$u = \sin x, dv = x \, dx$$

am fi obținut

$$du = \cos x \, dx, v = \frac{x^2}{2}.$$

Atunci

$$\int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos x \, dx$$

și am fi obținut în membrul drept o integrală „mai complicată”.

Alegerea funcțiilor  $u$  și  $v$  trebuie făcută în mod judicios pentru a obține o integrală mai ușor de calculat.

Desi formula de integrare prin părți este valabilă pentru orice funcție  $u$  și  $v$  cu derivată continuă, această formulă este de un folos practic numai atunci cind ajungem la o integrală pe care știm să-o efectuăm.

Uneori este nevoie să aplicăm succesiv de mai multe ori formula de integrare prin părți pentru a ajunge la o integrală cunoscută.

5) Să se calculeze  $I = \int x^2 \sin x \, dx$ .

Luăm

$$u = x^2, \quad dv = \sin x \, dx,$$

deci

$$du = 2x \, dx, \quad v = -\cos x.$$

Atunci

$$I = \int x^2 \sin x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx = -x^2 \cos x + 2J,$$

unde am notat  $J = \int x \cos x \, dx$ . Mai aplicăm o dată metoda de integrare prin părți, luind

$$u = x, \quad dv = \cos x \, dx,$$

deci

$$du = dx, \quad v = \sin x.$$

Atunci

$$J = \int x \cos x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + \frac{C}{2}$$

și deci

$$I = -x^2 \cos x + 2J = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C,$$

adică

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

**O b s e r v a t i e.** Dacă în integrala  $J = \int x \cos x \, dx$  am fi luat

$$u = \cos x, \quad dv = dx$$

am fi avut

$$du = -\sin x \, dx, \quad v = \frac{x^2}{2}$$

deci

$$J = \int x \cos x \, dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \cos x + I$$

și am fi ajuns la integrala inițială  $I$ , și nu am fi putut calcula această integrală.

Se poate da o formulă de integrare prin părți de ordinul  $n$  (pentru integrale nedefinite) :

**P r o p o z i t i e .** Dacă funcțiile  $u$  și  $v$  au derivate de ordinul  $n$  continue pe un interval  $I$ , atunci

$$\int uv^{(n)} dx = uv^{(n-1)} + (-1)^1 u'v^{(n-2)} + (-1)^2 u''v^{(n-3)} + \dots + \\ + (-1)^k u^{(k)}v^{(n-k-1)} + \dots + (-1)^{n-1} u^{(n-1)} v + (-1)^n \int u^{(n)} v dx.$$

Într-adevăr :

$$\int u^{(k)} v^{(n-k)} dx = u^{(k)} v^{(n-k-1)} - \int u^{(k+1)} v^{(n-k-1)} dx,$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , deci

$$(-1)^k \int u^{(k)} v^{(n-k)} dx = (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k-1)} + (-1)^{k+1} \int u^{(k+1)} v^{(n-k-1)} dx$$

sau

$$(-1)^k \int u^{(k)} v^{(n-k)} dx - (-1)^{k+1} \int u^{(k+1)} v^{(n-k-1)} dx = (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k-1)}.$$

Adunând membru cu membru cele  $n$  egalități pentru  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  și reducind termenii asemenea din membrul stîng obținem :

$$\int uv^{(n)} dx - (-1)^n \int u^{(n)} v dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k-1)},$$

adică

$$\int uv^{(n)} dx = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k-1)} + (-1)^n \int u^{(n)} v dx.$$

*Exemplu.* Să se calculeze  $\int x^n e^x dx$ .

Luăm

$$u = x^n,$$

$$v^{(n)} = e^x$$

deci

$$u' = nx^{n-1}$$

$$v^{(n-1)} = e^x$$

$$u'' = n(n-1)x^{n-2}$$

$$v^{(n-2)} = e^x$$

...

$$u^{(k)} = n(n-1) \dots (n-k+1)x^{n-k}$$

$$v^{(n-k)} = e^x$$

...

$$u^{(n-1)} = n!x$$

$$v' = e^x$$

$$u^{(n)} = n!$$

$$v = e^x.$$

Atunci

$$\int x^n e^x dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k n(n-1) \dots (n-k+1) x^{n-k} e^x + (-1)^n \int e^x dx = \\ = e^x \sum_{k=0}^n (-1)^k n(n-1) \dots (n-k+1) x^{n-k}.$$

Metoda de calcul al primitivelor prin schimbarea de variabilă rezultă din următoarea :

**P r o p o z i t i e.** Fie funcțiile  $u(x) : I \rightarrow J$  și  $f(t) : J \rightarrow R$ , unde  $I$  și  $J$  sunt intervale. Dacă  $u(x)$  este derivabilă pe  $I$ , iar  $f(t)$  are primitive pe  $J$ , atunci funcția  $f(u(x)) \cdot u'(x) : I \rightarrow R$  are primitive pe  $I$ . În acest caz, dacă

$$\int f(t) dt = F(t) + C,$$

atunci

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C.$$

În adevăr, fie  $F(t)$  o primitivă a lui  $f(t)$  pe  $I$  :

$$F'(t) = f(t) \text{ și } \int f(t) dt = F(t) + C.$$

Deoarece funcțiile  $u(x) : I \rightarrow J$  și  $F(t) : J \rightarrow R$  sunt derivabile, funcția compusă  $F(u(x)) : I \rightarrow R$  este derivabilă și

$$[F(u(x))]' = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x),$$

deci funcția  $F(u(x))$  este o primitivă a funcției  $f(u(x)) \cdot u'(x)$  pe  $I$  și

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = F(u(x)) + C.$$

**O b s e r v a t i i.** Dacă se interpretează  $dx$  ca diferențială, atunci avem  $u'(x)dx = du(x)$  și egalitatea precedentă se scrie

$$\int f(u(x)) du(x) = F(u(x)) + C;$$

dacă nu se mai pune în evidență variabila  $x$ , se obține

$$\int f(u) du = F(u) + C.$$

În această egalitate,  $u$  nu este variabilă independentă (ci funcție), dar egalitatea are aceeași formă ca și cînd  $u$  ar fi variabilă independentă.

Practic, pentru a calcula integrala nefinîndită

$$\int f(u(x)) u'(x) dx$$

se procedează astfel: se face înlocuirea  $u(x) = t$  și se diferențiază ca o egalitate de funcții:  $du(x) = dt$  sau  $u'(x)dx = dt$ .

Făcând aceste înlocuiri în integrala inițială, se obține (formal) succesiv:

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C = F(u(x)) + C.$$

Se atrage atenția că egalitatea

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(t)dt$$

este formală, în sensul procedeului practic de mai sus.

Ea nu trebuie interpretată ca o egalitate obișnuită de funcții. Întradevăr, funcția  $f(u(x)) \cdot u'(x)$  este definită pe intervalul  $I$ , deci și primitivele sale  $\int f(u(x)) \cdot u'(x)dx$  sunt funcții definite pe  $I$ . Pe de altă parte, funcția  $f(t)$  este definită pe intervalul  $J$ , deci primitivele sale  $\int f(t)dt$  sunt definite pe  $J$ . Așadar, funcțiile  $\int f(u(x))u'(x)dx$  și funcțiile  $\int f(t)dt$  sunt definite pe intervalele diferite  $I$  și  $J$ , deci aceste funcții nu pot fi egale. Dar chiar dacă  $I = J$ , cele două mulțimi de funcții nu sunt egale, decât dacă  $u'(x) \equiv 1$ , adică dacă  $u(x) = x$ .

*Exemplu.* 1) Să se calculeze  $\int \frac{2x}{x^2 + 3} dx$ .

Facem înlocuirea  $x^2 + 3 = t$  și, diferențind, obținem  $2x dx = dt$ .

Atunci

$$\int \frac{2x dx}{x^2 + 3} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2 + 3| + C.$$

Putem proceda și direct, astfel:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{x^2 + 3} dx &= \int \frac{(x^2 + 3)'}{x^2 + 3} dx = \int \frac{1}{x^2 + 3} d(x^2 + 3) = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \\ &= \ln|x^2 + 3| + C. \end{aligned}$$

2) Să se calculeze  $\int \sin x^3 \cdot x^2 dx$ .

Facem înlocuirea  $x^3 = t$ , deci  $3x^2 dx = dt$ . Atunci

$$\int \sin x^3 \cdot x^2 dx = \frac{1}{3} \int \sin x^3 \cdot 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + C = -\frac{1}{3} \cos x^3 + C$$

sau

$$\begin{aligned} \int \sin x^3 \cdot x^2 dx &= \int \sin x^3 \cdot \frac{(x^3)'}{3} dx = \frac{1}{3} \int \sin x^3 \cdot d(x^3) = \frac{1}{3} \int \sin u du = \\ &= -\frac{1}{3} \cos u + C = -\frac{1}{3} \cos x^3 + C. \end{aligned}$$

Aplicînd acest procedeu, din tabloul primitivelor imediate, se obțin primitivele unor funcții compuse:

$$1) \int u^n \cdot u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \text{ întreg, } n \neq -1;$$

$$2) \int \frac{u'}{u^n} dx = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + C; \quad n \text{ întreg, } n \neq 1;$$

$$3) \int u^\alpha u' dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \quad \alpha \text{ real, } \alpha \neq -1;$$

$$4) \int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + C;$$

$$5) \int \frac{u'}{\sqrt{u}} dx = 2\sqrt{u} + C;$$

$$6) \int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctg u + C;$$

$$7) \int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin u + C;$$

$$8) \int e^u \cdot u' dx = e^u + C;$$

$$9) \int \sin u \cdot u' dx = -\cos u + C;$$

$$10) \int \cos u \cdot u' dx = \sin u + C;$$

$$11) \int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \operatorname{tg} u + C;$$

$$12) \int \frac{u'}{\sin^2 u} dx = -\operatorname{ctg} u + C.$$

În aceste formule,  $u$  este o funcție de  $x$ . Verificarea acestor formule se poate face și direct, prin derivare.

Folosind egalitatea formală

$$\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(t) dt,$$

se poate calcula integrala din membrul stîng, dacă se cunoaște integrala din membrul drept. Să observăm că în integrala din membrul stîng apare derivata  $u'(x)$ .

Dacă se dă integrala

$$\int f(u(x)) dx,$$

nu se mai poate aplica propoziția de mai sus. Totuși, și în acest caz putem folosi schimbarea de variabilă dacă funcția  $u(x)$  verifică condiții suplimentare:

**Propozitie.** Fie funcțiile  $u(x) : I \rightarrow J$  și  $f(t) : J \rightarrow R$ , unde  $I$  și  $J$  sunt intervale. Dacă funcția  $f(t)$  este continuă pe  $J$ , dacă funcția  $u(x)$  este strict monotonă și derivabilă pe  $I$ , iar inversa sa  $v(t) : J \rightarrow I$  are derivată continuă  $v'(t)$  pe  $J$  și dacă

$$\int f(t)v'(t) dt = F(t) + C,$$

atunci

$$\int f(u(x)) dx = F(u(x)) + C.$$

Să observăm că, deoarece  $v$  este funcția inversă a lui  $u$ , avem

$$v(u(x)) = x \text{ pentru orice } x \in I,$$

$$u(v(t)) = t \text{ pentru orice } t \in J,$$

și

$$u'(x) \cdot v'(u(x)) \equiv 1 \text{ pentru orice } x \in I.$$

Deoarece  $f(t)$  și  $v'(t)$  sunt presupuse continue, produsul lor  $f(t)v'(t)$  este o funcție continuă pe  $J$ , deci are primitive pe  $J$ . Fie  $F(t)$  o primitivă a funcției  $f(t)v'(t)$ :

$$F'(t) = f(t)v'(t), \quad \int f(t)v'(t) dt = F(t) + C.$$

Deoarece funcțiile  $u(x) : I \rightarrow J$  și  $F(t) : J \rightarrow T$  sunt derivabile, funcția compusă  $F(u(x)) : I \rightarrow R$  este derivabilă și  $[F(u(x))]' = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x))v'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x))$ , deci funcția  $F(u(x))$ , este o primitivă a funcției  $f(u(x))$  pe  $I$  și

$$\int f(u(x)) dx = F(u(x)) + C.$$

**Observatie.** Practic, pentru a calcula integrala nedefinită

$$\int f(u(x)) dx$$

se procedează astfel:

Se face înlocuirea

$$u(x) = t,$$

unde  $u(x)$  trebuie să fie o funcție strict monotonă pe  $I$ .

Se rezolvă în raport cu  $x$  ecuația  $u(x) = t$  și se obține

$$x = v(t).$$

Se diferențiază această ultimă egalitate:

$$dx = v'(t)dt.$$

Se înlocuiesc în integrala inițială  $u(x)$  și  $dx$  și se obține (formal) succesiiv:

$$\int f(u(x))dx = \int f(t)v'(t)dt = F(t) + C = F(u(x)) + C.$$

Și de data aceasta, egalitatea

$$\int f(u(x))dx = \int f(t)v'(t)dt$$

este formală. Ea nu trebuie considerată ca o egalitate obișnuită de funcții.

În aplicațiile curente condiția ca derivata  $v'(t)$  să fie continuă este verificată, deoarece în aceste aplicații intervin funcții elementare. Așadar, trebuie să ne fixăm atenția asupra condiției ca funcția  $u(x)$  să fie strict monotonă, adică ecuația

$$u(x) = t$$

să aibă, pentru fiecare  $t \in J$ , o singură soluție  $x = v(t) \in I$ .

*Exemplu. 1)* Să se calculeze  $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ , ( $x \geq 0$ ).

Se face înlocuirea

$$\sqrt{x} = t, \quad (t > 0), \text{ deci}$$

$$x = t^2 \text{ și } dx = 2t dt.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{1}{1+t} 2t dt = 2 \int \frac{t}{1+t} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = \\ &= 2(t - \ln(1+t)) + C = 2\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x}) + C. \end{aligned}$$

2) Să se calculeze  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$ , ( $x < 1$ ).

Se face înlocuirea

$$\sqrt{1-x} = t, \quad (t > 0), \text{ deci}$$

$1-x = t^2$  sau  $x = 1-t^2$ , de unde  $dx = -2t dt$ .

Atunci

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1-t^2}{t} (-2t) dt = -2 \int (1-t^2) dt = \\ = -2 \left( t - \frac{t^3}{3} \right) + C = 2t \left( \frac{1}{3} t^2 - 1 \right) + C = 2 \sqrt{1-x^2} \left( \frac{1}{3} (1-x^2) - 1 \right) + C.$$

3) Să se calculeze  $\int \sqrt{1-x^2} dx$ , ( $-1 < x < 1$ ).

Se face înlocuirea  $x = \sin t$ , deci  $t = \arcsin x$ ,  $\left( -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right)$

$$dx = \cos t dt.$$

Atunci

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \\ = \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \frac{1}{2} (\arcsin x + x \sqrt{1-x^2}) + C.$$

deoarece  $\frac{\sin 2t}{2} = \sin t \cos t = \sin t \sqrt{1-\sin^2 t} = x \sqrt{1-x^2}$ .

4) Să se calculeze  $\int \frac{dx}{\sin x}$ , ( $-\pi < x < \pi$ ,  $x \neq 0$ ).

Se face înlocuirea  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , ( $-\infty < t < \infty$ ,  $t \neq 0$ ), deci  $x = 2 \operatorname{arctg} t$  și

$$dx = \frac{2 dt}{1+t^2}.$$

$$\text{Apoi, } \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \text{ astfel încit:}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2 dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

**Observație.** Dacă funcția  $\frac{1}{\sin x}$  este definită pe o mulțime care conține punctele

$-\pi$  și  $\pi$ , nu mai putem face înlocuirea  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , deoarece pentru  $x = -\pi$  și  $x = \pi$ , funcția  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  nu este definită.

## 6. Primitivele funcțiilor raționale

Problema găsirii primitivelor este inversă aceleia a derivării. Problema găsirii primitivelor este însă mult mai dificilă decât problema derivării.

Am văzut că derivatele funcțiilor elementare sunt de asemenea funcții elementare, pe care le putem calcula totdeauna.

Primitivele funcțiilor elementare nu sunt însă totdeauna funcții elementare. Pentru unele funcții elementare nici nu se știe dacă primitivele lor sunt tot funcții elementare. Nu există reguli de calcul al primitivelor decât pentru clase restrinse de funcții elementare.

Vom arăta acum că primitivele funcțiilor raționale sunt funcții elementare, și că, dacă se cunosc rădăcinile polinomului de la numitor, primitivele funcțiilor raționale se pot calcula.

Derivatele funcțiilor raționale sunt de asemenea funcții raționale. Primitivele funcțiilor raționale nu sunt însă totdeauna funcții raționale, ci pot fi funcții logaritmice sau funcții arc tg; de exemplu

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|, \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x.$$

Se va arăta mai departe că primitivele funcțiilor raționale sunt combinații liniare de: funcții raționale, funcții logaritmice și funcții arc tg.

Se numesc fracții simple funcțiile de forma

$$\frac{A}{(x - x_0)^n}, \quad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

definite pe un interval  $I$ , unde  $n$  este număr natural, iar trinomul  $ax^2 + bx + c$  nu are rădăcini reale (deci  $a \neq 0$  și  $c \neq 0$ ). În cazul fracției

$$\frac{A}{(x - x_0)^n}, \quad \text{rădăcina } x_0 \text{ a numitorului nu aparține intervalului } I.$$

Primitivele fracțiilor simple sunt funcții elementare, care se pot totdeauna determina, așa cum se arată mai jos:

$$\text{I)} \int \frac{1}{(x - x_0)^n} dx$$

$$1) \text{ Dacă } n = 1, \int \frac{1}{x - x_0} dx = \ln|x - x_0| + C.$$

$$2) \text{ Dacă } n \geq 2, \int \frac{1}{(x - x_0)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)(x - x_0)^{n-1}} + C.$$

$$\text{II)} \int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} dx, \quad (b^2 - 4ac < 0, \text{ deci } a \neq 0, c \neq 0).$$

Vom considera pe rînd mai multe cazuri posibile :

$$3) \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + C.$$

$$4) \int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C.$$

Atunci

$$5) \int \frac{Ax + B}{x^2 + a^2} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x}{x^2 + a^2} dx + B \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{A}{2} \ln(x^2 + a^2) + \\ + \frac{B}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + C.$$

Dacă  $n \geq 2$  :

$$6) \int \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + a^2)^n} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + C.$$

$$7) \int \frac{Ax + B}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + a^2)^n} dx + B \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \\ = -\frac{A}{2} \frac{1}{(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + B \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx.$$

Ultima integrală se calculează cu ajutorul unei formule de recurență :

$$8) I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 + a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \\ = \frac{1}{a^2} \left[ \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} dx - \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx \right] = \frac{1}{a^2} [I_{n-1} - J],$$

adică

$$I_n = \frac{1}{a^2} [I_{n-1} - J],$$

unde

$$J = \int \frac{x^{2-n}}{(x^2 + a^2)^n} dx.$$

Pentru calculul integralei  $J$  se aplică metoda de integrare prin părți, luînd

$$u = x, \quad dv = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} dx,$$

deci

$$du = dx, \quad v = -\frac{1}{2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}}.$$

Atunci

$$J = \int x \cdot \frac{z}{(x^2 + a^2)^n} dx = \int u \cdot dv = uv - \int v du = -\frac{1}{(2n-1)} \frac{z}{(x^2 + a^2)^{n+1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} dx,$$

adică

$$J = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{z}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{a^2} [I_{n-1} - J] = \frac{1}{a^2} \left[ I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \frac{z}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \right] = \\ &= \frac{1}{a^2} \left[ \frac{1}{2(n-1)} \frac{z}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2(n-1)-1}{2(n-1)} I_{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Am obținut astfel următoarea formulă de recurență:

$$I_n = \frac{1}{a^2} \left[ \frac{1}{2(n-1)} \frac{z}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1} \right].$$

Tinând seama că

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc tg} \frac{x}{a} + C,$$

obținem succesiv:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{a^2} \left[ \frac{1}{2 \cdot 1} \frac{z}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} I_1 \right] = \frac{1}{2 \cdot a^2} \cdot \frac{z}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arc tg} \frac{x}{a} + C, \\ I_3 &= \frac{1}{a^2} \left[ \frac{1}{4} \frac{z}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4} I_2 \right] = \\ &= \frac{1}{a^2} \left[ \frac{1}{4} \frac{z}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^3} \frac{z}{x^2 + a^2} + \frac{3}{8a^3} \operatorname{arc tg} \frac{x}{a} \right] + C = \\ &= \frac{1}{4a^2} \frac{z}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \frac{z}{x^2 + a^2} + \frac{3}{8a^4} \operatorname{arc tg} \frac{x}{a} + C, \\ I_4 &= \frac{1}{a^2} \left[ \frac{1}{6} \frac{z}{(x^2 + a^2)^3} + \frac{5}{6} I_3 \right] = \\ &= \frac{1}{6a^2} \frac{z}{(x^2 + a^2)^3} + \frac{5}{24a^4} \frac{z}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{15}{48a^6} \frac{z}{x^2 + a^2} + \frac{15}{48a^7} \operatorname{arc tg} \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

**O b s e r v a t i e.** Procedind ca mai sus, pentru integrala

$$J_n = \int \frac{1}{(x^2 - a^2)^n} dx,$$

unde  $n \geq 2$ , obținem următoarea formulă de recurență:

$$J_n = -\frac{1}{a^2} \left[ \frac{1}{2(n-1)} \frac{z}{(x^2 - a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} J_{n-1} \right].$$

Tinând seama că

$$J_1 = \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

se obțin succesiv integralele  $J_2, J_3$ , etc.

Funcția  $\frac{1}{(x^2 - a^2)^n}$  nu este fracție simplă, deoarece numitorul are rădăcini reale și distințe, anume  $-a$  și  $a$ .

Să trecem acum la cazul general:

$$9) \int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} dx, \quad (b^2 - 4ac < 0, \text{ deci } a \neq 0, c \neq 0).$$

Trinomul  $ax^2 + bx + c$  se poate scrie ca o sumă de două pătrate:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right] = \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + k^2 \right], \text{ unde } k^2 = \frac{4ac - b^2}{4a^2} > 0. \end{aligned}$$

Se face înlocuirea  $x + \frac{b}{2a} = z$ , deci  $x = z - \frac{b}{2a}$  și  $dx = dz$ .

Atunci

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} dx &= \int \frac{Ax + B}{a^n \left[ \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 + k^2 \right]^n} dz = \frac{1}{a^n} \int \frac{Az - \frac{bA}{2a} + B}{(z^2 + k^2)^n} dz = \\ &= \frac{A}{a^n} \int \frac{z}{(z^2 + k^2)^n} dz + \frac{2aB - bA}{2a^{n+1}} \int \frac{1}{(z^2 + k^2)^n} dz. \end{aligned}$$

Prima integrală este de tipul 4 sau 5 (după cum  $n = 1$  sau  $n \geq 2$ ), iar a doua integrală este de tipul 3 sau 6 (după cum  $n = 1$  sau  $n \geq 2$ ). Efectuând aceste integrale și făcînd apoi înlocuirea  $z = x + \frac{b}{2a}$ , obținem integrala inițială.

Observație. De multe ori este mai simplu să punem în evidență la numărător derivata  $2ax + b$  a trinomului  $ax^2 + bx + c$  de la numitor (dacă  $A \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} dx &= A \int \frac{x + \frac{B}{A}}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + 2a \frac{B}{A}}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n} dx + \frac{A}{2a} \int \frac{\frac{2a}{A} \frac{B}{A} - b}{(ax^2 + bx + c)^n} dx. \end{aligned}$$

Pentru prima din aceste integrale avem :

$$\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \ln|ax^2 + bx + c| + C$$

și, dacă  $n \geq 2$ ,

$$\int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + C.$$

Pentru a doua integrală

$$\int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$$

aplicăm apoi procedeul de mai sus : se scrie trinomul  $ax^2 + bx + c$  ca o sumă de pătrate și se face înlocuirea  $x + \frac{b}{2a} = z$ . Se obține

$$\int \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \frac{1}{a^n} \int \frac{1}{(z^2 + h^2)^n} dz,$$

iar ultima integrală este de tipul 3 sau 6 (după cum  $n = 1$  sau  $n \geq 2$ ).

*Exemplu :*

$$1) \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = I_2 = \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \arctg x + C.$$

$$2) \int \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx = I_3 = \frac{x}{4(x^2 + 1)^2} + \frac{3x}{8(x^2 + 1)} + \frac{3}{8} \arctg x + C.$$

$$3) \int \frac{5x}{(x^2 + 3)^7} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + 3)^7} dx = -\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{6(x^2 + 3)^6} + C = -\frac{5}{12(x^2 + 3)^6} + C.$$

$$4) \int \frac{5x - 7}{x^2 + 3} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 3} dx - 7 \int \frac{1}{x^2 + 3} dx = \frac{5}{2} \ln(x^2 + 3) - \frac{7}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

(ultima integrală este de forma  $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$  cu  $a = \sqrt{3}$ ).

$$5) \int \frac{-3x + 4}{(x^2 + 5)^2} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + 5)^2} dx + 4 \int \frac{1}{(x^2 + 5)^2} dx = \frac{3}{2(x^2 + 5)} + I_2.$$

Ultima integrală este de forma  $I_2 = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx$  cu  $a = \sqrt{5}$ ,

deci

$$I_2 = \frac{1}{2 \cdot 5} \frac{x}{(x^2 + 5)^2} + \frac{1}{2 \cdot 5 \sqrt{5}} \arctg \frac{x}{\sqrt{5}} + C$$

și deci

$$\int \frac{-3x + 4}{(x^2 + 5)^2} dx = \frac{3}{2(x^2 + 5)} + \frac{2x}{5(x^2 + 5)^2} + \frac{2}{5\sqrt{5}} \arctg \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

$$6) \int \frac{3}{2x^2 + 4x + 7} dx = \int \frac{3}{2[(x+1)^2 + \frac{5}{2}]} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{(x+1)^2 + \frac{5}{2}} dx.$$

Se face înlocuirea  $x + 1 = z$ , deci  $dx = dz$ . Atunci

$$\int \frac{3}{2x^2 + 4x + 7} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{z^2 + \frac{5}{2}} dz = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \operatorname{arc tg} \frac{z}{\sqrt{\frac{5}{2}}} + C = \\ = \frac{3}{\sqrt{10}} \operatorname{arc tg} \sqrt{\frac{2}{5}} z + C = \frac{3}{\sqrt{10}} \operatorname{arc tg} \sqrt{\frac{2}{5}} (x + 1) + C.$$

$$7) \int \frac{3}{(2x^2 + 4x + 7)^2} dx = \frac{3}{4} \int \frac{1}{\left[(x + 1)^2 + \frac{5}{2}\right]^2} dx = \frac{3}{4} \int \frac{1}{\left(z^2 + \frac{5}{2}\right)^2} dz = \\ = \frac{3}{4} I_2.$$

Tinind seama că în ultima integrală  $a = \sqrt{\frac{5}{2}}$ , avem:

$$I_2 = \frac{1}{5} \frac{z}{z^2 + \frac{5}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{5}} \operatorname{arc tg} \sqrt{\frac{2}{5}} z + C = \frac{z+1}{5\left(x^2+2x+\frac{7}{2}\right)} + \\ + \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{5}} \operatorname{arc tg} \sqrt{\frac{2}{5}} (x+1) + C,$$

deci

$$\int \frac{3}{(2x^2 + 4x + 7)^2} dx = \frac{3}{4} \frac{2(x+1)}{5(2x^2 + 4x + 7)} + \frac{3}{4} \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{5}} \operatorname{arc tg} \sqrt{\frac{2}{5}} (x+1) + C.$$

$$8) \int \frac{6x - 4}{x^2 - 2x + 5} dx = \int \frac{6x - 6 + 2}{x^2 - 2x + 5} dx = 3 \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 5} dx + \\ + \int \frac{2}{x^2 - 2x + 5} dx = 3 \ln(x^2 - 2x + 5) + 2 \int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx.$$

Dar  $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$  și făcind  $x-1 = z$ , deci  $dx = dz$ , obținem

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2 + 4} dx = \int \frac{1}{z^2 + 4} dz = \frac{1}{2} \operatorname{arc tg} \frac{z}{2} + C = \\ = \frac{1}{2} \operatorname{arc tg} \frac{x-1}{2} + C.$$

Atunci

$$\int \frac{6x - 4}{x^2 - 2x + 5} dx = 3 \ln(x^2 - 2x + 5) + \operatorname{arc tg} \frac{x-1}{2} + C.$$

$$9) \int \frac{5x - 3}{(x^2 - 2x + 5)^2} dx = \int \frac{5x - 3}{[(x-1)^2 + 4]^2} dx.$$

Facem înlocuirea  $x - 1 = z$ , deci  $x = z + 1$  și  $dx = dz$ .  
Atunci

$$\begin{aligned} \int \frac{5x - 3}{(x^2 - 2x + 5)^2} dx &= \int \frac{5z + 5 - 3}{(z^2 + 4)^2} dz = \int \frac{5z + 2}{(z^2 + 4)^2} dz = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{2z}{(z^2 + 4)^2} dz + 2 \int \frac{1}{(z^2 + 4)^2} dz = -\frac{5}{2(z^2 + 4)} + 2I_3 = -\frac{5}{2(x^2 - 2x + 5)} + 2I_3; \\ I_3 &= \frac{1}{8} \frac{z}{z^2 + 4} + \frac{1}{16} \operatorname{arc tg} \frac{z}{2} + C = \frac{1}{8} \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 5} + \frac{1}{16} \operatorname{arc tg} \frac{x - 1}{2} + C. \end{aligned}$$

Așadar

$$\int \frac{5x - 3}{(x^2 - 2x + 5)^2} dx = -\frac{5}{2(x^2 - 2x + 5)} + \frac{1}{4} \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 5} + \frac{1}{8} \operatorname{arc tg} \frac{x - 1}{2} + C.$$

Primitivele oricărei funcții raționale  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  definite pe un interval  $I$  (pe care numitorul  $Q(x)$  nu se anulează în nici un punct) sunt funcții elementare care se pot totdeauna determina (dacă se cunosc rădăcinile numitorului  $Q(x)$ ).

Într-adevăr, dacă  $\operatorname{grad} P \geq \operatorname{grad} Q$ , efectuând împărțirea, obținem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

unde  $C(x)$  și  $P_1(x)$  sunt două polinoame:  $C(x)$  este cîtul împărțirii, iar  $P_1(x)$  este restul împărțirii, și  $\operatorname{grad} P_1 < \operatorname{grad} Q$ .

Atunci

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)} dx.$$

Integrala polinomului  $C(x)$  se poate efectua, astfel încît am redus calculul integralei funcției raționale  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  la acela al integralei funcției raționale  $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$  cu gradul numărătorului mai mic decît gradul numitorului.

Se știe din algebră că funcția rațională  $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$  cu  $\operatorname{grad} P_1 < \operatorname{grad} Q$  se poate scrie (într-un singur mod) ca suma de fracții simple

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} \equiv \sum \frac{A}{(x - x_0)^n} + \sum \frac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^n},$$

astfel încît

$$\int \frac{P_1(x)}{Q(x)} dx = \sum \int \frac{A}{(x - x_0)^n} dx + \sum \int \frac{Bx + C}{(ax^2 + bx + c)^n} dx.$$

Așadar, integrala funcției rationale  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  se poate totdeauna efectua.

**O b s e r v a t i e.** Înăind seama de faptul că primitivele fracțiilor simple sunt de forma  $k \ln(ax^2 + bx + c)$  sau  $k \operatorname{arc tg}(ax + b)$  sau funcții raționale, sau combinații liniare de această formă, rezultă că primitivele oricărei funcții raționale sunt combinații liniare de funcții de această formă.

Pentru descompunerea funcției raționale  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  în fracții simple se procedează în felul următor:

Fiecarei rădăcini reale  $x_0$  a numitorului  $Q(x)$ , de ordinul  $n$  de multiplicitate, îi corespunde, în descompunerea menționată, o sumă de  $n$  fracții simple, de forma

$$\frac{A_n}{(x - x_0)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x - x_0)^{n-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x - x_0)^1} + \frac{A_0}{x - x_0}.$$

Fiecarei rădăcini complexe  $x_1$  a numitorului  $Q(x)$ , de ordinul  $n$  de multiplicitate, îi corespunde în descompunerea menționată o sumă de  $n$  fracții simple, de forma

$$\frac{B_n x + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n} + \frac{B_{n-1} x + C_{n-1}}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{(ax^2 + bx + c)^1} + \frac{B_0}{ax^2 + bx + c},$$

unde trinomul  $ax^2 + bx + c$  are rădăcinile  $x_1$  și conjugata complexă a lui  $x_1$ .

Pentru determinarea coeficienților  $A_n, B_n, C_n$  etc., se poate aplica metoda coeficienților nedeterminate:

În identitatea

$$(1) \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_n}{(x - x_0)^n} + \dots + \frac{A_1}{x - x_0} + \dots + \frac{B_n x + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n} + \dots + \\ + \frac{B_1 x + C_1}{ax^2 + bx + c} + \dots$$

se aduc la același numitor  $Q(x)$  fracțiile din membrul drept și se obține identitatea

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

de unde  $P(x) \equiv P_1(x)$ . Polinomul  $P_1(x)$  conține coeficienții  $A_n, B_n, C_n, \dots$ . Egalând coeficienții termenilor de același grad ai polinoamelor  $P$  și  $P_1$ , se obține un sistem de ecuații din care se determină  $A_n, B_n, C_n, \dots$

O altă metodă pentru determinarea coeficienților  $A_n, B_n, C_n, \dots$  este următoarea: În identitatea (1) se dau valori particulare variabilei  $x$  și se obține un sistem de ecuații din care se determină  $A_n, B_n, C_n, \dots$

*Exemplu.* 1) Să se calculeze  $\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x - 2)(x^2 + 1)^2} dx$  (pe un interval  $I$  care nu conține punctul 2).

A vom:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} &\equiv \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1} \equiv \\ &\equiv \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-2) + (Dx+E)(x^2+1)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x + 13 &\equiv A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-2) + (Dx+E)(x^2-2x^2+x-2) \equiv \\ &\equiv (A+D)x^4 + (E-2D)x^3 + (2A+B+D-2E)x^2 + (C-2B-2D+E)x + \\ &\quad + (A-2C-2E). \end{aligned}$$

Atunci

$$A + D = 0, \quad E - 2D = 0, \quad 2A + B + D - 2E = 2,$$

$$C - 2B - 2D + E = 2, \quad A - 2C - 2E = 13.$$

Se obține:  $A = 1$ ,  $B = -3$ ,  $C = -4$ ,  $D = -1$ ,  $E = -2$ , deci

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} \equiv \frac{1}{x-2} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} - \frac{x+2}{x^2+1}.$$

Așadar:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} dx - \int \frac{x+2}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{3-4x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4 \operatorname{arc tg} x + C. \end{aligned}$$

Pentru determinarea coeficientului  $A$  se poate proceda astfel:

În identitatea inițială se înmulțește cu  $x-2$  (pentru  $x \neq 2$ ):

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x^2+1)^2} \equiv A + \left[ \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1} \right] (x-2).$$

Identitatea aceasta este valabilă pentru orice  $x \neq 2$ ; atunci ea este valabilă și pentru  $x = 2$ . Așadar, făcind  $x = 2$ , obținem  $A = 1$ .

Atunci

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} \equiv \frac{1}{x-2} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Înmulțind acum cu  $(x^2+1)^2$ , obținem:

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{x-2} \equiv Bx + C + (Dx+E)(x^2+1) + \frac{(x^2+1)^2}{x-2}.$$

Această identitate este valabilă pentru orice număr real  $x \neq 2$ , dar și pentru orice număr complex  $x \neq 2$ .

Făcind  $x = i$  obținem

$$\frac{-2+2i+13}{i-2} = Bi + C$$

sau

$$2i+11 = -B - 2Bi + Ci - 2C.$$

Egalind părțile reale și părțile imaginare, obținem

$$-B - 2C = 11,$$

$$-2B + C = 2,$$

de unde  $B = -3$  și  $C = -4$ .

Atunci

$$\frac{2x^3 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} \equiv \frac{1}{x-2} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Făcind în această identitate  $x = 0$ , obținem

$$\frac{13}{-2} = -\frac{1}{2} - 4 + E,$$

de unde  $E = -2$ . În sfîrșit, făcind  $x = 1$ , obținem

$$\frac{17}{-4} = -1 - \frac{7}{4} + \frac{D+E}{2},$$

de unde  $D + E = -3$ , deci  $D = -3 - E = -1$ . Așadar,

$$\frac{2x^3 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} \equiv \frac{1}{x-2} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} - \frac{x+2}{x^2+1}.$$

2) Să se calculeze  $\int \frac{5x^3 - 20x + 17}{(x-2)^3} dx$  (pe un interval  $I$ , care nu conține punctul 2).

Avem

$$\frac{5x^3 - 20x + 17}{(x-2)^3} \equiv \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2}.$$

Înmulțind cu  $(x-2)^3$ , avem

$$5x^3 - 20x + 17 \equiv A + B(x-2) + C(x-2)^2.$$

Făcind  $x = 2$ , obținem  $A = -3$ .

Derivând ambele membre, avem

$$10x - 20 \equiv B + 2C(x-2)$$

și făcind  $x = 2$ , obținem  $B = 0$ .

Derivând din nou, avem  $10 = 2C$ , de unde  $C = 5$ .

Așadar

$$\frac{5x^3 - 20x + 17}{(x-2)^3} = -\frac{3}{(x-2)^3} + \frac{5}{x-2}.$$

deci

$$\int \frac{5x^3 - 20x + 17}{(x-2)^3} dx = -3 \int \frac{1}{(x-2)^3} dx + 5 \int \frac{1}{x-2} dx = \frac{3}{2(x-2)^2} + 5 \ln|x-2| + C.$$

3) Să se calculeze  $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$  (pe un interval  $I$  care nu conține punctele  $-a$  și  $a$ ).

A vom

$$\frac{1}{x^2 - a^2} \equiv \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}.$$

Înmulțim cu  $x - a$ :

$$\frac{1}{x + a} \equiv A + \frac{B}{x + a} (x - a);$$

se face  $x = a$ . Obținem  $A = \frac{1}{2a}$ .

În identitatea inițială, înmulțim cu  $x + a$ :

$$\frac{1}{x - a} = \frac{A}{x - a} (x + a) + B$$

și facem  $x = -a$ . Obținem  $B = -\frac{1}{2a}$ .

Așadar

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right),$$

deci

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \frac{1}{2a} \left[ \int \frac{1}{x - a} dx - \int \frac{1}{x + a} dx \right] = \frac{1}{2a} [\ln|x - a| - \ln|x + a|] + C = \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C. \end{aligned}$$

## 7. Integrarea funcțiilor continue

Fie  $f$  o funcție continuă pe un interval  $I$ ,  $a$  și  $b$  două puncte din  $I$ . Pentru integrarea acestei funcții se poate folosi formula lui Leibniz-Newton:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b,$$

unde  $F$  este o primitivă (oarecare) a lui  $f$ , iar

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Formula lui Leibniz-Newton se obține formal din integrala neînăuntrită:

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

înlăturînd constanta arbitrară  $C$  și scriind în ambii membri limitele de integrare.

Pentru funcțiile *continue* (ca și pentru funcțiile integrabile care admit primitive), anumite proprietăți ale integralei se pot demonstra, mai simplu, cu ajutorul primitivelor, fără a recurge la sumele integrale:

$$1) \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx;$$

$$2) \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

$$3) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx;$$

$$4) \int_a^b f(x) dx = f(\xi) (b - a), \text{ unde } \xi \text{ este cuprins între } a \text{ și } b.$$

Într-adevăr, dacă  $F$  este o primitivă a lui  $f$  și  $G$  este o primitivă a lui  $g$ :

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

$$\int_a^b g(x) dx = G(x) \Big|_a^b = G(b) - G(a),$$

atunci :

1)  $\alpha F$  este o primitivă a lui  $\alpha f$ , deci

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha f(x) dx &= \alpha F(x) \Big|_a^b = \alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha [F(b) - F(a)] = \\ &= \alpha \cdot F(x) \Big|_a^b = \alpha \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

2)  $F + G$  este o primitivă a lui  $f + g$ , deci

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = (F(x) + G(x)) \Big|_a^b = F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) =$$

$$= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = F(x) \Big|_a^b + G(x) \Big|_a^b = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$3) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = F(x) \Big|_a^b + F(x) \Big|_b^c = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = F(x) \Big|_a^c = \int_a^c f(x) dx.$$

4) Aplicînd teorema creşterilor finite funcţiei  $F$ , există un punct  $\xi$  cuprins între  $a$  şi  $b$  astfel ca

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a) = f(\xi)(b - a),$$

deci

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = f(\xi)(b - a).$$

Să observăm că simbolul  $F(x) \Big|_a^b$  are următoarele proprietăţi:

$$(\alpha F(x)) \Big|_a^b = \alpha \cdot F(x) \Big|_a^b,$$

$$(F(x) + G(x)) \Big|_a^b = F(x) \Big|_a^b + G(x) \Big|_a^b.$$

Aceste proprietăţi au fost verificate în cursul demonstraţiei proprietăţilor 1 şi 2 ale integralei.

## § 5. Metode de integrare

Ca şi pentru integralele nedefinite, pentru calculul integralelor definite ale funcţiilor continue se pot aplica două metode de integrare: integrarea prin părţi şi schimbarea de variabilă.

### 1. Integrarea prin părţi

**Propoziţia 1.** Dacă  $f$  şi  $g$  sunt două funcţii definite pe un interval  $I$ , cu derivele  $f'$  şi  $g'$  continue pe acest interval, şi dacă  $a$  şi  $b$  sunt două puncte din  $I$ , atunci

$$\int_a^b fg' dx = fg \Big|_a^b - \int_a^b f'g dx.$$

Într-adevăr,  $fg$  este derivabilă pe  $I$  și

$$(fg)' = f'g + fg',$$

adică  $fg$  este o primitivă a funcției  $f'g + fg'$ , deci

$$\int_a^b (f'g + fg') dx = fg \Big|_a^b.$$

Dar

$$\int_a^b (f'g + fg') dx = \int_a^b f'g dx + \int_a^b fg' dx,$$

deci

$$\int_a^b f'g dx + \int_a^b fg' dx = fg \Big|_a^b,$$

de unde

$$\int_a^b fg' dx = fg \Big|_a^b - \int_a^b f'g dx.$$

Această egalitate se numește *formula de integrare prin părți* (pentru integralele definite).

**O b s e r v a t i e.** Propoziția rămîne adevărată și dacă derivatele  $f'$  și  $g'$  nu sunt continue, ci numai integrabile. Cum  $f$  și  $g$  sunt de asemenea integrabile (deoarece fiind derivate, sunt continue), rezultă că produsele  $f'g$  și  $fg'$  sunt integrabile, deci și funcția  $(fg)' = f'g + fg'$  este integrabilă. Funcția  $(fg)'$  are și primitive, deci i se poate aplica formula lui Leibniz – Newton, și demonstrația continuă ca mai sus.

Pentru integralele definite se poate de asemenea da o formulă de integrare prin părți de ordin  $n$ :

**P r o p o z i ᄀ i a 2.** Dacă  $f$  și  $g$  sunt două funcții definite pe un interval  $I$ , care au derivate de ordinul  $n$ ,  $f^{(n)}$  și  $g^{(n)}$  continue pe  $I$ , și dacă  $a, b \in I$ , atunci :

$$\int_a^b fg^{(n)} dx = fg^{(n-1)} \Big|_a^b + (-1)^1 f'g^{(n-2)} \Big|_a^b + (-1)^2 f''g^{(n-3)} \Big|_a^b + \dots +$$

$$+ (-1)^k f^{(k)}g^{(n-k-1)} \Big|_a^b + \dots + (-1)^{n-1} f^{(n-1)}g \Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b f^{(n)}g dx.$$

Intr-adevăr,

$$\int_a^b f^{(k)} g^{(n-k)} dx = f^{(k)} g^{(n-k-1)} \Big|_a^b - \int_a^b f^{(k+1)} g^{(n-k-1)} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

deci

$$(-1)^k \int_a^b f^{(k)} g^{(n-k)} dx = (-1)^k f^{(k)} g^{(n-k-1)} \Big|_a^b + (-1)^{k-1} \int_a^b f^{(k+1)} g^{(n-k-1)} dx.$$

Adunând membru cu membru cele  $n$  egalități și reducind termenii asemenea, se obține formula din enunțul propoziției.

*Exemplu.* Dacă  $P(x)$  este un polinom de grad  $\leq n$ , iar  $\alpha$  și  $\beta \neq 0$  sunt numere reale, avem

$$\int_a^b e^{\beta x} P(\alpha x) dx = e^{\beta x} \left[ \frac{P(\alpha x)}{\beta} - \frac{\alpha P'(\alpha x)}{\beta^2} + \dots + (-1)^n \frac{\alpha^n P^{(n)}(\alpha x)}{\beta^{n+1}} \right] \Big|_a^b.$$

Intr-adevăr, în formula de integrare prin părți de ordinul  $n$ , luând

$$f(x) = P(\alpha x), \quad f'(x) = \alpha P'(\alpha x), \quad f''(x) = \alpha^2 P''(\alpha x), \dots$$

$$\dots, \quad f^{(n-1)}(x) = \alpha^{n-1} P^{(n-1)}(\alpha x), \quad f^{(n)}(x) = \alpha^n P^{(n)}(\alpha x),$$

$$g^{(n)}(x) = e^{\beta x}, \quad g^{(n-1)}(x) = \frac{e^{\beta x}}{\beta}, \quad g^{(n-2)}(x) = \frac{e^{\beta x}}{\beta^2}, \dots, \quad g'(x) = \frac{e^{\beta x}}{\beta^{n-1}}, \quad g(x) = \frac{e^{\beta x}}{\beta^n},$$

obținem :

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{\beta x} P(\alpha x) dx &= \left( P(\alpha x) \frac{e^{\beta x}}{\beta} - \alpha P'(\alpha x) \frac{e^{\beta x}}{\beta^2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-1} \alpha^{n-1} P^{(n-1)}(\alpha x) \frac{e^{\beta x}}{\beta^n} \right) \Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b \alpha^n P^{(n)}(\alpha x) \frac{e^{\beta x}}{\beta^n} dx. \end{aligned}$$

Observînd că  $P^{(n)}(\alpha x) = \text{constant}$ , deoarece  $P(\alpha x)$  este un polinom de grad  $\leq n$ , avem

$$\int_a^b \alpha^n P^{(n)}(\alpha x) \frac{e^{\beta x}}{\beta^n} dx = \alpha^n P^{(n)}(\alpha x) \int_a^b \frac{e^{\beta x}}{\beta^n} dx = \alpha^n P^{(n)}(\alpha x) \frac{e^{\beta x}}{\beta^{n+1}} \Big|_a^b$$

și înlocuind în egalitatea precedentă, se obține formula de mai sus.

Luînd în această formulă  $\beta = -\alpha \neq 0$ , obținem egalitatea următoare

$$\int_a^b e^{-\alpha x} P(\alpha x) dx = - \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \left[ P(\alpha x) + P'(\alpha x) + \dots + P^{(n)}(\alpha x) \right] \Big|_a^b.$$

**O b s e r v a t i i.** 1° Formula este adevărată și dacă se presupune că derivatele  $f^{(n)}$  și  $g^{(n)}$  nu sunt continue, ci numai integrabile.

2° Din formulele de integrare prin părți pentru integralele definite, se pot deduce formule de calcul al primitivelor luând una dintre limitele de integrare variabilă:

$$\int_a^x f g' \, dx = f g \Big|_a^x - \int_a^x f' g \, dx$$

sau

$$\int_a^x f g' \, dx = f(x) g(x) - f(a) g(a) - \int_a^x f' g \, dx.$$

Atunci

$$\int_a^x f g' \, dx = \int_a^x f g' \, dx + C = f(x) g(x) - \int_a^x f' g \, dx - f(a) g(a) + C = f(x) g(x) - \int_a^x f' g \, dx.$$

*Formula lui Taylor.* Din formula de integrare prin părți de ordinul  $n$  se poate deduce formula lui Taylor cu restul sub formă de integrală.

**P r o p o z i t i a 3.** Fie  $f$  o funcție definită pe un interval  $I$  și  $a \in I$ . Dacă  $f$  are derivată de ordinul  $n+1$ , continuă pe  $I$ , atunci pentru orice  $x \in I$  avem:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \\ &\quad + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, dt. \end{aligned}$$

Se aplică formula de integrare prin părți de ordinul  $n$  funcțiilor  $F(t) = \frac{(t-x)^n}{n!}$  și  $G(t) = f'(t)$ , definite pentru  $t \in I$ . Funcțiile  $F$  și  $G$  au derive de ordinul  $n$  continue pe  $I$ :

$$F(t) = \frac{(t-x)^n}{n!}; \quad G^{(n)}(t) = f^{(n+1)}(t);$$

$$F'(t) = \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}; \quad G^{(n-1)}(t) = f^{(n)}(t);$$

... ... ... ... ...

$$F^{(n-1)}(t) = t - x; \quad G'(t) = f''(t);$$

$$F^{(n)}(t) = 1; \quad G(t) = f'(t).$$

$$\int_a^x F(t) G^{(n)}(t) \, dt = F(t) G^{(n-1)}(t) \Big|_a^x + (-1)^1 F'(t) G^{(n-2)}(t) \Big|_a^x + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} F^{(n-1)}(t) G(t) \Big|_a^x + (-1)^n \int_a^x F^{(n)}(t) G(t) \, dt,$$

adică

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt &= \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n)}(t) \Big|_a^x + (-1)^1 \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t) \Big|_a^x + \\ &+ \dots + (-1)^{n-1} (t-x) f'(t) \Big|_a^x + (-1)^n \int_a^x f'(t) dt = -\frac{(a-x)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \\ &- (-1)^1 \frac{(a-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) - \dots - (-1)^{n-1} (a-x) f'(a) + (-1)^n [f(x) - f(a)]; \end{aligned}$$

ținând seama că

$$\begin{aligned} (t-x)^n &= (-1)^n (x-t)^n, \\ (a-x)^k &= (-1)^k (x-a)^k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

obținem

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt &= -(-1)^n \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - (-1)^n \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) - \\ &- \dots - (-1)^n (x-a) f'(a) - (-1)^n f(a) + (-1)^n f(x), \end{aligned}$$

de unde, împărțind cu  $(-1)^n$  și scoțind pe  $f(x)$ , se obține

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \\ &+ \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

**O b s e r v a t i i.** 1° Ca și la formula de integrare prin părți, formula lui Taylor, cu restul sub forma integrală, este valabilă și dacă derivata  $f^{(n+1)}$  nu este continuă, ci numai integrabilă.

2° Dacă  $f^{(n+1)}$  este continuă pe  $I$ , din restul sub forma integrală

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

se poate deduce restul sub forma lui Lagrange

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

unde  $\xi$  este cuprins între  $a$  și  $x$ .

Intr-adevăr, să aplicăm funcțiilor

$$F_1(t) = f^{(n+1)}(t),$$

$$G_1(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$$

formula mediei pentru integrale:

$$\int_a^x F_1(t) G_1(t) dt = F_1(\xi) \int_a^x G_1(t) dt,$$

unde  $\xi$  este cuprins între  $a$  și  $x$ . Se poate aplica formula mediei, deoarece funcțiile  $F_1(t)$  și  $G_1(t)$  sunt continue pe  $I$ , iar funcția  $G_1(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$  păstrează același semn pe intervalul cu extremitățile în  $a$  și  $x$  (dacă  $a < x$ , atunci  $a < t < x$ , deci  $x-t > 0$ ; dacă  $x < a$  atunci  $x-t < a$  deci  $x-t < 0$ ).

Înlocuind în formula precedentă pe  $F_1$  și  $G_1$ , obținem

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = f^{(n+1)}(\xi) \left( -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \Big|_a^x \right) = \\ &= f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

## 2. Transcendență numărului e

Din exemplul de la nr. 1 deducem că dacă  $P(x)$  este un polinom de gradul  $n$  și  $a \neq 0$ , avem

$$\int_0^1 ax^{-ax} P(ax) dx = -e^{-ax} Q(ax) \Big|_0^1 = -e^{-a} Q(a) + Q(0),$$

unde am notat

$$Q(x) = P(x) + P'(x) + \dots + P(n)(x).$$

Înmulțind cu  $e^a$  în egalitatea de mai sus, obținem, chiar pentru  $a = 0$ ,

$$e^a Q(0) = Q(a) + ae^a \int_0^1 e^{-ax} P(ax) dx = Q(a) + R(a),$$

unde am notat

$$R(a) = ae^a \int_0^1 e^{-ax} P(ax) dx.$$

Pentru demonstrarea transcendenței numărului  $e$ , vom folosi polinomul

$$P(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} (x-1)^p (x-2)^p \dots (x-n)^p$$

de grad  $n+p-1$ , unde  $p$  este un număr prim oarecare.

Derivata de ordin  $p$  a factorului  $(x-n)^p$  este  $p!$ , deci derivata de ordin  $p$  a polinomului  $P(x)$  are numai coeficienți intregi, multipli ai lui  $p$ . Urmează că derivatele de ordin  $r \geq p$  ale lui  $P(x)$  sunt polinoame cu coeficienți intregi divizibili cu  $p$ , deci pentru  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  $P^{(r)}(i)$  este un număr întreg multiplu de  $p$ .

Deoarece numerele  $1, 2, \dots, n$  sunt rădăcini de ordin  $p$  ale lui  $P(x)$ , rezultă că  $P(x)$  și primele sale  $p - 1$  derivate se anulează pentru  $x = 1, 2, \dots, n$ . De asemenea,  $P'(x)$  și primele sale  $p - 2$  derivate se anulează pentru  $x = 0$ . Urmează că pentru  $x = i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , avem

$$Q(i) = P(p)(i) + \dots + P(np+p-1)(i) = Kp,$$

iar pentru  $x = 0$  avem

$$\begin{aligned} Q(0) &= P(p-1)(0) + P(p)(0) + \dots + P(np+p-1)(0) = P(p-1)(0) + K'p = \\ &= (-1)^pn(n!)^p + K'p \end{aligned}$$

unde  $K$  și  $K'$  sunt numere întregi.

Să presupunem, prin absurd, că  $e$  este un număr algebric, soluție a ecuației

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$$

cu coeficienții  $a_0, a_1, \dots, a_n$  întregi și să arătăm că ajungem la o contradicție. Avem deci

$$a_0 + a_1e + \dots + a_ne^n = 0.$$

Să considerăm polinomul

$$P(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} (x-1)^p(x-2)^p \dots (x-n)^p$$

cu  $p$  prim oarecare și să înmulțim în egalitatea precedentă cu  $Q(0)$

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot e^i Q(0) = 0.$$

Folosind egalitatea  $e^\alpha Q(0) = Q(\alpha) + R(\alpha)$  pentru  $\alpha = i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , obținem

$$a_0 Q(0) + \sum_{i=1}^n a_i Q(i) = - \sum_{i=1}^n a_i R(i)$$

de unde

$$(-1)^pn a_0 (n!)^p + K''p = - \sum_{i=1}^n a_i R(i)$$

unde  $K''$  este întreg. Luind  $p > |a_0|$  și  $p > n$ , primul termen al sumei din membrul stîng nu are factor prim numărul  $p$ , deci nu este multiplu de  $p$  și deci primul termen al egalității este un număr întreg  $\neq 0$ . Vom arăta că membrul drept al egalității este cuprins strict între  $-1$  și  $1$ , și vom ajunge astfel la o contradicție. Avem, pentru  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} |R(i)| &= e^i \left| \int_0^i ie^{-tx} P(tx) dx \right| = e^i \left| \int_0^i e^{-t} P(t) dt \right| < e^i \sup_{1 \leq t \leq i} |P(t)| < \\ &< \frac{e^i i (n!)^p}{(p-1)!} \leq \frac{n e^n (n!)^p}{(p-1)!} \end{aligned}$$

deci, notind  $M = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$ , avem

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i R(i) \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| |R(i)| \leq M \sum_{i=1}^n |R(i)| \leq M n^p e^n n! \frac{(n!)^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Dar  $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{y^p}{p!} = 0$ , deci, luând  $p$  suficient de mare, obținem ca ultimul termen să fie  $< 1$ , deci  $\left| \sum_{i=1}^n a_i R(i) \right| < 1$  și am ajuns la contradicția enunțată mai sus. Așadar, numărul  $e$  este transcendent. Acest fapt a fost demonstrat de Hermite.

### 3. Transcendența numărului $\pi$

Demonstrația folosește proprietățile funcțiilor simetrice elementare de rădăcinile unei ecuații și următoarele două observații din teoria ecuațiilor algebrice.

1) Dacă  $\gamma$  este un număr algebric (real sau complex), soluție a ecuației cu coeficienți întregi

$$\varphi(x) = a_n x^n + \dots + a_0 = 0$$

atunci  $i\gamma$ , ( $i = \sqrt{-1}$ ), este de asemenea algebric.

Intr-adevăr, punind  $\gamma' = i\gamma$ , avem  $\gamma = -i\gamma'$ , deci  $\varphi(-i\gamma') = 0$ , de unde  $\varphi(-i\gamma')\varphi(i\gamma') = 0$ , iar membrul stîng al ultimei egalități este un polinom în  $\gamma'$  cu coeficienți întregi.

2) Dacă  $\gamma$  este un număr algebric, soluție a ecuației  $\varphi(x) = 0$  atunci  $\gamma' = \gamma a_n$  este de asemenea un număr algebric, soluție a unei ecuații algebrice canonice, cu coeficienți întregi, în care coeficientul lui  $x^n$  este 1.

Această ecuație este

$$a_n^{n-1} \varphi\left(\frac{x}{a_n}\right) = 0.$$

Să presupunem prin absurd că  $\pi$  este număr algebric, și să arătăm că ajungem la o contradicție. Din cele două observații de mai sus, rezultă că există un număr întreg  $c$ , astfel încât numărul  $c\pi$  să verifice o ecuație canonica cu coeficienți întregi:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 = 0.$$

Să notăm  $c\beta_1, c\beta_2, \dots, c\beta_n$  rădăcinile acestei ecuații. Printre aceste rădăcini se află și  $c\pi$ : există deci  $m$  astfel încât  $\beta_m = i\pi$ , deci

$$1 + e^{\beta m} = 0$$

deoarece  $e^{\beta m} = e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$ . Atunci

$$(1 + e^{\beta_1})(1 + e^{\beta_2}) \dots (1 + e^{\beta_n}) = 0.$$

Să dezvoltăm produsul din membrul stîng: vor apărea puteri ale lui  $e$  avînd exponenți sume formate din numerele  $\beta_1, \dots, \beta_n$ . Dacă o asemenea sumă este nulă, puterea lui  $e$  este 1. Așadar, după dezvoltare, vom obține o egalitate de forma

$$C + e^{\alpha_1} + e^{\alpha_2} + \dots + e^{\alpha_s} = 0,$$

unde  $C$  este întreg iar  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  sint sume  $\neq 0$ , formate din numerele  $\beta_1, \dots, \beta_n$ . Dar  $c\alpha_1, c\alpha_2, \dots, c\alpha_s$  sint rădăcinile unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi, deoarece  $c\beta_1, \dots, c\beta_n$  sint rădăcinile unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi, deci și sumele formate cu acestea sint rădăcinile unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi și printre aceste sume se află și  $c\alpha_1, c\alpha_2, \dots, c\alpha_s$ . Să considerăm polinomul de grad  $sp + p - 1$ .

$$P(x) = \frac{(cx)^{p-1}}{(p-1)!} (cx - c\alpha_1)^p (cx - c\alpha_2)^p \dots (cx - c\alpha_s)^p,$$

unde  $p$  este un număr prim. Atunci  $(p-1)!P(x)$  este un polinom în  $cx$ , cu coeficienți întregi. Notind

$$Q(x) = P(x) + P'(x) + \dots + P(sp+p-1)(x)$$

și înmulțind cu  $Q(0)$  în egalitatea  $C + \sum_{i=1}^s e^{\alpha_i} = 0$ , obținem

$$CQ(0) + \sum_{i=1}^s e^{\alpha_i} Q(0) = 0$$

și deoarece  $e^{\alpha_i} Q(0) = Q(\alpha_i) + R(\alpha_i)$ , avem

$$CQ(0) + \sum_{i=1}^s Q(\alpha_i) = - \sum_{i=1}^s R(\alpha_i).$$

Ca și în demonstrația transcendenței lui  $e$ , deducem că derivata  $P(r)(x)$  se anulează pentru  $x = 0$  dacă  $r < p - 1$  și pentru  $x = \alpha_i$  dacă  $r < p$ . Pentru  $r \geq p$ , coeficienții derivatei  $P(r)(x)$  sunt întregi și divizibili cu  $p$ . Dar  $P(r)(x)$  este un polinom în  $cx$ , deci

$$\sum_{i=1}^s P(r)(\alpha_i), \quad r \geq p$$

este o funcție simetrică întreagă de  $c\alpha_1, c\alpha_2, \dots, c\alpha_s$ , cu coeficienți întregi divizibili cu  $p$ . Avem de asemenea

$$P(p-1)(0) = c^{p-2} (-c\alpha_1)^p (-c\alpha_2)^p \dots (-c\alpha_s)^p.$$

Așadar

$$CQ(0) + \sum_{i=1}^s Q(\alpha_i) = CP(p-1)(0) + Kp$$

unde  $K$  este întreg; luând  $p$  mai mare decât numerele  $C, c$  și decât produsul  $\alpha_1 c \cdot \alpha_2 c \dots \alpha_s c$  deducem că  $CQ(0) + \sum_{i=1}^s Q(\alpha_i)$  este un număr întreg  $\neq 0$ .

Să evaluăm acum  $\sum_{i=1}^s R(\alpha_i)$  și să arătăm că are modulul  $< 1$ . Avem

$$|R(\alpha_i)| \ll He^H M$$

unde  $H = \max(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_s|)$  și

$$M = \sup_{|x| < H} |P(x)| < \frac{(|c|H)^{p-1} (2|c|H)^{ps}}{(p-1)!},$$

deci

$$\left| \sum_{i=1}^s R(\alpha_i) \right| < K' \frac{K^{p-1}}{(p-1)!}$$

unde  $K$  și  $K'$  sunt constante. Deoarece  $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{K^{p-1}}{(p-1)!} = 0$ , pentru  $p$  suficient de mare

putem realiza ca  $\left| \sum_{i=1}^s R(\alpha_i) \right| < 1$ . Atunci egalitatea

$$CQ(0) + \sum_{i=1}^s Q(\alpha_i) = - \sum_{i=1}^s R(\alpha_i)$$

nu poate avea loc, deoarece, după cum s-a arătat mai sus, membrul sting este întreg, și am ajuns la o contradicție.

Așadar,  $\pi$  este transcendent. Acest fapt a fost demonstrat de *Lindemann*.

#### 4. Schimbarea de variabilă (integrarea funcțiilor compuse)

Fie intervalele  $I$  și  $J$ , și funcțiile

$$u(x) : I \rightarrow J, f(t) : J \rightarrow R.$$

**P r o p o z i t i a 1.** Dacă  $f(t)$  este continuă pe  $J$ , iar  $u(x)$  are derivată  $u'(x)$  continuă pe  $I$ , și dacă  $a$  și  $b$  sunt două puncte din  $I$ , atunci:

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt.$$

Această egalitate se numește *prima formulă de schimbare de variabilă*.

Funcțiile  $f(t)$  și  $f(u(x)) \cdot u'(x)$  sunt continue, respectiv, pe  $J$  și  $I$ , deci au primitive pe aceste intervale. Fie  $F(t)$  o primitivă a funcției  $f(t)$  pe intervalul  $J$ :

$$F'(t) = f(t).$$

Atunci funcția compusă  $H(x) = F(u(x))$ , definită pe  $I$ , este derivabilă pe  $I$  și

$$H'(x) = F'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x),$$

adică  $H$  este o primitivă a funcției  $f(u(x)) \cdot u'(x)$ .

Așadar

$$\begin{aligned} \int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx &= H(x) \Big|_a^b = H(b) - H(a) = \\ &= F(u(b)) - F(u(a)) = F(t) \Big|_{u(a)}^{u(b)} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) dt. \end{aligned}$$

Practic, pentru a calcula integrala

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx,$$

se face înlocuirea

$$u(x) = t$$

și se diferențiază formal

$$u'(x) dx = dt.$$

Limitele de integrare  $a$  și  $b$  se înlocuiesc cu limitele de integrare  $t_1$  și  $t_2$ , care se obțin tot din egalitatea  $u(x) = t$ , înlocuind pe  $x$  respectiv cu  $a$  și  $b$ :

$$t_1 = u(a), \quad t_2 = u(b),$$

se obține

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

**O b s e r v a t i i .** 1° Funcția  $u(x)$  nu este presupusă monotonă.

2° Nu este nevoie ca derivata  $u'(x)$  să fie continuă, ci numai integrabilă.

Intr-adevăr, deoarece funcția  $f(u(x))$  este de asemenea integrabilă (fiind continuă, ca funcție compusă a funcțiilor continue  $u(t)$  și  $f(x)$ ), produsul  $f(u(x)) \cdot u'(x)$  este o funcție integrabilă și având și primitivă (funcția  $H(x)$ ), se poate aplica formula lui Leibniz-Newton și demonstrația continuă ca mai sus.

3° Formula de schimbare de variabilă se poate scrie și astfel

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) u'(t) dt,$$

unde s-a notat cu  $x$  variabila din  $J$  și cu  $t$  variabila din  $I$ , iar între limitele de integrare există relațiile:

$$\alpha = u(a), \quad \beta = u(b).$$

În acest fel putem calcula integrala  $\int_a^b f(x) dx$  cu ajutorul integralei

$$\int_a^b f(u(t)) \cdot u'(t) dt, \text{ făcind următoarele înlocuiri:}$$

$$x = u(t), \quad dx = u'(t) dt.$$

Limitele  $a$  și  $b$  se aleg astfel ca  $u(a) = \alpha$  și  $u(b) = \beta$ . Dacă  $u(a') = \alpha$  și  $u(b') = \beta$ , se pot alege  $a'$  și  $b'$  limitele integralei din membrul drept. Nu este nevoie ca funcția  $u(t)$  să fie biunivocă.

**Exemplu.** Să se calculeze  $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ .

Se face înlocuirea  $x = \sin t$ , deci  $dx = \cos t dt$ .

Putem alege  $t_1 = 0$  și  $t_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k$  întreg, deoarece

$$x_1 = \sin t_1 = \sin 0 = 0, \quad x_2 = \sin t_2 = \sin \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Atunci

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \int_0^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt.$$

Dar

$$\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} |\cos t| \cos t dt = 0, \text{ oricare ar fi } n \in N.$$

Intr-adevăr: pentru  $2n\pi \leq t \leq 2n\pi + \frac{\pi}{2}$  și  $2n\pi + \frac{3\pi}{2} \leq t \leq (2n+1)\pi$  avem  $\cos t \geq 0$  deci  $|\cos t| = \cos t$  și

$$|\cos t| \cos t = \cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t.$$

Iar pentru  $2n\pi + \frac{\pi}{2} \leq t \leq 2n\pi + \frac{3\pi}{2}$  avem  $\cos t \leq 0$ , deci  $|\cos t| = -\cos t$  și

$$|\cos t| \cos t = -\cos^2 t = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t\right).$$

Atunci

$$\begin{aligned} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} |\cos t| \cos t dt &= \int_{2n\pi}^{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt - \int_{2n\pi + \frac{\pi}{2}}^{2n\pi + \frac{3\pi}{2}} \cos^2 t dt + \int_{2n\pi + \frac{3\pi}{2}}^{2(n+1)\pi} \cos^2 t dt = \\ &= \left( \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_{2n\pi}^{2n\pi + \frac{\pi}{2}} - \left( \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_{2n\pi + \frac{\pi}{2}}^{2n\pi + \frac{3\pi}{2}} + \left( \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_{2n\pi + \frac{3\pi}{2}}^{2(n+1)\pi} = 0. \end{aligned}$$

Așadar

$$\begin{aligned} \int_0^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt &= \int_0^{2\pi} |\cos t| \cos t dt + \int_{2\pi}^{4\pi} |\cos t| \cos t dt + \dots + \\ &+ \int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} |\cos t| \cos t dt + \int_{2k\pi}^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_{2k\pi}^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= \left( \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_{2k\pi}^{2k\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Pentru calcul, alegem desigur cazul cel mai simplu:  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \frac{\pi}{2}$ .

**Observație.** Din prima formulă de schimbare de variabilă se deduce o formulă de calcul pentru primitive, luind una din limite variabile

$$\int_a^x f(u(z)) \cdot u'(z) dz = \int_{u(a)}^{u(x)} f(t) dt.$$

**P r o p o z i t i a 2.** Dacă  $f(t)$  este continuă pe  $J$ , iar  $u(x)$  este strict monotonă pe  $I$ , dacă inversa sa  $v = u^{-1} : J \rightarrow I$  are derivată continuă  $v'$  pe  $J$ , și dacă  $a, b \in I$ , atunci

$$\int_a^b f(u(x)) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)v'(t) dt.$$

Această egalitate se numește a doua formulă de schimbare de variabilă.

Să observăm mai întâi că, deoarece  $v = u^{-1}$ , avem

$$u(v(t)) = t \text{ pentru orice } t \in J,$$

$$v(u(x)) = x \text{ pentru orice } x \in I,$$

$$I \xrightarrow[u]{} J.$$

Funcția  $f(u(x))$  este continuă pe  $I$ .

$$\begin{aligned} I &\xrightarrow[u]{} J \xrightarrow{f} R \\ x &\rightarrow u(x) \rightarrow f(u(x)). \end{aligned}$$

Fie  $F(x) : I \rightarrow R$  o primitivă a funcției  $f(u(x))$ :

$$F'(x) = f(u(x)), \quad x \in I.$$

Să considerăm funcția compusă  $H(t) = F(v(t)) : J \rightarrow R$ :

$$\begin{aligned} J &\xrightarrow{v} I \xrightarrow{F} R \\ t &\rightarrow v(t) \rightarrow F(v(t)). \end{aligned}$$

Deoarece  $F$  și  $v$  sunt derivabile, funcția  $H(t) = F(v(t))$  este derivabilă pe  $J$  și avem

$$H'(t) = F'(v(t)) \cdot v'(t) = f(u(v(t))) \cdot v'(t) = f(t)v'(t),$$

deci  $H(t)$  este o primitivă a funcției  $f(t) \cdot v'(t)$ . Atunci

$$\begin{aligned} \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)v'(t) dt &= H(t) \Big|_{u(a)}^{u(b)} = F(v(t)) \Big|_{u(a)}^{u(b)} = \\ &= F(v(u(b))) - F(v(u(a))) = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b = \int_a^b f(u(x)) dx. \end{aligned}$$

Practic, pentru a calcula integrala

$$\int_a^b f(u(x)) dx$$

se face înlocuirea

$$u(x) = t.$$

Se rezolvă apoi în raport cu  $x$ ,  $x = u^{-1}(t) = v(t)$  (sau se face de la început înlocuirea  $x = v(t)$ ); apoi se diferențiază, formal, egalitatea

$$x = v(t).$$

Se obține

$$dx = v'(t) dt.$$

Limitele de integrare  $a$  și  $b$  se înlocuiesc cu limitele de integrare  $t_1$  și  $t_2$ , care se obțin tot din egalitatea  $u(x) = t$ , înlocuind pe  $x$  respectiv cu  $a$  și  $b$ :

$$t_1 = u(a), \quad t_2 = u(b).$$

Se obține

$$\int_a^b f(u(x)) dx = \int_{t_2}^{t_1} f(t) \cdot v'(t) dt.$$

**Observații.** 1° Nu este nevoie ca derivata  $v'(t)$  să fie continuă, ci numai integrabilă.

2° Derivata  $v'(t)$  poate fi nulă în unele puncte  $t \in J$ ; adică funcția  $u(x)$  poate să nu fie derivabilă în punctele corespunzătoare  $x = v(t) \in I$ .

3° În practică, de cele mai multe ori derivabilitatea lui  $v$  și continuitatea derivatei  $v'$  sunt verificate. Ceea ce trebuie verificat totdeauna este ca funcția  $u(x)$  să fie biunivocă adică ecuația  $u(x) = t$  să aibă, pentru fiecare  $t \in J$ , o singură soluție,  $x = v(t) \in I$ . Rezultă atunci că funcția  $u(x)$  este strict monotonă, deoarece este biunivocă și continuă.

*Exemplu.* Să se calculeze  $\int_0^1 \sqrt{x(\sqrt{x} + 1)} dx$ .

Avem

$$\int_0^1 \sqrt{x(\sqrt{x} + 1)} dx = \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{\sqrt{x} + 1} dx.$$

Facem înlocuirea

$$\sqrt{\sqrt{x} + 1} = t, \text{ deci } t \geq 0;$$

pentru  $x_1 = 0$  avem  $t_1 = 1$ , iar pentru  $x_2 = 1$  avem  $t_2 = \sqrt{2}$ .

Apoi

$$\sqrt{x} + 1 = t^2,$$

deci

$$\sqrt{x} = t^2 - 1$$

și

$$x = (t^2 - 1)^2,$$

deci

$$dx = 4t(t^2 - 1)dt.$$

**Atunci**

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{\sqrt{x} + 1} dx = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)t \cdot 4t(t^2 - 1) dt = \\
 & = \int_1^{\sqrt{2}} 4(t^2 - 1)^2 t^2 dt = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^4 - 2t^4 + t^2) dt = \\
 & = 4 \left( \frac{1}{7} t^7 - \frac{2}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = 4 \left( \frac{1}{7} \sqrt{2}^7 - \frac{2}{5} \sqrt{2}^5 + \frac{1}{3} \sqrt{2}^3 \right) - 4 \left( \frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) = \\
 & = \frac{8}{105} (11\sqrt{2} - 4).
 \end{aligned}$$

**Observație.** Din a doua formulă de schimbare de variabilă se deduce o formulă de calcul al primitivelor, luând una din limitele de integrare variabilă

$$\int_a^x f(u(x)) dx = \int_{u(a)}^{u(x)} f(t) v'(t) dt.$$

## § 6. Integrale reductibile la integrale raționale

### I. Considerații preliminare

Pentru funcțiile continue, formula lui Leibniz-Newton reduce problema calculului integralei la aceea a găsirii primitivelor.

Primitivele funcțiilor raționale se pot calcula totdeauna cind se cunosc rădăcinile polinomului de la numitor și deci se pot calcula și integralele funcțiilor raționale.

Pentru prescurtare, integralele funcțiilor raționale vor fi numite **integrale raționale**.

Dacă, printr-o schimbare de variabilă, o integrală se transformă într-o integrală rațională, spunem că integrala inițială este *reductibilă* la o integrală rațională.

Integralele reductibile la integrale raționale pot fi de asemenea calculate. Luând una din limitele de integrare variabilă, se obțin primitivele unor funcții care nu sunt raționale.

Se pune astfel problema găsirii unor clase de funcții ale căror integrale sunt reductibile la integrale raționale.

Pentru aceasta să considerăm mai întâi prima formulă de schimbare de variabilă :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_{u(x_1)}^{u(x_2)} f(t) dt.$$

Dacă funcția  $f(t)$  este rațională (și numai în acest caz), integrala din membrul drept este o integrală rațională și deci integrala din membrul stâng este reductibilă la o integrală rațională și poate fi calculată.

Așadar : *Integralele de forma*

$$\int_{x_1}^{x_2} R(u(x)) \cdot u'(x) dx,$$

unde  $R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$  este o funcție rațională, iar  $u(x)$  este o funcție oarecare cu derivata continuă, sănătatea reductibile la integrale raționale, prin schimbarea de variabilă  $u(x) = t$ .

Integralele de forma  $\int_{x_1}^{x_2} R(u(x)) dx$  nu sunt însă, în general, reductibile la integrale raționale.

Evident, dacă  $u(x)$  este rațională, funcția compusă  $R(u(x))$  este de asemenea rațională.

Vom încerca să găsim cîteva clase de funcții  $u(x)$  care nu sunt raționale, dar pentru care integralele  $\int_{x_1}^{x_2} R(u(x)) dx$  sunt reductibile la integrale raționale, prin schimbarea de variabilă  $u(x) = t$ . Pentru aceasta folosim a doua formulă de schimbare de variabilă

$$\int_{x_1}^{x_2} R(u(x)) dx = \int_{t_1}^{t_2} R(t) \cdot v'(t) dt,$$

unde  $u(x)$  este o funcție biunivocă pe intervalul  $I = [x_1, x_2]$ , iar  $v(t)$  este inversa sa (de asemenea biunivocă) cu derivata  $v'(t)$  continuă pe intervalul  $J = u(I)$  cu extremitățile în  $t_1$  și  $t_2$ :

$$t_1 = u(x_1), \quad t_2 = u(x_2).$$

Dacă funcția  $v'(t)$  este rațională, atunci funcția  $R(t) v'(t)$  este rațională și deci integrala din membrul stâng este reductibilă la o integrabilă rațională.

Funcția  $v'(t)$  este rațională, dacă și numai dacă primitiva sa  $v(t)$  este de formă

$$k \ln r(t), \quad k \arctg r(t), \quad r(t)$$

sau o sumă de funcții de acest fel, unde  $r(t)$  este o funcție rațională biunivocă definită pe  $J$ , iar  $k \neq 0$ .

Prin inversarea funcțiilor  $v(t)$  de această formă, obținem funcțiile  $u(x)$  căutate.

Ne vom mărgini aici la următoarele cazuri:

$$1) v(t) = k \ln t, (k \neq 0);$$

$$2) v(t) = k \operatorname{arc tg} t, (k \neq 0);$$

$$3) v(t) = \frac{\alpha t^n + \beta}{\gamma t^n + \delta}, (\alpha \delta \neq \gamma \beta, n \in N);$$

$$4) v(t) = \frac{\alpha t^2 + \beta}{\gamma t + \delta}, (\alpha \delta \neq \gamma \beta, \alpha \neq 0, \gamma \neq 0);$$

$$5) v(t) = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t^2 + \delta}, (\alpha \delta \neq \gamma \beta, \alpha \neq 0, \gamma \neq 0).$$

Să găsim pentru fiecare din aceste cazuri funcția  $u(x)$  corespunzătoare:

$$1) v(t) = k \ln t, \quad k \neq 0.$$

Dacă punem  $x = k \ln t$ , avem  $e^{\frac{x}{k}} = t$ , și deci, notând  $a = \frac{1}{k}$

$$u(x) = e^{ax}.$$

$$2) v(t) = k \operatorname{arc tg} t, \quad k \neq 0.$$

Dacă punem  $x = k \operatorname{arc tg} t$ , avem  $\operatorname{tg} \frac{x}{k} = t$  și deci

$$u(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{k}.$$

$$3) v(t) = \frac{\alpha t^n + \beta}{\gamma t^n + \delta}, \quad \alpha \delta \neq \gamma \beta.$$

Dacă punem

$$x = \frac{\alpha t^n + \beta}{\gamma t^n + \delta},$$

atunci

$$\gamma \cdot t^n + x \delta = \alpha t^n + \beta$$

și, rezolvînd în raport cu  $t^n$ ,

$$t^n = \frac{-\delta x + \beta}{\gamma x - \alpha},$$

de unde

$$\sqrt[n]{\frac{-\delta x + \beta}{\gamma x - \alpha}} = t$$

și notând  $-\delta = a$ ,  $\beta = b$ ,  $\gamma = c$ ,  $-\alpha = d$ , rezultă

$$u(x) = \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}.$$

În particular, unii din coeficienții  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  pot fi nuli, și deci și unii din coeficienții  $a, b, c, d$  pot fi nuli. Să remarcăm însă că avem  $ad \neq bc$ , deoarece

$$\alpha\delta \neq \gamma\beta.$$

În cazul cînd  $n = 1$ ,  $u(x)$  este rațională. Vom considera numai cazul cînd  $n \geq 2$ .

$$4) v(t) = \frac{\alpha t^2 + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \alpha\delta \neq \gamma\beta, \quad \alpha \neq \gamma \neq 0.$$

Dacă punem  $x = \frac{\alpha t^2 + \beta}{\gamma t + \delta}$ , atunci

$$\gamma xt + \delta x = \alpha t^2 + \beta$$

sau

$$\alpha t^2 - \gamma xt + \beta - \delta x = 0$$

și, rezolvînd în raport cu  $t$ , avem

$$t = \frac{\gamma x \pm \sqrt{\gamma^2 x^2 + 4\alpha\delta x - 4\alpha\beta}}{2\alpha}.$$

În fața radicalului se ia un singur semn, acela pentru care  $t \in J$

Luînd  $\alpha = \frac{1}{2}$  (ceea ce nu micșorează generalitatea, deoarece putem împărți la numărătorul și la numitorul fracției  $\frac{\alpha t^2 + \beta}{\gamma t + \delta}$  cu  $2\alpha$ ) și, notînd  $\gamma^2 = a > 0$ ,  $4\alpha\delta = b$ ,  $-4\alpha\beta = c$ , obținem

$$u(x) = \varepsilon \sqrt{ax} \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}, \quad a > 0,$$

unde  $\varepsilon = 1$  dacă  $\gamma > 0$  și  $\varepsilon = -1$  dacă  $\gamma < 0$ .

$$5) v(t) = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t^2 + \delta}, \quad \alpha\delta \neq \gamma\beta, \quad \alpha \neq 0, \quad \gamma \neq 0.$$

Dacă punem  $x = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t^2 + \delta}$ , atunci

$$\gamma xt^2 + \delta x = \alpha t + \beta$$

sau

$$\gamma xt^2 - \alpha t + \delta x - \beta = 0$$

și, rezolvînd în raport cu  $t$ , avem

$$t = \frac{\alpha \pm \sqrt{-4\gamma\delta x^2 + 4\beta\gamma x + \alpha^2}}{2\gamma x}.$$

În fața radicalului se ia un singur semn, acela pentru care  $t \in J$ . Luînd  $\gamma = \frac{1}{2}$  (ceea ce nu micșorează generalitatea) și notînd  $-4\gamma\delta = a$ ,  $4\beta\gamma = b$ ,  $\alpha^2 = c > 0$ , obținem

$$u(x) = \frac{\varepsilon \sqrt{c} \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}}{x},$$

unde  $\varepsilon = 1$ , dacă  $\alpha > 0$ , și  $\varepsilon = -1$ , dacă  $\alpha < 0$ .

O b s e r v a t i e. Dacă  $\alpha = 0$  sau dacă  $\gamma = 0$ , cazurile 4 și 5 se reduc la cazul 3.

## 2. Integrale de funcții exponențiale

$$\int_{x_1}^{x_2} R(e^{ax}) dx, \quad a \neq 0,$$

unde  $R(u) = \frac{P(u)}{Q(u)}$  este o funcție rațională. Pentru ca integrala să aibă sens, adică pentru ca funcția de integrat să fie definită pe intervalul de integrare, se impune condiția:

$$Q(e^{ax}) \neq 0 \quad \text{pentru orice } x \in [x_1, x_2].$$

Integrala aceasta se reduce la o integrală rațională, făcînd înlocuirea

$$e^{ax} = t.$$

Într-adevăr, avem  $x = \frac{1}{a} \ln t$ , deci  $dx = \frac{1}{at} dt$ ; notînd

$$t_1 = e^{ax_1} \text{ și } t_2 = e^{ax_2} \text{ obținem}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} R(e^{ax}) dx = \int_{t_1}^{t_2} R(t) \frac{1}{at} dt = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t) dt,$$

unde funcția  $R_1(t) = R(t) \frac{1}{at}$  este rațională.

**Observație.** Luând una din limitele de integrare variabilă, se obține o primitivă a funcției  $R(e^{ax})$  pe intervalul  $[x_1, x_2]$ .

**Exemplu.** 1) Să se calculeze  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx$ .

Se face înlocuirea  $e^{2x} = t$  deci  $x = \frac{1}{2} \ln t$  și  $dx = \frac{1}{2t} dt$ .

Avem  $t_1 = e^0 = 1$  și  $t_2 = e$ . Atunci

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx &= \int_1^e \frac{t}{1+t} \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} \int_1^e \frac{1}{1+t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \ln(1+t) \right]_1^e = \frac{1}{2} [\ln(1+e) - \ln 2] = \frac{1}{2} \ln \frac{1+e}{2} = \ln \sqrt{\frac{1+e}{2}}. \end{aligned}$$

Pentru calculul unei primitive a funcției  $\frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$  (pe un interval oarecare) procedăm astfel:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx &= \frac{1}{2} \int_1^{e^{2x}} \frac{1}{1+t} dt = \frac{1}{2} \left[ \ln(1+t) \right]_1^{e^{2x}} = \\ &= \frac{1}{2} [\ln(1 + e^{2x}) - \ln 2] = \ln \sqrt{1 + e^{2x}} - \ln \sqrt{2}. \end{aligned}$$

2) Integrala  $\int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{1 - e^{2x}} dx$  nu are sens, deoarece funcția de integrat nu este definită

în punctul 0 din intervalul de integrare, iar în jurul acestui punct funcția este nemărginită. (Mai departe, la capitolul despre integrale generalizate, se va da un sens acestei integrale).

### 3. Integrale de funcții trigonometrice

În mod obișnuit, se numesc integrale trigonometrice integralele de forma

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx,$$

unde  $R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$  este o funcție rațională de două variabile.

Pentru ca integrala să aibă sens, adică pentru ca funcția de integrat să fie definită pe intervalul de integrare, se impune condiția

$$Q(\cos x, \sin x) \neq 0, \text{ pentru orice } x \in [x_1, x_2].$$

Această integrală se reduce la o integrală rațională, făcând înlocuirea

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

sau, în anumite condiții, una din înlocuirile

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \cos x = t, \quad \sin x = t.$$

I) *Inlocuirea*  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ . Dacă  $x \neq (2k+1)\pi$ , ( $k$  întreg), adică dacă  $\frac{x}{2} \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}$ , avem

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

deci

$$R(\cos x, \sin x) = R\left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}\right) = [R^*(\operatorname{tg} \frac{x}{2})],$$

unde  $R^*$  este o funcție rațională de o variabilă.

a) Dacă  $-\pi < x_1 < x_2 < \pi$ , atunci  $-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$  pentru orice  $x \in [x_1, x_2]$ , deci  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  este definită pe  $[x_1, x_2]$  și

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx = \int_{x_1}^{x_2} R^*(\operatorname{tg} \frac{x}{2}) dx.$$

Se face înlocuirea

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,$$

deci

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

și  $x = 2 \arctg t$ , deci

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Notând  $t_1 = \tg \frac{x_1}{2}$  și  $t_2 = \tg \frac{x_2}{2}$ , avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx = \int_{t_1}^{t_2} R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t) dt,$$

unde  $R_1$  este o funcție ratională. Am redus astfel integrala inițială la o integrală ratională, în cazul cînd intervalul de integrare  $[x_1, x_2]$  este conținut în intervalul  $(-\pi, \pi)$ .

Să observăm că această condiție a fost impusă numai de schimbarea de variabilă folosită, dar că integrala poate avea sens și fără ca această condiție să fie îndeplinită, dacă  $Q(\cos x, \sin x)$  nu se anulează pe intervalul de integrare.

În acest caz se procedează astfel:

$$b) \int_{-\pi}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \int_{-\pi+\lambda}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx,$$

unde  $-\pi < x_2 < \pi$ . Pentru integralele din membrul drept, unde  $\lambda > 0$ , avem  $-\pi < -\pi + \lambda < x_2 < \pi$ , și deci se poate folosi înlocuirea  $\tg \frac{x}{2} = t$ .

$$c) \int_{x_1}^{\pi} R(\cos x, \sin x) dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \int_{x_1}^{\pi-\lambda} R(\cos x, \sin x) dx,$$

unde  $-\pi < x_1 < \pi$ . Pentru integralele din membrul drept se poate folosi înlocuirea  $\tg \frac{x}{2} = t$ .

$$d) \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos x, \sin x) dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \int_{-\pi+\lambda}^{\pi-\lambda} R(\cos x, \sin x) dx.$$

Pentru integralele din membrul drept se poate folosi înlocuirea  $\tg \frac{x}{2} = t$ .

e) Dacă  $(2k-1)\pi \leq x_1 < x_2 \leq (2k+1)\pi$ ,  $k$  întreg, avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx = \int_{x_1-2k\pi}^{x_2-2k\pi} R(\cos x, \sin x) dx$$

și  $-\pi \leq x_1 - 2k\pi < x_2 - 2k\pi \leq \pi$ . Integrala din membrul drept este de unul din tipurile precedente. Într-adevăr, să facem în integrala din stînga înlocuirea  $x - 2k\pi = z$ ; atunci  $x = z + 2k\pi$  și  $dx = dz$ ,

$$\cos x = \cos(z + 2k\pi) = \cos z, \quad \sin x = \sin(z + 2k\pi) = \sin z.$$

Notind  $z_1 = x_1 - 2k\pi$ ,  $z_2 = x_2 - 2k\pi$  avem,

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx = \int_{z_1}^{z_2} R(\cos z, \sin z) dz = \int_{z_1 - 2k\pi}^{z_2 - 2k\pi} R(\cos x, \sin x) dx,$$

unde în ultima integrală am notat variabila de integrare din nou cu  $x$ , în loc de  $z$ .

Rezultă în particular :

$$\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} R(\cos x, \sin x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos x, \sin x) dx,$$

oricare ar fi  $k$  întreg.

f) Dacă intervalul de integrare  $[x_1, x_2]$  este oarecare, integrala

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx$$

este o sumă de integrale de tipurile precedente.

Intr-adevăr, să scriem în ordine crescătoare toate punctele de forma  $z = (2k + 1)\pi$ ,  $k$  întreg, cuprinse între  $x_1$  și  $x_2$ :

$$x_1 < z_1 < \dots < z_n < x_2,$$

Pentru orice  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  avem

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} R(\cos x, \sin x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos x, \sin x) dx.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx &= \int_{x_1}^{z_1} R(\cos x, \sin x) dx + \int_{z_1}^{z_2} R(\cos x, \sin x) dx + \dots \\ &\quad \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} R(\cos x, \sin x) dx + \int_{x_n}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_1} R(\cos x, \sin x) dx + \int_{x_n}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx + \\ &\quad + (n - 1) \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos x, \sin x) dx. \end{aligned}$$

Primele două integrale sunt de tipul e).

**Observație.** Dacă se ia una din limitele de integrare variabilă, se obține o primitivă a funcției  $R(\cos x, \sin x)$  pe intervalul  $(-\pi, \pi)$ :

$$\int_a^x R(\cos x, \sin x) dx = \int_0^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \lambda \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \frac{2}{1+t^2} dt.$$

*Exemplu.* 1) Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x + 1} dx.$$

Se face înlocuirea  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , deci

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

$$t_1 = \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad t_2 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} \right) = 1.$$

Atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1}{1+t} dt = \\ &= \ln|1+t| \Big|_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 = \ln 2 - \ln \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}. \end{aligned}$$

2) Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{4\pi} \frac{1}{2+\sin x} dx.$$

A vom

$$\begin{aligned} \int_0^{4\pi} \frac{1}{2+\sin x} dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2+\sin x} dx + \int_{\pi}^{3\pi} \frac{1}{2+\sin x} dx + \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{1}{2+\sin x} dx = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2+\sin x} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2+\sin x} dx + \int_{-\pi}^0 \frac{1}{2+\sin x} dx = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2+\sin x} dx = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{-\pi+\lambda}^{\pi-\lambda} \frac{2}{2+\sin x} dx. \end{aligned}$$

Facem schimbarea de variabilă  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , deci

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt;$$

$$t_1 = t_1(\lambda) = \operatorname{tg} \frac{-\pi + \lambda}{2}, \quad t_2 = t_2(\lambda) = \operatorname{tg} \frac{\pi - \lambda}{2}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \int_{-\pi+\lambda}^{\pi-\lambda} \frac{2}{2 + \sin x} dx &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{2 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{t^2 + t + 1} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dt = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc tg} \frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big|_{t_1}^{t_2} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arc tg} \frac{2t_2 + 1}{\sqrt{3}} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{4}{3} \left[ \operatorname{arc tg} \frac{2t_2 + 1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arc tg} \frac{2t_1 + 1}{\sqrt{3}} \right]. \end{aligned}$$

A vom

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} t_1 = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \operatorname{tg} \frac{-\pi + \lambda}{2} = -\infty \text{ și } \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} t_2 = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \operatorname{tg} \frac{\pi - \lambda}{2} = +\infty,$$

deci

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \operatorname{arc tg} \frac{2t_1 + 1}{\sqrt{3}} = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \operatorname{arc tg} \frac{2t_1 + 1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{2}$$

și

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \operatorname{arc tg} \frac{2t_2 + 1}{\sqrt{3}} = \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} \operatorname{arc tg} \frac{2t_2 + 1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2},$$

astfel incit

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \int_{-\pi+\lambda}^{\pi-\lambda} \frac{2}{2 + \sin x} dx = \frac{4}{3} \left[ \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \operatorname{arc tg} \frac{2t_2 + 1}{\sqrt{3}} - \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \operatorname{arc tg} \frac{2t_1 + 1}{\sqrt{3}} \right] = \\ &= \frac{4}{3} \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{4}{3} \pi. \end{aligned}$$

II) În locuirea  $\operatorname{tg} x = t$ . În general, înlocuirea  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$  duce la o integrală rațională mai greu de calculat.

Uneori se pot folosi alte înlocuiri, care duc la integrale raționale mai simple.

*În cazul cînd funcția  $R(\cos x, \sin x)$  îndeplinește condiția*

$$R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$$

*se face schimbarea  $\operatorname{tg} x = t$ .*

În adevăr, dacă  $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ , avem  $\cos x \neq 0$  și

$$\sin x = \cos x \frac{\sin x}{\cos x} = \cos x \operatorname{tg} x,$$

deci

$$R(\cos x, \sin x) = R(\cos x, \cos x \operatorname{tg} x) = R_1(\cos x, \operatorname{tg} x),$$

unde  $R_1(u, v)$  este o funcție rațională de două variabile.

Funcția  $R_1(\cos x, \operatorname{tg} x)$  este pară în  $\cos x$ . Într-adevăr,

$$\begin{aligned} R_1(-\cos x, \operatorname{tg} x) &= R(-\cos x, -\cos x \operatorname{tg} x) = R(-\cos x, -\sin x) = \\ &= R(\cos x, \sin x) = R_1(\cos x, \operatorname{tg} x). \end{aligned}$$

Rezultă că funcția  $R_1(\cos x, \operatorname{tg} x)$  conține numai puterile pare ale lui  $\cos x$ :

$$R_1(\cos x, \operatorname{tg} x) = R_2(\cos^2 x, \operatorname{tg} x),$$

unde  $R_2(u, v)$  este o funcție rațională de două variabile. (Dacă numărătorul și numitorul funcției  $R_2$  conțin numai puterile impare ale lui  $\cos x$ , se simplifică cu  $\cos x \neq 0$  și rămân numai puterile pare ale lui  $\cos x$ .)

Din egalitatea

$$R(\cos x, \sin x) = R_2(\cos^2 x, \operatorname{tg} x)$$

rezultă, pe de o parte, că funcția  $R(\cos x, \sin x)$  conține numai puterile lui  $\sin^2 x$ ,  $\cos^2 x$  și  $\sin x \cos x$ :

$$R_2(\cos^2 x, \operatorname{tg} x) = R_2\left(\cos^2 x, \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x}\right),$$

iar pe de altă parte

$$R_2(\cos^2 x, \operatorname{tg} x) = R_2\left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \operatorname{tg} x\right) = R_3(\operatorname{tg} x),$$

unde  $R_3$  este o funcție rațională de o singură variabilă.

a) Dacă  $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ , funcția  $\operatorname{tg} x$  este definită pe intervalul  $[x_1, x_2]$  și

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx = \int_{x_1}^{x_2} R_3(\operatorname{tg} x) dx.$$

Se face înlocuirea

$$\operatorname{tg} x = t,$$

$$\text{deci } x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \text{ și } dx = \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Notând  $t_1 = \operatorname{tg} x_1$  și  $t_2 = \operatorname{tg} x_2$ , obținem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx = \int_{t_1}^{t_2} R_3(\operatorname{tg} x) = \int_{t_1}^{t_2} R_3(t) \frac{1}{1+t^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} R_4(t) dt,$$

unde  $R_4$  este o funcție rațională.

Am redus astfel integrala inițială la o integrală rațională, în cazul cînd intervalul  $[x_1, x_2]$  este conținut în intervalul  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Deoarece pentru  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ , avem

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$$

putem face direct în integrala inițială înlocuirile

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

sau, deoarece funcția  $R(\cos x, \sin x)$  conține numai puterile funcțiilor  $\cos^2 x$ ,  $\sin^2 x$ , și  $\sin x \cos x$ , putem face direct în integrala inițială înlocuirile

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Să observăm că integrala poate avea sens fără ca intervalul  $[x_1, x_2]$  să fie conținut în intervalul  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , dacă  $Q(\cos x, \sin x)$  nu se anulează pe intervalul de integrare.

În acest caz se procedează astfel:

$$\text{b)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \int_{-\frac{\pi}{2}+\lambda}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx,$$

unde  $-\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2}$ . Pentru integralele din membrul drept se poate folosi înlocuirea  $\operatorname{tg} x = t$ .

$$\text{c)} \int_{x_1}^{\frac{\pi}{2}} R(\cos x, \sin x) dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \int_{\frac{\pi}{2}-\lambda}^{x_1} R(\cos x, \sin x) dx,$$

unde  $-\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2}$ . Pentru integralele din membrul drept se poate folosi înlocuirea  $\operatorname{tg} x = t$ .

$$\text{d)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R(\cos x, \sin x) dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \int_{-\frac{\pi}{2} + \lambda}^{\frac{\pi}{2} - \lambda} R(\cos x, \sin x) dx.$$

Pentru integralele din membrul drept se poate folosi înlocuirea  $\operatorname{tg} x = t$ .

e) Dacă  $(2k-1)\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ,  $k$  întreg, avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx = \int_{x_1 - k\pi}^{x_2 - k\pi} R(\cos x, \sin x) dx$$

și  $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 - k\pi < x_2 - k\pi \leq \frac{\pi}{2}$ . Integrala din membrul drept este de unul din tipurile precedente.

Într-adevăr, să facem în integrala inițială înlocuirea  $x - k\pi = z$ ; atunci  $x = z + k\pi$ ,  $dx = dz$ ,

$$\cos^2 x = \cos^2(z + k\pi) = \cos^2 z, \sin^2 x = \sin^2(z + k\pi) = \sin^2 z,$$

$$\sin x \cos x = \sin(z + k\pi) \cos(z - k\pi) = \sin z \cos z.$$

Notind  $z_1 = x_1 - k\pi$ ,  $z_2 = x_2 - k\pi$  avem

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx &= \int_{z_1}^{z_2} R^*(\cos^2 z, \sin^2 z, \sin z \cos z) dz = \\ &= \int_{z_1}^{z_2} R^*(\cos^2 z, \sin^2 z, \sin z \cos z) dz = \int_{z_1}^{z_2} R(\cos z, \sin z) dz = \\ &= \int_{x_1 - k\pi}^{x_2 - k\pi} R(\cos x, \sin x) dx, \end{aligned}$$

unde în ultima integrală am notat variabila de integrare din nou cu  $x$  în loc de  $z$ .

În particular,

$$\int_{(2k-1)\frac{\pi}{2}}^{(2k+1)\frac{\pi}{2}} R(\cos x, \sin x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R(\cos x, \sin x) dx.$$

f) Dacă intervalul de integrare  $[x_1, x_2]$  este oarecare, integrala:

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx$$

este o sumă de integrale de tipurile precedente. Într-adevăr, să scriem în ordine crescătoare toate punctele de forma  $z = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ ,  $k$  întreg, cuprinse între  $x_1$  și  $x_2$ :

$$x_1 < z_1 < z_2 < \dots < z_n < x_2.$$

Pentru orice  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  avem

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} R(\cos x, \sin x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R(\cos x, \sin x) dx.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx &= \int_{x_1}^{z_1} R(\cos x, \sin x) dx + \int_{z_1}^{z_2} R(\cos x, \sin x) dx + \dots \\ &\dots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} R(\cos x, \sin x) dx + \int_{z_n}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx = \\ &= \int_{x_1}^{z_1} R(\cos x, \sin x) dx + \int_{z_n}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx + \\ &+ (n - 1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R \cos x, \sin x) dx. \end{aligned}$$

Primele două integrale sunt de tipul e).

**O b s e r v a t i e.** Dacă se ia una din limitele de integrare variabilă, se obține o primitivă a funcției  $R(\cos x, \sin x)$  pe intervalul  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ :

$$\int_0^x R(\cos x, \sin x) dx = \int_0^{\operatorname{tg} x} R(t) dt.$$

**E x e m p l u.** Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin x \cos x + 2} dx.$$

Aici

$$R(\cos x, \sin x) = \frac{1}{\sin x \cos x + 2} \text{ și}$$

$$R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x).$$

Se poate folosi schimbarea de variabilă  $\operatorname{tg} x = t$ . Pentru aceasta despartim integrala initială într-o sumă de integrale:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin x \cos x + 2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x \cos x + 2} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\sin x \cos x + 2} dx + \\ &+ \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{1}{\sin x \cos x + 2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x \cos x + 2} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x \cos x + 2} dx + \\ &+ \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{\sin x \cos x + 2} dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x \cos x + 2} dx = \\ &= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \int_{-\frac{\pi}{2}+\lambda}^{\frac{\pi}{2}-\lambda} \frac{2}{\sin x \cos x + 2} dx. \end{aligned}$$

Pentru ultima integrală se aplică schimbarea de variabilă

$$\operatorname{tg} x = t, \text{ deci } dx = \frac{1}{1+t^2} dt, \sin x \cos x = \cos^2 x \operatorname{tg} x = \frac{1}{1+t^2} t = \frac{t}{1+t^2}.$$

Notind  $t_1 = \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{2} + \lambda \right)$  și  $t_2 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \lambda \right)$ , avem

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}+\lambda}^{\frac{\pi}{2}-\lambda} \frac{2}{\sin x \cos x + 2} dx &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{\frac{t}{1+t^2} + 2} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{2t^2 + t + 2} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t^2 + \frac{1}{2}t + 1} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}} dt = \frac{4}{\sqrt{15}} \operatorname{arc tg} \frac{t + \frac{1}{4}}{\sqrt{15}} \Big|_{t_1}^{t_2} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{15}} \operatorname{arc tg} \frac{4t_2 + 1}{\sqrt{15}} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{4}{\sqrt{15}} \left( \operatorname{arc tg} \frac{4t_2 + 1}{\sqrt{15}} - \operatorname{arc tg} \frac{4t_1 + 1}{\sqrt{15}} \right). \end{aligned}$$

A vom

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} t_1(\lambda) = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{2} + \lambda \right) = -\infty.$$

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} t_2(\lambda) = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \lambda \right) = \infty,$$

deci

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \operatorname{arc tg} \frac{4t_2 + 1}{\sqrt{15}} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \operatorname{arc tg} \frac{4t_1 + 1}{\sqrt{15}} = -\frac{\pi}{2}.$$

Așadar

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin x \cos x + 2} dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \int_{-\frac{\pi}{2}+\lambda}^{\frac{\pi}{2}-\lambda} \frac{2}{\sin x \cos x + 2} dx = \\ &= \frac{4}{\sqrt{15}} \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \left( \operatorname{arc tg} \frac{4t_2 + 1}{\sqrt{15}} - \operatorname{arc tg} \frac{4t_1 + 1}{\sqrt{15}} \right) = \frac{4\pi}{\sqrt{15}}. \end{aligned}$$

III) În locuirea  $\sin x = t$ . Această înlocuire se poate folosi în cazul cînd funcția  $R(\cos x, \sin x)$  este impară în  $\cos x$ :

$$R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x).$$

Dacă  $R(\cos x, \sin x) = \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}$ , unul din polinoamele  $P(\cos x, \sin x)$  și  $Q(\cos x, \sin x)$  este impar în  $\cos x$  (conține numai puterile impare ale lui  $\cos x$ ), iar celălalt este par în  $\cos x$  (conține numai puterile pare ale lui  $\cos x$ ).

Dacă  $P(-\cos x, \sin x) = -P(\cos x, \sin x)$ , atunci

$$Q(-\cos x, \sin x) = Q(\cos x, \sin x), \text{ deci}$$

$$P(\cos x, \sin x) = P_1(\cos^2 x, \sin x) \cos x$$

$$Q(\cos x, \sin x) = Q_1(\cos^2 x, \sin x)$$

și

$$R(\cos x, \sin x) = \frac{P_1(\cos^2 x, \sin x)}{Q_1(\cos^2 x, \sin x)} \cos x = R_1(\cos^2 x, \sin x) \cos x.$$

Dacă  $Q(-\cos x, \sin x) = -Q(\cos x, \sin x)$ , atunci

$$P(-\cos x, \sin x) = P(\cos x, \sin x), \text{ deci}$$

$$P(\cos x, \sin x) = P_1(\cos^2 x, \sin x),$$

$$Q(\cos x, \sin x) = Q_2(\cos^2 x, \sin x) \cos x$$

și

$$\begin{aligned} R(\cos x, \sin x) &= \frac{P_1(\cos^2 x, \sin x)}{Q_1(\cos^2 x, \sin x) \cos x} = \frac{P_1(\cos^2 x, \sin x)}{Q_1(\cos^2 x, \sin x) \cos^2 x} \cos x = \\ &= R_1(\cos^2 x, \sin x) \cos x. \end{aligned}$$

Așadar, în orice caz avem

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx &= \int_{x_1}^{x_2} R_1(\cos^2 x, \sin x) \cos x dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} R_1(1 - \sin^2 x, \sin x) (\sin x)' dx. \end{aligned}$$

Se aplică prima formulă de schimbare de variabilă, făcând înlocuirea  
 $\sin x = t$ , deci  $\cos x dx = dt$ .

Notând  $t_1 = \sin x_1$  și  $t_2 = \sin x_2$ , avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx = \int_{t_1}^{t_2} R_1(1 - t^2, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} R_2(t) dt,$$

unde  $R_2$  este o funcție rațională.

Am redus astfel integrala inițială la o integrală rațională.

IV) În locuirea  $\cos x = t$ . Această înlocuire se poate folosi în cazul cînd funcția  $R(\cos x, \sin x)$  este impară în  $\sin x$ :

$$R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x).$$

Raționînd ca în cazul precedent, deducem că

$$R(\cos x, \sin x) = R_1(\cos x, \sin^2 x) \sin x$$

și deci

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx &= \int_{x_1}^{x_2} R_1(\cos x, \sin^2 x) \sin x dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} R_1(\cos x, 1 - \cos^2 x) (-\cos x)' dx. \end{aligned}$$

Se aplică prima formulă de schimbare de variabilă, făcind înlocuirea  
 $\cos x = t$ , deci  $-\sin x dx = dt$ .

Notind  $t_1 = \cos x_1$  și  $t_2 = \cos x_2$ , avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R(\cos x, \sin x) dx = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t, 1 - t^2) (-dt) = \int_{t_1}^{t_2} R_2(t) dt,$$

unde  $R_2$  este o funcție rațională.

Am redus astfel și în acest caz integrala inițială la o integrală rațională.

*Exemplu.* 1)  $\int_0^{5\pi} \cos^2 x \cdot \sin^4 x dx = \int_0^{5\pi} \cos^2 x \cdot \sin^4 x \cdot \sin x dx.$

Se face înlocuirea  $\cos x = t$ , deci  $-\sin x dx = dt$ .  
Avem  $t_1 = \cos 0 = 1$ , și  $t_2 = \cos 5\pi = \cos \pi = -1$ . Atunci

$$\begin{aligned} \int_0^{5\pi} \cos^2 x \cdot \sin^4 x dx &= - \int_{-1}^1 t^2(1 - t^2)^2 dt = \int_{-1}^1 (t^6 - 2t^4 + t^2) dt = \\ &= \left( \frac{t^7}{7} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \left( \frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) - \left( -\frac{1}{7} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \right) = \\ &= 2 \left( \frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{105}. \end{aligned}$$

$$2) \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x} \cos x dx.$$

Se face înlocuirea  $\sin x = t$ , deci  $\cos x dx = dt$ .

Avem  $t_1 = \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2}$ ,  $t_2 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ . Atunci

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x} \cos x dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ \ln 3 - \ln \frac{1}{3} \right] = \ln 3.$$

#### 4. Integrale de funcții iraționale

În mod obișnuit se numesc integrale iraționale, integralele funcțiilor la care variabila apare sub radical.

1) *Integralele de forma:*

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

unde  $R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$  este o funcție rațională de două variabile, sănătătibile la integrale raționale.

Pentru ca integrala să aibă sens, adică pentru ca funcția de integrat să fie definită pe intervalul de integrare, se impun condițiile :

$$1) Q\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \neq 0 \text{ pentru orice } x \in [x_1, x_2];$$

2)  $cx + d \neq 0$  pentru orice  $x \in [x_1, x_2]$ ; în cazul cînd  $c \neq 0$ , această condiție înseamnă  $-\frac{d}{c} \notin [x_1, x_2]$ ;

$$3) \frac{ax+b}{cx+d} \geqslant 0 \text{ pentru orice } x \in [x_1, x_2], \text{ dacă } n \text{ este par.}$$

Vom impune încă plus condiția

$$4) ad \neq bc.$$

(Dacă  $ad = bc$ , funcția  $\frac{ax+b}{cx+d}$  este constantă, și integrala este rațională, astfel încît se calculează direct.) Pentru calculul integralei se face înlocuirea

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t, \text{ adică } \frac{ax+b}{cx+d} = t^n.$$

Cînd  $x$  parcurge intervalul  $I = [x_1, x_2]$ ,  $t$  parcurge un interval  $J$ , deoarece funcția  $\frac{ax+b}{cx+d}$  este continuă pe  $I$ . Să observăm că  $a - ct^n = 0$  pentru orice  $t \in J$ . Într-adevăr, să presupunem, prin absurd, că ar exista un punct  $x_0 \in I$ , astfel încît pentru punctul corespunzător  $t_0 \in J$  să avem  $a - ct_0^n \neq 0$ .

Dacă  $c \neq 0$ , atunci  $t_0^n = \frac{a}{c}$ , deci

$$\frac{ax_0+b}{cx_0+d} = t_0^n = \frac{a}{c},$$

de unde rezultă că  $ad = bc$ , ceea ce iarăși contrazice ipoteza 4).

Dacă  $c = 0$ , atunci avem și  $a = 0$  și deci  $ad = 0$  și  $bc = 0$ , adică  $ad = bc$ , ceea ce iarăși contrazice ipoteza 4).

Înlocuirea precedentă stabilește o corespondență biunivocă între intervalele  $I$  și  $J$ ; considerată ca o ecuație în  $x$ , are o singură soluție în  $I$  pentru fiecare  $t \in J$ . Într-adevăr, din

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n,$$

deducem

$$x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n} = r(t),$$

unde  $r(t)$  este o funcție rațională definită pe întreg intervalul  $J$  (deoarece  $a - ct^n \neq 0$  pentru  $t \in J$ ). Atunci

$$dx = r'(t) dt,$$

unde  $r'(t)$  este de asemenea o funcție rațională pe  $J$ .

Notând  $t_1 = \sqrt[n]{\frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}}$  și  $t_2 = \sqrt[n]{\frac{ax_2 + b}{cx_2 + d}}$ , avem

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int_{t_1}^{t_2} R(r(t), t) r'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t) dt,$$

unde  $R_1(t)$  este o funcție rațională.

Am redus astfel integrala inițială la o integrală rațională, care se poate calcula.

**O b s e r v a t i e.** Luând una din limitele de integrare variabilă, se obține o primitivă a funcției de integrat, pe intervalul  $[x_1, x_2]$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \int_{t_1}^{t_2} R_1(t) dt.$$

### Cazuri particulare

#### a) Integrala

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$$

este de forma precedentă, cu  $c = 0$  și  $d = 1$ .

Condiția 2)  $cx + d \neq 0$  este verificată de la sine, deoarece  $cx + d \equiv 1$ .

Condiția 4)  $ad \neq bc$  devine în acest caz

$$a \neq 0,$$

deoarece  $ad = a$  și  $bc = 0$ .

Se face înlocuirea

$$\sqrt[n]{ax+b} = t \text{ adică } ax+b = t^n$$

și integrala se reduce la o integrală rațională.

#### b) Integrala

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt[n]{x}) dx$$

este de asemenea de forma precedentă cu  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$  și  $d = 1$ . Condiția 2)  $cx + d \neq 0$  și condiția 4)  $ad \neq bc$  sunt verificate de la sine.

Condiția 3)  $\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0$  devine în acest caz  $x \geq 0$  pentru orice  $x \in [x_1, x_2]$  adică  $0 \leq x_1 < x_2$ , dacă  $n$  este par.

Se face înlocuirea

$$\sqrt[n]{x} = t, \text{ adică } x = t^n$$

și integrala se reduce la o integrală rațională.

*Exemplu.* 1) Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-\frac{7}{9}}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} dx.$$

Integrala este definită pe intervalul de integrare, deoarece numitorul nu se anulează pe acest interval, iar radicalii de ordin impar au sens și pentru numere negative.

Integrala se poate scrie astfel

$$I = \int_{-\frac{7}{9}}^0 \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{1}{x+1} dx.$$

Se face înlocuirea

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} &= t, \text{ deci } x = \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1}, \\ x + 1 &= \frac{2t^3}{t^3 - 1} \text{ și } dx = \frac{-6t^2}{(t^3 - 1)^2} dt. \end{aligned}$$

Limitele de integrare:

$$t_1 = -\frac{1}{2}, \quad t_2 = -1. \text{ Atunci}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} t \cdot \frac{t^3 - 1}{2t^3} \cdot \frac{-6t^2}{(t^3 - 1)^2} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} \frac{-3}{t^2 - 1} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} \left( \frac{1}{t-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{t+2}{t^2+t+1} \right) dt = \left( \frac{1}{2} \ln \frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \sqrt{3} \arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{-1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} - \sqrt{3} \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

2) Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} dx.$$

Se face înlocuirea  $\sqrt{x+1} = t$ , deci  $x+1 = t^2$  și  $x = t^2 - 1$ , iar  $dx = 2t dt$ .  
Limitele de integrare:  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 1$ .

Atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{t}{1+t} 2t dt = \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t} dt = \int_0^1 \left(2t - 2 + \frac{2}{1+t}\right) dt = \\ &= (t^2 - 2t + 2 \ln(1+t)) \Big|_0^1 = 1 - 2 + 2 \ln 2 = -1 + 2 \ln 2. \end{aligned}$$

3) Integrala  $\int_{-2}^0 \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} dx$  nu are sens, deoarece  $\sqrt{x+1}$  nu are sens pentru  $x < -1$ .

4) Integrala  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)(x+1)^3}} dx$  nu are sens (deocamdată), deoarece numitorul se anulează la capetele intervalului de integrare.

II) Integralele de forma:

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \dots, \sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right) dx$$

unde  $R(u_1, u_2, \dots, u_{k+1}) = \frac{P(u_1, u_2, \dots, u_{k+1})}{Q(u_1, u_2, \dots, u_{k+1})}$  este o funcție ratională [de  $k+1$  variabile, iar  $n_1, n_2, \dots, n_k, m_1, m_2, \dots, m_k$  sunt numere naturale, sunt reductibile la integrale rationale].

Pentru ca integrala să aibă sens, se impun următoarele condiții:

1)  $Q\left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \dots, \sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right) \neq 0$  pentru orice  $x \in [x_1, x_2]$ .

2)  $cx+d \neq 0$  pentru orice  $x \in [x_1, x_2]$ .

3)  $\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0$  pentru orice  $x \in [x_1, x_2]$ , dacă unul din numerele  $n_1, n_2, \dots, n_k$  este par.

Se impune în plus condiția

4)  $ad \neq bc$ ,

care asigură că funcția  $\frac{ax+b}{cx+d}$  nu este constantă.

Fie  $n$  cel mai mic multiplu comun al numerelor  $n_1, n_2, \dots, n_k$ . Numărul  $n$  este par dacă și numai dacă unul din numerele  $n_1, n_2, \dots, n_k$  este par.

Notând  $\frac{n}{n_1} = p_1, \dots, \frac{n}{n_k} = p_k$ , numerele  $p_1, \dots, p_k$  sunt naturale, și pentru  $i = 1, 2, \dots, k$  avem:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_i}} = \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_i p_i}} = \left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)^{m_i p_i}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) &= \\ &= R\left(x, \left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)^{m_1 p_1}, \dots, \left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)^{m_k p_k}\right) = R_1\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), \end{aligned}$$

unde  $R_1$  este o funcție rațională, și astfel integrala inițială s-a redus la integrala

$$\int_{x_1}^{x_2} R_1\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

care este de tipul precedent. Se face înlocuirea

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \quad \text{adică } \frac{ax+b}{cx+d} = t^n,$$

unde  $n$  este cel mai mic multiplu comun al indicilor radicalilor,  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , și integrala se reduce la o integrală rațională.

Pentru integrala de forma

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(x, \sqrt[n_1]{(ax+b)^{m_1}}, \dots, \sqrt[n_k]{(ax+b)^{m_k}}\right) dx$$

se face înlocuirea

$$\sqrt[n]{ax+b} = t, \quad \text{adică } ax+b = t^n,$$

iar pentru integrala de forma

$$\int_{x_1}^{x_2} R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \dots, \sqrt[n_k]{x^{m_k}}\right) dx$$

se face înlocuirea

$$\sqrt[n]{x} = t \quad \text{adică } x = t^n.$$

*Exemplu.* 1) Să se calculeze integrala

$$I = \int_{\frac{1}{64}}^1 \frac{x-1}{x(\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x^2})} dx.$$

Se face înlocuirea  $\sqrt[6]{x} = t$ , ( $t \geq 0$ ), deci  $x = t^6$  și  $dx = 6t^5 dt$ .

Avem

$$\sqrt[6]{x} = t^2 \text{ și } \sqrt[3]{x^2} = t^4. \text{ Limitele de integrare: } t_1 = \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}, \quad t_2 = \sqrt[6]{1} = 1.$$

Atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^6 - 1}{t^6(t^3 + t^4)} 6t^5 dt = [6 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^6 - 1}{t^4(t+1)} dt] = 6 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^6 - t^4 + t^8 - t^3 + t - 1}{t^4} dt = \\ &= 6 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( t - 1 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^4} \right) dt = 6 \left( \frac{t^2}{2} - t + \ln t + \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{3t^3} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \\ &= 6 \left( \frac{1}{2} - 1 + \ln 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - 6 \left( \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{2} + 2 - \frac{2^8}{2} + \frac{2^8}{3} \right) = \\ &= -\frac{47}{4} + 6 \ln 2. \end{aligned}$$

2) Integrala  $\int_0^1 \frac{x-1}{x(\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x^2})} dx$  nu are sens, deoarece numitorul se anulează în punctul 0 din intervalul de integrare, și în jurul acestui punct funcția de integrat este nemărginită.

3) Să se calculeze

$$I = \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} + 1} dx.$$

Funcția de integrat este definită pe intervalul de integrare. Se face schimbarea  $\sqrt{x+1} = t$ , ( $t \geq 0$ ), deci  $x = t^2 - 1$  și  $dx = 2t dt$ .

Avem

$\sqrt{x+1} = t^2$  și  $\sqrt[3]{x+1} = t^2$ . Limitele de integrare

$$t_1 = \sqrt[3]{-1+1} = 0; \quad t_2 = \sqrt[3]{0+1} = 1.$$

**Atunci**

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{t^3}{t^2 + 1} 6t^4 dt = 6 \int_0^1 \frac{t^8}{t^2 + 1} dt = 6 \int_0^1 \left( t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \\ &= 6 \left( \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \arctg t \right) \Big|_0^1 = 6 \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 1 + \arctg 1 \right) = -\frac{152}{35} + \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

4) Integrala  $\int_{-2}^0 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1} dx$  nu are sens, deoarece pe intervalul  $[-2, -1]$ , conținut în intervalul de integrare, funcția de integrat nu este definită (din cauză că funcția  $\sqrt{x+1}$  nu este definită).

5) Integrala  $I = \int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}+2} dx$  este definită pe intervalul de integrare deoarece

numitorul nu se anulează, iar  $\sqrt[3]{x+1}$  are sens și dacă  $x+1 < 0$ . Se face schimbarea  $\sqrt[3]{x+1} = t$  ( $t$  poate fi și pozitiv și negativ),

deci

$$x = t^3 - 1 \text{ și } dx = 3t^2 dt. \text{ Limitele de integrare}$$

$$t_1 = \sqrt[3]{-2+1} = -1, t_2 = \sqrt[3]{0+1} = 1.$$

**Atunci**

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \frac{1}{t+2} 3t^2 dt = 3 \int_{-1}^1 \left( t - 2 + \frac{4}{t+2} \right) dt = 3 \left( \frac{t^2}{2} - 2t + 4 \ln(t+2) \right) \Big|_{-1}^1 = \\ &= 12 (\ln 3 - 1). \end{aligned}$$

**III) Integralele de forma:**

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

unde  $R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$  este o funcție rațională de două variabile, sînt reductibile la integrale raționale. Pentru ca integrala să aibă sens, se impun următoarele condiții:

1)  $Q(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \neq 0$  pentru orice  $x \in [x_1, x_2]$ .

2)  $ax^2 + bx + c \geq 0$  pentru orice  $x \in [x_1, x_2]$ .

Se impun în plus condițiile

3)  $a \neq 0$  și  $b^2 - 4ac \neq 0$ , adică trinomul  $ax^2 + bx + c$  este de gradul doi și nu are rădăcinile egale.

Dacă  $a = 0$ , integrala devine

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt{bx + c}) dx$$

și este de tipul I. Prin înlocuirea  $\sqrt{bx + c} = t$  se reduce la o integrală rațională.

Dacă  $b^2 - 4ac = 0$ , trinomul  $ax^2 + bx + c$  are rădăcini egale:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$$

și  $a \geq 0$  (deoarece  $ax^2 + bx + c \geq 0$  și  $(x - \alpha)^2 \geq 0$ ). În acest caz integrala devine

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt{a}(x - \alpha)) dx = \int_{x_1}^{x_2} R_1(x) dx,$$

adică este o integrală rațională.

Pentru calculul integralei vom deosebi trei cazuri:

a) *Cazul*  $a > 0$ . În acest caz se face înlocuirea

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax} = t \text{ adică } \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t.$$

Cind  $x$  parcurge intervalul  $I = [x_1, x_2]$ ,  $t$  parcurge un interval  $J$ , deoarece funcția  $\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax}$  este continuă pe  $I$ .

Să observăm că  $b - 2\sqrt{at} \neq 0$  pentru orice  $t \in J$ , adică  $t$  nu poate lua valoarea  $\frac{b}{2\sqrt{a}}$ .

Într-adevăr, dacă ar exista un punct  $x_0 \in I$  astfel ca pentru punctul corespunzător  $t_0$  să avem  $b - 2\sqrt{a}t_0 = 0$  adică  $t_0 = \frac{b}{2\sqrt{a}}$ , atunci

$$\sqrt{ax_0^2 + bx_0 + c} = \sqrt{ax_0} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

și, ridicînd la pătrat,

$$ax_0^2 + bx_0 + c = ax_0^2 + bx_0 + \frac{b^2}{4a},$$

adică  $c = \frac{b^2}{4a}$  sau  $b^2 - 4ac = 0$ , ceea ce contrazice condiția 3).

Egalitatea  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t$  stabilește o corespondență bi-univocă între intervalele  $I$  și  $J$ . Considerată ca o ecuație în  $x$ , are o singură soluție în  $I$  pentru fiecare valoare a lui  $t \in J$ . Într-adevăr, să observăm că, deoarece  $\sqrt{ax^2 + bx + c} \geq 0$ , avem de asemenea  $\sqrt{ax} + t \geq 0$ . Prin ridicare la pătrat obținem:

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{ax}t + t^2$$

sau

$$bx + c = 2\sqrt{a} xt + t^2,$$

de unde

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t} = r(t),$$

unde  $r(t)$  este o funcție *rațională* definită pe  $J$  (deoarece  $t = \frac{b}{2\sqrt{a}}$ , pentru  $t \in J$ ).

Deoarece ecuația inițială are ambii membri *pozitivi*, iar ecuația obținută prin ridicare la pătrat are soluția  $x = r(t)$ , rezultă că și ecuația inițială are soluția  $x = r(t)$ .

Atunci

$$dx = r'(t)dt,$$

unde  $r'(t)$  este de asemenea o funcție *rațională* pe  $J$ , și

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ar(t)} + t.$$

Notând  $t_1 = \sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} - \sqrt{ax_1}$  și  $t_2 = \sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c} - \sqrt{ax_2}$ , avem :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} R[r(t), \sqrt{ar(t)} + t]r'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t)dt,$$

unde  $R_1(t)$  este o funcție *rațională*. Am redus astfel integrala inițială la o integrală *rațională* care se poate calcula.

O b s e r v a t i o n . 1° Dacă trinomul  $ax^2 + bx + c$  are rădăcini complexe și  $a > 0$ , condiția  $ax^2 + bx + c \geqslant 0$  este verificată de la sine.

În cazul cînd trinomul are rădăcini reale și distincte,  $\alpha < \beta$ , condiția  $ax^2 + bx + c \geqslant 0$  este îndeplinită dacă rădăcinile sunt de aceeași parte a intervalului de integrare, adică dacă :

$$x_1 < x_2 < \alpha \text{ sau } \beta < x_1 < x_2.$$

2° În cazul cînd  $a > 0$  se poate de asemenea folosi una din înlocuirile

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{ax} + t, \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} - t$$

sau

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{ax} - t.$$

b) Cazul  $b^2 - 4ac > 0$ . În acest caz trinomul  $ax^2 + bx + c$  are rădăcini reale și distincte,  $\alpha < \beta$ , deci

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

Vom impune condiția ca cel puțin una dintre rădăcini, de exemplu  $\alpha$ , să nu aparțină intervalului de integrare. Atunci  $x - \alpha \neq 0$  pentru orice  $x \in [x_1, x_2]$ , și

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = \sqrt{a \frac{x - \beta}{x - \alpha}} |x - \alpha|$$

iar integrala devine

$$\int_{x_1}^{x_2} R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int_{x_1}^{x_2} R_1\left(x, \sqrt{a \frac{x - \beta}{x - \alpha}}\right) dx$$

și este de tipul I. Se face înlocuirea

$$\sqrt{a \frac{x - \beta}{x - \alpha}} = t, \quad (t \geq 0)$$

și integrala se reduce la o integrală rațională. Se poate face direct înlocuirea următoare (care rezultă din cea precedentă) :

$\sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha)t$ , ( $t \geq 0$  dacă  $x > \alpha$  sau  $t \leq 0$  dacă  $x < \alpha$ ), adică

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t,$$

care este mai ușor de reținut.

O b s e r v a t i i . Dacă  $\alpha \notin [x_1, x_2]$ , se poate face înlocuirea

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = a(x - \alpha)t.$$

Dacă  $\beta \notin [x_1, x_2]$ , se poate face una din înlocuirile

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \beta)t \text{ sau } \sqrt{ax^2 + bx + c} = a(x - \beta)t.$$

c) Cazul  $c > 0$ . În acest caz se face înlocuirea

$$u(x) = t,$$

unde funcția  $u(x)$  este definită pe  $I = [x_1, x_2]$ , astfel :

$$u(x) = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}}{x} \text{ dacă } x \neq 0, x \in [x_1, x_2],$$

și  $u(0) = \frac{b}{2\sqrt{c}}$  dacă  $0 \in [x_1, x_2]$ .

Funcția  $u(x)$  este continuă pe întreg intervalul  $I$ . În punctele  $x = 0$  acest fapt este evident. Să arătăm că, dacă  $0 \in I$ , funcția  $u(x)$  este continuă în 0, adică

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = u(0) = \frac{b}{2\sqrt{c}}.$$

Pentru  $x \neq 0$  avem

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{c}}{x} &= \frac{ax^2 + bx + c - c}{x[\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{c}]} = \\ &= \frac{ax^2 + bx}{x[\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{c}]} = \frac{ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{c}}, \end{aligned}$$

deci

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{c}} = \frac{b}{2\sqrt{c}} = u(0).$$

Egalitatea  $u(x) = t$  se scrie

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tx,$$

valabilă pentru orice  $x \in I$  (chiar pentru  $x = 0$ ).

Cind  $x$  parcurge pe  $I = [x_1, x_2]$ ,  $t$  parcurge un interval  $J = u(I)$ . Corespondența stabilită de ultima egalitate este biunivocă, această egalitate considerată ca o ecuație în  $x$  are o singură soluție în  $I$  pentru fiecare  $t \in J$ .

Într-adevăr, dacă  $t = \frac{b}{2\sqrt{c}}$ , avem

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}x$$

sau

$$ax^2 + bx + c = c + bx + \frac{b^2}{4c}x^2$$

sau

$$\left(a - \frac{b^2}{4c}\right)x = 0,$$

și deoarece am presupus  $b^2 - 4ac \neq 0$ , rezultă

$$x = 0.$$

Dacă  $t \neq \frac{b}{2\sqrt{c}}$ , adică  $x \neq 0$ , prin ridicare la pătrat obținem

$$ax^2 + bx + c = (\sqrt{c} + tx)^2 = c + 2\sqrt{ct}x + t^2x^2,$$

adică

$$ax^2 + bx = 2\sqrt{ct}x + t^2x^2$$

și împărțind cu  $x \neq 0$ ,

$$ax + b = 2\sqrt{ct} + t^2x,$$

de unde

$$(a - t^2)x = 2\sqrt{ct} - b.$$

Să observăm că  $t^2 \neq a$ , oricare ar fi  $t \in J$ . Într-adevăr, dacă ar exista un punct  $x_0 \neq 0$  din  $J$ , astfel ca pentru punctul corespunzător  $t_0 \in J$  să avem  $t_0^2 \neq a$ , atunci  $a \geq 0$  și  $t_0 = \sqrt{a}$  și înlocuind în ultima egalitate am obține

$$0 = 2\sqrt{c}\sqrt{a} - b$$

sau  $b = 2\sqrt{a}\sqrt{c}$  adică  $b^2 = 4ac$ , ceea ce contrazice condiția 3).

Din egalitatea de mai sus deducem

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2} = r(t)$$

și această egalitate este valabilă chiar pentru  $t = \frac{b}{2\sqrt{c}}$  și  $x = 0$ . Funcția rațională  $r(t)$  este deci definită pe tot intervalul  $J$ . Atunci

$$dx = r'(t)dt,$$

unde  $r'(t)$  este o funcție rațională definită pe  $J$ , și

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tr(t),$$

fie că  $x \neq 0$ , fie că  $x = 0$ .

Notând

$$t_1 = \frac{\sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} - \sqrt{c}}{x_1} \text{ sau } t_1 = \frac{b}{2\sqrt{c}}$$

(după cum  $x_1 \neq 0$  sau  $x_1 = 0$ ) și

$$t_2 = \frac{\sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c} - \sqrt{c}}{x_2} \text{ sau } t_2 = \frac{b}{2\sqrt{c}}$$

(după cum  $x_2 \neq 0$  sau  $x_2 = 0$ ), integrala inițială devine

$$I = \int_{t_1}^{t_2} R [\gamma(t), \sqrt{c} + tr(t)] r'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} R_1(t) dt,$$

unde  $R_1(t)$  este o funcție rațională. Am redus integrala inițială la o integrală rațională care se poate efectua.

**O b s e r v a ᄃ i i .** 1° În aplicațiile practice, nu ne mai preocupăm de faptul dacă 0 aparține sau nu intervalului de integrare; se face înlocuirea

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tx$$

și se fac calculele ca și cînd  $x \neq 0$ .

Se poate face de asemenea înlocuirea

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} - tx.$$

2° Dacă  $0 \notin [x_1, x_2]$  se poate folosi una din înlocuirile

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{c} + tx \text{ sau } \sqrt{ax^2 + bx + c} = -\sqrt{c} - tx.$$

3° Este posibil ca în aceleasi timp trinomul  $ax^2 + bx + c$  să aibă rădăcini reale și distințe ( $b^2 - 4ac > 0$ ) și să fie îndeplinite condițiile  $a > 0$  și  $c > 0$ . Atunci se poate efectua una oarecare din înlocuirile indicate în aceste cazuri.

*Exemplu.* 1) Să se calculeze integrala  $I = \int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} dx$ .

a) Coeficientul lui  $x^2$  este 1; suntem în cazul  $a > 0$ . Se face, de exemplu, înlocuirea

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = -\sqrt{1}x + t.$$

Ridicând la patrat obținem

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2xt + t^2$$

sau

$$-x + 1 = -2xt + t^2, \text{ de unde}$$

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1}, \quad dx = 2 \frac{t^2 - t + 1}{(2t - 1)^2} dt$$

¶

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{t^2 - t + 1}{2t - 1}.$$

Limitele de integrare:  $t_1 = 1$  și  $t_2 = 2$ . Atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{2t^2 - 2t + 2}{t(2t - 1)^2} dt = \int_1^2 \left[ \frac{2}{t} - \frac{3}{2t - 1} + \frac{3}{(2t - 1)^2} \right] dt = \\ &= \left( 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \cdot \ln |2t - 1| - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2t - 1} \right) \Big|_1^2 = \ln \frac{4}{\sqrt{27}} + 1. \end{aligned}$$

b) Termenul liber este 1; suntem și în cazul  $c > 0$ . Se face, de exemplu, înlocuire

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{1} - tx.$$

Ridicând la patrat, obținem

$$x^2 - x + 1 = 1 - 2tx + t^2 x^2$$

sau

$$x^2 - x = -2tx + t^2 x^2$$

sau

$$x - 1 = -2t + t^2 x,$$

de unde

$$x = \frac{2t - 1}{t^2 - 1}$$

și

$$dx = -2 \frac{t^2 - t + 1}{(t^2 - 1)^2} dt,$$

iar

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = -\frac{t^2 - t + 1}{t^2 - 1}.$$

Limitele de integrare

$$t_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1} = \frac{1}{2}, \text{ iar } t_2 = 0.$$

Atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{2t^2 - 2t + 2}{(t-2)(t+1)(t-1)^2} dt = \int_{\frac{1}{2}}^0 \left\{ \frac{2}{t-2} - \frac{1}{2(t+1)} - \frac{3}{2(t-1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(t-1)^2} \right\} dt = \left( 2 \ln|t-2| - \frac{1}{2} \ln|t+1| - \frac{3}{2} \ln|t-1| + \frac{1}{t-1} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^0 = \\ &= \ln \frac{4}{\sqrt{27}} + 1. \end{aligned}$$

**Observație.** Înlocuirea  $\sqrt{x^2 - x + 1} = -\sqrt{1-t^2} + tx$  nu se poate folosi din cauză că  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1}{x}$  nu există. Această înlocuire se poate folosi dacă intervalul de integrare nu conține pe 0.

2) Să se calculeze integrala

$$I = \int_5^6 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} dx.$$

a) Coeficientul lui  $x^2$  este 1. Sintem în cazul III, 3,  $a > 0$ . Se face înlocuirea  $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{1x - t}$ . Ridicând la patrat, obținem

$$x^2 - 4 = x^2 + t^2 - 2xt,$$

de unde

$$-4 = t^2 - 2xt$$

sau

$$x = \frac{t^2 + 4}{2t}.$$

Atunci

$$dx = \frac{t^2 - 4}{2t^2} dt$$

$$\sqrt{x^2 - 4} = -\frac{t^2 - 4}{2t}.$$

Limitele de integrare  $t_1 = 5 - \sqrt{21}$ ,  $t_2 = 6 - \sqrt{32}$ .  
 Integrala devine

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{-2t}{t^2 - 4} \cdot \frac{t^2 - 4}{2t^2} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{t} dt = -\ln|t| \Big|_{t_1}^{t_2} = -\ln \frac{t_2}{t_1} = -\ln \frac{6 - \sqrt{32}}{5 - \sqrt{21}}.$$

b) Trinomul are rădăcinile reale și distințe  $-2$  și  $2$ . Sintem în cazul III, 2. Se face înlocuirea

$$\sqrt{x^2 - 4} = (x - 2)t,$$

de unde

$$x^2 - 4 = (x - 2)^2 t^2$$

sau

$$x + 2 = (x - 2)t^2,$$

deci

$$x = \frac{2t^2 + 2}{t^2 - 1}$$

și

$$dx = \frac{-8t}{(t^2 - 1)^2} dt,$$

iar

$$\sqrt{x^2 - 4} = \frac{4t}{t^2 - 1}.$$

$$\text{Limitele de integrare } t_1 = \frac{\sqrt{21}}{3}, \quad t_2 = \sqrt{2}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{t^2 - 1}{4t} \frac{-8t}{(t^2 - 1)^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{-2}{t^2 - 1} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ &= \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right|_{t_1}^{t_2} = \ln \left| \frac{t_2+1}{t_2-1} \right| - \ln \left| \frac{t_1+1}{t_1-1} \right| = \ln \frac{(t_2+1)(t_1-1)}{(t_2-1)(t_1+1)} = \\ &= \ln \frac{(\sqrt{2}+1)\left(\frac{\sqrt{21}}{3}-1\right)}{(\sqrt{2}-1)\left(\frac{\sqrt{21}}{3}+1\right)} = \ln \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{21}-3)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{21}+3)}. \end{aligned}$$

IV) Integrările binomice sunt de forma:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt[m]{x^{m'}} \sqrt[p]{(a \sqrt[n]{x^{n'}} + b)^p} dx$$

unde  $m'$ ,  $n'$ ,  $p'$  sunt numere întregi. Presupunem fracțiile  $\frac{m'}{m}$ ,  $\frac{n'}{n}$ ,  $\frac{p'}{p}$  ireductibile.

Pentru ca integrala să aibă sens, adică pentru ca funcția de integrat să fie definită pe  $[x_1, x_2]$ , se impun următoarele condiții:

1)  $x \geq 0$  pentru orice  $x \in [x_1, x_2]$ , dacă unul din numerele  $m$  sau  $n$  este par; această condiție este echivalentă cu condiția

$$0 \leq x_1 < x_2$$

(dacă, de exemplu,  $m$  este par, trebuie ca  $x^{m'} \geq 0$  și deoarece fracția  $\frac{m'}{m}$  este ireductibilă,  $m'$  este impar, deci trebuie ca  $x \geq 0$ ).

2)  $x \neq 0$  pentru orice  $x \in [x_1, x_2]$ , dacă unul din numerele  $m'$  și  $n'$  este  $\leq 0$ ; această condiție este echivalentă cu condiția

$$0 \notin [x_1, x_2].$$

3)  $a \sqrt[m]{x^{n'}} + b \geq 0$  pentru orice  $x \in [x_1, x_2]$ , dacă  $p$  este par.

4)  $a \sqrt[m]{x^{n'}} + b \neq 0$  pentru orice  $x \in [x_1, x_2]$ , dacă  $p' \leq 0$ .

Vom impune de asemenea condiția

5)  $a \neq 0$  și  $b \neq 0$ .

Dacă  $a = 0$ , integrala devine

$$\int_{x_1}^{x_2} k \sqrt[m]{x^{m'}} dx,$$

unde  $k = \sqrt[p]{b^p}$  și se calculează direct, deoarece se cunoaște o primitivă a funcției  $x^{m'}$  (sau e face înlocuirea  $\sqrt[m]{x} = t$  și se reduce la o integrală rațională).

Dacă  $b = 0$ , integrala devine

$$\int_{x_1}^{x_2} k' \sqrt[m]{x^{m'}} \sqrt[n]{x^{n'p'}} dx,$$

unde  $k' = \sqrt[p]{a^p}$  și este o integrală de tipul II. Se face înlocuirea  $\sqrt[n]{x} = t$  adică  $x = t^n$  unde  $r = mnp$ , și se reduce la o integrală rațională.

Condițiile  $a \neq 0$  și  $b \neq 0$  s-au impus pentru a înălțura cazurile deja tratate.

Notind  $\alpha = \frac{m'}{m}$ ,  $\beta = \frac{n'}{n}$ ,  $\gamma = \frac{p'}{p}$ , integrala se scrie

$$I = \int_{x_1}^{x_2} x^\alpha (ax^\beta + b)^\gamma dx.$$

Vom deosebi trei cazuri în care integrala binomă se reduce la o integrală rațională.

a) Cazul cînd  $\gamma$  este întreg.

Deoarece fractia  $\gamma = \frac{p'}{p}$  este ireductibilă, condiția ca  $\gamma$  să fie întreg revine la aceea că  $p = 1$  sau  $p = -1$ . Notînd  $\epsilon = 1$  dacă  $p = 1$  și  $\epsilon = -1$  dacă  $p = -1$ , avem  $\gamma = \epsilon p'$  și integrala se scrie

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_1}^{x_2} x^\alpha (ax^\beta + b)^{\epsilon p'} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt[m]{x^{m'}} (a \sqrt[n]{x^{n'}} + b)^{\epsilon p'} dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} R(\sqrt[m]{x^{m'}}, \sqrt[n]{x^{n'}}) dx, \end{aligned}$$

unde  $R(u, v)$  este o funcție rațională de două variabile, deci, în acest caz integrala este de tipul II. Se face înlocuirea

$$\sqrt[r]{x} = t \text{ adică } x = t^r,$$

unde  $r$  este un multiplu comun al numitorilor lui  $\alpha$  și  $\beta$ , de exemplu  $r = mn$ , și se reduce la o integrală rațională, care se poate calcula.

b) Cazul cînd  $\frac{\alpha+1}{\beta}$  este întreg.

În acest caz se face înlocuirea

$$\sqrt[p]{ax^\beta + b} = t \text{ adică } ax^\beta + b = t^p,$$

unde  $p$  este numitorul lui  $\gamma$ , și se reduce la o integrală rațională, care se poate efectua.

Într-adevăr, să facem mai întîi înlocuirea

$$x^\beta = z, \text{ deci } x = z^{\frac{1}{\beta}} \text{ și } dx = \frac{1}{\beta} z^{\frac{1}{\beta}-1} dz.$$

Notînd  $z_1 = x_1^\beta$  și  $z_2 = x_2^\beta$ , integrala devine

$$\begin{aligned} I &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\beta} z^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} (az + b)^\gamma dz = \int_{z_1}^{z_2} R(z, (az + b)^\gamma) dz = \\ &= \int_{z_1}^{z_2} R[z, \sqrt[p]{(az + b)^p}] dz, \end{aligned}$$

unde  $R(u, v)$  este o funcție rațională de două variabile ( $\frac{\alpha+1}{\beta} - 1$  este întreg); integrala obținută este de tipul I. Se face acum înlocuirea

$$\sqrt[p]{az+b} = t \text{ adică } az+b = t^p$$

și se reduce la o integrală rațională care se poate calcula. Aplicarea celor două înlocuiri successive

$$x^\beta = z \text{ și } az+b = t^p$$

este echivalentă cu aplicarea directă a înlocuirii

$$ax^\beta + b = t^p.$$

c) Cazul  $\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma$  este întreg.

În acest caz se face înlocuirea

$$\sqrt[p]{\frac{ax^\beta + b}{x^\beta}} = t \text{ adică } \frac{ax^\beta + b}{x^\beta} = t^p \text{ sau } ax^\beta + b = x^\beta t^p,$$

unde  $p$  este numitorul lui  $\gamma$ . Pentru a putea folosi această înlocuire trebuie să presupunem că  $x \neq 0$  pentru orice  $x \in [x_1, x_2]$ , adică  $0 \notin [x_1, x_2]$ . Înlocuirea aceasta ne duce la o integrală rațională, care se poate calcula.

Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_1}^{x_2} x^\alpha (ax^\beta + b)^\gamma dx = \int_{x_1}^{x_2} x^\alpha [x^\beta (a + bx^{-\beta})]^\gamma dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} x^{\alpha+\beta\gamma} (bx^{-\beta} + a)^\gamma dx = \int_{x_1}^{x_2} x^{\alpha'} (bx^{\beta'} + a)^\gamma dx, \end{aligned}$$

unde  $\alpha' = \alpha + \beta\gamma$  și  $\beta' = -\beta$ . Ultima integrală este de tipul precedent, adică  $\frac{\alpha'+1}{\beta'} + 1$  este întreg. Într-adevăr:

$$\frac{\alpha'+1}{\beta'} = \frac{\alpha + \beta\gamma + 1}{-\beta} = -\left(\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma\right),$$

iar  $\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma$  este întreg, prin ipoteză. Dacă în ultima integrală se face înlocuirea

$$bx^{\beta'} + a = t^p,$$

unde  $\beta$  este numitorul lui  $\gamma$ , se obține o integrală rațională. Dar înlocuirea aceasta înseamnă

$$bx^{-\beta} + a = t^\beta \text{ sau } ax^\beta + b = x^\beta t^\beta.$$

**O b s e r v a t i e.** Matematicianul rus Cebîșev a demonstrat că cele trei cazuri expuse mai sus sunt singurele cazuri în care o integrală binomă se poate reduce la o integrală rațională.

**Exemplu.** 1) Să se calculeze integrala

$$I = \int_1^{64} \frac{(\sqrt[6]{x} - 1)^5}{\sqrt[6]{x^7}} dx.$$

Integrala se scrie

$$I = \int_1^{64} x^{-\frac{7}{6}} \left( x^{\frac{1}{6}} - 1 \right)^5 dx,$$

unde  $\alpha = -\frac{7}{6}$ ,  $\beta = \frac{1}{6}$ ,  $\gamma = 2$ . Aici  $\gamma$  este întreg. (Integrala este de tipul IV, 1). Se face înlocuirea  $x = t^6$  deci  $dx = 6t^5 dt$ . Avem

$$t = \sqrt[6]{x} \text{ deci } t_1 = \sqrt[6]{1} = 1 \text{ și } t_2 = \sqrt[6]{64} = 2. \text{ Atunci}$$

$$I = \int_1^2 t^{-\frac{7}{6}} (t - 1)^5 6t^5 dt = 6 \int_1^2 \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2} dt =$$

$$= 6 \int_1^2 \left( 1 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt = 6 \left( t - 2 \ln t - \frac{1}{t} \right) \Big|_1^2 = 9 - 12 \ln 2.$$

2) Să se calculeze integrala

$$I = \int_1^{16} \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_1^{16} x^{-\frac{1}{2}} (x^{\frac{1}{3}} + 1)^{\frac{1}{3}} dx.$$

Este o integrală binomă cu  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{3}$ ,  $\gamma = \frac{1}{3}$ . Avem

$$\frac{\alpha + 1}{\beta} = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{3}} = 2, \text{ întreg. Se face schimbarea}$$

$$x^{\frac{1}{3}} + 1 = t^3, \text{ deci } x = (t^3 - 1)^3 \text{ și } dx = 12t^2(t^3 - 1)^2 dt.$$

Avem  $t = \sqrt[3]{x^4 + 1}$ , deci  $t_1 = \sqrt[3]{1+1} = \sqrt[3]{2}$ ,  $t_2 = \sqrt[3]{2+1} = \sqrt[3]{3}$ . Atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_1}^{t_2} (t^3 - 1)^{-\frac{2}{3}} t \cdot 12t^2(t^3 - 1)^3 dt = \int_{t_1}^{t_2} 12t^3(t^3 - 1) dt = \\ &= 12 \int_{t_1}^{t_2} (t^6 - t^3) dt = 12 \left( \frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) \Big|_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} = 12 \left( \frac{9\sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{2}}{7} - \frac{3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2}}{4} \right) = \\ &= \frac{45}{7}\sqrt[3]{3} - \frac{6}{7}\sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

3) Să se calculeze integrala

$$I = \int_{-1}^{-2} \frac{\sqrt[3]{(2x^3 + 1)^2}}{x^6} dx = \int_{-1}^{-2} x^{-6}(2x^3 + 1)^{\frac{2}{3}} dx.$$

Este o integrală binomială cu  $\alpha = -6$ ,  $\beta = 3$  și  $\gamma = \frac{2}{3}$ . Avem

$$\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma = \frac{-6+1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{-5}{3} + \frac{2}{3} = -1, \text{ intreg. Se face înlocuirea}$$

$$\begin{aligned} 2x^3 + 1 &= x^3t^3, \text{ adică } 2 + \frac{1}{x^3} = t^3, \text{ de unde} \\ -\frac{3}{x^4} dx &= 3t^2 dt. \end{aligned}$$

Avem  $t = \sqrt[3]{2 + \frac{1}{x^3}}$ , deci  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = \frac{\sqrt[3]{15}}{2}$ . Atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{-2} x^{-6}x^3 \left( 2 + \frac{1}{x^3} \right)^{\frac{2}{3}} dx = \int_{-1}^{-2} x^{-6} \left( 2 + \frac{1}{x^3} \right)^{\frac{2}{3}} dx = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} t^2 \cdot t^2 dt = - \int_{t_1}^{t_2} t^4 dt = - \frac{t^5}{5} \Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{t_1^5 - t_2^5}{5} = \frac{32 - 15\sqrt[3]{15^2}}{5 \cdot 32}. \end{aligned}$$

4) Integrala  $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt[3]{(2x^3 + 1)^2}}{x^6} dx$  nu are sens, deoarece funcția nu este definită în punctul

0 din intervalul de integrare și este nemărginită în jurul acestui punct.

5) Integrala  $\int_{-1}^1 x^3 \sqrt[3]{(2x^3 + 1)^2} dx$  are sens. Funcția este definită pe tot intervalul de integrare. Avem  $\alpha = 6$ ,  $\beta = 3$ ,  $\gamma = \frac{2}{3}$  și  $\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma = 3$ , intreg. Totuși, nu se poate aplica

schimbarea  $2x^3 + 1 = x^{4/3}$ , deoarece această schimbare se poate folosi numai dacă  $x \neq 0$  pe tot intervalul de integrare, adică dacă intervalul de integrare nu conține pe 0.

6) Integrala  $\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[4]{x}} dx$  nu are sens, pentru că  $\sqrt[4]{x}$  nu are sens pentru  $x \in [-2, -1]$ .

## § 7. Metode de calcul aproximativ al integralei

Formula lui Leibniz-Newton poate fi folosită pentru calculul integralei unei funcții numai atunci cînd se cunoaște o primitivă a acestei funcții.

Or, primitivele se cunosc numai pentru cîteva clase restrînse de funcții elementare. Pentru alte funcții (chiar elementare), cărora nu li se cunosc primitive sau pentru funcții integrabile care nu au primitive, formula lui Leibniz-Newton nu mai poate fi folosită. În acest caz ne mulțumim să calculăm integrala cu aproximare, prin diferite metode.

De exemplu, dacă se dă funcția prin graficul ei, nici nu se poate pune problema calculului exact al integralei, deoarece valorile funcției nu pot fi determinate decît aproximativ, prin măsurare.

Orice problemă de aproximare este indisolubil legată de evaluarea erorii comise. Nu are nici un sens să spunem că am calculat cu aproximare valoarea integralei, dacă nu precizăm că eroarea nu întrece un anumit număr.

Așadar, ori de câte ori se dă un procedeu de calcul aproximativ al integralei, trebuie să se dea în același timp și un procedeu de evaluare a erorii.

În principiu metodele de calcul aproximativ al integralei unei funcții f constau în a aproxima funcția f cu o funcție mai simplă φ, căreia i se poate calcula ușor integrala și a lăsa integrala funcției φ în locul integralei funcției f.

### 1. Metoda dreptunghiurilor

Această metodă constă în a aproxima o funcție dată cu o funcție în scară (constantă pe intervale), adică în a aproxima graficul funcției cu o linie poligonală cu laturile paralele cu axele.

Fie f o funcție integrabilă pe un interval  $[a, b]$ , d o diviziune a acestui interval :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b$$

și  $\sigma_d(f)$  o sumă integrală corespunzătoare acestei diviziuni :

$$\sigma_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \quad x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}.$$

Dacă luăm diviziunea d suficient de fină (adică dacă norma diviziunii este suficient de mică) putem realiza ca suma integrală să difere oricît de

puțin de integrala funcției  $f$ . Putem aproxima astfel integrala cu sume integrale:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Putem să simplificăm calculele, luând cele  $n$  intervale parțiale egale între ele:

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$$

și luând punctele intermediare la extremitatea din stînga a intervalelor parțiale:  $\xi_i = x_i$ . Obținem atunci următoarea formulă de aproximare:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})].$$

Dacă luăm punctele intermediare la extremitatea din dreapta a intervalelor parțiale:  $\xi_i = x_{i+1}$ , obținem următoarea formulă de aproximare:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + f(b)].$$

Fiecare din cele două formule de aproximare se numește *formula dreptunghiurilor*, iar metoda aceasta de integrare se numește *metoda dreptunghiurilor*.

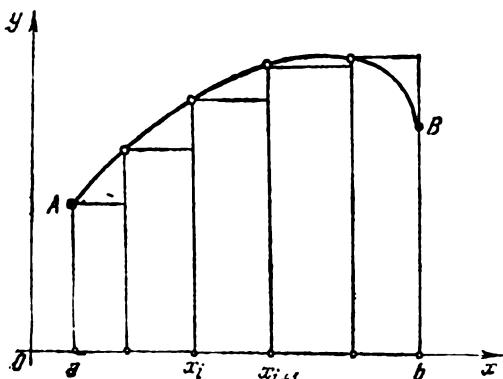


Fig. 110

Justificarea acestei denumiri este că, dacă funcția  $f$  este *pozitivă*, fiecare termen  $f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$  al sumei integrale  $\sigma_d(f)$  reprezintă aria unui dreptunghi (fig. 110).

În ceea ce privește evaluarea erorii, ea rezultă din inegalitatea

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sigma_d(f) \right| \leq S_d(f) - s_d(f),$$

unde  $s_d$  și  $S_d$  sunt sumele Darboux. Evaluarea erorii este dată de diferența sumelor Darboux.

În acest fel putem calcula eroarea după ce am calculat suma integrală. Dacă eroarea este mai mare decât cea dorită, va trebui să luăm mai multe puncte de diviziune, să calculăm o nouă sumă integrală și, din nou, eroarea comisă.

Acest procedeu nu este satisfăcător : este de dorit să știm de la început numărul  $n$  al intervalor diviziunii, necesar pentru a realiza o aproximare dorită.

În anumite cazuri acest lucru este posibil, după cum rezultă din următoarea

**Propozitie.** Dacă funcția  $f$  este derivabilă și dacă derivata sa  $f'$  este mărginită, atunci

$$\left| \int_a^b f(x) dx - s_d(f) \right| \leq \frac{M'(b-a)^2}{n},$$

unde  $M' = \sup_{a < x < b} |f'(x)|$ .

Intr-adevăr,

$$S_d(f) - s_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i),$$

unde  $M_i$  și  $m_i$  sunt respectiv marginea superioară și marginea inferioară a funcției  $f$  pe intervalul  $[x_i, x_{i+1}]$ .

Deoarece  $f$  este continuă pe intervalul compact  $[x_i, x_{i+1}]$ , ea își atinge marginile pe acest interval : există două puncte  $x'_i$  și  $x''_i$  din  $[x_i, x_{i+1}]$ , astfel ca

$$f(x'_i) = M_i, \quad f(x''_i) = m_i,$$

deci

$$S_d - s_d = \sum [f(x'_i) - f(x''_i)](x_{i+1} - x_i).$$

Aplicind formula creșterilor finite, există un punct  $\xi_i$  cuprins între  $x'_i$  și  $x''_i$ , deci  $\xi_i \in [x'_i, x''_i]$ , astfel ca

$$f(x'_i) - f(x''_i) = f'(\xi_i)(x'_i - x''_i).$$

Atunci

$$\begin{aligned} S_d - s_d &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i)(x'_i - x''_i)(x_{i+1} - x_i) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |f'(\xi_i)| |(x'_i - x''_i)| |(x_{i+1} - x_i)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} M'(x_{i+1} - x_i)^2 = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} M' \frac{(b-a)^2}{n^2} = n \cdot M' \frac{(b-a)^2}{n^2} = M' \frac{(b-a)^2}{n}. \end{aligned}$$

de unde

$$\left| \int_a^b f(x) dx - s_d(f) \right| \leq \frac{M'(b-a)^2}{n}.$$

Astfel, dacă dorim ca eroarea să fie mai mică decât  $\epsilon > 0$ , este suficient să luăm

$$n \geq \frac{M'(b-a)^2}{\epsilon}$$

deoarece, în acest caz,

$$\frac{M'(b-a)^2}{n} < \epsilon \text{ și deci}$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sigma_d(f) \right| < \epsilon.$$

*Exemplu.* Fie funcția  $f(x) = x$  definită pe  $[0, 1]$ . Avem  $f'(x) \equiv 1$ , deci  $M' = 1$ , și  $b - a = 1$ .

Pentru a calcula integrala cu două zecimale exacte,  $\epsilon = 10^{-2}$ , este suficient să luăm

$$n \geq \frac{M'(b-a)^2}{\epsilon} = 100.$$

Din acest exemplu se vede că metoda dreptunghiurilor nu este totdeauna convenabilă, deoarece necesită un număr mare de puncte de diviziune, deci calcule numeroase, pentru a realiza aproximări mai bune.

Pentru o diviziune aleasă, eroarea este cu atît mai mică, cu cît panta tangentei la grafic este mai mică și, mai ales, cu cît intervalul de integrare este mai mic.

## 2. Metoda trapezelor

Această metodă constă în a aproxima funcția dată cu o funcție poligonală (liniară pe intervale) sau, în limbaj geometric, în a aproxima graficul funcției cu o linie poligonală cu virfurile pe grafic.

Fie  $f$  o funcție integrabilă pe  $[a, b]$  și  $d$  o diviziune a intervalului. Să considerăm două sume integrale, luînd punctele intermediare la extremitatea stîngă a intervalelor partiale:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i),$$

sau la extremitatea dreaptă a intervalelor partiale:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i).$$

Fiecare din aceste sume aproximează integrala lui  $f$ . Semisuma acestor sume integrale

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i)$$

se află cuprinsă între sumele integrale și deci aproximează și ea integrala lui  $f$ :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i).$$

Pentru simplificarea calculelor, se iau intervalele parțiale egale între ele

$$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}.$$

Obținem astfel următoarea formulă de aproximare:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} [f(a) + f(b) + 2(f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}))]$$

numită *formula trapezelor*. Această metodă de aproximare se numește *metoda trapezelor*.

Justificarea acestei denumiri este că, dacă funcția  $f$  este *pozitivă*, fiecare termen  $\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i)$  al sumei  $S_n$  reprezintă aria unui trapez, cu înălțimea  $x_{i+1} - x_i$  și bazele  $f(x_i)$  și  $f(x_{i+1})$  (fig. 111).

Evaluarea erorii comise prin această aproximare rezultă din inegalitatea

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq S_d(f) - s_d(f),$$

$S_d$  și  $s_d$  fiind sumele Darbaoux.

În unele cazuri putem determina dinainte numărul  $n$  al intervalelor diviziunii, pentru a realiza o aproximare dorită, așa cum rezultă din următoarea

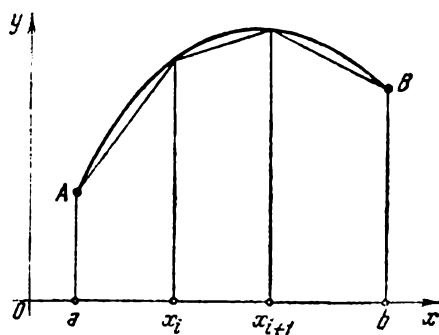


Fig. 111

**Propoziție.** Dacă  $f$  are derivata de ordinul doi  $f''$  integrabilă, atunci

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| \leq \frac{M''(b-a)^3}{12n^2},$$

unde  $M'' = \sup_{a < x < b} |f''(x)|$ .

Fie  $\alpha \leq x \leq \beta \leq b$ . Aplicind formula de integrare prin părți, avem

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) d(x - \alpha) = f(\beta)(\beta - \alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)(x - \alpha) dx.$$

Aplicind din nou formula de integrare prin părți, obținem

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)(x - \alpha) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)(x - \alpha) d(x - \beta) = - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \beta) d[f'(x)(x - \alpha)] = \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} f''(x)(x - \alpha)(x - \beta) dx - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)(x - \beta) dx. \end{aligned}$$

Aplicăm din nou formula de integrare prin părți ultimei integrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)(x - \beta) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (x - \beta) df(x) = f(\alpha)(\beta - \alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Păcind aceste înlocuiri în prima egalitate, obținem

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = f(\beta)(\beta - \alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} f''(x)(x - \alpha)(x - \beta) dx + f(\alpha)(\beta - \alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx,$$

adică

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} (\beta - \alpha) + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(x)(x - \alpha)(x - \beta) dx,$$

de unde

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} (\beta - \alpha) \right| &\leq \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} |f''(x)|(x - \alpha)(\beta - x) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} M'' \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(\beta - x) dx. \end{aligned}$$

Dar

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(\beta - x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(\beta - \alpha + \alpha - x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [(x - \alpha)(\beta - \alpha) - (x - \alpha)^2] dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{(x - \alpha)^2}{2} (\beta - \alpha) - \frac{(x - \alpha)^3}{3} \right] \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{(\beta - \alpha)^4}{12}.$$

deci

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} (\beta - \alpha) \right| \leq \frac{M''(\beta - \alpha)^3}{12}.$$

Luind  $\alpha = x_i$  și  $\beta = x_{i+1}$ , obținem

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i) \right| = \\ & = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i) \right| = \\ & = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \int_{x_{i+1}}^{x_i} f(x) dx - \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i) \right] \right| \leq \\ & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M''(x_{i+1} - x_i)^3}{12} = \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M''(b - a)^3}{12n^3} = n \frac{M''(b - a)^3}{12n^3} = \frac{M''(b - a)^3}{12n^2}. \end{aligned}$$

Astfel, dacă dorim ca eroarea să fie mai mică decât  $\epsilon > 0$ , este suficient să luăm

$$n \geq \sqrt{\frac{M''(b - a)^3}{12\epsilon}},$$

deoarece atunci  $\frac{M''(b - a)^3}{12n^2} < \epsilon$  și deci

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_n \right| < \epsilon.$$

*Exemplu.* Fie funcția  $f(x) = x^3$  definită pe  $[0, 1]$ . Avem  $f'(x) = 2x$  și  $f''(x) = 2$ , deci  $M'' = 2$ , iar  $b - a = 1$ .

Pentru a calcula integrala cu o eroare mai mică decât  $\epsilon = 10^{-4}$ , luăm

$$n \geq \sqrt{\frac{M''(b - a)^3}{12}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{12}} > 4.$$

Astfel, luind  $n = 5$  avem  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{5}$ ,  $x_2 = \frac{2}{5}$ ,  $x_3 = \frac{3}{5}$ ,  $x_4 = \frac{4}{5}$ ,  $x_5 = 1$ .

Atunci

$$f(x_0) = 0, f(x_1) = \frac{1}{25}, f(x_2) = \frac{4}{25}, f(x_3) = \frac{9}{25}, f(x_4) = \frac{16}{25}, f(x_5) = 1$$

și

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{b-a}{2 \cdot 5} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + f(x_5)] = \\ &= \frac{1}{10} \left[ \frac{2}{25} + \frac{8}{25} + \frac{18}{25} + \frac{32}{25} + 1 \right] = \frac{85}{250} = 0,34. \end{aligned}$$

Valoarea exactă a integralei este

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \approx 0,3333.$$

Avem într-adevăr

$$\int_0^1 x^2 dx - S_5 \approx 0,0066 < 0,01.$$

Dacă vrem să calculăm valoarea integralei cu 4 zecimale exacte (cu o eroare mai mică decit  $\epsilon = 10^{-4}$ ), luăm

$$n > \sqrt{\frac{2 \cdot 10^8}{12}} = 10 \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{12}} > 40.$$

**O b s e r v a t i e.** Metoda trapezelor necesită calcule mai puține decit metoda dreptunghiurilor. Pentru a realiza o eroare mai mică decit  $\epsilon > 0$ , trebuie să luăm prin metoda dreptunghiurilor

$$n \geqslant \frac{M'(b-a)^2}{\epsilon},$$

iar prin metoda trapezelor

$$b \geqslant \frac{\sqrt{M''(b-a)^2}}{\sqrt{12}\sqrt{\epsilon}}.$$

Tinem seama de faptul că dacă  $\epsilon < 1$ , atunci  $\epsilon < \sqrt{\epsilon}$ , deci  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} < \frac{1}{\epsilon}$ . Metoda trapezelor este mai avantajoasă decit cea a dreptunghiurilor dacă  $b-a > 1$ , deoarece în acest caz

$$(b-a)^{\frac{2}{3}} < (b-a)^2.$$

### 3. Formula lui Simpson

Metoda de aproximare, care conduce la formula lui Simpson, constă în a aproxima funcția dată pe anumite intervale cu un polinom de gradul doi, adică în a aproxima graficul funcției pe anumite intervale cu o parabolă (fig. 112).

Fie  $f$  o funcție definită pe  $[a, b]$  și  $d$  o diviziune a intervalului, formată din  $2n$  intervale parțiale egale

$$\begin{aligned} a = x_0 &< x_1 < x_2 < \dots < x_{2i} < \\ &< x_{2i+1} < x_{2i+2} < \dots < x_{2n-2} < \\ &< x_{2n-1} < x_{2n} = b \end{aligned}$$

$$x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{2n} = h,$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, 2n-1.$$

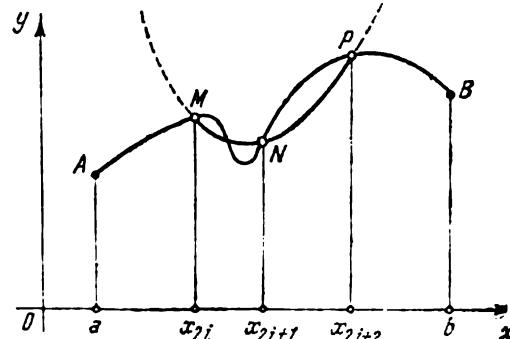


Fig. 112

Să notăm  $x_{2i} = \alpha$ ,  $x_{2i+1} = \alpha + h$ ,  $x_{2i+2} = \alpha + 2h$ ,

$$f(x_{2i}) = y_{2i}, \quad f(x_{2i+1}) = y_{2i+1}, \quad f(x_{2i+2}) = y_{2i+2}.$$

Prin punctele  $(\alpha, y_{2i})$ ,  $(\alpha + h, y_{2i+1})$ ,  $(\alpha + 2h, y_{2i+2})$  trece o parabolă și numai una, cu axa paralelă cu  $Oy$ :

$$y = Ax^2 + Bx + C = p_i(x).$$

Avem

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+2h} p_i(x) dx &= \int_{\alpha}^{\alpha+2h} (Ax^2 + Bx + C) dx = \left( \frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{2}x^2 + Cx \right) \Big|_{\alpha}^{\alpha+2h} = \\ &= 2h \left[ A\alpha^2 + B\alpha + C + 2A\alpha h + Bh + \frac{4Ah^3}{3} \right]. \end{aligned}$$

Scriind că parabolă trece prin cele trei puncte, obținem

$$y_{2i} = A\alpha^2 + B\alpha + C,$$

$$y_{2i+1} = A(\alpha + h)^2 + B(\alpha + h) + C,$$

$$y_{2i+2} = A(\alpha + 2h)^2 + B(\alpha + 2h) + C.$$

Scăzând membru cu membru prima ecuație din celelalte două, obținem :

$$y_{2i+1} - y_{2i} = 2A\alpha h + Bh + Ah^2;$$

$$y_{2i+2} - y_{2i} = 4A\alpha h + 2Bh + 4Ah^2.$$

Înmulțind prima ecuație cu  $-2$  și adunând, rezultă

$$A = \frac{y_{2i} - 2y_{2i+1} + y_{2i+2}}{2h^2}.$$

Să observăm că

$$\begin{aligned} y_{2i+1} &= A\alpha^2 + 2A\alpha h + Ah^2 + B\alpha + Bh + C = \\ &= A\alpha^2 + B\alpha + C + 2A\alpha h + Bh + \frac{4Ah^2}{3} - \frac{Ah^2}{3}, \end{aligned}$$

de unde

$$\int_a^{x+2h} p_i(x) dx = 2h \left[ y_{2i+1} + \frac{Ah^2}{3} \right]$$

și, înlocuind pe  $A$  cu valoarea obținută mai sus

$$\int_a^{x+2h} p_i(x) dx = 2h \left[ y_{2i+1} + \frac{y_{2i} + 2y_{2i+1} + y_{2i+2}}{6} \right] = \frac{h}{3} [y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}].$$

Procedînd astfel pe fiecare interval  $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ , obținem

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} p_i(x) dx &= \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n-1} [y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}] = \\ &= \frac{h}{3} [y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})]. \end{aligned}$$

Această valoare aproximează integrala funcției  $f$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{(b-a)^3}{6n} \{f(a) + f(b) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})] + \\ &\quad + 2[f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2})]\}. \end{aligned}$$

Această formulă de aproximare se numește *formula lui Simpson*.

Evaluarea erorii comise prin această aproximare este dată de următoarea

**Propozitie.** Dacă  $f$  are derivată de ordinul patru mărginită, atunci

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_{2n} \right| \leq \frac{M^{IV}(b-a)^4}{2880 n^4},$$

unde  $M^{IV} = \sup_{a < x < b} |f^{IV}(x)|$ , iar  $S_{2n}$  este suma din formula lui Simpson.

Să notăm  $x_{2i} = c - h$ ,  $x_{2i+1} = c$ ,  $x_{2i+2} = c + h$ . Atunci

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(c-h) + 4f(c) + f(c+h)].$$

Să notăm

$$R(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x) dx = \frac{t}{3} [f(c-t) + 4f(c) + f(c+t)], \quad t \leq h.$$

Să remarcăm că, dacă  $F$  este o primitivă a lui  $f$ , avem

$$\int_{c-t}^{c+t} f(x) dx = F(c+t) - F(c-t)$$

și derivând în raport cu  $t$  obținem

$$\left( \int_{c-t}^{c+t} f(x) dx \right)' = (F(c+t) - F(c-t))' = F'(c+t) + F'(c-t) = f(c+t) + f(c-t).$$

Derivind acum funcția  $R(t)$  în raport cu  $t$ , obținem

$$\begin{aligned} R'(t) &= f(c+t) + f(c-t) - \frac{1}{3} [f(c-t) + 4f(c) + f(c+t)] - \\ &\quad - \frac{t}{3} [f'(c+t) - f'(c-t)], \end{aligned}$$

adică

$$R'(t) = \frac{2}{3} [f(c+t) + f(c-t)] - \frac{4}{3} f(c) - \frac{t}{3} [f'(c+t) - f'(c-t)].$$

Mai derivăm o dată:

$$\begin{aligned} R''(t) &= \frac{2}{3} [f'(c+t) - f'(c-t)] - \frac{1}{3} [f'(c+t) - f'(c-t)] - \\ &\quad - \frac{t}{3} [f''(c+t) + f''(c-t)] = \frac{1}{3} [f'(c+t) - f'(c-t)] - \frac{t}{3} [f''(c+t) + f''(c-t)]. \end{aligned}$$

În sfîrșit, derivând încă o dată, obținem

$$R'''(t) = -\frac{t}{3} [f'''(c+t) - f'''(c-t)].$$

Să aplicăm acum formula creșterilor finite funcției  $f'''(x)$  pe intervalul  $[c-t, c+t]$ : există un punct  $\xi_1 \in (c-t, c+t)$ , astfel ca

$$f'''(c+t) - f'''(c-t) = 2tf^{IV}(\xi_1)$$

și deci

$$R'''(t) = -\frac{2t^2}{3} f^{IV}(\xi_1).$$

Notind cu  $M$  și  $m$  marginile funcției  $f^{IV}$  pe  $[c-h, c+h]$ , avem

$$m \leq f^{IV}(\xi_1) \leq M,$$

de unde

$$-\frac{2t^2}{3}M \leq -\frac{2t^2}{3}f^{IV}(\xi_1) < -\frac{2t^2}{3}m.$$

adică

$$-\frac{2t^2}{3}M \leq R'''(t) \leq -\frac{2t^2}{3}m,$$

Să observăm că  $R''(0) = 0$ ,  $R'(0) = 0$  și  $R(0) = 0$ .

Integrind ultimele inegalități între 0 și  $u$ , obținem

$$-\int_0^u \frac{2t^2}{3}M dt \leq \int_0^u R'''(t)du \leq -\int_0^u \frac{2t^2}{3}m dt,$$

adică  $-\frac{2u^3}{9}M \leq R''(u) \leq -\frac{2u^3}{9}m$ , pentru orice  $0 \leq u \leq h$ ; integrind aceste inegalități între 0 și  $z$ , avem

$$-\int_0^z \frac{2u^3}{9}M du \leq \int_0^z R''(u) du \leq -\int_0^z \frac{2u^3}{9}m du.$$

adică

$$-\frac{z^4}{18}M \leq R'(z) \leq -\frac{z^4}{18}m \text{ pentru } 0 \leq z \leq h.$$

Integrind acum între 0 și  $h$ , obținem

$$-\int_0^h \frac{z^4}{18}M dz \leq \int_0^h R'(z) dz < -\int_0^h \frac{z^4}{18}m dz.$$

adică

$$-\frac{h^5}{90}M \leq R(h) \leq -\frac{h^5}{90}m.$$

Există atunci un punct  $\xi_{2i} \in [c-h, c+h]$ , astfel ca

$$R(h) = -\frac{h^5}{90}f^{IV}(\xi_{2i}).$$

adică

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(c-h) + 4f(c) + f(c+h)] = -\frac{h^5}{90}f^{IV}(\xi_{2i})$$

sau

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+1}} f(x) dx - \frac{(b-a)}{6n} [f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})] = -\frac{(b-a)}{(2n)^5 \cdot 90} f^{IV}(\xi_{2i}).$$

Atunci

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S_{2n} \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} - \frac{b-a}{6n} [f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})] \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{n-1} - \frac{(b-a)^5}{2880 n^5} f^{IV}(\xi_{2i}) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^5}{2880 n^5} |f^{IV}(\xi_{2i})| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^5}{2880 n^5} M^{IV} = n \cdot \frac{(b-a)^5}{2880 n^5} M^{IV} = \frac{M^{IV} (b-a)^5}{2880 n^4}.$$

Astfel, dacă dorim ca eroarea să fie mai mică decât  $\epsilon > 0$ , este suficient să luăm

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{M^{IV}(b-a)^5}{2880 \epsilon}}.$$

**Observație.** Pentru a realiza o aproximare dorită, formula lui Simpson necesită, în general, calcule mai puține decât formulele precedente.

## § 8. Aplicațiile integralei în geometrie și fizică

### I. Aria unei suprafețe plane mărginite de o curbă

Fie  $f$  o funcție pozitivă definită pe un interval  $[a, b]$ . Graficul funcției  $f$  este situat deasupra axei  $Ox$ .

Să notăm cu  $F$  mulțimea punctelor din plan mărginită pe axa  $Ox$ , graficul  $AB$  al funcției  $f$  și dreptele  $x = a$ ,  $x = b$  paralele cu axa  $Oy$ :

$$F = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

**Propoziția 1.** Dacă funcția  $f$  este integrabilă (în sensul lui Riemann), atunci mulțimea  $F$  este măsurabilă (în sensul lui Jordan) și

$$s(F) = \int_a^b f(x) dx.$$

Fie  $d$  o diviziune a intervalului  $[a, b]$ :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

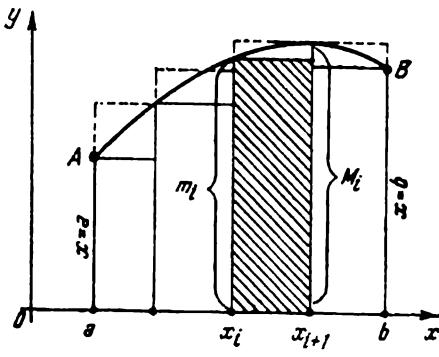


Fig. 113

Să considerăm sumele Darboux corespunzătoare acestei diviziuni

$$s_d = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i), \quad S_d = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i),$$

unde

$$m_i = \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x), \quad M_i = \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x).$$

Așadar

$$m_i \leq f(x) \leq M_i, \quad \text{pentru orice } x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Produsul  $m_i(x_{i+1} - x_i)$  reprezintă aria dreptunghiului cu baza pe intervalul  $[x_i, x_{i+1}]$  și înălțimea  $m_i$ . Acest dreptunghi este complet conținut în mulțimea  $F$ .

Cele  $n$  dreptunghiuri de acest fel formează un poligon  $P$  interior mulțimii  $F$ , și a cărui arie este egală cu suma inferioară Darboux

$$s(P) = s_d.$$

Produsul  $M_i(x_{i+1} - x_i)$  reprezintă aria unui dreptunghi cu baza pe intervalul  $[x_i, x_{i+1}]$  și înălțimea  $M_i$ . Acest dreptunghi conține porțiunea din mulțimea  $F$  care se proiectează pe axa  $Ox$  pe intervalul  $[x_i, x_{i+1}]$ .

Cele  $n$  dreptunghiuri de acest fel formează un poligon  $Q$  exterior mulțimii  $F$ , și a cărui arie este egală cu suma superioară Darboux

$$s(Q) = S_d.$$

Fie  $(d_n)$  un sir de diviziuni ale intervalului  $[a, b]$ , cu  $v(d_n) \rightarrow 0$ . Deoarece funcția  $f$  este integrabilă, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{d_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{d_n} = \int_a^b f(x) dx.$$

Dacă pentru fiecare diviziune  $d_n$  notăm cu  $P_n$  poligonul interior și cu  $Q_n$  poligonul exterior obținut ca mai sus, avem

$$P_n \subset F_n \subset Q_n$$

și

$$s(P_n) = s_{d_n}, \quad s(Q_n) = S_{d_n},$$

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(Q_n) = \int_a^b f(x) dx.$$

Rezultă atunci că mulțimea  $F$  este măsurabilă și aria sa  $s(F)$  este egală cu limita comună a ariilor celor două siruri de poligoane  $(P_n)$  și  $(Q_n)$ :

$$s(F) = \int_a^b f(x) dx.$$

**O b s e r v a t i i .** 1° Propoziția reciprocă este de asemenea adevărată: dacă mulțimea  $F$  este măsurabilă (în sensul lui Jordan), atunci funcția  $f$  este integrabilă (în sensul lui Riemann).

2° Graficul funcției integrabile  $f \geq 0$  are arie nulă, deoarece este conținut în frontieră mulțimii măsurabile  $F$ , iar frontieră unei mulțimi măsurabile are arie nulă.

3° Dacă funcția  $f$  este integrabilă, mulțimea

$$F' = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y < f(x)\},$$

obținută din mulțimea  $F$  scoțind punctele graficului funcției  $f$ , este de asemenea măsurabilă — ca diferență a două mulțimi măsurabile — și aria sa este egală cu aria lui  $F$ :

$$s(F') = \int_a^b f(x) dx.$$

Fie acum  $f_1$  și  $f_2$  două funcții definite pe  $[a, b]$  astfel încât  $f_1 \leq f_2$ :

$$f_1(x) \leq f_2(x) \text{ pentru orice } x \in [a, b].$$

Graficul funcției  $f_1$  este situat sub graficul funcției  $f_2$ . Să notăm cu  $F$  mulțimea punctelor cuprinse între graficele celor două funcții și dreptele  $x = a$ ,  $x = b$ :

$$F = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}.$$

**P r o p o z i t i a 2.** Dacă funcțiile  $f_1$  și  $f_2$  sunt integrabile, mulțimea  $F$  este măsurabilă și

$$s(F) = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Deoarece funcțiile  $f_1$  și  $f_2$  sunt integrabile, ele sunt mărginite. Există deci un număr  $m$  astfel încât

$$m \leq f_1(x) \leq f_2(x) \text{ pentru orice } x \in [a, b].$$

Atunci

$$0 \leq f_1(x) - m \leq f_2(x) - m \text{ pentru orice } x \in [a, b].$$

Notând  $k = -m$ ,  $\varphi_1 = f_1 + k$ ,  $\varphi_2 = f_2 + k$ , avem

$$0 \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x), \quad x \in [a, b].$$

Dacă funcțiile  $f_1$  și  $f_2$  sunt pozitive, putem lua  $m = 0$ , deci  $k = 0$  și atunci  $\varphi_1 = f_1$ ,  $\varphi_2 = f_2$ . Funcțiile  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  sunt de asemenea integrabile.

Să notăm cu  $F'$  mulțimea punctelor cuprinse între graficele funcțiilor  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  și dreptele  $x = a$ ,  $x = b$ :

$$F' = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Mulțimea  $F'$  s-a obținut din mulțimea  $F$  printr-o translație paralelă cu axa  $Oy$ , deci cele două mulțimi sunt echivalente; dacă una din ele este măsurabilă, atunci și cealaltă este măsurabilă și au aceeași arie.

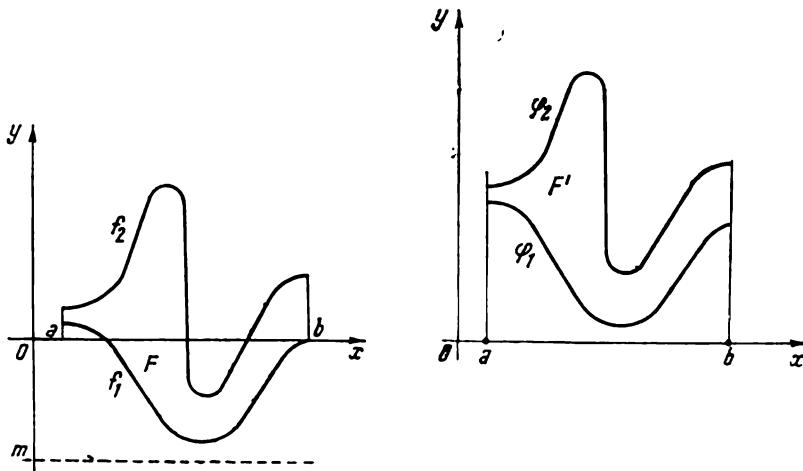


Fig. 114

Notând

$$F_1 = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \varphi_1(x)\},$$

$$F_2 = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

mulțimile  $F_1$  și  $F_2$  sunt măsurabile și

$$s(F_1) = \int_a^b \varphi_1(x) dx, \quad s(F_2) = \int_a^b \varphi_2(x) dx.$$

Mulțimea  $F'$  este diferența mulțimilor  $F_2$  și  $F_1$ :

$$F' = F_2 - F_1,$$

deci  $F'$  este măsurabilă și

$$\begin{aligned} s(F') &= s(F_2) - s(F_1) = \int_a^b \varphi_2(x) dx - \int_a^b \varphi_1(x) dx = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx = \\ &= \int_a^b [f_2(x) + k - (f_1(x) + k)] dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \end{aligned}$$

Rezultă atunci că și mulțimea  $F$  este măsurabilă și

$$s(F) = s(F') = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

**O b s e r v a ţ i e.** Propoziția 1 este un caz particular al propoziției 2, cu  $f_1(x) \equiv 0$  și  $f_2 = f$ .

**C o r o l a r u l 1.** Dacă  $f$  este integrabilă, mulțimea

$$F = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x) \text{ sau } f(x) \leq y \leq 0\}$$

este măsurabilă și

$$s(F) = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Să considerăm funcțiile

$$f_1 = \frac{1}{2}(|f| + f), \quad f_2 = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

Deoarece  $f$  este integrabilă, funcția  $|f|$  este integrabilă și deci și funcțiile  $f_1$  și  $f_2$  sunt integrabile. Avem

$$f = f_1 - f_2, \quad |f| = f_1 + f_2.$$

Funcțiile  $f_1$  și  $f_2$  se numesc, respectiv, partea pozitivă și partea negativă a funcției  $f$ . Ele se pot defini și astfel:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } f(x) \leq 0 \\ f(x) & \text{dacă } f(x) \geq 0, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{dacă } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{dacă } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Avem

$$F = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,$$

$$f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\},$$

deci  $F$  este măsurabilă și

$$s(F) = \int_a^b [f_2(x) + f_1(x)] dx = \int_a^b |f(x)| dx.$$

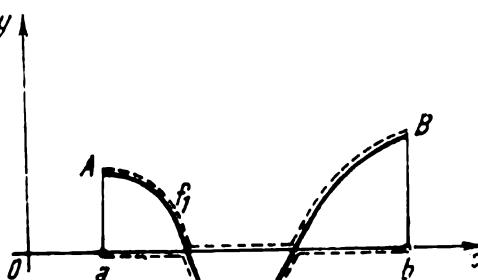


Fig. 115

**C o r o l a r u l 2.** Graficul unei funcții integrabile oricare este o mulțime măsurabilă cu aria nulă.

Într-adevăr, graficul funcției este conținut în frontieră mulțimii măsurabile  $F$ .

**Observații.** 1° Dacă  $f \leq 0$  și este integrabilă, mulțimea  $F$  cuprinsă între graficul său, axa  $Ox$  și dreptele  $x = a$ ,  $x = b$ , este măsurabilă și

$$s(F) = - \int_a^b f(x) dx,$$

deoarece  $|f| = -f$ .

2° Înținând seama de faptul că ecuația graficului funcției  $f$  este

$$y = f(x), \quad x \in [a, b],$$

aria mulțimii  $F$ , mărginită de curba  $y = f(x)$ , axa  $Ox$  și dreptele  $x = a$ ,  $x = b$ , se scrie adesea

$$s(F) = \int_a^b |y| dx.$$

**Exemplu.** 1) Să se găsească aria suprafeței cuprinsă între parabolele  $y = x^2$  și  $y^2 = x$ . Cele două parbole se intersectează în punctele  $(0, 0)$  și  $(1, 1)$ .

Cele două parbole sunt graficele funcțiilor  $f_1(x) = x^2$  și  $f_2(x) = \sqrt{x}$  definite pe  $[0, 1]$ . Aria  $S$  căutată este

$$S = \int_0^1 [f_2(x) - f_1(x)] dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$2) \text{ Să se găsească aria elipsei } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Vom calcula aria unui sfert de elipsă, cuprinsă în primul cadran. Porțiunea de elipsă din primul cadran are ecuația

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

deci

$$\frac{1}{4} S = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

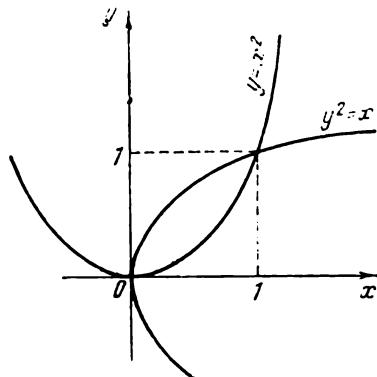


Fig. 116

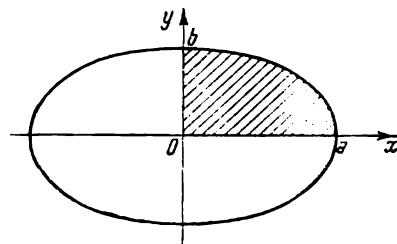


Fig. 117

Să facem înlocuirea  $x = a \sin t$ , deci  $dx = a \cos t dt$  și  $0 = a \sin t_1$ ,  $a = \sin t_2$ , de unde  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \frac{\pi}{2}$ . Atunci

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \\ &= 4ab \left( \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab. \end{aligned}$$

În cazul cînd elipsa este un cerc,  $a = b = R$ , rezultă că suprafața cercului este  $\pi R^2$ .

## 2. Aria unei suprafețe plane

### mărginite de o curbă dată în coordonate polare

Fie  $\rho = f(\theta)$  ecuația unei curbe în coordonate polare, unde  $f(\theta)$  este o funcție pozitivă definită pe un interval  $[\alpha, \beta]$ . Fiecărui  $\theta \in [\alpha, \beta]$  îi corespunde în plan punctul de coordonate polare  $(\theta, f(\theta))$ . Să notăm cu  $F$  sectorul cuprins între curbă și dreptele care trec prin origine și au pantele  $\operatorname{tg}\alpha$ ,  $\operatorname{tg}\beta$ :

$$F = \{(\theta, \rho) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq \rho \leq f(\theta)\}.$$

**P r o p o z i ᄀ i a 3.** Dacă funcția  $f$  este integrabilă, atunci mulțimea  $F$  este măsurabilă și

$$s(F) = \frac{1}{2} \int_{\beta}^{\alpha} f^2(\theta) d\theta.$$

Fie  $d$  o diviziune a intervalului  $[\alpha, \beta]$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_i < \\ &< \theta_{i+1} < \dots < \theta_n = \beta \end{aligned}$$

și  $m_i$ ,  $M_i$ , marginile funcției  $f(\theta)$  pe intervalul parțial  $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ .

Pentru fiecare indice  $i$ , să considerăm sectorul de cerc cu centrul în origine, unghiul la

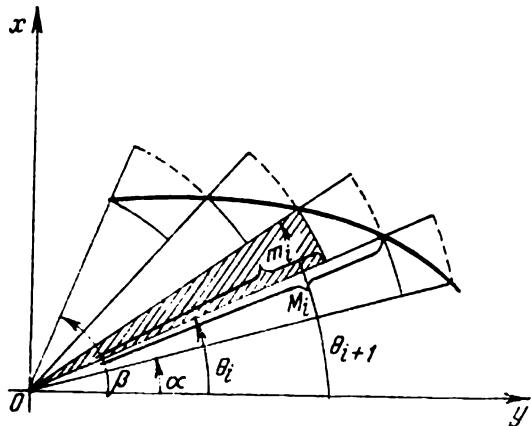


Fig. 118

centru  $\theta_{i+1} - \theta_i$  și raza  $m_i$ . Acest sector de cerc este conținut în mulțimea  $F$  și aria sa este

$$\frac{1}{2} m_i^2 (\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Reuniunea celor  $n$  sectoare de cerc este o mulțime măsurabilă  $A$ , complet conținută în mulțimea  $F$ , și cu aria

$$s(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} m_i^2 (\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Pentru fiecare indice  $i$  să considerăm acum sectorul de cerc cu centrul în origine, unghiul la centru  $\theta_{i+1} - \theta_i$  și raza  $M_i$ .

Aria sa este

$$\frac{1}{2} M_i^2 (\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Reuniunea celor  $n$  sectoare de cerc de acest fel este o mulțime măsurabilă  $B$ , care conține mulțimea  $F$ , și cu aria

$$s(B) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} M_i^2 (\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Să observăm că, deoarece  $m_i = \inf_{\theta_i < \theta < \theta_{i+1}} f(\theta)$ , avem

$$\frac{1}{2} m_i^2 = \inf_{\theta_i < \theta < \theta_{i+1}} \frac{1}{2} f^2(\theta)$$

și de asemenea

$$\frac{1}{2} M_i^2 = \sup_{\theta_i < \theta < \theta_{i+1}} \frac{1}{2} f^2(\theta),$$

astfel încât  $s(A)$  și  $s(B)$  sunt egale cu sumele Darboux ale funcției  $h(\theta) = \frac{1}{2} f^2(\theta)$ :

$$s_d \left( \frac{1}{2} f^2 \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} m_i (\theta_{i+1} - \theta_i);$$

$$S_d \left( \frac{1}{2} f^2 \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} M_i (\theta_{i+1} - \theta_i).$$

Să luăm un sir de diviziuni  $(d_n)$  ale intervalului  $[\alpha, \beta]$ , cu  $v(d_n) \rightarrow 0$ . Deoarece  $f$  este integrabilă,  $\frac{1}{2} f^2$  este de asemenea integrabilă și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{d_n} \left( \frac{1}{2} f^2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{d_n} \left( \frac{1}{2} f^2 \right) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f^2(\theta) d\theta.$$

Dacă, pentru fiecare diviziune  $d_n$ , notăm cu  $A_n$  și  $B_n$  mulțimile măsurabile formate, ca mai sus, din sectoare de cercuri, avem

$$A_n \subset F \subset B_n;$$

$$s(A_n) = s_{d_n} \left( \frac{1}{2} f^2 \right), \quad s(B_n) = S_{d_n} \left( \frac{1}{2} f^2 \right),$$

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(B_n) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

Rezultă atunci că mulțimea  $F$  este măsurabilă și aria sa este egală cu limita comună a ariilor șirurilor de mulțimi  $(A_n)$  și  $(B_n)$ :

$$s(F) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

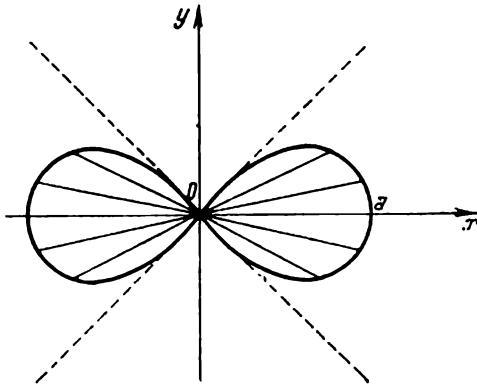


Fig. 119

**O b s e r v a t i e.** Deoarece ecuația curbei care mărginește suprafața  $F$  este  $\rho = f(\theta)$ , aria mulțimii  $F$  se scrie adesea

$$s(F) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\theta.$$

**E x e m p l e.** 1) Ecuația, în coordonate polare, a cercului cu centrul în origine și raza  $R$  este

$$\rho \equiv R.$$

Aria  $S$  a cercului este

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 d\theta = \frac{1}{2} R^2 \theta \Big|_0^{2\pi} = \pi R^2.$$

2) Ecuația lemniscatei, în coordonate polare, este

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

Pentru reprezentarea lemniscatei facem următorul tablou:

$\varphi$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$\rho$	0	$\frac{\pm a}{\sqrt{2}}$	$\pm a$	$\frac{\pm a}{\sqrt{2}}$	0

Aria unei bucle a lemniscatei este

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\varphi = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}.$$

Aria lemniscatei este  $S = a^2$ .

### 3. Volumul corpurilor de rotație

Fie  $f$  o funcție pozitivă definită pe un interval  $[a, b]$ . Să considerăm mulțimea  $F$  cuprinsă între curba  $y = f(x)$ , axa  $Ox$  și dreptele  $x = a$ ,  $x = b$ :

$$F = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Prin rotirea în jurul axei  $Ox$ , această mulțime descrie un corp de rotație  $K$ . Se spune adesea că corpul  $K$  este născut prin rotația curbei  $y = f(x)$  în jurul axei  $Ox$ .

Fiecare punct  $(x, f(x))$  de pe curba  $y = f(x)$  descrie un cerc cu centrul pe axa  $Ox$ , în punctul  $x$ , și cu raza  $f(x)$ .

**Propoziția 1.** Dacă funcția  $f$  este integrabilă, mulțimea  $K$  este măsurabilă și

$$v(K) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Fie  $d$  o diviziune a intervalului  $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

Să notăm cu  $m_i$  și  $M_i$  marginile funcției  $f$  pe intervalul  $[x_i, x_{i+1}]$ .

Dreptunghiul cu baza pe  $[x_i, x_{i+1}]$  și înălțimea  $m_i$  descrie prin rotație un cilindru conținut în corpul  $K$ ; acest cilindru are raza bazei  $m_i$  și înălțimea  $x_{i+1} - x_i$ , deci volumul său este

$$\pi m_i^2 (x_{i+1} - x_i).$$

Cei  $n$  cilindri de acest fel formează o mulțime măsurabilă  $A$ , complet conținută în  $K$ , și al cărei volum este

$$v(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \pi m_i^2 (x_{i+1} - x_i).$$

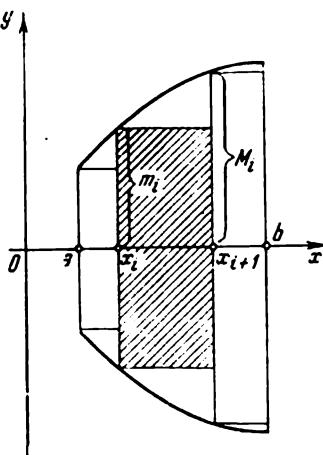


Fig. 120

Dreptunghiul cu baza pe  $[x_i, x_{i+1}]$  și înălțimea  $M_i$ , descrie prin rotație un cilindru cu raza bazei  $M_i$  și înălțimea  $x_{i+1} - x_i$ . Aria sa este

$$\pi M_i^2(x_{i+1} - x_i).$$

Cei  $n$  cilindri de acest fel formează o mulțime măsurabilă  $B$ , care conține corpul  $K$ , și al cărei volum este

$$v(B) = \sum_{i=0}^{n-1} \pi M_i^2(x_{i+1} - x_i).$$

Să observăm că

$$\pi m_i^2 = \pi \inf_{x_i < x < x_{i+1}} f(x)^2 = \pi \inf_{x_i < x < x_{i+1}} f^2(x);$$

$$\pi M_i = \pi \sup_{x_i < x < x_{i+1}} f(x)^2 = \pi \sup_{x_i < x < x_{i+1}} f^2(x),$$

astfel încât  $v(A)$  și  $v(B)$  sunt egale cu sumele Darboux ale funcției  $h = \pi f^2$ .

$$s_a(\pi f^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \pi m_i^2(x_{i+1} - x_i),$$

$$S_d(\pi f^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \pi M_i^2(x_{i+1} - x_i).$$

Să luăm un sir  $(d_n)$  de diviziuni ale intervalului  $[a, b]$  cu  $v(d_n) \rightarrow 0$ . Deoarece  $f$  este integrabilă, funcția  $\pi f^2$  este de asemenea integrabilă și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{d_n}(\pi f^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{d_n}(\pi f^2) = \int_a^b \pi f^2(x) dx.$$

Dacă pentru fiecare diviziune  $d_n$  notăm cu  $A_n$  și  $B_n$  mulțimile măsurabile formate ca mai sus, din cilindri, avem

$$A_n \subset K \subset B_n$$

și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(B_n) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Rezultă atunci că mulțimea  $K$  este măsurabilă, iar volumul său este egal cu limita comună a volumelor celor două siruri de mulțimi  $(A_n)$  și  $(B_n)$

$$v(K) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

**O b s e r v a t i i .** 1° Condiția ca funcția  $f$  să fie pozitivă nu este esențială. În adevăr, dacă  $f$  nu este pozitivă, curbele  $y = f(x)$  și  $y = |f(x)|$  descriu prin rotație același corp  $K$ , deci

$$V(K) = \int_a^b |f(x)|^2 dx = \int_a^b f^2(x) dx.$$

2° Dacă  $f$  este integrabilă, suprafața  $S$  născută prin rotația curbei  $y = f(x)$  are volum nul, deoarece este conținută în frontieră mulțimii măsurabile  $K$ .

3° Dacă  $f$  este integrabilă, corpul  $K'$ , născut din rotația mulțimii

$$F' = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y < f(x)\}$$

în jurul axei  $Ox$ , și care se obține din  $K$ , scoșind punctele de pe suprafața laterală  $S$ , este de asemenea o mulțime măsurabilă și are același volum ca și  $K$ .

$$v(K') = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

4° Deoarece ecuația curbei care dă naștere corpului  $K$  este

$$y = f(x),$$

volumul corpului  $K$  se scrie adesea

$$v(K) = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Fie acum  $f_1$  și  $f_2$  două funcții pozitive pe  $[a, b]$ , astfel ca  $f_1 \leq f_2$ , și fie

$$F = \{(x, y) | a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}.$$

Prin rotirea în jurul axei  $Ox$ , această mulțime descrie un corp  $K$ . Corpul  $K$  este mărginit de suprafețele născute prin rotația curbelor  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  și de planele  $x = a$ ,  $x = b$ .

**P r o p o z i t i a 2.** Dacă  $f_1$  și  $f_2$  sunt integrabile, mulțimea  $K$  este măsurabilă și

$$v(K) = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx.$$

Într-adevăr, să notăm cu  $K_1$  și  $K_2$  corpurile născute prin rotirea în jurul axei  $Ox$  a mulțimilor

$$F_1 = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f_1(x)\}$$

$$F_2 = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f_2(x)\}.$$

Mulțimile  $K_1$  și  $K_2$  sunt măsurabile și

$$v(K_1) = \pi \int_a^b f_1^2(x) dx, \quad v(K_2) = \pi \int_a^b f_2^2(x) dx.$$

Avem  $F = F_2 - F_1$  și  $K = K_2 - K_1$ , deci  $K$  este o mulțime măsurabilă — ca diferență a două mulțimi măsurabile — și

$$v(K) = v(K_2) - v(K_1) = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx.$$

*Exemplu.* 1) Sfera cu centrul în origine și raza  $R$  poate fi obținută prin rotirea semicercului  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $-R \leq x \leq R$  în jurul axei  $Ox$ . Volumul  $v$  al sferei este deci

$$\begin{aligned} v &= \pi \int_{-R}^R y^2 dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left( R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \\ &= 2\pi \left( R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

2) Curba  $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $-a \leq x \leq a$  dă naștere, prin rotirea în jurul axei  $Ox$ , unui elipsoid de revoluție. Volumul  $v$  al elipsoidului este :

$$\begin{aligned} v &= \pi \int_{-a}^a y^2 dx = 2\pi \int_0^a \frac{b}{a} (a^2 - x^2) dx = 2\pi \frac{b}{a} \left( a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \\ &= 2\pi \frac{b}{a} \left( a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = 4\pi a^2 b. \end{aligned}$$

#### 4. Lungimi de arce

În capitolul referitor la studiul curbelor se va da definiția curbelor rectificabile și a lungimii acestor curbe.

În acest capitol vom defini lungimea unor curbe particulare care sunt grafice de funcții.

Graficul unei funcții *continue*  $f$  se numește *curbă continuă* sau mai simplu, *curbă*. Ecuția curbei este

$$y = f(x).$$

Graficul unei funcții  $f$  cu *derivată continuă* se numește *curbă netedă*. Fie  $f$  o funcție cu *derivată continuă*  $f'$ , definită pe un interval  $[a, b]$ , și fie  $C$  curba  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ .

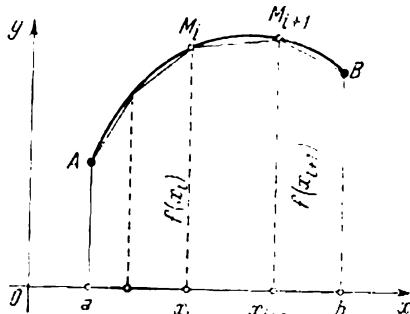


Fig. 121

Lungimea  $l(C)$  a curbei  $C$  se definește prin egalitatea:

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Justificarea acestei definiții este următoarea:

Să luăm pe curba  $C$  mai multe puncte, în ordine, de la  $A$  spre  $B$ :

$$A = M_0, M_1, \dots, M_i, M_{i+1}, \dots, M_n = B.$$

Unind aceste puncte în ordinea indicată, se obține o linie poligonala  $P$ , cu vîrfurile pe curbă.

Alegerea punctelor  $M_i$  revine la alegerea unei diviziuni  $d$  a intervalului  $[a, b]$ :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b,$$

astfel încât coordonatele punctului  $M_i$  sănt  $(x_i, f(x_i))$ .

Lungimea segmentului  $M_i M_{i+1}$  este

$$l(M_i M_{i+1}) = \sqrt{[x_{i+1} - x_i]^2 + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]^2}.$$

Să aplicăm funcției  $f$  teorema creșterilor finite pe intervalul  $[x_i, x_{i+1}]$ : există un punct  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ , astfel încât

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Atunci

$$\begin{aligned} l(M_i M_{i+1}) &= \sqrt{[x_{i+1} - x_i]^2 + [f'(\xi_i)]^2 [x_{i+1} - x_i]^2} = \\ &= \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} (x_{i+1} - x_i). \end{aligned}$$

Procedând astfel pe fiecare interval parțial, deducem că lungimea liniei poligonale  $P$  este:

$$l(P) = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} (x_{i+1} - x_i),$$

unde punctele intermediare  $\xi_i$  sănt acelea obținute prin aplicarea teoremei creșterilor finite. Să observăm că, dacă notăm  $h(x) = \sqrt{1 + f'^2(x)}$  avem  $h(\xi_i) = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}$ , deci

$$l(P) = \sum_{i=0}^{n-1} h(\xi_i) (x_{i+1} - x_i).$$

Lungimea  $l(P)$  a liniei poligonale este deci egală cu o sumă integrală a funcției  $h$ :

$$\sigma_d(h) = \sum_{i=0}^{n-1} h(\xi_i) (x_{i+1} - x_i).$$

Fie  $(d_n)$  un sir de diviziuni ale intervalului  $[a, b]$ , cu  $\nu(d_n) \rightarrow 0$ . Deoarece  $f'$  este continuă, funcția  $h = \sqrt{1 + f'^2}$  este de asemenea continuă, deci integrabilă.

Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{d_n}(h) = \int_a^b h(x) dx = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Dacă pentru fiecare diviziune  $d_n$  notăm cu  $P_n$  linia poligonală corespunzătoare, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l(P_n) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Observăm că, pe măsură ce diviziunea  $d$  este mai fină, cu intervale parțiale mai multe și mai mici, linia poligonală corespunzătoare  $P$  are laturi mai multe și mai mici, deci se apropie, ca formă, din ce în ce mai mult de curba  $C$ . Este deci natural să luăm drept lungime a curbei  $C$  un număr  $l(C)$ , de care lungimea liniilor poligonale să se apropie din ce în ce mai mult pe măsură ce diviziunea este mai fină.

Un asemenea număr este integrala funcției  $h = \sqrt{1 + f'^2}$ . De aceea se ia, prin definiție,

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

**O b s e r v a t i i .** 1° După ce se va da definiția generală a curbelor rectificabile și a lungimii lor, egalitatea precedentă va rezulta ca o teoremă.

2° Deoarece ecuația curbei  $C$  este  $y = f(x)$ , lungimea curbei  $C$  se scrie adesea

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

**Exemplu.** Să verificăm cu această formulă că lungimea cercului  $x^2 + y^2 = R^2$  este  $2\pi R$ .

Ecuația unui sfert de cerc, din semiplanul superior, cuprins între cele două bisectoare este

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -\frac{R}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Avem

$$y' = - \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

și

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2},$$

deci, notind cu  $L$  lungimea cercului, avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}L &= \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \\ &= R \arcsin \frac{x}{R} \Big|_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} = R \left( \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} - \arcsin \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) = R \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = R \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

de unde  $L = 4 \cdot R \frac{\pi}{2} = 2\pi R$ .

**Observații.** 1° Funcția  $\sqrt{R^2 - x^2}$  nu este derivabilă în punctele  $-R$  și  $R$ ; în jurul acestor puncte, derivata este nemărginită. De aceea, nu se poate calcula cu ajutorul formulei precedente lungimea semicercului  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $-R \leq x \leq R$ . Pentru acest motiv s-a recurs la calculul lungimii unui sfert de cerc, deoarece pe intervalul  $\left[ -\frac{R}{2}, \frac{R}{2} \right]$  funcția

$\sqrt{R^2 - x^2}$  are derivată continuă. Această precauție va fi de prisos după ce se vor defini integralele generalizate.

2° Exemplul precedent constituie o verificare a formulei de calcul pentru lungimea cercului. Prin acest exemplu nu se demonstrează că lungimea cercului este  $2\pi R$ , deoarece în calcule s-au folosit valorile funcției arcsin, și anume: numărul  $\pi$ , a cărui definiție a presupus cunoscută lungimea cercului.

Totuși, dacă se definește numărul  $\pi$  (și funcțiile trigonometrice) într-un mod care să nu implice lungimea cercului, de exemplu cu ajutorul seriilor, atunci exemplul precedent constituie o demonstrație a faptului că lungimea cercului este  $2\pi R$ .

3° Avem  $I(P) \leq I(C)$ , oricare ar fi linia poligonală  $P$  inscrisă în curba  $C$ . Într-adevăr, prin trecerea de la o diviziune  $d$  la o diviziune mai fină,  $d'$ , avem  $I(P) \leq I(P')$ . Dacă  $(d_n)$  este un sir de diviziuni cu  $v(d_n) \rightarrow 0$ , aranjate după finețe, sirul  $(I(P_n))$  este crescător și  $I(P_n) \rightarrow I(C)$ , deci  $I(P_n) \leq I(C)$ .

## 5. Suprafețe de rotație

În capitolul relativ la studiul suprafețelor în spațiu, se va da definiția ariei acestor suprafețe.

În acest capitol vom defini aria unei suprafețe născute prin rotirea unei curbe netede în jurul axei  $Ox$ .

Fie  $f$  o funcție pozitivă cu derivată continuă pe un interval  $[a, b]$ . Graficul  $C$  al acestei funcții este o curbă netedă.

Prin rotirea curbei în jurul axei  $Ox$ , ia naștere o suprafață de rotație  $S$ . Aria  $\sigma(S)$  a acestei suprafețe se definește prin egalitatea

$$\sigma(S) = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Justificarea acestei definiții este următoarea:

Fie  $d$  o diviziune a intervalului  $[a, b]$ :

$$\begin{aligned} a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \\ &< \dots < x_n = b. \end{aligned}$$

Pentru fiecare punct  $x_i$ , să notăm cu  $M_i$  punctul de coordonate  $(x_i, f(x_i))$  de pe curba  $C$ . Unind aceste puncte, obținem o linie poligonală  $P$ , care prin rotație în jurul axei  $Ox$  dă naștere unei suprafețe  $\Sigma$ , formată din mai multe trunchiuri de con.

Intervalului  $[x_i, x_{i+1}]$  îi corespunde trunchiul de con cu razele cercurilor de bază  $f(x_i)$  și  $f(x_{i+1})$  și generatoarea  $l(M_i, M_{i+1})$ . Aria laterală a acestui trunchi de con este deci

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} l(M_i, M_{i+1}) &= 2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]^2} = \\ &= 2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} (x_{i+1} - x_i), \end{aligned}$$

unde am aplicat teorema creșterilor finite  $f$  pe intervalul

$$[x_i, x_{i+1}], \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}].$$

Aria suprafeței  $\Sigma$  este

$$\sigma(\Sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} (x_{i+1} - x_i).$$

În membrul drept putem face să apară suma integrală

$$\sigma_d(h) = \sum_{i=0}^{n-1} h(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

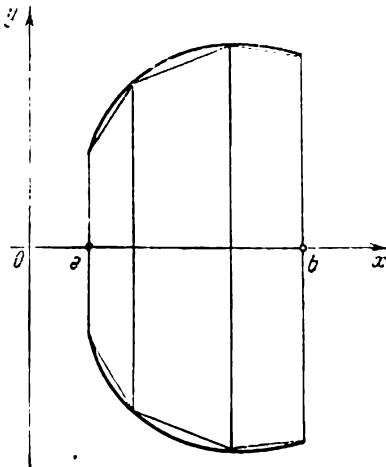


Fig. 122

ă funcției  $h(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}$ , anume

$$\sigma_d(h) = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} (x_{i+1} - x_i).$$

Să arătăm că, dacă luăm diviziunea  $d$  suficient de fină, putem realiza ca diferența  $\sigma(\Sigma) - \sigma_d(h)$  să fie oricără mică.

Fie  $\varepsilon > 0$  oarecare. Deoarece funcția  $f$  este continuă pe intervalul compact  $[a, b]$ , ea este uniform continuă pe acest interval: numărul  $\delta(\varepsilon) > 0$  ales îi corespunde un număr  $\delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât, oricare ar fi punctele  $x'$  și  $x''$  din  $[a, b]$  cu  $|x' - x''| < \delta$ , să avem

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2\pi l(C)(b-a)},$$

unde  $l(C)$  este lungimea curbei  $C$ .

Fie atunci  $d$  o diviziune cu  $v(d) < \delta$ , deci  $x_{i+1} - x_i < \delta$  pentru fiecare  $i$ , și cu atât mai mult

$$\xi_i - x_i < \delta, \quad x_{i+1} - \xi_i < \delta,$$

deci

$$|f(\xi_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2\pi l(C)(b-a)}$$

$$|f(x_{i+1}) - f(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{2\pi l(C)(b-a)}$$

și

$$\begin{aligned} |f(x_i) + f(x_{i+1}) - 2f(\xi_i)| &\leq |f(x_i) - f(\xi_i)| + |f(x_{i+1}) - f(\xi_i)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{\pi l(C)(b-a)}. \end{aligned}$$

Observând că  $\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} = l(M_i M_{i+1}) \leq l(C)$ , avem

$$\begin{aligned} |\sigma(\Sigma) - \sigma_d(h)| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \pi [f(x_i) + f(x_{i+1}) - 2f(\xi_i)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} (x_{i+1} - x_i) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \pi |f(x_i) + f(x_{i+1}) - 2f(\xi_i)| \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} (x_{i+1} - x_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{l(C)(b-a)} l(C)(x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Să luăm acum un sir  $(d_n)$  de diviziuni ale intervalului  $[a, b]$ , cu  $v(d_n) \rightarrow 0$ . Să notăm cu  $\Sigma_n$  suprafața de rotație formată din trunchiuri de con, corespunzătoare diviziunii  $d_n$ . Din cele de mai sus rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma(\Sigma_n) - \sigma_{d_n}(h)| = 0,$$

deoarece, pentru fiecare  $\varepsilon > 0$ , există un număr  $N(\varepsilon)$  astfel ca pentru  $n \geq N(\varepsilon)$  să avem  $\nu(d_n) < \delta(\varepsilon)$  și deci

$$|\sigma(\Sigma_n) - \sigma_{d_n}(h)| < \varepsilon.$$

Pe de altă parte, funcția  $h = 2\pi f \sqrt{1 + f'^2}$  este continuă, deci integrabilă, și deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{d_n}(h) = \int_a^b h(x) dx = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Atunci

$$\sigma(\Sigma_n) = [\sigma(\Sigma_n) - \sigma_{d_n}(h)] + \sigma_{d_n}(h),$$

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\Sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{d_n}(h) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Pe măsură ce diviziunea  $d$  este mai fină, linia poligonală se apropie din ce în ce mai mult, ca formă, de curba  $C$ , deci suprafața  $\Sigma$  se apropie din ce în ce mai mult, ca formă, de suprafața  $S$ .

Este deci natural să luăm ca aria a suprafeței  $S$  un număr  $\sigma(S)$ , de care aria  $\sigma(\Sigma)$  să se apropie din ce în ce mai mult, pe măsură ce diviziunea  $d$  este mai fină. Un asemenea număr este integrala funcției  $h = 2\pi f \sqrt{1 + f'^2}$ . De aceea, se ia, prin definiție :

$$\sigma(S) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

O b s e r v a t i i . 1° După ce se va da definiția generală a ariei unei suprafețe în spațiu, egalitatea precedentă va rezulta ca o teoremă.

2° Dacă funcția  $f$  nu este pozitivă, atunci

$$\sigma(S) = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Într-adevăr, în acest caz, razele bazelor trunchiului de con construit pe intervalul  $[x_i, x_{i+1}]$  sunt  $|f(x_i)|$  și  $|f(x_{i+1})|$ . Se alege funcția  $h(x) = |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)}$  și se procedează ca mai sus.

3° Deoarece ecuația curbei care dă naștere suprafeței  $S$  este

$$y = f(x),$$

aria suprafeței  $S$  se scrie adesea

$$\sigma(S) = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

## 6. Centre de greutate

După cum se știe din fizică, centrul de greutate al unor corpuri simple se poate determina ușor. Dacă un corp are o axă de simetrie, centrul de greutate se află pe această axă.

Dacă se dă un sistem de  $n$  corpuri, care au centrele de greutate cu coordinatele respectiv

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n),$$

în raport cu un sistem de axe de coordonate, și masele respectiv

$$m_1, m_2, \dots, m_n,$$

atunci coordonatele  $(x_G, y_G, z_G)$  ale centrului de greutate sunt date de egalitățile:

$$x_G = \frac{\sum_i x_i m_i}{\sum_i m_i}, \quad y_G = \frac{\sum_i y_i m_i}{\sum_i m_i}, \quad z_G = \frac{\sum_i z_i m_i}{\sum_i m_i}.$$

Dacă cele  $n$  corpuri sunt omogene și au aceeași densitate  $\rho$ , atunci masele lor sunt proporționale cu volumele lor,  $m_i = \rho v_i$ , iar coordonatele centrului de greutate sunt date de egalitățile:

$$x_G = \frac{\sum_i x_i v_i}{\sum_i v_i}, \quad y_G = \frac{\sum_i y_i v_i}{\sum_i v_i}, \quad z_G = \frac{\sum_i z_i v_i}{\sum_i v_i}.$$

Dacă, în plus, cele  $n$  corpuri au formă de plăci plane sau sunt filiforme, masele sunt proporționale cu ariile  $m_i = kS_i$ , respectiv cu lungimile,  $m_i = kl_i$ ; în acest caz formulele precedente devin:

$$x_G = \frac{\sum_i x_i S_i}{\sum_i S_i}, \quad y_G = \frac{\sum_i y_i S_i}{\sum_i S_i}, \quad z_G = \frac{\sum_i z_i S_i}{\sum_i S_i},$$

respectiv

$$x_G = \frac{\sum_i x_i l_i}{\sum_i l_i}, \quad y_G = \frac{\sum_i y_i l_i}{\sum_i l_i}, \quad z_G = \frac{\sum_i z_i l_i}{\sum_i l_i}.$$

Ne propunem acum să definim centrul de greutate al unei suprafețe plane mărginite de o linie curbă.

Fie  $f$  o funcție continuă pe un interval  $[a, b]$ . Să considerăm figura  $abBA$  mărginită de axa  $Ox$ , curba  $y = f(x)$  (graficul funcției  $f$ ) și dreptele

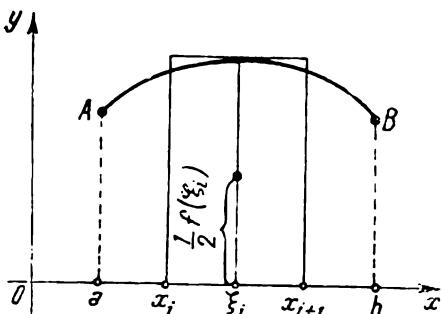


Fig. 123

$x = a$ ,  $x = b$ . Fie  $d$  o diviziune a intervalului  $[a, b]$ ; în fiecare interval parțial  $[x_i, x_{i+1}]$  să alegem punctul  $\xi_i = \frac{(x_i + x_{i+1})}{2}$  la mijlocul intervalului și să construim dreptunghiul cu baza pe intervalul  $[x_i, x_{i+1}]$  și înălțimea  $f(\xi_i)$ .

Centrul de greutate al dreptunghiului este  $(\xi_i, \frac{1}{2} f(\xi_i))$ , iar aria sa este  $S_i = f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i)$ . Pentru sistemul format din cele  $n$  dreptunghiuri corespunzătoare diviziunii  $d$ , coordonatele centrului de greutate sunt:

$$\bar{x}(d) = \frac{\sum_i \xi_i f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i)}{\sum_i f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i)}, \quad \bar{y}(d) = \frac{\sum_i \frac{1}{2} f^2(\xi_i) (x_{i+1} - x_i)}{\sum_i f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i)}.$$

Observăm că la numitor se află o sumă integrală a funcției  $f(x)$ , iar la numărător se află respectiv sumele integrale ale funcțiilor  $xf(x)$  și  $\frac{1}{2} f^2(x)$ . Dacă luăm un sir  $(d_n)$  de diviziuni cu  $v(d_n) \rightarrow 0$ , sirurile de sume

integrale tind respectiv către integralele  $\int_a^b f(x) dx$ ,  $\int_a^b xf(x) dx$ ,  $\int_a^b \frac{1}{2} f^2(x) dx$ , și deci sirurile  $\bar{x}(d_n)$  și  $\bar{y}(d_n)$  tind respectiv către rapoartele

$$x_G = \frac{\int_a^b xf(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}, \quad y_G = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

Prin definiție  $(x_G, y_G)$  este centrul de greutate al figurii  $abBA$ .

*Exemplu.* Se dă figura mărginită de parabola  $y^2 = x$  și dreapta  $x = 1$  (fig. 125). Se cere centrul său de greutate.

Deoarece figura are axa  $Ox$  ca axă de simetrie, centrul de greutate se află pe această axă, deci  $y_G = 0$ . Rămîne de calculat  $x_G$ . Dacă notăm cu  $S_1$  și  $S_2$  ariile celor două părți ale figurii, separate de axa  $Ox$ , și cu  $x_1, x_2$  abscisele centrelor lor de greutate, avem  $S_1 = S_2, x_1 = x_2$  și

$$x_G = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{x_1 S_1 + x_1 S_1}{S_1 + S_1} = x_1.$$

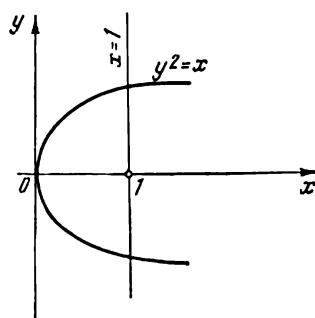


Fig. 124

Dar

$$x_1 = \frac{\int_0^1 x \sqrt{x} dx}{\int_0^1 \sqrt{x} dx};$$

$$\int_0^1 x \sqrt{x} dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5};$$

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3};$$

deci

$$x_G = x_1 = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}.$$

## 7. Lucrul mecanic

Dacă un corp se deplasează rectiliniu, pe distanța  $d$ , sub acțiunea unei forțe constante  $F$ , dirijate de-a lungul direcției de deplasare, lucrul mecanic efectuat de forța  $F$  pe distanța  $d$  este egal cu produsul  $Fd$  dintre forță și deplasare.

Să considerăm acum un mobil care se deplasează de-a lungul axei  $Ox$ , de la  $a$  la  $b$ , sub acțiunea unei forțe  $F(x)$ , dirijată de-a lungul axei  $Ox$ , și care este funcție continuă de  $x$ . Ne propunem să definim și în acest caz lucrul mecanic efectuat de forța  $F(x)$  de la  $a$  la  $b$ .

Să luăm o diviziune  $d$  a intervalului  $[a, b]$

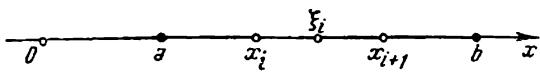


Fig. 125

$$d : a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

În fiecare interval parțial  $[x_i, x_{i+1}]$  să alegem un punct  $\xi_i$  și să considerăm produsul  $F(\xi_i) (x_{i+1} - x_i)$ . Acest produs reprezintă lucrul efectuat pe intervalul  $[x_i, x_{i+1}]$  de o forță constantă, egală cu  $F(\xi_i)$ .

Suma

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

reprezintă lucrul mecanic total efectuat de diferite forțe constante  $F(\xi_i)$  pe intervalele corespunzătoare  $[x_i, x_{i+1}]$ . Suma precedentă este o sumă integrală a funcției  $F(x)$ . Intuitiv, ne dăm seama ușor că luând diviziuni din ce în ce mai fine, cu intervalele parțiale din ce în ce mai mici, variația forței  $F(x)$  într-un asemenea interval parțial este din ce în ce mai mică, iar forța variabilă  $F(x)$  diferă din ce în ce mai puțin, pe un interval parțial  $[x_i, x_{i+1}]$ , de forța constantă  $F(\xi_i)$ . Dar, pe măsură ce luăm diviziuni mai fine, lucrul mecanic

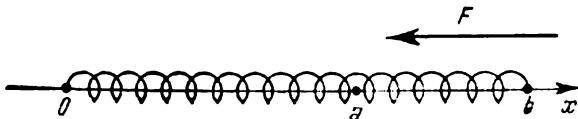
$$\sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

efectuat de forțele constante  $F(\xi_i)$ , se apropiie din ce în ce mai mult de integrala funcției  $f(x)$ :

$$\int_a^b F(x) dx.$$

De aceea, prin definiție, lucrul mecanic  $L$  efectuat de forța  $F(x)$  pe intervalul  $[a, b]$  se definește prin egalitatea

$$L = \int_a^b F(x) dx.$$



*Exemplu.* Un corp este atras de un resort, fixat cu un capăt intr-un punct  $O$ , cu o forță proporțională cu distanța de la poziția corpului la punctul  $O$ . Să se afle lucrul mecanic cind corpul se deplasează de la  $b$  la  $a$  (fig. 126).

Aveam  $F(x) = -kx$ , unde  $k > 0$  este un coeficient de proporționalitate. Am luat forța cu semnul  $-$ , deoarece ea este dirijată în sensul negativ al axei  $Ox$ . Avem:

$$L = \int_b^a F(x) dx = - \int_b^a kx dx = -k \frac{x^2}{2} \Big|_b^a = \frac{k}{2} (b^2 - a^2).$$

Fig. 126

**Capitolul VIII**  
**FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE**

**§ 1. Spațiile  $R^n$**

1. Spațiul cu  $n$  dimensiuni

Notăm cu  $R^n$  produsul cartezian a  $n$  mulțimi egale cu dreapta reală  $R$ , ( $n \in N$ ):

$$R^n = \underbrace{R \times R \times \dots \times R}_{n \text{ ori}}$$

Mulțimea  $R^n$  este formată din toate grupele ordonate posibile de  $n$  numere reale  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Un element al mulțimii  $R^n$  va fi notat cu o singură literă,  $x$ :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

În cazul cînd  $n = 1$ , mulțimea  $R^1$  este dreapta reală  $R$ .

Pentru  $n = 2$ ,  $R^2$  este mulțimea perechilor de numere reale  $(x_1, x_2)$ , sau mulțimea punctelor din plan.

Din această cauză  $R^2$  se numește spațiul cu două dimensiuni. Punctele din planul  $R^2$  vor fi notate adesea  $(x, y)$ , în loc de  $(x_1, x_2)$ . Totdeauna va reieși din text dacă prin  $(x, y)$  se înțelege un punct din plan sau un interval de pe dreaptă.

Pentru  $n = 3$ ,  $R^3$  este mulțimea grupelor ordonate de trei numere reale  $(x_1, x_2, x_3)$ , sau a punctelor din spațiu. Din această cauză  $R^3$  se numește spațiul cu trei dimensiuni. Punctele din spațiu vor fi notate adesea  $(x, y, z)$ , în loc de  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Prin analogie,  $R^n$  se numește spațiul cu  $n$  dimensiuni, iar elementele sale se numesc puncte. Dacă

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

este un punct din  $R^n$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se numesc *coordonatele* sau *proiecțiile* punctului  $x$ ;  $x_1$  este prima coordonată (sau proiecția pe prima axă),  $x_2$  este a doua coordonată (sau proiecția pe a doua axă) etc.

Funcția  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow x_i$ , care face să corespundă fiecărui punct din  $R^n$ , coordonata sa de ordin  $i$ , se numește *proiecția pe axa de ordin  $i$*  și se notează cu  $\text{pr}_i$ :

$$\text{pr}_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1, \text{pr}_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_2, \dots, \text{pr}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n.$$

## 2. Structura de spațiu vectorial pe $R^n$

Pe spațiul  $R^n$  se pot defini o parte din structurile de pe dreaptă și anume structura algebrică și structura topologică. Se poate defini și o structură de ordine, dar nu este utilă pentru studiul care urmează.

Începem cu structura algebrică.

I) *A d u n a r e a.* Fie  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  două puncte din  $R^n$ . Se definește suma  $x + y$  a acestor puncte astfel:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

A aduna punctele  $x$  și  $y$  revine la a le aduna coordonatele de același ordin.

Punctul  $O = (0, 0, \dots, 0)$  care are toate coordonatele nule se numește *originea* spațiului  $R^n$ .

Punctul  $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$  se numește *opusul* punctului  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Se verifică imediat următoarele proprietăți ale adunării:

- 1)  $x + y = y + x$ ;
- 2)  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ;
- 3)  $x + 0 = x$ ;
- 4)  $x + (-x) = 0$ .

Așadar,  $R^n$  este *grup comutativ* pentru această adunare.

II) *Înmulțirea cu scalari.* Pentru orice număr  $\alpha \in R$  și orice punct  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  din  $R^n$  se definește produsul  $\alpha x$  (sau  $x\alpha$ ) astfel:

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

A înmulți pe  $x$  cu  $\alpha$  revine la a înmulți toate coordonatele lui  $x$  cu  $\alpha$ . Se verifică imediat următoarele proprietăți:

- 5)  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ ;
- 6)  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ;
- 7)  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ ;
- 8)  $1 \cdot x = x$ .

Așadar,  $R^n$  este un spațiu vectorial pentru operațiile  $x + y$  și  $\alpha x$ . De aceea punctele  $x^n$  din  $R^n$  se mai numesc și *vectori*, iar coordonatele  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se mai numesc *componentele vectorului*  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Numerele reale  $\alpha$  iau în acest caz numele de *scalari*, iar produsul  $\alpha x$  se numește *produsul cu scalari*.

III) Înmulțirea vectorilor. Fie  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  două puncte din  $R^n$ . Se definește produsul  $xy$  al acestor puncte astfel:

$$xy = (x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n).$$

A înmulții punctele  $x$  și  $y$  revine la a le înmulții coordonatele de același ordin.

Punctul  $e = (1, 1, \dots, 1)$  este element neutru pentru înmulțire. Dacă  $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, \dots, x_n \neq 0$ , atunci punctul  $y = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)$  este inversul punctului  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Se verifică imediat următoarele proprietăți:

$$9) \quad x(yz) = (xy)z;$$

$$10) \quad xy = yx;$$

$$11) \quad x(y + z) = xy + xz;$$

$$12) \quad \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

Așadar  $R^n$  este o algebră pentru operațiile  $x + y$ ,  $\alpha x$  și  $xy$ .

În cele ce urmează va interesa mai mult structura de spațiu vectorial pe  $R^n$  și mai puțin cea de algebră.

Pentru exemplificare, să arătăm la ce revine adunarea, înmulțirea și înmulțirea cu scalari în cazul spațiilor  $R^1$  și  $R^2$ .

În spațiu  $R^1 = R$ , elementele sunt numere. Adunarea  $x + y$  și înmulțirea  $xy$  se reduc la adunarea și înmulțirea obișnuită a numerelor  $x$  și  $y$ , iar produsul cu scalari  $\alpha x$  se reduce, de asemenea, la înmulțirea obișnuită a numerelor  $\alpha$  și  $x$ .

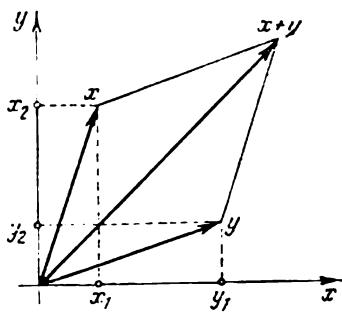


Fig. 127

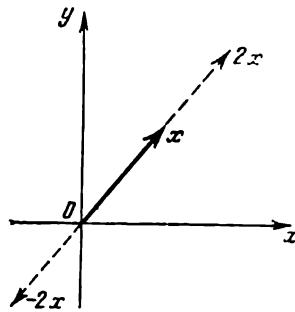


Fig. 128

Dacă  $x = (x_1, x_2)$  și  $y = (y_1, y_2)$  sunt două puncte din  $R^2$ , punctul  $x + y$  este al patrulea vîrf al paralelogramului cu celelalte trei vîrsuri în  $O$ ,  $x$  și  $y$ .

Dacă se identifică punctul  $x$  cu vectorul său de poziție  $\vec{x}$ , coordonatele  $x_1$  și  $x_2$  ale punctului  $x$  sunt componentele vectorului  $\vec{x}$ . Această identificare justifică denumirea de vectori dată punctelor  $x$ .

Adunarea punctelor din plan se face deci după regula paralelogramului, de adunare a forțelor sau a vectorilor, așa cum se definește în fizică.

Inmulțirea cu scalari  $\alpha x$  revine la amplificarea cu  $|\alpha|$  a lungimii vectorului, păstrând sensul vectorului dacă  $\alpha > 0$  sau schimbându-i sensul dacă  $\alpha < 0$ .

Vectorii  $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$  formează o bază în spațiul  $R^n$ ; aceasta înseamnă că, dacă  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  este un punct din  $R^n$ , atunci

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Așadar, orice vector  $x$  este o combinație liniară a vectorilor din bază, coeficienții combinației liniare fiind coordonatele lui  $x$ .

În spațiul  $R^3$ , vectorii din bază  $e_1, e_2, e_3$  se mai notează respectiv  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Un vector  $(x, y, z)$  se scrie atunci  $x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ .

### 3. Produsul scalar

În afară de operațiile  $x + y$  și  $\alpha x$  al căror rezultat este un *vector* din  $R^n$ , se mai definește o operăriune între vectori din  $R^n$ , al cărui rezultat este însă un număr (scalar); de aceea, această operăriune se numește *produs scalar*.

Fie  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  două puncte din  $R^n$ . Se definește *produsul scalar* dintre  $x$  și  $y$  ca fiind *numărul*, notat  $(x|y)$ , dat de egalitatea

$$(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Produsul scalar  $(x|y)$  este deci suma produselor coordonatelor de același ordin ale vectorilor  $x$  și  $y$ .

Produsul scalar se mai notează, adesea, cu  $\langle x, y \rangle$  sau  $\vec{x} \cdot \vec{y}$ .

**Observații.** 1° În spațiul  $R^1$ , produsul scalar coincide cu produsul obișnuit:  $(x|y) = xy$ .

2° În spațiul  $R^2$  și  $R^3$ , produsul scalar  $(x|y)$  coincide cu produsul scalar definit în fizică, și anume produsul lungimilor vectorilor cu cosinusul unghiului format de cei doi vectori.

Produsul scalar al vectorului  $x$  cu el însuși este

$$(x|x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Se observă că  $(x | x) \geq 0$ . Avem  $(0 | 0) = 0$ ; reciproc, dacă  $(x | x) = 0$ , atunci  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ , deci  $x_i = 0$  pentru  $i = 1, 2, \dots, n$ , adică  $x = (0, 0, \dots, 0)$ .

Proprietățile produsului scalar sunt următoarele:

- 1)  $(x | x) \geq 0$ ;  $(x | x) = 0$  dacă și numai dacă  $x = 0$ ;
- 2)  $(x | y) = (y | x)$ ;
- 3)  $(x + y | z) = (x | z) + (y | z)$ ;
- 4)  $\alpha(x | y) = (\alpha x | y) = (x | \alpha y)$ ;
- 5)  $(zx | y) = (x | zy)$ .

Se deduce, de asemenea, că  $(0 | x) = (0 | x) = 0$ , deoarece

$$(0 | x) = (0 + 0 | x) = (0 | x) + (0 | x).$$

*Exemplu.*  $(e_1 | e_1) = 1$ ,  $(e_2 | e_2) = 1, \dots, (e_n | e_n) = 1$ ;  $(e_1 | e_2) = 0$ ;  $(e_1 | e_3) = 0$ ;  $(e_2 | e_3) = 0, \dots, (e_i | e_j) = 0$  dacă  $i \neq j$ .

Dacă folosim simbolul lui Kronecker,  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j. \end{cases}$

atunci

$$(e_i | e_j) = \delta_{ij}.$$

Se spune că doi vectori  $x$  și  $y$  din  $R^n$  sunt *ortogonali* dacă produsul lor scalar este zero:  $(x | y) = 0$ . Astfel, dacă  $i \neq j$ , vectorii  $e_i$  și  $e_j$  sunt ortogonali (vectorii din bază sunt ortogonali doi căte doi).

#### 4. Norma în spațiul $R^n$

Pe dreaptă s-a definit distanța  $|x - y|$  între două puncte  $x$  și  $y$ , cu ajutorul modulului.

În spațiul  $R^n$  se definește *norma* unui vector  $x$ , notată  $\|x\|$ , cu ajutorul căreia se definește apoi distanța dintre două puncte din  $R^n$ .

Norma  $\|x\|$  a unui vector  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  este numărul dat de egalitățile

$$\|x\| = \sqrt{(x | x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Rezultă că:

$$\|x\|^2 = (x | x) = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Așadar, norma  $\|x\|$  se definește cu ajutorul produsului scalar.

Pentru vectorii din bază avem  $\|e_1\| = 1$ ,  $\|e_2\| = 1$ , ...,  $\|e_n\| = 1$ .

În particular,  $\|\vec{i}\| = 1$ ,  $\|\vec{j}\| = 1$ ,  $\|\vec{k}\| = 1$ .

Proprietățile normei sunt asemănătoare cu cele ale modulului:

- 1)  $\|x\| \geq 0$ ;  $\|x\| = 0$  dacă și numai dacă  $x = 0$ .
- 2)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ .
- 3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inegalitatea triunghiului).
- 4)  $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ .

Din aceste proprietăți rezultă încă următoarele proprietăți:

- 5)  $\|-x\| = \|x\|$ .
- 6)  $\|x - y\| \leq \|x + y\|$ .
- 7)  $\|x\| - \|y\| \leq \|x \pm y\|$ .

Primele două proprietăți se deduc imediat din definiția normei și proprietățile produsului scalar.

De exemplu, proprietatea 2 se demonstrează astfel:

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x | \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2(x | x)} = |\alpha| \sqrt{(x | x)} = |\alpha| \|x\|.$$

Luând apoi  $\alpha = -1$ , obținem proprietatea 5. Proprietățile 6 și 7 se deduc din proprietatea 3 la fel ca și proprietățile corespunzătoare ale modulului. Proprietatea 4 se demonstrează astfel:

$$\|xy\|^2 = (xy | xy) = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n x_i^2 y_j^2 = (\Sigma x_i^2)(\Sigma y_j^2) = \|x\|^2 \|y\|^2,$$

de unde  $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ . Rămîne de demonstrat numai proprietatea 3. Pentru aceasta vom demonstra mai întîi două inegalități.

$$1) |(x | y)| \leq \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{\|y\|^2}{2}.$$

Pentru demonstrație se folosește următoarea inegalitate dintre numere

$$|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

(deoarece  $0 \leq (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 + 2|ab|$ ).

Atunci :

$$\begin{aligned} |(x | y)| &= \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i^2}{2} + \frac{y_i^2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2 = \frac{1}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2} \|y\|^2, \end{aligned}$$

de unde rezultă inegalitatea 1.

Să observăm că, dacă  $x \neq 0$ , atunci, în baza proprietății 2,

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} x \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1.$$

O altă inegalitate de care avem nevoie este

2) *Inegalitatea lui Schwarz*:  $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$ .

Dacă  $\|x\| \|y\| = 0$ , atunci sau  $\|x\| = 0$ , deci  $x = 0$ , sau  $\|y\| = 0$ , deci  $y = 0$ . În ambele cazuri avem  $(x|y) = 0$ , deci inegalitatea lui Schwarz este verificată cu egalitate.

Să presupunem acum că  $\|x\| \|y\| \neq 0$ ; atunci  $\|x\| \neq 0$  și  $\|y\| \neq 0$  deci

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1 \text{ și } \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| = 1.$$

Să aplicăm inegalitatea 1 vectorilor

$$x' = \frac{x}{\|x\|} \text{ și } y' = \frac{y}{\|y\|}$$

ținând seama de faptul că  $\|x'\| = 1$  și  $\|y'\| = 1$ :

$$|(x'|y')| \leq \frac{\|x'\|^2}{2} + \frac{\|y'\|^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

adică

$$\left( \frac{x}{\|x\|} \middle| \frac{y}{\|y\|} \right) \leq 1.$$

Înmulțind ambii membri cu  $\|x\| \|y\|$  se obține inegalitatea lui Schwarz.

Putem acum trece la demonstrarea inegalității triunghiului:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y|x+y) = (x|x) + (y|y) + 2(x|y) \leq \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x|y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

de unde

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

**Observații.** 1° În spațiul  $R^1 = R$ , norma  $\|x\|$  a unui număr  $x$  este egală cu modului său  $|x|$ :

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

2 În planul  $R^2$  avem

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Norma  $\|x\|$  reprezintă distanța de la origine la punctul  $x$ . Inegalitatea triunghiului exprimă în acest caz faptul că într-un triunghi o latură este mai mică decât suma celorlalte două laturi.

De asemenea, în spațiul  $R^3$  norma  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  reprezintă distanța de la origine la punctul  $x$  (lungimea vectorului de poziție al punctului  $x$ ).

3° Un spațiu vectorial  $E$  pe care s-a definit o normă  $\|x\|$  cu proprietățile 1, 2 și 3 se numește *spațiu vectorial normat* sau *spațiu normat*. Dacă, în plus,  $E$  este o algebră, iar norma verifică și condiția 4, atunci  $E$  se numește *algebră normată*.

Așadar  $R^n$  este un *spațiu normat* și chiar o *algebră normată*.

Pentru spațiul  $R^n$  se pot defini și alte norme, de exemplu

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

sau

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Cind vrem să facem distincție, norma definită mai înainte se notează  $\|x\|_2$ :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

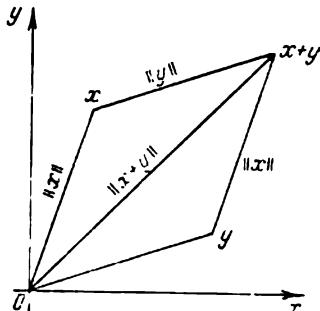


Fig. 129

Se poate arăta că  $\|x\|_1$  și  $\|x\|_\infty$  verifică proprietățile 1, 2 și 3 ale normei.

Cele trei norme sunt *diferite* și definesc, pe același spațiu vectorial  $R^n$ , spații normate diferite.

În continuare, cind va fi vorba de spațiu normat  $R^n$ , se va subînțelege că ne referim la norma  $\|x\|_2$ .

Din punct de vedere topologic, cele trei norme sunt însă echivalente, în sensul că definesc aceeași topologie pe  $R^n$ . Mai precis, convergența, mulțimile deschise, mulțimile închise etc. sunt aceleași, oricare ar fi norma folosită.

4° Norma  $\|x\|_2$  a fost dedusă din produsul scalar  $\|x\|_2 = \sqrt{(x|x)}$ . Normele  $\|x\|_1$  și  $\|x\|_\infty$  nu se pot însă deduce dintr-un produs scalar.

## 5. Distanță în $R^n$

Cu ajutorul normei se poate defini în  $R^n$  distanța dintre două puncte la fel cum s-a definit în  $R^1$  distanța cu ajutorul modulului.

Prin definiție, distanța  $d(x, y)$  dintre două puncte  $x$  și  $y$  din  $R^n$  este dată de egalitatea

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Proprietățile distanței se deduc imediat din proprietățile normei:

1)  $d(x, y) \geq 0$ ;  $d(x, y) = 0$  dacă și numai dacă  $x = y$ ;

2)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;

3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (inegalitatea triunghiului).

Să demonstrăm ultima proprietate:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|y - z\| = \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Observații. 1° Dacă pe o mulțime  $E$  s-a definit o funcție reală  $(x, y) \rightarrow d(x, y)$ ,  $(x, y \in E)$ , cu proprietățile 1, 2 și 3 de mai sus, această funcție se numește *metrică* sau *distanță*, iar  $E$  se numește *spațiu metric*.

Pe un spațiu normat se poate defini o distanță cu ajutorul normei,  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Un spațiu normat este deci și un spațiu vectorial metric.

Există însă spații vectoriale metrice, în care distanța nu poate fi dedusă dintr-o normă.

2° Pe spațiul  $R^n$ , normele  $\|x\|_1$ ,  $\|x\|_2$  și  $\|x\|_\infty$  definesc distanțe *diferite*. În continuare vom considera pe  $R^n$  numai distanța definită de norma  $\|x\|_2$ .

3° Pe dreapta reală, unde norma este egală cu modulul, avem  $d(x, y) = |x - y|$ , deci distanța definită mai sus este aceeași cu distanța obișnuită.

În planul  $R^2$  avem

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

deci aceasta este distanța obișnuită între două puncte din plan.

## § 2. Topologia în $R^n$

### 1. Vecinătățile unui punct din $R^n$

Fie  $n$  intervale pe o dreaptă,  $I_1, I_2, \dots, I_n$ . Produsul lor cartezian  $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \subset R^n$  se numește *interval n-dimensional*:

$$I = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in I_1, x_2 \in I_2, \dots, x_n \in I_n\}.$$

Intervalurile  $I_1, I_2, \dots, I_n$  se numesc *laturile* intervalului  $n$ -dimensional. Avem

$$\text{pr}_1 I = I_1, \text{pr}_2 I = I_2, \dots, \text{pr}_n I = I_n.$$

Laturile unui interval  $n$ -dimensional pot fi închise la un capăt sau la ambele capete, mărginite sau nemărginite.

În planul  $R^2$ , un interval bidimensional cu laturile mărginite este un dreptunghi.

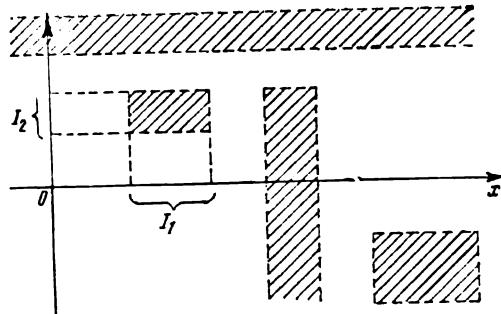


Fig. 130

În spațiul  $R^3$ , un interval tridimensional cu laturile mărginite este un paralelipiped.

Dacă toate intervalele  $I_1, I_2, \dots, I_n$  sunt deschise, atunci  $I$  se numește interval  $n$ -dimensional deschis (fig. 131).

Dacă toate intervalele

$I_1, I_2, \dots, I_n$  sunt închise, atunci  $I$  se numește interval  $n$ -dimensional închis (fig. 132).

Dacă toate intervalele  $I_1, I_2, \dots, I_n$  sunt mărginite, atunci  $I$  se numește interval  $n$ -dimensional mărginit (fig. 133).

În continuare, prin interval  $n$ -dimensional vom înțelege interval  $n$ -dimensional deschis și mărginit, afară de cazul cînd se va specifica în mod expres contrariul.

Fie acum  $a$  un punct din spațiul  $R^n$  și  $r > 0$  un număr.

Vom numi sferă (deschisă), cu centrul în  $a$  și raza  $r$ , mulțimea

$$V_r(a) = \{x \mid x \in R^n,$$

$$\|x - a\| < r\},$$

formată din toate punctele  $x \in R^n$  — a căror distanță la  $a$  este  $< r$ .

În cazul spațiului  $R^1 = R$ , o sferă  $V_r(a)$  este un interval  $(a - r, a + r)$  cu centrul în  $a$ .

În cazul spațiului  $R^2$  o sferă  $V_r(a)$  este un cerc cu centrul în  $a$  și raza  $r$  (punctele din interiorul cercului, fără punctele de pe circumferință).

În cazul spațiului  $R^3$ , o sferă  $V_r(a)$  este o sferă cu centrul în  $a$  și raza  $r$  (punctele din interiorul sferei, fără punctele de pe suprafața sferei).

Mulțimea

$$W_r(a) = \{x \mid x \in R^n, \|x - a\| \leq r\}$$

se numește sferă închisă cu centrul în  $a$  și raza  $r$ .

În continuare, cînd va fi vorba despre sfere, se va subînțelege că sunt sfere deschise.

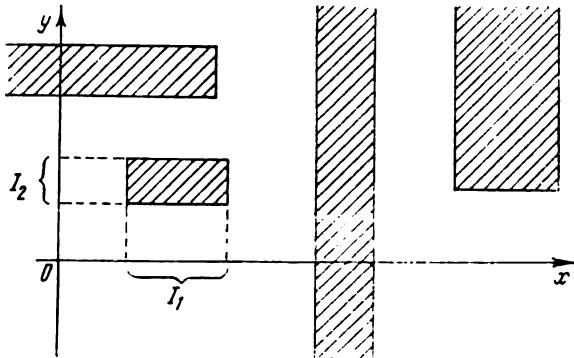


Fig. 131

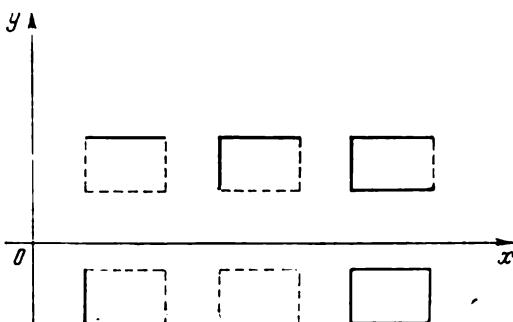


Fig. 132

**Propoziție.** Orice sferă cu centrul în  $a$  conține un interval  $n$ -dimensional care conține pe  $a$  și, reciproc, orice asemenea interval conține o sferă cu centrul în  $a$ .

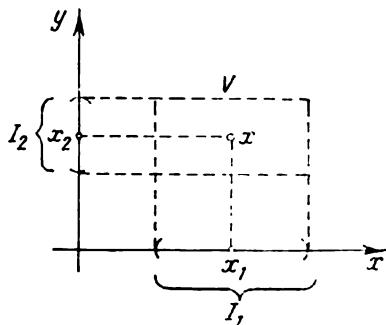


Fig. 133

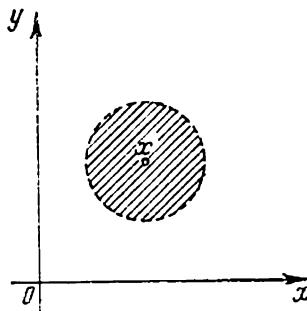


Fig. 134

Fie  $V_r(a)$  o sferă cu centrul în  $a$  și cu raza  $r$ ; avem:  $x \in V_r(a)$  dacă și numai dacă  $\|x - a\| < r$  sau

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - a_i|^2} < r,$$

unde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Să considerăm acum intervalele unidimensionale:

$$I_1 = \left( a_1 - \frac{r}{\sqrt{n}}, a_1 + \frac{r}{\sqrt{n}} \right), \dots, I_n = \left( a_n - \frac{r}{\sqrt{n}}, a_n + \frac{r}{\sqrt{n}} \right);$$

fie  $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ . Evident,  $a_1 \in I_1, \dots, a_n \in I_n$ , deci  $a \in I$ . Să arătăm că  $I \subset V_r(a)$ . Fie  $x \in I$  oarecare. Aceasta înseamnă că  $x_i \in I_i$  sau  $|x_i - a_i| < \frac{r}{\sqrt{n}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Atunci  $|x_i - a_i|^2 < \frac{r^2}{n}$ , deci

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2} < \sqrt{n \frac{r^2}{n}} = r,$$

adică  $\|x - a\| < r$ , sau  $x \in V_r(a)$ . Așadar,  $I \subset V_r(a)$ . Reciproc, fie  $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$  un interval  $n$ -dimensional care conține pe  $a$ ; intervalul  $I$  conține un interval  $J = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n$  cu centrul în  $a$ , și cu intervalele  $J_1, \dots, J_n$  de aceeași lungime:

$$J_1 = (a_1 - r, a_1 + r) \subset I_1, \dots, J_n = (a_n - r, a_n + r) \subset I_n.$$

Să arătăm că  $V_r(a) \subset J$ , de unde va rezulta că  $V_r(a) \subset I$ .

Într-adevăr, dacă  $x \in V_r(a)$ , atunci  $\|x - a\| < r$  sau

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2} < r,$$

deci  $\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 < r^2$  și atunci, cu atât mai mult  $|x_i - a_i|^2 < r^2$  sau

$$|x_i - a_i| < r, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

adică  $x_1 \in J_1, x_2 \in J_2, \dots, x_n \in J_n$ , de unde  $x \in J$ . Așadar,  $V_r(a) \subset J \subset I$ .

**Definiție.** Se numește vecinătate a unui punct  $a \in R^n$ , orice mulțime care conține o sferă  $V_r(a)$  cu centrul în  $a$ .

Evident, orice sferă cu centrul în  $a$  este o vecinătate a lui  $a$ . Din propoziția precedentă deducem că orice interval  $n$ -dimensional care conține pe  $a$  este o vecinătate a lui  $a$ . Mai mult, din propoziția precedentă rezultă imediat următoarea

**Propozitie.** O mulțime  $V$  este vecinătate a unui punct  $a \in R^n$ , dacă și numai dacă există un interval  $n$ -dimensional  $I$ , astfel că  $a \in I \subset V$ .

Vecinătățile unui punct  $a \in R^n$  au aceleași proprietăți ca și vecinătățile unui punct de pe dreapta.

**Observație.** Cu ajutorul normalor  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  și  $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$  se pot defini de asemenea „sferele”

$$V_r^1(a) = \{x | x \in R, \|x - a\|_1 < r\} \text{ și}$$

$$V_r^\infty(a) = \{x | x \in R, \|x - a\|_\infty < r\}.$$

Fiecare din acestea definește aceeași topologie pe  $R^n$  ca și vecinătățile precedente.

În plan,  $V_r^1(a)$  este un pătrat cu centrul în  $a$ , cu diagonala  $2r$  și laturile paralele cu bisectoarele axelor de coordinate. Ar putea fi numită vecinătate rombică.

Tot în plan,  $V_r^\infty(a)$  este un pătrat cu centrul în  $a$  și latura  $2r$ , cu laturile paralele cu axe. Se numește vecinătate pătratică.

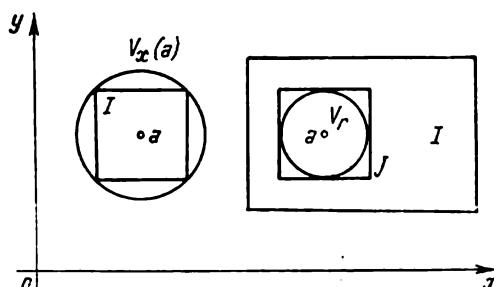


Fig. 135

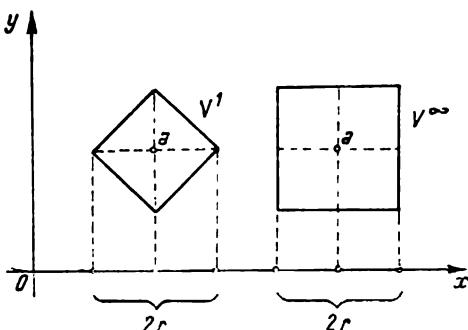


Fig. 136

## 2. Mulțimi deschise

O dată definite vecinătățile unui punct în spațiul  $R^n$ , toate considerațiile relative la mulțimile de pe dreaptă se transpun fără nici o modificare la mulțimi din  $R^n$ . Demonstrațiile relative la mulțimile de pe dreaptă, în care intervine modulul  $|x|$ , se transpun de asemenea în spațiul  $R^n$ , înlocuind modulul  $|x|$  cu norma  $\|x\|$  (adică folosind vecinătățile sferice).

Fie  $A$  o submulțime a spațiului  $R^n$  și un punct  $a \in A$ .

Vom spune că  $a$  este *punct interior al lui A*, dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $a$ , conținută în  $A$ ,

$$a \in V \subset A,$$

adică dacă  $A$  este ea însăși o vecinătate a lui  $a$ .

Mulțimea punctelor interioare ale lui  $A$  se numește *interiorul* lui  $A$  și se notează  $\text{Int } A$  sau  $A^\circ$ . Evident,  $A^\circ \subset A$ .

O mulțime este *deschisă* dacă este formată numai din puncte interioare, adică dacă este egală cu interiorul său,  $A = \text{Int } A$ . Așadar, o mulțime este deschisă dacă și numai dacă este vecinătatea fiecărui punct al său.

*Exemplu* de mulțimi deschise: sferele (deschise), intervalele deschise  $n$ -dimensionale, mulțimea vidă  $\emptyset$ , spațiul total  $R^n$ .

Se demonstrează ca și pentru mulțimile deschise de pe dreaptă că:

- 1) Reuniunea unei familii oarecare de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.
- 2) Intersecția unei familii *finite* de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

**Propozitie.** Proiecțiile unei mulțimi deschise  $G \subset R^n$  sunt mulțimi deschise pe dreaptă.

Fie  $G_1 = \text{pr}_1 G$ . Să arătăm că  $G_1$  este formată numai de puncte interioare, de unde va rezulta că  $G_1$  este deschisă. Fie  $x_1 \in G_1$  oarecare. Există un punct  $x \in G$  astfel ca  $x_1 = \text{pr}_1 x$ . Dar  $G$  este deschisă, deci  $x$  este punct interior al său. Există un interval  $n$ -dimensional  $I$  a lui  $x$ , astfel ca  $x \in I \subset G$ . Trecind la proiecții, obținem  $\text{pr}_1 x \in \text{pr}_1 I \subset \text{pr}_1 G$ , adică, notind  $I_1 = \text{pr}_1 I$ , avem  $x_1 \in I_1 \subset G_1$  și  $I_1$  este un interval deschis, deci  $x_1$  este un punct interior al lui  $G_1$ .

Pentru celelalte proiecții, demonstrația se face la fel.

## 3. Mulțimi închise. Frontieră

Un punct  $a \in R^n$  este *aderent* mulțimii  $A$ , dacă orice vecinătate  $V$  a lui  $a$  conține cel puțin un punct  $x \in A$ , adică dacă

$$V \cap A \neq \emptyset.$$

Dacă  $a \in A$ , atunci  $a$  este punct aderent al lui  $A$ , pentru că, oricare ar fi vecinătatea  $V$  a lui  $a$ , avem  $a \in V \cap A$  (eventual putem avea  $V \cap A = \{a\}$ ).

Pot exista însă puncte aderente mulțimii  $A$ , fără să aparțină lui  $A$ .

Mulțimea punctelor aderente lui  $A$  se numește *aderența lui A*, sau *închiderea lui A* și se notează  $\bar{A}$ .

Evident,  $A \subset \bar{A}$ .

O mulțime  $A$  este *închisă* dacă este egală cu înnchiderea sa,  $A = \bar{A}$ .

Se demonstrează ca și pe dreaptă că o mulțime  $A$  este închisă, dacă și numai dacă complementara sa  $\complement A$  este deschisă.

*Exemple de mulțimi închise:* sferele închise  $W_r(a)$ , intervalele închise  $n$ -dimensionale,  $R^n$ ,  $\mathbb{O}$ , mulțimile finite.

De asemenea, se demonstrează ca și pentru mulțimile închise de pe dreaptă că :

1) Reuniunea unei familii finite de mulțimi închise este o mulțime închisă.

2) Intersecția unei familii oarecare de mulțimi închise este o mulțime închisă.

Un punct  $a \in R$  este *punct frontieră* al lui  $A$ , dacă este aderent atât lui  $A$ , cît și lui  $\complement A$ , adică dacă orice vecinătate  $V$  a lui  $a$  conține și puncte din  $A$  și puncte din  $\complement A$ ,  $V \cap A \neq \emptyset$ ,  $V \cap \complement A \neq \emptyset$ .

Mulțimea punctelor frontieră ale lui  $A$  se numește *frontiera* lui  $A$  și se notează  $\text{Fr } A$ .

Avem  $\text{Fr } A = \text{Fr } \complement A$  și  $\text{Fr } A = \bar{A} - \text{Int } A$ .

#### 4. Puncte de acumulare

Un punct  $a \in R^n$  este *punct de acumulare* pentru mulțimea  $A$ , dacă orice vecinătate  $V$  a lui  $a$  conține cel puțin un punct  $x \neq a$  din  $A$ . Un punct de acumulare al lui  $A$  poate să aparțină lui  $A$ , sau să nu-i aparțină.

Rezultă că orice punct de acumulare al lui  $A$  este în același timp punct aderent al lui  $A$ , deci mulțimea punctelor de acumulare ale lui  $A$  este conținută în înnchiderea  $\bar{A}$  al lui  $A$ .

Un punct  $a$  aderent lui  $A$  ( $a \in \bar{A}$ ), care nu aparține lui  $A$ , ( $a \notin A$ ), este în mod necesar punct de acumulare al lui  $A$ .

Punctele lui  $A$  nu sunt în mod necesar puncte de acumulare ale lui  $A$ . Punctele lui  $A$  care nu sunt de acumulare se numesc puncte *izolate*. Așadar, un punct  $b \in A$  este punct izolat, dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $b$ , care nu mai conține nici un alt punct din  $A$ , afară de  $b$ :

$$V \cap A = \{b\}.$$

Se demonstrează, ca și pe dreaptă, că  $a$  este punct de acumulare al lui  $A$ , dacă și numai dacă, orice vecinătate a lui  $a$  conține o infinitate de puncte din  $A$  (adică mulțimea  $V \cap A$  este infinită). Rezultă că o mulțime finită nu are nici un punct de acumulare.

O mulțime  $A$  este închisă dacă și numai dacă își conține toate punctele sale de acumulare.

## 5. Mulțimi mărginite. Mulțimi compacte.

### Mulțimi conexe

Se spune că o mulțime  $A \subset R^n$  este *mărginită*, dacă există o sferă, pe care-o putem presupune cu centrul în origine, care conține mulțimea  $A$ . Aceasta înseamnă că există un număr  $M$  astfel încât pentru orice  $x \in A$  să avem  $\|x\| \leq M$ .

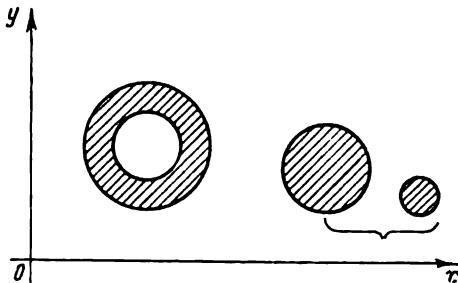


Fig. 137

A spune că mulțimea  $A$  este mărginită înseamnă, de asemenea, că  $\sup_{x \in A} \|x\| < +\infty$ .

**O b s e r v a t i e.** Deoarece în spațiul  $R^n$  nu mai avem o relație de ordine, nu se mai pot defini mulțimi majorate sau minorate, și nici marginile unei mulțimi.

Mulțimile închise și mărginite din  $R^n$  se numesc *mulțimi compacte*.

Orice mulțime finită este închisă și mărginită, deci este compactă.

Orice sferă închisă și orice interval  $n$ -dimensional închis și mărginit sint mulțimi compacte.

Sferele deschise și intervalele deschise  $n$ -dimensionale nu sint compacte.

O mulțime  $A \subset R$  este *conexă*, dacă nu există nici o pereche de mulțimi deschise  $G_1$  și  $G_2$  astfel ca:

$$A \subset G_1 \cup G_2, A \cap G_1 \neq \emptyset, A \cap G_2 = \emptyset \text{ și } (A \cap G_1) \cap (A \cap G_2) = \emptyset.$$

În limbajul obișnuit, a spune că mulțimea  $A$  este conexă revine la aceea că „este formată dintr-o singură bucată”.

Sferele și intervalele  $n$ -dimensionale sint conexe.

În plan, o coroană circulară este conexă.

O reuniune de două cercuri închise și disjuncte nu este conexă.

O mulțime deschisă și conexă se numește *domeniu*.

## § 3. Siruri de puncte din spațiul $R^n$

### I. Siruri convergente. Proprietăți

O funcție  $f: N \rightarrow R^n$  definită pe mulțimea  $N$  a numerelor naturale, cu valori în  $R^n$ , se numește *sir de puncte din spațiul  $R^n$* .

Vom nota un sir de puncte din  $R^n$ , ca de obicei

$$x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$$

sau, prescurtat:  $(x_k)_{k \in N}$  sau, mai simplu,  $(x_k)$ .

Șirurile convergente de puncte din  $R^n$  se definesc la fel ca șirurile convergente de numere.

**D e f i n i t i e.** Un punct  $x_0 \in R^n$  este limita unui șir  $(x_k)$  de puncte din  $R^n$ , dacă în afara fiecărei vecinătăți a lui  $x_0$  se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului. Se serie  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$  sau  $x_k \rightarrow x_0$ .

Dacă  $V_\varepsilon(x_0)$  este o vecinătate a lui  $x_0$ , atunci relația  $x_k \in V_\varepsilon(x_0)$  este echivalentă cu  $\|x_k - x_0\| < \varepsilon$ .

Obținem astfel o definiție echivalentă a limitei unui șir de puncte din  $R^n$ , dată de :

**P r o p o z i t i a 1.** Un punct  $x_0 \in R^n$  este limita unui șir  $(x_k)$  de puncte din  $R^n$ , dacă și numai dacă, pentru orice număr  $\varepsilon > 0$  există un număr  $N(\varepsilon)$ , astfel încât oricare ar fi  $k \geq N(\varepsilon)$  să avem  $\|x_k - x_0\| < \varepsilon$ .

Din propoziția următoare rezultă o definiție echivalentă cu cea de mai sus, în care se folosește convergența șirului normelor, care este un șir de numere.

**P r o p o z i t i a 2.**  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$  dacă și numai dacă  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x_0\| = 0$ .

Demonstrația rezultă imediat din propoziția 1.

Șirurile care au limită se numesc *șiruri convergente*.

Toate proprietățile șirurilor convergente de numere, în care nu intervine relația de ordine, se păstrează și pentru șirurile convergente de puncte din spațiul  $R^n$  și demonstrațiile sunt aceleași sau se deduc, mai simplu, din proprietățile corespunzătoare ale șirurilor de numere :

1) *Limita unui șir convergent este unică.*

Să presupunem, prin absurd, că  $x_k \rightarrow x_0$  și  $x_k \rightarrow x'_0$ , iar  $x_0 \neq x'_0$ . Aceasta înseamnă că  $\|x_k - x_0\| \rightarrow 0$  și  $\|x_k - x'_0\| \rightarrow 0$ .

Atunci

$$\|x_0 - x'_0\| = \|x_0 - x_k + x_k - x'_0\| \leq \|x_0 - x_k\| + \|x_k - x'_0\| \rightarrow 0$$

și pe baza criteriului de convergență de la șirurile de numere rezultă că  $\|x_0 - x'_0\| = 0$ , adică  $x_0 = x'_0$ , ceea ce contrazice presupunerea că  $x_0 \neq x'_0$ .

2) *Criteriu de convergență. Fie  $(\alpha_k)$  un șir de numere. Dacă*

$$\|x_k - x_0\| \leq \alpha_k, \quad k \in N \text{ și } \alpha_k \rightarrow 0, \text{ atunci } x_k \rightarrow x_0.$$

Într-adevăr, pe baza criteriului de convergență de la șirurile de numere, rezultă că  $\|x_k - x_0\| \rightarrow 0$ , deci  $x_k \rightarrow x_0$ .

3) *Dacă  $x_k \rightarrow x_0$ , atunci  $\|x_k\| \rightarrow \|x_0\|$ :*

$$\|\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|.$$

Demonstrația rezultă din inegalitatea

$$||x_k - x_0|| \leq ||x_k - x_0|| + ||x_0||$$

folosind criteriul precedent.

**O b s e r v a t i e.** Dacă  $||x_k|| \rightarrow ||x_0||$ , nu rezultă că sirul  $(x_k)$  este convergent.

Dacă însă  $||x_k|| \rightarrow 0$ , atunci  $x_k \rightarrow 0$ .

\* 4) Orice sir convergent  $(x_k)$  de puncte din  $R^n$  este mărginit, adică există un număr  $M$  astfel ca  $||x_k|| \leq M$ , oricare ar fi  $k \in N$ .

Într-adevăr, dacă  $x_k \rightarrow x_0$ , atunci  $||x_k|| \rightarrow ||x_0||$ .

Așadar, sirul de numere  $(||x_k||)$  este convergent, deci este mărginit: există atunci un număr  $M > 0$ , astfel ca  $||x_k|| \leq M$ , oricare ar fi  $k \in N$ .

**O b s e r v a t i e.** A spune că un sir  $(x_k)$  de puncte din  $R^n$  este mărginit, revine la a spune că sirul de numere format cu normele  $(||x_k||)$  este mărginit.

Dacă sirul  $(x_k)$  este mărginit, nu rezultă că este convergent.

5) Dacă  $x_k \rightarrow x_0$  și  $y_k \rightarrow y_0$ , atunci  $x_k + y_k \rightarrow x_0 + y_0$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k + y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k + \lim_{k \rightarrow \infty} y_k.$$

Într-adevăr

$$||(x_k + y_k) - (x_0 + y_0)|| = ||(x_k - x_0) + (y_k - y_0)|| \leq ||x_k - x_0|| + ||y_k - y_0||.$$

Prin ipoteză,  $||x_k - x_0|| \rightarrow 0$  și  $||y_k - y_0|| \rightarrow 0$ , deci  $||x_k - x_0|| + ||y_k - y_0|| \rightarrow 0$ . Pe baza criteriului de convergență deducem atunci că  $x_k + y_k \rightarrow x_0 + y_0$ .

Proprietatea este adevărată și pentru suma mai multor siruri convergente.

6) Dacă  $x_k \rightarrow x_0$  și  $y_k \rightarrow y_0$ , atunci  $x_k y_k \rightarrow x_0 y_0$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$$

Într-adevăr,

$$||x_i y_i - x_j y_j|| = ||x_i(y_i - y_j) + (x_i - x_j)y_j|| \leq ||x_i|| ||y_i - y_j|| + ||x_i - x_j|| ||y_j|| \rightarrow 0.$$

7) Dacă  $x_k \rightarrow x_0$  și  $y_k \rightarrow y_0$ , atunci  $(x_k | y_k) \rightarrow (x_0 | y_0)$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k | y_k) = (\lim_{k \rightarrow \infty} x_k | \lim_{k \rightarrow \infty} y_k) = \sum_{i=1}^m \lim_{k \rightarrow \infty} x_{ik} \lim_{k \rightarrow \infty} y_{ik}$$

8) Dacă  $x_k \rightarrow x_0$  și  $\alpha_k \rightarrow \alpha_0$ , ( $\alpha_k, \alpha_0 \in R$ ), atunci  $\alpha_k x_k \rightarrow \alpha_0 x_0$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} x_k.$$

Într-adevăr,

$$||\alpha_k x_k - \alpha_0 x_0|| = ||\alpha_k(x_k - x_0) + (\alpha_k - \alpha_0)x_0|| \leq |\alpha_k| ||x_k - x_0|| + |\alpha_k - \alpha_0| ||x_0|| \rightarrow 0.$$

În particular, luând  $\alpha_k = \alpha$  pentru orice  $k$ , rezultă că dacă  $x_k \rightarrow x_0$ , atunci  $\alpha x_k \rightarrow \alpha x_0$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha x_k) = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} x_k.$$

Pentru  $\alpha = -1$  deducem că, dacă  $x_k \rightarrow x_0$ , atunci  $-x_k \rightarrow -x_0$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (-x_k) = -\lim_{k \rightarrow \infty} x_k.$$

Folosind apoi proprietatea 5, rezultă că:

dacă  $x_k \rightarrow x_0$  și  $y_k \rightarrow y_0$ , atunci  $x_k - y_k \rightarrow x_0 - y_0$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k - y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k - \lim_{k \rightarrow \infty} y_k.$$

**O b s e r v a t i e.** Multimea sirurilor convergente de puncte din  $R^n$  este o algebră, iar operația de trecere la limită este liniară și multiplicativă.

9) *Orice subșir al unui sir convergent este convergent și are aceeași limită.*

Demonstrația se face la fel ca pentru subșiruri ale sirurilor numerice, folosind definiția cu vecinătăți a limitei.

10) *Prin schimbarea ordinei termenilor unui sir convergent se obține tot un sir convergent și cu aceeași limită.*

Pentru demonstrație se folosește definiția cu vecinătăți a limitei.

Se demonstrează la fel următoarea proprietate:

11) *Prin scoaterea sau adăugarea unui număr finit de termeni, la un sir convergent, se obține tot un sir convergent și cu aceeași limită.*

12) *Un punct  $a \in R^n$  este punct de acumulare al unei mulțimi  $A \subseteq R^n$  dacă și numai dacă există un sir  $x_k \rightarrow a$ , format din puncte distințe din  $A$ .*

Demonstrația se face la fel ca și pentru mulțimi de numere, folosind vecinătățile  $V_k(a)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

13) *O mulțime  $A \subseteq R^n$  este închisă dacă și numai dacă, o dată cu orice sir convergent de puncte din  $A$ , limita sirului aparține de asemenea lui  $A$ .*

Demonstrația este identică cu cea de la mulțimile de numere.

## 2. Siruri fundamentale. Criteriul lui Cauchy

**D e f i n i t i e .** Un sir  $(x_k)$  de puncte din spațiul  $R^n$  este un sir fundamental (sau sir Cauchy), dacă pentru orice număr  $\varepsilon > 0$  există un număr  $N(\varepsilon)$ , astfel încât oricare ar fi  $p \geq N(\varepsilon)$  și  $q \geq N(\varepsilon)$  să avem

$$\|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Orice sir convergent de puncte din  $R^n$  este un sir fundamental.

Demonstrația se face ca și pentru siruri de numere, înlocuind modulul cu norma.

**O b s e r v a t i e.** Toate proprietățile precedente rămân valabile pentru siruri de puncte dintr-un spațiu normat oarecare.

Proprietățile în enunțul și demonstrația cărora n-a intervenit norma, ci numai vecinătățile, rămân valabile în spații topologice mai generale.

Pentru demonstrarea criteriului lui Cauchy pentru siruri de puncte din  $R^n$  avem nevoie de o propoziție care stabilește o legătură între limita unui sir de puncte din  $R^n$  și limitele sirurilor de coordonate.

Această propoziție este de asemenea utilă pentru a da demonstrații mai simple pentru alte proprietăți.

Pentru a evita confuziile, dacă  $x_k$  este un termen al sirului  $(x_k)_{k \in N}$  de puncte din  $R^n$ , vom nota cu  $x_{ik}$  sau  $x_{ik}$  coordonata sa de ordin  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$x_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}).$$

Așadar,  $x_{ik} = \text{pr}_i x_k$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Propozitia 1.** Un sir  $(x_k)_{k \in N}$  de puncte din  $R^n$  are limita  $a \in R^n$  dacă și numai dacă, pentru fiecare  $i = 1, 2, \dots, n$ , sirul coordonatelor  $(x_{ik})_{k \in N}$  are limita  $a_i = \text{pr}_i a$ .

Pentru demonstrație se folosesc inegalitățile:

$$|\alpha_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i|.$$

Prima inegalitate rezultă astfel:

$$\alpha_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^2, \text{ deci } |\alpha_i| = \sqrt{\alpha_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}.$$

A doua inegalitate rezultă astfel:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n |\alpha_i| |\alpha_j| = \left( \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \right)^2,$$

deci

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i|.$$

Vom folosi aceste inegalități luând

$$\alpha_i = x_{ik} - a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Atunci

$$|x_{ik} - a_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{ik} - a_i)^2} \leq \sum_{i=1}^n |x_{ik} - a_i|$$

sau

$$|x_{ik} - a_i| \leq \|x_k - a\| \leq \sum_{i=1}^n |x_{ik} - a_i|, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Dacă  $x_k \rightarrow a$ , atunci  $x_k - a \rightarrow 0$  și deci, conform criteriului de convergență de la sirurile de numere, rezultă

$$x_{ik} \xrightarrow{k} a_i$$

pentru fiecare proiecție,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Reciproc, să presupunem că

$$x_{1k} \xrightarrow{k} a_1, x_{2k} \xrightarrow{k} a_2, \dots, x_{nk} \xrightarrow{k} a_n.$$

Atunci

$$|x_{1k} - a_1| \xrightarrow{k} 0, |x_{2k} - a_2| \xrightarrow{k} 0, \dots, |x_{nk} - a_n| \xrightarrow{k} 0,$$

deci  $\sum_{i=1}^n |x_{ik} - a_i| \xrightarrow{k} 0$ .

Din inegalitățile de mai sus rezultă atunci că

$$\|x_k - a\| \rightarrow 0, \text{ adică } x_k \rightarrow a.$$

**O b s e r v a t i i.** 1° În cazul planului  $R^2$ , unde un punct este notat  $(x, y)$ ,  $x$  și  $y$  fiind coordonatele sale, propoziția precedentă se transcrie astfel :

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \rightarrow x_0 \\ y_n \rightarrow y_0. \end{cases}$$

Iar în cazul spațiului  $R^3$ , propoziția precedentă se transcrie astfel :

$$(x_n, y_n, z_n) \rightarrow (x_0, y_0, z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \rightarrow x_0 \\ y_n \rightarrow y_0 \\ z_n \rightarrow z_0. \end{cases}$$

2° Din propoziția precedentă rezultă de asemenea următoarea definiție echivalentă a unui sir convergent de puncte din  $R^n$ :

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ , dacă și numai dacă, pentru orice număr  $\epsilon > 0$ , există un număr  $N(\epsilon)$ , astfel încât pentru orice  $k \geq N(\epsilon)$  să avem  $|x_{ik} - a_i| < \epsilon$ , oricare ar fi  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Această definiție se poate deduce, de altfel, din definiția cu vecinătăți, folosind numai vecinătățile pătratice.

**Criteriul lui Cauchy.** Un sir  $(x_k)_{k \in N}$  de puncte din  $R^n$  este sir convergent dacă și numai dacă este sir fundamental.

Dacă  $(x_k)$  este un sir convergent, atunci el este sir fundamental, după cum s-a specificat mai înainte. Reciproc, să presupunem că  $(x_k)$  este sir fundamental și să arătăm că este convergent. Se folosesc inegalitățile :

$$|x_{ip} - x_{iq}| \leq \|x_p - x_q\| \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ p, q = 1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

Deoarece  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  este sir fundamental, pentru orice număr  $\varepsilon > 0$  există un număr  $N(\varepsilon)$  astfel încât, oricare ar fi  $p \geq N(\varepsilon)$  și  $q \geq N(\varepsilon)$ , să avem  $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$ , și cu atât mai mult  $|x_{ip} - x_{iq}| < \varepsilon$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Așadar, fiecare sir de coordonate  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  este un sir fundamental de numere, și deci este convergent:

$$x_{1k} \xrightarrow{k} a_1, x_{2k} \xrightarrow{k} a_2, \dots, x_{nk} \xrightarrow{k} a_n.$$

Conform propoziției precedente, sirul  $(x_k)$  este convergent și are limita  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

**O b s e r v a ț i i.** Un spațiu metric în care fiecare sir fundamental este convergent se numește *spațiu complet*.

Un spațiu normat complet se numește *spațiu Banach*.

O algebră normată completă se numește *algebră Banach*.

Rezultă că spațiul normat  $R^n$  este complet, deci este un spațiu Banach.

Un spațiu Banach în care norma se poate deduce dintr-un produs scalar se numește spațiu Hilbert. Un spațiu Hilbert cu  $n$  dimensiuni se numește euclidian  $n$ -dimensional.

Rezultă că spațiul Banach  $R^n$ , cu norma  $\|x\|_2 = \sqrt{x|x|}$ , este un spațiu Hilbert, cu  $n$  dimensiuni, adică un spațiu euclidian  $n$ -dimensional.

$R^n$  este de asemenea un spațiu Banach pentru normele  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  și  $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ .

Aceste norme nu se pot deduce dintr-un produs scalar deci, pentru aceste norme,  $R^n$  nu este spațiu Hilbert.

### 3. Lema lui Cesàro. Teorema lui Weierstrass-Bolzano.

#### Teorema lui Borel-Lebesgue

**L e m a l u i C e s à r o.** Orice sir mărginit de puncte din  $R^n$  conține un subșir convergent.

Pentru simplificarea scrisului, vom da demonstrația acestei leme în cazul spațiului  $R^3$ .

Fie  $(x_n, y_n, z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un sir mărginit din  $R^3$ . Din inegalitățile

$$|x_n| < \|(x_n, y_n, z_n)\|,$$

$$|y_n| < \|(x_n, y_n, z_n)\|,$$

$$|z_n| < \|(x_n, y_n, z_n)\|,$$

rezultă că sirurile coordonatelor,  $(x_n)$ ,  $(y_n)$ ,  $(z_n)$ , sunt de asemenea mărginite, deci li se poate aplica lema lui Cesàro pentru sirurile numerice.

Sirul  $(x_n)$ , fiind mărginit, conține un subșir convergent

$$x'_n \rightarrow x_0.$$

Să extragem din sirul  $(y_n)$  subșirul  $(y'_n)$  format din termenii care au aceeași indice ca și cei ai subșirului  $(x'_n)$  în sirul  $(x_n)$ .

Subșirul  $(y'_n)$  este de asemenea mărginit, deci conține un subșir convergent

$$y''_n \rightarrow y_0.$$

Să extragem din sirul  $(z_n)$  subșirul  $(z''_n)$  format din termenii care au aceeași indice ca și cei ai subșirului  $(y''_n)$  în sirul  $(y_n)$ .

Subșirul  $(z''_n)$  este de asemenea mărginit, deci conține un subșir convergent

$$z'''_n \rightarrow z_0.$$

Să reținem din sirurile  $(x_n)$  și  $(y_n)$  acei termeni care au aceeași indice ca și cei ai subșirului  $(z''_n)$  în sirul  $(z_n)$ . Obținem subșirurile  $(x'''_n)$  și  $(y'''_n)$ .

Cum  $(x'''_n)$  este și subșir al sirului  $(x'_n)$ , avem

$$x'''_n \rightarrow x_0.$$

De asemenea, deoarece  $(y'''_n)$  este și subșir al sirului  $(y''_n)$  avem

$$y'''_n \rightarrow y_0.$$

Atunci  $((x'''_n, y'''_n, z'''_n))_{n \in N}$  este un subșir convergent al sirului inițial  $((x_n, y_n, z_n))_{n \in N}$ :

$$(x'''_n, y'''_n, z'''_n) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$$

și lema este demonstrată.

**Teorema lui Weierstrass - Bolzano.** Orice mulțime mărginită și infinită are cel puțin un punct de acumulare.

Deoarece  $A$  este infinită, putem extrage un sir  $(x_k)$  de puncte distincte din  $A$ . Sirul  $(x_k)$  este mărginit, deoarece  $A$  este mărginită. Conform lemei lui Cesàro sirul  $(x_k)$  conține un subșir convergent

$$x_{nk} \rightarrow x_0.$$

Rezultă că fiecare vecinătate a lui  $x_0$  conține o infinitate de termeni ai subșirului  $(x_{nk})$ , adică o infinitate de puncte din  $A$ , deci  $x_0$  este punct de acumulare al mulțimii  $A$ .

**Propozitie.** Dacă mulțimea  $A \subset R^n$  este compactă, atunci proiecțiile sale  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sint mulțimi compacte pe dreaptă.

Deoarece  $A$  este compactă, este mărginită; proiecțiile sale  $A_1, A_2, \dots$  sint de asemenea mărginite.

Rămîne de arătat că proiecțiile sunt mulțimi inchise.

Vom face demonstrația numai pentru mulțimea  $A_1$ .

Fie  $x_{1k} \xrightarrow{k} a_1$  un sir convergent de puncte din  $A_1$ ; să arătăm că și limita sa  $a_1$  aparține lui  $A_1$ , de unde va rezulta că  $A_1$  este închisă.

Deoarece  $x_{1k} \in A_1$ , există un sir  $(x_k)$  de puncte din  $A$ , ale căror proiecții pe prima axă sunt termenii sirului  $(x_{1k})$

$$\text{pr}_1 x_k = x_{1k}.$$

Sirul  $(x_k)$  este mărginit (deoarece  $A$  este mărginită). El conține deci un subșir convergent  $x_{kp} \xrightarrow[p]{} b$  și, deoarece  $A$  este închisă, limita sirului aparține de asemenea lui  $A$ ,  $b \in A$ .

Atunci  $x_{1k_p} \xrightarrow[p]{} b_1$  și deoarece  $b \in A$ , avem  $b_1 \in A_1$ .

Dar  $(x_{1k_p})_{p \in N}$  este un subșir al sirului  $(x_{1k})_{k \in N}$ , deci are aceeași limită,  $x_{1k_p} \xrightarrow[p]{} a_1$ ; limita unui sir convergent fiind unică, rezultă că  $a_1 = b_1$  și deci  $a_1 \in A_1$ .

**O b s e r v a t i e.** Dacă toate proiecțiile  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sunt mărginite, rezultă că și  $A$  este mărginită. Dacă toate proiecțiile sunt inchise, nu rezultă însă că și  $A$  este închisă. Așadar, dacă proiecțiile sunt compacte, nu rezultă că  $A$  este compactă.

**T e o r e m a l u i B o r e l - L e b e s g u e.** Din orice acoperire cu mulțimi deschise a unei mulțimi compacte  $A \subset R^n$ , se poate extrage o acoperire finită a mulțimii  $A$ .

Fie  $(G_\alpha)$  o familie de mulțimi deschise care acoperă pe  $A$ . Pentru fiecare punct  $x \in A$ , există o mulțime deschisă  $G_\alpha$  din familie, astfel ca  $x \in G_\alpha$ ;  $x$  este deci punct interior al lui  $G_\alpha$ . Există atunci o vecinătate dreptunghiulară  $I_\alpha$  a lui  $x$ , astfel ca  $x \in I_\alpha \subset G_\alpha$ . Am obținut astfel o familie de vecinătăți dreptunghiulare  $(I_\alpha)$  care acoperă pe  $A$ .

Să notăm  $A_1, A_2, \dots, A_n$  proiecțiile mulțimii compacte  $A$ . Aceste proiecții sunt de asemenea mulțimi compacte.

Fie  $(I_\alpha^1), (I_\alpha^2), \dots, (I_\alpha^n)$  familiile de intervale deschise liniare, obținute cu proiecțiile intervalelor  $n$ -dimensionale ale familiei  $(I_\alpha)$ . Familia  $(I_\alpha^i)$  acoperă mulțimea compactă  $A_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), deci conform teoremei lui Borel-Lebesgue de pe dreapta, există un număr *finit* de intervale din  $(I_\alpha^i)$  care acoperă pe  $A_i$ . Intervalele  $n$ -dimensionale de forma  $I_\alpha = I_{\alpha 1}^1 \times \dots \times I_{\alpha n}^n$ , formate cu acele intervale care acoperă respectiv mulțimile  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , sunt în număr *finit*. Aceste intervale  $n$ -dimensionale acoperă mulțimea  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  și cu atât mai mult mulțimea  $A$ , deoarece  $A \subset A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ . Fiecare asemenea interval  $I_\alpha$  este conținut într-o mulțime  $G_\alpha$ . Obținem astfel un număr finit de mulțimi  $G_\alpha$  care acoperă mulțimea  $A$ .

**O b s e r v a t i e.** Teorema reciprocă este de asemenea adevărată. Așadar :

O mulțime  $A \subset R^n$  este compactă dacă și numai dacă, din orice acoperire a lui  $A$  cu mulțimi deschise se poate extrage o acoperire finită. Într-un spațiu topologic oarecare, acest enunț se ia ca definiție a mulțimilor compacte. Într-un spațiu normat cu o infinitate de dimensiuni, o mulțime închisă și mărginită poate să nu fie compactă.

## § 4. Funcții definite pe mulțimi din $R^n$

### I. Funcții vectoriale de variabilă vectorială

Fie  $E$  o mulțime din  $R^n$  și  $f: E \rightarrow R^m$  o funcție definită pe  $E$  cu valori în spațiul cu  $m$  dimensiuni.

Argumentul funcției  $f$  este un vector din  $R^n$ , iar valorile funcției sunt, de asemenea, vectori. Spunem că  $f$  este o *funcție vectorială de variabilă vectorială*.

O variabilă vectorială  $x$  din  $R^n$  este echivalentă cu  $n$  variabile reale  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (care sunt coordonatele lui  $x$ ).

Valorile funcției se notează

$$f(x) \text{ sau } f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

iar funcția  $f$  se mai numește *funcția (vectorială) de  $n$  variabile reale*.

În cazul cînd  $R^m = R^1$ ,  $f$  este o *funcție reală de  $n$  variabile reale*.

*Exemplu.* 1) Funcția proiecție  $\text{pr}_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1$  este o funcție reală de  $n$  variabile reale. De asemenea, proiecțiile  $\text{pr}_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_2, \dots, \text{pr}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n$  sunt funcții reale de  $n$  variabile.

2) Funcția sumă  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  și funcția produs  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$  sunt funcții reale de  $n$  variabile reale.

Fiind dată o funcție vectorială  $f: E \rightarrow R^m$ , putem obține  $m$  funcții reale  $f_1, f_2, \dots, f_m$  definite pe  $E$ , prin compunerea funcției  $f$  cu funcțiile proiecție:

$$f_1 = \text{pr}_1 \circ f, f_2 = \text{pr}_2 \circ f, \dots, f_m = \text{pr}_m \circ f.$$

Pentru fiecare  $x \in E$  avem

$$f_1(x) = \text{pr}_1 f(x), f_2(x) = \text{pr}_2 f(x), \dots, f_m(x) = \text{pr}_m f(x)$$

și deci

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)).$$

Convenim să scriem această ultimă egalitate astfel:

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_m).$$

Funcțiile reale  $f_1, f_2, \dots, f_m$  se numesc *componentele reale ale funcției vectoriale  $f$* .

Pe de altă parte,  $m$  funcții reale  $f_1, f_2, \dots, f_m$  definite pe o aceeași mulțime  $E \subset R^n$  pot fi considerate totdeauna ca fiind componentele reale ale unei funcții vectoriale  $f: E \rightarrow R^m$ .

Tînind seama de aceste considerații, putem reduce totdeauna studiul unei funcții vectoriale la studiul unor funcții reale.

De multe ori este însă mai simplu studiul direct al funcției vectoriale.

Dacă mulțimea de definiție  $E$  este o parte a dreptei, funcțiile  $f: E \rightarrow R^m$  sunt funcții vectoriale de o singură variabilă reală.

Dacă  $E$  este o parte a planului  $R^2$ , funcțiile  $f: E \rightarrow R^m$  sunt funcții vectoriale de două variabile reale și se notează  $f(x, y)$ .

La fel se definesc funcțiile vectoriale de trei variabile reale  $f(x, y, z)$ .

Dacă  $E$  este un interval  $n$ -dimensional (mărginit sau nemărginit)  $E = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ , atunci cînd variabilele reale  $x_1, x_2, \dots, x_n$  parcurg respectiv intervalele  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , variabila vectorială  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  parcurge tot intervalul  $n$ -dimensional  $E$ .

Dacă însă  $E$  nu este interval  $n$ -dimensional (ci, de exemplu, sferă), fiecare variabilă reală parcurge o mulțime care depinde de valorile fixate ale celorlalte variabile.

Pentru anumite valori fixate  $x_2, x_3, \dots, x_n$ , să considerăm mulțimea tuturor punctelor  $x \in E$ , care au coordonatele de ordin  $\geq 2$  egale respectiv cu  $x_2, x_3, \dots, x_n$ . Proiecția acestei mulțimi pe prima axă este mulțimea

$$E_1 = \{x_1 \mid x_1 \in R, (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in E\}.$$

Această mulțime depinde, în general, de valorile  $x_2, x_3, \dots, x_n$ , alese.

Pentru valorile fixate  $x_2, x_3, \dots, x_n$ , funcția de o singură variabilă  $f_1: x_1 \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , definită pe mulțimea  $E_1$ , se numește *funcție parțială* a funcției  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Pentru fiecare sistem de numere  $x_2, x_3, \dots, x_n$  pentru care mulțimea corespunzătoare  $E_1$  nu este vidă, obținem cîte o funcție parțială  $x_1 \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Se definesc în mod asemănător funcțiile parțiale de forma

$$f_2: x_2 \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n: x_n \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Să exemplificăm considerațiile precedente în cazul funcțiilor de două variabile. Pentru simplitate să notăm cu  $(x, y)$  un punct oarecare din plan. Funcțiile de două variabile se notează atunci cu  $f(x, y)$ .

*Exemplu.* 1)  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  definită pe cercul cu centrul în  $O$  și raza 1,  $E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ .

Pentru  $y = \frac{1}{2}$  obținem funcția parțială

$$f_1(x) = f\left(x, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{4} - x^2}$$

definită pe intervalul  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ .

Pentru  $y = \frac{1}{3}$  obținem funcția parțială  $f_1(x) =$

$$= f\left(x, \frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{8}{9}} \text{ definită pe intervalul } \left[-\frac{\sqrt{8}}{3}, \frac{\sqrt{8}}{3}\right].$$

Pentru  $y = 0$  obținem funcția parțială  $f_1(x) = f(x, 0) =$

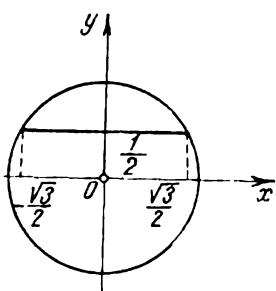


Fig. 138

Pentru  $x = \frac{1}{5}$  obținem funcția parțială  $f_1(y) = f\left(\frac{1}{5}, y\right) = \sqrt{\frac{24}{25} - y^2}$  definită pe intervalul  $\left[-\frac{\sqrt{24}}{5}, \frac{\sqrt{24}}{5}\right]$ .

2)  $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$  definită pe mulțimea punctelor  $(x, y)$  din plan pentru care  $\left|\frac{x}{y}\right| \leq 1$  și  $y \neq 0$ , ( $-y \leq x \leq y$  dacă  $y > 0$  și  $y \leq x \leq -y$  dacă  $y < 0$ ).

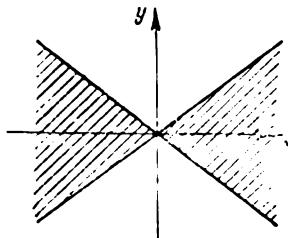


Fig. 139

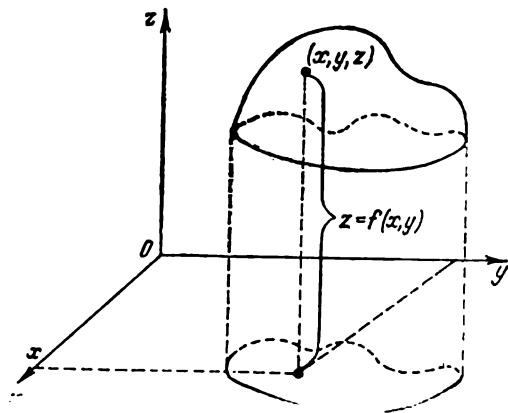


Fig. 140

Mulțimea de definiție este porțiunea din plan care conține axa  $Ox$  cuprinsă între bisecțoarele axelor de coordonate, fără origine.

3)  $f(x, y) = z + y$  definită pe  $R^2$ .

4)  $f(x, y) = xy$  definită pe  $R^2$ .

5)  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  definită pe mulțimea

$E = \{(x, y) | x, y \in R, y \neq 0\}$  formată din tot planul afară de axa  $Oy$ .

6)  $f(x, y) = xy$  definită pe mulțimea

$E = \{(x, y) | x, y \in R, x > 0\}$ , adică pe semiplanul de la dreapta axei  $Oy$ , fără axa  $Oy$ .

Graficul unei funcții reale de  $n$  variabile  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , definită pe o mulțime  $E \subset R^n$ , este format din toate punctele din spațiul  $R^{n+1}$ , de forma  $(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))$  unde  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ .

Graficul unei funcții de două variabile  $f(x, y)$  definită pe o mulțime  $E$  din plan este o mulțime din spațiul cu trei dimensiuni:

$$\{(x, y, z) | (x, y) \in E, z = f(x, y)\}.$$

Graficul unei funcții de două variabile este o „suprafață” în spațiu.

## 2. Aplicații. Curbe și suprafete.

### Transformări punctuale

1) *Curbe plane.* Fie  $f$  o funcție definită pe un interval  $I$  de pe dreaptă, cu valori în plan.

Această funcție face să corespundă fiecărui punct  $t \in I$ , punctul  $f(t)$  din plan;  $f$  este o funcție vectorială (cu valori în plan) de o variabilă reală.

Fie  $\varphi$  și  $\psi$  cele două componente reale ale funcției  $f$ :

$$f(t) = (\varphi(t), \psi(t)), t \in I.$$

Funcțiile  $\varphi$  și  $\psi$  sunt funcții reale de variabila  $t$ .

Dacă notăm  $f(t) = (x, y)$  atunci

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in I.$$

Ansamblul celor două funcții  $\varphi$  și  $\psi$  constituie o *reprezentare parametrică*, iar argumentul lor  $t$  se numește *parametru*.

Cind parametrul  $t$  parcurge intervalul  $I$ , punctul  $f(t) = (\varphi(t), \psi(t))$  din plan parcurge o mulțime de puncte din plan. Această mulțime de puncte din plan, împreună cu reprezentarea parametrică, se numește curbă plană. Egalitățile  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in I$  se numesc ecuațiile parametrice ale curbei plane.

2) *Curbe strimbe.* Fie  $f$  o funcție vectorială definită pe un interval  $I$ , cu valori în spațiul  $R^3$ . Funcția vectorială  $f$  are în acest caz trei componente reale,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$ . Anume, dacă notăm  $f(t) = (x, y, z)$ , atunci

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in I. \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

Ansamblul funcțiilor  $\varphi$ ,  $\psi$  și  $\chi$  constituie de asemenea o *reprezentare parametrică*.

Cind parametrul  $t$  parcurge intervalul  $I$ , punctul  $f(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$  parcurge o mulțime de puncte din spațiu. Această mulțime din spațiu, împreună cu reprezentarea parametrică, se numește curbă în spațiu (sau, uneori, curbă strimbă).

Mai multe reprezentări parametrice diferite pot defini aceeași curbă strimbă.

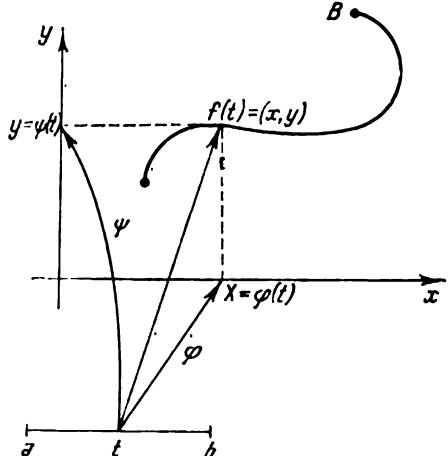


Fig. 141

Egalitățile  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $z = \chi(t)$  (unde  $t \in I$ ) se numesc ecuațiile parametrice ale curbei.

3) *Suprafețe.* Fie  $f$  o funcție definită pe o mulțime  $E$  din plan, cu valori în spațiul  $R^3$ ;  $f$  este o funcție de două variabile, pe care să le notăm  $u$  și  $v$ ,  $(u, v) \in E$ . Așadar, funcția se notează  $f(u, v)$ . Având valorile în spațiul  $R^3$ , această funcție are trei componente reale  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$ , definite pe  $E$ :

$$f(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)).$$

Dacă se notează  $f(u, v) = (x, y, z)$  atunci

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), (u, v) \in E \\ z = \chi(u, v). \end{cases}$$

Obținem astfel o reprezentare parametrică, cu doi parametri,  $u$  și  $v$ .

Cind perechea de parametri  $(u, v)$  parcurge mulțimea  $E$ , punctul  $f(u, v)$  parcurge o mulțime de puncte din spațiu,  $f(E)$ , care împreună cu reprezentarea parametrică constituie suprafața în spațiu.

Să fixăm o valoare  $v_0$  a parametrului  $v$ . În acest caz, dacă parametrul  $u$  parcurge mulțimea valorilor pentru care  $(u, v) \in E$ , se obține funcția parțială  $u \rightarrow f(u, v_0)$ , de o singură variabilă, cu valori în spațiu, deci o reprezentare cu un singur parametru

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v_0), \\ y = \psi(u, v_0), \\ z = \chi(u, v_0). \end{cases}$$

Această reprezentare definește o curbă în spațiu, conținută în suprafața  $f(E)$ , numită curba  $v = v_0$ .

De asemenea, dacă se fixează o valoare  $u_0$  a parametrului  $u$ , și dacă parametrul  $v$  parcurge mulțimea valorilor pentru care  $(u_0, v) \in E$ , se obține funcția parțială  $v \rightarrow f(u_0, v)$  de o singură variabilă cu valori în spațiu, deci o reprezentare cu un singur parametru

$$\begin{cases} x = \varphi(u_0, v), \\ y = \psi(u_0, v), \\ z = \chi(u_0, v). \end{cases}$$

Această reprezentare definește de asemenea o curbă pe suprafața  $f(E)$ , numită curba  $u = u_0$ .

**O b s e r v a t i e.** În volumul II noțiunile de curbă și suprafață vor fi mai bine precizate.

4) *Transformări punctuale în plan.* Fie  $E$  și  $F$  două mulțimi din plan și  $T$  o aplicație biunivocă a mulțimii  $E$  pe mulțimea  $F$ .

$$T : E \rightarrow F, \quad E, F \subset R^2.$$

Fie cărui punct  $(u, v) \in E$  îi corespunde punctul  $T(u, v) \in F$ . Funcția  $T(u, v)$  este o funcție vectorială de două variabile. Ea are două componente reale,  $f$  și  $g$ , definite pe  $E$ .

$$T(u, v) = (f(u, v), g(u, v)), (u, v) \in E.$$

Dacă se notează  $T(u, v) = (x, y)$ , atunci

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases}, (u, v) \in E.$$

Dacă  $\gamma$  este o curbă conținută în mulțimea  $E$  dată de reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} u = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases}, t \in I,$$

atunci  $\Gamma = T(\gamma)$  este o curbă conținută în mulțimea  $F = T(E)$  dată de reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = f(\alpha(t), \beta(t)) \\ y = g(\alpha(t), \beta(t)) \end{cases}, t \in I.$$

Funcția biunivocă  $T : E \rightarrow F$  se numește de obicei *transformare punctuală* de la mulțimea  $E$  la mulțimea  $F$ . Funcția sa inversă  $T^{-1} : F \rightarrow E$ , care este de asemenea biunivocă, este o funcție vectorială de două variabile: fie cărui punct  $(x, y) \in F$  îi corespunde punctul  $(u, v) = T^{-1}(x, y) \in E$ ; avem

$$T^{-1}T(u, v) = (u, v) \quad T \cdot T^{-1}(x, y) = (x, y), \quad \begin{cases} (u, v) \in E \\ (x, y) \in F. \end{cases}$$

Funcția  $T^{-1}$  este de asemenea o transformare punctuală de la mulțimea  $F$  la  $E$ .

Funcția vectorială  $T^{-1}$  are două componente reale  $\varphi$  și  $\psi$  definite pe  $F$ .

Dacă se notează  $(u, v) = T^{-1}(x, y)$ , atunci

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases}, (x, y) \in F.$$

Între componente  $f$  și  $g$  ale lui  $T$  și componente  $\varphi$  și  $\psi$  ale lui  $T^{-1}$  avem următoarele relații:

$$\begin{cases} \varphi(f(u, v), g(u, v)) = u \\ \psi(f(u, v), g(u, v)) = v \end{cases}, (u, v) \in E;$$

$$\begin{cases} f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = x \\ g(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = y \end{cases}, (x, y) \in F.$$

$$\text{Sistemul} \quad \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases}$$

se obține rezolvând în raport cu  $x$  și  $y$  sistemul

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases}$$

și, reciproc, ultimul sistem se obține din primul, rezolvându-l în raport cu  $u$  și  $v$ .

5) *Transformări punctuale în spațiu.* Putem considera transformări punctuale  $T$  între două multimi  $E$  și  $F$  din spațiul cu trei dimensiuni.

În acest caz funcția biunivocă  $T$  are trei componente reale  $f, g, h$ , definite pe  $E$ . Dacă se notează  $T(u, v, w) = (x, y, z)$ , atunci

$$\begin{cases} x = f(u, v, w) \\ y = g(u, v, w), (u, v, w) \in E. \\ z = h(u, v, w) \end{cases}$$

Aplicația inversă  $\bar{T} : F \rightarrow E$  are de asemenea trei componente reale  $\varphi, \psi, \chi$ , definite pe  $F$ . Dacă se notează  $\bar{T}(x, y, z) = (u, v, w)$ , atunci

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y, z) \\ v = \psi(x, y, z), (x, y, z) \in F. \\ w = \chi(x, y, z) \end{cases}$$

Primul sistem se obține din ultimul, rezolvându-l în raport cu  $x, y$  și  $z$ , deci pentru  $(u, v, w) \in E$  avem

$$\begin{cases} u = \varphi(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)), \\ v = \psi(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)), \\ w = \chi(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)). \end{cases}$$

Ultimul sistem se obține din primul rezolvându-l în raport cu  $u, v$ , și  $w$ , deci pentru  $(x, y, z) \in F$  avem

$$\begin{cases} x = f(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z)), \\ y = g(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z)), \\ z = h(\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z)). \end{cases}$$

### 3. Operații cu funcții vectoriale

Fie  $E$  o mulțime din  $R^n$ ,  $f$  și  $g$  două funcții definite pe  $E$  cu valori în spațiul  $R^m$ . Suma  $f + g$  și produsul  $fg$  sunt funcții definite pe  $E$  cu valori în  $R^m$ , astfel:

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x), \text{ pentru } x \in E \\ (fg)(x) &= f(x) \cdot g(x), \text{ pentru } x \in E. \end{aligned}$$

Produsul  $\alpha f$  al funcției  $f$  cu numărul real  $\alpha$  este funcție definită pe  $E$  cu valori în  $R^m$  astfel:

$$(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x), \text{ pentru } x \in E.$$

Mulțimea tuturor funcțiilor definite pe  $E$  cu valori în  $R^m$  este o *algebră* pentru operațiile  $f + g$ ,  $fg$  și  $\alpha f$ .

Folosind produsul scalar din  $R^m$ , se definește *funcția reală*  $(f|g)$  pe  $E$  prin egalitatea  $(f|g)(x) = (f(x)|g(x))$ , pentru  $x \in E$ .

Folosind componentele reale ale funcțiilor  $f$  și  $g$ , avem

$$(f|g)(x) = (f(x)|g(x)) = \sum_{i=1}^m f_i(x) g_i(x),$$

adică

$$(f|g) = \sum_{i=1}^m f_i g_i.$$

Putem apoi defini funcția pozitivă  $\|f\|$  pe  $E$  prin egalitatea

$$\|f\|(x) = \|f(x)\|, \text{ pentru } x \in E.$$

Avem atunci

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m f_i^2}.$$

#### 4. Compunerea funcțiilor vectoriale

Fie mulțimile  $E \subset R^n$ ,  $F \subset R^m$  și funcțiile  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow R^p$ . Să considerăm de asemenea funcția compusă  $h = g \circ f : E \rightarrow R^p$ :

$$h(x) = g(f(x)), \quad x \in E.$$

Să cercetăm cum se comportă componente reale ale funcțiilor vectoriale față de operația de compunere a acestor funcții.

Funcția vectorială  $f$  are valori în  $F \subset R^m$ , deci are  $m$  componente reale,  $f_1, f_2, \dots, f_m : E \rightarrow R$

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_m).$$

Funcția vectorială  $g$  are valori în  $R^p$ , deci are  $p$  componente reale,  $g_1, g_2, \dots, g_p : F \rightarrow R$

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_p).$$

Se definește de asemenea produsul  $\varphi \cdot f$  cu o funcție reală  $\varphi : E \rightarrow R$  prin egalitatea  $(\varphi f)(x) = \varphi(x) \cdot f(x)$ ,  $x \in E$ .

Operațiile de adunare, înmulțire și înmulțire cu scalari (sau cu funcții scalare) ale funcțiilor vectoriale se reduc la operațiile respective efectuate asupra componentelor lor reale.

Astfel, dacă  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  și  $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ , atunci

$$f + g = (f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots, f_m + g_m)$$

$$fg = (f_1g_1, f_2g_2, \dots, f_mg_m)$$

$$\alpha f = (\alpha f_1, \alpha f_2, \dots, \alpha f_m)$$

$$\varphi f = (\varphi f_1, \varphi f_2, \dots, \varphi f_m).$$

Într-adevăr, pentru orice  $x \in E$  avem

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) + (g_1(x), \dots, g_m(x)) = \\ = (f_1(x) + g_1(x), \dots, f_m(x) + g_m(x)) = ((f_1 + g_1)(x), \dots, (f_m + g_m)(x)),$$

adică

$$f + g = (f_1 + g_1, \dots, f_m + g_m).$$

La fel se demonstrează celelalte egalități.

Funcția vectorială  $h = g \circ f$  are valori în  $R^p$ , deci are  $p$  componente reale  $h_1, h_2, \dots, h_p : E \rightarrow R$

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_p).$$

Atunci

$$h_1 = g_1 \circ f, \quad h_2 = g_2 \circ f, \dots, \quad h_p = g_p \circ f.$$

Într-adevăr, pentru orice  $x \in E$ , avem  $f(x) \in F$ , deci

$$h(x) = g(f(x)) = (g_1(f(x)), g_2(f(x)), \dots, g_p(f(x))),$$

iar, pe de altă parte,

$$h(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_p(x)).$$

deci

$$h_1(x) = g_1(f(x)), \quad h_2(x) = g_2(f(x)), \dots, \quad h_p(x) = g_p(f(x)),$$

de unde rezultă egalitățile de mai sus.

Așadar: a compune funcția  $g$  cu funcția  $f$  revine la a compune componente reale ale lui  $g$  cu funcția  $f$ .

Sau: pentru a obține componente reale ale funcției compuse  $h = g \circ f$ , se compun componente reale ale funcției  $g$  cu funcția  $f$ .

Studiul compunerii funcțiilor vectoriale se reduce astfel la acela al compunerii unei funcții reale cu o funcție vectorială, rezultatul fiind o funcție reală.

Mai departe, problema compunerii unei funcții reale  $g$  cu o funcție vectorială  $f$  se poate reduce numai la compunerea funcțiilor reale, folosind compoziția reale  $f_1, f_2, \dots, f_m$  al funcției  $f$ .

În acest caz avem, pentru orice  $x \in E$ ,

$$h(x) = g(f(x)) = g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)).$$

Scriind apoi  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , avem

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Așadar, dându-se  $m$  funcții reale de  $n$  variabile definite pe  $E \subset R^n$ ,

$$f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$$

și funcția reală  $g(y_1, y_2, \dots, y_m)$  de  $m$  variabile definite pe mulțimea

$$F \subset f_1(E) \times f_2(E) \times \dots \times f_m(E) \subset R^m,$$

obținem funcția reală  $h$  de  $n$  variabile definită pe  $E$ :

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

*Exemplu.* I) Fie  $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in [a, b]$  o reprezentare parametrică

ce definește o curbă  $\Gamma$  din plan, și fie  $h$  o aplicație strict crescătoare a intervalului  $[\alpha, \beta]$  pe intervalul  $[a, b]$ :

$$h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b].$$

Funcțiile compuse  $\varphi = f \circ h$ ,  $\psi = g \circ h$  definite pe intervalul  $[\alpha, \beta]$  constituie o reprezentare parametrică ce definește aceeași curbă în plan:

$$\begin{cases} x = \varphi(\tau) \\ y = \psi(\tau) \end{cases}, \quad \tau \in [\alpha, \beta].$$

Într-adevăr, fie  $(x_0, y_0) \in \Gamma$  un punct oarecare: există un punct  $t_0 \in [a, b]$  astfel ca

$$x_0 = f(t_0),$$

$$y_0 = g(t_0).$$

Deoarece funcția  $h$  este biunivocă, există un punct  $\tau_0 \in [\alpha, \beta]$  astfel ca  $t_0 = h(\tau_0)$ ; atunci

$$\varphi(\tau_0) = f(h(\tau_0)) = f(t_0) = x_0,$$

$$\psi(\tau_0) = g(h(\tau_0)) = g(t_0) = y_0,$$

deci punctul  $(x_0, y_0)$  aparține și curbei  $\gamma$  definite de reprezentarea parametrică  $(\varphi, \psi)$ , adică  $\Gamma \subset \gamma$ .

Reciproc, fie  $(x_0, y_0) \in \gamma$ . Există un punct  $\tau_0 \in [\alpha, \beta]$ , astfel ca

$$x_0 = \varphi(\tau_0),$$

$$y_0 = \psi(\tau_0).$$

Să notăm  $t_0 = h(\tau_0) \in [a, b]$ .

Atunci

$$f(t_0) = f(h(\tau_0)) = \varphi(\tau_0) = x_0,$$

$$g(t_0) = g(h(\tau_0)) = \psi(\tau_0) = y_0,$$

deci

$(x_0, y_0) \in \Gamma$ , adică  $\gamma \subset \Gamma$ . Rezultă atunci că  $\gamma = \Gamma$ .

Trebuie să arătăm acum că cele două reprezentări stabilesc aceeași ordine de parcursere pe curba  $\Gamma$ .

Fie  $\tau_1 < \tau_2$  din  $[\alpha, \beta]$  și fie  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  punctele corespunzătoare de pe  $\Gamma$ :

$$x_1 = \varphi(\tau_1), \quad x_2 = \varphi(\tau_2),$$

$$y_1 = \psi(\tau_1), \quad y_2 = \psi(\tau_2).$$

În ordinea de parcursere stabilită de reprezentarea  $(\varphi, \psi)$  întâlnim întâi punctul  $M_1$ , apoi punctul  $M_2$ .

Fie  $t_1 = h(\tau_1)$  și  $t_2 = h(\tau_2)$ . Deoarece  $h$  este strict crescătoare, avem  $t_1 < t_2$ . Punctelor  $t_1$  și  $t_2$  le corespund, respectiv, tot punctele  $M_1$  și  $M_2$  pe curba  $\Gamma$ :

$$x_1 = \varphi(\tau_1) = f(h(\tau_1)) = f(t_1), \quad x_2 = \varphi(\tau_2) = f(h(\tau_2)) = f(t_2),$$

$$y_1 = \psi(\tau_1) = g(h(\tau_1)) = g(t_1), \quad y_2 = \psi(\tau_2) = g(h(\tau_2)) = g(t_2).$$

Deoarece  $t_1 < t_2$ , înseamnă că și în ordinea stabilită de reprezentarea  $(f, g)$  întâlnim întâi punctul  $M_1$  și apoi punctul  $M_2$ .

Cele două reprezentări definesc aceeași ordine pe mulțimea  $\Gamma$ , deci definesc aceeași curbă.

Considerații asemănătoare se pot face pentru curbe în spațiul  $R^3$ .

2) Fie  $\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v), (u, v) \in E \subset R^2 \end{cases}$  o reprezentare cu doi parametri care definește o suprafață  $S$  în spațiu.

Fie  $T$  o transformare punctuală (aplicație biunivocă) a mulțimii  $F \subset R^2$  pe mulțimea  $E \subset R^2$ ,  $T : F \rightarrow E$ :

$$T(U, V) = (u, v), \quad (U, V) \in F, \quad (u, v) \in E.$$

Atunci, funcțiile compuse  $\varphi = f \circ T$ ,  $\psi = g \circ T$ ,  $\chi = h \circ T$  definite pe  $F$  determină de asemenea o reprezentare cu doi parametri ce definesc aceeași suprafață :

$$\begin{cases} x = \varphi(U, V) \\ y = \psi(U, V), \\ z = \chi(U, V) \end{cases} \quad (U, V) \in F,$$

unde

$$\begin{aligned}\varphi(U, V) &= f(T(U, V)) = f(u, v) \\ \psi(U, V) &= g(T(U, V)) = g(u, v), \quad (u, v) \in E. \\ \chi(U, V) &= h(T(U, V)) = h(u, v)\end{aligned}$$

### 5. Inversarea funcțiilor vectoriale

Fie  $E \subset R^n$  și  $F \subset R^m$ ,  $T$  o aplicație biunivocă a mulțimii  $E$  pe mulțimea  $F$ , și  $\bar{T}$  aplicația sa inversă

$$\begin{aligned}T : E &\rightarrow F \\ \bar{T} : F &\rightarrow E \\ \bar{T}T(x) &= x, \quad x \in E \\ \bar{T}T(y) &= y, \quad y \in F.\end{aligned}$$

Funcția  $T$  are valori în  $F \subset R^m$ , deci are  $m$  componente reale,  $f_1, f_2, \dots, f_m$  definite pe  $E \subset R^n$

$$T = (f_1, f_2, \dots, f_m).$$

Funcția  $\bar{T}$  are valori în  $E \subset R^n$  deci are  $n$  componente reale  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  definite pe  $F \subset R^m$

$$\bar{T} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n).$$

Să stabilim ce legătură există între componentele reale ale celor două funcții inverse:

Avem :

$$T(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)), \quad x \in E \subset R^n.$$

$$\bar{T}(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots, \varphi_n(y)), \quad y \in F \subset R^m.$$

Pentru fiecare  $y \in F$ , există un punct  $x \in E$  și numai unul, astfel încât  $y = T(x)$ , și anume punctul  $x = \bar{T}(y)$ . Altfel spus, pentru fiecare vector  $y \in F$ , ecuația

$$y = T(x),$$

cu necunoscuta vectorială  $x$ , are o soluție  $x$  în  $E$  și numai una, și anume

$$x = \bar{T}(y).$$

Fie  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in F$ , și  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ .

Egalitatea  $y = T(x)$  se scrie

$$(y_1, y_2, \dots, y_m) = T(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)),$$

adică

$$y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x), \dots, y_m = f_m(x)$$

sau

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

Ecuatia vectorială  $y = T(x)$  este echivalentă cu un sistem de  $m$  ecuații scalare.

Relația  $x = \bar{T}(y)$  (echivalentă cu relația  $y = T(x)$ ) se scrie

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{T}(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots, \varphi_n(y)),$$

adică

$$x_1 = \varphi_1(y), x_2 = \varphi_2(y), \dots, x_n = \varphi_n(y)$$

sau

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, y_2, \dots, y_m) \\ x_2 = \varphi_2(y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(y_1, y_2, \dots, y_m). \end{cases}$$

A spune că pentru fiecare  $y \in F$ , ecuația  $y = T(x)$  are o soluție și numai una,  $x = \bar{T}y$  în  $E$ , revine la a spune că, pentru fiecare sistem de valori  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ , sistemul (1) de  $m$  ecuații cu  $n$  necunoscute are o singură soluție  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , dată de egalitățile (2). Așadar, componente reale ale funcțiilor vectoriale  $T$  și  $\bar{T}$  reprezintă, respectiv, funcțiile din membrul drept al ecuațiilor sistemului (1), și funcțiile din membrul drept ale soluțiilor (2) ale sistemului (1).

## 6. Funcții mărginite

Fie  $f$  o mulțime definită pe o mulțime  $E \subset R^n$  cu valori în  $R^m$ .

**D e f i n i t i e.** Se spune că funcția  $f$  este mărginită (pe mulțimea  $E$ ) dacă mulțimea valorilor  $f(E) \subset R^m$  este mărginită.

Aceasta înseamnă că există o sferă  $V_r(a)$  în  $R^m$  care conține mulțimea valorilor  $f(E)$ .

Există de asemenea o sferă  $V_M(O)$  cu centrul în  $O$  și care conține sfera  $V_r(a)$ , deci conține și mulțimea  $f(E)$ : dacă luăm  $M = \|a\| + r$ , atunci  $V_r(a) \subset V_M(O)$ . Într-adevăr, dacă  $x \in V_r(a)$ , atunci  $\|x - a\| < r$ , deci  $\|x\| = \|x - a + a\| \leq \|x - a\| + \|a\| < r + \|a\| = M$ , adică  $x \in V_M(O)$  și deci  $V_r(a) \subset V_M(O)$ .

Așadar, în definiția funcțiilor mărginită (și a mulțimilor mărginate) putem folosi numai sfere cu centrul în origine.

A spune că  $f(E) \subset V_M(a)$ , înseamnă că  $\|f(x)\| < M$  pentru orice  $x \in E$ . Obținem astfel o definiție echivalentă cu cea precedentă dată de următoarea:

**Propozitie.** Funcția  $f: E \rightarrow R^m$  este mărginită dacă și numai dacă există un număr  $M$  astfel încât, pentru orice  $x \in E$ , să avem  $\|f(x)\| \leq M$ .

**Corolar.** Funcția vectorială  $f: E \rightarrow R^m$  este mărginită dacă și numai dacă funcția reală  $x \rightarrow \|f(x)\|$  definită pe  $E$  este mărginită (adică  $\sup_{x \in E} \|f(x)\| < +\infty$ ).

**Observație.** Dacă funcția  $f$  nu are valori reale, ci într-un spațiu cu  $n \geq 2$  dimensiuni, nu mai au sens noțiunile de funcție majorată sau minorată și nici marginile funcției, deoarece într-un asemenea spațiu nu avem o relație de ordine.

**Propozitie.** Funcția vectorială  $f$  este mărginită dacă și numai dacă toate componentele sale reale  $f_1, f_2, \dots, f_m$  sunt mărginite.

Într-adevăr, pentru orice  $x \in E$ , avem

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

și

$$|f_i(x)| \leq \|f(x)\| \leq \sum_{i=1}^m |f_i(x)|.$$

Dacă funcția  $f(x)$  este mărginită, atunci funcția reală  $\|f(x)\|$  este mărginită, și din prima inegalitate deducem că funcția  $|f_i(x)|$ , deci și  $f_i(x)$ , este mărginită, pentru fiecare  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Reciproc, dacă funcțiile  $f_i(x)$  sunt mărginite, atunci și funcțiile  $|f_i(x)|$  sunt mărginite, deci suma lor  $\sum_{i=1}^m |f_i(x)|$  este mărginită. Din a doua inegalitate rezultă că funcția  $\|f(x)\|$ , deci și funcția  $f(x)$ , este mărginită.

Studiul funcțiilor vectoriale mărginate se reduce astfel la studiul funcțiilor reale mărginate.

Pentru funcțiile *reale* (de mai multe variabile) se poate da o definiție a funcțiilor majorate sau minorate, cum și a marginilor unei funcții, deoarece mulțimea valorilor este conținută în dreapta reală pe care avem definită relația de ordine.

Proprietățile marginilor unei funcții reale de mai multe variabile sunt aceleași ca și pentru funcțiile reale de o singură variabilă.

## § 5. Limite. Continuitate

### 1. Limite de funcții vectoriale

Definiția limitei unei funcții reale se extinde și pentru funcții vectoriale.

Fie mulțimea  $E \subset R^n$ ,  $x_0$  un punct de acumulare pentru  $E$  și funcția vectorială  $f: E \rightarrow R^m$ .

**D e f i n i t i e.** Se spune că un vector  $l \in R^m$  este limita funcției  $f$  în punctul  $x_0$ , dacă pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $l$  (în  $R^m$ ) există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  (în  $R^n$ ) astfel încât, oricăr ar fi  $x \in V \cap E$ ,  $x \neq x_0$ , să avem  $f(x) \in U$ . Se scrie

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ (sau } f(x) \rightarrow l \text{ cind } x \rightarrow x_0\text{).}$$

Propozițiile următoare dau definiții echivalente ale limitei. Demonstrația lor se face la fel ca și în cazul funcțiilor reale de o singură variabilă.

**P r o p o z i t i a 1.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , dacă și numai dacă, pentru orice sir  $x_k \rightarrow x_0$ ,  $x_k \in E$ ,  $x_k \neq x_0$ , avem  $f(x_k) \rightarrow l$ .

**P r o p o z i t i a 2.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , dacă și numai dacă, pentru orice număr  $\varepsilon > 0$ , există un număr  $\delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât, oricare ar fi  $x \neq x_0$  din  $E$  cu  $\|x - x_0\| < \delta(\varepsilon)$ , să avem  $\|f(x) - l\| < \varepsilon$ .

Se pot, de asemenea, da enunțuri în care se folosesc numai  $\varepsilon$  sau numai  $\delta$ :

**P r o p o z i t i a 3.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , dacă și numai dacă, pentru orice număr  $\varepsilon > 0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  ( $V$  depinde de  $\varepsilon$ ), astfel încât condițiile  $x \in V \cap E$  și  $x \neq x_0$  implică  $\|f(x) - l\| < \varepsilon$ .

**P r o p o z i t i a 4.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , dacă și numai dacă, pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $l$ , există un număr  $\delta > 0$  (care depinde de  $U$ ) astfel încât, condițiile  $x \in E$ ,  $x \neq x_0$  și  $\|x - x_0\| < \delta$  implică  $f(x) \in U$ .

O b s e r v a t i i . 1° În cazul spațiului  $R^p$  cu  $p \geq 2$ , nu am introdus puncte improprii la infinit. Așadar, dacă  $f: E \subset R^n \rightarrow R^m$ ,  $n \geq 2$ ,  $m \geq 2$ , atât punctul  $x_0$  cît și limita  $l$  sunt puncte obișnuite, respectiv în spațiile  $R^n$  și  $R^m$ .

2° În cazul funcțiilor vectoriale de o singură variabilă (reală)  $f: E \subset R \rightarrow R^m$ , se pot considera și limitele  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  dacă  $+\infty$  sau  $-\infty$  sint puncte de acumulare ale mulțimii  $E$ .

Definiția limitei, propoziția 1 și propoziția 3 conțin și acest caz.

3° În cazul funcțiilor *reale* de mai multe variabile  $f: E \subset R^n \rightarrow R$ , limita  $l$  poate fi  $+\infty$  și  $-\infty$ .

Definiția, propoziția 1 și propoziția 4 de mai sus conțin și acest caz.

4° În cazul funcțiilor vectoriale de o singură variabilă reală  $f: E \subset R \rightarrow R^m$  se pot defini limitele laterale într-un punct  $x_0$ , la fel ca și pentru funcțiile reale de o singură variabilă.

Dacă  $x_p = (x_{1p}, x_{2p}, \dots, x_{np})$  și  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , condiția  $x_p \xrightarrow{p} a$  este echivalentă cu condițiile

$$x_{1p} \xrightarrow{p} a_1, x_{2p} \xrightarrow{p} a_2, \dots, x_{np} \xrightarrow{p} a_n.$$

De aceea, în loc de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , limita se mai notează și astfel :

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Astfel, pentru o funcție de două variabile  $f(x, y)$ , limita sa în punctul  $x_0, y_0$  se scrie

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y).$$

Se spune că aceasta este limita funcției  $f$  cind  $x$  și  $y$  tind independent (dar simultan) către  $x_0$  și, respectiv,  $y_0$ . În acest caz propoziția 2 se poate transcrie astfel :

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = l$ , dacă și numai dacă, pentru orice număr  $\varepsilon > 0$ , există un număr  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât oricare ar fi  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$  din  $E$  cu  $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$  și  $|y - y_0| < \delta(\varepsilon)$ , să avem  $\|f(x, y) - l\| < \varepsilon$ .

Se definește limita funcției  $f: E \subset R^n \rightarrow R^m$  relativ la o submulțime  $A \subset E$ , într-un punct de acumulare  $a$  al lui  $A$ , la fel ca și pentru funcții reale de o singură variabilă :

Un vector  $l \in R^m$  este limita funcției  $f$  în punctul  $a$  relativ la submulțimea  $A$ , dacă pentru orice sir  $x_p \rightarrow a$ ,  $x_p \in A$ ,  $x_p \neq a$ , avem  $f(x_p) \rightarrow l$ . Se notează

$$l = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x).$$

Dacă  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  există, atunci și  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$  există și cele două limite sunt egale. Dacă însă există  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$ , nu rezultă neapărat că există  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

În particular, dacă  $A$  este intersecția mulțimii  $E$  cu o dreaptă, care trece prin  $a$ , atunci  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$  se numește limita funcției  $f$  după o direcție.

De exemplu, în cazul unei funcții  $f(x, y)$  de două variabile reale, dacă ecuația dreptei este  $y = h(x)$ , limita se scrie  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ y = h(x)}} f(x, y)$ . Se zice că aceasta

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0 \\ y = h(x)}} f(x, y).$$

este limita funcției  $f$  cind  $x$  și  $y$  tind simultan dar *dependent* pe dreapta  $y = h(x)$ , respectiv către  $x_0$  și  $y_0$ . În fapt, aceasta este o limită a funcției compuse de o singură variabilă  $f(x, h(x))$ :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, h(x)).$$

Toate proprietățile limitelor de funcții reale, care nu implică relația de ordine și produsul, se păstrează și pentru funcțiile vectoriale și demonstrațiile sunt aceleași.

1) *Limita unei funcții vectoriale într-un punct, dacă există, este unică.*

2) *Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x)\| = \|l\|$ .*

**Observație.** Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x)\| = \|l\|$ , nu rezultă că  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  există.

Dacă însă  $\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x)\| = 0$ , atunci  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  dacă și numai dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - l] = 0$ , adică dacă și numai dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x) - l\| = 0$ .

4) *Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0$ , atunci există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât  $f(x) \neq 0$  oricare ar fi  $x \neq x_0$  din  $V \cap E$ .*

5) *Funcția  $f$  are limită în  $x_0$  dacă și numai dacă, pentru orice număr  $\varepsilon > 0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât oricare ar fi  $x'$ ,  $x'' \in V \cap E$ ,  $x' \neq x_0$ ,  $x'' \neq x_0$ , să avem  $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$ .*

6) **Criteriu.** *Dacă  $f: E \rightarrow R^m$  și  $h: E \rightarrow R$ , dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0$ , și dacă există un vector  $l \in R^m$  și o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel încât să avem*

$$\|f(x) - l\| \leq h(x)$$

*pentru orice  $x \neq x_0$  din  $V \cap E$ , atunci*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

7) *Dacă  $f: E \rightarrow R^m$  și  $g: E \rightarrow R^m$  au limite în  $x_0$ , atunci funcțiile  $f + g$ ,  $fg: E \rightarrow R^m$  au limită în  $x_0$  și*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

8) *Dacă  $f: E \rightarrow R^m$  și  $\varphi: E \rightarrow R$  au limită în  $x_0$ , atunci funcția  $\varphi f: E \rightarrow R^m$  are limită în  $x_0$  și*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [\varphi(x)f(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

În particular, pentru  $\varphi(x) = \alpha$ , deducem  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(f(x)) = \alpha \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

**O b s e r v a t i e.** Funcțiile  $f: E \rightarrow R^m$  care au limită în  $x_0$  formează o algebră, iar operația de trecere la limită este liniară și multiplicativă pe acest spațiu.

Propoziția următoare reduce studiul limitelor de funcții vectoriale la cel al limitelor componentelor reale:

**P r o p o z i t i e.** Fie funcția  $f: E \subset R^n \rightarrow R^m$  și  $f_1, f_2, \dots, f_m: E \rightarrow R$  componente sale reale:  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ . Atunci:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  dacă și numai dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = l_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , unde  $l = (l_1, l_2, \dots, l_m) \in R^m$ .

Pentru demonstrație se folosește propoziția asemănătoare de la șururile de puncte din  $R^m$ :

Fie  $x_k \xrightarrow[k]{} x_0$ ,  $x_k \in E$ ,  $x_k \neq x_0$ . Avem

$$f(x_k) \rightarrow l \Leftrightarrow f_i(x_k) \rightarrow l_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

deci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = l_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

**O b s e r v a t i i.** 1° Toate proprietățile precedente se pot obține din această propoziție, dacă în prealabil s-au demonstrat aceste proprietăți pentru funcțiile reale de mai multe variabile. Demonstrațiile acestor proprietăți se fac însă mai simplu, folosind direct definițiile limitelor vectoriale ca și în cazul funcțiilor reale de o singură variabilă.

2° Este posibil ca pentru o funcție vectorială  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  una din componente sale reale să aibă limită infinită. În acest caz funcția vectorială nu mai are limită. Se poate extinde propoziția precedentă și în acest caz, dacă se adaugă spațiului  $R^n$  puncte la infinit.

Astfel, în cazul planului  $R^2$ , ar trebui să adăugăm o mulțime infinită de puncte la infinit, de forma:

$$(-\infty, -\infty), (-\infty, +\infty), (+\infty, -\infty), (+\infty, +\infty), (-\infty, a), (a, -\infty),$$

$$(+\infty, a), (a, +\infty), a \in R.$$

Această convenție ar complica studiul care urmează.

În asemenea situații este de preferat a cerceta limitele componentelor reale.

**E x e m p l e.** 1)  $f(x, y) = x + y$ , definită pe  $R^2$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x + y) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} (x + y) = a + b = f(a, b).$$

2)  $f(x, y) = xy$ , definită pe  $R^2$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} xy = ab = f(a, b).$$

3)  $f(x, y) = \frac{x}{y}$ , definită pentru  $y \neq 0$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{x}{y} = \frac{a}{b} = f(a, b), \text{ dacă } b \neq 0.$$

4)  $f(x, y) = x^y$ , definită pentru  $x > 0$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} x^y = a^b = f(a, b), \text{ dacă } a > 0.$$

## 2. Limite iterate

Fie  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  o funcție vectorială de  $n$  variabile,  $f: E \subset R^n \rightarrow R^m$ . Din această funcție putem obține funcții vectoriale de o singură variabilă, și anume, funcțiile sale parțiale:

$$\begin{aligned}f_1 &: x_1 \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\f_2 &: x_2 \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\f_n &: x_n \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Se pot considera atunci limitele acestor funcții de o singură variabilă:

$$\lim_{x_i \rightarrow a_i} f_i(x_i) = \lim_{x_i \rightarrow a_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dacă  $a_i$  este punct de acumulare al mulțimii  $E_i = \{x_i \mid x_i \in R, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E\}$ . Limita funcției  $f_i$  este un număr care depinde de celelalte  $n - 1$  variabile reale, diferite de  $x_i$ .

Se poate considera apoi

$$\lim_{x_j \rightarrow a_j} \lim_{x_i \rightarrow a_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i \neq j.$$

Această limită este un număr care depinde de celelalte  $n - 2$  variabile diferite de  $x_i$  și  $x_j$ . Se poate considera limita iterată a acestei funcții în raport cu toate variabilele pe rând. Această limită este un număr care nu mai depinde de nici una din variabile. Aceasta se numește *limita iterată* a funcției  $f$ .

De exemplu, pentru funcțiile de două variabile  $f(x, y)$  se pot considera limitele iterate

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y).$$

Se spune că acestea sunt limitele funcției  $f(x, y)$  cind  $x$  și  $y$  tind *succesiv*, respectiv către  $x_0$  și  $y_0$ . Legătura dintre limite și limitele iterate este dată de următoarea

**Proprietate. Dacă există limita funcției într-un punct și una din limitele iterate în acest punct, atunci aceste limite sunt egale.**

Pentru a simplifica scrisul, vom da demonstrația în cazul funcțiilor de două variabile  $f: E \subset R^2 \rightarrow R^m$ . Fie  $(x_0, y_0)$  un punct de acumulare al mulțimii  $E$ ; să presupunem că există limitele

$$l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \text{ și } l_{12} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y).$$

Vom arăta că  $l = l_{12}$ .

Pentru fiecare  $x \in \text{pr}_1 E$  să notăm

$$F(x) = \lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y),$$

deci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = l_{12}.$$

Fie  $\epsilon > 0$  oarecare. Deoarece  $l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $(x_0, y_0)$ , astfel

incit să avem

$$\|f(x, y) - l\| < \epsilon$$

oricare ar fi  $(x, y) \neq (x_0, y_0)$  din  $V$ . Deoarece pentru fiecare  $x \in \text{pr}_1 E_1$ , există  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = F(x)$ , atunci

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \|f(x, y) - l\| = \|F(x) - l\|.$$

Trecind la limită în inegalitatea precedentă, obținem

$$\|F(x) - l\| < \epsilon$$

pentru orice  $x$ , astfel ca  $(x, y_0) \in V$ . Rezultă atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \|F(x) - l\| = \lim_{x \rightarrow x_0} \|F(x) - l\| = \|l_{12} - l\| < \epsilon.$$

Deoarece  $\epsilon > 0$  a fost ales arbitrar, rezultă că  $l = l_{12}$ .

**O b s e r v a t i i.** 1° Dacă există numai una din cele trei limite

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y), \quad \lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ x \rightarrow x_0}} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$$

nu rezultă că și celelalte două limite există.

Este posibil ca numai una sau numai două din aceste limite să existe.

2° Dacă limita nu există, limitele iterate pot exista amândouă și să fie diferite.

3° Este posibil ca, deși  $(x_0, y_0)$  este punct de acumulare al mulțimii  $E$ , mulțimea  $\{(x, y) \in R, (x, y) \in E\}$  să nu aibă pe  $x_0$  ca punct de acumulare, oricare ar fi  $y$ . În acest caz nu are sens  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ , oricare ar fi  $y$ .

De exemplu, dacă  $E$  este un segment de dreaptă paralel cu axa  $Oy$ , proiecția sa pe axa  $Ox$  este formată dintr-un singur punct.

### 3. Continuitatea funcțiilor vectoriale

Definiția continuității funcțiilor reale de o singură variabilă se extinde și pentru funcții vectoriale.

Fie funcția  $f: E \subset R^n \rightarrow R^m$  și un punct  $x_0 \in E$ .

**D e f i n i t i e.** Se spune că funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0$  dacă pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $f(x_0)$  există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  astfel incit oricare ar fi  $x \in V \cap E$  să avem  $f(x) \in U$ .

Următoarele propoziții dau definiții echivalente ale continuității:

**Propozitie 1.** Funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0$ , dacă și numai dacă, pentru orice sir  $x_p \xrightarrow[p]{} x_0$ ,  $x_p \in E$ , avem  $f(x_p) \xrightarrow[p]{} f(x_0)$ .

**Propozitie 2.** Funcția  $f$  este continuă în  $x_0$ , dacă și numai dacă, pentru orice număr  $\varepsilon > 0$ , există un număr  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât oricare ar fi  $x \in E$  cu  $\|x - x_0\| < \delta(\varepsilon)$  să avem  $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ .

**Propozitie 3.** Funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0$ , dacă și numai dacă, pentru orice număr  $\varepsilon > 0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  ( $V$  depinde de  $\varepsilon$ ) astfel încât, oricare ar fi  $x \in V \cap E$ , să avem  $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ .

**Propozitie 4.** Funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0$ , dacă și numai dacă, pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $f(x_0)$ , există un număr  $\delta > 0$  (care depinde de  $U$ ) astfel încât oricare ar fi  $x \in E$  cu  $\|x - x_0\| < \delta$  să avem  $f(x) \in U$ .

**Propozitie 5.** Funcția  $f$  este continuă în punctul  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in E$ , dacă și numai dacă, pentru orice număr  $\varepsilon > 0$  (sau pentru orice vecinătate  $U$  a lui  $f(a)$ ) există un număr  $\delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât oricare ar fi punctul  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$  cu  $|x_1 - a_1| < \delta$ ,  $|x_2 - a_2| < \delta$ ,  $\dots$ ,  $|x_n - a_n| < \delta$  să avem  $\|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)\| < \varepsilon$  (respectiv  $f(x) \in U$ ).

Dacă  $x_0$  este punct de acumulare pentru  $E$  se poate da o definiție a continuității cu ajutorul limitei:

**Propozitie 6.** Funcția  $f$  este continuă în punctul  $x_0$ , dacă și numai dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , adică dacă și numai dacă

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x) - f(x_0)\| = 0.$$

Se spune că funcția  $f$  este continuă pe mulțimea  $E$ , dacă este continuă în fiecare punct din  $E$ .

Proprietățile funcțiilor reale continue, care nu implică relația de ordine, rămân valabile și pentru funcțiile vectoriale continue:

1) Dacă funcția  $f(x)$  este continuă în punctul  $x_0$  (sau pe  $E$ ), atunci funcția  $\|f(x)\|$  este continuă în  $x_0$  (respectiv pe  $E$ ).

Proprietatea reciprocă nu este în general adevărată.

2) Dacă  $f$  este continuă în  $x_0$  și  $f(x_0) \neq 0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  pe care funcția este diferită de 0.

3) Dacă  $f$  este continuă în  $x_0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$  pe care funcția  $f$  este mărginită.

4) Dacă  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  există în  $R^n$ , atunci  $f$  se poate prelungi prin continuitate în punctul  $x_0$ , punând  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

5) Dacă  $f$  și  $g$  sunt continue în  $x_0$  (sau pe  $E$ ), iar  $\varphi : E \rightarrow R$  este continuă în  $x_0$  (sau pe  $E$ ), atunci funcțiile  $f + g$ ,  $fg$ ,  $(f|g)$  și  $\varphi f$  sunt continue în  $x_0$  (sau pe  $E$ ). În particular, funcția  $\alpha f$  este continuă în  $x_0$  (sau pe  $E$ ) oricare ar fi  $\alpha \in R$ .

**O b s e r v a t i e.** Multimea funcțiilor vectoriale definite pe  $E \subset R^n$  și continue în  $x_0 \in E$  (sau pe  $E$ ) este o algebră.

6) Fie mulțimile  $E \subset R^n$  și  $F \subset R^m$ . Dacă funcția  $f : E \rightarrow F$  este continuă în punctul  $x_0 \in E$ , iar funcția  $g : F \rightarrow R^p$  este continuă în punctul  $y_0 = f(x_0) \in F$ , atunci funcția compusă  $gof : E \rightarrow R^p$  este continuă în  $x_0 \in E$ .

Dacă  $f$  este continuă pe  $E$  și  $g$  este continuă pe  $F$ , atunci funcția compusă  $gof$  este continuă pe  $E$ .

**P r o p o z i t i e.** Funcția vectorială  $f : E \subset R^n \rightarrow R^m$  este continuă într-un punct  $x_0 \in E$ , dacă și numai dacă fiecare din componentele sale reale  $f_1, f_2, \dots, f_m : E \rightarrow R$  este continuă în  $x_0$ .

Propoziția rezultă din inegalitățile

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq \|f(x) - f(x_0)\| \leq \sum_{i=1}^m |f_i(x) - f_i(x_0)|$$

aplicând, de exemplu, definiția cu  $\epsilon$  și  $\delta$  a continuității.

**O b s e r v a t i e.** Propoziția precedentă reduce studiul continuității funcțiilor vectoriale de mai multe variabile la acela al continuității componentelor lor reale de mai multe variabile.

**Exemplu.** Funcțiile  $f(x, y) = x + y$ ,  $f(x, y) = xy$ ,  $f(x, y) = \frac{x}{y}$ ,  $f(x, y) = x^y$  sunt continue pe toată multimea lor de definiție.

Fie  $A \subset R$  și  $f : A \rightarrow R$ . Dacă funcția  $f$  este continuă pe  $A$ , atunci funcția vectorială  $x \mapsto (x, f(x))$  definită pe  $A$  cu valori în plan este continuă pe  $A$ . Imaginea mulțimii  $A$  prin funcția vectorială  $F(x) = (x, f(x))$  este chiar graficul funcției reale  $f(x)$ .

#### 4. Continuitate parțială

Fie funcția  $f : E \subset R^n \rightarrow R^m$  și  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  un punct din  $E$ . Să considerăm funcția parțială (de o singură variabilă)

$$f_i : x_i \rightarrow f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

definită pe multimea

$$E_i = \{x_i \mid x_i \in R, (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in E\}.$$

Dacă funcția parțială  $f_i$  este continuă în punctul  $a_i \in E$ , spunem că funcția  $f$  este continuă (parțial) în raport cu variabila  $x_i$  în punctul  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

A spune că funcția  $f(x_1, \dots, x_n)$  este continuă parțial în raport cu  $x_i$  în punctul  $a$  înseamnă că, pentru orice număr  $\epsilon > 0$ , există un număr

$\delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât, oricare ar fi  $x_i \in E_i$  cu  $|x_i - a_i| < \delta(\varepsilon)$  să avem  $\|f_i(x_i) - f_i(a_i)\| < \varepsilon$ , adică

$$\|f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)\| < \varepsilon.$$

Dacă funcția  $f$  este continuă în punctul  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , vom spune adesea că este continuă în acest punct *în raport cu ansamblul variabilelor*, pentru a deosebi de continuitatea parțială în raport cu cîte o variabilă.

**Propozitie.** Dacă funcția  $f$  este continuă într-un punct  $a = (a_1, \dots, a_n)$  (în raport cu ansamblul variabilelor), atunci ea este continuă în acest punct în raport cu fiecare variabilă.

Într-adevăr, dacă funcția  $f$  este continuă în punctul  $a$ , atunci:

Pentru orice număr  $\varepsilon > 0$ , există un număr  $\delta(\varepsilon)$ , astfel încît oricare ar fi punctul  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$  cu  $|x_1 - a_1| < \delta$ ,  $|x_2 - a_2| < \delta$ , ...,  $|x_n - a_n| < \delta$ , să avem

$$\|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)\| < \varepsilon.$$

Rezultă atunci, în particular, că, dacă  $|x_1 - a_1| < \delta$ ,  $x_1 = a_1$ , ...,  $x_n = a_n$ , avem

$$\|f(x_1, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)\| < \varepsilon$$

și deci funcția  $f$  este continuă în raport cu variabila  $x_1$  în punctul  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Continuitatea în raport cu celelalte variabile se demonstrează la fel.

**Observație.** Dacă funcția  $f$  este continuă într-un punct în raport cu fiecare variabilă în parte, nu rezultă că ea este continuă în acest punct în raport cu ansamblul variabilelor.

**Exemplu.** Fie funcția  $f(x, y)$  definită pe  $R^2$  astfel:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \text{ dacă } x \neq 0 \text{ și } y \neq 0, \quad f(0, 0) = 0.$$

Avem  $f(x, 0) \equiv 0$  pentru orice  $x \in R$ , deci  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0 = f(0, 0)$ , adică  $f$  este continuă în origine în raport cu variabila  $x$ .

De asemenea,  $f(0, y) \equiv 0$  pentru orice  $y \in R$ , deci  $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0 = f(0, 0)$ , adică  $f$  este continuă în origine în raport cu variabila  $y$ .

Dar funcția nu este continuă în origine (în raport cu ansamblul variabilelor) deoarece nu are limită în acest punct.

Într-adevăr, pentru  $x \neq 0$  avem

$$f(x, y) = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Fie dreapta  $y = mx$  care trece prin origine, cu coeficientul unghiular  $m$ . Dacă luăm sirul  $(x_n, y_n) \rightarrow 0$  de puncte pe această dreaptă, avem  $y_n = mx_n$  pentru orice  $n \in N$  și  $f(x_n, y_n) = \frac{m}{1 + m^2}$ , deci  $f(x_n, y_n) \rightarrow \frac{m}{1 + m^2}$ .

Limita  $\frac{m}{1 + m^2}$  depinde de dreapta pe care se află sirul de puncte  $(x_n, y_n) \rightarrow 0$ .

Pentru drepte diferite, cu coeficienți unghiulari diferiți, obținem limite diferite, deci funcția nu are limită în origine.

## 5. Funcții vectoriale uniform continue

Fie funcția  $f: E \subset R^n \rightarrow R^m$ .

**D e f i n i t i e.** Funcția  $f$  este uniform continuă (pe  $E$ ) dacă pentru orice număr  $\varepsilon > 0$  există un număr  $\delta(\varepsilon)$  astfel încât oricare ar fi punctele  $x', x'' \in E$ , cu  $\|x' - x''\| < \delta$ , să avem  $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$ .

**P r o p o z i t i e.** O funcție vectorială  $f: E \subset R^n \rightarrow R^m$  este uniform continuă dacă și numai dacă toate componentele sale reale  $f_1, f_2, \dots, f_m: E \rightarrow R$  sunt uniform continue.

Propoziția rezultă din inegalitățile

$$|f_i(x') - f_i(x'')| \leq \|f(x') - f(x'')\| \leq \sum_{i=1}^n |f_i(x') - f_i(x'')|,$$

deoarece inegalitatea  $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$  implică  $|f_i(x') - f_i(x'')| < \varepsilon$ , pentru fiecare  $i = 1, 2, \dots, n$ , iar inegalitățile  $|f_i(x') - f_i(x'')| < \frac{\varepsilon}{n}$  pentru  $i = 1, 2, \dots, n$  implică  $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$ .

Propoziția precedentă reduce studiul funcțiilor vectoriale (de mai multe variabile) uniform continue la studiul continuității uniforme a componentelor lor reale (care sunt funcții reale de mai multe variabile).

**P r o p o z i t i e.** Dacă funcția  $f$  este uniform continuă (în raport cu ansamblul variabilelor), atunci ea este uniform continuă în raport cu fiecare variabilă (pentru valori fixate ale celorlalte variabile).

Intr-adevăr, să spune că  $f$  este uniform continuă înseamnă că pentru orice număr  $\varepsilon > 0$  există un număr  $\delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât oricare ar fi punctele

$x' = (x'_1, \dots, x'_n)$  și  $x'' = (x''_1, \dots, x''_n)$  din  $E$  cu  $|x' - x''| < \delta$ , să avem

$$\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon,$$

adică

$$\|f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) - f(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)\| < \varepsilon.$$

Dacă luăm  $x'_2 = x''_2 = a_2, \dots, x'_n = x''_n = a_n$ , atunci

$$|x'_1 - x''_1| = \|(x'_1, a_2, \dots, a_n) - (x''_1, a_2, \dots, a_n)\|.$$

Deci, dacă  $|x'_1 - x''_1| < \varepsilon$ , avem

$$\|f(x'_1, a_2, \dots, a_n) - f(x''_1, a_2, \dots, a_n)\| < \varepsilon,$$

adică  $f$  este uniform continuă în raport cu variabila  $x_1$ , atunci cind se dă celorlalte variabile valori fixate  $a_2, a_3, \dots, a_n$ .

Continuitatea uniformă în raport cu celelalte variabile se demonstrează la fel.

**O b s e r v a t i e.** Dacă  $f$  este uniform continuă în raport cu fiecare variabilă, nu rezultă că ea este uniform continuă.

*Exemplu.* Funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dacă } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{dacă } x = y = 0. \end{cases}$$

definită pe pătratul  $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ , nu este continuă în origine (deci nu este uniform continuă).

Pentru orice  $y \in [-1, 1]$ , funcția parțială  $x \rightarrow f(x, y)$ , definită pe intervalul compact  $[-1, 1]$ , este continuă, deci uniform continuă.

De asemenea, pentru orice  $x \in [-1, 1]$ , funcția parțială  $y \rightarrow f(x, y)$ , definită pe  $[-1, 1]$ , este continuă, deci uniform continuă.

## 6. Funcții vectoriale continue pe mulțimi compacte

Proprietățile funcțiilor reale de o singură variabilă, și continue pe o mulțime compactă, se păstrează și pentru funcțiile vectoriale și cu aceleași demonstrații (înlocuind modulul cu norma):

- 1) O funcție vectorială continuă pe o mulțime compactă este mărginită pe această mulțime.
- 2) O funcție vectorială continuă pe o mulțime compactă este uniform continuă.
- 3) O funcție vectorială continuă transformă o mulțime compactă tot într-o mulțime compactă.
- 4) O funcție reală de  $n$  variabile, continuă pe o mulțime compactă  $E \subset R^n$ , își atinge efectiv marginile pe această mulțime.

**O b s e r v a t i e.** Pe spațiul  $R^m$  cu  $m \geq 2$ , nu s-a definit o relație de ordine, deci pentru funcțiile vectoriale cu valori în  $R^m$  nu au sens marginile acestei funcții.

În acest caz se poate enunța o proprietate pentru funcția reală  $\|f(x)\|$ :

5) Dacă  $f$  este o funcție vectorială continuă pe o mulțime compactă  $E$ , atunci există un punct  $x_M \in E$  astfel încât  $\|f(x_M)\| = \sup_{x \in E} \|f(x)\|$ .

Se ține seama de faptul că funcția reală  $\|f(x)\|$  este continuă pe  $E$  și se aplică proprietatea 4.

**O b s e r v a t i e.** Fie  $A \subset R$  o mulțime compactă și o funcție reală continuă  $f: A \rightarrow R$ . Graficul funcției  $f$  este o mulțime compactă în plan.

Într-adevăr, graficul lui  $f$  este egal cu imaginea mulțimii  $A$  prin funcția vectorială continuă  $F(x) = (x, f(x))$  definită pe  $A$  cu valori în  $R^2$ .

## 7. Funcții vectoriale continue pe mulțimi conexe

Pentru funcțiile continue, pe toată mulțimea de definiție, se pot da anumite criterii de continuitate cu ajutorul imaginilor inverse.

Fie  $E \subset R^n$ ,  $E' \subset R^{n'}$  și funcția  $f: E \rightarrow E'$  astfel ca  $f(E) = E'$ .

**Propozitie.** Funcția  $f$  este continuă pe mulțimea  $E$ , dacă și numai dacă, pentru orice mulțime deschisă  $G' \subset R^n$ , există o mulțime deschisă  $G \subset R^n$ , astfel ca

$$G \cap E = f(G' \cap E').$$

Să presupunem întii că  $f$  îndeplinește condiția din enunț și să arătăm că este continuă pe  $E$ . Fie  $x_0 \in E$  oarecare și fie  $V'$  o vecinătate a lui  $f(x_0)$ ;  $V'$  este deschisă în  $R^n$ .

Conform presupunerii există deci o mulțime deschisă  $G \subset R^n$ , astfel ca  $G \cap E = f(V' \cap E')$ .

Dar  $f(x_0) \in V' \cap E'$ , deci  $x_0 \in f(V' \cap E')$ , adică  $x_0 \in G \cap E$ . În particular  $x_0 \in G$  și, deoarece  $G$  este deschisă,  $x_0$  este punct interior al său; există deci o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel ca  $x_0 \in V \subset G$ . Oricare ar fi  $x \in V \cap E$  avem deci  $x \in G \cap E = f(V' \cap E')$ , deci  $f(x) \in V' \cap E'$ , și deci  $f(x) \in V'$ . Așadar,  $f$  este continuă în  $x_0$ . Cum  $x_0$  a fost ales arbitrar în  $E$ , rezultă că  $f$  este continuă pe  $E$ .

Reciproc, să presupunem că  $f$  este continuă pe  $E$  și fie  $G' \cap R^n$  o mulțime deschisă.

Dacă  $f(G' \cap E') = \emptyset$ , atunci luăm  $G = \emptyset$  (care este deschisă în  $R^n$ ) și deci

$$G \cap E = \emptyset = f(G' \cap E').$$

Să presupunem, așadar, că  $f(G' \cap E') \neq \emptyset$ , adică  $G' \cap E' \neq \emptyset$ . Să notăm  $H = f(G' \cap E')$ , deci  $f(H) = G' \cap E'$  și să arătăm că există o mulțime deschisă  $G$  în  $R^n$ , astfel ca  $G \cap E = H = f(G' \cap E')$ . Evident,  $H \subset E$ .

Fie  $x_0 \in H$  oarecare; atunci  $f(x_0) \in f(H) = G' \cap E' \subset G'$  și, deoarece  $G'$  este deschisă,  $f(x_0)$  este punct interior al său; există o vecinătate  $V'$  a lui  $f(x_0)$ , astfel ca

$$f(x_0) \in V' \subset G'.$$

Deoarece  $f$  este continuă în  $x_0$ , lui  $V'$  ii corespunde o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , astfel ca pentru orice  $x \in V \cap E$  să avem  $f(x) \in V'$ , adică  $f(V \cap E) \subset V' \subset G'$ ; deoarece avem, de asemenea,  $f(V \cap E) \subset E'$ , rezultă că  $f(V \cap E) \subset G' \cap E'$ , și deci

$$V \cap E \subset f(G' \cap E') = H.$$

Cum  $x_0$  a fost ales arbitrar, deducem că pentru orice punct  $x \in H$  există o vecinătate  $V_x$  a lui  $x$ , astfel ca

$$V_x \cap E \subset H.$$

Să notăm  $G = \bigcup_{x \in H} V_x$ . Evident,  $H \bigcup_{x \in H} V_x$ , deci  $H \subset G$ ; cum avem, de asemenea,  $H \subset E$ , rezultă că

$$H \subset G \cap E.$$

Pe de altă parte,

$$G \cap E = (\bigcup_{x \in H} V_x) \cap E = \bigcup_{x \in H} (V_x \cap E) \subset H.$$

Din incluziunile  $H \subset G \cap E$  și  $G \cap E \subset H$ , deducem

$$G \cap E = H = f(G' \cap E')$$

și propoziția este complet demonstrată.

**C o r o l a r .** Funcția  $f$  este continuă pe  $E$  dacă și numai dacă, pentru orice mulțime închisă  $M' \subset R^n$ , există o mulțime închisă  $M \subset R^n$ , astfel ca

$$M \cap E = f(M' \cup E').$$

Pentru demonstrație se folosește propoziția precedentă, cu mulțimile deschise  $G' = \complement M'$  și  $G = \complement M$ .

**P r o p o z i t i e.** Imaginea unei mulțimi conexe printr-o funcție continuă este o mulțime conexă.

Fie  $E \subset R^n$  o mulțime conexă și o funcție continuă  $f : E \rightarrow R^n$ . Să notăm  $E' = f(E)$  și să arătăm că  $E'$  este conexă.

Să presupunem prin absurd că  $E'$  nu-ar fi conexă. Aceasta înseamnă că există două mulțimi deschise  $G'_1$  și  $G'_2$  în  $R^n$ , astfel ca

$$E' \subset G'_1 \cup G'_2, G'_1 \cap E' \neq \emptyset, G'_2 \cap E' \neq \emptyset \text{ și } E' \cap G'_1 \cap G'_2 = \emptyset.$$

Deoarece  $f$  este continuă pe  $E$ , mulțimilor deschise  $G'_1$  și  $G'_2$  în  $R^n$  le corespund două mulțimi deschise  $G_1$  și  $G_2$  în  $R^n$ , astfel ca

$$G_1 \cap E = f(G'_1 \cap E'), G_2 \cap E = f(G'_2 \cap E').$$

Deoarece  $G'_1 \cap E' \neq \emptyset$  și  $G'_2 \cap E' \neq \emptyset$ , deducem că

$$G_1 \cap E \neq \emptyset \text{ și } G_2 \cap E \neq \emptyset.$$

Deoarece  $E' \cap G'_1 \cap G'_2 = \emptyset$ , rezultă că  $E \cap G_1 \cap G_2 = \emptyset$ .

**Intr-adevăr**

$$\begin{aligned} E \cap G_1 \cap G_2 &= (E \cap G_1) \cap (E \cap G_2) = f(E' \cap G'_1) \cap f(E' \cap G'_2) = \\ &= f((E' \cap G'_1) \cap (E' \cap G'_2)) = f(G'_1 \cap G'_2 \cap E'). \end{aligned}$$

În sfîrșit, deoarece  $E' \subset G'_1 \cup G'_2$ , rezultă că  $E \subset G_1 \cup G_2$ .

**Intr-adevăr.**  $E' = E' \cap (G_1 \cup G_2) = (E' \cap G'_1) \cup (E' \cap G'_2)$ . Atunci

$$\begin{aligned} E = f^{-1}(E') &= f((E' \cap G'_1) \cup (E' \cap G'_2)) = f(E' \cap G'_1) \cup f(E' \cap G'_2) = \\ &= (E \cap G_1) \cup (E \cap G_2) = E \cap (G_1 \cup G_2) \end{aligned}$$

și deci

$$E \subset G_1 \cup G_2.$$

Presupunerea că  $E'$  nu este conexă conduce la existența a două mulțimi deschise  $G_1$  și  $G_2$  în  $R^n$  cu proprietățile următoare:

$$E \subset G_1 \cup G_2, E \cap G_1 \neq \emptyset, E \cap G_2 \neq \emptyset, E' \cap G'_1 \cap G'_2 = \emptyset.$$

Aceasta înseamnă că mulțimea  $E$  nu este conexă, ceea ce contrazice ipoteza din enunțul propoziției. Urmează, aşadar, că  $E'$  este conexă și propoziția este demonstrată.

**O b s e r v a t i i.** 1° Există și alte funcții care transformă mulțimile conexe tot în mulțimi conexe, și care nu sunt continue.

Vom spune că o funcție are proprietatea lui Darboux dacă transformă mulțimile conexe tot în mulțimi conexe.

Rezultă că funcțiile vectoriale continue au proprietatea lui Darboux.

2° Fie  $I \subset R$  un interval și o funcție reală continuă  $f = I \rightarrow R$ . *Graful funcției f este o mulțime conexă în plan.*

Într-adevăr, graficul lui  $f$  este egal cu imaginea intervalului  $I$  prin funcția vectorială continuă  $F(x) = (x, f(x))$  definită pe  $I$  cu valori în  $R^2$ .

### 8. Derivata funcțiilor vectoriale de o variabilă

Fie  $I$  un interval pe dreapta,  $f: I \rightarrow R^n$  o funcție vectorială și  $f_1, f_2, \dots, f_n: I \rightarrow R$  componentele sale reale

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Ca și pentru funcții reale, spunem că *funcția f este derivabilă într-un punct  $x_0 \in I$  dacă există limită*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Limita însăși se numește *derivata funcției f în punctul  $x_0$*  și se notează cu  $f'(x_0)$ :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă  $f$  este derivabilă în fiecare punct din  $I$ , supunem că  $f$  este derivabilă pe  $I$ .

Trebuie să observăm că "derivata  $f'(x_0)$ " este un vector din spațiul  $R^n$ , iar funcția derivată  $f'$  are valori în  $R^n$ .

Se definesc în mod asemănător derivele de ordin superior.

Propoziția următoare reduce studiul derivelei unei funcții vectoriale la acela al derivatelor componentelor sale reale.

**Propozitie.** Funcția  $f$  este derivabilă în punctul  $x_0 \in I$  dacă și numai dacă toate componentele sale reale  $f_1, \dots, f_n$  sunt derivabile în  $x_0$ . În acest caz avem

$$f'(x_0) = (f'_1(x_0), f'_2(x_0), \dots, f'_n(x_0)).$$

În adevăr avem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left( \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}, \dots, \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right).$$

Se aplică apoi proprietatea corespunzătoare de la limite de funcții.

**C o r o l a r.** Funcția  $f$  este derivabilă pe  $I$  dacă și numai dacă componentele sale reale sunt derivabile pe  $I$ . În acest caz avem

$$f' = (f'_1, f'_2, \dots, f'_n).$$

Proprietățile funcțiilor reale derivabile, în care nu este implicată relația de ordine, rămân adevărate și pentru funcții vectoriale derivabile.

1) Dacă  $f$  este derivabilă în  $x_0$  (sau pe  $I$ ) atunci  $f$  este continuă în  $x_0$  (sau pe  $I$ ).

2) Dacă  $f, g : I \rightarrow R^n$  sunt funcții derivabile în  $x_0$  (sau pe  $I$ ), iar  $\varphi : I \rightarrow R$  este o funcție reală derivabilă în  $x_0$  (sau pe  $I$ ), atunci funcțiile  $f + g$ ,  $fg$ ,  $(f|g)$ ,  $\varphi g$ ,  $\alpha f$  sunt derivabile în  $x_0$  (sau pe  $I$ ) și avem

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$$

$$(\varphi g)' = \varphi'g + \varphi g'$$

$$(\alpha f)' = \alpha f'.$$

Dacă, în plus,  $g$  nu se anulează în  $x_0$  (sau pe  $I$ ), atunci  $\frac{f}{g}$  este derivabilă în  $x_0$  (sau pe  $I$ ) și avem

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Demonstrațiile sunt aceleași ca și pentru funcții reale.

Teorema creșterilor finite nu mai este însă valabilă sub forma unei egalități, ci sub forma unei inegalități.

**T e o r e m ā.** Fie  $f : I \rightarrow R^n$  o funcție și  $a < b$  două puncte din  $I$ .

**Dacă:**

1)  $f$  este continuă pe intervalul închis  $[a, b]$ ;

2)  $f$  este derivabilă pe intervalul deschis  $(a, b)$ , atunci

$$||f(b) - f(a)|| \leq \sup_{a < x < b} ||f'(x)|| (b - a).$$

Dacă  $f'$  este nemărginită, avem  $\sup_{a < x < b} ||f'(x)|| = +\infty$  și inegalitatea este satisfăcută.

Să presupunem că  $f'$  este mărginită și să alegem un număr oarecare  $M > \sup_{a < x < b} ||f'(x)||$ . Fie  $c$  un punct astfel ca  $a < c < b$ . Deoarece  $f$  este derivabilă în  $c$  avem

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{||f(x) - f(c)||}{|x - c|} = ||f'(c)|| < M.$$

Există o vecinătate  $V \subset (a, b)$  a lui  $c$ , astfel încât să avem

$$\frac{\|f(x) - f(c)\|}{|x - c|} < M, \text{ pentru } x \neq c \text{ din } V,$$

deci

$$\|f(x) - f(c)\| \leq M|x - c|, \text{ pentru orice } x \in V.$$

Să notăm cu  $A$  mulțimea punctelor din  $[a, b]$  care verifică inegalitatea precedentă. Mulțimea  $A$  nu este vidă, deoarece  $V \subset A$ . Mulțimea  $A$  este mărginită. Fie  $a' = \inf A$  și  $b' = \sup A$ . Avem  $a', b' \in [a, b]$ . Deoarece  $f$  este continuă pe  $[a, b]$ , este continuă în  $a'$ . Înăind un sir  $x_n \rightarrow a'$  de puncte din  $A$  avem

$$\|f(x_n) - f(c)\| < M|x_n - c|,$$

de unde, prin trecere la limită,

$$\|f(a') - f(c)\| \leq M|a' - c|.$$

La fel se arată că

$$\|f(b') - f(c)\| \leq M|b' - c|.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \|f(b') - f(a')\| &= \|f(b') - f(c) - (f(a') - f(c))\| \leq \|f(b') - f(c)\| + \\ &+ \|f(a') - f(c)\| \leq M(b' - c) + M|a' - c| = M(b' - c) + M(c - a') = \\ &= M(b' - a'), \end{aligned}$$

adică

$$\|f(b') - f(a')\| \leq M(b' - a').$$

Să arătăm acum că  $a' = a$  și  $b' = b$ . Dacă, prin absurd, am avea  $a < a'$ , raționând ca mai sus cu  $a'$  în loc de  $c$ , putem găsi o vecinătate  $V' \subset (a, b)$  a lui  $a'$ , astfel încât să avem

$$\|f(x) - f(a')\| \leq M|x - a'|, \text{ pentru } x \in V'.$$

Atunci, pentru orice  $x < a'$  din  $V'$  avem

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(c)\| &= \|f(x) - f(a') + f(a') - f(c)\| \leq \|f(x) - f(a')\| + \\ &+ \|f(a') - f(c)\| \leq M|x - a| + M|a' - c| = M(a' - x) + M(c - a') = \\ &= M(c - x), \end{aligned}$$

deci orice  $x < a'$  din  $V'$  aparține mulțimii  $A$ , ceea ce contrazice faptul că  $a'$  este marginea inferioară a mulțimii  $A$ . Așadar  $a' = a$ . La fel se arată că  $b' = b$ .

Inegalitatea de mai sus se scrie

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a).$$

Deoarece  $M > \sup_{a < x < b} ||f'(x)||$  a fostales arbitrar, deducem  

$$||f(b) - f(a)|| \leq \sup_{a < x < b} ||f'(x)|| (b - a)$$
  
 și teorema este demonstrată.

## 9. Viteza și accelerația în mișcarea în spațiu

Să considerăm un mobil  $M$  care se mișcă în spațiul  $R^3$  într-un interval de timp  $I$ . În fiecare  $t \in I$  să notăm cu  $r(t)$  punctul din  $R^3$  în care se află mobilul  $M$ . Aceast mobil descrie o traекторie  $C$ , anume imaginea intervalului  $I$  prin funcția vectorială  $r(t)$ . Dacă notăm cu  $x(t)$ ,  $y(t)$  și  $z(t)$  componentele vectorului  $r(t)$ , în fiecare moment  $t$ , atunci

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in I \\ z = z(t) \end{cases}$$

este o reprezentare parametrică a traectoriei mobilului  $M$ . Avem

$$r = (x, y, z) = xi + yj + zk.$$

Să presupunem că funcția vectorială  $r(t)$  este derivabilă de două ori pe  $I$ .

Derivata întâi  $r'(t)$  se numește viteza mobilului și se notează de obicei cu  $v(t)$ :

$$v(t) = r'(t), = (x'(t), y'(t), z'(t)) = x'(t)i + y'(t)j + z'(t)k.$$

Viteza  $v(t)$  este tot o funcție vectorială definită pe  $I$ . Pentru fiecare punct  $t_0 \in I$ , vectorul viteza  $v(t_0)$  este tangent la curba  $C$  în punctul  $r(t_0)$ .

Derivata a doua  $r''(t)$  se numește accelerația mobilului și se notează de obicei cu  $a(t)$ :

$$a(t) = v'(t) = r''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) = x''(t)i + y''(t)j + z''(t)k.$$

Și accelerația este o funcție vectorială definită pe  $I$ .

## 10. Integrarea funcțiilor vectoriale de o variabilă

Fie  $f: [a, b] \rightarrow R^n$  o funcție vectorială și  $f_1, \dots, f_n: [a, b] \rightarrow R$  componentele sale reale

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n).$$

Ca și pentru funcții reale, spunem că funcția  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  dacă există un vector  $\bar{I} = (I_1, I_2, \dots, I_n) \in R^n$  cu proprietatea că oricare

ar fi sirul  $(d_n)$  de diviziuni ale lui  $[a, b]$  cu normele  $v(d_n) \rightarrow 0$  și oricare ar fi punctele intermediare  $\xi_i$  în fiecare diviziune, sirul corespunzător  $\sigma_{d_n}(f)$  al sumelor Riemanniene are limita  $I$ .

Limita  $I$  se numește integrala funcției  $f$  pe intervalul  $[a, b]$  și se notează  

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Propoziția următoare reduce studiul unei funcții vectoriale integrabile la acela al componentelor sale reale.

**Propozitie.** Funcția  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$  dacă și numai dacă toate componentele sale reale,  $f_1, f_2, \dots, f_n$  sunt integrabile pe  $[a, b]$ . În acest caz

$$\int_a^b f dx = \left( \int_a^b f_1 dx, \int_a^b f_2 dx, \dots, \int_a^b f_n dx \right).$$

Demonstrația folosește proprietatea corespunzătoare de la limite de funcții.

Folosind această propoziție, deducem că toate proprietățile integralei funcțiilor reale, în care nu intervine relația de ordine, rămân adevărate pentru funcții vectoriale.

Dăm intuii următorul criteriu de integrabilitate:

1) Funcția  $f$  este integrabilă dacă și numai dacă există un vector  $I \in \mathbb{R}^n$  cu proprietatea că oricare ar fi  $\epsilon > 0$ , există un număr  $\delta(\epsilon) > 0$  astfel încât oricare ar fi diviziunea  $d$  cu normă  $v(d) < \delta(\epsilon)$  și oricare ar fi punctele intermediare, să avem  $\|\sigma_d(f) - I\| < \epsilon$ .

2) Orice funcție integrabilă este mărginită.

Din criteriul lui Lebesgue pentru funcții reale se deduce următorul criteriu pentru funcții vectoriale.

3)  $f$  este integrabilă dacă și numai dacă este mărginită și continuu aproape peste tot.

În particular, funcțiile continue sunt integrabile.

4) Mulțimea funcțiilor integrabile  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  este o algebră, iar integrala  $\int_a^b f dx$  este liniară pe această algebră.

5) Proprietatea de integrabilitate este ereditară. Dacă  $a \leq c \leq b$ , atunci

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx.$$

6) Dacă  $f$  este integrabilă, atunci funcția reală  $\|f\|$  este integrabilă și avem

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx, \quad a < b.$$

În adevăr, pentru fiecare sumă integrală avem

$$\|\sigma_d(f)\| = \|\Sigma f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)\| \leq \Sigma \|f(\xi_i)\| (x_{i+1} - x_i) = \sigma_d(\|f\|).$$

Se alege apoi un sir  $(d_n)$  de diviziuni cu norma  $\nu(d_n) \rightarrow 0$  și se trece la limită.

7) Dacă  $f$  este integrabilă și  $\|f(x)\| \leq M$ , atunci

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq M(b-a).$$

8) Funcția  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  este continuă.

9) Dacă  $f$  este continuă într-un punct  $x_0$ , atunci funcția  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  este derivabilă în  $x_0$  și avem  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

Spunem că o funcție vectorială  $F : [a, b] \rightarrow R^n$  este o primitivă a funcției vectoriale  $f : [a, b] \rightarrow R^n$  dacă  $F$  este derivabilă și  $F' = f$ .

Studiul primitivelor funcțiilor vectoriale se reduce la acela al primitivelor componentelor sale, cu ajutorul propoziției următoare.

**Propozitie.** Funcția vectorială  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$  este o primitivă a funcției  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  dacă și numai dacă pentru fiecare  $i$  funcția reală  $F_i$  este o primitivă a funcției  $f_i$ .

De aici deducem că orice funcție continuă are primitive. Are loc formula lui Leibniz-Newton.

Dacă  $f$  este integrabilă și are primitive pe  $[a, b]$ , atunci

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

oricare ar fi primitiva  $F$  a lui  $f$ .

Are loc formula de integrare prin părți, atât pentru integrale nefinite cât și pentru integrale definite, funcțiile  $f$  și  $g$  fiind ambele vectoriale sau una vectorială și alta scalară.

De asemenea, au loc formulele de schimbare de variabilă, în aceleasi condiții ca și pentru funcții reale, funcția  $u$  fiind presupusă reală.

## § 6. Derivate parțiale. Diferențiale

### I. Derivate parțiale

Fie  $f(x, y)$  o funcție reală de două variabile definită pe o mulțime  $E \subset R^2$  și fie  $(x_0, y_0)$  un punct interior al lui  $E$ .

**D e f i n i t i e.** Spunem că funcția  $f(x, y)$  are în punctul  $(x_0, y_0)$  derivată parțială în raport cu variabila  $x$ , dacă există

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

și este finită. Limita însăși se numește derivata parțială în raport cu  $x$  a funcției  $f(x, y)$  în punctul  $(x_0, y_0)$  și se notează  $f'_x(x_0, y_0)$  sau  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ , sau  $D_x f(x_0, y_0)$ :

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Se definește în mod semănător derivata parțială în raport cu  $y$  a funcției  $f(x, y)$  în punctul  $(x_0, y_0)$ , notată  $f'_y(x_0, y_0)$  sau  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ , sau  $D_y f(x_0, y_0)$ , prin egalitatea

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

dacă limita există și este finită.

În loc de „derivata parțială în raport cu  $x$  (respectiv cu  $y$ )” se mai spune derivata parțială în raport cu prima variabilă (respectiv cu a doua variabilă) și se notează  $D_1 f(x_0, y_0)$  (respectiv  $D_2 f(x_0, y_0)$ ), mai ales atunci cind nu este necesar să se specifice modul în care se notează variabilele.

*Spunem că funcția  $f(x, y)$  are derivată parțială în raport cu  $x$  (respectiv cu  $y$ ) pe o mulțime  $A \subset E$ , dacă are derivată parțială în raport cu  $x$  (respectiv cu  $y$ ) în fiecare punct  $(x, y) \in A$ .*

Dacă funcția  $f$  are derivată parțială în raport cu  $x$  (respectiv cu  $y$ ) pe mulțimea  $A$ , funcția  $f'_x(x, y)$  (respectiv funcția  $f'_y(x, y)$ ) definită pe  $A$  se numește derivată parțială a funcției  $f$  în raport cu  $x$  (respectiv în raport cu  $y$ ) și se notează  $f'_x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $D_x f$ ,  $D_1 f$  (respectiv  $f'_y$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $D_y f$ ,  $D_2 f$ ).

În loc să spunem că funcția  $f$  are derivată parțială în raport cu  $x$  (respectiv cu  $y$ ) într-un punct  $(x, y)$  sau pe  $A$ , se spune adesea că derivata  $f'_x$  (respectiv derivata  $f'_y$ ) există în punctul  $(x, y)$  sau pe  $A$ .

Practic derivata parțială  $f'_x$  se calculează considerînd pe  $y$  constant și derivînd ca o funcție de o singură variabilă,  $x$ . Derivata parțială în raport cu  $y$  se calculează în mod asemănător.

*Exemplu.* 1) Fie funcția  $f(x, y) = x^2y^3 - xy$  definită pe semiplanul dechis  $x > 0$ . Avem

$$f'_x(x, y) = 2xy^3 - yxy^{-1}, f'_y(x, y) = 3x^2y^2 - xy \ln x.$$

2)  $f(x, y) = x + y$  definită pe  $R^2$

$$f'_x(x, y) \equiv 1, f'_y(x, y) \equiv 1.$$

3)  $f(x, y) = xy$  definită pe  $R^2$

$$f'_x(x, y) = y, f'_y(x, y) = x.$$

4)  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  definită pentru orice  $(x, y)$  cu  $y \neq 0$

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{y}, f'_y(x, y) = -\frac{x}{y^2}.$$

**O b s e r v a t i i.** 1° Derivata parțială a funcției  $f(x, y)$  în raport cu  $x$ , în punctul  $(x_0, y_0)$ , se poate defini chiar dacă  $(x_0, y_0)$  nu este punct interior al lui  $E$ .

Dacă mulțimea  $E$  conține un segment de dreaptă paralel cu axa  $Ox$ , care trece prin punctul  $(x_0, y_0)$ , atunci are sens limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

deoarece  $(x_0, y_0)$  este punct de acumulare al acestui segment. În acest caz, se poate defini  $f'_x(x_0, y_0)$ . De asemenea, dacă  $E$  conține un segment de dreaptă paralel cu axa  $Oy$  care trece prin  $(x_0, y_0)$ , se poate defini  $f'_y(x_0, y_0)$ .

Dacă mulțimea  $E$  nu conține nici un segment de dreaptă care să treacă prin  $(x_0, y_0)$  și care să fie paralel cu una din axe, atunci nu are sens nici una din derivele parțiale în punctul  $(x_0, y_0)$ .

De exemplu, dacă  $E$  este un segment de dreaptă neparalel cu axa  $Ox$ , sau o circumferință, derivele parțiale nu au sens în nici un punct din  $E$ .

2° Să considerăm proiecția  $E(y_0)$  pe axa  $Ox$  a mulțimii punctelor din  $E$  care au ordonata  $y_0$ :

$$E(y_0) = \{x | x \in R, (x, y_0) \in E\}.$$

Mulțimea  $E(y_0)$  conține punctul  $x_0$  în interiorul său.

Să considerăm funcția parțială

$$\varphi(x) = f(x, y_0)$$

definită pentru  $x \in E(y_0)$ . Funcția  $f(x, y)$  are derivată parțială în raport cu  $x$  în punctul  $(x_0, y_0)$ , dacă și numai funcția  $\varphi(x)$  de o singură variabilă este derivabilă în punctul  $x_0$ . În acest caz,

$$f'_x(x_0, y_0) = \varphi'(x_0).$$

În mod asemănător, să considerăm mulțimea

$$E(x_0) = \{y | y \in R, (x_0, y) \in E\}$$

și funcția parțială definită pe  $E(x_0)$ :

$$\psi(y) = f(x_0, y).$$

Funcția  $f(x, y)$  are derivată parțială în raport cu  $y$  în  $(x_0, y_0)$  dacă și numai dacă funcția  $\psi(y)$  este derivabilă în  $y_0$ . În acest caz avem

$$f'_y(x_0, y_0) = \psi'(y_0).$$

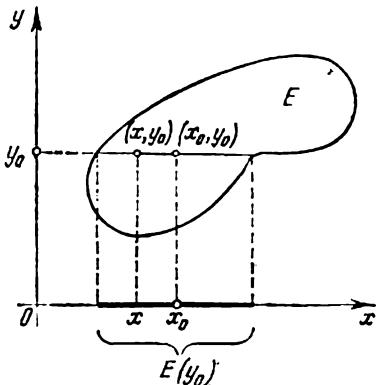


Fig. 142

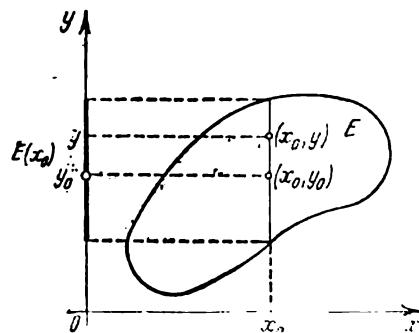


Fig. 143

**Propoziția 1.** Dacă derivata parțială  $f'_x$  (respectiv  $f'_y$ ) există în punctul  $(x_0, y_0)$ , atunci  $f$  este continuă în punctul  $(x_0, y_0)$  în raport cu  $x$  (respectiv cu  $y$ ).

Într-adevăr, deoarece funcția  $\varphi(x) = f(x, y_0)$  este derivabilă în  $x_0$ , ea este continuă în  $x_0$ . Aceasta înseamnă că funcția  $f(x, y)$  este continuă parțial în raport cu  $x$  în punctul  $(x_0, y_0)$ .

**Observație.** Dacă există ambele deriveate parțiale  $f'_x(x_0, y_0)$  și  $f'_y(x_0, y_0)$ , atunci funcția  $f(x, y)$  este continuă în  $(x_0, y_0)$  în raport cu fiecare variabilă în parte, dar nu în mod necesar în raport cu ansamblul variabilelor.

**Exemplu.** Fie funcția  $f(x, y)$  definită pe  $R^2$  astfel:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ dacă } (x, y) \neq (0, 0) \text{ și } f(0, 0) = 0.$$

Aveam  $f(x, 0) \equiv 0$ , deci  $f'_x(x, 0) \equiv 0$  și  $f'_x(0, 0) = 0$ . De asemenea,  $f'_y(0, 0) = 0$ . Funcția  $f(x, y)$  are în origine deriveate parțiale în raport cu fiecare variabilă, dar nu este continuă în acest punct. Într-adevăr, pe dreapta  $y = mx$ , ( $m \neq 0$ ), funcția este constantă:

$$f(x, y) = \frac{mx^2}{x^2 + mx^2} = \frac{m}{1 + m^2}, \quad x \neq 0.$$

$$\text{deci } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=mx}} f(x, y) = \frac{m}{1 + m^2} \neq f(0, 0).$$

**Propozitie 2.** Fie  $(x_0, y_0)$  un punct interior al lui  $E$ . Dacă derivele parțiale  $f'_x$  și  $f'_y$  există pe o vecinătate  $V$  a lui  $(x_0, y_0)$  atunci pentru orice punct  $(x, y) \in V$  există un număr  $\xi$  cuprins între  $x_0$  și  $x$  și un număr  $\eta$  cuprins între  $y_0$  și  $y$ , astfel încât:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(\xi, y)(x - x_0) + f'_y(x_0, \eta)(y - y_0).$$

Să alegem un punct arbitrar  $(x, y) \in V$  și să-l menținem fix. Avem

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0).$$

Să notăm

$$\varphi(t) = f(t, y), \quad \psi(t) = f(x_0, t), \quad (t, y) \in V, \quad (x_0, t) \in V.$$

Funcțiile  $\varphi(t)$  și  $\psi(t)$  sunt derivabile:

$$\varphi'(t) = f'_x(t, y), \quad \psi'(t) = f'_y(x_0, t).$$

Aplicând teorema creșterilor finite funcțiilor  $\varphi(t)$  și  $\psi(t)$ , deducem că există un punct  $\xi$  cuprins între  $x_0$  și  $x$ , astfel ca

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'_x(\xi)(x - x_0),$$

adică

$$f(x, y) - f(x_0, y) = f'_x(\xi, y)(x - x_0)$$

și există un punct  $\eta$  cuprins între  $y_0$  și  $y$ , astfel ca

$$\psi(y) - \psi(y_0) = \psi'(\eta)(y - y_0),$$

adică

$$f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, \eta)(y - y_0)$$

Atunci

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(\xi, y)(x - x_0) + f'_y(x_0, \eta)(y - y_0).$$

Această egalitate se numește *formula lui Lagrange* pentru funcții de două variabile. Această formulă va fi precizată mai departe, astfel:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(\xi, \eta)(x - x_0) + f'_y(\xi, \eta)(y - y_0).$$

**Observație.** Notind  $\varphi(t) = f(t, y_0)$ ,  $\psi(t) = f(x_0, t)$  și, rationând ca mai sus, deducem că există un număr  $\xi'$  cuprins între  $x_0$  și  $x$  și un număr  $\eta'$  cuprins între  $y_0$  și  $y$ , astfel încât

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(\xi', y_0)(x - x_0) + f'_y(x, \eta')(y - y_0).$$

**Propozitie 3.** Fie  $(x_0, y_0)$  un punct interior al lui  $E$ . Dacă funcția  $f$  are derivele parțiale mărginite într-o vecinătate  $V$  a lui  $(x_0, y_0)$  atunci ea este continuă în  $(x_0, y_0)$  (în raport cu ansamblul variabilelor).

Prin ipoteză, există un număr  $M$ , astfel ca

$|f'_x(x, y)| \leq M$  și  $|f'_y(x, y)| \leq M$  pentru orice  $(x, y) \in V$ .

Aveam

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\leq |f'_x(\xi, y)(x - x_0) + f'_y(x, \eta)(y - y_0)| \leq \\ &\leq M(|x - x_0| + |y - y_0|). \end{aligned}$$

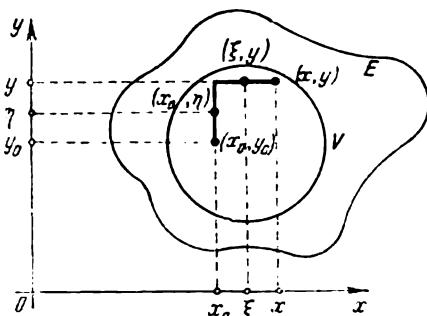


Fig. 144

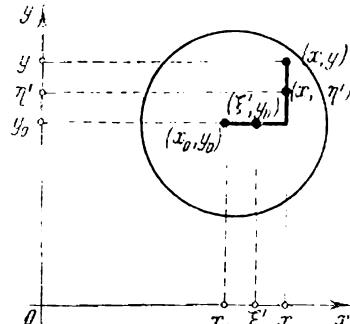


Fig. 145

Dar  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (|x - x_0| + |y - y_0|) = 0$ , și deci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| = 0,$$

de unde

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

adică  $f$  este continuă în  $(x_0, y_0)$ .

**C o r o l a r u l 1.** Dacă  $f'_x$  și  $f'_y$  există pe o vecinătate  $V$  a lui  $(x_0, y_0)$  și sunt continue în  $(x_0, y_0)$ , atunci funcția  $f$  este continuă în  $(x_0, y_0)$ .

Într-adevăr, dacă  $f'_x$  și  $f'_y$  sunt continue în  $(x_0, y_0)$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $(x_0, y_0)$  pe care aceste funcții sunt mărginite.

**C o r o l a r u l 2.** Dacă derivatele parțiale  $f'_x$  și  $f'_y$  există pe  $E$  și sunt continue sau sunt mărginite pe  $E$ , atunci funcția  $f$  este continuă pe  $E$ .

O b s e r v a t i o n i. 1° Dacă  $f(x, y, z)$  este o funcție reală de trei variabile definită pe o mulțime  $E \subset R^3$  și dacă  $(a, b, c) \in E$ , se definesc derivatele sale parțiale, în număr de trei, astfel :

$$\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial x} = f'_x(a, b, c) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b, c) - f(a, b, c)}{x - a},$$

$$\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial y} = f'_y(a, b, c) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y, c) - f(a, b, c)}{y - b},$$

$$\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial z} = f'_z(a, b, c) = \lim_{z \rightarrow c} \frac{f(a, b, z) - f(a, b, c)}{z - c}.$$

*Exemplu.*  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  definită pe  $R^3$ ;

$$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, f'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$(x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

2° Dacă  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  este o funcție reală de  $n$  variabile definită pe o mulțime  $E \subset R^n$ , ea poate avea  $n$  deriveate parțiale într-un punct  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in E$ . De exemplu, derivata parțială în raport cu  $x_i$  se definește astfel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(a_1, \dots, a_n)}{\partial x_i} &= f'_{x_i}(a_1, \dots, a_n) = \\ &= \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{x_i - a_i}. \end{aligned}$$

3° Deoarece deriveatele parțiale ale unei funcții de mai multe variabile sunt, de fapt, deriveatele funcțiilor sale parțiale care sunt funcții de o singură variabilă, rezultă că *operațiile algebrice efectuate asupra funcțiilor care au deriveate parțiale duc tot la funcții care au deriveate parțiale, iar regulile de derivare a sumei, diferenței, produsului, cîtului etc. sunt aceleași ca și pentru funcții de o variabilă*.

4° Fie  $f(x, y)$  o funcție vectorială de două variabile definită pe o mulțime  $E \subset R^2$  cu valori în  $R^m$ , și  $(a, b) \in E$ . Fie  $f_1, f_2, \dots, f_m$  componente reale ale funcției vectoriale  $f$ :

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_m).$$

Se spune că funcția vectorială  $f$  are derivată parțială în raport cu  $x$  în punctul  $(a, b)$ , dacă, toate componentele sale reale au derivată parțială în raport cu  $x$  în punctul  $(a, b)$ .

Derivata parțială  $\frac{\partial f(a, b)}{\partial x}$  se definește ca fiind *vectorul* din  $R^m$  care are drept componente deriveate parțiale în raport cu  $x$  ale funcțiilor  $f_1, f_2, \dots, f_m$

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial x} = \left( \frac{\partial f_1(a, b)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial f_m(a, b)}{\partial x} \right) \in R^m.$$

Această derivată parțială se poate defini direct prin egalitatea

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial x} = f'_x(a, b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \in R^m,$$

unde limita se consideră în  $R^m$ .

La fel se definesc deriveatele parțiale ale unei funcții vectoriale de  $n$  variabile cu valori în  $R^m$ ,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

*Toate proprietățile relative la deriveatele parțiale ale funcțiilor reale de două variabile rămîn adevărate și pentru deriveatele parțiale ale funcțiilor reale sau vectoriale de mai multe variabile.*

## 2. Diferențabilitatea funcțiilor de mai multe variabile

Fie  $f(x, y)$  o funcție reală de două variabile definită pe o mulțime  $E \subset \mathbb{R}^2$  și  $(a, b)$  un punct *interior* al lui  $E$ .

**D e f i n i t i e.** Se spune că funcția  $f(x, y)$  este diferențabilă în punctul  $(a, b)$  dacă există două numere reale  $\lambda$  și  $\mu$ , și o funcție  $\omega(x, y)$  definită pe  $E$ , continuă în punctul  $(a, b)$  și nulă în acest punct:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega(x, y) = \omega(a, b) = 0,$$

astfel încât pentru orice punct  $(x, y) \in E$  să avem egalitatea:

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y) \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Dacă  $E$  este o mulțime deschisă, se spune că  $f$  este *diferențabilă pe  $E$*  dacă este diferențabilă în fiecare punct din  $E$ .

**O b s e r v a t i i.** 1° În această definiție, faptul esențial este că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega(x, y) = 0.$$

Este suficient ca funcția  $\omega(x, y)$  care verifică egalitatea precedentă să fie definită numai pe o vecinătate  $V$  a lui  $(a, b)$  cu excepția punctului  $(a, b)$ , deoarece în punctul  $(a, b)$  se poate prelungi prin continuitate, punând  $\omega(a, b) = 0$ , iar în punctele  $(x, y) \in V$  se definește prin egalitatea

$$\omega(x, y) = \frac{f(x, y) - f(a, b) - \lambda(x - a) - \mu(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}},$$

astfel încât funcția prelungită  $\omega(x, y)$  verifică egalitatea de definiție a diferențabilității, pentru orice  $(x, y) \in E$ .

2° Pentru simplificarea scrisului, vom nota

$$\rho = \rho(x, y) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

$\rho$  reprezintă distanța dintre punctele  $(x, y)$  și  $(a, b)$ , adică

$$\rho = \|(x, y) - (a, b)\| = \|(x - a, y - b)\|.$$

Cu această notație, egalitatea de definiție a diferențabilității se scrie

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y) \rho.$$

Avem  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \rho(x, y) = 0$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{\omega(x, y)}{\rho(x, y)} = 0$$

3° Deoarece  $|x - a| \leq \sqrt{(x - a)^2 + (x - b)^2}$  și

$$|y - b| \leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}, \text{ avem}$$

$$\frac{|x - a|}{\rho(x, y)} \leq 1 \text{ și } \frac{|y - b|}{\rho(x, y)} \leq 1.$$

4° Chiar dacă funcția  $f$  nu este diferențiabilă, în punctul  $(a, b)$ , pentru două numere date  $\lambda$  și  $\mu$ , există o singură funcție  $\omega(x, y)$  definită pe  $E$  (cu excepția lui  $(a, b)$ ), care verifică egalitatea

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y)\rho$$

pentru orice  $(x, y) \in E$ , diferit de  $(a, b)$ .

Într-adevăr, dacă o altă funcție  $\omega'(x, y)$  verifică egalitatea

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega'(x, y)\rho$$

pentru orice  $(x, y) \in E$ , diferit de  $(a, b)$ , atunci pentru  $(x, y) \neq (a, b)$  avem

$$\omega(x, y) = \frac{f(x, y) - f(a, b) - \lambda(x - a) - \mu(y - b)}{\rho}$$

și

$$\omega'(x, y) = \frac{f(x, y) - f(a, b) - \lambda(x - a) - \mu(y - b)}{\rho},$$

de unde  $\omega(x, y) = \omega'(x, y)$  pentru orice  $(x, y) \neq (a, b)$  din  $E$ .

Funcțiile  $\omega$  și  $\omega'$  pot fi diferite numai în punctul  $(a, b)$ . Dacă punem condiția ca aceste funcții să aibă valoarea 0 în punctul  $(a, b)$ , atunci ele sunt egale pe toată mulțimea  $E$ .

Înainte de a trece la studiul proprietăților funcțiilor diferențiabile să stabilim un rezultat care va fi util mai departe.

**L e m ă.** Dacă funcția  $\omega(x, y)$ , definită pe  $E$ , are limita 0 în punctul  $(a, b)$ , atunci există două funcții  $\omega_1$  și  $\omega_2$  definite pe  $E$  care au limita 0 în  $(a, b)$  și care verifică egalitatea :

$$\omega(x, y)\rho = \omega_1(x, y)(x - a) + \omega_2(x, y)(y - b), \quad (x, y) \in E.$$

**Reciproc**, dacă funcțiile  $\omega_1$  și  $\omega_2$ , definite pe  $E$ , au limita 0 în punctul  $(a, b)$ , atunci există o funcție  $\omega(x, y)$  cu limita 0 în punctul  $(a, b)$ , care să verifice egalitatea precedentă.

Să presupunem întâi că se dă funcția  $\omega(x, y)$  cu

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega(x, y) = 0.$$

Definim funcțiile  $\omega_1$  și  $\omega_2$  astfel :

$$\omega_1(x, y) = \omega(x, y) \frac{x - a}{\rho(x, y)}, \quad \omega_2(x, y) = \omega(x, y) \frac{y - b}{\rho(x, y)}, \quad (x, y) \neq (a, b).$$

Atunci

$$|\omega_1(x, y)| = |\omega(x, y)| \frac{|x - a|}{\rho} \leqslant |\omega(x, y)|,$$

deci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega_1(x, y) = 0$$

și la fel se arată că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega_2(x, y) = 0.$$

Pe de altă parte, pentru  $(x, y) \neq (a, b)$  avem

$$\begin{aligned}\omega_1(x, y)(x - a) + \omega_2(x, y)(y - b) &= \omega(x, y) \frac{(x - a)^2}{\rho(x, y)} + \omega(x, y) \frac{(y - b)^2}{\rho(x, y)} = \\ &= \omega(x, y) \frac{(x - a)^2 + (y - b)^2}{\rho(x, y)} = \omega(x, y) \rho(x, y).\end{aligned}$$

Reciproc, să presupunem că sînt date funcțiile  $\omega_1(x, y)$  și  $\omega_2(x, y)$  cu

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Definim atunci funcția  $\omega(x, y)$  astfel:

$$\omega(x, y) = \frac{\omega_1(x, y)(x - a) + \omega_2(x, y)(y - b)}{\rho(x, y)}, \quad (x, y) \neq (a, b),$$

deci

$$\omega(x, y) \rho(x, y) = \omega_1(x, y)(x - a) + \omega_2(x, y)(y - b),$$

pentru orice  $(x, y) \in E$ , și

$$\begin{aligned}|\omega(x, y)| &\leq |\omega_1(x, y)| \frac{|x - a|}{\rho(x, y)} + |\omega_2(x, y)| \frac{|y - b|}{\rho(x, y)} \leq \\ &\leq |\omega_1(x, y)| + |\omega_2(x, y)|,\end{aligned}$$

de unde

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega(x, y) = 0.$$

**O b s e r v a t i e.** Pentru o funcție  $\omega$  dată putem găsi mai multe perechi de funcții  $\omega_1$  și  $\omega_2$  care să verifice lema precedentă.

Se poate lua, de exemplu,

$$\begin{aligned}\omega_1(x, y) &= \omega(x, y) \frac{\rho(x, y)}{|x - a| + |y - b|} \frac{|x - a|}{x - a}, \\ \omega_2(x, y) &= \omega(x, y) \frac{\rho(x, y)}{|x - a| + |y - b|} \frac{|y - b|}{y - b}.\end{aligned}$$

Pentru două funcții date  $\omega_1$  și  $\omega_2$ , există o singură funcție  $\omega$  definită pe  $E$  (cu excepția lui  $(a, b)$ ) care să verifice lema.

Folosind această lemă, rezultă imediat

**P r o p o z i t i a 3.** Funcția  $f$  este diferențiabilă în punctul  $(a, b)$  dacă și numai dacă există două numere reale  $\lambda$  și  $\mu$ , și două funcții  $\omega_1$  și  $\omega_2$  definite pe  $E$ , continue în  $(a, b)$  și nule în acest punct:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega_i(x, y) = \omega_i(a, b) = 0, \quad i = 1, 2$$

astfel încit pentru orice  $(x, y) \in E$  să avem egalitatea

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega_1(x, y)(x - a) + \omega_2(x, y)(y - b).$$

Această egalitate se poate scrie și astfel:

$$f(x, y) - f(a, b) = [\lambda + \omega_1(x, y)](x - a) + [\mu + \omega_2(x, y)](y - b).$$

Observație. Ca și în definiția diferențiabilității este suficient ca funcțiile  $\omega_1$  și  $\omega_2$  să fie definite pe o vecinătate  $V$  a lui  $(a, b)$ , cu excepția punctului  $(a, b)$ , dar să aibă limita 0 în acest punct. Ele se prelungesc atunci prin continuitate în punctul  $(a, b)$ , iar în afara lui  $V$  se prelungesc în mod unic, astfel încit să fie verificată egalitatea de mai sus.

**Propoziția 4.** Dacă funcția  $f$  este diferențiabilă în punctul  $(a, b)$ , atunci ea are derivate parțiale în  $(a, b)$  și

$$f'_x(a, b) = \lambda, \quad f'_y(a, b) = \mu.$$

Egalitatea de definiție a diferențiabilității se scrie atunci astfel:

$$f(x, y) - f(a, b) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \omega(x, y),$$

sau

$$f(x, y) - f(a, b) = [f'_x(a, b) + \omega_1(x, y)](x - a) + [f'_y(a, b) + \omega_2(x, y)](y - b).$$

Într-adevăr, dacă în egalitatea de definiție a diferențiabilității,

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y) \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

se ia  $y = b$ , se obține

$$f(x, b) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \omega(x, b)|x - a|.$$

Pentru  $x = a$  deducem

$$\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \lambda + \omega(x, b) \frac{|x - a|}{x - a}.$$

$$\text{Dar } |\omega(x, b) \frac{|x - a|}{x - a}| = |\omega(x, b)| \text{ și } \lim_{x \rightarrow 0} |\omega(x, b)| = |\omega(a, b)| = 0,$$

deci

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \lambda,$$

adică funcția  $f$  are în punctul  $(a, b)$  derivata parțială în raport cu  $x$  și  $f'_x(a, b) = \lambda$ .

Se demonstrează în mod analog că  $f$  are în punctul  $(a, b)$  derivata parțială în raport cu  $y$  și  $f'_y(a, b) = \mu$ .

**C o r o l a r.** Dacă  $f$  este diferențiabilă pe  $E$ , atunci ea are derivate parțiale  $f'_x$  și  $f'_y$  pe  $E$ .

**O b s e r v a t i e.** Propoziția reciprocă nu este adevărată: există funcții care au derivate parțiale dar care nu sunt diferențiabile.

*Exemplu.* Funcția  $f(x, y)$  definită pe  $R^2$  astfel:

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ dacă } (x, y) \neq (0, 0) \text{ și } f(0, 0) = 0$$

are derivate parțiale nule în origine:

$$f(x, 0) \equiv 0, \text{ deci } f'_x(x, 0) \equiv 0 \text{ și } f'_x(0, 0) = 0;$$

$$f(0, y) \equiv 0, \text{ deci } f'_y(0, y) \equiv 0 \text{ și } f'_y(0, 0) = 0.$$

Avem apoi, pentru  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(0, 0) &= \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 = \frac{xy}{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= f'_x(0, 0)(x - 0) + f'_y(0, 0)(y - 0) + \frac{xy}{x^2 + y^2} \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}. \end{aligned}$$

Dar funcția  $\frac{xy}{x^2 + y^2}$  nu are limită în origine, deci funcția  $f$  nu este diferențiabilă în origine.

Așadar, pentru funcții de două sau mai multe variabile, noțiunea de diferențiabilitate nu este echivalentă cu aceea de derivabilitate parțială.

**P r o p o z i t i a 5.** Dacă funcția  $f$  este diferențiabilă în punctul  $(a, b)$ , atunci ea este continuă în acest punct.

Într-adevăr, toți termenii din membrul drept al egalității

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y) \rho,$$

prin care se definește diferențiabilitatea, au limita 0 în punctul  $(a, b)$ , deci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} [f(x, y) - f(a, b)] = 0,$$

de unde

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = f(a, b),$$

adică  $f$  este continuă în  $(a, b)$ .

**C o r o l a r.** Dacă  $f$  este diferențiabilă pe  $E$  atunci ea este continuă pe  $E$ .

**O b s e r v a t i i.** 1° Propoziția reciprocă nu este adevărată: există funcții continue care nu sunt diferențiabile.

*Exemplu.* Funcția  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  definită pe  $R^2$  este continuă în orice punct.

Aveți  $f(x, 0) = |x|$  și funcția  $|x|$  nu este derivabilă în punctul 0, deci  $f'_x(0, 0)$  nu există. La fel se arată că  $f'_y(0, 0)$  nu există. Rezultă că funcția  $f$  nu este diferențialabilă în origine, deoarece nu are derivate parțiale în acest punct.

2° Chiar dacă funcția  $f$  are derivate parțiale și este și continuă într-un punct, nu rezultă că este diferențialabilă în acel punct.

*Exemplu.* Funcția  $f(x, y)$  definită pe  $R^2$  astfel:

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ dacă } (x, y) \neq (0, 0) \text{ și } f(0, 0) = 0$$

are derivate parțiale în origine,  $f'_x(0, 0) = 0$ ,  $f'_y(0, 0) = 0$  și este continuă în origine, deoarece

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} |y| \leq |y|$$

și  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y| = 0$ , deci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = f(0, 0).$$

După cum s-a văzut într-un exemplu precedent, această funcție nu este diferențialabilă în origine.

Ultimile două propoziții arată că existența derivatelor parțiale și continuitatea unei funcții sunt condiții necesare (dar nu suficiente) pentru diferențialitatea sa.

Propoziția următoare dă condiții suficiente de diferențialitate.

**Propoziția 6.** Dacă funcția  $f$  are derivate parțiale  $f'_x$  și  $f'_y$  într-o vecinătate  $V$  a lui  $(a, b)$  și dacă aceste derivate parțiale sunt continue în  $(a, b)$ , atunci funcția  $f$  este diferențialabilă în  $(a, b)$ .

Aplicând formula lui Lagrange, pentru fiecare punct  $(x, y) \in V$ , există un număr  $\xi$  cuprins între  $a$  și  $x$  și un număr  $\eta$  cuprins între  $b$  și  $y$ , astfel încât

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, b) &= f'_x(\xi, y)(x - a) + f'_y(a, \eta)(y - b) = \\ &= f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \end{aligned}$$

$$+ [f'_x(\xi, y) - f'_x(a, b)](x - a) + [f'_y(a, \eta) - f'_y(a, b)](x - b) =$$

$$= f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \omega_1(x, y)(x - a) + \omega_2(x, y)(y - b),$$

unde am notat

$$\omega_1(x, y) = f'_x(\xi, y) - f'_x(a, b),$$

$$\omega_2(x, y) = f'_y(a, \eta) - f'_y(a, b),$$

pentru  $(x, y) \in V$ . Să arătăm că aceste funcții au limita 0 în punctul  $(a, b)$ . Pentru aceasta, fie  $(x_n, y_n) \rightarrow (a, b)$  un sir oarecare de puncte din  $V$ , adică  $x_n \rightarrow a$  și  $y_n \rightarrow b$ . Raționând ca mai sus, pentru fiecare punct  $(x_n, y_n)$  găsim un număr  $\xi_n$  cuprins între  $a$  și  $x_n$  și un număr  $\eta_n$  cuprins între  $b$  și  $y_n$  care verifică formula lui Lagrange, deci pentru care

$$\omega_1(x_n, y_n) = f'_x(\xi_n, y_n) - f'_x(a, b),$$

$$\omega_2(x_n, y_n) = f'_y(a, \eta_n) - f'_y(a, b).$$

Să observăm că, deoarece  $x_n \rightarrow a$ , iar  $\xi_n$  se află între  $a$  și  $x_n$ , avem  $\xi_n \rightarrow a$ ; de asemenea,  $\eta_n \rightarrow b$ . Deoarece funcțiile  $f'_x$  și  $f'_y$  sunt continue în  $(a, b)$ , deducem

$$f'_x(\xi_n, y_n) \rightarrow f'_x(a, b),$$

$$f'_y(a, \eta_n) \rightarrow f'_y(a, b),$$

deci  $\omega_1(x_n, y_n) \rightarrow 0$  și  $\omega_2(x_n, y_n) \rightarrow 0$ . Deoarece sirul  $(x_n, y_n) \rightarrow (a, b)$  a fost ales arbitrar, rezultă

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega_1(x, y) = 0 \text{ și } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega_2(x, y) = 0.$$

Funcțiile  $\omega_1$  și  $\omega_2$  se prelungesc apoi în mod unic în exteriorul vecinătății  $V$ , astfel încât să avem

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, b) &= f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \omega_1(x, y)(x - a) + \\ &\quad + \omega_2(x, y)(y - b), \end{aligned}$$

deci  $f$  este diferențiabilă în  $(a, b)$ .

**C o r o l a r.** Dacă derivatele parțiale  $f'_x$  și  $f'_y$  există și sunt continue pe  $E$ , atunci  $f$  este diferențiabilă pe  $E$ .

**O b s e r v a t i e.** Propoziția reciprocă nu este adevărată: există funcții diferențiabile într-un punct, ale căror derivate parțiale nu sunt continue în acest punct.

*Exemplu.* Fie funcția  $f(x, y)$  definită pe  $R^2$  astfel:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ dacă } (x, y) \neq (0, 0) \text{ și } f(0, 0) = 0.$$

Să arătăm mai întâi că funcția este diferențiabilă în origine. Pentru  $(x, y) \neq (0, 0)$  avem

$$f(x, y) - f(0, 0) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} =$$

$$= 0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) + \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}.$$

Notind  $\omega(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ , avem

$$|\omega(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} \left| \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

și  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ , deci  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \omega(x, y) = 0$ .

Așadar, funcția  $f$  este diferențiabilă în origine. Rezultă în particular  $f'_x(0, 0) = 0$  și  $f'_y(0, 0) = 0$ .

Să calculăm acum derivatele parțiale în punctele  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

$$f'_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$f'_y(x, y) = 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Aceste derivate parțiale nu au limită în origine și deci cu atit mai mult nu sunt continue în origine, deoarece funcțiile

$$\sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ și } \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

nu au limită în origine.

**O b s e r v a t i i .** 1° Se definește diferențiabilitatea unei funcții reale  $f(x, y, z)$  de trei variabile, definită pe o mulțime  $E \subset R^3$ , într-un punct interior  $(a, b, c) \in E$ , prin egalitatea

$$f(x, y, z) - f(a, b, c) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \nu(z - c) + \omega(x, y, z)\rho,$$

unde  $\lambda, \mu, \nu$  sunt numere,  $\rho = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$ , iar

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b \\ z \rightarrow c}} \omega(x, y, z) = \omega(a, b, c) = 0.$$

Se demonstrează că  $\lambda = f'_x(a, b, c)$ ,  $\mu = f'_y(a, b, c)$ ,  $\nu = f'_z(a, b, c)$ .

2° Pentru o funcție reală de  $n$  variabile,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , definită pe o mulțime  $E \subset R^n$ , se definește diferențiabilitatea într-un punct interior  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in E$  prin egalitatea

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x_i - a_i) + \omega(x_1, x_2, \dots, x_n)\rho,$$

$$\text{unde } \lambda_i \text{ sunt numere, } \rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2} = ||x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n||,$$

iar funcția  $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$  are limita 0 în punctul  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

3° Fie  $f(x, y)$  o funcție vectorială de două variabile, definită pe o mulțime  $E \subset R^2$  cu valori în  $R^m$ , și fie  $f_1, f_2, \dots, f_m$  componente sale reale:  $f = (f_1 = (f_1, f_2, \dots, f_m))$ . Se spune că funcția  $f$  este diferențiabilă în punctul  $(a, b)$ , dacă toate componentele sale reale sunt diferenți-

abile în  $(a, b)$ . O definiție echivalentă este următoarea:  $f(x, y)$  este diferențierabilă în punctul  $(a, b)$  dacă există doi vectori  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  și  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  din  $R^m$  și o funcție vectorială  $\omega(x, y)$  definită pe  $E$  cu valori în  $R^m$ , continuă în  $(a, b)$ , și nulă în  $(a, b)$ , astfel încit pentru orice  $(x, y) \in E$  să avem

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y) \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Notind cu  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$  componentele reale ale lui  $\omega$ , ele sunt continue și nule în  $(a, b)$ . Egalitatea vectorială precedentă este echivalentă cu următoarele  $n$  egalități scalare:

$$f_i(x, y) - f_i(a, b) = \lambda_i(x - a) + \mu_i(y - b) + \omega_i(x, y) \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2},$$

$= 1, 2, \dots, n$ , adică diferențierabilitatea lui  $f$  este echivalentă cu diferențierabilitatea componentelor sale reale  $f_1, f_2, \dots, f_n$ .

Aveam  $\lambda_i = \frac{\partial f_i(a, b)}{\partial x}$  și  $\mu_i = \frac{\partial f_i(a, b)}{\partial y}$ , deci

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \left( \frac{\partial f_1(a, b)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial f_m(a, b)}{\partial x} \right) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}$$

$$\text{și } \mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) = \left( \frac{\partial f_1(a, b)}{\partial y}, \dots, \frac{\partial f_m(a, b)}{\partial y} \right) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}.$$

Considerații asemănătoare se pot face pentru funcții vectoriale  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $n$  variabile cu valori în  $R^m$ .

Toate celelalte proprietăți relative la diferențierabilitatea funcțiilor reale de două variabile sunt adevărate și pentru funcții reale sau vectoriale de mai multe variabile.

4° Diferențierabilitatea unei funcții  $f(x, y)$  definită pe o mulțime  $E \subset R^2$  se poate defini în orice punct de acumulare  $(a, b) \in E$ , chiar dacă  $(a, b)$  nu este punct interior al lui  $E$ , prin aceeași egalitate

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) + \omega(x, y) \rho.$$

Dacă  $f$  este diferențierabilă în  $(a, b)$ , atunci  $f$  este continuă în  $(a, b)$ .

Este însă posibil ca derivatele parțiale să nu aibă sens în punctul  $(a, b)$  și deci propozițiile 2 și 4 nu mai au sens în acest caz.

*Exemplu.* Fie funcția  $f(x, y) = x + y$  definită pe mulțimea

$$E = \{(x, y) \mid x \leqslant y \leqslant 2x\}.$$

Funcția  $f$  este diferențierabilă în origine, doarece

$$f(x, y) - f(0, 0) = x + y = 1 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 0) + 0 \cdot \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}.$$

deci

$$\lambda = 1, \mu = 1 \text{ și } \omega(x, y) \equiv 0.$$

Derivatele parțiale nu au sens în origine, deoarece mulțimea  $E$  nu conține nici un segment de dreaptă care să treacă prin origine și să fie paralel cu una din axele de coordonate.

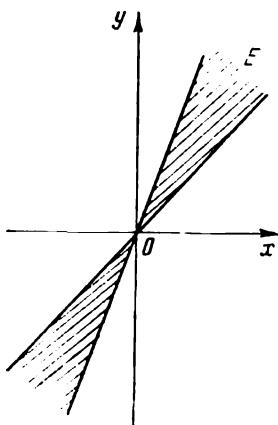


Fig. 146

### 3. Diferențiala funcțiilor de mai multe variabile

Fie  $f(x, y)$  o funcție reală definită pe o mulțime  $E \subset R^2$  și diferențialabilă într-un punct interior  $(a, b) \in E$ :

$$f(x, y) - f(a, b) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \omega(x, y) \text{ p.,}$$

unde  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega(x, y) = 0$ .

Diferența  $x - a$  se numește creșterea primei variabile de la  $a$  la  $x$  iar diferența  $y - b$  se numește creșterea celei de-a doua variabile de la  $b$  la  $y$ .

Diferența  $f(x, b) - f(a, b)$  se numește creșterea funcției corespunzătoare creșterilor  $x - a$  și  $y - b$  ale argumentelor.

Deoarece funcția  $\omega$  are limita 0 în  $(a, b)$ , avem următoarea relație de aproximare

$$f(x, y) - f(a, b) \approx f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b).$$

Așadar, creșterea funcției  $f$  poate fi aproximată cu funcția liniară  $f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$ , definită pentru orice  $(x, y) \in R^2$ .

**Definiție.** Funcția liniară de două variabile  $f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$  se numește diferențiala funcției  $f(x, y)$  în punctul  $(a, b)$  și se notează  $df(a, b)$ :

$$df(a, b)(x, y) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b).$$

Diferențiala este definită pe tot planul, deoarece diferențele  $x - a$  și  $y - b$  au sens pentru orice  $x$  și  $y$  reali.

Relația de aproximare a creșterii funcției  $f$  se scrie atunci

$$f(x, y) - f(a, b) \approx df(a, b)(x, y)$$

și ea are sens numai pentru acele valori ale lui  $x$  și  $y$  pentru care membrul stîng are sens, adică pentru  $(x, y) \in E$ .

Pentru calcule este util să se scrie diferențiala în alte forme.

Să notăm creșterile variabilelor cu  $u$  și  $v$ :

$$x - a = u, \quad y - b = v.$$

Atunci

$$df(a, b)(u, v) = f'_x(a, b)u + f'_y(a, b)v, \quad (u, v) \in R^2$$

unde  $u$  și  $v$  sunt considerate variabile independente.

Dacă funcția  $f$  este diferențialabilă pe toată mulțimea  $E$ , diferențiala sa într-un punct arbitrar  $(x, y)$  din  $E$  se scrie

$$df(x, y)(u, v) = f'_x(x, y)u + f'_y(x, y)v.$$

Diferențiala funcției  $f$  pe mulțimea  $E$  este deci o funcție de patru variabile,  $x, y, u$  și  $v$ , unde perechea  $(x, y)$  parcurge mulțimea  $E$ , iar perechea  $(u, v)$  parcurge tot planul.

Să considerăm funcțiile

$$\varphi(x, y) = x,$$

$$\psi(x, y) = y,$$

definite pe  $R^2$ . Prima funcție  $\varphi$  este proiecția pe axa  $Ox$ , iar a doua funcție,  $\psi$ , este proiecția pe axa  $Oy$ . Aceste funcții sunt diferențiable pe  $R^2$ . Avem

$$\varphi'_x(x, y) \equiv 1, \quad \varphi'_y(x, y) \equiv 0,$$

$$\psi'_x(x, y) \equiv 0, \quad \psi'_y(x, y) \equiv 1,$$

deci

$$d\varphi(x, y)(u, v) \equiv u \text{ și } d\psi(x, y)(u, v) \equiv v.$$

Diferențialele funcțiilor  $\varphi$  și  $\psi$  se notează respectiv  $dx$  și  $dy$ :

$$dx(u, v) = d\varphi(x, y)(u, v) = u, \quad dy(u, v) = d\psi(x, y)(u, v) = v.$$

Cu aceste notații, diferențiala funcției  $f$  se scrie

$$df(x, y) = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy$$

sau, dacă nu se mai pun în evidență variabilele  $x$  și  $y$ ,

$$df = f'_x dx + f'_y dy, \text{ sau } df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Se observă că dacă interpretăm — în mod formal — pe  $\partial f$  ca un produs simbolic între  $\partial$  și  $f$ , în membrul drept se poate da  $f$  factor comun — în mod formal:

$$df = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f.$$

Se pune astfel în evidență operatorul de diferențiere:

$$d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy.$$

*Exemplu.* 1)  $\frac{\partial(x+y)}{\partial x} = 1$  și  $\frac{\partial(x+y)}{\partial y} = 1$ , deci  $d(x+y) = 1 \cdot dx + 1 \cdot dy = dx + dy$ .

2)  $\frac{\partial(xy)}{\partial x} = y, \frac{\partial(xy)}{\partial y} = x$ , deci  $d(xy) = y \cdot dx + x \cdot dy$ .

3)  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{y} \right) = \frac{1}{y}, \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{y} \right) = -\frac{x}{y^2}$ , deci  $d \left( \frac{x}{y} \right) = \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = \frac{y dx - x dy}{y^2}$ .

4)  $\frac{\partial}{\partial x}(x^y) = yx^{y-1}, \frac{\partial}{\partial y}(x^y) = x^y \ln x$ , deci  $d(x^y) = yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy$ .

**Observații.** 1° Pentru o funcție de trei variabile  $f(x, y, z)$ , operatorul de diferențiere este

$$d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz,$$

iar diferențiala sa este

$$df = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right) f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

unde  $dz$  este diferențiala funcției  $f(x, y, z) = z$ .

2° Pentru o funcție de  $n$  variabile  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  diferențiala este

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

unde  $dx_i$  este diferențiala funcției  $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ ,

iar operatorul de diferențiere este

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i,$$

3° Pentru o funcție *vectorială*  $f(x, y)$  definită pe o mulțime  $E \subset R^2$  cu valori în  $R^m$ , se definește diferențiala într-un punct interior  $(a, b) \in E$ , în care este diferențialabilă, prin egalitatea

$$df(x, y; a, b) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} (y - b),$$

unde derivatele parțiale sunt vectori din  $R^m$ . Diferențiala este deci o *funcție vectorială* cu valori în  $R^m$ . Făcind aceeași considerații ca mai sus, diferențiala funcției vectoriale  $f$  se scrie ca și pentru funcțiile scalare :

$$df = f'_x dx + f'_y dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f.$$

#### 4. Derivate parțiale de ordin superior

Fie  $f(x, y)$  o funcție reală de două variabile definită pe o mulțime  $E \subset R^2$ . Pentru simplificarea expunerii vom presupune că mulțimea  $E$  este deschisă, adică este formată numai din puncte interioare, deci derivatele parțiale  $f'_x$  și  $f'_y$  au sens în fiecare punct  $(x, y) \in E$ . Funcțiile  $f'_x$  și  $f'_y$ , se numesc derivate parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$ .

Dacă derivatele parțiale  $f'_x$  și  $f'_y$  există pe  $E$ , ele sunt funcții de două variabile, deci se poate pune problema existenței derivatelor parțiale ale funcțiilor  $f'_x$  și  $f'_y$ .

Dacă există derivatele parțiale ale funcțiilor  $f'_x$  și  $f'_y$ , ele se numesc *derivate parțiale de ordinul doi* ale funcției  $f$  și se notează astfel:

$$f''_{x^2} = (f'_x)'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2};$$

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x};$$

$$f''_{yx} = (f'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y};$$

$$f''_{y^2} = (f'_y)'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

O funcție de două variabile  $f(x, y)$  poate avea *patru* derivate de ordinul doi. Funcțiile  $f''_{xy}$  și  $f''_{yx}$  se numesc *derivate parțiale mixte* de ordinul doi.

O funcție de trei variabile  $f(x, y, z)$  poate avea *nouă* derivate parțiale de ordinul doi:

$$f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{xz}, f''_{yx}, f''_{yz}, f''_{zx}, f''_{zy}, f''_{x^3}.$$

O funcție de  $n$  variabile  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  poate avea  $n$  derivate parțiale de ordinul întâi și  $n^2$  derivate parțiale de ordinul doi:

$$f''_{x_i x_j} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

**Observație.** Este posibil ca una sau mai multe derivate parțiale de ordinul doi să nu existe într-un punct sau pe o submulțime  $A \subset E$ .

**Exemplu.** Funcția  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  nu are derivate parțiale de ordinul întâi în origine, deci nu are nici derivate parțiale de ordinul doi în origine.

Se definesc în mod asemănător derivatele parțiale de ordinul trei, ca fiind derivatele parțiale ale derivatelor parțiale de ordinul doi, și la fel se definesc derivatele parțiale de un ordin  $n$  oarecare.

**Exemplu.** Fie funcția  $f(x, y) = x^3y - y^3x^2$  definită pe  $R^2$ . Avem

$$f'_x = 3x^2y - 2y^3x, \quad f'_y = x^3 - 2yx^2;$$

$$f''_{x^2} = 6xy - 2y^2, \quad f''_{xy} = 3x^2 - 4yx, \quad f''_{yx} = 3x^2 - 4xy, \quad f''_{y^2} = -2x^3;$$

$$f'''_{x^3y} = 6x - 4y, \quad f'''_{x^3} = 6y, \quad f'''_{xyx} = 6x - 4y, \quad f'''_{yxx} = 6x - 4y \text{ etc.}$$

Se observă că  $f''_{xy} = f''_{yx}$ ,  $f'''_{x^3y} = f'''_{xyx}$ ,  $f'''_{x^3} = f'''_{yxx}$ , adică în derivatele parțiale mixte, ordinea în care se derivează în raport cu diferențele variabile nu are importanță, ci numai numărul de ori de care se derivează în raport cu fiecare variabilă în parte.

În general, derivatele parțiale mixte  $f''_{xy}$  și  $f''_{yx}$  nu sunt egale, și la fel derivatele parțiale mixte  $f'''_{x^3y}$ ,  $f'''_{xyx}$ ,  $f'''_{yxx}$  nu sunt egale.

Următoarele două propoziții dau condiții suficiente pentru egalitatea derivelor parțiale mixte.

**Criteriul lui Schwarz.** Dacă funcția  $f(x, y)$  are derivele parțiale mixte de ordinul doi  $f''_{xy}$ , și  $f''_{yx}$  într-o vecinătate  $V$  a unui punct  $(a, b) \in E$ , și dacă  $f''_{xy}$  și  $f''_{yx}$  sunt continue în  $(a, b)$ , atunci

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

Să alegem un punct arbitrar  $(x, y)$  din  $V$ , astfel ca  $x \neq a$  și  $y \neq b$  și să-l menținem fix. Să notăm

$$R(x, y) =$$

$$= \frac{f(x, y) - f(x, b) - f(a, y) + f(a, b)}{(x - a)(y - b)}.$$

Să considerăm funcția

$$\varphi(t) = \frac{f(t, y) - f(t, b)}{y - b}$$

definită pe intervalul  $[a, x]$  sau  $[x, a]$ , după cum  $a < x$  sau  $x < a$ . Funcția  $\varphi(t)$  este derivabilă pe acest interval și

$$\varphi'(t) = \frac{f'_x(t, y) - f'_x(t, b)}{y - b}.$$

Avem apoi

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y) - f(x, b)}{y - b},$$

$$\varphi(a) = \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b},$$

deci  $R(x, y)$  se scrie astfel

$$R(x, y) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}.$$

Aplicând acum funcției  $\varphi$  teorema creșterilor finite, deducem că există un punct  $\xi$  cuprins între  $a$  și  $x$  astfel încât să avem

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi'(\xi),$$

adică

$$R(x, y) = \varphi'(\xi) = \frac{f'_x(\xi, y) - f'_x(\xi, b)}{y - b}.$$

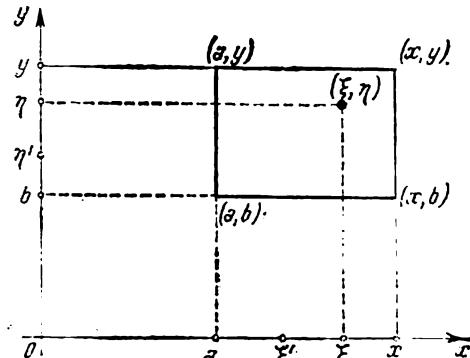


Fig. 147

Funcția  $\varphi_1(\tau) = f'_x(\xi, \tau)$ , definită pe intervalul  $[b, y]$  sau  $[y, b]$  după cum  $b < y$  sau  $y < b$ , este derivabilă pe acest interval, deoarece  $f''_{xy}$  există pe  $V$ , și

$$\varphi_1'(\tau) = f''_{xy}(\xi, \tau).$$

Aplicând teorema creșterilor finite funcției  $\varphi_1$ , deducem că există un punct  $\eta$  cuprins între  $b$  și  $y$ , astfel ca

$$\frac{\varphi_1(y) - \varphi_1(b)}{y - b} = \varphi_1'(\eta),$$

adică

$$\frac{f'_x(\xi, y) - f'_x(\xi, b)}{y - b} = f''_{xy}(\xi, \eta),$$

de unde

$$R(x, y) = f''_{xy}(\xi, \eta).$$

Prinț-un raționament analog, folosind funcția

$$\psi(t) = \frac{f(x, t) - f(a, t)}{x - a},$$

deducem că există un punct  $\eta'$  cuprins între  $b$  și  $y$ , astfel ca

$$R(x, y) = \frac{f'_y(x, \eta') - f'_y(a, \eta')}{x - a}.$$

Folosind apoi funcția  $\psi_1(\tau) = f'_y(\tau, \eta')$ , deducem că există un punct  $\xi'$  cuprins între  $a$  și  $x$ , astfel ca

$$R(x, y) = f''_{yx}(\xi', \eta').$$

Așadar

$$f''_{xy}(\xi, \eta) = f''_{yx}(\xi', \eta').$$

Fie acum un sir  $(x_n, y_n) \rightarrow (a, b)$  de puncte din  $V$ , cu  $x_n \neq a$  și  $y_n \neq b$ . Avem  $x_n \rightarrow a$  și  $y_n \rightarrow b$ .

Din cele de mai sus rezultă că pentru fiecare punct  $(x_n, y_n)$  există două numere  $\xi_n$  și  $\xi'_n$  cuprinse între  $a$  și  $x_n$ , și două numere  $\eta_n$  și  $\eta'_n$  cuprinse între  $b$  și  $y_n$ , astfel ca

$$f''_{xy}(\xi_n, \eta_n) = f''_{yx}(\xi'_n, \eta'_n).$$

Avem  $\xi_n \rightarrow a$ ,  $\xi'_n \rightarrow a$ ,  $\eta_n \rightarrow b$ ,  $\eta'_n \rightarrow b$ , deci

$$(\xi_n, \eta_n) \rightarrow (a, b) \text{ și } (\xi'_n, \eta'_n) \rightarrow (a, b).$$

Funcțiile  $f''_{xy}$  și  $f''_{yx}$  fiind continue în  $(a, b)$  deducem

$$f''_{xy}(\xi_n, \eta_n) \rightarrow f''_{xy}(a, b) \text{ și } f''_{yx}(\xi'_n, \eta'_n) \rightarrow f''_{yx}(a, b).$$

Trecând la limită în egalitățile

$$f''_{xy}(\xi_n, \eta_n) = f''_{yx}(\xi'_n, \eta'_n),$$

rezultă

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

**C o r o l a r.** Dacă derivatele parțiale mixte  $f''_{xy}$  și  $f''_{yx}$  există și sunt continue pe  $E$ , atunci ele sunt egale pe  $E$ :

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

**O b s e r v a t i i.** 1° O propoziție asemănătoare este valabilă pentru derivate parțiale de ordin superior: dacă mai multe derivate parțiale mixte, în care variabilele în raport cu care se derivează intervin de același număr de ori, există pe o vecinătate a lui  $(a, b)$  și sunt continue în  $(a, b)$ , atunci aceste derivate sunt egale în  $(a, b)$ .

De exemplu, dacă  $f'''_{xxy}$ ,  $f'''_{xzx}$  și  $f'''_{yxx}$  există pe o vecinătate  $V$  a lui  $(a, b)$  și sunt continue în  $(a, b)$ , atunci

$$f'''_{xxy}(a, b) = f'''_{xzx}(a, b) = f'''_{yxx}(a, b).$$

2° Propoziția este adevărată și pentru funcții reale sau vectoriale de trei sau mai multe variabile.

3° Este valabilă următoarea teoremă, mai generală:

*Dacă  $f'_x$ ,  $f'_y$  și  $f''_{xy}$  există într-o vecinătate a lui  $(a, b)$  și dacă  $f''_{xy}$  este continuă în  $(a, b)$ , atunci  $f''_{yx}$  există în  $(a, b)$  și  $f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$ .*

(Pentru demonstrație, v — M. Nicolescu, Analiză matematică, vol. II, p. 422).

**C r i t e r i u l u i Y o u n g.** Dacă funcția  $f$  are derivate parțiale de ordinul întâi  $f'_x$  și  $f'_y$ , într-o vecinătate  $V$  a lui  $(a, b)$  și dacă  $f'_x$  și  $f'_y$  sunt diferențiabile în  $(a, b)$ , atunci derivatele parțiale mixte de ordinul doi există în  $(a, b)$  și sunt egale în acest punct:

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

Existența derivațelor parțiale de ordinul doi rezultă din faptul că  $f'_x$  și  $f'_y$ , fiind diferențiabile în  $(a, b)$ , ele au derivate parțiale în  $(a, b)$ .

Să alegem un punct arbitrar  $(x, y) \in V$ , astfel ca  $x = a$  și  $y = b$  și să-l menținem fix. Să notăm

$$R(x, y) = f(x, y) - f(x, b) - f(a, y) + f(a, b).$$

Să considerăm funcția

$$\varphi(t) = f(t, y) - f(t, b)$$

definită pe intervalul  $[a, x]$  sau  $[x, a]$ , după cum  $a < x$  sau  $x < a$ . Funcția  $\varphi(t)$  este derivabilă pe acest interval și

$$\varphi'(t) = f'_x(t, y) - f'_x(t, b).$$

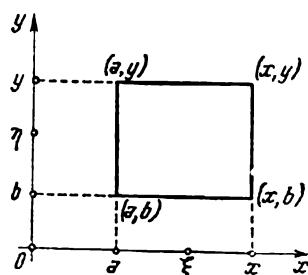


Fig. 148

• Avem apoi

$$\varphi(x) = f(x, y) - f(x, b),$$

$$\varphi(a) = f(a, y) - f(a, b),$$

astfel încât  $R(x, y)$  se scrie

$$R(x, y) = \varphi(x) - \varphi(a).$$

Aplicînd funcției  $\varphi$  teorema creșterilor finite, deducem că există un punct  $\xi$  cuprins între  $a$  și  $x$  astfel încât să avem

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(\xi) (x - a),$$

de unde

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \varphi'(\xi) (x - a) = [f'_x(\xi, y) - f'_x(\xi, b)](x - a) = \\ &= [f'_x(\xi, y) - f'_x(a, b) - (f'_x(\xi, b) - f'_x(a, b))] (x - a). \end{aligned}$$

Dar funcția  $f'_x$  este diferențiabilă în  $(a, b)$ , deci

$$\begin{aligned} f'_x(\xi, y) - f'_x(a, b) &= (f'_x)'_x(a, b)(\xi - a) + (f'_x)'_y(a, b)(y - b) + \\ &\quad + \omega_1(\xi, y)(\xi - a) + \omega_2(\xi, y)(y - b), \end{aligned}$$

unde

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega_i(\xi, y) = \omega_i(a, b) = 0, \quad i = 1, 2.$$

De asemenea

$$\begin{aligned} f'_x(\xi, b) - f'_x(a, b) &= (f'_x)'_x(a, b)(\xi - a) + (f'_x)'_y(a, b)(b - b) + \\ &\quad + \omega_3(\xi, b)(\xi - a) + \omega_4(\xi, b)(b - b), \end{aligned}$$

unde

$$\lim_{\xi \rightarrow a} \omega_3(\xi, b) = \omega_3(a, b) = 0.$$

Deoarece  $(f'_x)'_y = f''_{xy}$ ,  $R(x, y)$  se scrie

$$\begin{aligned} R(x, y) &= [f''_{xy}(a, b)(y - b) + \omega_1(\xi, y)(\xi - a) + \omega_3(\xi, y)(y - b) + \\ &\quad + \omega_3(\xi, b)(\xi - a)](x - a) = f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \\ &\quad + \omega_2(\xi, y)(x - a)(y - b) + \omega_5(\xi, y)(\xi - a)(x - a), \end{aligned}$$

unde am notat

$$\omega_5(\xi, y) = \omega_1(\xi, y) + \omega_3(\xi, b),$$

deci

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega_5(\xi, y) = \omega_5(a, b) = 0.$$

Plecînd de la funcția

$$\psi(t) = f(x, t) - f(a, t)$$

și făcînd un raționament analog, deducem că

$$\begin{aligned} R(x, y) &= f''_{yx}(a, b)(x-a)(y-b) + \omega_2'(x, \eta)(x-a)(y-b) + \\ &\quad + \omega_5'(x, \eta)(\eta-b)(y-b), \end{aligned}$$

unde  $\eta$  este cuprins între  $b$  și  $y$  și

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \eta \rightarrow b}} \omega_2'(x, \eta) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \eta \rightarrow b}} \omega_5'(x, \eta) = 0.$$

Atunci

$$\begin{aligned} f''_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + \omega_2(\xi, y)(x-a)(y-b) + \omega_5(\xi, y)(\xi-a)(x-a) &= \\ = f''_{yx}(a, b)(x-a)(y-b) + \omega_2'(x, \eta)(x-a)(y-b) + \omega_5'(x, \eta)(\eta-b)(y-b). \end{aligned}$$

Împărțind în ambele membri ai egalității cu  $(x-a)(y-b)$ , obținem:

$$f''_{xy}(a, b) + \omega_2(\xi, y) + \omega_5(\xi, y) \frac{\xi-a}{y-b} = f''_{yx}(a, b) + \omega_2'(x, \eta) + \omega_5'(x, \eta) \frac{\eta-b}{x-a}.$$

Să luăm acum un sir  $(x_n, y_n) \rightarrow (a, b)$  cu  $x_n \neq a$ ,  $y_n \neq b$ , astfel ca  $x_n - a = y_n - b$  pentru orice  $n$ . Din cele de mai sus rezultă că pentru fiecare punct  $(x_n, y_n)$  putem găsi un număr  $\xi_n$  cuprins între  $a$  și  $x_n$ , deci  $|\xi_n - a| \leq |x_n - a| = |y_n - b|$ , și un punct  $\eta_n$  cuprins între  $b$  și  $y_n$ , deci  $|\eta_n - b| \leq |y_n - b| = |x_n - a|$ , astfel încât

$$\begin{aligned} f''_{xy}(a, b) + \omega_2(\xi_n, y_n) - \omega_5(\xi_n, y_n) \frac{\xi_n - a}{y_n - b} &= \\ = f''_{yx}(a, b) + \omega_2'(x_n, \eta_n) + \omega_5'(x_n, \eta_n) \frac{\eta_n - b}{x_n - b}. \end{aligned}$$

Deoarece  $x_n \rightarrow a$  și  $y_n \rightarrow b$ , avem  $\xi_n \rightarrow a$ , și  $\eta_n \rightarrow b$ , deci

$$\omega_2(\xi_n, y_n) \rightarrow \omega_2(a, b) = 0,$$

$$\omega_2'(x_n, \eta_n) \rightarrow \omega_2'(a, b) = 0.$$

$$\text{Apoi } \left| \omega_5(\xi_n, y_n) \frac{\xi_n - a}{y_n - b} \right| \leq |\omega_5(\xi_n, y_n)| \rightarrow 0,$$

$$\left| \omega_5'(x_n, \eta_n) \frac{\eta_n - b}{x_n - b} \right| \leq |\omega_5'(x_n, \eta_n)| \rightarrow 0.$$

Trecînd la limită în egalitatea de mai sus, obținem

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

**C o r o l a r u l 1.** Dacă  $f'_x$  și  $f'_y$  există și sunt diferențiable pe  $E$ , atunci toate derivatele parțiale de ordinul doi există pe  $E$ , iar derivatele parțiale mixte sunt egale pe  $E$ ,  $f''_{xy} = f''_{yx}$ .

O b s e r v a t i i . 1° O propoziție asemănătoare este valabilă pentru derivatele parțiale de ordin superior: dacă derivatele parțiale de ordinul  $n - 1$  există pe o vecinătate  $V$  a lui  $(a, b)$  și sunt diferențiable în  $(a, b)$ , atunci există toate derivatele parțiale de ordinul  $n$  în  $(a, b)$  și derivatele mixte, în care variabilele în raport cu care se derivează intervin de același număr de ori, sunt egale în  $(a, b)$ .

2° Propoziția este adevărată și pentru funcții reale sau vectoriale de mai multe variabile.

Din criteriul lui Young rezultă un criteriu asemănător cu criteriul lui Schwarz.

**C o r o l a r u l 2.** Dacă toate derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției  $f$  există într-o vecinătate  $V$  a lui  $(a, b)$  și dacă sunt continue în  $(a, b)$ , atunci

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

Într-adevăr, funcția  $f'_x$  este diferențabilă în  $(a, b)$  deoarece derivatele sale parțiale  $f''_{xx}$  și  $f''_{xy}$  sunt continue în  $(a, b)$ . De asemenea,  $f'_y$  este diferențabilă în  $(a, b)$ , deoarece derivatele sale parțiale  $f''_{yx}$  și  $f''_{yy}$  sunt continue în  $(a, b)$ . Conform criteriului lui Young avem atunci  $f''_{yx}(a, b) = f''_{xy}(a, b)$ .

## 5. Diferențiale de ordin superior

Fie  $f(x, y)$  o funcție reală de două variabile definită pe o mulțime  $E \subset R^2$  și  $(a, b)$  un punct în interiorul lui  $E$ .

**D e f i n i t i e .** Se spune că funcția  $f$  este diferențabilă de  $n$  ori în punctul  $(a, b)$ , sau că are diferențială de ordinul  $n$  în  $(a, b)$ , dacă toate derivatele parțiale de ordinul  $n - 1$  ale lui  $f$  există într-o vecinătate  $V$  a lui  $(a, b)$  și sunt diferențiable în  $(a, b)$ .

Se spune că  $f$  este diferențabilă de  $n$  ori pe  $E$  dacă este diferențabilă de  $n$  ori în fiecare punct din  $E$ .

Folosind criteriul lui Young, rezultă că:

Dacă  $f$  este diferențabilă de  $n$  ori în  $(a, b)$ , atunci toate derivatele parțiale de ordinul  $n$  există în  $(a, b)$ , iar ordinea de derivare în  $(a, b)$  pînă la ordinul  $n$  inclusiv nu are importanță.

**Propozitie.** Dacă funcția  $f(x, y)$  are într-o vecinătate  $V$  a lui  $(a, b)$  toate derivatele parțiale de ordin  $n$  și dacă aceste derivate parțiale sunt continue în  $(a, b)$ , atunci  $f$  este diferențiabilă de  $n$  ori în  $(a, b)$ .

Într-adevăr, toate derivatele parțiale de ordinul  $n - 1$  au derivate parțiale în  $f$  continue în  $(a, b)$ , deci toate derivatele parțiale de ordinul  $n - 1$  sunt diferențiabile în  $(a, b)$ .

Diferențiala de ordinul  $n$  în punctul  $(a, b)$  se definește prin egalitatea

$$d^n f(a, b) (x, y) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right]^n f(a, b),$$

unde exponentul  $n$  înseamnă că se dezvoltă — formal — suma din paranteză după regula binomului lui Newton și apoi se înmulțește — formal — cu  $f(a, b)$ .

Prin aceleași calcule ca și la diferențiala de ordinul 1 se obține

$$d^n f(a, b) = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(a, b).$$

Dacă nu se mai pun în evidență variabilele diferențialei, se scrie

$$d^n f = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f.$$

S-a pus astfel în evidență operatorul de diferențiere de ordinul  $n$ ,

$$d^n = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n,$$

care este — formal — puterea a  $n$ -a a operatorului de diferențiere de ordinul întii. Avem de asemenea

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

Pentru funcții de trei sau mai multe variabile, diferențiabilitatea de ordinul  $n$  se definește ca și pentru funcțiile de două variabile.

Diferențiala de ordinul  $n$  a unei funcții de trei variabile  $f(x, y, z)$  se scrie

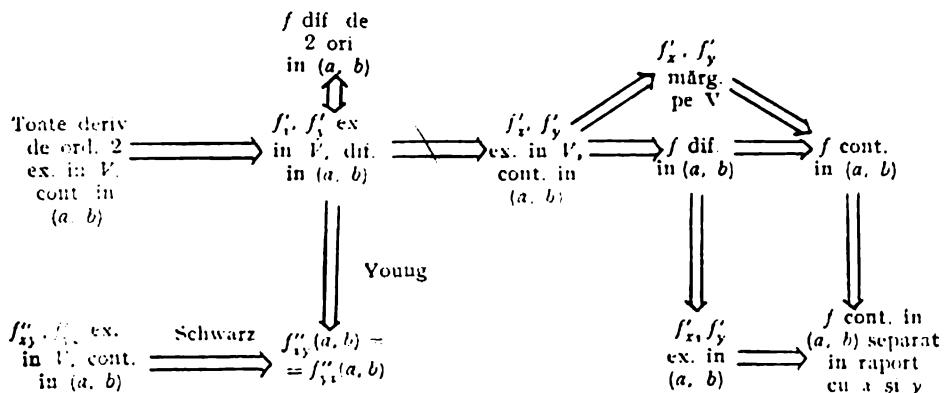
$$d^n f = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^n f,$$

iar a unei funcții de  $k$  variabile  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  se scrie

$$d^n f = \left( \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i \right)^n f.$$

Se definește în mod asemănător diferențiala de ordinul  $n$  a unei funcții vectoriale, de două sau mai multe variabile.

*Schema de implicații a propozițiilor :*



Schema poate fi repetată spre stînga indefinit, cu derivatele și diferențialele de ordinul 3, 4 etc.

## 6. Diferențiale și derivatele parțiale ale funcțiilor compuse

Operațiile algebrice efectuate asupra funcțiilor cu derivate parțiale sau asupra funcțiilor diferențiabile conduc la funcții de același fel. (Pentru funcțiile cu derivate parțiale, acest fapt a fost menționat mai înainte, iar pentru funcțiile diferențiabile va rezulta mai departe.)

Importanța noțiunii de diferențiabilitate constă în faptul că ea se conservă și prin operația de compunere a funcțiilor, în timp ce existența derivatelor parțiale poate să nu fie conservată prin această operație, așa cum va fi arătat în exemplu.

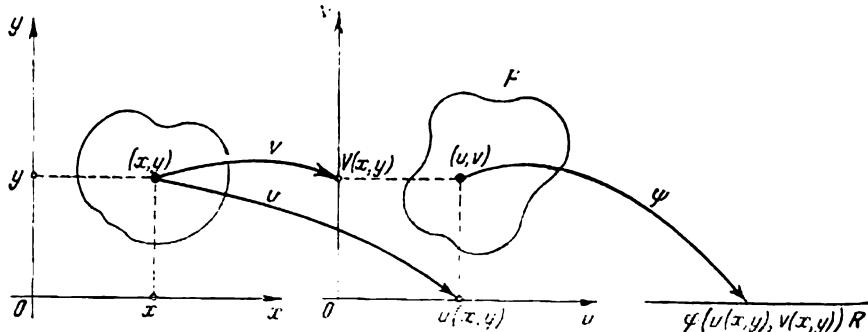


Fig. 149

Fie  $E$  și  $F$  două mulțimi din plan. Pentru a simplifica expunerea vom presupune că  $E$  și  $F$  sunt deschise, adică sunt formate din puncte interioare.

Fie  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  două funcții reale definite pe  $E$ , astfel ca

$$(u(x, y), v(x, y)) \in F \text{ pentru orice } (x, y) \in E.$$

Fie  $\varphi(u, v)$  o funcție reală definită pe  $F$ .

Putem atunci considera funcția compusă

$$f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$$

definită pentru  $(x, y) \in E$ , cu valori reale.

Am notat cu aceleași litere  $u$  și  $v$  atât funcțiile definite pe  $E$  cît și coordonatele punctelor din  $F$ , pentru simplificarea calculelor care urmează.

Fie  $(a, b)$  un punct din  $E$  și  $(c, d)$  punctul din  $F$  corespunzător lui  $(a, b)$  prin funcțiile  $u$  și  $v$ :

$$c = u(a, b), \quad d = v(a, b).$$

**Theorem 1.** Dacă funcțiile  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  sunt diferențiabile în punctul  $(a, b) \in E$  și funcția  $\varphi(u, v)$  este diferențiabilă în punctul corespunzător  $(c, d) \in F$ , atunci funcția compusă  $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$  este diferențiabilă în  $(a, b)$ .

Să scriem întâi că funcțiile  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  sunt diferențiabile în punctul  $(a, b)$ :

$$u(x, y) - u(a, b) = u'_x(a, b)(x - a) + u'_y(a, b)(y - b) + \omega_1(x, y)\rho,$$

$$v(x, y) - v(a, b) = v'_x(a, b)(x - a) + v'_y(a, b)(y - b) + \omega_2(x, y)\rho,$$

unde  $\rho = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$  și

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega_i(x, y) = \omega_i(a, b) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Să scriem acum că funcția  $\varphi(u, v)$  este diferențiabilă în punctul  $(c, d)$ , unde  $c = u(a, b)$  și  $d = v(a, b)$ :

$$\varphi(u, v) - \varphi(c, d) = [\varphi'_u(c, d) + \omega_3(u, v)](u - c) + [\varphi'_v(c, d) + \omega_4(u, v)](v - d)$$

unde  $\lim_{\substack{u \rightarrow c \\ v \rightarrow d}} \omega_i(u, v) = \omega_i(c, d) = 0, \quad i = 3, 4$ .

$$\frac{u \rightarrow c}{v \rightarrow d}$$

Să observăm că funcțiile  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  sunt continue în  $(a, b)$  (fiind diferențiabile), deci funcțiile compuse

$$\omega_3(u(x, y), v(x, y)), \quad \omega_4(u(x, y), v(x, y))$$

sunt continue în  $(a, b)$ ; avem deci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega_i(u(x, y), v(x, y)) = \omega_i(u(a, b), v(a, b)) = \omega_i(c, d) = 0, \quad i = 3, 4.$$

Să scriem acum creșterea funcției compuse  $f(x, y)$ :

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, b) &= \varphi(u(x, y), v(x, y)) - \varphi(u(a, b), v(a, b)) = \\ &= \varphi(u(x, y), v(x, y)) - \varphi(c, d) = [\varphi'_u(c, d) + \omega_3(u(x, y), v(x, y))] [u(x, y) - c] + \\ &\quad + [\varphi'_v(c, d) + \omega_4(u(x, y), v(x, y))] [v(x, y) - d] = \\ &= [\varphi'_u(c, d) + \omega_3] [u(x, y) - u(a, b)] + [\varphi'_v(c, d) + \omega_4] [v(x, y) - v(a, b)], \end{aligned}$$

unde am notat pentru prescurtare,

$$\omega_i = \omega_i(u(x, y), v(x, y)), i = 3, 4.$$

Mai departe, înlocuind creșterile funcțiilor  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$ , obținem:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, b) &= [\varphi'_u(c, d) + \omega_3] [u'_x(a, b)(x-a) + u'_y(a, b)(y-b) + \omega_1\rho] + \\ &\quad + [\varphi'_v(c, d) + \omega_4] [v'_x(a, b)(x-a) + v'_y(a, b)(y-b) + \omega_2\rho], \end{aligned}$$

unde am notat  $\omega_i = \omega_i(x, y), i = 1, 2$ .

Făcînd înmulțirile, obținem:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(a, b) &= [\varphi'_u(c, d) u'_x(a, b) + \varphi'_v(c, d) v'_x(a, b)] (x-a) + \\ &\quad + [\varphi'_u(c, d) u'_y(a, b) + \varphi'_v(c, d) v'_y(a, b)] (y-b) + \\ &\quad + [(\varphi'_u(c, d) + \omega_3) \omega_1 + (\varphi'_v(c, d) + \omega_4) \omega_2]\rho + \\ &+ [u'_x(a, b) \omega_3 + v'_x(a, b) \omega_4](x-a) + [u'_y(a, b) \omega_3 + v'_y(a, b) \omega_4](y-b). \end{aligned}$$

Parantezele care înmulțesc pe  $\rho$ ,  $(x-a)$  și  $(y-b)$  au limita 0 în punctul  $(a, b)$ ; ultimii trei termeni se pot deci scrie în forma  $\omega(x, y)\rho$ , unde  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega(x, y) = 0$ . Atunci

$$f(x, y) - f(a, b) = \lambda(x-a) + \mu(y-b) + \omega(x, y)\rho,$$

unde am notat

$$\lambda = \varphi'_u(c, d) u'_x(a, b) + \varphi'_v(c, d) v'_x(a, b),$$

$$\mu = \varphi'_u(c, d) u'_y(a, b) + \varphi'_v(c, d) v'_y(a, b),$$

deci  $f$  este diferențiabilă în punctul  $(a, b)$  și teorema este demonstrată.

Dacă ținem seama de faptul că  $\lambda = f'_x(a, b)$  și  $\mu = f'_y(a, b)$ , obținem următoarele formule de derivare parțială a funcțiilor compuse:

$$f'_x(a, b) = \varphi'_u(c, d) u'_x(a, b) + \varphi'_v(c, d) v'_x(a, b),$$

$$f'_y(a, b) = \varphi'_u(c, d) u'_y(a, b) + \varphi'_v(c, d) v'_y(a, b)$$

sau :

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(c, d)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(a, b)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(c, d)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(a, b)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(c, d)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(a, b)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(c, d)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(a, b)}{\partial y}.$$

Aceste formule se scriu într-o formă incompletă, dar mai ușor de reținut, astfel :

$$f'_x = \varphi'_u u'_x + \varphi'_v v'_x,$$

$$f'_y = \varphi'_u u'_y + \varphi'_v v'_y$$

sau :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Dacă în membrul drept se dă — în mod formal — factor comun  $\varphi$ , se obțin formulele

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \left( \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \varphi,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = \left( \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \varphi.$$

În aceste formule, literele  $u$  și  $v$  care apar la numitor desemnează variabilele funcției  $\varphi(u, v)$ , iar literele  $u$  și  $v$  care apar la numărător desemnează funcții de  $x$  și  $y$ .

**C o r o l a r u l 1.** Dacă funcțiile  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  sunt diferențiaibile pe  $E$ , iar funcția  $\varphi(u, v)$  este diferențială pe  $F$ , atunci funcția compusă  $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$  este diferențială pe  $E$ .

Avem :

$$df = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy.$$

Într-adevăr, se înlocuiesc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  și  $\frac{\partial f}{\partial y}$  din formula

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

cu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

**O b s e r v a t i e.** În formula /de diferențiere a funcției compuse să desfacem parantezele și să dăm factor comun pe  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$  și  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ .

Obținem :

$$df = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right),$$

dar

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy,$$

deci

$$df = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv.$$

Pe de altă parte

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv.$$

Așadar, diferențialele funcțiilor  $f$  și  $\varphi$  au aceeași formă. Acest fapt constituie ceea ce se numește „invarianta diferențialei față de operația de compunere a funcțiilor”.

Trebuie observat însă că această invariантă a diferențialei este formală (spre deosebire de „invarianta diferențiabilității” față de operația de compunere, care este reală). Într-adevăr, dacă folosim notația completă a diferențialei, avem :

$$df(x, y) = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} du(x, y) + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} dv(x, y).$$

Deci în egalitatea  $df = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv$ ,  $du$  și  $dv$  sunt diferențialele funcțiilor  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  definite pe  $E$ , iar pe de altă parte

$$d\varphi(u, v) = \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v} dv,$$

deci în egalitatea  $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv$ ,  $du$  și  $dv$  sunt diferențialele variabilelor  $u$  și  $v$  ale funcției  $\varphi(u, v)$ , sau, mai precis, diferențialele funcțiilor proiecție pe axele  $Ou$  și  $Ov$ , definite pe mulțimea  $F$ .

O altă proprietate invariantă prin operația de compunere este *existența și continuitatea derivatelor parțiale*, *asa cum rezultă din* :

**C o r o l a r u l 2.** Dacă funcțiile  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  au derivate parțiale continue pe  $E$ , iar funcția  $\varphi(u, v)$  are derivate parțiale continue pe  $F$ , atunci funcția compusă  $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$  are derivate parțiale continue pe  $E$ .

Într-adevăr, deoarece funcțiile  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  și  $\varphi(u, v)$  au derivate parțiale continue, ele sunt diferențiabile (și deci și continue). Atunci funcția compusă este diferențiabilă, deci are derivate parțiale date de formulele :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}.$$

Toate funcțiile din membrul drept sunt continue, fie prin ipoteză, cum sunt derivatele parțiale ale funcțiilor  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$ , fie ca funcții compuse de funcții continue cum sunt

$$\frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u}, \quad \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v}.$$

Rezultă deci că  $\frac{\partial f}{\partial x}$  și  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sunt continue.

**O b s e r v a t i e.** Dacă derivatele parțiale ale funcțiilor  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  sunt continue numai în  $(a, b)$  și derivatele parțiale ale funcției  $\varphi(u, v)$  sunt continue numai în  $(c, d)$ , rezultă că aceste funcții sunt diferențiabile în punctele respective, deci funcția compusă este diferențiabilă și are derivate parțiale în  $(a, b)$ , dar nu rezultă că funcția compusă are derivate parțiale în celelalte puncte.

Teoremele precedente rămân adevărate — și cu aceleași demonstrații — pentru funcții reale (sau funcții vectoriale) de oricâte variabile. Să enunțăm teorema în cazul general :

Fie  $E \subset R^n$  și  $F \subset R^m$  două mulțimi deschise,  $n \geq 1$  și  $m \geq 1$ .

**T e o r e m a 1. Dacă**

$$u_1(x_1, x_2, \dots, x_n), u_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sunt  $m$  funcții reale de  $n$  variabile, diferențiabile (respectiv cu derivate parțiale continue) pe mulțimea  $E$ , astfel încât

$$(u_1(x_1, \dots, x_n), u_2(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n)) \in F$$

pentru orice  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$  și dacă

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_m)$$

este o funcție reală (sau cu valori în  $R^p$ ) de  $m$  variabile diferențiabilă (sau cu derivate parțiale continue) pe mulțimea  $F$ , atunci funcția compusă :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(u_1(x_1, x_2, \dots, x_n), u_2(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

este diferențiabilă (respectiv are derivate parțiale continue) pe  $E$  și

$$df = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} du_j,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Acest caz general se poate pune sub o formă foarte simplă.

Să notăm cu  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  punctele din  $E \subset R^n$  și cu  $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$  punctele din  $F \subset R^m$ .

Funcțiile reale  $u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  definite pe  $E \subset R^n$  se scriu atunci  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)$ , iar funcția vectorială  $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_m)$  definită pe  $F \subset R^m$  cu valori în  $R^p$  se scrie atunci  $\varphi(u)$ .

Funcțiile  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)$  sunt componente reale ale unei funcții vectoriale  $u(x) : E \subset R^n \rightarrow F \subset R^m$ :

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)).$$

Funcția compusă  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se scrie deci

$$f(x) = \varphi(u(x))$$

și este o funcție vectorială definită pe  $E \subset R^n$  cu valori în  $R^p$ .

$$\begin{array}{ccccc} E \subset R^n & \xrightarrow{u} & F \subset R^m & \xrightarrow{\varphi} & R^p \\ x & \longrightarrow & u(x) & \longrightarrow & \varphi(u(x)) \\ x & \longrightarrow & f(x). \end{array}$$

Ultima teoremă se formulează astfel:

Dacă funcțiile  $u(x)$  și  $\varphi(u)$  sunt diferențiabile respectiv pe  $E \subset R^n$  și  $F \subset R^m$  atunci și funcția compusă  $f(x) = \varphi(u(x))$  este diferențiabilă pe  $E \subset R^n$ .

Această formulare este asemănătoare cu aceea a teoremei de derivabilitate (sau diferențiabilitate) a funcțiilor reale de o singură variabilă.

### Cazuri particulare

I)  $m = 1, n$  oarecare, adică  $E \subset R^n, F \subset R$ :

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) : E \rightarrow R, \quad \varphi(u) : F \rightarrow R,$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(u(x_1, x_2, \dots, x_n)) : E \rightarrow R,$$

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{d\varphi}{du} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = \frac{d\varphi}{du} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i = \frac{d\varphi}{du} du = \varphi'(u) du,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{d\varphi}{du} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

În cazul cînd  $\varphi(u)$  este o funcție elementară, se obțin regulile de diferențiere cunoscute pentru funcții de o variabilă.

*Exemple* ( $u$  este o funcție diferențiabilă de una sau mai multe variabile).

$$1) \ du^n = nu^{n-1} \ du \ (n \text{ real oarecare});$$

$$2) \ dsin u = \cos u \ du;$$

$$3) \ d\cos u = -\sin u \ du;$$

$$4) \ dtg u = \frac{1}{\cos^2 u} du;$$

$$5) \ d\operatorname{ctg} u = -\frac{1}{\sin^2 u} du;$$

$$6) \ d\arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du;$$

$$7) \ d\arccos u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du;$$

$$8) \ d\arctg u = \frac{1}{1+u^2} du;$$

$$9) \ darctg u = -\frac{1}{1+u^2} du;$$

$$10) \ d\ln u = \frac{1}{u} du;$$

$$11) \ de^u = e^u du;$$

$$12) \ da^u = a^u \ ln a \ du.$$

Pentru cazul cind  $m = 1$  și  $n = 2$ , adică  $E \subset R^n$  și  $F \subset R$ :

$$u(x, y) : E \rightarrow R, \varphi(u) : F \rightarrow R,$$

$$f(x, y) = \varphi(u(x, y)).$$

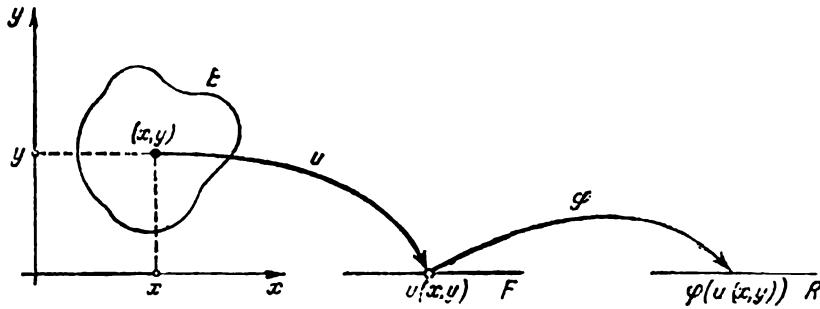


Fig. 150

avem

$$df = \frac{d\varphi}{du} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{d\varphi}{du} \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d\varphi}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d\varphi}{du} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

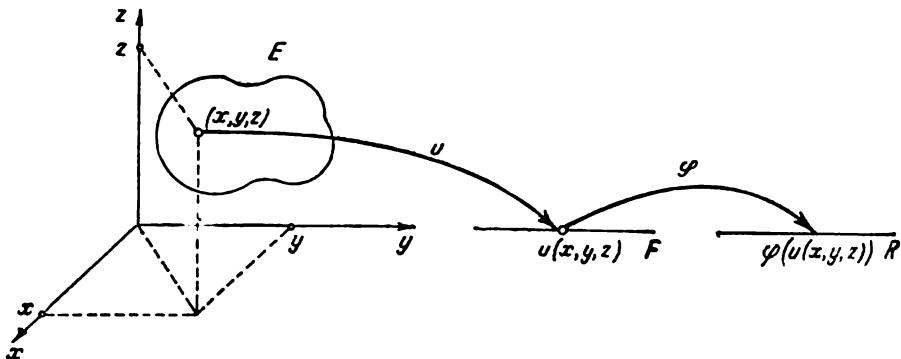


Fig. 151

Pentru cazul cind  $m = 1$  și  $n = 3$ , adică  $E \subset R^3$  și  $F \subset R$ :

$$u(x, y, z) : E \rightarrow R, \quad \varphi(u) : F \rightarrow R,$$

$$f(x, y, z) = \varphi(u(x, y, z)) : E \rightarrow R,$$

avem

$$df = \frac{d\varphi}{du} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{d\varphi}{du} \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{d\varphi}{du} \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d\varphi}{du} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d\varphi}{du} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{d\varphi}{du} \frac{\partial u}{\partial z}.$$

II)  $m = 2, n$  oarecare, adică  $E \subset R^n, F \subset R^2$ :

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n), v(x_1, x_2, \dots, x_n) : E \rightarrow R, \quad \varphi(u, v) : F \rightarrow R;$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(u(x_1, x_2, \dots, x_n), v(x_1, x_2, \dots, x_n)) : E \rightarrow R;$$

$$df = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Luând funcția  $\varphi(u, v)$  de una din formulele  $\varphi(u, v) = u + v, \varphi(u, v) = u - v, \varphi(u, v) = uv, \varphi(u, v) = \frac{u}{v}, \varphi(u, v) = u^v$  rezultă că suma a două funcții diferențiabile este o funcție diferențiabilă și de ase-

menea produsul unei funcții diferențiabile cu un scalar. Așadar, mulțimea funcțiilor diferențiabile într-un punct sau pe o mulțime este un spațiu vectorial. Se obțin următoarele reguli de diferențiere (ca și pentru funcții de o variabilă)

- 1)  $d(u + v) = du + dv$  ; 2)  $d(u - v) = du - dv$  ;
- 3)  $d(\alpha u) = \alpha du$  ; 4)  $d(uv) = vdu + udv$  ;
- 5)  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$  ; 6)  $d(u^v) = vu^{v-1} du + u^v \ln u dv$ .

Aici,  $u$  și  $v$  sunt funcții diferențiabile de una sau mai multe variabile. Prin recurență se demonstrează că regulile privind diferențiala sumei și a produsului rămân valabile și pentru mai multe funcții diferențiabile:  $u_1, u_2, \dots, u_m$ :

$$d(u_1 + u_2 + \dots + u_m) = du_1 + du_2 + \dots + du_m,$$

$$d(u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_m) = \sum_{j=1}^m u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{j-1} \cdot du_j \cdot u_{j+1} \dots u_m.$$

Ultimele reguli se obțin de asemenea din teorema generală, luând  $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_m) = u_1 + u_2 + \dots + u_m$ , respectiv

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_m) = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_m.$$

Pentru cazul cind  $m = 2, n = 3$ , adică  $E \subset R^3, F \subset R^2$ ,

$$u(x, y, z), v(x, y, z) : E \rightarrow R, \varphi(u, v) : F \rightarrow R,$$

$$f(x, y, z) = \varphi(u(x, y, z), v(x, y, z)) : E \rightarrow R,$$

avem

$$df = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z}.$$

**O b s e r v a t i e.** Pentru a calcula diferențiala unei funcții diferențiabile  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , trebuie mai întâi să calculăm derivatele sale parțiale  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Atunci

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Folosind regulele de diferențiere date mai sus, putem calcula direct diferențiala lui  $f$ . Rezultă atunci și derivatele parțiale ale lui  $f$ , anume:  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  este coeficientul lui  $dx_i$ .

*Exemplu.* 1)  $f(x, y) = \sin xy$  definită pe  $R^2$ . Avem

$$\begin{aligned} df(x, y) &= d(\sin xy) = \cos xy \cdot d(xy) = \cos xy \cdot (dx \cdot y + x dy) = \\ &= y \cos xy dx + x \cos xy dy, \end{aligned}$$

deci

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(\sin xy)}{\partial x} = y \cos xy,$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(\sin xy)}{\partial y} = x \cos xy.$$

$$\begin{aligned} 2) \quad d(\ln \sqrt{x^2 + y^2}) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{d(x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \frac{2x dx + 2y dy}{2(x^2 + y^2)} = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy, \end{aligned}$$

deci

$$\frac{\partial(\ln \sqrt{x^2 + y^2})}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial(\ln \sqrt{x^2 + y^2})}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

III)  $n = 1, m$  oarecare, adică  $E \subset R, F \subset R^m$ ;

$$\begin{aligned} u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x) : E \rightarrow R, \quad \varphi(u_1, u_2, \dots, u_m) : F \rightarrow R \\ f(x) = \varphi(u_1, u_2, \dots, u_m) : E \rightarrow R; \end{aligned}$$

avem

$$df = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{du_j}{dx} dx = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} du_j;$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{du_j}{dx}.$$

Pentru cazul cind  $n = 1$  și  $m = 2$ , adică  $E \subset R$  și  $F \subset R^2$ :

$$u(x)v(x) : E \rightarrow R, \quad \varphi(u, v) : F \rightarrow R;$$

$$f(x) = \varphi(u(x), v(x)) : E \rightarrow R,$$

avem

$$df = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{dv}{dx} \right) dx, \quad \frac{df}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

Pentru cazul cînd  $n = 1$  și  $m = 3$ , adică  $E \subset R$ ,  $F \subset R^3$ ,

$$u(x), v(x), w(x) : E \rightarrow R, \varphi(u, v, w) : F \rightarrow R$$

$$f(x) = \varphi(u(x), v(x), w(x)) : E \rightarrow R,$$

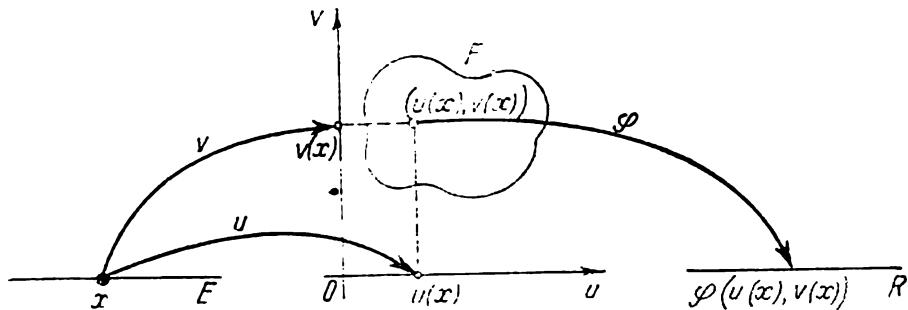


Fig. 152

avem

$$df = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{dw}{dx} \right) dx,$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{dw}{dx}.$$

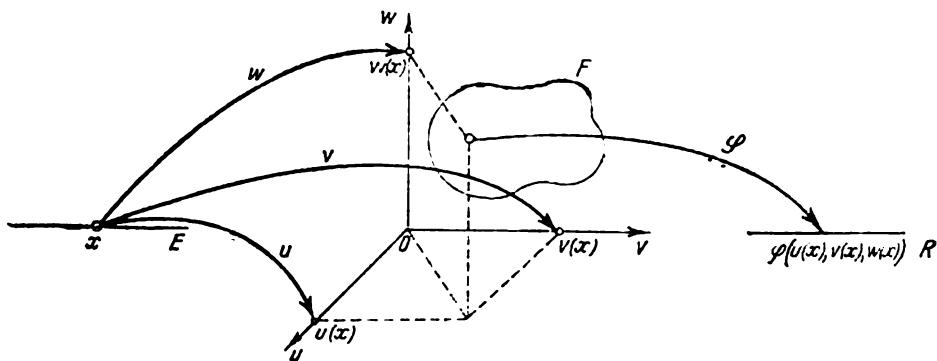


Fig. 153

IV)  $n = 2, m$  oarecare, adică  $E \subset R^2$ ,  $F \subset R^m$ :

$$u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_m(x, y) : E \rightarrow R, \varphi(u_1, u_2, \dots, u_m) : F \rightarrow R$$

$$f(x, y) = \varphi(u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_m(x, y)) : E \rightarrow R;$$

avem

$$df = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x} dx + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial y} dy = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} du_j;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial y}.$$

Pentru cazul cind  $n = 2$  și  $m = 3$ , adică  $E \subset R^2$  și  $F \subset R^3$ :

$$u(x, y), v(x, y), w(x, y) : E \rightarrow R, \varphi(u, v, w) : F \rightarrow R;$$

$$f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y), w(x, y)) : E \rightarrow R;$$

avem

$$df = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Teoarema următoare asigură existența derivatelor parțiale ale funcției compuse (dar nu neapărat a diferențialei):

**T e o r e m a 2.** Dacă funcțiile  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  au deriveate parțiale în raport cu  $x$  (sau cu  $y$ ) în punctul  $(a, b) \in E$ , iar funcția  $\varphi(u, v)$  este diferențabilă în punctul corespunzător  $(c, d) \in F$ , atunci funcția compusă  $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$  are deriveate parțiale în raport cu  $x$  (sau cu  $y$ ) în punctul  $(a, b)$ , date de formulele următoare:

$$f'_x(a, b) = \varphi'_u(c, d) \cdot u'_x(a, b) + \varphi'_v(c, d) \cdot v'_x(a, b);$$

$$f'_y(a, b) = \varphi'_u(c, d) \cdot u'_y(a, b) + \varphi'_v(c, d) \cdot v'_y(a, b).$$

Conform ipotezei, avem

$$u'_x(a, b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x, b) - u(a, b)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x, b) - c}{x - a}, \quad c = u(a, b);$$

$$v'_x(a, b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{v(x, b) - v(a, b)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{v(x, b) - d}{x - a}, \quad d = v(a, b);$$

$$\varphi(u, v) - \varphi(c, d) = [\varphi'_u(c, d) + \omega_1(u, v)] (u - c) + [\varphi'_v(c, d) + \omega_2(v, d)] (v - d),$$

$$\text{unde } \lim_{\substack{u \rightarrow c \\ v \rightarrow d}} \omega_i(u, v) = \omega_i(c, d) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Atunci

$$\frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \frac{\varphi(u(x, b), v(x, b)) - \varphi(u(a, b), v(a, b))}{x - a} =$$

$$= \frac{\varphi(u(x, b), v(x, b)) - \varphi(c, d)}{x - a} = [\varphi'_u(c, d) + \omega_1(u(x, b), v(x, b))] \frac{u(x, b) - c}{x - a} +$$

$$+ [\varphi'_v(c, d) + \omega_2(u(x, b), v(x, b))] \frac{v(x, b) - d}{x - a}.$$

Funcțiile de o singură variabilă  $u(x, b)$ ,  $v(x, b)$  sunt continue în  $a$ , deoarece sunt derivabile în  $a$ ; funcția  $\omega_i(u, v)$  este continuă în punctul corespunzător  $(c, d)$ . Rezultă că funcția compusă  $\omega_i(u(x, b), v(x, b))$  este continuă în punctul  $a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} \omega_i(u(x, b), v(x, b)) = \omega_i(u(a, b), v(a, b)) = \omega_i(c, d) = 0.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} &= [\varphi'_u(c, d) + \lim_{x \rightarrow a} \omega_1] \lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x, b) - c}{x - a} + \\ &+ [\varphi'_v(c, d) + \lim_{x \rightarrow a} \omega_2] \lim_{x \rightarrow a} \frac{v(x, b) - d}{x - a} = \varphi'_u(c, d) \cdot u'_x(a, b) + \varphi'_v(c, d) \cdot v'_x(a, b), \end{aligned}$$

deci  $f'_x(a, b)$  există și este ființă, și ea este dată de formula din enunțul teoremei.

**C o r o l a r.** Dacă funcțiile  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  au derivate parțiale pe  $E$ , iar funcția  $\varphi(u, v)$  este diferențiabilă pe  $F$ , atunci funcția compusă  $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$  are derivate parțiale pe  $E$ , date de formulele

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}; \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}. \end{aligned}$$

**O b s e r v a t i e.** Dacă funcția  $\varphi(u, v)$  nu este diferențiabilă în punctul  $(c, d)$ , atunci este posibil ca funcția compusă

$$f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$$

să nu aibă derivate parțiale în acest punct, chiar dacă funcțiile  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  sunt diferențiabile în  $(a, b)$ , iar  $\varphi(u, v)$  are derivate parțiale în  $(c, d)$ .

**Exemplu.** Fie funcțiile

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = x^2 + y^2$$

definite pe  $E = R^2$  și funcția  $\varphi(u, v)$  definită pe  $F \subset R^2$ , astfel:

$$\varphi(u, v) = \frac{uv}{u^2 + v^2} \text{ dacă } (u, v) \neq (0, 0) \text{ și } \varphi(0, 0) = 0.$$

Punctului  $(a, b) = (0, 0) \in E$  li corespunde punctul  $(c, d) = (0, 0) \in F$ , deoarece  $c = u(0, 0) = 0$  și  $d = v(0, 0) = 0$ .

Funcțiile  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  sunt diferențiabile în  $(0, 0)$  (și chiar pe tot planul), iar funcția  $\varphi(u, v)$  are derivate parțiale în  $(0, 0)$ , dar nu este diferențiabilă în acest punct.

Funcția compusă  $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$  nu are derivate parțiale în  $(0, 0)$ . Într-adevăr, dacă  $(x, y) \neq (0, 0)$ , atunci

$$u(x, y) = v(x, y) = x^2 + y^2 \neq 0, \text{ deci}$$

$$f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2, x^2 + y^2) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{2}.$$

iar dacă  $(x, y) = (0, 0)$ , avem  $u(0, 0) = v(0, 0) = 0$ , deci

$$f(0, 0) = \varphi(0, 0) = 0.$$

Atunci, dacă  $x \neq 0$ , avem

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{x - 0} = \frac{1}{2x}$$

și acest raport nu are limită în punctul 0, deci funcția  $f$  nu are derivată parțială în raport cu  $x$  în punctul  $(0, 0)$ .

La fel se arată că  $f$  nu are derivată parțială în raport cu  $y$  în punctul  $(0, 0)$ .

## 7. Diferențialele și derivatele parțiale de ordin superior ale funcțiilor compuse

Ne vom mărgini la studiul funcțiilor de două variabile.

Rezultatele rămân adevărate și pentru funcții de oricătre variabile.

Fie  $E$  și  $F$  două mulțimi deschise din plan,  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  două funcții reale definite pe  $E$ , astfel încât  $(u(x, y), v(x, y)) \in F$  pentru orice  $(x, y) \in E$  și funcția reală  $\varphi(u, v)$  definită pe  $F$ .

Să considerăm funcția compusă  $f$  definită pe  $E$ :

$$f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y)).$$

Fie  $(a, b)$  un punct din  $E$  și  $(c, d) \in F$  punctul corespunzător,

$$c = u(a, b), \quad d = v(a, b).$$

**T e o r e m a 1.** Dacă funcțiile  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  au derivate de ordinul doi în punctul  $(a, b) \in E$ , iar funcția  $\varphi(u, v)$  este diferențierabilă de două ori într-o vecinătate a punctului corespunzător  $(c, d) \in F$ , atunci funcția compusă  $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$  are derivate parțiale de ordinul doi în  $(a, b)$  și

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

unde derivatele parțiale ale funcțiilor  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  se calculează în punctul  $(a, b)$ , iar cele ale funcției  $\varphi(u, v)$  în punctul corespunzător  $(c, d)$ .

Deoarece funcția  $\varphi(u, v)$  este diferențiabilă de două ori pe întreaga vecinătate  $U$  a lui  $(c, d)$ , ea are derivate parțiale  $\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u}$  și  $\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v}$ , diferențiabile pe  $U$ . Atunci funcția  $\varphi(u, v)$  este de asemenea diferențiabilă pe  $U$ . Fără a micșora generalitatea putem presupune că derivatele parțiale  $\varphi'_u$  și  $\varphi'_v$  există pe toată mulțimea de definiție  $F$ , considerind, la nevoie, funcția  $\varphi(u, v)$  definită numai pe  $U$ . Deoarece funcțiile  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  au derivate parțiale de ordinul doi în punctul  $(a, b)$  ele au derivate parțiale de ordinul întâi pe o mulțime  $V$  care conține un segment paralel cu  $Ox$  și un segment paralel cu  $Oy$ , ambele trecând prin  $(a, b)$ . Putem raționa cu restricțiile funcțiilor  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  la mulțimea  $V$ , de aceea, fără a micșora generalitatea, putem presupune că derivatele parțiale ale funcțiilor  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  există pe toată mulțimea  $E$ .

Deoarece funcțiile  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  au derivate parțiale pe  $E$ , iar funcția  $\varphi(u, v)$  este diferențiabilă pe  $F$ , rezultă că funcția compusă are derivate parțiale pe  $E$  și

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}.$$

Toate funcțiile din membrul drept au derivate parțiale în  $(a, b)$ ; funcțiile  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  au derivate parțiale în  $(a, b)$  deoarece, prin ipoteză, funcțiile  $u$  și  $v$  au derivate parțiale de ordinul doi în acest punct; iar funcțiile

$$\frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u}, \quad \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v}$$

au derivate parțiale în  $(a, b)$ , deoarece funcțiile  $u$  și  $v$  au derivate parțiale în  $(a, b)$ , iar funcțiile  $\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v}$  sunt diferențiabile în punctul corespunzător  $(c, d)$ .

Rezultă deci că și funcțiile  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  au derivate parțiale în  $(a, b)$ , adică funcția compusă  $f$  are derivate parțiale de ordinul doi în  $(a, b)$ . Derivatele parțiale de ordinul doi ale lui  $f$  în punctul  $(a, b)$  se calculează astfel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Dar

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

și

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

astfel încât

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

La fel se calculează și celelalte trei formule.

Cele patru formule se pot scrie, în mod simbolic, astfel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \varphi + \left( \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \varphi;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \varphi + \left( \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \varphi;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \varphi + \left( \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \varphi;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) \varphi + \left( \frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) \varphi;$$

**O b s e r v a t i e.** În demonstrație s-a folosit faptul că funcția  $\varphi(u, v)$  este de două ori diferențierabilă pe o întreagă vecinătate a lui  $(c, d)$ . Dacă  $\varphi(u, v)$  este diferențierabilă de două ori numai în  $(c, d)$ , putem deduce că funcția compusă  $f(x, y)$  are derivate parțiale de ordinul întii doar în punctul  $(a, b)$ .

**C o r o l a r.** Dacă funcțiile  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  au derivate parțiale de ordinul doi pe  $E$ , iar funcția  $\varphi(u, v)$  este diferențierabilă de două ori pe  $E$ , atunci funcția compusă  $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$  are derivate parțiale de ordinul doi pe  $E$ .

**O b s e r v a t i i.** 1° Dacă derivatele parțiale mixte ale funcțiilor  $u$  și  $v$  sint egale,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

rezultă că și derivatele parțiale mixte ale funcției compuse sunt egale:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

2° Pentru ca  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  să existe este suficient ca  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  și  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  să existe; există atunci și  $\frac{\partial u}{\partial x}$  și  $\frac{\partial v}{\partial x}$ . Nu este necesară existența celorlalte derivate parțiale de ordinul doi ale funcțiilor  $u$  și  $v$  și nici existența derivatelor de ordinul întii în raport cu  $y$  ale funcțiilor  $u$  și  $v$ .

De asemenea, pentru ca  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  să existe, este suficient să existe  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  și  $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ , dar nu în mod necesar celelalte derivate de ordinul doi și nici  $\frac{\partial u}{\partial x}$  și  $\frac{\partial v}{\partial x}$ .

Pentru existența derivatei  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  se folosește existența derivatelor de ordinul doi  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$  și a derivatelor de ordinul întii ale funcțiilor  $u$  și  $v$ , atât în raport cu  $x$  cât și în raport cu  $y$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .

De asemenea, pentru existența derivatei  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  se folosește existența derivatelor de ordinul doi  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$  și a derivatelor de ordinul întii ale funcțiilor  $u$  și  $v$  atât în raport cu  $x$  cât și în raport cu  $y$ .

**T e o r e m a 2.** Dacă funcțiile  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  sunt diferențiabile de două ori în punctul  $(a, b) \in E$ , iar funcția  $\varphi(u, v)$  este diferențiabilă de două ori în vecinătatea punctului corespunzător  $(c, d)$ , atunci funcția compusă  $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$  este diferențiabilă de două ori în punctul  $(a, b)$  și

$$d^2 f = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} d^2 v,$$

unde derivatele parțiale ale funcției  $\varphi$  sunt calculate în punctul  $(c, d)$ , iar diferențialele funcțiilor  $u$  și  $v$  sunt calculate în punctul  $(a, b)$ .

Deoarece funcțiile  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  sunt diferențiabile de două ori în  $(a, b)$ , ele au derivate parțiale de ordinul întii într-o vecinătate  $V$  a lui  $(a, b)$  și diferențiabile în  $(a, b)$ . Rezultă că și funcția compusă  $f$  are derivate parțiale de ordinul întii în vecinătatea  $V$ :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}.$$

Toate funcțiile din membrul drept al acestor egalități sunt diferențiabile în  $(a, b)$ : derivatele parțiale ale funcțiilor  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  sunt diferențiabile în  $(a, b)$  deoarece aceste funcții sunt de două ori diferențiabile în  $(a, b)$ ; de asemenea, funcțiile  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  sunt diferențiabile în  $(a, b)$  (fiind de două ori diferențiabile în acest punct), iar  $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$  și  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$  sunt diferențiabile în punctul corespunzător  $(c, d)$  (deoarece  $\varphi$  este de două ori diferențiabilă într-o vecinătate a acestui punct); atunci și funcțiile compuse

$$\frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial u}, \frac{\partial \varphi(u(x, y), v(x, y))}{\partial v}$$

sunt diferențiabile în  $(a, b)$ . Rezultă deci că  $\frac{\partial f}{\partial x}$  și  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sunt diferențiabile în  $(a, b)$ , adică funcția compusă  $f$  este diferențiabilă de două ori în  $(a, b)$ .

Deducem de aici că funcția compusă  $f$  are toate derivatele de ordinul doi în  $(a, b)$ , iar derivatele mixte sunt egale în  $(a, b)$ .

Atunci

$$\begin{aligned} df = d(df) &= d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv\right) = d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) \cdot du + \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot d(du) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) \cdot dv + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot d(dv). \end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned} d(du) &= d^2u, \quad d(dv) = d^2v \text{ și} \\ d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv\right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} dv; \\ d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv\right) \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} du + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} dv. \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned} df &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} dv\right) du + \frac{\partial \varphi}{\partial u} d^2u + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} du + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} dv\right) dv + \frac{\partial \varphi}{\partial v} d^2v = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u} d^2u + \frac{\partial \varphi}{\partial v} d^2v. \end{aligned}$$

Această formulă se scrie, simbolic, astfel :

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv\right)^2 \varphi + \left(\frac{\partial}{\partial u} d^2u + \frac{\partial}{\partial v} d^2v\right) \varphi.$$

O b s e r v a ţ i i . 1º Dacă funcția  $\varphi(u, v)$  este diferențiabilă de două ori numai în  $(c, d)$ , putem deduce că funcția compusă are derivate parțiale de ordinul întâi numai în  $(a, b)$ , deci nu mai rezultă că  $f(x, y)$  este diferențiabilă de două ori în  $(a, b)$ .

2° Formula diferențialei de ordinul doi a funcției compuse se poate obține și din egalitatea

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2,$$

înlocuind derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției compuse  $f$ , date de formulele din teorema 1.

3° Diferențiala de ordinul doi a funcției  $\varphi$  este

$$d^2\varphi = \left( \frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv \right)^2 \varphi.$$

Se observă că  $d^2f$  și  $d^2\varphi$  diferă prin termenul

$$\left( \frac{\partial}{\partial u} d^2u + \frac{\partial}{\partial v} d^2v \right) \varphi,$$

astfel încât nu se mai poate vorbi de invariante diferențiale de ordinul doi față de operația de compunere.

Dacă funcțiile  $u(x,y)$  și  $v(x,y)$  sunt liniare,

$$u(x,y) = a_1x + b_1y + c_1,$$

$$v(x,y) = a_2x + b_2y + c_2,$$

atunci

$$d^2u(x,y) = 0, d^2v(x,y) = 0,$$

deci

$$\left( \frac{\partial}{\partial u} d^2u + \frac{\partial}{\partial v} d^2v \right) \varphi = 0,$$

adică, formal, avem  $d^2f = d^2\varphi$ ; în acest caz și diferențiala de ordinul doi este invariante față de operația de compunere.

De asemenea, în acest caz, derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției compuse  $f(x,y)$  se scriu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \varphi;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \varphi;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \varphi.$$

Luând în particular

$$u(x,y) = x,$$

$$v(x,y) = y,$$

avem chiar egalitate între funcțiile  $f$  și  $\varphi$

$$f(x,y) = \varphi(u(x,y), v(x,y)) = \varphi(x, y).$$

$3^\circ$  Dacă funcția  $f(x, y)$  este diferențiabilă de două ori și dacă se cunosc derivatele sale parțiale de ordinul doi, atunci se poate calcula diferențiala sa :

$$df^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Reciproc, dacă se cunoaște diferențiala de ordinul doi, rezultă și derivelele parțiale de ordinul doi :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  este coeficientul lui  $dx^2$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  este coeficientul lui  $dy^2$ , iar  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  este jumătatea coeficientului lui  $dx dy$ .

*Exemplu.* Fie funcția  $f(x, y) = \sin \sqrt{xy}$  definită pentru  $xy > 0$ , adică în cadranele 1 și 3, fără punctele de pe axe.

A vom

$$df(x, y) = d(\sin \sqrt{xy}) = \cos \sqrt{xy} d\sqrt{xy} = \cos \sqrt{xy} \frac{d(xy)}{2\sqrt{xy}} = \cos \sqrt{xy} \frac{ydx + xdy}{2\sqrt{xy}}.$$

$$df^2(x, y) = d(df(x, y)) = d \cos \sqrt{xy} \frac{ydx + xdy}{2\sqrt{xy}} + \cos \sqrt{xy} d \frac{ydx + xdy}{2\sqrt{xy}} =$$

$$= -\sin \sqrt{xy} \frac{ydx + xdy}{2\sqrt{xy}} \cdot \frac{ydx + xdy}{2\sqrt{xy}} +$$

$$+ \cos \sqrt{xy} \frac{\sqrt{xy} d(ydx + xdy) - (ydx + xdy) d\sqrt{xy}}{2xy} =$$

$$= -\sin \sqrt{xy} \frac{y^2 dx^2 + 2xy dx dy + x^2 dy^2}{4xy} +$$

$$+ \cos \sqrt{xy} \frac{\sqrt{xy}(dy dx + dx dy) - (ydx + xdy) \frac{ydx + xdy}{2\sqrt{xy}}}{2xy} =$$

$$= -\sin \sqrt{xy} \frac{y^2 dx^2 + 2xy dx dy + x^2 dy^2}{4xy} +$$

$$+ \cos \sqrt{xy} \frac{4xy dx dy - y^2 dx^2 - 2xy dx dy - x^2 dy^2}{4xy \sqrt{xy}},$$

deci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{4xy} \left( y^2 \sin \sqrt{xy} + \frac{y^2}{\sqrt{xy}} \cos \sqrt{xy} \right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{4xy} \left( x^2 \sin \sqrt{xy} + \frac{x^2}{\sqrt{xy}} \cos \sqrt{xy} \right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{4xy} \left( 2xy \sin \sqrt{xy} - \frac{2xy}{\sqrt{xy}} \cos \sqrt{xy} \right).$$

Teoremele precedente rămân valabile și pentru derivatele parțiale sau diferențialele de un ordin  $n$  oarecare ale funcțiilor compuse.

**T e o r e m ā.** Dacă funcțiile  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  sunt diferențiable de  $n$  ori (sau au derivate parțiale de ordinul  $n$ ) pe  $E$ , iar funcția  $\varphi(u, v)$  este diferențabilă de  $n$  ori pe  $F$ , atunci funcția compusă  $f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y))$  este diferențabilă de  $n$  ori (respectiv are derivate parțiale de ordinul  $n$ ) pe  $E$ .

Dacă funcțiile  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  au derivate parțiale de ordinul  $n$  continue pe  $E$ , iar funcția  $\varphi(u, v)$  are derivate parțiale de ordinul  $n$  continue pe  $F$ , atunci funcția compusă  $f(x, y)$  are derivate parțiale de ordinul  $n$  continue pe  $E$ .

Demonstrația se face prin inducție completă și o lăsăm pe seama cititorului, ca exercițiu.

**O b s e r v a t i i** 1° Teorema este adevărată și în cazul general în care avem  $m$  funcțiile reale de  $n$  variabile

$$u_1(x_1, \dots, x_n), u_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

definite pe o mulțime  $E \subset R^n$ , și o funcție reală (sau cu valori în  $E^p$ ) de  $m$  variabile

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_m),$$

definite pe o mulțime  $F \subset R^m$ .

2° Dacă funcțiile  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$  sunt liniare

$$u(x, y) = a_1x + b_1y + c_1,$$

$$v(x, y) = a_2x + b_2y + c_2,$$

diferențiala de ordinul  $n$  a funcției compuse  $f(x, y)$  se scrie ca și diferențiala de ordinul  $n$  a funcției  $\varphi(u, v)$ :

$$d^n f = \left( \frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv \right)^n \varphi = d^n \varphi.$$

Demonstrația se face prin inducție completă, ținând seama că, în acest caz, avem  $d^n u = d(du) = 0$ ,  $d^n v = d(dv) = 0$ .

Pentru  $n = 2$ , formula a fost deja demonstrată. Să presupunem că este adevărată pentru  $n$  oarecare:

$$d^n f = \left( \frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv \right)^n \varphi = \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{\partial^n \varphi}{\partial u^{n-i} \partial v^i} (du)^{n-i} (dv)^i$$

și să demonstrăm că va rămâne adevărată și pentru  $n + 1$ . Pentru aceasta, aplicăm operatorul de diferențiere

$$d = \frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv$$

diferențialei de ordinul  $n$ ,  $d^n f$ :

$$\begin{aligned} d^{n+1}f &= d(d^n f) = d \left( \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-i} \partial v^i} (du)^{n-i} (dv)^i \right) = \\ &= \sum_{i=0}^n C_n^i \left[ d \left( \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-i} \partial v^i} \right) \cdot (du)^{n-i} \cdot (dv)^i + \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-i} \partial v^i} d((du)^{n-i} (dv)^i) \right], \end{aligned}$$

dar

$$\begin{aligned} d((du)^{n-i} (dv)^i) &= d(du)^{n-i} \cdot (dv)^i + (du)^{n-i} d(dv)^i = \\ &= (n-i)(du)^{n-i-1} d(du) \cdot (dv)^i + (du)^{n-i} i(dv)^{i-1} d(dv) = 0, \end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned} d \left( \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-i} \partial v^i} \right) &= \left( \frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv \right) \frac{\partial^n f}{\partial u^{n-i} \partial v^i} = \\ &= \frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n+1-i} \partial v^i} du + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n-i} \partial v^{i+1}} dv, \end{aligned}$$

astfel încit

$$d^{n+1}f = \sum_{i=0}^n C_n^i \left[ \frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n+1-i} \partial v^i} (du)^{n+1-i} (dv)^i + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n-i} \partial v^{i+1}} (du)^{n-i} (dv)^{i+1} \right].$$

În această sumă, coeficientul lui

$$\frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n+1-i} \partial v^i} (du)^{n+1-i} (dv)^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

este

$$C_n^i + C_n^{i-1} = C_{n+1}^i.$$

iar coeficientul lui  $\frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n+1}} (du)^{n+1}$  este  $C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0$ , deci

$$\begin{aligned} d^{n+1}f &= C_{n+1}^0 \frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n+1}} (du)^{n+1} + \sum_{i=0}^n C_{n+1}^i \frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n+1-i} \partial v^i} (du)^{n+1-i} (dv)^i = \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} C_{n+1}^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{n+1-j} \partial v^j} (du)^{n+1-j} (dv)^j = \left( \frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv \right)^{n+1} f. \end{aligned}$$

### 8. Formula lui Taylor

Fie  $f(x, y)$  o funcție reală de două variabile definită pe o mulțime  $E \subset \mathbb{R}^2$  și un punct interior  $(a, b) \in E$ .

Să presupunem că funcția  $f$  este diferențiabilă de  $n$  ori în punctul  $(a, b)$ , deci are toate derivatele parțiale de ordinul  $n$  în punctul  $(a, b)$ , iar în derivatele parțiale mixte pînă la ordinul  $n$  inclusiv nu are nici o importanță ordinea variabilelor în raport cu care se derivează.

Pentru fiecare punct  $(x, y) \in E$  să considerăm polinomul de două variabile, de gradul  $n$ ,

$$T_n(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!} \left[ \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} (y - b) \right] + \\ + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} (x - a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y} (x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} (y - b)^2 \right] + \dots \\ \dots + \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial y^i} (x - a)^{n-i} (y - b)^i$$

sau,

$$\begin{aligned}
 T_n(x, y) &= f(a, b) + \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right) f(a, b) + \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right)^2 f(a, b) + \\
 &\quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 &\quad + \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right)^n f(a, b).
 \end{aligned}$$

Polinomul  $T_n(x, y)$  definit pe  $E$  se numește *polinomul lui Taylor de gradul  $n$*  atașat funcției  $f(x, y)$  în punctul  $(a, b)$ .

Dacă pentru fiecare  $(x, y) \in E$  notăm

$$R_n(x, y) = f(x, y) - T_n(x, y),$$

atunci

$$f(x, y) = T_n(x, y) + R_n(x, y),$$

adică

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(a, b) + \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right) f(a, b) + \\
 &\quad + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x - a)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (y - b)^2 \right) f(a, b) + \\
 &\quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 &\quad + \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial^n}{\partial x^n} (x - a)^n + \frac{\partial^n}{\partial y^n} (y - b)^n \right) f(a, b) + R_n(x, y)
 \end{aligned}$$

pentru orice  $(x, y) \in E$ . Această egalitate, valabilă pentru orice  $(x, y) \in E$ , se numește *formula lui Taylor* de ordinul  $n$ , corespunzătoare funcției  $f(x, y)$  în punctul  $(a, b)$ .

Funcția  $R_n(x, y)$  definită pe  $E$  se numește *restul de ordinul n* al formulei lui Taylor.

Să observăm că pentru  $1 \leq k \leq n$ ,

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right)^k f(a, b) = d^k f(a, b) (x, y) = d^k f(a, b),$$

astfel încât, formula lui Taylor se mai poate scrie astfel :

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!} d f(a, b) + \frac{1}{2!} d^2 f(a, b) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(a, b) + R_n(x, y).$$

Dacă  $(x, y) = (a, b)$ , avem  $T_n(a, b) = f(a, b)$  și  $R_n(a, b) = 0$ .

În cazul cînd restul  $R_n(x, y)$  este o funcție continuă în  $(a, b)$ ,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} R_n(x, y) = R_n(a, b) = 0,$$

atunci pentru valori ale lui  $x$  și  $y$  suficient de apropiate de  $a$  și  $b$ , putem realiza ca diferența  $f(x, y) - T_n(x, y)$  să fie cît dorim de mică ; pentru asemenea valori ale lui  $x$  și  $y$  funcția  $f(x, y)$  poate fi aproximată cu polinomul  $T_n(x, y)$ . Vom arăta că, în anumite condiții, avem nu numai

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} R_n(x, y) = 0,$$

dar chiar

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{R_n(x, y)}{\rho^n(x, y)} = 0,$$

unde

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

**Theoremă.** Dacă funcția  $f(x, y)$  este diferențiabilă de  $n + 1$  ori într-o vecinătate  $V$  a lui  $(a, b)$ , atunci, pentru orice punct  $(x, y) \in V$ , există un punct  $(\xi, \eta) \in V$  pe segmentul care unește punctele  $(a, b)$  și  $(x, y)$ , astfel încât să avem

$$\begin{aligned} R_n(x, y) &= \frac{1}{(n+1)!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right)^{n+1} f(\xi, \eta) = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(\xi, \eta) \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \frac{1}{1!} d f(a, b) + \frac{1}{2!} d^2 f(a, b) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n!} d^n f(a, b) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Fie  $(x_0, y_0)$  un punct arbitrar în  $V$ . Să unim punctele  $(a, b)$  și  $(x_0, y_0)$  printr-un segment  $I$ .

Să considerăm funcțiile

$$x(t) = a + (x_0 - a)t,$$

$$y(t) = b + (y_0 - b)t$$

definite pentru  $t \in [0,1]$ . Când  $t$  parcurge segmentul  $[0,1]$ , punctul corespunzător  $(x(t), y(t))$  din plan parcurge segmentul  $I$ .

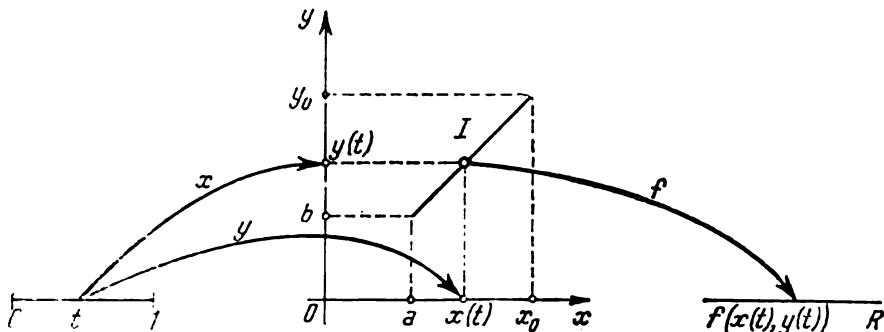


Fig. 154

Într-adevăr, pentru orice punct  $(x', y')$  de pe segmentul  $I$  există un punct  $t' \in [0,1]$ , astfel că

$$x' = a + (x_0 - a)t' = x(t'),$$

$$y' = b + (y_0 - b)t' = y(t').$$

Pentru  $t = 0$  avem  $x(0) = a$ ,  $y(0) = b$ , iar pentru  $t = 1$  avem  $x(1) = x_0$ ,  $y(1) = y_0$ .

Să considerăm funcția compusă

$$F(t) = f(x(t), y(t)) = f(a + (x_0 - a)t, b + (y_0 - b)t)$$

definită pentru  $t \in [0, 1]$ . Deoarece funcțiile  $x(t)$  și  $y(t)$  sunt diferențiabile de orice ordin pe  $[0, 1]$ , iar funcția  $f(x, y)$  este diferențiabilă de  $n+1$  ori pe  $V$ , rezultă că funcția compusă  $F(t)$  este diferențiabilă de  $n+1$  ori pe  $[0, 1]$  și deoarece  $d^k x(t) = 0$ ,  $d^k y(t) = 0$ , avem pentru  $k = 1, 2, \dots, n+1$

$$d^k F(t) = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx(t) + \frac{\partial}{\partial y} dy(t) \right)^k f(x(t), y(t)).$$

Dar  $dx(t) = (x_0 - a) dt$  și  $dy(t) = (y_0 - b) dt$ , astfel încât

$$d^k F(t) = \left( \frac{\partial}{\partial x} (x_0 - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y_0 - b) \right)^k f(x(t), y(t)) (dt)^k.$$

deci, derivata de ordinul  $k$  a funcției  $F(t)$  este

$$F^{(k)}(t) = \frac{d^k F(t)}{dt^k} = \left( \frac{\partial}{\partial x} (x_0 - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y_0 - b) \right)^k f(x(t), y(t)).$$

Atunci

$$F^{(k)}(0) = \left( \frac{\partial}{\partial x} (x_0 - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y_0 - b) \right)^k f(a, b),$$

deoarece  $x(0) = a$ ,  $y(0) = b$ . Funcția  $F(t)$  fiind derivabilă de  $n+1$  ori pe  $[0, 1]$ , se poate scrie formula lui Mac Laurin cu restul în forma lui Lagrange:

$$\begin{aligned} F(t) &= F(0) + \frac{t}{1!} F'(0) + \frac{t^2}{2!} F''(0) + \dots + \frac{t^n}{n!} F^{(n)}(0) + \\ &\quad + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\tau), \end{aligned}$$

unde  $\tau$  depinde de  $t$  și este cuprins între 0 și  $t$ . Pentru  $t = 1$  obținem

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!} F'(0) + \frac{1}{2!} F''(0) + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\tau),$$

unde  $\tau$  este cuprins între 0 și 1. Notăm  $\xi = x(\tau)$ ,  $\eta = y(\tau)$  și observând că  $F(1) = f(x_0, y_0)$ , iar  $F(0) = f(a, b)$ , ultima formulă devine

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= f(a, b) + \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x_0 - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y_0 - b) \right) f(a, b) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x_0 - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y_0 - b) \right)^n f(a, b) + \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x_0 - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y_0 - b) \right)^{n+1} f(\xi, \eta), \end{aligned}$$

unde punctul  $(\xi, \eta)$  se află pe segmentul  $I$  care unește punctele  $(a, b)$  și  $(x_0, y_0)$ .

Deoarece punctul  $(x_0, y_0)$  a fost ales arbitrar în  $V$ , rezultă că, pentru orice punct  $(x, y) \in V$ , există un punct  $(\xi, \eta)$  pe segmentul ce unește  $(a, b)$  cu  $(x, y)$ , astfel încât să avem

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right) f(a, b) + \dots + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right)^n f(a, b) + \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right)^{n+1} f(\xi, \eta), \end{aligned}$$

deci restul  $R_n(x, y)$  este

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right)^{n+1} f(\xi, \eta)$$

și teorema este demonstrată.

Faptul că  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{R_n(x, y)}{\varphi^n(x, y)} = 0$  va fi demonstrat într-un caz mai general,

în condiții mai puțin restrictive.

**Formula lui Lagrange.** Dacă  $f(x, y)$  este diferențiabilă într-o vecinătate  $V$  a lui  $(a, b)$ , atunci pentru orice  $(x, y) \in V$  există un punct  $(\xi, \eta) \in V$ , cu  $\xi$  cuprins între  $a$  și  $x$  și  $\eta$  cuprins între  $b$  și  $y$ , astfel că

$$f(x, y) - f(a, b) = f'_x(\xi, \eta)(x - a) + f'_y(\xi, \eta)(y - b).$$

**Observație.** În formula lui Lagrange demonstrată anterior se folosea numai existența derivatelor parțiale  $f'_x$  și  $f'_y$  într-o vecinătate a lui  $V$ , în schimb derivatele  $f'_x$  și  $f'_y$  se luau în puncte diferite.

**Teoremă.** Dacă funcția  $f(x, y)$  are derive parțiale de ordinul  $n$  continue într-o vecinătate  $V$  a lui  $(a, b)$ , atunci restul se poate scrie în forma

$$R_n(x, y) = \frac{1}{n!} \omega(x, y) \varphi^n(x, y),$$

unde funcția  $\omega(x, y)$  este continuă în  $(a, b)$  și nulă în acest punct:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega(x, y) = \omega(a, b) = 0.$$

Într-adevăr, deoarece funcția  $f(x, y)$  are derive parțiale de ordinul  $n$  continue în  $V$ , rezultă că  $f(x, y)$  este diferențiabilă de  $n$  ori în  $V$ , deci se poate scrie formula lui Taylor de ordinul  $n - 1$ :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right) f(a, b) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right)^{n-1} f(a, b) + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right)^n f(\xi, \eta) \end{aligned}$$

pentru orice  $(x, y) \in V$ , unde  $\xi$  se află cuprins între  $a$  și  $x$ , iar  $\eta$  între  $b$  și  $y$ . Restul  $R_{n-1}(x, y)$  este aici

$$R_{n-1}(x, y) = \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right)^n f(\xi, \eta).$$

Dacă se dezvoltă după formula binomului lui Newton, coeficientul lui  $(x - a)^{n-i}(y - b)^i$  este

$$C_n^i \frac{\partial^n f(\xi, \eta)}{\partial x^{n-i} \partial y^i}.$$

Dar derivatele parțiale sunt continue în  $V$ , deci și în punctul  $(a, b)$ , și, înținând seama că  $\xi$  și  $\eta$  depind de  $x$  și  $y$  și că dacă  $x \rightarrow a$  și  $y \rightarrow b$  avem  $\xi \rightarrow a$  și  $\eta \rightarrow b$ , rezultă că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} C_n^i \frac{\partial^n f(\xi, \eta)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} = C_n^i \frac{\partial^n f(a, b)}{\partial x^{n-i} \partial y^i}$$

și deci

$$C_n^i \frac{\partial^n f(\xi, \eta)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} = C_n^i \frac{\partial^n f(a, b)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} + \omega_i(x, y),$$

unde  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega_i(x, y) = \omega_i(a, b) = 0$ .

Așadar :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right)^n f(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{\partial^n f(\xi, \eta)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} (x - a)^{n-i} (y - b)^i = \\ &= \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{\partial^n f(a, b)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} (x - a)^{n-i} (y - b)^i + \sum_{i=0}^n \omega_i(x, y) (x - a)^{n-i} (y - b)^i = \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right)^n f(a, b) + \omega(x, y) \rho^n, \end{aligned}$$

unde am notat  $\rho = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ ,

$$\omega(x, y) = \frac{1}{\rho^n} \sum_{i=0}^n \omega_i(x, y) (x - a)^{n-i} (y - b)^i,$$

$$\omega(a, b) = 0.$$

Deoarece  $|x - a| \leq \rho$  și  $|y - b| \leq \rho$ , avem

$$|\omega(x, y)| \leq \sum_{i=0}^n |\omega_i(x, y)| \frac{|x - a|^{n-i}}{\rho^{n-i}} \cdot \frac{|y - b|^i}{\rho^i} \leq \sum_{i=0}^n |\omega_i(x, y)|$$

și, deoarece  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} |\omega_i(x, y)| = 0$ , rezultă că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega(x, y) = 0 = \omega(a, b).$$

Așadar

$$R_{n-1}(x, y) = \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right)^n f(a, b) + \frac{1}{n!} \omega(x, y) \rho^n,$$

deci

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right) f(a, b) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right)^{n-1} f(a, b) + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} (y - b) \right)^n f(a, b) + \frac{1}{n!} \omega(x, y) \rho^n. \end{aligned}$$

Am obținut deci formula lui Taylor de ordinul  $n$ , cu restul  $R_n(x, y) = \frac{1}{n!} \omega(x, y) \rho^n(x, y)$ , unde

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

și

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega(x, y) = \omega(a, b) = 0.$$

**O b s e r v a t i i.** 1° Ultima teoremă este valabilă dacă  $f$  este diferențiabilă de  $n$  ori în  $V$ , și derivatele parțiale de ordinul  $n$  sunt continue numai în  $(a, b)$ .

Într-adevăr, în demonstrație au fost folosite numai aceste condiții.

2° Propoziția analogă pentru funcții de o singură variabilă a fost demonstrată în ipoteza că funcția  $f(x)$  are derivata de ordinul  $n$  numai în  $a$ .

3° Cele două teoreme rămân adevărate și pentru funcții de mai multe variabile, fie că aceste funcții au valori reale, fie că au valori vectoriale.

**Caz particular.** Dacă funcția  $f(x, y)$  are derivate parțiale de ordinul doi continue într-o vecinătate  $V$  a lui  $(a, b)$ , atunci pentru orice  $(x, y) \in V$  avem

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \\ &+ \frac{1}{2} [f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \omega(x, y) [(x - a)^2 + (y - b)^2], \end{aligned}$$

unde  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega(x, y) = \omega(a, b) = 0$ .

## 9. Extremele funcțiilor de mai multe variabile

Fie  $f(x, y)$  o funcție reală de două variabile, definită pe o mulțime  $E \subset \mathbb{R}^2$ .

**D e f i n i t i e.** Un punct  $(a, b) \in E$  se numește punct de maxim local (respectiv de minim local) al funcției  $f(x, y)$ , dacă există o vecinătate  $V$  a lui  $(a, b)$  astfel încât, pentru orice  $(x, y) \in V \cap E$  să avem  $f(x, y) \leq f(a, b)$  (respectiv  $f(x, y) \geq f(a, b)$ ).

Punctele de maxim (local) și punctele de minim (local) se numesc puncte de extrem (local) ale funcției.

Dacă  $(a, b)$  este un punct de maxim local (respectiv de minim local) al funcției  $f(x, y)$ , valoarea sa  $f(a, b)$  în acest punct se numește maxim local (respectiv minim local) al funcției.

Maximele și minimele locale ale funcției se numesc extremele (locale) ale funcției.

**Propoziția 1.** Dacă funcția  $f$  are derivate parțiale într-un punct de extrem  $(a, b)$  din interiorul mulțimii  $E$ , atunci derivatele parțiale se anulează în acest punct:

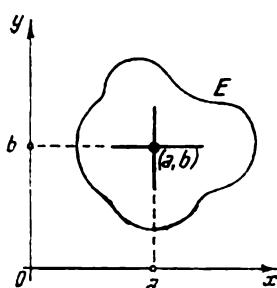
$$f'_x(a, b) = 0, \quad f'_y(a, b) = 0.$$

Într-adevăr, funcția parțială  $\varphi(x) = f(x, b)$ , definită pe mulțimea  $E_b = \{x | x \in R, (x, b) \in E\}$

este derivabilă în punctul  $a$ ,  $\varphi'(a) = f'_x(a, b)$ , iar  $a$  este punct de extrem al acestei funcții și punct interior al mulțimii  $E_b$ , deci, conform teoremei lui Fermat, avem  $\varphi'(a) = 0$ , adică  $f'_x(a, b) = 0$ . La fel se arată că  $f'_y(a, b) = 0$ .

**Observații.** 1° Propoziția 1 este o generalizare a teoremei lui Fermat pentru funcții de două variabile.

2° Propoziția 1 rămîne adevărată și dacă  $(a, b)$  nu este punct interior al lui  $E$ , dar dacă mulțimea  $E$  conține un segment paralel cu  $Ox$  și un segment paralel cu  $Oy$ , care conțin punctul  $(a, b)$  astfel că  $(a, b)$  nu se află la nici una din extremitățile acestor două segmente.



**Definiție.** Un punct interior  $(a, b) \in E$  se numește punct staționar al funcției  $f(x, y)$ , dacă funcția  $f(x, y)$  este diferențiabilă în punctul  $(a, b)$  și dacă diferențiala sa este nulă în acest punct,  $df(a, b) = 0$ .

Deoarece diferențiala funcției  $f(x, y)$  în  $(a, b)$  este

$$df(a, b) = f'_x(a, b) dx + f'_y(a, b) dy,$$

avem  $df(a, b) = 0$  dacă și numai dacă  $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$ .

Așadar, a spune că  $(a, b)$  este un punct staționar al funcției  $f(x, y)$ , înseamnă că funcția este diferențiabilă în punctul  $(a, b)$  și are derivatele parțiale nule în acest punct.

**Propoziția 2.** Orice punct de extrem local din interiorul mulțimii  $E$  în care funcția  $f(x, y)$  este diferențiabilă este punct staționar al funcției.

Într-adevăr, conform propoziției 1, avem

$$f'_x(a, b) = 0 \text{ și } f'_y(a, b) = 0,$$

dacă  $(a, b)$  este punct staționar al funcției.

**O b s e r v a t i e.** Propoziția reciprocă nu este adevărată: există puncte staționare care nu sunt puncte de extrem.

**Exemplu.** Fie funcția  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , definită pe  $R^2$ .

Aveam  $f'_x(x, y) = 2x$  și  $f'_y(x, y) = -2y$ , deci

$$f'_x(0, 0) = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0.$$

Funcția este diferențiabilă în punctul  $(0, 0)$  (deoarece derivatele parțiale sunt continue), deci  $(0, 0)$  este punct staționar al funcției. Funcțul  $(0, 0)$  nu este însă punct de extrem a funcției.

Intr-adevăr, pentru punctele de formă  $(x, 0)$ , de pe axa  $Ox$ , avem

$$f(x, 0) = x^2 \geq 0 \geq f(0, 0),$$

iar pentru puncte de formă  $(0, y)$ , de pe axa  $Oy$ , avem

$$f(0, y) = -y^2 \leq 0 \leq f(0, 0),$$

astfel, încit, în  $(0, 0)$  funcția nu are nici minim local, nici maxim local.

Situația este asemănătoare cu aceea a funcțiilor de o singură variabilă pentru care există puncte în care derivata întâi se anulează, dar care nu sunt puncte de extrem (ci puncte de inflexiune).

Punctele staționare ale funcției  $f(x, y)$  care nu sunt puncte de extrem ale sale se numesc *puncte și ale lui  $f(x, y)$* .

*Interpretare geometrică.* Graficul funcției  $f(x, y)$  este o suprafață  $S$  a cărei ecuație este

$$z = f(x, y).$$

Dacă funcția  $f(x, y)$  este diferențiabilă în punctul  $(a, b)$ , suprafața  $S$  are plan tangent în punctul corespunzător  $(a, b, f(a, b))$ , a cărui ecuație este

$$z - f(a, b) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b).$$

Dacă  $(a, b)$  este punct staționar, suprafața  $S$  are în punctul  $(a, b, f(a, b))$  plan tangent paralel cu planul  $xOy$ . Intr-adevăr,  $f'_x(a, b) = 0$  și  $f'_y(a, b) = 0$ , deci ecuația planului tangent devine  $z - f(a, b) = 0$ , adică

$$z = f(a, b),$$

adică este un plan paralel cu planul  $xOy$ .

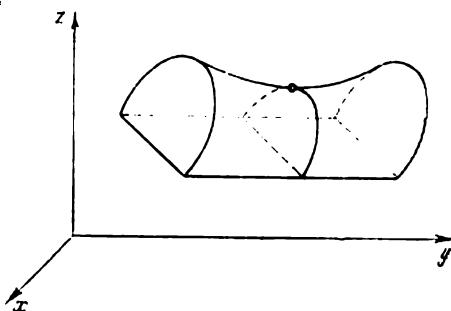


Fig. 156

Din considerațiile precedente rezultă că, dacă  $E$  este o mulțime deschisă, și dacă funcția  $f(x, y)$  este diferențiabilă pe  $E$ , punctele staționare ale lui  $f$  sunt toate soluțiile  $(x, y)$  ale sistemului

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

Cum orice punct de extrem local este punct staționar, rezultă că punctele de extrem local se află printre soluțiile sistemului de mai sus (dar nu toate soluțiile sistemului sunt puncte de extrem).

Ca și pentru funcții de o singură variabilă, pentru a identifica printre punctele staționare unele puncte de extrem (dar nu neapărat toate punctele de extrem) va trebui să recurgem la derivatele parțiale de ordinul doi.

**T e o r e m ā.** Dacă  $(a, b)$  este un punct staționar al funcției  $f(x, y)$  și dacă funcția  $f(x, y)$  are derivate parțiale de ordinul doi continue într-o vecinătate  $V$  a lui  $(a, b)$ , atunci :

1) Dacă  $f''_{xx} f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 > 0$ , derivatele parțiale fiind calculate în  $(a, b)$ , atunci  $(a, b)$  este un punct de extrem local al funcției  $f(x, y)$  și anume :

dacă  $f''_{xx}(a, b) > 0$ ,  $(a, b)$  este punct de minim,  
dacă  $f''_{xx}(a, b) < 0$ ,  $(a, b)$  este punct de maxim.

2) Dacă  $f''_{xx} f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 < 0$ , atunci  $(a, b)$  nu este punct de extrem al funcției  $f(x, y)$ .

Deoarece  $(a, b)$  este punct staționar, avem

$$f'_x(a, b) = 0 \text{ și } f'_y(a, b) = 0.$$

Deoarece funcția  $f(x, y)$  are derivate parțiale de ordinul doi continue pe o vecinătate  $V$  a lui  $(a, b)$ , putem scrie formula lui Taylor de ordinul doi pentru  $(x, y) \in V$ :

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \\ + \frac{1}{2} [f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2] + \\ + \frac{1}{2} \omega(x, y) \rho^2, \end{aligned}$$

unde  $\rho = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$  și  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega(x, y) = 0$ .

Tinând seama că derivatele parțiale de ordinul întâi sunt nule și notînd, pentru prescurtare,

$$A = f''_{xx}(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{yy}(a, b),$$

obținem :

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{1}{2} [A(x - a)^2 + 2B(x - a)(y - b) + C(y - b)^2 + \omega(x, y)\rho^2].$$

Pentru  $\rho \neq 0$ , să notăm  $\alpha(x, y) = \frac{x - a}{\rho}$ ,  $\beta(x, y) = \frac{y - b}{\rho}$ . Atunci

$$\alpha^2(x, y) + \beta^2(x, y) \equiv 1, \text{ oricare ar fi punctul } (x, y) \neq (a, b),$$

de unde :

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{1}{2} [A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + \omega]\rho^2.$$

Să observăm că dacă punctul  $(x, y)$  înconjură într-un mod oarecare punctul  $(\alpha, \beta)$ , punctul  $(\alpha, \beta)$ , care îl corespunde, descrie un cerc cu centrul în origine și cu raza 1. Dacă  $(x, y)$  se deplasează pe o dreaptă ce trece prin  $(\alpha, \beta)$ , punctul  $(\alpha, \beta)$  rămîne neschimbat.

Să presupunem întîi că  $f''_{xx} f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 > 0$ , adică  $AC - B^2 > 0$ . Rezultă că trinomul  $A\gamma^2 + 2B\gamma + C$  are rădăcini complexe și deci nu se anulează pentru nici o valoare a lui  $\gamma$ . Atunci forma pătratică  $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2$  nu se anulează în nici un punct  $(\alpha, \beta)$ , deoarece  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ .

Dar  $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2$  este funcție continuă de  $(\alpha, \beta)$  și la fel  $|A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2|$ ; modulul formei pătratice își atinge minimul pe cercul unitate  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$  și, deoarece nu se anulează, acest minim,  $\mu$ , este strict pozitiv,  $\mu > 0$ . Dar  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega(x, y) = 0$ , deci există un cerc (disc circular)  $V$

cu centrul în  $(a, b)$  și raza suficient de mică, astfel încât să avem

$$|\omega(x, y)| < \mu \leq |A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2|$$

pentru orice  $(x, y) \in V$ . Rezultă că în  $V$ , funcția

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + \omega$$

are același semn cu funcția  $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2$ , iar aceasta are același semn cu  $A$ . Cum  $\rho^2 \geq 0$ , deducem că diferența

$$f(x, y) - f(a, b)$$

păstrează în  $V$  un semn constant, semnul lui  $A$ .

Dacă  $A > 0$ , atunci  $f(x, y) - f(a, b) > 0$ , deci  $(a, b)$  este un punct de minim; dacă  $A < 0$ , atunci  $f(x, y) - f(a, b) < 0$ , deci  $(a, b)$  este un punct de maxim.

Să presupunem acum că  $f''_{xx} f''_{yy} - [f''_{xy}]^2 < 0$ , adică  $AC - B^2 < 0$ .

Rezultă că trinomul  $A\gamma^2 + 2B\gamma + C$  are rădăcini reale și distințe,  $\gamma_1 < \gamma_2$ , și deci are un semn pentru valori ale lui  $\gamma$  cuprinse între rădăcinile, și semn contrar pentru valori ale lui  $\gamma$  în afara rădăcinilor. Să observăm că atunci cînd punctul  $(x, y)$  înconjură punctul  $(a, b)$ ,  $\alpha$  și  $\beta$  iau toate valorile cuprinse între  $-1$  și  $1$  și deci raportul  $\frac{\alpha}{\beta}$  ia toate valorile reale, deci atît valori în afara rădăcinilor  $\gamma_1$  și  $\gamma_2$  cît și valori între aceste rădăcini. Atunci  $\left(A\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2B\frac{\alpha}{\beta} + C\right)\beta^2$  ia atît valori strict negative cît și valori strict pozitive.

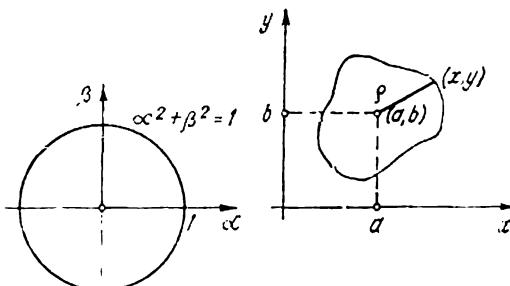


Fig. 157

Fie  $(x_1, y_1)$  un punct astfel încât pentru valorile  $(\alpha_1, \beta_1)$  corespunzătoare să avem  $\beta_1 = 0$  și  $A \left( \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)^2 + 2B \frac{\alpha_1}{\beta_1} + C = a > 0$ . Cind punctul  $(x, y)$  descrie dreapta  $d_1$  ce unește punctul  $(x_1, y_1)$  cu  $(a, b)$ ,  $(\alpha, \beta)$  rămîne neschimbat, deci  $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = a > 0$ . Există atunci un cerc  $V_1$  cu centrul în  $(a, b)$  și raza suficient de mică astfel încât pentru  $(x, y) \in V_1$  să avem  $|\omega(x, y)| < a$ . Rezultă că pentru orice punct  $(x, y)$  din  $V_1 \cap d_1$  avem

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + \omega > 0.$$

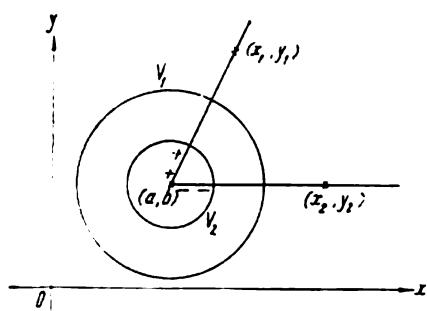


Fig. 158

Fie acum  $(x_2, y_2)$  un punct astfel încât pentru valorile  $(\alpha_2, \beta_2)$  corespunzătoare să avem  $\beta_2 = 0$  și  $A \left( \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right)^2 + 2B \frac{\alpha_2}{\beta_2} + C = b < 0$ .

Avem  $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = b > 0$  pe dreapta  $d_2$  ce unește punctul  $(x_2, y_2)$  cu punctul  $(a, b)$ . Există atunci un cerc  $V_2$  cu centrul în  $(a, b)$  astfel încât pentru  $(x, y) \in V_2$  să avem  $|\omega(x, y)| < |b|$ . Rezultă că pentru orice  $(x, y)$  din  $V_2 \cap d_2$  avem

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + \omega < 0.$$

Notînd cu  $V$  un cerc cu centrul în  $(a, b)$  continut în  $V_1$  și în  $V_2$ , deducem că în interiorul cercului  $V$  funcția  $A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + \omega$  ia valori  $> 0$  pe dreapta  $d_1$  și valori  $< 0$  pe dreapta  $d_2$ .

Rezultă că în orice vecinătate a lui  $(a, b)$  diferența  $f(x, y) - f(a, b)$  ia valori de semne contrare și deci  $(a, b)$  nu este punct de extrem.

Teorema este astfel complet demonstrată.

Așadar, în orice vecinătate  $V$  a punctului  $(a, b)$  diferența  $f(x, y) - f(a, b)$ , care are același semn cu  $A \left( \frac{x}{\beta} \right)^2 + 2B \frac{x}{\beta} + C$ , ia valori de semne contrare, și deci  $(a, b)$  nu este punct de extrem.

Teorema este astfel demonstrată.

*Exemplu.* 1)  $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ . Rezolvăm sistemul

$$f'_x = 3x^2 + 3y = 0$$

$$f'_y = 3y^2 + 3x = 0$$

pentru a afla punctele staționare. Se obțin soluțiile  $(0, 0)$  și  $(-1, -1)$ .

Pentru a vedea dacă aceste puncte staționare sunt sau nu puncte de extrem, calculăm derivatele parțiale de ordinul doi

$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{yy} = 6y, \quad f''_{xy} = 3.$$

Aveam :

$$f''_{xx}(0, 0) = 0, \quad f''_{yy}(0, 0) = 0, \quad f''_{xy}(0, 0) = 3;$$

în acest caz,

$$f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 = 0 \cdot 0 - 3^2 = -9 < 0,$$

deci  $(0, 0)$  nu este punct de extrem.

Aveam apoi  $f''_{x^2}(-1, -1) = -6$ ,  $f''_{y^2}(-1, -1) = -6$ ,  $f''_{xy}(-1, -1) = 3$ ; în acest caz,

$$f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 = 36 - 9 = 27 > 0,$$

deci  $(-1, -1)$  este punct de extrem; deoarece  $f''_{x^2}(-1, -1) = -6 < 0$ , rezultă că  $(-1, -1)$  este punct de maxim.

2)  $f(x, y) = x^4 + 4x^2y + x^3 + 4y^2$ . Rezolvând sistemul  $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$

se obțin punctele staționare  $(0, 0)$  și  $\left(0, -\frac{8}{3}\right)$ . Avem

$$f''_{x^2}\left(0, -\frac{8}{3}\right) = -\frac{64}{3}, f''_{y^2}\left(0, -\frac{8}{3}\right) = -8, f''_{xy}\left(0, -\frac{8}{3}\right) = 0, \text{ deci:}$$

$$f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 > 0.$$

Așadar,  $\left(0, -\frac{8}{3}\right)$  este punct de extrem și anume de maxim, deoarece  $f''_{x^2} < 0$ . Avem apoi  $f''_{x^2}(0, 0) = 0$ ,  $f''_{y^2}(0, 0) = 8$ ,  $f''_{xy}(0, 0) = 0$ , deci  $f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 = 0$ , în acest caz, nu putem afirma nimic pe baza teoremei precedente. Un studiu direct asupra funcției arată că  $(0, 0)$  nu este punct de extrem.

**Observație.** Dacă  $f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 = 0$ , derivatele fiind calculate în punctul staționar  $(a, b)$ , nu putem afirma nimic despre acest punct. În unele cazuri este punct de extrem al funcției  $f$ , în alte cazuri nu este punct de extrem.

**Exemplu.** 1)  $f(x, y) = x^2 + y^4$ . Punctul  $(0, 0)$  este punct staționar; avem

$$f''_{x^2}(0, 0) = 2, \quad f''_{y^2}(0, 0) = 0, \quad f''_{xy}(0, 0) = 0, \text{ deci}$$

$f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 = 0$ . Avem apoi  $f(0, 0) = 0$  și  $f(x, y) > 0$  pentru  $(x, y) \neq (0, 0)$ , deci  $(0, 0)$  este un punct de minim al funcției.

2)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Punctul  $(0, 0)$  este punct staționar; avem

$$f''_{x^2} f''_{y^2} - [f''_{xy}]^2 = 0,$$

și  $(0, 0)$  nu este punct de extrem.

Intr-adevăr,  $f(0, 0) = 0$ ,  $f(0, y) = y^2 < 0$  dacă  $y < 0$  și  $f(0, y) = y^2 > 0$  dacă  $y > 0$ .

Fie acum  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  o funcție de  $n$  variabile, definită pe o mulțime  $E \subset R^n$ .

Se definește ca mai sus un punct de maxim (respectiv minim) local  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  prin condiția

$f(x) \leq f(a)$  (respectiv  $f(x) \geq f(a)$ ) pentru  $x$  într-o vecinătate  $V$  a lui  $a$ .

Rezultă că dacă  $a$  este punct staționar din interiorul lui  $E$ , atunci derivatele parțiale ale lui  $f$  se anulează în  $a$ :

$$f'_{x_1}(a) = 0, f'_{x_2}(a) = 0, \dots, f'_{x_n}(a) = 0.$$

Punctul  $a \in E$  este punct staționar al funcției  $f$ , dacă  $f$  este diferențiabilă în  $a$  și dacă  $df(a) = 0$ .

Pentru a determina punctele staționare ale unei funcții diferențiabile  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  pe o mulțime deschisă  $E \subset \mathbb{R}^n$ , se rezolvă sistemul derivațelor sale parțiale:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Se demonstrează ca mai sus următoarea teoremă generală.

**T e o r e m ă.** Fie  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  un punct staționar al funcției  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Să presupunem că funcția  $f(x_1, \dots, x_n)$  are derive parțiale de ordinul doi continue într-o vecinătate  $V$  a lui  $a$ .

1) Dacă forma pătratică  $\varphi = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \alpha_i \alpha_j$  este definită, atunci  $a$  este un punct de extrem, și anume un punct de maxim sau de minim, după cum  $\varphi < 0$  sau  $\varphi > 0$ .

2) Dacă forma pătratică  $\varphi$  este nedefinită, atunci  $a$  nu este punct de extrem al funcției.

Se pleacă de la formula lui Taylor

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \frac{1}{2} \omega(x)\rho^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \alpha_i \alpha_j + \omega \right] \rho^2 = \frac{1}{2} [\varphi + \omega]\rho^2, \end{aligned}$$

unde :

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2}, \lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = \omega(a) = 0 \text{ și } \alpha_i = \frac{x_i - a_i}{\rho}.$$

Dacă forma pătratică  $\varphi$  este definită, ea nu se anulează; pe de altă parte  $|\varphi|$  fiind continuă, își atinge minimul  $\mu$  pe mulțimea  $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$ , și deci  $\mu > 0$ . Se găsește apoi o vecinătate  $V$  a lui  $a$ , în care  $\omega$  are valori mai mici decât  $\mu$ . În această vecinătate diferența  $f(x) - f(a)$  are semnul lui  $\varphi$ . Dacă  $\varphi > 0$ , avem  $f(x) - f(a) > 0$  pentru  $x \in V$ , deci  $a$  este punct de minim; dacă  $\varphi < 0$ , avem  $f(x) - f(a) < 0$  pentru  $x \in V$ , deci  $a$  este punct de maxim.

Dacă forma pătratică  $\varphi$  nu este definită, ia în orice vecinătate a lui  $a$  atât valori  $> 0$  cât și valori  $< 0$ ; rezultă că în orice vecinătate a lui  $a$ , diferența  $f(x) - f(a)$  ia atât valori  $> 0$  cât și valori  $< 0$ , și deci  $a$  nu este punct de extrem.

## 10. Funcții omogene și teorema lui Euler

Fie  $E \subset R^n$  un con, adică o mulțime care o dată cu un punct  $x = (x_1, \dots, x_n)$  conține întreaga semidreaptă care unește punctul  $x$  cu originea  $0 \in R^n$ , cu excepția eventual a originii. Fie funcția reală  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  definită pe  $E$ .

Se spune că funcția  $f$  este omogenă de grad  $k$ , dacă pentru orice număr  $t > 0$  și orice  $x \in E$  avem

$$f(tx) = t^k f(x),$$

adică

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

*Exemplu:* 1) Funcția  $ax^2 + bxy + cy^2$  este omogenă de grad 2;

2) Funcția  $\sqrt{x^2 + xy}$  este omogenă de grad 1;

3) Funcția  $\frac{1}{x^\alpha - y^\alpha}$  este omogenă de grad  $-\alpha$ ;

4) Funcția  $\sqrt{x+y}$  este omogenă de grad  $\frac{1}{2}$ ;

5) Funcția  $\frac{y}{x}$  este omogenă de grad 0.

**T e o r e m a l u i E u l e r.** Dacă funcția  $f(x)$  este omogenă de grad  $k$  și diferențiabilă într-un punct  $a = (a_1, \dots, a_n) \neq 0$ , atunci

$$a_1 f'_{x_1}(a) + a_2 f'_{x_2}(a) + \dots + a_n f'_{x_n}(a) = t^k f(a).$$

Deoarece  $f(x)$  este omogenă, pentru orice  $t > 0$  avem

$$\varphi(t) = f(ta_1, ta_2, \dots, ta_n) = t^k f(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Deoarece  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  este diferențiabilă în punctul  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , funcția din membrul stîng al egalității este derivabilă în raport cu  $t$  în punctul 1 și avem

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(1)}{dt} &= \left[ \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(ta_1, ta_2, \dots, ta_n) \frac{d(ta_i)}{dt} \right]_{t=1} = \\ &= \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(a_1, a_2, \dots, a_n) a_i = \sum_{i=1}^n a_i f'_{x_i}(a). \end{aligned}$$

De asemenea,

$$\frac{d\varphi(1)}{dt} = [k t^{k-1} f(x_1, \dots, x_n)]|_{t=1} = k f(x_1, \dots, x_n) = kf(x),$$

de unde

$$\sum_{i=1}^n x_i f'_{x_i}(x) = kf(x).$$

**C o r o l a r.** Dacă funcția  $f(x)$  este omogenă de grad  $k$  și diferențiabilă în orice punct  $x \neq 0$  din  $E$ , atunci

$$x_1 f'_{x_1}(x) + x_2 f'_{x_2}(x) + \dots + x_n f'_{x_n}(x) = kf(x)$$

pentru orice  $x \neq 0$  din  $E$ .

**T e o r e m a r e c i p r o c ā.** Dacă funcția  $f(x)$  este diferențiabilă în orice punct  $x \neq 0$  din  $E$  și în aceste puncte verifică egalitatea

$$\sum_{i=1}^n x_i f'_{x_i}(x) = kf(x),$$

atunci  $f(x)$  este omogenă de grad  $k$ .

Fie  $x = (x_1, \dots, x_n) \neq 0$  un punct arbitrar din  $E$ . Să considerăm funcția

$$\varphi(t) = \frac{f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)}{t^k}$$

definită pentru  $t \in (0, +\infty)$ . Avem

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t^{k+1}} \left( \sum_{i=1}^n t x_i f'_{x_i}(tx_1, \dots, tx_n) - kf(tx_1, \dots, tx_n) \right) = 0$$

pentru orice  $t \in (0, +\infty)$ , deci  $\varphi$  este constantă pe  $(0, +\infty)$ . Urmează că pentru orice  $t > 0$  avem

$$\varphi(t) = \varphi(1),$$

adică

$$\frac{f(tx_1, \dots, tx_n)}{t^k} = f(x_1, \dots, x_n),$$

de unde

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, \dots, x_n)$$

și deci  $f$  este omogenă de gradul  $k$ .

## § 7. Funcții implicate

### 1. Funcții implicate de una sau mai multe variabile

Să considerăm ecuația

$$F(x, y) = 0,$$

unde  $F(x, y)$  este o funcție reală de două variabile, definită pe o mulțime  $E \subset R^2$ . Să notăm cu  $E_x$  proiecția lui  $E$  pe axa  $Ox$ :

$$E_x = pr_x E = \{x \mid \text{există } y \in R, \text{ cu } (x, y) \in E\}$$

și fie  $A \subset E_x$ .

O funcție  $f(x) : A \rightarrow R$  se numește soluție (în raport cu  $y$ ) a ecuației  $F(x, y) = 0$  pe mulțimea  $A$ , dacă

$$F(x, f(x)) \equiv 0 \text{ pentru } x \in A.$$

O ecuație  $F(x, y) = 0$  poate avea (în raport cu  $y$ ) una sau mai multe soluții pe o mulțime  $A$ , sau poate să nu aibă nici o soluție.

*Exemplu.* 1) Fie funcția  $F(x, y) = x - y^2$  definită pe  $R^2$  și ecuația  $x - y^2 = 0$ . Această ecuație are, în raport cu  $y$ , o infinitate de soluții pe mulțimea  $[0, +\infty)$ .

Într-adevăr, să considerăm două mulțimi disjuncte oarecare  $A_1$  și  $A_2$ , astfel ca  $A_1 \cup A_2 = [0, +\infty)$ .

Funcția  $f(x)$  definită pe  $[0, +\infty)$  prin egalitățile:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{dacă } x \in A_1 \\ -\sqrt{x} & \text{dacă } x \in A_2 \end{cases}$$

verifică ecuația  $x - y^2 = 0$ , deoarece  $x - f^2(x) \equiv 0$ .

Dintre toate soluțiile în raport cu  $y$  ale ecuației  $x - y^2 = 0$ , numai două sunt funcții continue, și anume funcțiile

$$f_1(x) = \sqrt{x} \quad \text{și} \quad f_2(x) = -\sqrt{x}.$$

Dintre cele două soluții continue ale ecuației  $x - y^2 = 0$ , numai una verifică „condiția inițială”  $f(1) = 1$ .

2) Ecuația  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ ,  $(x, y) \in R^2$  nu are nici o soluție (reală), nici în raport cu  $y$ , nici în raport cu  $x$ .

3) Ecuația  $x - 2y = 0$ ,  $(x, y) \in R^2$  are o singură soluție în raport cu  $y$  pe  $R$ , funcția  $f(x) = \frac{1}{2}x$ .

Să considerăm de asemenea ecuația

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0,$$

unde  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$  este definită pe o mulțime  $E \subset R^{n+1}$ . O funcție de  $n$  variabile  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  definită pe o mulțime  $A \subset R^n$  este soluție în raport cu  $y$  a acestei ecuații, pe mulțimea  $A$ , dacă

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \equiv 0$$

pentru orice punct  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ .

Să observăm că dacă notăm  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , ecuația  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$  se scrie

$$F(x, y) = 0,$$

iar soluția  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se scrie  $f(x)$ .

Așadar, putem considera numai ecuații de forma  $F(x, y) = 0$ , în care  $x$  este o variabilă reală sau vectorială.

Dacă există o singură funcție  $f(x)$  definită pe o mulțime  $A$  care să verifice ecuația  $F(x, y) = 0$  și, eventual, și alte condiții suplimentare, spunem că funcția  $f(x)$  este definită de ecuația  $F(x, y) = 0$ .

Se spune de asemenea că rezolvând ecuația  $F(x, y) = 0$  în raport cu  $y$ , se obține funcția  $y = f(x)$ .

Funcțiile definite cu ajutorul ecuațiilor se numesc funcții definite implicit sau, mai simplu, *funcții implice*.

În acest paragraf vom enunța cîteva propoziții care dău condiții suficiente de existență a funcțiilor implice. După cum aceste condiții sunt mai mult sau mai puțin restrictive, rezultă pentru funcția implicită proprietăți mai multe sau mai puține.

**Propozitia 1.** Fie  $A \subset R^n$ ,  $n \geq 1$ ,  $x_0$  un punct interior al lui  $A$ ,  $B \subset R$  și  $y_0$  un punct interior al lui  $B$ ; fie funcția reală  $F(x, y)$  definită pe  $A \times B$ .

Dacă :

- 1)  $F(x_0, y_0) = 0$ ,

și dacă există o vecinătate  $U \subset A$  a lui  $x_0$  și o vecinătate  $V \supseteq B$  a lui  $y_0$  astfel încât :

- 2) pentru orice punct  $x \in U$  fixat, funcția  $y \rightarrow F(x, y)$  (de variabilă reală  $y$ ) este continuă și strict monotonă pe  $V$ ;

- 3) pentru orice punct  $y \in V$  fixat, funcția  $x \rightarrow F(x, y)$  (de variabilă vectorială  $x$ ) este continuă în  $x_0$ ;

atunci :

a) există o vecinătate  $U_0$  a lui  $x_0$  și o vecinătate  $V_0$  a lui  $y_0$ , astfel ca pentru orice punct  $x \in U_0$  fixat, ecuația în  $y$ ,  $F(x, y) = 0$  să aibă o singură soluție în  $V_0$ ,  $y = f(x)$ :

$$F(x, f(x)) = 0, \quad x \in U_0,$$

b) funcția implicită  $f(x) : U_0 \rightarrow V_0$  definită de ecuația  $F(x, y) = 0$  verifică egalitatea  $f(x_0) = y_0$  și este continuă în  $x_0$ .

Alegem  $\alpha, \beta \in V$ , astfel ca  $\alpha < y_0 < \beta$ , și notăm  $V_0 = (\alpha, \beta)$ . Conform ipotezei 2, pentru  $x = x_0$ , funcția  $y \rightarrow F(x_0, y)$  (de variabilă reală  $y$ ) este strict monotonă pe  $[\alpha, \beta]$ ; deoarece  $F(x_0, y_0) = 0$ , iar  $\alpha < y_0 < \beta$ , rezultă că funcția  $F(x_0, y)$  are semne diferite în  $\alpha$  și  $\beta$ . Pentru a face o alegere, să presupunem că

$$F(x_0, \alpha) < 0, \quad F(x_0, \beta) > 0.$$

Conform ipotezei 3, funcția  $x \rightarrow F(x, \alpha)$  (de variabilă vectorială  $x$ ) este continuă în  $x_0$ ; deoarece  $F(x_0, \alpha) < 0$ , există o vecinătate  $U' \subset U$  a lui  $x_0$  astfel ca

$$F(x, \alpha) < 0$$

pentru orice  $x \in U'$ .

De asemenea, conform ipotezei 3, funcția  $x \rightarrow F(x, \beta)$  este continuă în  $x_0$ ; deoarece  $F(x_0, \beta) > 0$ , există o vecinătate  $U'' \subset U$  a lui  $x_0$ , astfel ca  $F(x, \beta) > 0$  pentru orice  $x \in U''$ .

Dacă luăm  $U_0 = U' \cap U''$ ,  $U_0$  este o vecinătate a lui  $x_0$  și

$$F(x, \alpha) < 0, \quad F(x, \beta) > 0 \text{ pentru orice } x \in U_0.$$

Fie acum  $x' \in U_0$  arbitrar. Conform ipotezei 2, funcția  $y \rightarrow F(x', y)$ , de variabilă  $y$ , este continuă și strict monotonă pe  $[\alpha, \beta]$ . Deoarece este continuă, are proprietatea lui Darboux. Din inegalitățile

$$F(x', \alpha) < 0, \quad F(x', \beta) > 0$$

rezultă că există un punct  $y'$ , astfel ca  $\alpha < y' < \beta$  și  $F(x', y') = 0$ . Deoarece funcția  $y \rightarrow F(x', y)$  este strict monotonă, există un singur punct  $y' \in (\alpha, \beta)$  care verifică egalitatea  $F(x', y') = 0$ .

Deoarece  $x' \in U_0$  a fost ales arbitrar, rezultă că, pentru orice punct  $x \in U_0$  fixat, există un singur punct  $y = f(x) \in V_0$  astfel ca  $F(x, y) = 0$ , și astfel punctul  $a$  este demonstrat.

Pentru  $x = x_0$ , avem  $F(x_0, y_0) = 0$  și cum  $y_0$  este singurul punct din  $V_0$  cu această proprietate, deducem că  $f(x_0) = y_0$ .

Rămîne de demonstrat continuitatea lui  $f(x)$  în  $x_0$ . Să observăm că vecinătatea  $V_0$  a lui  $y_0$  a fost aleasă arbitrar. Din demonstrația punctului  $a$  rezultă deci că pentru orice vecinătate  $V$  a lui  $y_0 = f(x_0)$  există o vecinătate  $U$  a lui  $x_0$ , astfel ca pentru orice  $x \in U$  să avem  $f(x) \in V$ . Aceasta înseamnă că funcția  $f(x)$  este continuă în  $x_0$  și astfel propoziția este demonstrată.

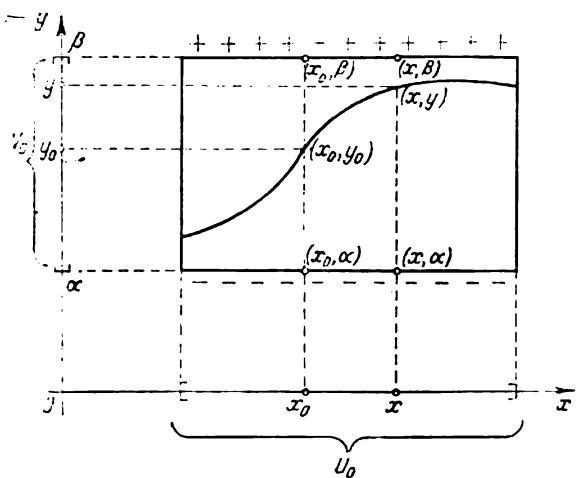


Fig. 159

În ceea ce privește continuitatea funcției implice, se pot face unele precizări.

**C o r o l a r.** Dacă, în propoziția 1, ipoteza 3 se înlocuiește prin condiția:

3') pentru orice  $y \in V$  fixat, funcția  $x \rightarrow F(x, y)$  este continuă pe  $U$  (nu numai în  $x_0$ ), atunci funcția implicită  $f(x)$  este continuă pe  $U_0$  (nu numai în  $x_0$ ).

Într-adevăr, fie  $a \in U_0$  un punct arbitrar; să notăm  $b = f(a) \in V_0$ .

Funcția  $F(x, y)$  verifică ipotezele propoziției 1 relativ la punctul  $(a, b)$ , în loc de  $(x_0, y_0)$ , și deci există o vecinătate  $U_1 \times V_1 \subset U_0 \times V_0$  a lui  $(a, b)$  și o funcție unică  $g(x) : U_1 \rightarrow V_1$ , astfel că  $g(a) = b$  și  $F(x, g(x)) = 0$  pentru  $x \in U_1$ . În plus, funcția  $g(x)$  este continuă în  $a$ .

Dar avem de asemenea  $f(a) = b$  și  $F(x, f(x)) = 0$  pentru  $x \in U_1 \subset U_0$ .

Din unicitatea funcției  $g$  rezultă că  $g(x) = f(x)$  pentru  $x \in U_1$ , și deci funcția  $f$  este continuă în punctul  $a$ . Cum punctul  $a$  a fost ales arbitrar în  $U_0$ , rezultă că funcția  $f(x)$  este continuă în orice punct  $x \in U_0$ .

În teorema următoare se dau condiții suficiente pentru ca funcția implicită să fie derivabilă.

**T e o r e m a 1.** Fie  $A \subset R^n$ ,  $n \geq 1$ ,  $B \subset R$ ,  $x_0 \in \text{Int } A$ ,  $y_0 \in \text{Int } B$ ; fie funcția reală  $F(x, y)$  definită pe  $A \times B$ . Dacă:

1)  $F(x_0, y_0) = 0$ ;

2) funcția  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = F(x, y)$  are derivate parțiale  $F'_{x_1}, F'_{x_2}, \dots, F'_{x_n}, F'_y$  continue pe o vecinătate  $U \times V$  a lui  $(x_0, y_0)$ ;

3)  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ ;  
atunci :

a) există o vecinătate  $U_0$  a lui  $x_0$  și o vecinătate  $V_0$  a lui  $y_0$  și o funcție unică  $y = f(x) : U_0 \rightarrow V_0$ , astfel că

$$f(x_0) = y_0 \text{ și } F(x, f(x)) \equiv 0 \text{ pentru } x \in U_0;$$

b) funcția  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x)$  are derivate parțiale  $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_n}$  continue pe  $U_0$ , și pentru fiecare  $i$  avem

$$f'_{x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}, \quad x \in U_0;$$

c) dacă  $F$  are derivate parțiale de ordinul  $k$  continue pe  $U \times V$ , atunci funcția implicită  $f$  are derivate parțiale de ordinul  $k$  continue pe  $U_0$ .

Să arătăm mai întâi că funcția  $F(x, y)$  verifică ipotezele propoziției precedente.

Deoarece  $F'$  este continuă și diferită de 0 în  $(x_0, y_0)$ , ea este diferită de 0 pe o întreagă vecinătate a lui  $(x_0, y_0)$ . Putem presupune că această vecinătate este  $U \times V$ :

$$F'_y(x, y) \neq 0 \text{ pentru } x \in U \text{ și } y \in V.$$

Ipoteza 1 este aceeași în propoziție ca și în teoremă.

Conform ipotezei 2 a teoremei, funcția  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y_n) = F(x, y)$  este diferențiabilă, deci continuă, pe  $U \times V$ . În particular, pentru fiecare  $y \in V$  fixat, funcția  $x \rightarrow F(x, y)$  este continuă pe  $U$ , astfel încât ipoteza 3 a propoziției (și chiar ipoteza 3' a corolarului) este verificată.

Deoarece pentru  $x \in U$  fixat, funcția  $y \rightarrow F(x, y)$  are derivata  $F'(x, y) \neq 0$  pentru  $y \in V$ , rezultă că funcția  $y \rightarrow F(x, y)$  este strict monotonă pe  $V$ ; fiind derivabilă, această funcție este continuă pe  $V$  și astfel și ipoteza 2 a propoziției este verificată.

Rezultă atunci punctul  $a$  din concluzia propoziției, care este și punctul  $a$  din concluzia teoremei. În plus, conform corolarului, funcția implicită  $f$  este continuă pe întreaga vecinătate  $U_0$ .

Să arătăm că funcția  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  are derivate parțiale continue pe  $U_0$ . Vom demonstra mai întâi că această funcție este diferențiabilă pe  $U_0$ .

Fie  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  un punct arbitrar din  $U_0$  și  $b = f(a) \in V_0$ . Deoarece funcția  $F(x, y) = F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$  este diferențiabilă pe  $U \times V$ , ea este diferențiabilă în punctul  $(a, b) \in U \times V$ , deci, pentru orice punct  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$  și orice  $y \in V$  putem scrie egalitatea

$$\begin{aligned} F(x, y) - F(a, b) &= \sum_{i=1}^n [F'_{x_i}(a, b) + \omega_i(x, y)](x_i - a_i) + \\ &\quad + [F'_y(a, b) + \omega(x, y)](y - b), \end{aligned}$$

unde :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega_i(x, y) = \omega_i(a, b) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \omega(x, y) = \omega(a, b) = 0.$$

În particular, luând  $x \in U_0$  și  $y$  de forma  $y = f(x) \in V_0$ , avem  $F(x, y) = F(x, f(x)) = 0$ ; de asemenea,  $F(a, b) = F(a, f(a)) = 0$ . Atunci egalitatea precedentă devine

$$\sum_{i=1}^n [F'_{x_i}(a, b) + \omega_i(x, f(x))] (x_i - a_i) + [F'_y(a, b) + \omega(x, f(x))] (f(x) - f(a)) = 0.$$

Deoarece funcția  $f(x)$  este continuă în punctul  $a$ , iar funcțiile  $\omega_i(x, y)$  și  $\omega(x, y)$  sunt continue în punctul corespunzător  $(a, f(a)) = (a, b)$ , rezultă că funcțiile compuse  $\omega_i(x, f(x))$  și  $\omega(x, f(x))$  sunt continue în punctul  $a$  și

$$\lim_{x \rightarrow a} \omega_i(x, f(x)) = \omega_i(a, f(a)) = \omega_i(a, b) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \omega(x, f(x)) = \omega(a, f(a)) = \omega(a, b) = 0.$$

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow a} [F'_y(a, b) + \omega(x, f(x))] = F'_y(a, b) \neq 0$ , există o vecinătate  $U_1$  a lui  $a$  astfel ca pentru  $x \in U_1$  să avem:

$$F'_y(a, b) + \omega(x, f(x)) \neq 0.$$

Din egalitatea de mai sus, obținem atunci, pentru  $x \in U_1$ ,

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= - \sum_{i=1}^n \frac{F'_{x_i}(a, b) + \omega_i(x, f(x))}{F'_y(a, b) + \omega(x, f(x))} (x_i - a_i) = \\ &= - \sum_{i=1}^n \left[ \frac{F'_{x_i}(a, b)}{F'_y(a, b)} + \Omega_i(x) \right] (x_i - a_i), \end{aligned}$$

$$\text{unde am notat } \Omega_i(x) = \frac{F'_{x_i}(a, b) + \omega_i(x, f(x))}{F'_y(a, b) + \omega(x, f(x))} - \frac{F'_{x_i}(a, b)}{F'_y(a, b)}.$$

Deoarece  $\lim_{x \rightarrow a} \Omega_i(x) = 0$ , rezultă că funcția  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  este diferențiabilă în punctul  $a$ , iar derivatele sale parțiale în punctul  $a$  sunt date de egalitățile

$$f'_{x_i}(a) = - \frac{F'_{x_i}(a, b)}{F'_y(a, b)} = - \frac{F'_{x_i}(a, f(a))}{F'_y(a, f(a))}.$$

Deoarece punctul  $a$  a fost ales arbitrar în  $U_0$ , rezultă că funcția  $f$  este diferențiabilă în orice punct  $x \in U_0$ , iar derivatele sale parțiale în  $x$  sunt:

$$f'_{x_i}(x) = - \frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Dar funcțiile  $F'_{x_i}$  și  $F'_y$  sunt continue prin ipoteză pe  $U \times V$ , iar funcția  $f$  este continuă pe  $U_0$ . Rezultă că funcțiile compuse  $F'_{x_i}(x, f(x))$  și  $F'_y(x, f(x))$

sunt continue pe  $U_0$  și deci și derivata  $f'_{x_i} = - \frac{F'_{x_i}}{F'_y}$  este continuă pe  $U_0$ .

Demonstrația punctului c) se face prin inducție completă. Pentru  $k = 1$ , afirmația a fost deja demonstrată la punctul b). Să o presupunem adevărată pentru  $k = p$  și să-o demonstrăm pentru  $k = p + 1$ .

Să presupunem deci că funcția  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = F(x, y)$  are derivate parțiale de ordinul  $p + 1$ , continue pe  $U \times V$ . Atunci ea are derivate parțiale de ordinul  $p$ , continue pe  $U \times V$  și deci  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  are derivate parțiale de ordinul  $p$ , continue pe  $U_0$ .

Pe de altă parte, funcțiile  $F'_{x_1}, F'_{x_2}, \dots, F'_{x_n}, F'_y$  au derivate parțiale de ordinul  $p$ , continue pe  $U \times V$ . Atunci funcțiile compuse

$$F'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)), \dots, F'_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

$$F'_y(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

au derivate parțiale de ordinul  $p$  continue pe  $U_0$ , și deci, pentru fiecare  $i = 1, 2, \dots, n$ , funcția

$$f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n) = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))}{F'_y(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))}$$

are derivate parțiale de ordinul  $p$  continue pe  $U_0$ . Aceasta înseamnă că funcția  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  are derivate parțiale de ordinul  $p+1$  continue pe  $U_0$ .

Prin inducție completă, rezultă deci că punctul  $c$  este adevărat pentru orice  $k$ .

Teorema este astfel complet demonstrată.

**Observație.** Dacă se modifică ipotezele teoremei, rezultă și concluzii diferite. Se pot obține astfel mai multe teoreme de existență a funcțiilor implicate.

Din teorema de existență a funcțiilor implicate se poate deduce o teoremă de existență a funcțiilor reciproce.

**Propoziție.** Fie  $I$  și  $J$  două intervale,  $(x_0, y_0) \in \text{Int } I \times J$  și funcția  $f(x) : I \rightarrow J$ . Dacă :

1)  $f(x_0) = y_0$ ; 2)  $f'(x)$  există într-o vecinătate  $U$  a lui  $x_0$ ; 3)  $f'(x_0) \neq 0$ ; atunci: a) există o vecinătate  $U_0 \times V_0$  a lui  $(x_0, y_0)$  și o funcție  $\varphi(y) : V_0 \rightarrow U_0$  astfel ca  $\varphi(y_0) = x_0$  și  $f(\varphi(y)) \equiv y$  pentru  $y \in V_0$ ;

b) funcția  $\varphi(y)$  are derivata continuă pe  $V_0$  și  $\varphi'(y) = -\frac{1}{f'(\varphi(y))}$ .

Într-adevăr, să considerăm funcția  $F(x, y) = f(x) - y$  definită pe  $I \times J$ . Avem  $F'_x(x, y) \equiv f'(x)$  și  $F'_y(x, y) \equiv -1$ .

Ipotezele teoremei precedente sunt verificate, și astfel rezultă concluzia acestei propoziții.

## 2. Sisteme de funcții implicate

Să considerăm sistemul de ecuații

$$(1) \quad \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_n(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

unde  $F_i(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  sunt  $n$  funcții reale de  $m+n$  variabile, definite pe o mulțime  $E \subset R^{m+n}$ .

Spunem că un sistem de  $n$  funcții reale

$$(2) \quad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m) \\ y_2 = f_2(x_1, \dots, x_m) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_m) \end{cases}$$

de  $m$  variabile, definite pe o mulțime  $A \subset R^m$ , este o soluție a sistemului de ecuații (1), în raport cu variabilele  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , pe mulțimea  $A$ , dacă avem

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_m; f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)) &\equiv 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_m; f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)) &\equiv 0 \\ \dots &\dots \\ F_n(x_1, \dots, x_m; f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)) &\equiv 0 \end{aligned}$$

pentru  $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in A$ .

În cazul cînd sistemul (1) are pe mulțimea  $A$  o singură soluție (2), spunem că funcțiile  $f_1, \dots, f_n$  sunt definite implicit de sistemul de ecuații (1), sau că sunt funcții implicate. Se spune de asemenea că sistemul de funcții (2) s-a obținut din sistemul de ecuații (1), prin rezolvare în raport cu variabilele  $y_1, \dots, y_n$ .

După cum la funcțiile implicate de una sau mai multe variabile au jucat un rol important derivele parțiale, pentru sistemele de funcții, un rol analog va avea un anumit determinant de derive parțiale.

Să presupunem că funcțiile  $F_1, F_2, \dots, F_n$  au derive parțiale în raport cu variabilele  $y_1, y_2, \dots, y_n$  pe mulțimea  $E$ . Determinantul de funcții

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

se numește *determinantul funcțional* al funcțiilor  $F_1, F_2, \dots, F_n$  în raport cu variabilele  $y_1, y_2, \dots, y_n$  și se notează

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}.$$

Determinantul funcțional se mai numește *iacobian* (de la numele matematicianului Jacobi) și se mai notează cu litera  $J$ . În cazul unei singure funcții  $F$  avem

$$\frac{D(F)}{D(y)} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Pentru simplificarea scrisului, vom nota, ca de obicei,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

Dacă notăm  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ , atunci  $F$  este o *funcție vectorială definită pe  $E$  cu valori în  $R^n$* , iar sistemul (1) se scrie atunci, simplu,

$$(1') \quad F(x, y) = 0.$$

De asemenea, dacă notăm  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ , atunci  $f$  este o *funcție vectorială definită pe  $A \subset R^m$ , cu valori în  $R^n$* , iar sistemul (2) se scrie, simplu,

$$(2') \quad y = f(x).$$

A spune că sistemul (2) este o soluție a sistemului (1) revine la a spune că funcția vectorială (2') este o soluție a ecuației vectoriale (1'), adică

$$F(x, f(x)) = 0 \text{ pentru } x \in A.$$

În acest fel, un sistem de  $n$  funcții implicate *reale*, definite de un sistem de  $n$  ecuații, este echivalent cu o singură funcție implicită *vectorială*, definită de o ecuație vectorială. În acest caz, iacobianul se notează  $\frac{D(F)}{D(y)}$ .

**Teorema 2.** Fie  $E \subset R^{m+n}$  și  $(x_0, y_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0; y_1^0, \dots, y_n^0) \in \text{Int } E$ ; fie funcția vectorială  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n) : E \rightarrow R^n$ .

Dacă:

$$1) F(x_0, y_0) = 0;$$

2) funcțiile reale  $F_i$ , ( $1 \leq i \leq n$ ) au derivate parțiale continue

$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ , ( $1 \leq j \leq m$ ),  $\frac{\partial F_i}{\partial y_k}$ , ( $1 \leq k \leq n$ ) într-o vecinătate  $U \times V$  a punctului  $(x_0, y_0)$ ;

3) iacobianul  $\frac{D(F)}{D(y)} = \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}$  este  $\neq 0$  în punctul  $(x_0, y_0)$ ;

atunci:

a) există o vecinătate  $U_0 \times V_0$  a lui  $(x_0, y_0)$ , ( $U_0 \subset R^m$ ,  $V_0 \subset R^n$ ), și o funcție vectorială unică  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) : U_0 \rightarrow V_0$ , astfel ca  $y_0 = f(x_0)$  și  $F(x, f(x)) = 0$  pentru orice  $x \in U_0$ ;

b) funcțiile reale  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  au derivate parțiale continue pe  $U_0$  și

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = - \frac{\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}}{\frac{D(x_i, y_2, \dots, y_n)}{D(F_1, \dots, F_n)}}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i} = - \frac{\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_{n-1}, x_i)}}{\frac{D(y_1, \dots, y_{n-1})}{D(F_1, \dots, F_n)}};$$

c) dacă funcțiile  $F_1, F_2, \dots, F_n$  au derivate parțiale de ordinul  $k$  continue pe  $U \times V$ , atunci funcțiile  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  au derivate parțiale de ordinul  $k$  continue pe  $U_0$ .

Demonstrația se face prin inducție completă asupra lui  $n$ .

Pentru  $n = 1$  (un sistem format dintr-o singură ecuație, care definește o singură funcție reală implicită), teorema a fost deja demonstrată (teorema 1).

Să presupunem teorema adevărată pentru un sistem de  $n - 1$  funcții implicate, definite de un sistem de  $n - 1$  ecuații, și să-o demonstrăm pentru un sistem de  $n$  funcții implicate definite de un sistem de  $n$  ecuații.

Să presupunem deci condițiile 1, 2, și 3 din enunțul teoremei.

Deoarece iacobianul  $\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}$  este  $\neq 0$  în punctul  $(x_0, y_0) = (x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0)$ , rezultă că cel puțin un determinant minor (de ordinul  $n - 1$ ) este  $\neq 0$  în acest punct. (Dacă toți determinanții minori ar fi nuli, dezvoltând iacobianul după elementele unei linii, ar rezulta că iacobianul este nul în  $(x_0, y_0)$ ).

Pentru a face o alegere, să presupunem că determinantul minor  $\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{n-1})}$  este  $\neq 0$  în punctul  $(x_0, y_0)$ . —

Rezultă atunci că sistemul de  $n - 1$  ecuații

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) = 0 \\ F_2(x, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) = 0 \\ \dots \\ F_{n-1}(x, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) = 0 \end{cases}$$

îndeplinește condițiile 1, 2, 3 din enunțul teoremei și deci, conform presupunerii, poate fi rezolvat în raport cu  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ , în jurul punctului  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, y_n^0)$ : există o vecinătate  $U'$  a lui  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ , o vecinătate  $V' = V'_1 \times V'_2 \times \dots \times V'_{n-1} \times V'_n$  a punctului  $(y_1^0, y_2^0, \dots, y_{n-1}^0, y_n^0)$  și  $n - 1$  funcții

$$\begin{cases} y_1 = h_1(x, y_n) : U' \times V'_n \rightarrow V'_1 \\ y_2 = h_2(x, y_n) : U' \times V'_n \rightarrow V'_2 \\ \dots \\ y_{n-1} = h_{n-1}(x, y_n) : U' \times V'_n \rightarrow V'_{n-1} \end{cases},$$

astfel încât

$$y_1^0 = h_1(x_0, y_n^0), y_2^0 = h_2(x_0, y_n^0), \dots, y_{n-1}^0 = h_{n-1}(x_0, y_n^0).$$

Pentru  $(x, y_n) \in U' \times V'_n$  avem

$$\begin{aligned} F_1(x, h_1(x, y_n), \dots, h_{n-1}(x, y_n)) &\equiv 0 \\ F_2(x, h_1(x, y_n), \dots, h_{n-1}(x, y_n)) &\equiv 0 \\ \dots \\ F_n(x, h_1(x, y_n), \dots, h_{n-1}(x, y_n)) &\equiv 0. \end{aligned}$$

Funcțiile  $h_1(x, y_n), \dots, h_{n-1}(x, y_n)$  au derivate parțiale continue pe  $U' \times V'_n$ .

### Sistemul

$$(1) \quad \begin{cases} F_1(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ F_2(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

este echivalent, pentru  $(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in U' \times V'_1 \times V'_2 \times \dots \times V'_n$ , cu sistemul

$$(1') \quad \begin{cases} y_1 = h_1(x, y_n) \\ y_2 = h_2(x, y_n) \\ \dots \\ y_{n-1} = h_{n-1}(x, y_n) \\ F_n(x, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) = 0, \end{cases}$$

iar acesta este echivalent pe  $U' \times V'_1 \times \dots \times V'_n$  cu sistemul

$$(1'') \quad \begin{cases} y_1 = h_1(x, y_n) \\ \dots \\ y_{n-1} = h_{n-1}(x, y_n) \\ F_n(x, h_1(x, y_n), h_2(x, y_n), \dots, h_{n-1}(x, y_n), y_n) = 0, \end{cases}$$

care se obțin din sistemul (1') înlocuind în  $F_n$  pe  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  respectiv cu  $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$ .

Să notăm

$$\Phi(x, y_n) = F_n(x, h_1(x, y_n), \dots, h_{n-1}(x, y_n), y_n)$$

pentru  $(x, y_n) \in U' \times V'_n$ .

Funcția  $\Phi(x, y_n)$  verifică ipotezele teoremei 1, pentru a putea fi rezolvată în raport cu  $y_n$  în jurul punctului  $(x_0, y_n^0)$ . Într-adevăr,

$$\begin{aligned} 1) \quad \Phi(x_0, y_n^0) &= F_n(x_0, h_1(x_0, y_n^0), \dots, h_{n-1}(x_0, y_n^0), y_n^0) = \\ &= F_n(x_0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0, y_n^0) = 0. \end{aligned}$$

2) Funcția  $\Phi(x, y_n)$  are derivate parțiale continue în raport cu  $x_1, x_2, \dots, x_m$  și  $y_n$  pe mulțimea  $U' \times V'_n$ , deoarece funcțiile  $h_i(x, y_n)$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ , au derivate parțiale continue pe  $U' \times V'_n$ , iar funcția  $F_n(x, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n)$  are derivate parțiale continue pe  $U' \times V'_1 \times \dots \times V'_{n-1} \times V'_n$ .

$$3) \quad \Phi'_{y_n}(x_0, y_n^0) \neq 0.$$

Intr-adevăr :

$$\begin{aligned}\Phi'_{y_n} &= \frac{\partial F_n}{\partial y_1} \frac{\partial h_1}{\partial y_n} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial h_{n-1}}{\partial y_n} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} = \\ &= - \frac{\partial F_n}{\partial y_1} \frac{\frac{D(F_1, \dots, F_{n-1})}{D(y_n, y_2, \dots, y_{n+1})}}{\frac{D(F_1, \dots, F_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{n-1})}} - \dots - \frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}} \frac{\frac{D(F_1, \dots, F_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{n-2}, y_n)}}{\frac{D(F_1, \dots, F_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{n-1})}} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} = \\ &= (-1)^{n-1} \frac{\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}}{\frac{D(F_1, \dots, F_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{n-1})}} = 0.\end{aligned}$$

Derivatele parțiale ale funcțiilor  $h_i$  sunt calculate în punctul  $(x_0, y_n^0)$ , iar cele ale funcțiilor  $F_j$  în punctul corespunzător  $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ .

Rezultă atunci că există o vecinătate  $U_0 \times V_n^0$  a lui  $(x_0, y_n^0)$  și o funcție  $y_n = f_n(x) : U_0 \rightarrow V_n^0$  astfel că

$$y_n^0 = f_n(x_0) \text{ și } \Phi(x, f_n(x)) \equiv 0 \text{ pentru } x \in U_0,$$

adică

$$F_n(x, h_1(x, f_n(x)), \dots, h_{n-1}(x, f_n(x)), f_n(x)) \equiv 0 \text{ pentru } x \in U_0.$$

Funcția  $y_n = f_n(x)$  are deriveate parțiale continue pe  $U_0$ . ■

Să notăm  $V_1^0 = V'_1$ ,  $V_2^0 = V'_2$ , ...,  $V_{n-1}^0 = V'_{n-1}$  și  $V_0 = V_1^0 \times V_2^0 \times V_{n-1}^0 \times \dots \times V_n^0$ . Sistemul (1'') este echivalent pe mulțimea  $U_0 \times V_0$  cu sistemul

$$(1''') \quad \begin{cases} y_1 = h_1(x, y_n) \\ y_2 = h_2(x, y_n) \\ \dots \\ y_{n-1} = h_{n-1}(x, y_n) \\ y_n = f_n(x). \end{cases}$$

Să înlocuim în primele  $n - 1$  ecuații pe  $y_n$  cu  $f_n$  și să notăm

$$f_1(x) = h_1(x, f_n(x)), \dots, f_{n-1}(x) = h_{n-1}(x, f_n(x)).$$

Atunci sistemul (1''') este echivalent pe  $U_0 \times V_0$  cu sistemul

$$(2) \quad \begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ y_2 = f_2(x) \\ \dots \\ y_{n-1} = f_{n-1}(x) \\ y_n = f_n(x). \end{cases}$$

Sistemul (2) reprezintă soluția sistemului (1) pe mulțimea  $U_0 \times V_0$ . Avem evident

$$y_1^0 = f_1(x_0), \dots, y_n^0 = f_n(x_0),$$

adică  $y_0 = f(x_0)$ .

Deoarece funcțiile  $h_1(x, y_n), \dots, h_{n-1}(x, y_n)$  și  $f_n(x)$  au derivate parțiale continue pe  $U_0 \times V_n^0$ , rezultă că funcțiile compuse

$$f_i(x) = h_i(x, f_n(x)), \quad 1 \leq i \leq n-1$$

au derivate parțiale continue pe  $U_0$ .

Dacă în identitățile (pentru  $x \in U_0$ )

$$\begin{cases} F_1(x, f_1(x), \dots, f_n(x)) \equiv 0 \\ F_2(x, f_1(x), \dots, f_n(x)) \equiv 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_n(x, f_1(x), \dots, f_n(x)) \equiv 0 \end{cases}$$

derivăm în raport cu  $x_i$ , obținem identitățile

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \equiv 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_i} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \equiv 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_i} + \frac{\partial F_n}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \equiv 0. \end{cases}$$

Din acest sistem de  $n$  ecuații se scot cele  $n$  derivate parțiale ale funcțiilor  $f_1, \dots, f_n$  în raport cu  $x_i$ , folosind regula lui Krammer :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = - \frac{\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, y_2, \dots, y_n)}}{\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i} = - \frac{\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_{n-1}, x_i)}}{\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}}.$$

În acest fel punctele a) și b) ale teoremei au fost demonstate.

Demonstrația punctului c) se face prin inducție completă asupra lui  $k$ . Pentru  $k = 1$ , punctul c) a fost demonstrat mai sus.

Să presupunem că afirmația este adevărată pentru  $k = p$ ; din existența și continuitatea derivatelor parțiale ale funcțiilor  $F_1, \dots, F_n$ , rezultă existența și continuitatea derivatelor parțiale de ordinul  $p$  ale funcțiilor  $f_1, f_2, \dots, f_n$ .

Să arătăm atunci că afirmația rămîne adevărată pentru  $k = p + 1$ . Să presupunem deci că funcțiile  $F_1, \dots, F_n$  au derivate parțiale de ordinul  $p + 1$  continue pe  $U_0 \times V_0$ ; atunci aceste funcții au derivate parțiale de ordinul  $p$  continue pe această mulțime, și, conform presupunerii, rezultă că funcțiile  $f_1, f_2, \dots, f_n$  au derivate parțiale de ordinul  $p$  continue pe  $U_0$ .

Dar

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i} = - \frac{\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_i, y_2, \dots, y_n)}}{\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}}$$

unde, în membrul drept s-au făcut înlocuirile  $y_1 = f_1(x), \dots, y_n = f_n(x)$ .

Funcțiile care apar în membrul drept au derivate parțiale de ordinul  $p$  continue. Rezultă atunci că  $\frac{\partial f_1}{\partial x_i}$  are derivate parțiale de ordinul  $p$  continue pe  $U_0$ , adică  $f_1$  are derivate parțiale de ordinul  $p+1$  continue pe  $U_0$ .

Pentru celelalte funcții  $f_2, \dots, f_n$ , demonstrația se face la fel.

Rezultă deci, prin inducție completă, că punctul  $c$  este adevărat pentru orice  $k$ .

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

### 3. Transformări regulate

Fie  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  o funcție vectorială definită pe o multime  $E \subset R^n$ , cu valori în  $R^n$ , și fie  $f_1, f_2, \dots, f_n$  componente sale reale (definite tot pe  $E$ ).

**D e f i n i t i e.** Spunem că funcția vectorială  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  este o transformare regulată într-un punct interior  $x_0 \in E$ , dacă funcțiile  $f_1, f_2, \dots, f_n$  au derivate parțiale continue într-o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , și dacă iacobianul  $\frac{D(f)}{D(x)} = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$  este  $\neq 0$  în punctul  $x_0$ .

**P r o p o z i t i a 1.** Dacă transformarea  $f$  este regulată în punctul interior  $x_0 \in E$ , atunci  $f$  este regulată într-o întreagă vecinătate a lui  $x_0$ .

Într-adevăr, iacobianul

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

este o funcție continuă în punctul  $x_0$  (deoarece derivatele parțiale  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  sunt continue într-o vecinătate  $V'$  a lui  $x_0$ , deci în  $x_0$ ) și este  $\neq 0$  în acest punct, deci există o vecinătate  $V''$  a lui  $x_0$  pe care iacobianul este  $\neq 0$ .

Atunci, în vecinătatea  $V = V' \cap V''$  a lui  $x_0$ , derivatele parțiale  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  sunt continue și iacobianul este  $\neq 0$ , deci  $f$  este o transformare regulată pe  $V$ .

**O b s e r v a t i e.** Propoziția 1 ne îndreptățește să vorbim de „transformarea regulată în jurul lui  $x_0$ ” în loc de „transformare regulată în  $x_0$ ”.

**P r o p o z i t i a 2.** Orice transformare regulată într-un punct este continuă în acel punct.

Într-adevăr, dacă  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  este o transformare regulată în  $x_0$ , atunci funcțiile reale  $f_i(x) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  au derivatele parțiale continue într-o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , deci sunt diferențiabile și deci continue în această vecinătate. Rezultă atunci că funcția vectorială  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  este continuă în vecinătatea  $V$  a lui  $x_0$ ; în particular este continuă în  $x_0$ .

**P r o p o z i t i a 3.** Iacobianul unei transformări regulate pe un domeniu  $D$  păstrează același semn pe acest domeniu.

În adevăr, un domeniu  $D$  este o mulțime conexă și deschisă, iar iacobianul este o funcție continuă pe  $D$ . Dacă iacobianul ar lua două valori de semne diferite, ar trebui să existe un punct  $x_0 \in D$  în care iacobianul să se anuleze, deci în care transformarea să nu fie regulată, ceea ce ar contrazice ipoteza că transformarea este regulată pe întreg domeniul  $D$ . Rezultă deci că iacobianul păstrează același semn (fără a se anula) pe  $D$ . ■

Teoarea următoare generalizează teorema de derivabilitate a funcțiilor inverse de o variabilă reală.

**T e o r e m ă.** Dacă  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  este o transformare regulată într-o vecinătate  $U$  a unui punct interior  $x_0 \in E$ , atunci:

- 1) există o vecinătate  $U_0 \subset U$  a lui  $x_0$  și o vecinătate  $V_0$  a lui  $y_0 = f(x_0)$ , astfel încât restricția lui  $f$  la  $U_0$  este o aplicație biunivocă a lui  $U_0$  pe  $V_0$ ;
- 2) aplicația reciprocă  $\varphi: V_0 \rightarrow U_0$  a restricției lui  $f$  la  $U_0$  este o transformare regulată în punctul  $y_0$ ;
- 3) avem

$$\frac{D(\varphi(y_0))}{D(y)} = \frac{1}{\frac{D(f(x_0))}{D(x)}}.$$

**Demonstrație.** Să considerăm funcția vectorială

$$F(x, y) = f(x) - y$$

definită pentru  $(x, y) \in E \times R^n$ , cu valori în  $R^n$ . Pentru componentele reale  $F_1, F_2, \dots, F_n$  ale lui  $F$  avem

$$F_i(x, y) = f_i(x) - y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Vom arăta că funcția vectorială  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$  îndeplinește condițiile ca pentru ecuația  $F(x, y) = 0$  (adică ecuația  $f(x) = y$ ) să poată fi rezolvată în raport cu  $x$ .

Să observăm că  $(x_0, y_0)$  este punct interior al mulțimii  $E \times R^n$ , deoarece  $x_0$  este punct interior al lui  $E$ , iar  $y_0$  este punct interior al lui  $R^n$ .

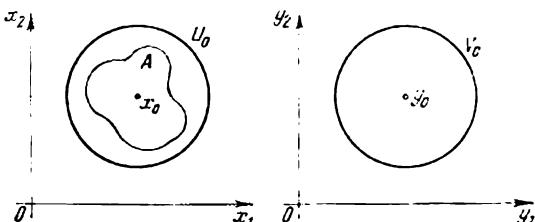


Fig. 160

Într-adevăr, deoarece  $f$  este regulată în vecinătatea  $U$  a lui  $x_0$ , există derivatele parțiale  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  continue pe  $U$ , și  $\frac{D(f)}{D(x)} = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0$  pe  $U$ .

Fie  $V$  o vecinătate oarecare a lui  $y_0$ . Atunci  $U \times V$  este o vecinătate a lui  $(x_0, y_0)$ , și pentru  $(x, y) \in U \times V$  avem  $\frac{\partial F_i(x, y)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ ,  $\frac{\partial F_i(x, y)}{\partial y_j} = -\delta_{ij}$ , ( $\delta_{ii} = 1$ ,  $\delta_{ij} = 0$  pentru  $i \neq j$ ).

Derivatele  $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$  sunt constante, deci sunt continue; derivatele  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$  sunt de asemenea continue, pe  $U \times V$ , deoarece pentru  $(x, y) \in U \times V$  avem:

$$\lim_{\substack{x' \rightarrow x \\ y' \rightarrow y}} \frac{\partial F_i(x', y')}{\partial x_j} = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial f_i(x')}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i(x, y)}{\partial x_j}.$$

3)  $\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0$  în punctul  $(x_0, y_0)$ , deoarece

$$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$$

și ultimul determinant este  $\neq 0$  pentru  $x \in U$  (și  $y$  oarecare).

Conform teoremei relative la funcțiile vectoriale implicate, există o vecinătate  $U' \times V_0 \subset U \times V$  a lui  $(x_0, y_0)$ , astfel încât, pentru orice punct  $y \in V_0$ , există un punct unic  $x = \phi(y) \in U'$ , astfel ca să avem  $F(x, y) = 0$ , adică  $f(x) - y = 0$  sau  $f(x) = y$ . Aceasta înseamnă să fiecare punct  $y \in V_0$  este imaginea  $f(x)$  a unui singur punct  $x \in U'$ , deci  $y_0$  este punct interior al mulțimii  $f(U')$ . Punctul 1 este astfel demonstrat.

De aici rezultă că  $f$  este biunivocă pe mulțimea  $U_0 = f^{-1}(V_0) \subset U'$ , deoarece dacă  $x', x'' \in U_0$ , atunci  $f(x') \in V_0$  și  $f(x'') \in V_0$  și din egalitatea  $f(x') = f(x'') = y$  rezultă atunci, pe baza celor de mai sus, că există un singur  $x \in U'$  astfel ca  $f(x) = y$ ; atunci  $x' = x$  și  $x'' = x$ , deci  $x' = x''$  și deci  $f$  este biunivocă pe  $U_0$ .

$$1) F(x_0, y_0) = f(x_0) - y_0 = 0.$$

2) Funcțiile  $F_i$  au derivele parțiale  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ ,  $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ , continue într-o vecinătate a lui  $(x_0, y_0)$ .

Deoarece  $f$  este continuă în  $x_0$ , vecinătății  $U'$  a lui  $y_0 = f(x_0)$  îi corespunde o vecinătate  $U''$  a lui  $x_0$ , astfel ca  $f(U'') \subset V_0$ . Rezultă că  $U'' \subset U_0$  și deci  $x_0$  este punct interior al lui  $A$ . Cu aceasta punctul 1 este demonstrat.

Funcția  $\varphi(y) : V_0 \rightarrow U_0$ , care a rezultat mai sus (din teorema funcțiilor vectoriale implicate), are derivate parțiale continue pe  $V_0$  și verifică egalitățile

$$\varphi(y_0) = x_0 \text{ și } F(\varphi(y), y) = 0 \text{ pentru } y \in V_0, \text{ adică:}$$

$$f(\varphi(y)) = y \text{ pentru } y \in V_0.$$

Rezultă că  $\varphi$  este inversa funcției biunivoce  $f : U_0 \rightarrow V_0$ .

Pentru a arăta că  $\varphi$  este o transformare regulată pe  $V_0$  rămîne de arătat că determinantul său funcțional este  $\neq 0$  pe  $V_0$ .

Pentru aceasta plecăm de la egalitatea vectorială

$$f(\varphi(y)) = y, y \in V_0$$

sau de la egalitățile scalare

$$f_i(\varphi_1(y_1, \dots, y_n), \dots, \varphi_n(y_1, \dots, y_n)) = y_i, i = 1, 2, \dots, n$$

pe care le derivăm în raport cu  $y_j$ , după regula de derivare a funcțiilor compuse:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_j} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_j} = \delta_{ij},$$

adică

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j} = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n.$$

De aici rezultă că produsul matricelor  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)$  și  $\left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j} \right)$  este matricea unitate ( $\delta_{ij}$ ). Dar determinantul unui produs de matrice este egal cu produsul determinantelor matricelor:

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right| \cdot \left| \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j} \right| = |\delta_{ij}| = 1.$$

Pe de altă parte, determinantul matricelor  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right)$  și  $\left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_j} \right)$  sunt, respectiv, iacobienii  $\frac{D(f)}{D(x)}$  și  $\frac{D(\varphi)}{D(y)}$ .

Așadar :

$$\frac{D(f)}{D(x)} \cdot \frac{D(\varphi)}{D(y)} = 1.$$

De aici rezultă că

$$\frac{D(\varphi)}{D(y)} \neq 0 \text{ pe } V_0,$$

deci  $\varphi$  este o transformare regulată pe  $V_0$  și că

$$\frac{D(\varphi)}{D(y)} = \frac{1}{\frac{D(f)}{D(x)}}.$$

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

**Corolar.** Dacă  $f$  este o transformare regulată pe o mulțime deschisă  $G \subset E$ , atunci  $f(G)$  este deschisă.

Într-adevăr, pentru orice punct  $x \in G$ , punctul  $f(x)$  este punct interior al mulțimii valorilor  $f(G)$ , deci această mulțime este formată numai din puncte interioare, și deci este deschisă.

**Observație.** Dacă  $f$  este regulată pe o mulțime deschisă  $G \subset E$ , nu rezultă că  $f$  este biunivocă pe  $G$ . Teorema afirmă, numai, că fiecare punct  $x \in G$  are o vecinătate  $V_x$  pe care funcția  $f$  este biunivocă. Se spune că funcția  $f$  este local biunivocă pe o mulțime  $G$ , dacă fiecare punct din  $G$  are o vecinătate pe care  $f$  este biunivocă.

Așadar, o transformare regulată este local biunivocă, dar nu neapărat biunivocă pe întreaga mulțime  $G$ .

*Exemplu.* 1) Transformarea

$$x = \rho \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

definită pentru  $\rho \in R$  și  $\varphi \in R$  are determinantul funcțional:

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \cos \varphi \\ \rho \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} = -\rho.$$

Transformarea este regulată în orice punct  $(\rho, \varphi)$  cu  $\rho \neq 0$ . Această transformare nu este însă biunivocă pe mulțimea  $\{(\rho, \varphi) \mid \rho \neq 0\}$ . Într-adevăr, două puncte diferite  $(\rho, \varphi)$  și  $(\rho, \varphi + 2k\pi)$ ,  $k \neq 0$  intreg, au aceeași imagine prin transformarea de mai sus.

În vecinătatea unui punct  $(\rho_0, \varphi_0)$ , cu  $\rho_0 \neq 0$ , transformarea este biunivocă și admite o transformare inversă.

Să calculăm derivatele lui  $\rho$  și  $\varphi$  în raport cu  $x$  și  $y$  fără a rezolva sistemul de mai sus în raport cu  $\rho$  și  $\varphi$ .

Să derivăm în raport cu  $x$  cele două ecuații:

$$1 = \frac{\partial \rho}{\partial x} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial x} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

De aici:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{\rho}.$$

În mod analog, derivind ecuațiile de mai sus în raport cu  $y$ , obținem:

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{\rho}.$$

Fie  $E$  și  $F$  două mulțimi din  $R^n$ . Pentru a simplifica expunerea vom presupune că  $E$  și  $F$  sunt deschise, deci sunt formate numai din puncte interioare. Fie apoi funcțiile vectoriale  $u(x) : E \rightarrow F$  și  $\varphi(u) : F \rightarrow R^n$ , și funcția compusă  $f(x) = \varphi(u(x)) : E \rightarrow R^n$ .

Teorema următoare generalizează teorema de derivare a funcțiilor compuse de o variabilă.

**Teoremă.** Dacă  $u(x)$  este o transformare regulată într-un punct  $x_0 \in E$  iar  $\varphi(u)$  este o transformare regulată în punctul corespunzător  $u_0 = u(x_0) \in F$ , atunci  $f = \varphi \circ u$  este o transformare regulată în punctul  $x_0$  și

$$\frac{D(f)}{D(x)} = \frac{D(\varphi)}{D(u)} \cdot \frac{D(u)}{D(x)},$$

unde  $\frac{D(f)}{D(x)}$  și  $\frac{D(u)}{D(x)}$  se calculează în punctul  $x_0$ , iar  $\frac{D(\varphi)}{D(u)}$  se calculează în punctul  $u_0 = u(x_0)$ .

Deoarece  $u(x)$  este o transformare regulată în  $x_0$ , există o vecinătate  $V$  a lui  $x_0$ , în care componentele reale  $u_1, u_2, \dots, u_n$  ale lui  $u$  au derivate parțiale continue și  $\frac{D(u)}{D(x)} \neq 0$ . Deoarece  $\varphi(u)$  este o transformare regulată în punctul  $u_0$ , există o vecinătate  $U$  a lui  $u_0$  în care componentele reale  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  ale lui  $\varphi$  au derivate parțiale continue și  $\frac{D(\varphi)}{D(u)} \neq 0$ . Putem alege  $U$  și  $V$  astfel ca  $u(x) \in U$  pentru  $x \in V$ .

Rezultă atunci că funcțiile reale compuse

$$f_1(x) = \varphi_1(u(x)) = \varphi_1(u_1(x_1, \dots, x_n), u_2(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n))$$

$$f_2(x) = \varphi_2(u(x)) = \varphi_2(u_1(x_1, \dots, x_n), u_2(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n))$$

...

$$f_n(x) = \varphi_n(u(x)) = \varphi_n(u_1(x_1, \dots, x_n), u_2(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n))$$

au derivate parțiale continue pe  $V$ . Dar  $f_1, f_2, \dots, f_n$  sunt componente reale ale funcției vectoriale compuse  $f(x) = \varphi(u(x))$ . Pentru a arăta că  $f$  este regulată în  $x_0$ , rămîne de arătat că  $\frac{D(f)}{D(x)} \neq 0$  în  $x_0$ . Să derivăm funcția  $f_i(x)$  în raport cu  $x_j$ , ca pe o funcție compusă, din egalitatea de mai sus

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi_i(u(x))}{\partial u_1} \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \varphi_i(u(x))}{\partial u_n} \frac{\partial u_n(x)}{\partial x_j},$$

adică :

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_i(u(x))}{\partial u_k} \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad x \in V.$$

Acstea egalități implică următoarea egalitate de matrice :

$$\left( \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right) = \left( \frac{\partial \varphi_i(u(x))}{\partial u_k} \right) \left( \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_j} \right), \quad x \in V.$$

De aici rezultă o egalitate asemănătoare pentru determinanții acestor matrice, care sunt determinanți funcționali:

$$\frac{D(f(x))}{D(x)} = \frac{D(\varphi(u(x)))}{D(u)} \cdot \frac{D(u(x))}{D(x)}, \quad x \in V.$$

Deoarece determinanții din membrul drept sunt  $\neq 0$  în punctul  $x_0$ , rezultă că  $\frac{D(f)}{D(x)} \neq 0$  în  $x_0$ , deci  $f$  este o transformare regulată în  $x_0$ .

Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

#### 4. Dependență funcțională

Fie  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ ,  $m$  funcții reale definite pe o mulțime  $E \subset R^n$ .

**D e fin i t i e.** Spunem că o funcție reală  $\varphi: E \rightarrow R$  depinde de funcțiile  $f_1, f_2, \dots, f_m$  pe o mulțime  $A \subset E$ , dacă există o funcție reală de  $m$  variabile  $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_m)$  definită pe o mulțime  $B \subset R^m$ , astfel încât să avem

$$\varphi(x) = \Phi(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

pentru orice  $x \in A$ .

**O b s e r v a t i i .** 1° Funcția  $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_m)$  poate fi constantă în raport cu unele variabile. În acest caz,  $\varphi$  depinde de funcțiile  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , dacă și numai dacă depinde de o parte din aceste funcții.

2° Dacă funcția  $\varphi$  este constantă, ea depinde de orice sistem de funcții  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Într-adevăr, luând funcția  $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_n) = \text{constant}$ , avem

$$\varphi(x) = \Phi(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = \text{const.}$$

**E x e m p l e.** 1) Fie  $f(x)$  o aplicație biunivocă a unui interval  $I$  pe un interval  $J$ , și  $f: J \rightarrow I$  funcția sa inversă. Avem:  $f(f(x)) = x$  pentru orice  $x \in I$ . Dacă  $\varphi(x)$  este o funcție reală definită pe  $I$ , avem

$$\varphi(x) = \varphi(f(f(x))) = (\varphi \circ f)(f(x)), \quad x \in I.$$

Notind  $\Phi(y) = \varphi \circ f(y)$ , pentru  $y \in J$ , avem

$$\varphi(x) = \Phi(f(x)) \text{ pentru } x \in I.$$

Am demonstrat astfel că: orice funcție  $\varphi: I \rightarrow R$  depinde de orice funcție biunivocă  $f: I \rightarrow R$ .

2) Fie funcțiile:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad g(x, y, z) = x + y + z, \quad h(x, y, z) = xy + yz + zx$$

definite pe  $R^3$ . Avem, pentru orice punct  $(x, y, z) \in R^3$ ,

$$g^2(x, y, z) = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = f(x, y, z) + 2h(x, y, z).$$

De aici :

$$f = g^3 - 2h,$$

deci  $f$  depinde pe  $R^3$  de funcțiile  $g$  și  $h$ , și

$$h = \frac{1}{2} (g^3 - f).$$

Să observăm că funcția  $g$  nu depinde de funcțiile  $f$  și  $h$ . Într-adevăr, pentru  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ , avem:  $f(1, 0, 0) = 1$ ,  $g(1, 0, 0) = 1$ ,  $h(1, 0, 0) = 0$ ; pentru  $x = -1$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ , avem:  $f(-1, 0, 0) = 1$ ,  $g(-1, 0, 0) = -1$ ,  $h(-1, 0, 0) = 0$ .

Oricare ar fi funcția  $\Phi(u, v)$ , avem

$$\Phi(f(1, 0, 0), h(1, 0, 0)) = \Phi(1, 0) = \Phi(f(-1, 0, 0), h(-1, 0, 0))$$

și deci nu putem avea

$$g(x, y, z) = \Phi(f(x, y, z), h(x, y, z))$$

pentru orice  $(x, y, z) \in R^3$ , deoarece  $g(1, 0, 0) \neq g(-1, 0, 0)$ .

3) Funcția  $f(x) = x^3$  depinde de funcția  $g(x) = x^2$ , pe  $R$ , deoarece

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2)^2} = \sqrt[3]{(g(x))^2}, \quad x \in R.$$

Funcția  $g$  nu depinde însă de  $f$  pe mulțimea  $R$ .

Într-adevăr,  $f(-1) = f(1) = 1$ , în timp ce  $g(-1) = -1$  și  $g(1) = 1$ , deci, oricare ar fi funcția  $\Phi(y)$ , avem

$$\Phi(f(-1)) = \Phi(1) = \Phi(f(1)),$$

în timp ce  $g(-1) \neq g(1)$  și deci nu putem avea

$$g(x) = \Phi(f(x))$$

pentru orice  $x \in R$ .

Să observăm însă că pentru  $x \geq 0$  avem  $x = \sqrt{x^2}$  și deci

$$g(x) = x^2 = (\sqrt{x^2})^2 = (\sqrt{f(x)})^2,$$

adică funcția  $g$  depinde de funcția  $f$  pe semidreapta  $(0, +\infty)$ .

**D e f i n i t i e.** Spunem că funcțiile reale  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ , definite pe o mulțime  $E \subset R^n$ , sunt în dependență funcțională pe o mulțime  $A \subset E$ , dacă cel puțin una din ele depinde de celelalte pe mulțimea  $A$ .

Spunem că funcțiile reale  $f_1, f_2, \dots, f_m$  sunt independente într-un punct interior  $x_0 \in E$ , dacă nici una din funcții nu depinde de celelalte, în nici o vecinătate a lui  $x_0$ . Funcțiile  $f_1, f_2, \dots, f_m$  sunt independente pe o mulțime deschisă  $G \subset E$ , dacă sunt independente în orice punct  $x \in G$ .

**Exemplu.** Funcțiile  $f(x) = x^2$  și  $g(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

definite pe  $R$ , sunt independente în jurul originii.

Într-adevăr, oricare ar fi funcția  $\Phi(y)$ , avem

$$\Phi(f(-x)) = \Phi(x^2) = \Phi(f(x)),$$

în timp ce pentru  $x \neq 0$ , avem  $g(-x) \neq g(x)$ . Așadar, nu putem avea

$$g(x) = \Phi(f(x)) \text{ pentru } x \neq 0.$$

Aceasta înseamnă că  $g$  nu depinde de  $f$  în nici o vecinătate a originii.

De asemenea, oricare ar fi funcția  $\Phi(y)$ , avem

$$\Phi(g(x)) = \begin{cases} \Phi(-1), & x \leq 0 \\ \Phi(1), & x > 0 \end{cases}$$

deci funcția compusă  $\Phi(g(x))$  ia numai două valori, în orice vecinătate a originii, în timp ce mulțimea valorilor funcției  $f(x) = x^2$  este infinită, în orice vecinătate a originii. Așadar, nu putem avea

$$f(x) = \Phi(g(x))$$

în nici o vecinătate a originii, deci  $f$  nu depinde de  $g$  în nici o vecinătate a originii.

Rezultă că  $f$  și  $g$  sunt independente în jurul originii.

**Propozitie.** Dacă funcțiile reale  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ , definite pe o mulțime  $E \subset R^n$ , sunt în dependență funcțională pe o mulțime  $A \subset E$ , atunci imaginea mulțimii  $A$  în spațiul  $R^m$  prin funcția vectorială  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  nu conține nici un punct interior.

**Demonstratie.** Mulțimea  $B = f(A)$  este formată din toate punctele de forma  $y = f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$  cind  $x$  parcurge mulțimea  $A$ . Deoarece funcțiile  $f_1, f_2, \dots, f_m$  sunt în dependență funcțională pe mulțimea  $A$ , una din aceste funcții, de exemplu  $f_m$ , depinde de celelalte funcții pe mulțimea  $A$ : există o funcție reală

$$\Phi(y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$$

astfel ca

$$f_m(x) = \Phi(f_1(x), \dots, f_{m-1}(x)) \text{ pentru } x \in A.$$

Rezultă că orice punct  $y = (y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m)$  din  $B = f(A)$ , trebuie să verifice egalitatea

$$y_m = \Phi(y_1, y_2, \dots, y_{m-1}),$$

deoarece există un punct  $x \in A$  astfel ca  $y = f(x)$ , adică astfel ca

$$y_1 = f_1(x), \dots, y_m = f_m(x).$$

Atunci, pentru orice  $\varepsilon > 0$ , avem  $y_m + \varepsilon \neq y_m$ , deci

$$y_m + \varepsilon \neq \Phi(y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$$

și deci punctul  $(y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m + \varepsilon)$  nu mai aparține lui  $B$ .

Aceasta înseamnă că orice vecinătate  $V$  a punctului  $y = (y_1, \dots, y_{m-1}, y_m) \in B$  conține puncte de forma  $(y_1, \dots, y_{m-1}, y_m + \varepsilon)$  din afară lui  $B$ ; rezultă că punctul  $y = (y_1, \dots, y_{m-1}, y_m)$  nu este punct interior al lui  $B$ . Cum punctul  $y$  a fost ales arbitrar, deducem că  $B$  nu are nici un punct interior.

**Theoremă.** Fie funcțiile reale  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  definite pe o mulțime  $E \subset R^n$ . Dacă aceste funcții au derivate parțiale într-o vecinătate a unui punct interior  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in E$  și dacă rangul matricei funcționale  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ , în punctul  $x_0$ , este egal cu numărul funcțiilor, atunci funcțiile sunt independente în punctul  $a$ .

Conform ipotezei, matricea funcțională

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

are în punctul  $x_0$  rangul  $m$ . Aceasta înseamnă că cel puțin un determinant de ordinul  $m$  este  $\neq 0$  în punctul  $x_0$ . Rezultă îde aici că  $m \leq n$ .

Trebuie să arătăm că, în orice vecinătate  $V$  a punctului  $a$ , nici una din funcții nu depinde de celelalte.

Să presupunem, prin absurd, că există o vecinătate  $V$  a lui  $a$ , astfel încât, una din funcții, de exemplu  $f_m$ , depinde pe mulțimea  $V$  de celelalte funcții. Conform propoziției precedente, imaginea mulțimii  $V$ , prin funcția vectorială  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ , nu conține nici un punct interior în  $R^m$ .

În particular, punctul  $b = f(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  nu este punct interior al mulțimii  $f(V)$ . Pe de altă parte, să presupunem că determinanțul funcțional de ordinul  $m$

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}$$

este  $\neq 0$  în punctul  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n)$ . Fixând  $x_{m+1} = a_{m+1}, \dots, x_n = a_n$ , funcția vectorială de  $m$  variabile

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_m, a_{m+1}, \dots, a_n)$$

este o transformare regulată în punctul  $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in E \cap R^m$ . Atunci punctul  $b = F(a_1, a_2, \dots, a_m) = f(a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n)$  este un punct interior al imaginii, prin funcția  $F$ , a unei vecinătăți  $U$  a punctului  $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in E \cap R^m$  pe care o putem alege astfel ca  $(x_1, x_2, \dots, x_m, a_{m+1}, \dots, a_n) \in V$  pentru  $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in U$ . Rezultă atunci că  $F(U) \subset f(V)$  și deci  $b$  este punct interior și al mulțimii  $f(V)$ . Am ajuns astfel la o contradicție. Rezultă atunci că funcțiile  $f_1, \dots, f_m$  sunt independente în punctul  $x_0$ .

**C o r o l a r .** Dacă  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  este o transformare regulată într-un punct  $a \in E$ , atunci funcțiile reale  $f_1, f_2, \dots, f_m$  sunt independente în punctul  $a$ .

Într-adevăr,  $\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \neq 0$  în punctul  $a$ , deci rangul matricei funcționale este egal cu numărul funcțiilor, și deci funcțiile  $f_1, \dots, f_m$  sunt independente în punctul  $a$ .

**T e o r e m ā.** Fie funcțiile reale  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  definite pe o mulțime  $E \subset R^n$  și un punct interior  $a \in E$ .

Dacă funcțiile  $f_i$  au deriveate parțiale  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  continue într-o vecinătate  $U$  a lui  $a$  și dacă rangul matricei funcționale  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$  este egal cu  $s \leq m$  pe vecinătatea  $U$ , atunci printre funcțiile  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  există  $s$  funcții independente pe  $U$ , iar celelalte  $m - s$  funcții depind de acestea.

**Demonstrație.** Deoarece rangul matricei funcționale  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$  este egal cu  $s$  pe mulțimea  $U$ , există un determinant de ordin  $s$ , care nu se anulează pe  $U$ . Pentru a face o alegere, să presupunem că :

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_s)}{D(x_1, x_2, \dots, x_s)} \neq 0 \text{ pe } U.$$

Conform teoremei precedente, funcțiile  $f_1, f_2, \dots, f_s$  sunt independente pe mulțimea  $U$ . Să considerăm sistemul

$$(1) \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_s; x_{s+1}, \dots, x_n; y_1, \dots, y_s) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_s; x_{s+1}, \dots, x_n) - y_1 = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_s(x_1, \dots, x_s; x_{s+1}, \dots, x_n; y_1, \dots, y_s) = f_s(x_1, x_2, \dots, x_s; x_{s+1}, \dots, x_n) - y_s = 0 \end{cases}$$

unde funcțiile  $F_1, \dots, F_s$  sunt definite pe  $E \times R^s$ . Să notăm :

$$\begin{aligned} b_1 &= f_1(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \\ b_s &= f_s(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ b &= (b_1, b_2, \dots, b_s) \end{aligned}$$

și să arătăm să sistemul (1) poate fi rezolvat în raport cu variabilele  $x_1, \dots, x_s$ , în jurul punctului  $(a, b) = (a_1, \dots, a_s; a_{s+1}, \dots, a_n; b_1, \dots, b_s)$ . Acesta este un punct interior al mulțimii  $E \times R^s$ , deoarece  $(a_1, \dots, a_n)$  este punct interior al lui  $E$  și  $(b_1, \dots, b_s)$  este interior lui  $R_s$ . Avem apoi :

$$F_i(a_1, \dots, a_s; a_{s+1}, \dots, a_n; b_1, \dots, b_s) = f_i(a_1, \dots, a_s; a_{s+1}, \dots, a_n) - b_i = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, s.$$

Funcțiile  $F_i$  au deriveate parțiale  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$  și  $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$  continue într-o vecinătate a punctului  $(a, b)$ , ceea ce rezultă din egalitățile :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial F_i}{\partial y_j} &= -\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

Atunci :

$$\frac{D(F_1, \dots, F_s)}{D(x_1, \dots, x_s)} = \frac{D(f_1, \dots, f_s)}{D(x_1, \dots, x_s)} \neq 0$$

într-o vecinătate a punctului  $(a, b)$ .

Conform teoremei relative la sistemele de funcții implicate, există o vecinătate  $U^s$  a punctului  $(a_1, \dots, a_s)$  și o vecinătate  $U^{n-s} \times V^s$  a punctului  $(a_{s+1}, \dots, a_n; b_1, \dots, b_s)$ , astfel încât, pentru orice punct  $(y_1, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n) \in V^s \times U^{n-s}$ , sistemul (1) are o soluție și numai una  $(x_1, \dots, x_s) \in U^s$ :

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_s = \varphi_s(y_1, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n). \end{cases}$$

Funcțiile  $\varphi_1, \dots, \varphi_s$  au derivate parțiale continue pe  $V^s \times U^{n-s}$ .

Să scriem că (2) este o soluție a sistemului (1) :

$$(3) \quad \begin{cases} f_1(\varphi_1(y_1, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_s(y_1, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n); x_{s+1}, \dots, x_n) - y_1 = 0 \\ \dots \\ f_s(\varphi_1(y_1, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_s(y_1, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n); x_{s+1}, \dots, x_n) - y_s = 0, \end{cases}$$

pentru  $(y_1, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n) \in V^s \times U^{n-s}$ .

Aveam de asemenea :

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(f_1(x_1, \dots, x_s; x_{s+1}, \dots, x_n), \dots, f_s(x_1, \dots, x_s; x_{s+1}, \dots, x_n); x_{s+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_s = \varphi_s(f_1(x_1, \dots, x_s; x_{s+1}, \dots, x_n), \dots, f_s(x_1, \dots, x_s; x_{s+1}, \dots, x_n); x_{s+1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

pentru  $(x_{s+1}, \dots, x_n) \in U^{n-s}$  și  $(x_1, \dots, x_s)$  într-o vecinătate  $U_0^s$  a punctului  $(a_1, \dots, a_s)$ , aleasă astfel ca imaginea sa prin funcția continuă  $f = (f_1, \dots, f_s)$  să fie conținută în  $V^s$ .

Să presupunem că  $s < m$ ; fie  $r$  un număr natural astfel ca  $a < r < m$ . Să arătăm că funcția  $F$ , depinde de funcțiile  $f_1, f_2, \dots, f_s$  pe o vecinătate a lui  $a$ . Pentru aceasta, să considerăm funcția compusă

$$(5) \quad \begin{aligned} F_r(y_1, y_2, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n) &= \\ &= f_r(\varphi_1(y_1, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_s(y_1, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n); x_{s+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Vom arăta că funcția  $F_r$  este constantă în raport cu variabilele  $x_{s+1}, \dots, x_n$ . Fie  $s < k < n$ . Să derivăm în raport cu variabila  $x_k$ , în egalitățile (2) și (5) :

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_k} = \frac{\partial f_r}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f_r}{\partial x_s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f_r}{\partial x_s} \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k} + \frac{\partial f_r}{\partial x_k}. \end{cases}$$

Toate derivatele  $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}$  sunt calculate în punctul  $(y_1, \dots, y_s, x_{s+1}, \dots, x_n)$ , iar derivatele  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ,  $\frac{\partial f_r}{\partial x_j}$ , în punctul corespunzător  $(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_n)$ , unde  $x_i = \varphi_i(y_1, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ .

Pentru ca sistemul (6) de  $s + 1$  ecuații cu  $s$  necunoscute  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k}$  să fie compatibil, trebuie ca determinantul sistemului să fie nul:

$$\left| \begin{array}{ccccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_s} & \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \frac{\partial f_s}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s} & \frac{\partial f_s}{\partial x_k} \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_1} & \frac{\partial F_r}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_r}{\partial x_s} & \frac{\partial F_r}{\partial x_k} - \frac{\partial f_r}{\partial x_k} \end{array} \right| = 0$$

sau:

$$\left| \begin{array}{c|cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & & \\ \hline \frac{D(f_1, \dots, f_s)}{D(x_1, \dots, x_s)} & \dots & - \frac{D(f_1, \dots, f_s)}{D(x_1, \dots, x_s)} \frac{\partial F_r}{\partial x_k} \\ \hline \frac{\partial f_s}{\partial x_k} & & \\ \hline \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_s} \frac{\partial f_r}{\partial x_k} \end{array} \right| = 0.$$

Însă, prin ipoteză, primul determinant al acestei relații este nul pe  $U$ , iar  $\frac{D(f_1, \dots, f_s)}{D(x_1, \dots, x_s)} \neq 0$  pe  $U$ . Rezultă că:

$$\frac{\partial F_r(y_1, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n)}{\partial x_k} = 0,$$

deci  $F_r$  nu depinde de variabila  $x_k$ , cu  $k > s$ . Să notăm atunci

$$(7) \quad \Phi_r(y_1, y_2, \dots, y_s) = F_r(y_1, y_2, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n) = \\ = f_r(\varphi_1(y_1, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_s(y_1, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n); x_{s+1}, \dots, x_n)$$

pentru  $(y_1, y_2, \dots, y_s) \in V^s$ . Lunid acum  $y_1, \dots, y_s$  de forma

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_s; x_{s+1}, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \dots, x_s; x_{s+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_s = f_s(x_1, \dots, x_s; x_{s+1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

pentru  $(x_1, \dots, x_s) \in U_s^s$  și  $(x_{s+1}, \dots, x_n)$  oarecare în  $U^{n-s}$  și înlocuind în  $\Phi_s(y_1, y_2, \dots, y_s)$ , apoi înținând seama că în acest caz

$$\varphi_1(y_1, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n) = x_1$$

$$\varphi_2(y_1, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n) = x_2$$

.....

$$\varphi_s(y_1, \dots, y_s; x_{s+1}, \dots, x_n) = x_n$$

și făcînd aceste înlocuiri și în al doilea membru al egalității (7), obținem:

$\Phi_r(f_1(x_1, \dots, x_s; x_{s+1}, \dots, x_n), \dots, f_s(x_1, \dots, x_s; x_{s+1}, \dots, x_n)) =$   
 $= f_r(x_1, x_2, \dots, x_s; x_{s+1}, \dots, x_n)$ , pentru  $(x_1, \dots, x_s; x_{s+1}, \dots, x_n) \in U_s^s \times U^{n-s}$ ,  
adică

$$f_r = \Phi_r(f_1, \dots, f_s) \text{ pe } U_s^s \times U^{n-s}.$$

Aceasta înseamnă că  $f_r$  depinde de  $f_1, \dots, f_s$  pe o vecinătate a punctului  $a = (a_1, \dots, a_n)$  și cu aceasta teorema este complet demonstrată.

**C o r o l a r.** Dacă numărul funcțiilor  $f_1, \dots, f_m$  este mai mare decît numărul variabilelor  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , atunci funcțiile nu pot fi independente.

Într-adevăr, avem  $n < m$ , iar rangul matricei funcționale poate fi cel mult  $n$ , deci mai mic decît numărul funcțiilor. Se aplică teorema precedentă.

*Exemplu.* 1) Fie funcțiile  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$g(x, y, z) = x + y + z$$

$$h(x, y, z) = xy + yz + xz.$$

Matricea funcțională este:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix}.$$

Determinantul de ordinul 3 al acestei matrice este identic nul:

$$\frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)} \equiv 0,$$

deci rangul matricei este  $< 3$ . Rezultă că funcțiile  $f, g, h$  nu sunt independente.

Matricea formată cu derivatele primelor două funcții este

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

și are rangul 2 în fiecare punct diferit de origine. Rezultă că cele două funcții  $f$  și  $g$  sunt independente în orice domeniu care nu conține originea.

2) Să considerăm funcțiile liniare

$$f(x, y, z) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,$$

$$g(x, y, z) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z,$$

$$h(x, y, z) = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.$$

Determinantul funcțional al acestor funcții este

$$\frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Dacă determinantul este  $\neq 0$ , cele trei funcții liniare sunt independente.

Dacă determinantul = 0 dar, de exemplu,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

atunci funcțiile  $f$  și  $g$  sunt independente, dar  $h$  depinde liniar de  $f$  și  $g$ .

Dacă toți minorii de ordinul doi sunt nuli, dar, de exemplu,  $a_{11} \neq 0$ , atunci funcțiile  $g$  și  $h$  depind liniar de funcția  $f$ .

## 5. Extreme condiționate

Fie  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  o funcție reală definită pe o mulțime  $E \subset \mathbb{R}^n$  și fie  $A \subset E$ .

Spunem că funcția  $f(x)$  are într-un punct  $a \in A$  un *extrem relativ la mulțimea A*, dacă restricția funcției  $f(x)$  la mulțimea  $A$  are în punctul  $a$  un extrem obișnuit.

A spune că funcția  $f(x)$  are în punctul  $a$  un maxim (respectiv un minim) relativ la mulțimea  $A$  înseamnă că există o vecinătate  $V$  a lui  $a$ , astfel încât să avem

$$f(x) \geq f(a) \text{ respectiv } f(x) \leq f(a)$$

pentru orice punct  $x \in V \cap A$ .

Extremele funcției  $f(x)$  relative la o submulțime  $A \subset E$  se numesc *extreme condiționate*.

Mai departe, vom considera un sistem de  $k < n$  funcții reale  $F_1(x)$ ,  $F_2(x), \dots, F_k(x)$  definite pe  $E$ , iar mulțimea  $A$  va fi definită ca mulțime a soluțiilor sistemului

$$(1) \quad \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Așadar,  $A = \{x | x \in E, F_1(x) = 0, F_2(x) = 0, \dots, F_n(x) = 0\}$ . În acest caz extretele funcției  $f(x)$  relative la mulțimea  $A$  se mai numesc *extreme condiționate de sistemul* (1). A considera restricția funcției  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  la mulțimea  $A$  înseamnă a considera valorile funcției  $f$  numai pentru acele valori ale argumentelor  $x_1, x_2, \dots, x_n$  care verifică sistemul (1). Aceasta se exprimă spunând că cele  $n$  variabile  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sunt legate între ele prin cele  $k$  relații ale sistemului (1); extretele condiționate ale funcției  $f(x)$  se mai numesc, de aceea, *extreme cu legături*.

Teoarema următoare dă condiții necesare de existență a punctelor de extrem condiționat.

**T e o r e m ā.** Fie  $a$  un punct care verifică sistemul (1). Să presupunem că funcția  $f(x)$  și funcțiile  $F_1(x), \dots, F_k(x)$  au derivate parțiale continue într-o vecinătate  $V$  a lui  $a$  și că matricea funcțională  $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$  are în punctul  $a$  rangul  $k$  (egal cu numărul relațiilor sistemului (1)).

Bacă  $a$  este punctul extrem al funcției  $f(x)$ , condiționat de sistemul (1), atunci există  $k$  numere  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  astfel încât să avem:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1(a)}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2(a)}{\partial x_1} + \dots + \lambda_k \frac{\partial F_k(a)}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial F_1(a)}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial F_2(a)}{\partial x_2} + \dots + \lambda_k \frac{\partial F_k(a)}{\partial x_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial F_1(a)}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial F_2(a)}{\partial x_n} + \dots + \lambda_k \frac{\partial F_k(a)}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

### Demonstrație

Deoarece matricea funcțională  $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$  are în punctul  $a$  rangul  $k$ , există un determinant funcțional de ordin  $k$  al acestei matrice,  $\neq 0$  în punctul  $a$ . Pentru a face o alegere, să presupunem că

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_k)}{D(x_1, x_2, \dots, x_k)} \neq 0 \text{ în punctul } a.$$

Sistemul (1) se poate rezolva în raport cu variabilele  $x_1, \dots, x_k$  în jurul punctului  $a = (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ . Într-adevăr, prin ipoteză avem  $F_1(a) = 0, F_2(a) = 0, \dots, F_n(a) = 0$ ; funcțiile  $F_1, \dots, F_k$  au derivate parțiale continue într-o vecinătate a lui  $a$ , iar iacobianul acestor funcții în raport cu variabilele  $x_1, \dots, x_k$  este  $\neq 0$  în punctul  $a$ . Conform teoremei relative la sistemele de funcții implicate, există o vecinătate  $V^k \subset A$  a punctului  $(a_1, \dots, a_k)$  în spațiul  $R^k$  și o vecinătate  $V^{n-k}$  a punctului  $(a_{k+1}, \dots, a_n)$

în spațiul  $R^{n-k}$ , astfel încât pentru orice punct  $(x_{k+1}, \dots, x_n) \in V^{n-k}$  sistemul (1) să aibă o soluție unică  $(x_1, \dots, x_k)$  în  $V^k$ :

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{k+1}, \dots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_{k+1}, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_k = \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_n). \end{cases}$$

Avem  $a_1 = \varphi_1(a_{k+1}, \dots, a_n)$ ,  $a_2 = \varphi_2(a_{k+1}, \dots, a_n)$ , ...,  $a_k = \varphi_k(a_{k+1}, \dots, a_n)$ .

Funcțiile  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  au deriveate parțiale continue pe mulțimea  $V^{n-k}$ . Să scriem că (3) este o soluție a sistemului (1):

pentru orice punct  $(x_{k+1}, \dots, x_n) \in V^{n-k}$  avem

$$(4) \quad \begin{cases} F_1(\varphi_1(x_{k+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_n); x_{k+1}, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(\varphi_1(x_{k+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_n); x_{k+1}, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_k(\varphi_1(x_{k+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_n); x_{k+1}, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Diferențialele acestor funcții sunt nule pe  $V^{n-k}$ , în particular în punctul  $(a_{k+1}, \dots, a_n)$

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} d\varphi_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} d\varphi_2 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_k} d\varphi_k + \frac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}} dx_{k+1} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} dx_n = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} d\varphi_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} d\varphi_2 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_k} d\varphi_k + \frac{\partial F_2}{\partial x_{k+1}} dx_{k+1} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n} dx_n = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} d\varphi_1 + \frac{\partial F_k}{\partial x_2} d\varphi_2 + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial x_k} d\varphi_k + \frac{\partial F_k}{\partial x_{k+1}} dx_{k+1} + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial x_n} dx_n = 0. \end{cases}$$

În (5),  $d\varphi_1, \dots, d\varphi_k$  reprezintă diferențialele funcțiilor  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  calculate în punctul  $(a_{k+1}, \dots, a_n)$ , iar  $dx_{k+1}, \dots, dx_n$  sunt variabile independente; derivele funcțiilor  $F_1, \dots, F_k$  sunt calculate în punctul  $(a_1, \dots, a_n)$ . Să considerăm acum funcția compusă

$$(6) \quad F(x_{k+1}, \dots, x_n) = f(\varphi_1(x_{k+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_n), x_{k+1}, \dots, x_n),$$

definită pentru  $(x_{k+1}, \dots, x_n) \in V^{n-k}$ . Deoarece funcția  $f(x_1, \dots, x_n)$  are în punctul  $a = (a_1, \dots, a_n)$  un extrem, condiționat de sistemul (1), funcția  $F(x_{k+1}, \dots, x_n)$  are un punctul  $(a_{k+1}, \dots, a_n)$  un extrem obișnuit.

Într-adevăr,  $a_1 = \varphi_1(a_{k+1}, \dots, a_n), \dots, a_k = \varphi_k(a_{k+1}, \dots, a_n)$  și dacă, de exemplu,  $a$  este un punct de maxim condiționat pentru  $f(x)$ , avem:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

pentru orice punct  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  care verifică sistemul (1), dintr-o anumită vecinătate a lui  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Atunci, pentru  $(x_{k+1}, \dots, x_n) \in V^{n-k}$ , luând valorile  $x_1, \dots, x_k$  date de sistemul (3), punctul  $(x_1, x_2, \dots, x_k; x_{k+1}, \dots, x_n)$  verifică sistemul (1) aşa cum rezultă din (4), iar inegalitatea precedentă se scrie, ţinând seama de (6),

$$F(x_{k+1}, \dots, x_n) \geq F(a_{k+1}, \dots, a_n),$$

deci  $(a_{k+1}, \dots, a_n)$  este punct de maxim pentru funcția  $F$ .

În acest caz diferențiala acestei funcții în punctul  $(a_{k+1}, \dots, a_n)$  este nulă :

$$(7) \quad dF = \frac{\partial f}{\partial x_1} d\varphi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d\varphi_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} d\varphi_k + \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} dx_{k+1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Și aici,  $d\varphi_1, \dots, d\varphi_k$  sunt diferențialele funcțiilor  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  în punctul  $(a_{k+1}, \dots, a_n)$ , iar  $dx_{k+1}, \dots, dx_n$  sunt variabile independente; derivatele funcției  $f$  sunt calculate în punctul  $(a_1, \dots, a_n)$ .

Ținând seama de ecuațiile (5) și (7), pentru orice sistem de numere  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  avem egalitatea :

$$(8) \quad \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_1} \right) d\varphi_1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_2} \right) d\varphi_2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right) d\varphi_k + \\ + \left( \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_{k+1}} \right) dx_{k+1} + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \right) dx_n = 0.$$

Vom alege numerele  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  să se anuleze :

$$(2') \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_2} = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_k} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_k} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_k} + \dots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_k} = 0 \end{cases}$$

derivatele fiind calculate în punctul  $a = (a_1, \dots, a_n)$ .

Acest lucru este posibil, deoarece determinantul coeficienților lui  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  din sistemul (2') este

$$\frac{D(F_1, \dots, F_k)}{D(x_1, \dots, x_k)},$$

calculat în punctul  $(a_1, \dots, a_n)$ , iar acesta este  $\neq 0$ . Cu aceste valori obținute pentru  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , egalitatea (8) se scrie (derivatele funcțiilor  $f, F_1, \dots, F_k$  fiind calculate în  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ):

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_{k+1}} \right) dx_{k+1} + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \right) dx_n = 0.$$

Pentru ca această egalitate să aibă loc pentru orice valori ale variabilelor independente  $dx_{k+1}, \dots, dx_n$  este necesar și suficient să se anuleze coeficienții acestor variabile:

$$(2'') \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_{k+1}} + \dots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_{k+1}} = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_n} + \dots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Egalitățile (2') și (2'') formează sistemul (2) de egalități ce trebuie demonstrat.

**O b s e r v a t i e.** Orice punct  $a = (a_1, \dots, a_n)$  care verifică sistemul (1), în care matricea funcțională  $\left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)$  are rangul  $k$ , și care verifică și sistemul (2) pentru anumite valori  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , se numește punct *staționar* al funcției  $f(x)$ , condiționat de sistemul (1); coeficienții  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  se numesc *multiplicatorii lui Lagrange*. Valorile  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  se schimbă o dată cu punctul staționar  $a$ .

Teorema de mai sus se poate enunța astfel:

*Orice punct de extrem condiționat este punct staționar condiționat.*

Afirmarea reciprocă nu este, în general, adeverată: există puncte staționare condiționate în care funcția nu are extreme condiționate.

Să observăm că în sistemul (2) apar derivatele parțiale ale funcției

$$f(x) + \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \dots + \lambda_k F_k(x)$$

definită pentru  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ .

Astfel, pentru o funcție  $f(x)$  cu derivatele parțiale continue pe o mulțime deschisă  $E \subset R^n$ , rezultă calea de urmat pentru aflarea punctelor staționare condiționate de sistemul (1) în care funcțiile  $F_1(x), \dots, F_k(x)$  au derivate parțiale continue pe  $E$ :

1) Se formează funcția ajutătoare

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x) + \lambda_1 F_1(x) + \lambda_2 F_2(x) + \dots + \lambda_k F_k(x),$$

cu coeficienții  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  nedeterminate.

2) Se formează sistemul de  $n + k$  ecuații

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)}{\partial x_2} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial \Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)}{\partial x_n} = 0 \\ F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ F_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right.$$

cu  $n + k$  necunoscute,  $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , și se caută soluțiile acestui sistem.

3) Dacă  $x_1, x_2, \dots, x_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k$  este o soluție a acestui sistem, atunci punctul  $(x_1, \dots, x_n)$  este punct staționar condiționat al funcției  $f(x)$ .

Printre punctele staționare condiționate astfel obținute se află și punctele de extrem condiționat ale funcției  $f(x)$ .

Vom căuta acum condiții suficiente care să ne permită să identificăm, dintre punctele staționare, unele puncte de extrem condiționat.

Fie  $a = (a_1, \dots, a_n)$  un punct staționar al funcției  $f(x)$  condiționat de sistemul (1). Aceasta înseamnă pe de o parte că  $F_1(a) = 0, \dots, F_k(a) = 0$ , iar pe de altă parte că există  $k$  numere  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  astfel ca să fie satisfăcut sistemul (2).

Vom presupune că funcția  $f(x)$  și funcțiile  $F_1(x), \dots, F_k(x)$  au derivate parțiale de ordinul doi, continue într-o vecinătate a punctului  $a$ .

Pentru a vedea dacă  $a$  este sau nu punct de extrem condiționat, va trebui să studiem semnul diferenței

$$f(x) - f(a) = f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)$$

pentru punctele  $x = (x_1, \dots, x_n)$  care verifică sistemul (1), deci pentru care  $F_1(x) = 0, \dots, F_k(x) = 0$ . Să observăm că, pentru asemenea puncte  $x$ , avem  $\Phi(x) = f(x)$  și deci

$$f(x) - f(a) = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Așadar, studiul semnului diferenței  $f(x) - f(a)$ , pentru punctele  $x$  care verifică sistemul (1), se reduce la studiul diferenței

$$\Phi(x) - \Phi(a)$$

pentru asemenea puncte  $x$ . Dar punctul  $a$  verifică sistemul (2); aceasta înseamnă că  $a$  este punct staționar obișnuit pentru funcția  $\Phi(x)$ , deci derivatele sale parțiale de ordinul întâi se anulează în  $a$ .

Pe de altă parte, funcția  $\Phi(x)$  are derivate parțiale de ordinul doi continue într-o vecinătate a lui  $a$ , deci putem scrie formula lui Taylor de ordinul doi :

$$\Phi(x) - \Phi(a) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi(a)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \frac{1}{2} \omega(x) \rho^2 = \frac{1}{2} d^2\Phi + \frac{1}{2} \omega \rho^2,$$

unde :

$$\lim_{x \rightarrow a} \omega(a) = 0 \text{ și } \rho = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2},$$

iar  $dx = x_i - a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Dacă diferențiem relațiile sistemului (1), obținem  $k$  relații liniare în diferențialele  $dx_1, \dots, dx_n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} dx_n &= 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n} dx_n &= 0 \\ \dots & \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial x_n} dx_n &= 0 \end{aligned}$$

derivatele parțiale fiind calculate în punctul  $a$ .

Deoarece matricea acestui sistem liniar este matricea funcțională  $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$

care are rangul  $k$ , se pot exprima  $k$  diferențiale în funcție de celelalte  $n - k$ ; introducind aceste  $k$  diferențiale în formula lui Taylor de mai sus, obținem în membrul drept o formă pătratică  $\sum A_{ij} dx_i dx_j$ . După cum această formă pătratică este definită sau nu, diferența  $\Phi(x) - \Phi(a) = f(x) - f(a)$  păstrează în jurul lui  $a$  același semn sau nu păstrează același semn, adică  $a$  este sau nu este punct de extrem condiționat. În cazul cînd  $\sum A_{ij} dx_i dx_j$  este definită pozitiv, avem un minim condiționat, iar cînd este definită negativ, avem un maxim condiționat.

*Exemplu.* Să se găsească extremele funcției

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz$$

condiționate de ecuația  $xyz = 1$ , în domeniul  $x > 0, y > 0, z > 0$ .

Formăm funcția

$$\Phi(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z) = xy + xz + yz + \lambda xyz$$

și apoi sistemul

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = y + z + \lambda yz = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x + z + \lambda xz = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = x + y + \lambda xy = 0 \\ F(x, y, z) = xyz - 1 = 0. \end{array} \right.$$

Acest sistem are soluția :

$$x = 1, y = 1, z = 1, \lambda = -2.$$

Funcția ajutătoare este acum :

$$\Phi(x, y, z) = xy + xz + yz - 2xyz.$$

Pentru a vedea dacă punctul staționar  $(1, 1, 1)$  este punct de extrem condiționat, calculăm diferențiala  $d^2\Phi$ , în punctul  $(1, 1, 1)$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = y + z - 2yz; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x + z - 2xz; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = x + y - 2xy;$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 1 - 2z; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = 1 - 2y; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = 1 - 2x.$$

În punctul  $(1, 1, 1)$  avem  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$  și

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = -1.$$

Diferențiala a doua a lui  $\Phi$  calculată în punctul  $(1, 1, 1)$  este

$$d^2\Phi = -(dx dy + dy dz + dz dx).$$

Să diferențiem relația  $xyz = 1$  :

$$ys dx + zx dy + xy dz = 0.$$

În punctul staționar  $(1, 1, 1)$ , această relație devine

$$dx + dy + dz = 0,$$

de unde  $dz = -dx - dy$ ; înlocuind  $dz$  în  $d^2\Phi$  obținem

$$d^2\Phi = dx^2 + dx dy + dy^2.$$

Această formă pătratică este definită pozitiv, deci punctul  $(1, 1, 1)$  este un punct de minim condiționat.

## Capitolul IX

# SERII DE NUMERE. ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII

### § 1. Serii de numere

#### 1. Definiția seriilor convergente

Pînă acum știm ce înseamnă suma unei mulțimi de numere, oricît de mare, dar finită. Nu știm însă ce înseamnă suma unei mulțimi infinite de numere; de exemplu, nu știm ce înseamnă suma

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

a unui șir de numere  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$

În acest capitol, vom da un sens, în anumite cazuri, sumei unui șir de numere.

Convenim să numim *serie de numere* un șir de numere despărțite între ele prin semnul  $+$ :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

Deocamdată, semnul  $+$  nu are semnificația de adunare. Vom scrie, prescurtat, această serie\*, astfel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ sau } \sum_{n \in N} u_n, \text{ sau } \sum_n u_n, \text{ sau încă } \sum u_n.$$

Numerele  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  se numesc termenii seriei.

Mulțimea indicilor poate parurge o mulțime de numere întregi, diferită de cea a numerelor naturale. Putem astfel considera serii de forma:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots \text{ notate } \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ sau serii de forma:}$$

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_{k+p} + \dots \text{ notate } \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n \text{ sau } \sum_{n>k} u_n \text{ etc.}$$

\* În acest capitol vor fi considerate numai serii de numere reale. Majoritatea rezultatelor rămîn adevărate pentru serii de numere complexe sau pentru serii de elemente dintr-un spațiu Banach.

X' Să considerăm sumele următoare, formate cu termenii seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ :

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

.....

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

.....

Am obținut astfel un sir  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ , numit sirul sumelor parțiale ale seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . Avem

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \text{ pentru orice } n \in N.$$

Să observăm că, reciproc, dându-se un sir  $(S_n)$ , putem forma o serie  $\sum_n u_n$  ale cărei sume parțiale să fie termenii sirului  $(S_n)$ , luând

$$u_1 = S_1$$

$$u_2 = S_2 - S_1$$

$$u_3 = S_3 - S_2$$

.....

$$u_n = S_n - S_{n-1}$$

.....

În acest fel, o serie  $\sum_n u_n$  este perfect determinată de sirul sumelor sale parțiale  $(S_n)$ . De aceea studiul seriei  $\sum_n u_n$  se reduce la studiul sirului  $(S_n)$ .

Se impune în primul rînd, următoarea

X Definiție. Vom spune că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă, dacă sirul  $(S_n)$  al sumelor parțiale este convergent. Dacă  $S$  este limita sirului sumelor parțiale, vom spune că  $S$  este suma seriei și vom scrie

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

$$\text{Așadar, } S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Dacă sirul  $(S_n)$  al sumelor parțiale nu are limită sau dacă limita sa este  $+\infty$  sau  $-\infty$ , vom spune că seria  $\sum u_n$  este *divergentă*.

Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ , vom spune că suma seriei  $\sum_n u_n$  este  $+\infty$  și vom scrie  $\sum_n u_n = +\infty$ ; de asemenea, dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$  vom spune că seria  $\sum_n u_n$  are suma  $-\infty$ , și vom scrie  $\sum_n u_n = -\infty$ . Dacă însă sirul  $(S_n)$  nu are limită, nici finită nici infinită, nu vom da nici un sens operației de adunare  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ .

Vom spune în acest caz că seria  $\sum_n u_n$  este *oscilantă*.

*Exemplu.* I) *Seria geometrică.* Fie  $r$  un număr oarecare. Să considerăm seria  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots$ . Această serie se numește *seria geometrică*, cu *rația*  $r$ . Să formăm sumele parțiale ale acestei serii, în cazul cînd  $r \neq 1$ :

$$S_1 = 1 = \frac{1-r}{1-r}$$

$$S_2 = 1 + r = \frac{1-r^2}{1-r}$$

.....

$$S_n = 1 + r + \dots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r^n}{1-r}$$

.....

Șirul  $(S_n)$  este deci diferența a două șiruri: șirul constant  $\left(\frac{1}{1-r}\right)$  care are limita  $\frac{1}{1-r}$ , și șirul  $\left(\frac{r^n}{1-r}\right)$ . Dacă  $0 < r < 1$ , atunci șirul  $(r^n)$  are limita 0, deci și șirul  $\left(\frac{r^n}{1-r}\right)$  are limita 0. Urmează că șirul  $(S_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-r} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}.$$

Dacă  $r > 1$ , șirul  $(r^n)$  are limita  $+\infty$  și cum  $1-r < 0$ , rezultă că șirul  $\left(\frac{r^n}{1-r}\right)$  are limita  $-\infty$ . Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-r} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1-r} = +\infty.$$

Dacă  $r < -1$ , șirul  $(r^n)$  este nemărginit și nu are limită, deci nici șirul  $(S_n)$  nu are limită și deci seria este divergentă și nu are sumă.

În cazul cînd  $r = 1$ , avem  $S_n = n$ , deci  $\lim S_n = +\infty$ .

În cazul cînd  $r = -1$ , avem  $S_n = 1 + (-1)^n$  deci seria este divergentă și nu are sumă.

Așadar: dacă  $0 < |r| < 1$ , seria este convergentă și  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ ;

dacă  $|r| > 1$ , seria este divergentă; dacă  $r > 1$  avem  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = +\infty$ .

2) Să considerăm seria  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  și să formăm sirul sumelor parțiale:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 - 1 = 0$$

$$S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

.....

$$S_{2n-1} = 1$$

$$S_{2n} = 0$$

.....

Așadar, sirul sumelor parțiale este  $1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots$  care nu are limită. Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$  nu este convergentă (este divergentă și nu are sumă, adică este oscilantă).

Deoarece studiul seriilor revine la studiul sirurilor sumelor parțiale, este de așteptat ca o serie întreagă de rezultate privind sirurile să se extindă a supra seriilor.

## 2. Influența unui număr finit de termeni

### asupra convergenței seriilor

Fie seria  $\sum_n u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$

1) Dacă schimbăm ordinea unui număr finit de termeni,  $u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_p}$  ai seriei  $\sum_n u_n$ , obținem o nouă serie.

Dacă notăm cu  $S_n$  sumele parțiale ale seriei  $\sum_n u_n$  și cu  $\sigma_n$  sumele parțiale ale seriei noi, pentru  $n > \max(n_1, n_2, \dots, n_p)$  avem  $S_n = \sigma_n$ . Așadar:

*Dacă seria  $\sum_n u_n$  este convergentă, seria obținută este convergentă și are aceeași sumă.*

Dacă seria  $\sum_n u_n$  este divergentă, seria obținută este divergentă (dacă  $\sum_n u_n$  are suma  $+\infty$  sau  $-\infty$ , seria obținută are de asemenea suma  $+\infty$ , respectiv  $-\infty$ ).

**O b s e r v a t i e.** Dacă schimbarea ordinii afectează o mulțime infinită de termeni ai seriei, afirmația de mai sus nu mai este în general adevărată, după cum va fi arătat mai departe.

2) *Dacă la o serie convergentă adăugăm sau înălăturăm un număr finit de termeni, seria obținută este tot convergentă* (dar are altă sumă, în general).

*Dacă la o serie divergentă adăugăm sau scădem un număr finit de termeni, seria obținută este tot divergentă* (dacă  $\sum_n u_n$  are suma  $+\infty$  sau  $-\infty$ , seria obținută are tot suma  $+\infty$  sau  $-\infty$ ).

Într-adevăr, fie seria  $\sum_n u_n$ . După 1, putem considera că termenii înălăturați sunt cei de la început,  $u_1, u_2, \dots, u_p$ . Seria obținută are sumele parțiale

$$\sigma_n = S_{n+p} - S_p,$$

iar șirul  $(\sigma_n)$  este convergent dacă și numai dacă șirul  $(S_{n+p} - S_p)_{n \in N}$  este convergent, deci seria obținută este convergentă dacă și numai dacă seria  $\sum_n u_n$  este convergentă.

Dacă adăugăm un număr finit de termeni seriei  $\sum_n u_n$ , obținem o serie  $\sum_n v_n$ . Atunci putem considera că seria  $\sum_n u_n$  se obține prin înălăturarea unui număr finit de termeni din seria  $\sum_n v_n$ , deci seria  $\sum_n v_n$  este convergentă dacă și numai dacă seria  $\sum_n u_n$  este convergentă.

**O b s e r v a t i e.** Deoarece termenii nuli nu au influență asupra comportării seriei, chiar dacă sunt în număr infinit, putem totdeauna să-i înălăturăm și să considerăm că seria este formată numai din termeni diferenți de zero.

3) Fie  $\sum_n u_n$  o serie, și fie  $(S_n)$  șirul sumelor parțiale. Să aranjăm toți termenii seriei în grupe, fiecare grupă fiind formată dintr-un număr finit de termeni consecutivi. Să efectuăm în fiecare grupă suma termenilor. Să considerăm apoi seria  $\sum_p v_p$  a acestor sume. Dacă notăm cu  $\sigma_p$  sumele parțiale ale acestei serii, atunci șirul  $(\sigma_p)$  este un subșir al șirului  $(S_n)$ , cum se poate constata ușor. Deducem de aici :

*Dacă seria  $\sum_n u_n$  este convergentă, seria  $\sum_p v_p$  este convergentă și are aceeași sumă.*

Dacă seria  $\sum_n u_n$  este divergentă dar are suma  $+\infty$  sau  $-\infty$ , atunci seria  $\sum_p v_p$  este divergentă și are, respectiv, tot suma  $+\infty$  sau  $-\infty$ .

**O b s e r v a t i e.** Dacă seria  $\sum_n u_n$  este divergentă dar nu are sumă, s-ar putea ca seria  $\sum_p v_p$  să fie convergentă.

**E x e m p l u.** Fie seria  $\sum u_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ . Să considerăm seria  $\sum v_p = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots$ ; această serie este convergentă și are suma 0.

**4) Restul seriei.** Fie  $\sum_n u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  o serie convergentă. Să considerăm seria  $\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n = u_{p+1} + u_{p+2} + u_{p+3} + \dots$ , obținută din prima serie prin înălțarea primilor  $p$  termeni,  $u_1 + u_2 + \dots + u_p$ . Această serie este de asemenea convergentă și avem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_p) + \sum_{n=p+1}^{\infty} u_n.$$

Suma seriei  $\sum_{n=p+1}^{\infty} u_n$  se numește *restul de ordin  $p$*  al seriei  $\sum_n u_n$ .

Dacă notăm cu  $S$  suma seriei și cu  $R_p$  restul de ordin  $p$ , egalitatea de mai sus se scrie  $S = S_p + R_p$ . De aici,  $R_p = S - S_p$ .

Cum sirul  $(S_p)$  este convergent către  $S$ , rezultă că:

*Resturile unei serii convergente formează un sir convergent către 0.*

### 3. Proprietăți ale sirului termenilor

#### și ale sumelor parțiale

**1) Dacă seria  $\sum_n u_n$  este convergentă, sirul sumelor parțiale este mărginit.**

Într-adevăr, sirul  $(S_n)$  al sumelor este convergent și deci mărginit.

**O b s e r v a t i e.** Afirmația reciprocă nu este în general adevărată. O serie poate avea sirul sumelor parțiale mărginit, fără să fie convergentă.

**E x e m p l u.** Seria  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  este divergentă deși sirul sumelor parțiale  $1, 0, 1, 0, \dots$  este mărginit.

În anumite condiții, afirmația reciprocă este însă adevărată:

**2) Dacă seria  $\sum_n u_n$  este formată din termeni pozitivi, iar sirul sumelor parțiale este mărginit, seria este convergentă.**

Într-adevăr, șirul  $(S_n)$  al sumelor parțiale este crescător, deoarece  $u_{n+1} > 0$ , deci  $S_n < S_n + u_{n+1} = S_{n+1}$ ; fiind și mărginit, șirul  $(S_n)$  este convergent, deci seria este convergentă.

Observație. Dacă șirul sumelor parțiale este nemărginit, fiind crescător, are limita  $+\infty$ ; deci seria este divergentă și are suma  $+\infty$ .

3) Dacă seria  $\sum_n u_n$  este convergentă, șirul  $(u_n)$  al termenilor săi este convergent către 0.

Fie  $(S_n)$  șirul sumelor parțiale. Prin ipoteză,  $(S_n)$  are o limită  $S \in R$ . Avem  $u_n = S_n - S_{n-1}$ . Așadar, șirul  $(u_n)$  este diferența a două șiruri convergente  $(S_n)$  și  $(S_{n-1})$  care au aceeași limită  $S$ . Rezultă că  $(u_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Proprietatea 3) se poate enunța în următoarea formulare echivalentă:

4) Dacă șirul termenilor nu este convergent către zero, seria este divergentă.

Observație. Afirmația reciprocă nu este în general adevărată. O serie poate avea șirul termenilor convergent către 0, fără ca seria să fie convergentă.

*Exemplu.* Să considerăm seria armonică

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Șirul termenilor  $\left(\frac{1}{n}\right)$  este convergent către zero. Totuși seria este divergentă. Într-adevăr, să aranjăm toți termenii seriei în grupe finite de termeni astfel:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \\ + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) + \dots \end{aligned}$$

Să observăm că:

$$1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n} > \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1} \text{ termeni}} > \frac{1}{2}.$$

Așadar

$$S_{2^n} > \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{n \text{ ori}} = \frac{n}{2}.$$

Cum sirul  $\left(\frac{n}{2}\right)$  are limita  $+\infty$ , rezultă că sirul  $(S_{2^n})$  are limita  $+\infty$ .

Așadar, sirul  $(S_n)$  al sumelor parțiale nu poate avea o limită finită  $S \in R$ , deoarece conține un subșir divergent cu limita  $+\infty$ . Urmează că seria armonică este divergentă.

**Observație.** Multă vreme nu s-a știut că seria armonică este divergentă și s-a căutat să se adune un număr cât mai mare de termeni ai săi pentru a se obține o sumă parțială cât mai aproape de „suma” seriei. Aceasta se explică prin faptul că seria armonică este „foarte încet” divergentă.

Intr-adevăr, să remarcăm că

$$1 = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n-1} < \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{2^{n-1} \text{ ori}} = 1$$

$$\dots$$

Atunci suma parțială  $S_{2^n-1}$  verifică inegalitatea

$$S_{2^n-1} < n.$$

Așadar, dacă adunăm  $2^{n-1}$  termeni, suma obținută, este mai mică decât  $n$ . Pentru a ne face o imagine mai exactă, vom scrie inegalitatea precedentă pentru cîteva valori ale lui  $n$ :

$$\begin{aligned} S_3 &< 2 \\ S_7 &< 3 \\ S_{15} &< 4 \\ S_{31} &< 5 \\ S_{63} &< 6 \\ S_{127} &< 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{255} &< 8 \\ S_{511} &< 9 \\ S_{1023} &< 10 \\ S_{2047} &< 11 \\ &\dots \\ S_{1073741} &< 30 \end{aligned}$$

#### 4. Operații cu serii

**Propozitie.** Dacă seriile  $\sum_n u_n$  și  $\sum_n v_n$  sunt convergente și au respectiv suma  $S$  și  $T$ , atunci:

1) Suma  $\sum_n (u_n + v_n)$  este convergentă și are suma  $S + T$

$$\sum_n (u_n + v_n) = \sum_n u_n + \sum_n v_n.$$

2) Seria  $\sum_n \alpha u_n$  este convergentă, oricare ar fi  $\alpha \in R$ , și are suma  $\alpha S$ :

$$\sum_n \alpha u_n = \alpha \sum_n u_n.$$

**Demonstrație.** Fie  $(S_n)$  respectiv  $(T_n)$  șirurile sumelor parțiale ale seriilor  $\sum_n u_n$  și  $\sum_n v_n$ . Dacă notăm cu  $\sigma_n$  sumele parțiale ale seriei  $\sum_n (u_n + v_n)$  avem

$$\begin{aligned} \sigma_n &= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) = (u_1 + u_2 + \dots + u_n) + \\ &\quad + (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = S_n + T_n. \end{aligned}$$

Cum șirurile  $(S_n)$  și  $(T_n)$  sunt convergente prin ipoteză, șirul  $(\sigma_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = S + T,$$

deci seria  $\sum_n (u_n + v_n)$  este convergentă și are suma  $S + T$ . Dacă notăm cu  $Z_n$  sumele parțiale ale seriei  $\sum_n \alpha u_n$ , avem

$$Z_n = \alpha u_1 + \alpha u_2 + \dots + \alpha u_n = \alpha(u_1 + \dots + u_n) = \alpha S_n,$$

deci șirul  $(Z_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \alpha S.$$

Rezultă că seria  $\sum_n \alpha u_n$  este convergentă și are suma  $\alpha S$ .

**Corolar.** Dacă seria  $\sum_n v_n$  este convergentă și are suma  $T$ , atunci seria  $\sum_n (-v_n)$  este convergentă și are suma  $-T$ :

$$\sum_n (-v_n) = -\sum_n v_n.$$

Dacă  $\sum_n u_n = S$  și  $\sum_n v_n = T$ , atunci seria  $\sum_n (u_n - v_n)$  este convergentă și are suma  $S - T$ :

$$\sum_n (u_n - v_n) = \sum_n u_n - \sum_n v_n.$$

**Observații.** 1° Dacă seria  $\sum_n (u_n + v_n)$  (sau seria  $\sum_n (u_n - v_n)$ ) este convergentă nu rezultă că seriile  $\sum_n u_n$  și  $\sum_n v_n$  sunt convergente.

*Exemplu.* Seriile  $\sum u_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  și  $\sum v_n = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots$  sunt oscilante, dar seria  $\sum (u_n + v_n) = 0 + 0 + 0 + 0 + \dots$  este convergentă.

2° Propoziția și corolarul rămân adevărate dacă seriile  $\sum u_n$  și  $\sum v_n$  sunt divergente și au sumele  $S$  și  $T$  egale cu  $+\infty$  sau  $-\infty$ , în cazul cind  $S + T$ ,  $S - T$ ,  $\alpha T$  au sens. În cazul cind  $S + T$  nu are sens, despre seria  $\sum_n (u_n + v_n)$  nu putem afirma nimic. Uneori este convergentă, alteori are sumă infinită, iar alteori este oscilantă.

*Exemple:*

$$1) \sum u_n = 1 + 2 + \dots + n + \dots = +\infty,$$

$$\sum v_n = -1 - 2 - \dots - n - \dots = -\infty,$$

$$\sum (u_n + v_n) = 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 0.$$

$$2) \sum u_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots = +\infty,$$

$$\sum v_n = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} - \dots = -\infty,$$

$$\begin{aligned} \sum (u_n + v_n) &= 0 + \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left(3 - \frac{1}{3}\right) + \dots + \\ &\quad + \left(n - \frac{1}{n}\right) + \dots = +\infty. \end{aligned}$$

$$3) \sum u_n = 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = +\infty,$$

$$\sum v_n = -1 - 4 - 3 - 6 - \dots = -\infty,$$

$$\sum (u_n + v_n) = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \text{ nu are sumă.}$$

$$3° \text{ Dacă } \sum_n u_n = +\infty \text{ și } \alpha = 0, \text{ atunci seria } \alpha \sum_n u_n = \sum_n 0,$$

deci are totdeauna suma 0.

## 5. Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare

Studiul unei serii comportă, ca și pentru siruri, două probleme:

- 1) Stabilirea faptului dacă seria este convergentă sau divergentă.
- 2) În cazul cind seria este convergentă, aflarea sumei seriei.

De cele mai multe ori ne mulțumim numai cu rezolvarea primei probleme, deoarece problema a doua este greu sau imposibil de rezolvat, în majoritatea exemplelor concrete. De altfel, o dată stabilit faptul că o serie este convergentă, adunând un număr destul de mare de termeni ai săi obținem un număr oricărât de apropiat de suma seriei, număr care aproximează suma seriei cu o eroare oricărât de mică.

În cele ce urmează vor fi date criterii suficiente (cu excepția criteriului general al lui Cauchy, care este necesar și suficient) pentru stabilirea convergenței sau divergenței seriilor.

**Criteriul general al lui Cauchy.** O serie  $\sum u_n$  este convergentă dacă și numai dacă, pentru orice număr  $\varepsilon > 0$ , există un număr  $N(\varepsilon)$ , astfel încât oricare ar fi  $n \geq N(\varepsilon)$  și oricare ar fi  $p \geq 1$ , să avem:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

**Demonstrație.** Fie  $(S_n)$  șirul sumelor parțiale ale seriei  $\sum u_n$ . Prin definiție, seria este convergentă dacă și numai dacă șirul  $(S_n)$  este convergent, iar șirul  $(S_n)$  este convergent dacă și numai dacă este șir fundamental, adică dacă și numai dacă, pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există un număr  $N(\varepsilon)$  astfel încât oricare ar fi  $n \geq N(\varepsilon)$  și oricare ar fi  $p \geq 1$ , să avem

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Criteriul rezultă atunci din faptul că

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_n &= (u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p}) - \\ &\quad - (u_1 + u_2 + \dots + u_n) = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}. \end{aligned}$$

**O b s e r v a t i e.** Acest criteriu are o importanță teoretică fundamentală. Din el se deduc toate celelalte criterii. Practic însă acest criteriu este foarte greu de aplicat; de aceea vor fi date alte criterii suficiente (dar nu necesare), mai ușor de aplicat în cazurile întâlnite frecvent.

**Criteriul lui Abel.** Dacă  $\sum u_n$  este o serie care are șirul sumelor parțiale mărginit, și dacă  $(\alpha_n)$  este un șir descerescător de numere pozitive convergent către 0, atunci seria

$$\sum_n \alpha_n u_n = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n + \dots$$

este convergentă.

**Demonstrație,** Deoarece șirul  $(S_n)$  al sumelor parțiale este mărginit, există un număr  $M > 0$ , astfel încât  $|S_n| < M$ , oricare ar fi  $n \in N$ . Vom arăta că seria  $\sum \alpha_n u_n$  verifică criteriul lui Cauchy. Pentru aceasta să observăm că  $u_{m+1} = S_{m+1} - S_m$ , și că

$$\begin{aligned} |\alpha_p - \alpha_{p+1}| &= \alpha_p - \alpha_{p+1} > 0, \text{ și deci} \\ |\alpha_{n+1} u_{n+1} + \alpha_{n+2} u_{n+2} + \dots + \alpha_{n+p} u_{n+p}| &= \\ = |\alpha_{n+1} (S_{n+1} - S_n) + \alpha_{n+2} (S_{n+2} - S_{n+1}) + \dots + \alpha_{n+p} (S_{n+p} - S_{n+p-1})| &= \\ = |-\alpha_{n+1} S_n + S_{n+1} (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + \dots + S_{n+p-1} (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) + \alpha_{n+p} S_{n+p}| &\leqslant \\ \leqslant \alpha_{n+1} |S_n| + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) |S_{n+1}| + \dots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) |S_{n+p-1}| + & \\ + \alpha_{n+p} |S_{n+p}| < M[\alpha_{n+1} + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + \dots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) + \alpha_{n+p}] &= \\ = 2M\alpha_{n+1}. & \end{aligned}$$

Fie  $\varepsilon > 0$ . Deoarece sirul  $(\alpha_n)$  este convergent către 0, există un număr  $N(\varepsilon)$  astfel încât pentru  $n > N(\varepsilon)$  să avem  $\alpha_n < \frac{\varepsilon}{2M}$ . Atunci pentru orice  $n > N(\varepsilon)$  și orice  $p \geq 1$ , deducem

$$|\alpha_{n+1}u_{n+1} + \alpha_{n+2}u_{n+2} + \dots + \alpha_{n+p}u_{n+p}| < \varepsilon$$

și deci seria  $\sum_n \alpha_n u_n$  verifică criteriul lui Cauchy, de unde rezultă că este convergentă.

## 6. Serii alternate

Se numește serie alternată, o serie pentru care produsul a doi termeni consecutivi este  $< 0$  (adică doi termeni consecutivi oarecare sunt de semne contrare). O serie alternată este deci de forma

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$$

sau de forma

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \dots$$

unde,  $u_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3\dots$ .

Deoarece ultima serie se reduce la cea precedentă prin înmulțire cu  $-1$ , vom considera în continuare numai serii alternate de forma  $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$ , cu primul termen  $> 0$ .

**Criteriul lui Leibniz.** O serie alternată  $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$  ( $u_i > 0$ ), pentru care sirul modulelor termenilor  $(u_n)$  este descrescător și convergent către 0, este convergentă.

Să considerăm seria

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \dots$$

Ea are sumele parțiale  $1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots$ , deci sunt mărginite. Deoarece sirul  $(u_n)$  este descrescător și convergent către 0, din criteriul lui Abel rezultă că seria

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$$

este convergentă.

*Exemplu.*

Seria armonică alternată  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  verifică criteriul lui Leibniz, deci este convergentă.

Într-adevăr, șirul modulelor termenilor  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  este descrescător și convergent către 0.

Să calculăm, pentru o serie alternată convergentă care verifică condițiile criteriului lui Leibniz, eroarea pe care o facem luând în locul sumei sale o sumă parțială. Presupunem  $u_1 > 0$ .

Pentru aceasta considerăm separat sumele cu indice impar și cele cu indice par:

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 - u_2$$

$$S_3 = u_1 - (u_2 - u_3) < u_1 = S_1$$

$$S_4 = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) > S_2$$

$$S_5 = S_3 - (u_4 - u_5) < S_3$$

$$S_6 = S_4 + (u_5 - u_6) > S_4.$$

.....

.....

Șirul sumelor impare  $(S_{2n-1})_{1 \leq n < +\infty}$  este descrescător, iar șirul sumelor pare  $(S_{2n})_{1 \leq n < +\infty}$  este crescător. Ele sunt subșiruri ale șirului  $(S_n)_{1 \leq n < +\infty}$  al sumelor parțiale, care este convergent către suma  $S$  a seriei. Așadar, avem următoarea situație:

$$S_2 < S_4 < \dots < S_{2n} < \dots < S < \dots < S_{2n+1} < \dots < S_3 < S_1.$$

Avem apoi

$$0 < S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1},$$

de unde

$$0 < S - S_{2n} < u_{2n+1}.$$

De asemenea

$$0 < S_{2n+1} - S_{2n+2} = u_{2n+2},$$

de unde

$$0 < S_{2n+1} - S < u_{2n+2}.$$

Cele două cazuri de mai sus se pot scrie în mod unitar astfel:

$$0 < (-1)^n (S - S_n) < u_{n+1}.$$

Am demonstrat astfel următoarea

**Theoremă.** Dacă pentru seria alternată  $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$  în care șirul  $(u_n)$  este descrescător și convergent către zero, înlocuim suma  $S$  a seriei cu suma parțială  $S_n$  a unui număr finit  $n$  de termeni, facem o eroare mai mică decât primul termen neglijat  $u_{n+1}$ . Eroarea este prin lipsă dacă  $n$  este par, și prin adăos dacă  $n$  este impar.

## § 2. Serii absolut convergente

### 1. Serii absolut convergente.

#### Serii semiconvergente

Vom spune că o serie

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

este absolut convergentă, dacă seria modulelor

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

este convergentă. Evident, dacă toți termenii seriei sunt pozitivi și dacă seria este convergentă, ea este absolut convergentă.

**T e o r e m ā . O r i c e s e r i e a b s o l u t c o n v e r g e n t ā e s t e c o n v e r g e n t ā .**

Fie  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  o serie absolut convergentă. Aceasta înseamnă că seria  $|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$  este convergentă. Fie  $\varepsilon > 0$ . Conform criteriului general al lui Cauchy, există  $N(\varepsilon)$  astfel încât, oricare ar fi  $n \geq N(\varepsilon)$  și oricare ar fi  $p \geq 1$ , să avem

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Cum

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}|,$$

rezultă că seria  $\sum u_n$  verifică de asemenea criteriul general al lui Cauchy, deci este convergentă.

**O b s e r v a t i e .** Reciproca acestei teoreme nu este în general adevarată. Seria armonică alternată

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

este convergentă, dar seria modulelor

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

este divergentă.

*O serie convergentă care nu este absolut convergentă se numește serie semiconvergentă.*

Seria armonică alternată este deci semiconvergentă.

Seriile absolut convergente au o proprietate asemănătoare cu aceea a sumei unei mulțimi finite de numere: comutativitatea. Pentru a efectua suma unei mulțimi finite de numere, nu are influență ordinea în care le adunăm.

**T e o r e m ā .** Dacă într-o serie absolut convergentă se schimbă ordinea termenilor, se obține tot o serie absolut convergentă și cu aceeași sumă.

Fie seria absolut convergentă

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

și fie  $S$  suma sa. Seria modulelor

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

este de asemenea convergentă. Să notăm cu  $S_n$  sumele parțiale ale seriei  $\sum u_n$ . Fie  $\varepsilon > 0$ ; există un număr  $N = N(\varepsilon)$ , astfel încât să avem

$$|S - S_N| < \frac{\varepsilon}{2}$$

și

$$|u_{N+p}| + |u_{N+p+1}| + \dots + |u_{N+q}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ oricare ar fi } p \geq 1 \text{ și } q > p.$$

Fie

$$v_1 + v_2 + \dots + v_m + \dots$$

o serie obținută din seria  $\sum_n u_n$  prin schimbarea ordinii termenilor săi. Să notăm cu  $T_n$  sumele parțiale ale seriei  $\sum_n v_n$ . Există un număr  $N_1$  (care depinde de  $N$ , deci de  $\varepsilon$ ), astfel încât pentru  $m \geq N_1$ , suma  $T_m$  să conțină toți termenii  $u_1, u_2, \dots, u_N$ . Evident, suma  $T_m$  conține și alți termeni, în plus,

$$u_{N+k_1} + u_{N+k_2} + \dots + u_{N+k_m}.$$

Avem însă

$$\begin{aligned} |u_{N+k_1} + \dots + u_{N+k_m}| &\leq |u_{N+k_1}| + |u_{N+k_2}| + \dots + |u_{N+k_m}| \leq \\ &\leq |u_{N+1}| + |u_{N+2}| + \dots + |u_{N+k_m}| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Așadar

$$|T_m - S_N| = |u_{N+k_1} + \dots + u_{N+k_m}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

și deci, pentru  $m \geq N_1(\varepsilon)$ , avem

$$|S - T_m| \leq |S - S_N| + |S_N - T_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că řirul  $(T_m)$  are limita  $S$ . Deducem deci că seria  $\sum v_n$  este convergentă și are aceeași sumă  $S$ .

Făcind raționamentul de mai sus asupra seriei  $\sum_n |u_n|$ , deducem că seria  $\Sigma |v_n|$  este convergentă, adică seria  $\Sigma v_n$  este absolut convergentă.

Această proprietate de comutativitate nu o au însă seriile semiconvergente. Mai mult:

**Theoremă (Riemann).** Într-o serie semiconvergentă se poate schimba ordinea termenilor, astfel încât seria obținută să aibă ca sumă un număr dat, finit sau infinit, sau să fie oscilantă.

Fie seria semiconvergentă

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Seria modulelor

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

este divergentă. Să punem

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|$$

și să notăm cu  $a_n$  suma termenilor pozitivi care se află printre primii  $n$  termeni și cu  $-b_n$  suma termenilor negativi care se află printre primii  $n$  termeni ai seriei  $\Sigma u_n$ .

Avem deci

$$S_n = a_n - b_n.$$

$$\sigma_n = a_n + b_n$$

și deci

$$a_n = \frac{S_n + \sigma_n}{2}.$$

$$b_n = \frac{\sigma_n - S_n}{2}.$$

Dacă  $S$  este suma seriei  $\Sigma u_n$ , sirul  $(S_n)$  are limita  $S$ ; sirul  $(\sigma_n)$  are însă limita  $+\infty$ . Rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty.$$

Așadar, seria formată cu termenii pozitivi ai seriei  $\sum_n u_n$  este divergentă și are suma  $+\infty$ . De asemenea, seria formată cu termenii negativi ai seriei  $\sum_n u_n$  este divergentă și are suma  $-\infty$ .

Fie  $A$  un număr oarecare; să arătăm că putem schimba ordinea termenilor seriei  $\Sigma u_n$ , ca să obținem o serie convergentă cu suma  $A$ . Pentru aceasta, să luăm în ordinea în care se prezintă în seria  $\Sigma u_n$  un număr de termeni pozitivi, a căror sumă să fie mai mare ca  $A$  (aceasta este posibil deoarece suma seriei termenilor pozitivi este  $+\infty$ ); vom lua, anume, cel mai mic număr de termeni pozitivi care să aibă această proprietate. Vom lua apoi, tot în ordinea în care se prezintă în seria  $\Sigma u_n$ , cel mai mic număr de termeni negativi, astfel ca suma tuturor termenilor luati de la început să fie mai mică decit  $A$  (acest lucru este posibil, deoarece seria termenilor negativi are suma  $-\infty$ ).

Vom lua apoi cel mai mic număr de termeni pozitivi, din cei rămași, tot în ordinea din seria  $\sum u_n$ , astfel ca suma tuturor termenilor luați de la început să fie mai mare ca  $A$  și aşa mai departe. În acest mod, aranjăm toți termenii seriei  $\sum u_n$  într-o altă ordine. Vom arăta că seria obținută este convergentă și are suma  $A$ . Să notăm cu  $A_n$  sumele parțiale ale seriei noi, și cu  $p_n$  numărul tuturor termenilor pozitivi și negativi luați în primele  $n$  operații. Avem

$$A_1 > A, A_3 > A, \dots, A_{p_n} > A, \dots \text{ dacă } n \text{ este impar.}$$

$$A_2 < A, A_4 < A, \dots, A_{p_n} < A, \dots \text{ dacă } n \text{ este par.}$$

Dacă  $n$  este impar,  $A_{p_n} > A$  și  $u_{p_n}$  este pozitiv; cum, de fiecare dată, am luat cel mai mic număr de termeni necesar pentru a depăși pe  $A$ ,

avem

$$A_{p_n} - u_{p_n} \leq A$$

și deci

$$0 < A_{p_n} - A \leq u_{p_n}.$$

Dacă  $n$  este par,  $A_{p_n} < A$ , și  $u_{p_n}$  este negativ,

deci

$$A_{p_n} - u_{p_n} \geq A.$$

de unde

$$0 < A - A_{p_n} \leq -u_{p_n}.$$

Așadar, oricum ar fi  $n$ , par sau impar, avem

$$|A - A_{p_n}| \leq |u_{p_n}|.$$

Dar, deoarece seria este convergentă, sirul  $(u_n)$  este convergent către 0; sirul  $(u_{p_n})$  este un subșir al său, deci are tot limita 0. Rezultă că sirul  $(A_{p_n})$  are limita  $A$ . Vrem însă să arătăm că sirul  $(A_n)$  al tuturor sumelor parțiale ale seriei noi are limita  $A$ . Din felul în care au fost aranjaiți în ordine termenii noii serii, rezultă că orice sumă  $A_k$  este cuprinsă între două sume  $A_{p_n}$  consecutive, una de ordin par și una de ordin impar

$$A_{p_{2n}} \leq A_k \leq A_{p_{2n+1}}.$$

Cum sumele extreme au limita  $A$ , urmează că și sirul  $(A_n)$  are limita  $A$ , adică seria este convergentă și are limita  $A$ .

Procedind ca mai sus se poate schimba ordinea termenilor seriei  $\sum u_n$  ca să obținem o serie divergentă cu suma  $+\infty$ .

Într-adevăr, alegem un număr de termeni pozitivi, astfel ca suma lor să fie mai mare ca 1; apoi adăugăm un termen negativ; apoi adăugăm un număr de termeni pozitivi, astfel ca suma tuturor termenilor de la început să fie  $> 2$ ; apoi adăugăm un termen negativ; la  $n$ -a operație, adăugăm un număr de termeni pozitivi astfel ca suma tuturor termenilor de la început să fie  $> n$ , apoi adăugăm un termen negativ.

Seria astfel obținută este divergentă și are suma  $+\infty$ .

Se pot aranja termenii seriei  $\sum u_n$ , astfel ca seria obținută să fie oscilantă. Luăm un număr de termeni pozitivi cu suma  $> 1$ ; adăugăm un număr de termeni negativi, ca să obținem o sumă  $< 0$ ; adăugăm un număr de termeni pozitivi ca să obținem o sumă  $> 1$ , și aşa mai departe. Sumele obținute formează un sir care nu are limită, deci nici sirul tuturor sumelor parțiale ale seriei nu are limită.

Vom da acum un criteriu de convergență absolută.

**Primul criteriu al comparației.** Fie  $\sum_n u_n$  și  $\sum_n v_n$  două serii; să presupunem că există un număr  $N$  astfel încât  $|u_n| \leq |v_n|$  pentru orice  $n \geq N$ .

Dacă seria  $\sum v_n$  este absolut convergentă, atunci seria  $\sum u_n$  este absolut convergentă.

**Demonstrație.** Fie  $\varepsilon > 0$ . Deoarece seria  $\sum |v_n|$  este convergentă, după criteriul general al lui Cauchy există un număr  $N(\varepsilon)$  (pe care-l putem lăsa mai mare decât  $N$ ), astfel încât, oricare ar fi  $n > N(\varepsilon)$  și oricare ar fi  $p \geq 1$ , să avem

$$|v_{n+1}| + |v_{n+2}| + \dots + |v_{n+p}| < \varepsilon.$$

Cum

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| \leq |v_{n+1}| + |v_{n+2}| + \dots + |v_{n+p}|,$$

pentru  $n \geq N(\varepsilon)$  și  $p \geq 1$ , avem de asemenea

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon,$$

adică seria  $\sum |u_n|$  este convergentă, și deci seria  $\sum u_n$  este absolut convergentă.

## 2. Serii cu termeni pozitivi

Vom considera acum seria

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

în care toți termenii sunt strict pozitivi. O asemenea serie sau este convergentă, sau este divergentă și are suma  $+\infty$ .

Pentru seriile cu termeni pozitivi, proprietatea de convergență este echivalentă cu proprietatea de convergență absolută.

Vom da mai jos câteva criterii de convergență, care rezultă direct sau indirect din criteriul general al lui Cauchy. În același timp, acestea sunt criterii de convergență absolută pentru serii cu termeni oarecare.

Să reformulăm întâi criteriul comparației pentru serii cu termeni pozitivi:

**Primul criteriu al comparației.** Fie  $\sum_n u_n$  și  $\sum_n v_n$  două serii cu termeni pozitivi. Să presupunem că există un număr  $N$ , astfel încât

$$u_n \leq v_n \text{ pentru orice } n \geq N.$$

1) Dacă seria  $\sum v_n$  este convergentă, atunci seria  $\sum u_n$  este convergentă.

2) Dacă seria  $\sum u_n$  este divergentă, atunci seria  $\sum v_n$  este divergentă.

Punctul 2 este o formulare echivalentă a punctului 1.

**A l d o i l e a c r i t e r i u a l c o m p a r a ț i e i.** Fie  $\sum_n u_n$  și  $\sum_n v_n$  două serii cu termeni pozitivi. Să presupunem că există un număr  $N$  astfel încât

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \text{ pentru orice } n \geq N.$$

1) Dacă seria  $\sum v_n$  este convergentă, atunci seria  $\sum u_n$  este convergentă.

2) Dacă seria  $\sum u_n$  este divergentă, atunci seria  $\sum v_n$  este divergentă.

**Demonstrație.** Din inegalitățile de mai sus deducem

$$\frac{u_n}{v_n} \geq \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \text{ pentru orice } n \geq N, \text{ adică}$$

$$\frac{u_N}{v_N} \geq \frac{u_{N+1}}{v_{N+1}} \geq \dots \geq \frac{u_n}{v_n} \geq \dots, \quad n \geq N.$$

Dacă punem

$$k = \frac{u_N}{v_N} \geq 0, \text{ deducem}$$

$$k \geq \frac{u_n}{v_n} \text{ pentru orice } n \geq N,$$

adică

$$u_n \leq k v_n \text{ pentru orice } n \geq N.$$

Se aplică acum primul criteriu al comparației: dacă  $\sum v_n$  este convergentă, atunci seria  $\sum k v_n$  este convergentă, deci seria  $\sum u_n$  este convergentă.

Dacă  $\sum u_n$  este divergentă, atunci seria  $\sum k v_n$  este divergentă și cum  $\sum v_n = \sum \frac{1}{k} (k v_n)$ , rezultă că seria  $\sum v_n$  este divergentă.

**O b s e r v a ț i e.** Criteriile de mai sus ne dă posibilitatea de a deduce că o serie este convergentă sau divergentă, comparând-o cu altă serie despre care știm că este convergentă sau divergentă.

Deocamdată cunoaștem o singură serie cu termeni pozitivi convergentă: seria geometrică cu rația  $r < 1$ :

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots$$

Cunoaștem de asemenea două serii divergente: seria geometrică cu razia  $r \geq 1$

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots$$

și seria armonică

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Evident, serii divergente putem construi cîte dorim, luînd un sir  $(u_n)$ , care nu este convergent către zero, și formînd seria

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Pentru a putea folosi ușor criteriile de comparație, va trebui să cunoaștem cît mai multe serii convergente.

**A p l i e ț i e .** Fie  $\sum_n u_n$  o serie cu termeni pozitivi, astfel ca sirul termenilor  $(u_n)$  să fie descreșător. Să considerăm și seria  $\sum 2^n u_{2^n}$ . Dacă una dintre serii este convergentă, atunci și cealaltă este convergentă.

Să presupunem întîi că seria  $\sum 2^n u_{2^n}$  este convergentă. Să grupăm termenii seriei  $\sum u_n$  astfel:

$$u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + \dots + u_7) + (u_8 + \dots + u_{15}) + \dots + (u_{2^n} + \dots + u_{2^{n+1}-1}) + \dots$$

Deoarece sirul termenilor este descreșător, avem

$$u_{2^n} + \dots + u_{2^{n+1}-1} \leq \underbrace{u_{2^n} + \dots + u_{2^n}}_{2^n \text{ ori}} = 2^n u_{2^n}.$$

După criteriul comparației, urmează că și seria cu termenii grupați este convergentă, adică subînălțul sumelor parțiale  $(S_{2^n})$  este convergent. Dacă sirul  $(S_n)$  ar avea limita  $+\infty$  ar urma ca și subînălțul  $(S_{2^n})$  să aibă limita  $+\infty$ . Urmează deci că și sirul  $(S_n)$  este convergent, și deci că seria  $\sum u_n$  este convergentă.

Să presupunem acum că seria  $\sum u_n$  este convergentă. Atunci și seria următoare, obținută prin gruparea termenilor, este convergentă:

$$(u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + (u_5 + \dots + u_8) + (u_9 + \dots + u_{16}) + \dots + (u_{2^{n-1}+1} + \dots + u_{2^n}) + \dots$$

Deoarece sirul termenilor este descreșător, avem

$$u_{2^{n-1}+1} + \dots + u_{2^n} \geq \underbrace{u_{2^n} + \dots + u_{2^n}}_{2^{n-1} \text{ ori}} = 2^{n-1} u_{2^n}.$$

Urmează că și seria  $\sum 2^{n-1} u_{2^n}$  și deci și seria  $\sum 2^n u_{2^n}$  este convergentă.

Vom aplica acest rezultat la *seria armonică generalizată*:

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$$

Această serie este convergentă dacă  $\alpha > 1$  și divergentă dacă  $\alpha \leq 1$ .

Într-adevăr, să considerăm seria  $\Sigma 2^n u_{2^n}$ . Avem

$$2^n u_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n.$$

Aceasta este o serie geometrică cu rația  $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$ . Dacă  $\alpha > 1$ , atunci  $\alpha - 1 > 0$ , deci  $2^{\alpha-1} > 1$  și deci  $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ , adică seria  $\Sigma 2^n u_{2^n}$  este convergentă și deci și seria armonică generalizată este convergentă. Dacă  $\alpha \leq 1$ , avem  $\frac{1}{2^{\alpha-1}} \geq 1$ , deci seria  $\Sigma 2^n u_{2^n}$  este divergentă și deci și seria armonică generalizată este divergentă.

**Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy).** Fie  $\Sigma u_n$  o serie cu termeni pozitivi:

- 1) dacă există un număr  $N$  și un număr  $0 < k < 1$ , astfel încât, pentru orice  $n \geq N$ , să avem  $\sqrt[n]{u_n} \leq k$ , atunci seria este convergentă;
- 2) dacă avem  $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ , pentru o infinitate de termeni, atunci seria este divergentă.

**Demonstrație.** 1) Din  $\sqrt[n]{u_n} \leq k$  pentru  $n \geq N$  deducem  $u_n \leq k^n$ . Cum  $0 < k < 1$ , seria geometrică  $1 + k + k^2 + \dots + k^n + \dots$  este convergentă. Pe baza primului criteriu de comparație rezultă că și seria  $\Sigma u_n$  este convergentă.

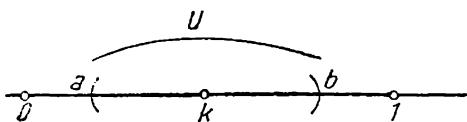


Fig. 161

rezultă că nici seria nu este convergentă, deci este divergentă.

Acest criteriu se poate enunța (punctul 2 într-o formă ceva mai particulară) cu ajutorul limitelor extreme.

**Corolarul 1.** Fie  $\Sigma u_n$  o serie de termeni pozitivi.

- 1) Dacă  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$ , atunci seria este convergentă.
- 2) Dacă  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} > 1$ , atunci seria este divergentă.

2) Dacă  $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$ , atunci  $u_n \geq 1$ . Așadar, seria are o infinitate de termeni  $\geq 1$ , deci șirul termenilor nu este convergent către 0. Re-

Să notăm  $k = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$ . Să presupunem întii că avem  $k < 1$  și să luăm o vecinătate  $U = (a, b)$  a lui  $k$ , care nu conține pe 1 (fig. 162). În această vecinătate se află aproape toți termenii sirului  $(\sqrt[n]{u_n})$ , adică există un număr  $N$ , astfel ca pentru orice  $n > N$  să avem  $\sqrt[n]{u_n} < b < 1$ . Rezultă că seria este convergentă.

Să presupunem acum că avem  $k > 1$  și să considerăm vecinătatea  $(1, +\infty)$  a lui  $k$ . În această vecinătate se află aproape toți termenii sirului  $(\sqrt[n]{u_n})$ , deci avem  $\sqrt[n]{u_n} > 1$ , pentru o infinitate de termeni. Rezultă că seria este divergentă.

**C o r o l a r u l 2.** Fie  $\Sigma u_n$  o serie cu termeni pozitivi; să presupunem că sirul  $(\sqrt[n]{u_n})$  are limita  $k \leq \infty$ . Atunci:

- 1) Dacă  $k < 1$ , seria este convergentă.
- 2) Dacă  $k > 1$ , seria este divergentă.

În adevăr, în acest caz avem  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = k$ .

**O b s e r v a t i i .** 1° Dacă sirul  $(\sqrt[n]{u_n})$  este convergent și are limita  $k = 1$ , nu putem trage nici o concluzie asupra seriei.

De exemplu, seria armonică  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$  este divergentă dar sirul

$\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)$  are limita 1. Într-adevăr,  $\ln \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = -\frac{1}{n} \ln n$  și sirul  $\left(\frac{\ln n}{n}\right)$  are limita 0, deoarece funcția  $\frac{\ln x}{x}$  are, în punctul  $+\infty$ , limita 0, cum se constată ușor aplicând regula lui l'Hospital.

Cum  $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}$ , rezultă că sirul  $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)$  are limita 1.

La fel, seria  $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$  este divergentă, dar sirul  $(\sqrt[n]{u_n})$  are limita 1.

Există de asemenea serii convergente, pentru care sirul  $(\sqrt[n]{u_n})$  are limita 1. Anume, seria armonică generalizată

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$$

este convergentă dacă  $\alpha > 1$ . Totuși, sirul  $\sqrt[n]{n^{-\alpha}} = n^{-\frac{\alpha}{n}}$  are limita 1.

2° În demonstrația criteriului rădăcinii, s-a folosit convergența seriei geometrice cu rația  $r < 1$ . Ne vom feri deci să aplicăm criteriul rădăcinii pentru demonstrarea convergenței seriei geometrice.

*Aplicații.* 1. Fie seria

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

Aveam  $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n}$ ; șirul  $\sqrt[n]{u_n}$  are limita  $k = 0$ , deci seria este convergentă.

2. Fie seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

Aveam

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{3} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n},$$

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{3e} < 1$$

și deci seria este convergentă.

**Criteriul raportului (al lui d'Alembert).** Fie  $\Sigma u_n$  o serie cu termeni pozitivi.

1) Dacă există un număr  $N$  și un număr  $0 < k < 1$ , astfel încât pentru orice  $n \geq N$  să avem  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$ , atunci seria este convergentă.

2) Dacă există un număr  $N$ , astfel ca pentru orice  $n \geq N$  să avem  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ , atunci seria este divergentă.

**Demonstrație.** 1) Din inegalitatea  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$ , pentru  $n \geq N$ , deducem

$$u_{N+1} \leq ku_N$$

$$u_{N+2} \leq ku_{N+1} \leq k^2 u_N$$

. . . . .

$$u_{N+p} \leq k^p u_N$$

. . . . .

Așadar, seria  $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$  are termenii mai mici decât ai seriei geometrice

$$ku_N + k^2 u_N + k^3 u_N + \dots + k^p u_N + \dots, \quad (\text{cu rația } k < 1),$$

care este convergentă. Rezultă atunci că și seria  $\sum_{n=N}^{\infty} u_n$  este convergentă și deci și seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă.

2) Din inegalitatea  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$  pentru  $n \geq N$  deducem  $0 < u_n \leq u_{n+1}$ , deci sirul  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  al termenilor este crescător și are limită  $\geq 0$ , deci seria este divergentă.

Acest criteriu se poate enunța (punctul 2 într-o formă mai particulară) cu ajutorul limitelor extreme.

**C o r o l a r u l 1.** Fie  $\Sigma u_n$  o serie cu termeni pozitivi.

1) Dacă  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ , atunci seria este convergentă.

2) Dacă  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ , atunci seria este divergentă.

Să notăm  $k = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$  și să presupunem că avem  $k < 1$ . Să alegem o vecinătate  $U = (a, b)$  a lui  $k$  astfel ca  $b < 1$ . În această vecinătate se află aproape toți termenii sirului  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ , deci există  $N$  astfel încât pentru  $n > N$  să avem  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < b$ , și deci seria este convergentă.

Să notăm acum  $l = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$  și să presupunem că  $l > 1$ . Alegind vecinătatea  $(1, +\infty)$  a lui  $l$ , deducem că în această vecinătate se află aproape toți termenii sirului  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ , deci există  $N$  astfel ca pentru  $n > N$  să avem  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$  și deci seria este divergentă.

**C o r o l a r u l 2.** Fie  $\Sigma u_n$  o serie cu termeni pozitivi. Să presupunem că sirul  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  are limita  $k$ . Atunci:

1) Dacă  $k < 1$ , seria este convergentă.

2) Dacă  $k > 1$ , seria este divergentă.

În adevăr, în acest caz,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$ .

O b s e r v a t i i. 1° Deoarece în acest criteriu s-a folosit convergența seriei geometrice, nu putem aplica acest criteriu pentru a demonstra că seria geometrică cu rația  $r < 1$  este convergentă.

2° Dacă sirul  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  este convergent și are limita  $k = 1$ , nu putem trage nici o concluzie.

2) Din inegalitatea  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$  pentru  $n \geq N$  deducem  $0 < u_n \leq u_{n+1}$ , deci sirul  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  al termenilor este crescător și are limită  $\geq 0$ , deci seria este divergentă.

Acest criteriu se poate enunța (punctul 2 într-o formă mai particulară) cu ajutorul limitelor extreme.

**C o r o l a r u l 1.** Fie  $\Sigma u_n$  o serie cu termeni pozitivi.

1) Dacă  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ , atunci seria este convergentă.

2) Dacă  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ , atunci seria este divergentă.

Să notăm  $k = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$  și să presupunem că avem  $k < 1$ . Să alegem o vecinătate  $U = (a, b)$  a lui  $k$  astfel ca  $b < 1$ . În această vecinătate se află aproape toți termenii sirului  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ , deci există  $N$  astfel încât pentru  $n > N$  să avem  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < b$ , și deci seria este convergentă.

Să notăm acum  $l = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$  și să presupunem că  $l > 1$ . Alegind vecinătatea  $(1, +\infty)$  a lui  $l$ , deducem că în această vecinătate se află aproape toți termenii sirului  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ , deci există  $N$  astfel ca pentru  $n > N$  să avem  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$  și deci seria este divergentă.

**C o r o l a r u l 2.** Fie  $\Sigma u_n$  o serie cu termeni pozitivi. Să presupunem că sirul  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  are limită  $k$ . Atunci:

1) Dacă  $k < 1$ , seria este convergentă.

2) Dacă  $k > 1$ , seria este divergentă.

În adevăr, în acest caz,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$ .

O b s e r v a t i i. 1° Deoarece în acest criteriu s-a folosit convergența seriei geometrice, nu putem aplica acest criteriu pentru a demonstra că seria geometrică cu rația  $r < 1$  este convergentă.

2° Dacă sirul  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  este convergent și are limita  $k = 1$ , nu putem trage nici o concluzie.

*Exemplu.* 1) Știm că seria armonică  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$  este divergentă. Avem  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n}$ ; sirul  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  are limita 1.

2) Seria armonică generalizată  $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$  cu  $\alpha > 1$  este convergentă. Avem  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha$ ; sirul  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  are limita 1.

*Aplicații.* 1. Fie seria

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Aveam

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}, \text{ deci sirul } \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \text{ are limita 0. Rezultă că seria este convergentă.}$$

Se va arăta că suma seriei este numărul  $e$ .

2. Fie seria

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{3^n} + \dots$$

$$\text{Aveam } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^n & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Criteriul lui d'Alembert nu se poate aplica, deoarece pentru  $n$  par suficient de mare avem  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ , iar pentru  $n$  impar suficient de mare avem  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ .

Se aplică criteriul rădăcinii. Aveam

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \frac{1}{2} & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Aveam  $\sqrt[n]{u_n} \leq \frac{1}{2}$  pentru orice  $n$ . Rezultă că seria este convergentă.

**Criteriul lui Kummer.** Fie  $\Sigma u_n$  o serie cu termeni pozitivi:

1) Dacă există un sir  $(a_n)$  de numere strict pozitive, un număr  $\rho > 0$  și un număr  $N$  astfel încât să avem

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq \rho \text{ pentru oricărui } n \geq N,$$

atunci seria este convergentă.

2) Dacă există un sir  $(a_n)$  de numere strict pozitive, astfel încât seria  $\sum \frac{u_n}{a_n}$  să fie divergentă, și un număr  $N$  astfel încât  $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0$ , pentru orice  $n > N$ , atunci seria este divergentă.

**Demonstrație.** Fără a micșora generalitatea, vom presupune  $N = 1$ .

1) Din inegalitatea  $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq \rho$  deducem

$$\rho u_{n+1} \leq a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1},$$

adică

$$\rho u_1 \leq \rho u_1$$

$$\rho u_2 \leq a_1 u_1 - a_2 u_2$$

$$\rho u_3 \leq a_2 u_2 - a_3 u_3$$

.....

$$\rho u_n \leq a_{n-1} u_{n-1} - a_n u_n.$$

Notând cu  $S_n$  sumele parțiale ale seriei  $\sum u_n$  și adunând inegalitățile de mai sus, obținem

$$\rho S_n \leq (\rho + a_1) u_1 - a_n u_n \leq (\rho + a_1) u_1.$$

Deducem că sirul  $(S_n)$  este mărginit, și fiind și crescător (deoarece seria este cu termeni pozitivi) este convergent, deci seria este convergentă.

2) Din inegalitățile  $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0$ , deducem

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ sau } \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Dacă notăm  $v_n = \frac{1}{a_n}$ , seria  $\sum v_n$  este divergentă și avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

După al doilea criteriu al comparației deducem că seria  $\sum u_n$  este divergentă.

Din criteriul lui Kummer, deducem

**Criteriul lui Raabe și Duhamel.** Fie  $\sum u_n$  o serie cu termeni pozitivi.

1) Dacă există un număr  $k > 1$  și un număr  $N$  astfel încât să avem

$$n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq k \text{ pentru orice } n \geq N,$$

atunci seria este convergentă.

2) Dacă există un număr  $N$  astfel încât

$$n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \leq 1 \text{ pentru orice } n \geq N,$$

atunci seria este divergentă.

**Demonstrație.** Vom aplica criteriul lui Kummer pentru sirul  $(a_n)$ , unde  $a_n = n$ . Avem atunci, pentru  $n \geq N$ ,

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = n \frac{u_n}{u_{n+1}} - n - 1 = n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1.$$

1) Deoarece  $n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq k > 1$ , punind

$$\rho = k - 1 > 0, \text{ deducem că}$$

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq k - 1 = \rho > 0$$

și deci seria este convergentă.

2) Deoarece  $n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$ , deducem  $n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \leq 0$   
adică

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0.$$

Deoarece seria  $\sum \frac{1}{n}$  este divergentă, rezultă că și seria  $\sum u_n$  este divergentă.

**C o r o l a r .** Fie  $\sum u_n$  o serie cu termeni pozitivi. Să presupunem că sirul  $\left[ n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \right]_{1 \leq n \leq +\infty}$  are limita  $k$ .

**Atunci**

- 1) dacă  $k > 1$  seria este convergentă;
- 2) dacă  $k < 1$  seria este divergentă.

Într-adevăr, luăm o vecinătate  $U = (a, b)$  a lui  $k$  care să nu conțină pe 1 și astfel ca  $a \neq 1$ . În această vecinătate se află aproape toți termenii sirului, deci :

- 1) dacă  $k > 1$ , avem  $n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \geq a > 1$ ,

- 2) dacă  $k < 1$  avem  $n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) \leq b \leq 1$

și deci condițiile criteriului lui Raabe-Duhamel sunt verificate.

*Exemplu.* Fie seria

$$\sum_n \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}.$$

unde  $\alpha > 0$ . Seria este convergentă dacă  $\alpha > 2$ , și divergentă dacă  $\alpha < 2$ .

Să aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel :

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 = \frac{n!}{(n+1)!} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} - 1 = \frac{\alpha+n}{n+1} - 1 = \frac{\alpha-1}{n+1}.$$

Atunci

$$n \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \frac{n}{n+1} (\alpha-1).$$

Acest sir are limita  $k = (\alpha-1)$ . Dacă  $\alpha > 2$ , atunci  $k > 1$ , deci seria este convergentă. Dacă  $\alpha < 2$ , atunci  $k < 1$ , deci seria este divergentă. Pentru  $\alpha = 2$ , obținem  $k = 1$ , și criteriul lui Raabe-Duhamel nu ne dă nici o indicație. În acest caz seria se scrie

$$\sum \frac{n!}{2 \cdot 3 \dots (n+1)} = \sum \frac{1}{n+1},$$

adică

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \text{ și deci este divergentă.}$$

### § 3. Șiruri de funcții

#### 1. Mulțimea de convergență

Fie  $A$  o mulțime *oarecare* și  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  un sir de funcții reale\* definite, toate, pe  $A$ . Vom însemna prescurtat acest sir de funcții astfel :  $(f_n)_{1 \leq n < +\infty}$  sau  $(f_n)_{n \in N}$  sau  $(f_n)$ .

Fie  $a \in A$ . Valorile funcțiilor din sirul  $(f_n)$  în punctul  $a$  formează un sir de numere :

$$f_1(a), f_2(a), \dots, f_n(a), \dots$$

Așadar, pentru fiecare punct  $x \in A$ , putem considera sirul de numere  $(f_n(x))_{n \in N}$ , format cu valorile funcțiilor din sirul  $(f_n)$  în punctul  $x$ . Un sir de funcții  $(f_n)$  este deci echivalent cu o familie de siruri de numere  $(f_n(x))_{n \in N, x \in A}$ , și anume pentru fiecare punct  $x \in A$  cîte un sir de numere.

Vom spune că un punct  $a \in A$  este un punct de convergență al sirului de funcții  $(f_n)$ , dacă sirul de numere  $(f_n(a))$  este convergent.

Mulțimea punctelor de convergență ale sirului de funcții  $(f_n)$  se numește mulțimea de convergență a sirului  $(f_n)$ .

\* Majoritatea rezultatelor din acest paragraf rămîn adevărate pentru funcții cu valori intr-un spațiu Banach.

Fie  $B$  mulțimea de convergență a șirului  $(f_n)$ . Pentru fiecare punct  $x \in B$ , să notăm cu  $f(x)$  limita șirului de numere  $(f_n(x))$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Am stabilit astfel o corespondență  $x \rightarrow f(x)$  între punctele  $x \in B$  și numerele reale, adică o funcție reală  $f$  definită pe  $B$  prin egalitatea

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Funcția  $f$  se numește *funcția limită*, pe mulțimea  $B$ , a șirului de funcții  $(f_n)$ . Vom spune că șirul  $(f_n)$  converge pe mulțimea  $B$  către funcția  $f$ .

## 2. Convergență simplă. Convergență uniformă

Fie  $(f_n)$  un șir de funcții definite pe o mulțime  $A$ . Vom spune că o funcție  $f$  definită pe  $A$  este *limita simplă* (sau punctuală) a șirului  $(f_n)$ , sau că șirul  $(f_n)$  converge *simplu* (sau punctual) pe  $A$  către  $f$ , dacă pentru fiecare punct  $x \in A$ , șirul de numere  $(f_n(x))$  este convergent către numărul  $f(x)$ . Cu alte cuvinte:

*Șirul  $(f_n)$  este simplu convergent pe  $A$  către  $f$  dacă, oricare ar fi  $x \in A$ , și oricare ar fi  $\epsilon > 0$ , există un număr  $N(\epsilon, x)$ , astfel încât pentru orice  $n > N(\epsilon, x)$  să avem*

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Dacă șirul  $(f_n)$  este simplu convergent către  $f$ , vom scrie astfel:

$$f_n \xrightarrow{s} f.$$

Dacă în definiția precedentă numărul  $N$  depinde numai de  $\epsilon$ , nu și de  $x$ , vom spune că șirul  $(f_n)$  este uniform convergent pe  $A$  către  $f$ . Atunci, în definiția convergenței uniforme a șirului  $(f_n)$  către  $f$ , afirmația „oricare ar fi  $x$ ” trebuie să figureze după afirmația despre existența numărului  $N$ , pentru ca  $N$  să nu depindă de  $x$ . Așadar:

*Șirul  $(f_n)$  este uniform convergent pe  $A$  către  $f$ , dacă, oricare ar fi  $\epsilon > 0$ , există un număr  $N(\epsilon)$ , astfel încât, oricare ar fi  $n > N(\epsilon)$  și oricare ar fi  $x \in A$ , să avem*

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Dacă șirul  $(f_n)$  este uniform convergent către  $f$ , vom scrie astfel:

$$f_n \xrightarrow{u} f.$$

Evident, dacă sirul  $(f_n)$  este uniform convergent pe  $A$  către  $f$ , atunci sirul  $(f_n)$  este de asemenea simplu convergent pe  $A$  către  $f$ . Afirmația reciprocă nu este în general adevărată, cum va fi arătat prin cîteva exemple.

Mai întîi, vom da o imagine geometrică a convergenței uniforme (în cazul cînd  $A \subset R$ ). Să desenăm graficul funcției  $f$ , și al funcțiilor  $f - \varepsilon$  și  $f + \varepsilon$  (fig. 163).

Din definiția convergenței uniforme a sirului  $(f_n)$  către  $f$ , rezultă că există un număr  $N(\varepsilon)$ , astfel încît dacă  $n > N(\varepsilon)$ , graficul funcției  $f_n$  să fie în întregime cuprins în fîșia dintre graficele funcțiilor  $f - \varepsilon$  și  $f + \varepsilon$ .

*Exemplu. 1)  $A = [0, 1]$ ;  $f_n(x) = x^n$ .*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } x = 1 \\ 0 & \text{pentru } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Avem  $f_n \xrightarrow{u} f$ . Într-adevăr, sirul  $(f_n)$  se scrie

$$f_1(x) = x$$

$$f_2(x) = x^2$$

.....

$$f_n(x) = x^n$$

.....

Pentru  $x = 1$ , avem  $f_1(1) = 1, f_2(1) = 1, \dots, f_n(1) = 1, \dots$ , deci sirul  $(f_n(1))$  este constant și are limita  $1 = f(1)$ . Așadar, în punctul 1, sirul  $(f_n)$  este convergent către  $f$ .

Dacă  $0 \leq a < 1$ , avem  $f_n(a) = a^n$ . Se știe că sirul  $(a^n)$  este în acest caz convergent către  $0 = f(a)$ . Așadar, pentru orice  $x \in [0, 1]$ , sirul de numere  $(f_n(x))$  este convergent către  $f(x)$ , ceea ce înseamnă că sirul  $(f_n)$  este simplu convergent pe  $[0, 1]$  către  $f$ .

Sirul  $(f_n)$  nu este însă uniform convergent către  $f$ . Într-adevăr, să presupunem prin absurd că  $f_n \xrightarrow{u} f$ . Fie  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ; atunci există un număr  $N = N\left(\frac{1}{2}\right)$  astfel încît, oricare ar fi  $n \geq N$ , și oricare ar fi  $x \in [0, 1]$  să avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}.$$

Pentru  $0 \leq x < 1$ , avem  $f(x) = 0$ , deci pentru  $n \geq N$  rezultă  $|f_n(x)| < \frac{1}{2}$  sau

$$x^n < \frac{1}{2}.$$

În particular, pentru orice  $x \in [0, 1]$  avem  $x^N < \frac{1}{2}$ .

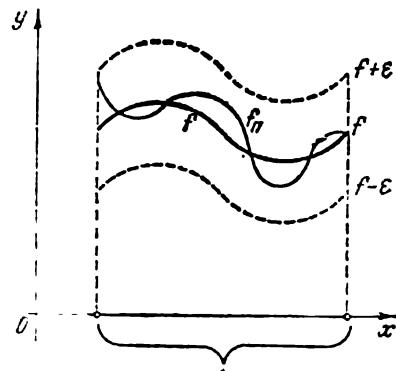


Fig. 163

Dacă  $(x_k)$  este un șir de numere din  $(0, 1)$  convergent către 1, șirul  $(x_k^N)$  este convergent către 1, deci există un număr  $0 < x_{k_0} < 1$ , astfel ca  $\frac{3}{4} < x_{k_0}^N < 1$ , ceea ce este în contradicție cu inegalitatea  $x_{k_0}^N < \frac{1}{2}$ .

Așadar, șirul  $(f_n)$  nu este uniform convergent către  $f$ .

Explicația geometrică: funcțiile  $f - \epsilon$  și  $f + \epsilon$  sunt definite de următoarele egalități:

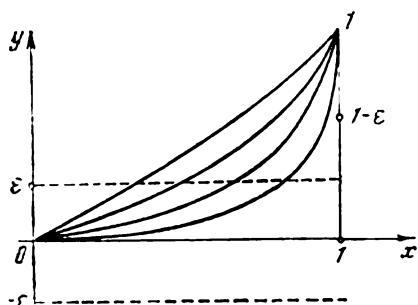


Fig. 164

$$f(x) - \epsilon = \begin{cases} -\epsilon & \text{pentru } 0 \leq x < 1 \\ 1 - \epsilon & \text{pentru } x = 1; \end{cases}$$

$$f(x) + \epsilon = \begin{cases} +\epsilon & \text{pentru } 0 \leq x < 1 \\ 1 + \epsilon & \text{pentru } x = 1. \end{cases}$$

Oricit de mare ar fi  $n$ , graficul funcției  $f_n$ iese din fișă determinată de funcțiile  $f - \epsilon$  și  $f + \epsilon$ .

$$2) A = [0, 2\pi]; f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, f(x) \equiv 0.$$

Aveam  $f_n \xrightarrow{n} f$ . Într-adevăr, șirul  $\left(\frac{1}{n}\right)$  este convergent către 0. Pentru  $\epsilon > 0$ , există un număr

$N(\epsilon)$ , astfel încit, dacă  $n \geq N(\epsilon)$ , atunci  $\frac{1}{n} < \epsilon$ . Atunci pentru  $n \geq N(\epsilon)$ , avem

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n} - 0 \right| = \frac{|\sin nx|}{n} \leq \frac{1}{n} < \epsilon \text{ oricare ar fi } x \in [0, 2\pi].$$

Din diagramă se vede că luind o fișă în jurul funcției  $f(x) \equiv 0$ , atunci, pentru  $n$  suficient de mare, graficul funcției  $f_n$  este cuprins în această fișă.

3)  $A = [0, +\infty); f_n(x) = \frac{x}{x+n}; f(x) \equiv 0$ . Avem  $f_n \xrightarrow{s} f$ . Într-adevăr, pentru oricare  $x \geq 0$ , șirul  $\left(\frac{x}{x+n}\right)_{n \in N}$  are limita 0, adică șirul  $(f_n(x))$  are limita 0.

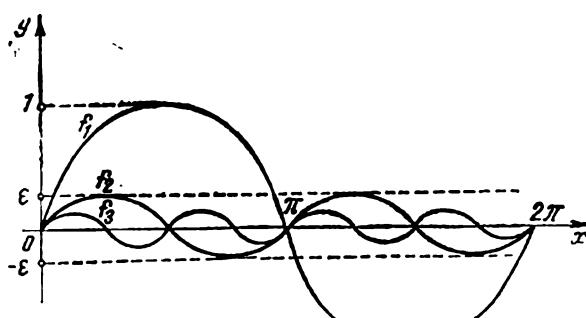


Fig. 165

Șirul  $(f_n)$  nu converge însă uniform pe  $A$  către  $f(x) \equiv 0$ .

$$\text{Într-adevăr, fie } \epsilon = \frac{1}{2}.$$

Dacă  $(f_n)$  ar converge uniform către  $f$ , ar exista un număr  $N = N\left(\frac{1}{2}\right)$ , astfel încit, pentru  $n \geq N$ , să avem  $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}$  oricare ar fi  $x \in A$ , adică  $\frac{x}{x+n} < \frac{1}{2}$ .

$$\text{ar fi } x \in A, \text{ adică } \frac{x}{x+n} < \frac{1}{2}.$$

În particular, am avea  $\frac{x}{x+N} < \frac{1}{2}$  oricare ar fi  $x > 0$ . Dacă luăm  $x = 3N$ , atunci  $\frac{x}{x+N} = \frac{3N}{3N+N} = \frac{3}{4} < \frac{1}{2}$  și am ajuns la o contradicție.

4) Fie  $(a_n)$  un sir de numere și pentru fiecare  $n$  să considerăm funcția constantă  $f_n(x) = a_n$  definită pe o mulțime  $A$ . Dacă sirul de numere  $(a_n)$  este convergent, atunci sirul de funcții  $(f_n)$  este uniform convergent pe  $A$ .

### 3. Criterii de convergență uniformă

Deoarece convergența simplă a sirului de funcții  $(f_n)$  către funcția  $f$  revine, pentru fiecare  $x \in A$ , la convergența sirului de numere  $(f_n(x))$  către numărul  $f(x)$ , criteriile de convergență de la sirurile de numere se aplică și în acest caz.

Convergența uniformă a sirului de funcții  $(f_n)$  către funcția  $f$  înseamnă însă ceva mai mult decât convergența simplă: toate sirurile  $(f_n(x))$ , pentru toate punctele  $x \in A$ , sunt „egal convergente” sau „la fel de repede convergente”.

Vom da două criterii de convergență uniformă.

Primul criteriu este asemănător criteriului lui Cauchy de la sirurile de numere.

**Criteriul I (Cauchy).** Fie  $(f_n)$  un sir de funcții definite pe o mulțime  $A$ . Sirul  $(f_n)$  este uniform convergent către o funcție  $f$  definită pe  $A$ , dacă și numai dacă pentru orice  $\epsilon > 0$  există un număr  $N(\epsilon)$ , astfel încât, oricare ar fi  $n, m \geq N(\epsilon)$  și oricare ar fi  $x \in A$ , să avem

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

**Demonstrație.** Să presupunem întâi că  $f_n \xrightarrow{u} f$ . Fie  $\epsilon > 0$ ; există atunci un număr  $N(\epsilon)$ , astfel încât oricare ar fi  $p \geq N(\epsilon)$  și oricare ar fi  $x \in A$  să avem

$$|f_p(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Atunci, dacă  $n, m \geq N(\epsilon)$  și  $x \in A$ , avem

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Reciproc, să presupunem că pentru orice  $\epsilon > 0$  există  $N(\epsilon)$ , astfel încât, oricare ar fi  $n, m \geq N(\epsilon)$  și oricare ar fi  $x \in A$ , să avem

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

și să arătăm că există o funcție  $f$  definită pe  $A$ , astfel ca  $f_n \xrightarrow{u} f$ . Din ipoteză, rezultă că pentru fiecare  $x \in A$ , sirul de numere  $(f_n(x))$  este un sir fundamental, deci are ca limită un număr, pe care să-l notăm  $f(x)$ . Am construit

deci o funcție  $x \rightarrow f(x)$  definită pe  $A$ . Din modul în care a fost construită funcția  $f$ , rezultă că  $f_n \xrightarrow{s} f$ . Fie  $\varepsilon > 0$  și  $N(\varepsilon)$ , astfel ca pentru  $n, m \geq N(\varepsilon)$  și  $x \in A$  să avem

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Să luăm  $m_0 \geq N(\varepsilon)$ . Deoarece  $f_n \xrightarrow{s} f$ , avem  $f_n - f_{m_0} \xrightarrow{s} f - f_{m_0}$  și deoarece, pentru orice  $x \in A$  avem

$$|f_n(x) - f_{m_0}(x)| < \varepsilon \text{ dacă } n \geq N(\varepsilon),$$

rezultă prin trecerea la limită că pentru orice  $x \in A$  avem, de asemenea,

$$|f(x) - f_{m_0}(x)| < \varepsilon.$$

Cum  $m_0$  a fost arbitrar  $\geq N(\varepsilon)$ , deducem că oricare ar fi  $n \geq N(\varepsilon)$  și oricare ar fi  $x \in A$  avem

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

adică  $f_n \xrightarrow{u} f$ .

Dăm acum un criteriu asemănător cu criteriul de convergență al șirurilor de numere.

**Criteriul II.** Fie  $(f_n)$  și  $(\varphi_n)$  două șiruri de funcții definite pe  $A$  și  $f$  o funcție definită pe  $A$ . Dacă avem

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varphi_n(x), \text{ pentru orice } n \in N \text{ și orice } x \in A,$$

și dacă  $\varphi_n \xrightarrow{u} 0$ , atunci  $f_n \xrightarrow{u} f$ .

Într-adevăr, fie  $\varepsilon > 0$ . Deoarece  $\varphi_n \xrightarrow{u} 0$ , există un număr  $N(\varepsilon)$ , astfel încât, oricare ar fi  $n \geq N(\varepsilon)$  și oricare ar fi  $x \in A$ , să avem  $\varphi_n(x) < \varepsilon$ . Atunci, cu atât mai mult, avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

oricare ar fi  $n \geq N(\varepsilon)$  și oricare ar fi  $x \in A$ , adică  $f_n \xrightarrow{u} f$ .

*Observație.* Avem  $f_n \xrightarrow{u} f$  dacă și numai dacă  $f_n - f \xrightarrow{u} 0$ . Criteriul precedent afirmă că dacă șirul de funcții  $f_n - f$  este majorat de un șir de funcții uniform convergent către 0, atunci  $f_n - f \xrightarrow{u} 0$ .

Criteriul II se aplică adesea în cazul particular al următorului

**Corolar.** Fie  $(f_n)$  un șir de funcții definite pe  $A$  și  $f$  o funcție definită pe  $A$ . Dacă există un șir de numere  $(a_n)$  astfel încât să avem

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \text{ pentru orice } n \in N \text{ și orice } x \in A$$

și dacă  $a_n \rightarrow 0$ , atunci  $f_n \xrightarrow{u} f$ .

În adevăr, sirul de funcții constante  $\varphi_n(x) = a_n$  este uniform convergent către 0.

În exemplul 2 de mai sus am avut  $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$ , oricare ar fi  $n \in N$  și oricare ar fi  $x \in [0, 2\pi]$ , deci se poate aplica criteriul de mai sus.

#### 4. Continuitatea și convergența uniformă

Se ridică în mod natural întrebarea dacă o anumită proprietate, pe care o au toate funcțiile unui sir  $(f_n)$ , o are și limita  $f$  a acestui sir. Teorema următoare arată că prin *convergență uniformă*, proprietatea de *continuitate* a funcțiilor din sir se transmite și asupra limitei. Vom presupune că  $A \subset R$  (sau  $A \subset R^n$ ).

**T e o r e m ā.** Fie  $(f_n)$  un sir uniform convergent pe mulțimea  $A \subset R$  către funcția  $f$ . Dacă toate funcțiile  $f_n$  sunt continue într-un punct  $a \in A$ , atunci și funcția limită  $f$  este continuă în punctul  $a$ .

**Demonstrație.** Fie  $\varepsilon > 0$ . Deoarece  $f_n \xrightarrow{u} f$ , există  $N = N(\varepsilon)$ , astfel încât oricare ar fi  $x \in A$  să avem

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

În particular,  $|f_N(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Deoarece funcția  $f$  este continuă în punctul  $a$ , pentru numărul  $\varepsilon$  ales, există o vecinătate  $V$  a lui  $a$ , astfel încât, oricare ar fi  $x \in V \cap A$ , să avem

$$|f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Atunci, pentru orice  $x \in V \cap A$ , avem

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Aceasta înseamnă că  $f$  este continuă în  $a$ , și teorema este demonstrată.

**C o r o l a r .** Limita unui sir uniform convergent de funcții continue pe  $A$  este o funcție continuă pe  $A$ .

**O b s e r v a t i e.** 1° Este posibil ca funcțiile  $(f_n)$  să nu fie continue, sau convergența să nu fie uniformă și totuși limita  $f$  a sirului să fie continuă.

## 5. Integrabilitatea și convergența uniformă

Teorema următoare arată că proprietatea de integrabilitate se transmite, de asemenea, asupra limitei uniforme. Vom arăta mai întâi că și proprietatea de mărginire se conservă prin convergența uniformă.

**Propozitie.** Dacă  $(f_n)$  este un șir de funcții mărginite pe  $A$  și uniform convergent către o funcție  $f$ , atunci și limita  $f$  este mărginită pe  $A$ .

Să alegem  $\epsilon = 1$ . Deoarece  $f_n \xrightarrow{u} f$ , există un număr  $N = N(1)$ , astfel încât oricare ar fi  $x \in A$  să avem

$$|f(x) - f_N(x)| \leq 1, \text{ deci } |f(x)| \leq |f_N(x)| + 1.$$

Deoarece funcția  $f_N$  este mărginită, există un număr  $M$  astfel încât oricare ar fi  $x \in A$  să avem  $|f_N(x)| \leq M$ . Rezultă că

$$|f(x)| \leq M + 1, \text{ oricare ar fi } x \in A,$$

adică  $f$  este mărginită.

**Teoremă.** Dacă  $(f_n)$  este un șir uniform convergent de funcții integrabile pe un interval  $[a, b]$ , atunci :

1) funcția  $f$  este integrabilă;

2) șirul integralelor  $\left( \int_a^b f_n dx \right)$  este convergent, și avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx.$$

Din criteriul de integrabilitate a lui Lebesgue rezultă că fiecare funcție  $f_n$  este mărginită, iar mulțimea  $A_n$  a punctelor sale de discontinuitate este neglijabilă.

Din propoziția precedentă deducem în primul rînd că  $f$  este mărginită. Din teorema de la numărul precedent rezultă că mulțimea  $A$  a punctelor de discontinuitate ale funcției  $f$  este conținută în reuniunea mulțimilor  $A_n$ , deci  $A$  este neglijabilă. Aplicînd criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue, rezultă că  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ .

Fie acum  $\epsilon > 0$ . Deoarece  $f_n \xrightarrow{u} f$ , există  $N(\epsilon)$ , astfel încât oricare ar fi  $n \geq N(\epsilon)$  și oricare ar fi  $x \in [a, b]$  să avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Rezultă atunci că

$$\int_a^b |f_n - f| dx < \epsilon.$$

Din relațiile

$$\left| \int_a^b f_n dx - \int_a^b f dx \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) dx \right| \leq \int_a^b |f_n - f| dx$$

deducem

$$\left| \int_a^b f_n dx - \int_a^b f dx \right| < \epsilon, \text{ pentru } n \geq N(\epsilon),$$

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx.$$

*Observație.* Deoarece  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ , egalitatea demonstrată se scrie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dx.$$

Teorema precedentă este numită adesea teorema de integrare termen cu termen a șirurilor de funcții.

## 6. Derivabilitatea și convergența uniformă

O altă proprietate care se păstrează prin convergența uniformă este aceea de a fi funcții derivate (v. teorema 3).

**T e o r e m a 1.** Ie  $(f_n)$  un șir de funcții derivabile pe un interval  $I$ . Dacă :

- 1) șirul  $(f_n)$  este uniform convergent pe  $I$  către o funcție  $f$ ;
- 2) șirul derivatelor  $(f'_n)$  este uniform convergent pe  $I$  către o funcție  $g$ , atunci  $f$  este derivabilă pe  $I$  și  $f' = g$ .

**Demonstrație.** Fie  $a \in I$  un punct oarecare ; să arătăm că  $f$  este derivabilă în  $a$  și că  $f'(a) = g(a)$ .

Fie  $\epsilon > 0$ . Deoarece șirul  $(f'_n)$  este uniform convergent, există un număr  $N(\epsilon)$  astfel încât dacă  $n, m \geq N(\epsilon)$  să avem

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

Să alegem  $n_0 > N(\epsilon)$ . Deoarece  $f'_m \xrightarrow{u} g$ , rezultă  $f'_{n_0} - f'_m \xrightarrow{u} f'_{n_0} - g$  ; din inegalitatea precedentă deducem că :

$$|f'_{n_0}(x) - g(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

Deoarece funcția  $f_{n_0}$  este derivabilă în  $a$ , pentru  $\varepsilon$  ales există o vecinătate  $U$  a lui  $a$ , astfel încât

$$\left| \frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)}{x - a} - f'_{n_0}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

oricare ar fi  $x \in U \cap I$ .

Putem scrie, de asemenea,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} - \frac{f_m(x) - f_m(a)}{x - a} \right| &= \left| \frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(a) - f_m(a))}{x - a} \right| = \\ &= |f'_n(c) - f'_m(c)| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

dacă  $n, m \geq N(\varepsilon)$ , oricare ar fi  $x \in I$ , unde  $c$  este un anumit punct cuprins între  $x$  și  $a$  (s-a aplicat teorema creșterilor finite funcției  $f_n - f_m$ ).

Cum  $f_m \xrightarrow{u} f$ , avem  $f_{n_0} - f_m \xrightarrow{u} f_{n_0} - f$ ; din inegalitatea precedentă, deducem, pentru  $n = n_0$  și  $m \rightarrow \infty$ ,

$$\left| \frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)}{x - a} - \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

Pentru orice  $x \in U \cap I$  deducem atunci

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - g(a) \right| &\leq \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)}{x - a} \right| + \\ &+ \left| \frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)}{x - a} - f'_{n_0}(a) \right| + |f'_{n_0}(a) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Așadar, pentru orice  $\varepsilon > 0$  putem găsi o vecinătate  $U$  a lui  $a$ , astfel încât să avem

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - g(a) \right| < \varepsilon, \text{ pentru orice } x \in U \cap I.$$

Aceasta înseamnă că  $f$  este derivabilă în  $a$  și că  $f'(a) = g(a)$ . Cum  $a$  a fost ales arbitrar, deducem că  $f$  este derivabilă pe  $I$  și că  $f' = g$ .

*Observații.* 1° Deoarece  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  și  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$ , egalitatea  $f' = g$  se scrie

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$$

(derivata limitei este egală cu limita derivatelor). De aceea teorema precedentă este numită *teorema de derivare termen cu termen a șirurilor de funcții*.

2° Convergența uniformă a șirului  $(f_n)$  nu atrage convergența uniformă a șirului derivatelor.

*Exemplu.*  $I = [0, \pi]$ ;  $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}$ ,  $f(x) \equiv 0$ . Avem  $f_n \xrightarrow{u} f$ . În adevăr

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\cos nx}{n} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

iar sirul  $\left( \frac{1}{n} \right)$  are limita 0. Se aplică criteriul II de convergență uniformă.

Funcțiile  $(f_n)$  sunt derivabile pe  $I$  și  $f'_n(x) = -\sin nx$ . Sirul derivatelor  $(f'_n)$  nu este însă convergent pe  $I$ . Pentru  $x = \frac{\pi}{2}$  avem  $f'_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin n \frac{\pi}{2}$ . Acest sir se scrie, pentru  $n = 1, 2, \dots$ , astfel:

$$-1, 0, 3, 0, -5, 0, 7, 0, \dots$$

și se vede că nu este convergent.

3° Convergența uniformă a sirului derivatelor este esențială. Dacă sirul derivatelor  $(f'_n)$  converge simplu, dar nu uniform, către  $g$ , atunci este posibil ca  $f$  să nu fie derivabilă, sau, dacă este derivabilă, este posibil ca  $f' \neq g$ .

*Exemplu.*  $I = R$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} nx$ ,  $f(x) \equiv 0$ .

Avem  $f_n \xrightarrow{u} f$ , deoarece

$$|f_n(x)| = \left| \frac{1}{n} \operatorname{arctg} nx \right| \leq \frac{1}{n} \frac{\pi}{2}.$$

Funcțiile  $f_n$  sunt derivabile pe  $I$  și  $f'_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 x^2}$ .

Sirul  $(f'_n)$  converge simplu către funcția

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Dacă sirul  $(f'_n)$  ar converge uniform, limita sa  $g$  ar fi continuă, deoarece și funcțiile  $f'_n$  sunt continue.

Cum funcția  $g$  este discontinuă în origine, rezultă că sirul  $(f'_n)$  nu converge uniform către  $g$ .

Funcția  $f$  este derivabilă pe  $I$  și avem  $f'(x) \equiv 0$ , dar  $f' \neq g$ , deoarece în origine avem  $f'(0) = 0$  și  $g(0) = 1$ .

4° Deși convergența uniformă a sirului derivatelor este importantă, această condiție este numai suficientă, dar nu și necesară pentru concluzia teoremei.

*Exemplu.*  $I = (0, \infty)$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} nx$ ,  $f(x) \equiv 0$ . Avem  $f_n \xrightarrow{u} f$ . Avem apoi

$f'_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 x^2}$ ,  $g(x) \equiv 0$  și  $f'_n \xrightarrow{s} g$ . Deși sirul  $(f'_n)$  nu converge uniform către  $g$ , avem totuși  $f' = g$ .

Dacă intervalul  $I$  este mărginit, concluzia teoremei precedente rămîne adevărată și dacă despre șirul  $(f_n)$  se știe că este convergent într-un singur punct. În adevăr, dacă  $I$  este mărginit, restul ipotezelor implică convergență uniformă pe întregul interval.

**T e o r e m a 2.** Fie  $I$  un interval mărginit și  $(f_n)$  un șir de funcții derivabile pe  $I$ . Dacă:

- 1) șirul  $(f_n)$  este convergent într-un punct  $x_0 \in I$ ;
- 2) șirul derivatelor  $(f'_n)$  este uniform convergent pe  $I$  către o funcție  $g$ , atunci

- (i) șirul  $(f_n)$  este uniform convergent pe  $I$  către o funcție  $f$ ;
- (ii) limita  $f$  este derivabilă pe  $I$  și  $f' = g$ .

Aveni de demonstrat doar punctul (i), deoarece punctul (ii) rezultă aplicînd teorema precedentă.

Să notăm cu  $l$  lungimea intervalului  $I$ . Presupunem  $l > 0$ . Fie  $\epsilon > 0$ . Din condițiile 1 și 2 deducem că există un număr  $N(\epsilon)$  astfel încît pentru orice  $n \geq N(\epsilon)$  și  $m \geq N(\epsilon)$  să avem în același timp verificate următoarele inegalități:

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$$

și

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\epsilon}{2l}, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

Atunci

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + \\ &\quad + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|. \end{aligned}$$

Dacă notăm  $h = f_n - f_m$ , primul termen din dreapta se scrie  $h(x) - h(x_0)$ .

Funcția  $h$  este derivabilă pe intervalul închis cu extremitățile în  $x$  și  $x_0$ , deci i se poate aplica teorema creșterilor finite; există un număr  $c$  cuprins între  $x$  și  $x_0$  astfel încît

$$h(x) - h(x_0) = (x - x_0) h'(c),$$

de unde

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| &= |x - x_0| |f'_n(c) - f'_m(c)| \leqslant \\ &\leqslant l |f'_n(c) - f'_m(c)| < l \frac{\epsilon}{2l} = \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

pentru orice  $n, m \geq N(\epsilon)$  și orice  $x \in I$ . Urmează deci că

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

oricare ar fi  $n, m \geq N(\epsilon)$  și oricare ar fi  $x \in I$ . Conform criteriului  $I$  de convergență uniformă, rezultă că șirul  $(f_n)$  converge uniform pe  $I$  către o funcție  $f$ .

Fără nici o ipoteză asupra funcțiilor care se derivează, se poate enunța următorul rezultat, relativ numai la derivate.

**T e o r e m a 3.** Limita  $g$  a unui sir uniform convergent  $(g_n)$  de funcții derivate pe un interval oarecare  $I$  este o funcție derivată.

Să presupunem întâi că intervalul  $I$  este mărginit și fie  $x_0 \in I$ . Pentru fiecare  $n$ , fie  $f_n$  o primitivă a funcției  $g_n$ :

$$f'_n = g_n.$$

Putem alege primitivele  $f_n$  astfel încât să avem  $f_n(x_0) = 0$ . Sîntem acum în condițiile teoremei precedente. Rezultă că sirul  $(f_n)$  este uniform convergent pe  $I$  către o funcție derivabilă  $f$  și că  $f' = g$ , deci  $g$  este, de asemenea, o derivată.

Să presupunem acum că intervalul  $I$  este nemărginit. Putem atunci construi un sir crescător  $(I_n)$  de intervale mărginite, a căror reuniune să fie egală cu  $I$ :

$$I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset \dots \subset I \text{ și } \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I.$$

Fie  $x_0 \in I_1$ , deci  $x_0 \in I_n$  pentru fiecare  $n$ . Conform primei părți a demonstrației, pe fiecare interval mărginit  $I_n$ , funcția  $g$  este derivata unei funcții  $F_n$  definită pe  $I_n$ . Putem alege funcțiile  $F_n$  astfel ca  $F_n(x_0) = 0$ . Să observăm că dacă un punct  $x$  face parte din două intervale  $I_n$  și  $I_m$ , atunci avem  $F_n(x) = F_m(x)$ . În adevăr, dacă  $I_n \subset I_m$  (adică dacă  $n < m$ ), atunci funcțiile  $F_n$  și  $F_m$  au pe intervalul  $I_n$  aceeași derivată  $g$ , deci diferența lor pe  $I_n$  este constantă; dar  $F_n(x_0) = F_m(x_0) = 0$ , deci  $F_n(x) = F_m(x)$  pentru orice  $x \in I_n$ .

Să definim acum funcția  $F$  pe întregul interval  $I$  astfel: dacă un punct  $x$  din  $I$  se află într-un interval  $I_n$ , atunci luăm  $F(x) = F_n(x)$ . Conform observației de mai sus, numărul  $F(x)$  este independent de alegerea particulară a intervalului  $I_n$  care conține pe  $x$ .

Funcția  $F$  este derivabilă pe  $I$  și derivata sa este  $g$ . În adevăr, fie  $a \in I$ . Există un interval  $I_n \ni a$ , deci  $F(a) = F_n(a)$ . Dar  $F_n$  este derivabilă în  $a$  și  $F'_n(a) = g(a)$ . Rezultă că  $F$  este derivabilă în  $a$  și  $F'(a) = F'_n(a) = g(a)$ . Cum  $a \in I$  a fost ales arbitrar, rezultă că  $F$  este derivabilă pe  $I$  și  $F' = g$ , deci  $g$  este o derivată.

*Observație.* Teorema precedentă se poate enunța și astfel:

Dacă sirul  $(g_n)$  este uniform convergent pe  $I$  către o funcție  $g$  și dacă funcțiile  $g_n$  au primitive pe  $I$ , atunci și limita  $g$  are primitive pe  $I$ .

## 7. Aproximarea uniformă a funcțiilor continue

În teoremele care urmează se arată că funcțiile continue pot fi aproximate uniform cu funcții aparținând unei mulțimi mai restrînse de funcții continue.

Reamintim că o mulțime  $\mathcal{A}$  de funcții continue definite pe o mulțime  $A$  este o algebră dacă suma și produsul a două funcții din  $\mathcal{A}$  aparțin lui  $\mathcal{A}$  și produsul unei funcții din  $\mathcal{A}$  cu un număr aparține de asemenea lui  $\mathcal{A}$ .

Un exemplu de algebră de funcții continue pe  $R$  este mulțimea polinoamelor definite pe  $R$ , deoarece suma și produsul a două polinoame este un polinom, iar produsul unui polinom cu un număr este de asemenea un polinom. Desigur, algebra polinoamelor pe  $R$  nu conține toate funcțiile continue pe  $R$ .

**Teorema lui Weierstrass-Stone\***. Fie intervalul compact  $I = [a, b]$  și  $\mathcal{A}$  o algebră de funcții continue definite pe  $I$ . Dacă:

- 1) funcția identic egală cu 1 pe  $I$ ,  $f(x) \equiv 1$ , aparține lui  $\mathcal{A}$ ;
- 2) pentru orice puncte  $x' \neq x''$  există o funcție  $f \in \mathcal{A}$ , astfel încât  $f(x') \neq f(x'')$ ;

atunci orice funcție continuă pe  $I$  este limita uniformă a unui sir de funcții din  $\mathcal{A}$ .

Nu dăm demonstrația acestei teoreme.

O consecință a acestei teoreme este

**Teorema lui Weierstrass.** Orice funcție continuă pe un interval compact  $I = [a, b]$  este limita uniformă pe  $I$  a unui sir de polinoame.

Într-adevăr, dacă notăm cu  $\mathfrak{L}$  algebra polinoamelor, funcția identic egală cu 1 pe  $I$ ,  $f(x) \equiv 1$  este un polinom, deci aparține algebrei  $\mathfrak{L}$ . Dacă  $x' \neq x''$  sunt două puncte oarecare din  $I$ , pentru funcția  $f(x) = x$  avem  $f(x') \neq f(x'')$ ; dar  $f(x) = x$  este un polinom din  $\mathfrak{L}$ . Așadar condițiile teoremei precedente sunt îndeplinite, de unde rezultă teorema lui Weierstrass.

**Observații.** 1° Teorema precedentă afirmă doar că pentru o funcție continuă  $f$  pe  $I$  există un sir  $(f_n)$  de polinoame uniform convergent către  $f$ , dar nu ne dă un procedeu să calculăm aceste polinoame.

Matematicianul sovietic S. N. Bernstein a dat o metodă prin care putem calcula, pentru o funcție continuă  $f$  pe  $I$ , un sir  $(p_n)$  de polinoame uniform convergent către  $f$ . Aceste polinoame se numesc polinoamele lui Bernstein.

2° Dacă ne dăm un număr  $a$ , nu există numai un sir de numere  $(x_n)$  convergent către  $a$ . În mod analog, dacă ne dăm o funcție continuă  $f$  pe  $I$ , nu există numai un sir  $(f_n)$  de polinoame uniform convergent către  $f$ . Polinoamele lui Bernstein formează doar unul din aceste siruri.

## 8. Aproximarea funcțiilor continue prin funcții poligonale

Fie  $I$  un interval. O funcție  $f$  definită pe  $I$  se numește funcție liniară dacă există două numere  $m$  și  $n$ , astfel încit

$$f(x) = mx + n, \text{ pentru orice } x \in I.$$

**Observație.** Graficul unei funcții liniare este un segment de dreaptă.

\* Teorema rămîne valabilă dacă se înlocuiește intervalul  $I$  cu un spațiu compact oarecare.

Orice funcție liniară  $f(x) = mx + n$  are primitivele  $F(x) = \frac{1}{2}mx^2 + nx + C$ .

Dacă  $I$  este mărginit, cu extremități în  $a$  și  $b$ ,  $a < b$ , am numit diviziune a intervalului  $I$  un număr de puncte  $x_0, x_1, \dots, x_n$  astfel ca

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

O funcție continuă  $f$  definită pe  $I$  se numește *funcție poligonală* dacă există o diviziune a lui  $I$ ,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b,$$

astfel încât restricția funcției  $f$  la fiecare interval parțial  $[x_i, x_{i+1}]$  să fie liniară.

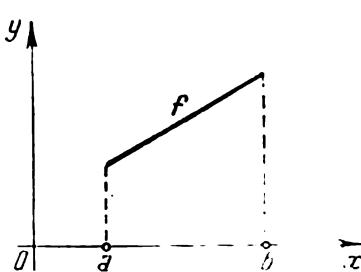


Fig. 166

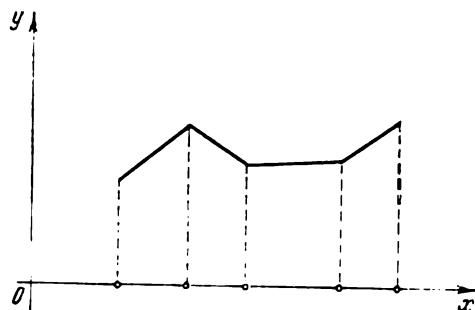


Fig. 167

Graficul unei funcții poligonale este o linie poligonală.

Orice funcție poligonală este continuă, deci are primitive. Putem însă demonstra direct acest fapt. Vom demonstra mai întâi următoarea

**Lemă.** Fie  $I_1$  și  $I_2$  două intervale care au în comun cel puțin un punct  $x_0$ , și  $f$  o funcție definită pe  $I = I_1 \cup I_2$ . Dacă  $f$  are primitive pe fiecare din intervalele  $I_1$  și  $I_2$ , atunci  $f$  are primitive și pe reuniunea lor  $I$ .

În adevară, fie  $F_1 : I_1 \rightarrow R$  o primitivă a lui  $f$  pe  $I_1$ :

$$F'_1(x) = f(x) \text{ pentru } x \in I_1$$

și  $F_2 : I_2 \rightarrow R$  o primitivă a lui  $f$  pe  $I_2$ :

$$F'_2(x) = f(x) \text{ pentru } x \in I_2.$$

Să observăm că, pe intersecția  $I_1 \cap I_2$ , diferența  $F_1 - F_2$  este constantă, deoarece cele două funcții au deriveate egale pe  $I_1 \cap I_2$ :

$$F'_1(x) = F'_2(x) = f(x) \text{ pentru } x \in I_1 \cap I_2.$$

Aveam atunci

$$F_1(x) - F_2(x) = F_1(x_0) - F_2(x_0) \text{ pentru } x \in I_1 \cap I_2.$$

Să definim acum funcția  $F$  pe reuniunea  $I_1 \cup I_2$  astfel:

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) & \text{dacă } x \in I_1 \\ F_2(x) + F_1(x_0) - F_2(x_0) & \text{dacă } x \in I_2. \end{cases}$$

Dacă  $x \in I_1 \cap I_2$ , funcția are aceeași valoare, prin cele două definiții, deoarece  $F_2(x) + F_1(x_0) - F_2(x_0) = F_2(x) + F_1(x) - F_2(x) = F_1(x)$ . Funcția  $F$  este derivabilă pe  $I_1 \cup I_2$  și derivata sa pe  $I_1 \cup I_2$  este  $f$ , deci  $f$  are primitive pe  $I_1 \cup I_2$ . Din această rezultă imediat următoarea

**Propozitie.** Orice funcție poligonală are primitive.

Într-adevăr, o funcție poligonală este liniară pe intervalele  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , deci are primitive pe fiecare din aceste intervale. Cum  $I_1$  și  $I_2$  au în comun un punct, funcția poligonală are primitive pe  $I_1 \cup I_2$ ; dar  $I_1 \cup I_2$  și  $I_3$  au în comun un punct, deci funcția poligonală are primitive pe reuniunea  $I_1 \cup I_2 \cup I_3$  s.a.m.d.

Teorema următoare arată că funcțiile continue pe intervale compacte pot fi aproximărate uniform cu funcții poligonale.

**Theoremă.** Fie  $I = [a, b]$  un interval compact. Pentru orice funcție  $f$  continuă pe  $I$ , există un sir  $(p_n)$  de funcții poligonale definite pe  $I$ , uniform convergent către  $f$ .

**Demonstrație.** Deoarece  $I$  este compact și  $f$  este continuă pe  $I$ , rezultă că  $f$  este uniform continuă pe  $I$ . Fie  $\epsilon > 0$ ; există deci un număr  $\delta(\epsilon) > 0$ , astfel încât, oricare ar fi punctele  $x', x'' \in I$  cu  $|x' - x''| < \delta(\epsilon)$ , să avem

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Să alegem o diviziune a intervalului  $I$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b,$$

astfel ca distanța dintre două puncte consecutive ale divizionii să fie  $< \delta(\epsilon)$ , adică

$$|x_{i+1} - x_i| < \delta(\epsilon), \text{ pentru } i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Să considerăm punctele din plan  $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_i, f(x_i)), \dots, (x_n, f(x_n))$  și să le unim prin segmente de dreaptă, în ordinea indicată de indici. Obținem o linie poligonală, care definește o funcție poligonală  $p_\epsilon$ . Pe fiecare interval  $[x_i, x_{i+1}]$ , această funcție  $p_\epsilon$  este liniară:

$$p_\epsilon(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) \text{ pentru } x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$

Pentru  $x_{i+1} \leq x \leq x_i$ , avem

$$p_\epsilon(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}).$$

Pentru  $x = x_i$ , valoarea  $p_\epsilon(x)$  este aceeași, fie că o calculăm cu prima formulă, fie cu a doua formulă:  $p_\epsilon(x_i) = f(x_i)$ .

Să arătăm că  $|p_\epsilon(x) - f(x)| < \epsilon$ , oricare ar fi  $x \in I$ .

Fie, într-adevăr, un punct oarecare  $x \in I$ . Punctul  $x$  aparține unui interval  $[x_{i+1}, x_i]$ , și deci

$$\begin{aligned} |p_\epsilon(x) - f(x)| &= \left| f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) - f(x) \right| \leq \\ &\leq |f(x_i) - f(x)| + |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \left| \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right|. \end{aligned}$$

Dar, deoarece  $|x_{i+1} - x_i| < \delta(\epsilon)$  și  $|x - x_i| < \delta(\epsilon)$ , avem

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ și } |f(x) - f(x_i)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Înținând seama că  $|x - x_i| \leq |x_{i+1} - x_i|$  avem  $\left| \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right| \leq 1$ , și deci:

$$|p_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Dacă, în particular, luăm  $\epsilon = \frac{1}{n}$  și notăm cu  $p_n$  funcția poligonala corespunzătoare, avem:

$$|p_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \text{ oricare ar fi } x \in I \text{ și deci, conform criteriului II de convergență uniformă, sirul } (p_n) \text{ converge uniform pe } I \text{ către } f.$$

Putem da acum o demonstrație directă a faptului că funcțiile continue au primitive.

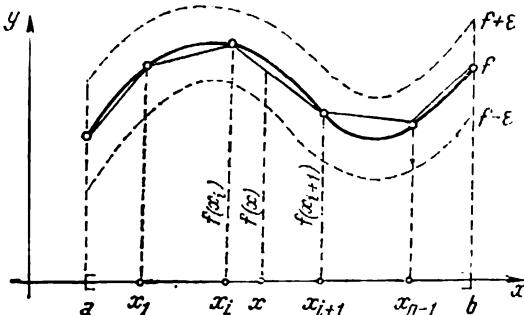


Fig. 168

**C o r o l a r.** Orice funcție continuă  $f$  pe un interval  $I$  are primitive pe  $I$ .

Să presupunem întâi că intervalul  $I$  este compact. Atunci există un sir  $(p_n)$  de funcții poligonale, uniform convergent către  $f$  pe intervalul  $I$ . Cum funcțiile poligonale  $p_n$  au primitive pe  $I$ , rezultă că și limitea lor uniformă,  $f$ , are primitive pe  $I$ .

Dacă  $I$  nu este compact, există un sir crescător  $(I_n)$  de intervale compacte, a căror reuniune este  $I$ :

$$I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset \dots \subset I, \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I.$$

Fie  $x_0 \in I_1$ ; atunci  $x_0 \in I_n$  oricare ar fi  $n$ .

Pe fiecare interval compact  $I_n$ , funcția  $f$  are primitive; fie  $F_n$  o primitivă a lui  $f$  pe intervalul  $I_n$ . În plus, putem alege primitivele  $F_n$  astfel ca  $F_n(x_0) = 0$ . Două primitive  $F_n$  și  $F_m$  coincid pe  $I_n \cap I_m$ . Definim acum funcția  $F$  pe intervalul  $I$ , astfel:

$$F(x) = F_n(x) \text{ dacă } x \in I_n.$$

Funcția  $F(x)$  este perfect definită pe  $I$ , este derivabilă și derivata sa pe  $I$  este  $f$ , deci  $f$  are primitive pe  $I$ .

## 9. Siruri de funcții egal continue și egal mărginite

Fie  $A$  o mulțime de numere\* și  $(f_n)$  un sir de funcții definite pe  $A$ . A spune că  $(f_n)$  este un sir de funcții continue pe  $A$  înseamnă a spune că fiecare funcție din sir este continuă în fiecare punct  $x \in I$ , adică

\*  $A$  poate fi un spațiu topologic oarecare, pentru funcții  $f_n$  continue, și un spațiu uniform pentru funcții  $f_n$  uniform continue.

$(f_n)$  este un șir de funcții continue pe  $A$ , dacă, oricare ar fi  $n \in N$ , oricare ar fi  $x \in A$  și oricare ar fi  $\epsilon > 0$ , există un număr  $\delta(\epsilon, x, n) > 0$  astfel încât oricare ar fi  $x' \in A$ , cu  $|x' - x| < \delta(\epsilon, x, n)$ , să avem

$$|f_n(x') - f_n(x)| < \epsilon.$$

Dacă funcțiile din șir sunt uniform continue pe  $A$ , atunci  $\delta$  nu mai depinde de punctul  $x$ , deci afirmația relativă la  $x$  trebuie să figureze după afirmația relativă la  $\delta$ :

$(f_n)$  este un șir de funcții uniform continue pe  $A$ , dacă, oricare ar fi  $n \in N$  și oricare ar fi  $\epsilon > 0$ , există un număr  $\delta(\epsilon, n)$ , astfel încât oricare ar fi  $x', x'' \in A$ , cu  $|x' - x''| < \delta(\epsilon, n)$  să avem

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \epsilon.$$

Este posibil ca  $\delta$  să nu depindă de  $n$ , dar să depindă de punctul  $x$ . Vom spune în acest caz că șirul  $(f_n)$  este format din funcții *egal continue*:

$(f_n)$  este un șir de funcții *egal continue* pe  $A$ , dacă, oricare ar fi punctul  $x \in A$  și oricare ar fi  $\epsilon > 0$ , există un număr  $\delta(\epsilon, x) > 0$ , astfel încât oricare ar fi  $x' \in A$  cu  $|x' - x| < \delta(\epsilon, x)$  și oricare ar fi  $n \in N$ , să avem

$$|f_n(x) - f_n(x')| < \epsilon.$$

Dacă  $\delta$  nu depinde nici de  $x$ , nici de  $n$ , funcțiile din șir sunt pe de o parte uniform continue, pe de altă parte sunt *egal continue*, sunt deci *egal uniform continue*: atunci afirmațiile relative la  $x$  și  $n$  trebuie să figureze după afirmația relativă la  $\delta$ :

$(f_n)$  este un șir de funcții *egal uniform continue* pe  $A$ , dacă, oricare ar fi  $\epsilon > 0$ , există un număr  $\delta(\epsilon) > 0$ , astfel încât, oricare ar fi  $x', x'' \in A$  cu  $|x' - x''| < \delta(\epsilon)$  și oricare ar fi  $n \in N$ , să avem

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \epsilon.$$

Vom spune că șirul  $(f_n)$  este format din funcții *mărginite pe  $A$*  dacă fiecare funcție este mărginită pe  $A$ , deci:

$(f_n)$  este un șir de funcții mărginite pe  $A$ , dacă, oricare ar fi  $n \in N$ , există un număr  $M(n)$ , astfel încât, oricare ar fi  $x \in A$ , să avem

$$|f_n(x)| < M(n).$$

Dacă  $M$  nu depinde de  $n$ , adică dacă toate funcțiile sunt mărginite de același număr  $M$ , vom spune că funcțiile din șir sunt *egal mărginite*. În acest caz, afirmația relativă la  $n$  trebuie să figureze după afirmația relativă la  $M$ :

$(f_n)$  este un șir de funcții *egal mărginite pe  $A$* , dacă există un număr  $M$ , astfel încât, oricare ar fi  $n \in N$  și oricare ar fi  $x \in A$ , să avem

$$|f_n(x)| < M.$$

Dacă  $(f_n)$  este un șir de funcții mărginite și uniform convergent pe o mulțime  $A$ , atunci  $(f_n)$  este un șir de funcții *egal mărginite*.

În adevară, limita  $f$  a șirului este mărginită, deci există  $M > 0$  astfel încât să avem  $|f(x)| \leq M$ , pentru orice  $x \in A$ . Deoarece șirul este uniform convergent, luând  $\epsilon = 1$ , există un număr  $N = N(1)$ , astfel încât pentru orice  $n \geq N$  și orice  $x \in A$  să avem  $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$ , deci  $|f_n(x)| \leq |f(x)| + 1 \leq M + 1$ .

Dacă pentru fiecare  $n < N$  alegem un număr  $M_n$  astfel ca

$$|f_n(x)| \leq M_n \text{ pentru orice } x \in A$$

și notăm  $K = \max(M_1, M_2, \dots, M_{N-1}, M + 1)$ , atunci

$$|f_n(x)| \leq K, \text{ pentru orice } n \in N \text{ și orice } x \in A,$$

deci  $(f_n)$  este un șir de funcții *egal mărginite*.

Rezultă de aici că un *șir uniform convergent de funcții continue pe un interval compact este egal mărginit*.

S-a arătat la capitolul despre șiruri că din orice șir mărginit se poate extrage un subșir convergent (Lema lui Cesáro). Are loc o teoremă asemănătoare pentru șiruri de funcții, dacă înlocuim proprietatea de mărginire a șirurilor de numere cu proprietatea de egală mărginire și egală continuitate a șirurilor de funcții și convergența șirurilor de numere cu convergența uniformă a șirurilor de funcții:

**Teoremă (Arzelă).** Fie  $I = [a, b]$  un interval compact. Din orice șir  $(f_n)$  de funcții definite pe  $I$ , egal continue și egal mărginite, se poate extrage un subșir  $(f_{n,p})_{p \in N}$  uniform convergent pe  $I$ .

Nu dăm demonstrația acestei teoreme.

## § 4. Serii de funcții

### 1. Convergența simplă și uniformă

Fie  $A$  o mulțime oarecare și  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  un șir de funcții reale definite pe  $A$ . Putem considera seria de funcții

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$$

formată din termenii șirului de funcții  $(f_n)$ , despărțite între ele prin semnul  $+$ . Pentru fiecare punct  $a \in A$ , să considerăm seria de numere

$$f_1(a) + f_2(a) + \dots + f_n(a) + \dots$$

formată cu valorile funcțiilor din șirul  $(f_n)$  în punctul  $a$ .

O serie de funcții este deci echivalentă cu o familie de serii de numere, și anume pentru fiecare punct din  $A$ , cîte o serie de numere. Vom însemna prescurtat o serie de funcții astfel:

$$\sum f_n \text{ sau } \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ sau } \sum_{n \in N} f_n \text{ sau } \sum_n f_n.$$

Putem aplica seriilor de funcții atît considerațiile făcute asupra seriilor de numere, cît și considerațiile făcute asupra șirurilor de funcții.

Să considerăm, ca și pentru seriile de numere, sumele parțiale ale seriei de funcții  $\sum_n f_n$ :

$$S_1 = f_1$$

$$S_2 = f_1 + f_2$$

$$S_3 = f_1 + f_2 + f_3$$

.....

$$S_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$$

.....

În acest caz, sumele parțiale sunt funcții definite pe  $A$ . Vom spune că seria de funcții  $\sum_n f_n$  este convergentă într-un punct  $a \in A$ , dacă sirul sumelor parțiale  $(S_n)$  este un șir de funcții convergent în punctul  $a$ .

Dacă seria  $\sum_n f_n$  este convergentă în punctul  $a \in A$ , vom spune că  $a$  este punct de convergență al seriei.

A spune că  $a$  este punct de convergență al seriei  $\sum_n f_n$  înseamnă a spune că sirul de numere  $(S_n(a))$  este convergent. Dar  $S_n(a)$  sunt sumele parțiale ale seriei de numere

$$f_1(a) + f_2(a) + \dots + f_n(a) + \dots$$

Așadar :

*Seria de funcții  $\sum_n f_n$  este convergentă într-un punct  $a \in A$  dacă și numai dacă seria de numere  $\sum_n f_n(a)$  (formată cu valorile în punctul  $a$  ale funcțiilor  $f_n$ ) este convergentă.*

Vom spune că seria de funcții  $\sum_n f_n$  este absolut convergentă în punctul  $a \in A$ , dacă seria de numere  $\sum_n |f_n(a)|$  este absolut convergentă.

Mulțimea  $N \subset A$  formată din toate punctele de convergență ale seriei de funcții  $\sum_n f_n$  se numește mulțimea de convergență a seriei de funcții  $\sum_n f_n$ .

**D e f i n i ț i e .** Fie  $\sum_n f_n$  o serie de funcții definite pe  $A$ , și  $f$  o funcție definită pe o submulțime  $B \subset A$ .

Vom spune că seria  $\sum_n f_n$  este simplu (sau punctual) convergentă pe  $B$  către funcția  $f$ , dacă sirul sumelor parțiale  $(S_n)$  este simplu convergent pe  $B$  către  $f$ , adică dacă, pentru fiecare  $x \in B$ , seria de numere  $\sum_n f_n(x)$  este convergentă către  $f(x)$ .

Vom spune că seria  $\sum_n f_n$  este uniform convergentă pe  $B$  către  $f$ , dacă sirul de funcții  $(S_n)$  este uniform convergent pe  $B$  către  $f$ .

Funcția  $f$  se numește suma seriei  $\sum_n f_n$  pe mulțimea  $B$ .

Este util să dăm și altă formă echivalentă definiției de mai sus.

*Seria de funcții  $\sum_n f_n$  este simplu convergentă pe  $B$  către  $f$ , dacă, pentru orice  $x \in B$ , și orice  $\varepsilon > 0$ , există un număr  $N(\varepsilon, x)$ , astfel încât, oricare ar fi  $n \geq N(\varepsilon, x)$ , să avem  $|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  sau*

$$|f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dacă  $N$  nu depinde de  $x$ , ci numai de  $\varepsilon$ , seria este uniform convergentă pe  $B$  către  $f$ . În acest caz, afirmația relativă la  $x$  trebuie să figureze după afirmația relativă la  $N$ :

*Seria de funcții  $\sum_n f_n$  este uniform convergentă pe  $B$  către  $f$ , dacă, oricare ar fi  $\varepsilon > 0$ , există un număr  $N(\varepsilon)$ , astfel încât, oricare ar fi  $n \geq N(\varepsilon)$  și oricare ar fi  $x \in B$ , să avem:*

$$|f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

*Exemplu.* 1) Pentru fiecare număr întreg  $n \geq 0$ , să considerăm funcția  $f_n$  definită pe  $R$  prin egalitatea  $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$  și să considerăm seria de funcții  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ . Multimea de convergență a acestei serii este toată dreapta. Într-adevăr, fie  $x \in R$  un punct oarecare; să considerăm seria de numere

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \dots$$

Aceasta este o serie geometrică cu rația  $\frac{1}{1+x^2} < 1$ , deci este convergentă. Dacă  $x = 0$ , suma seriei este 0. Dacă  $x \neq 0$ , suma seriei este

$$x^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{x^2}{\frac{x^2}{1+x^2}} = 1 + x^2.$$

Dacă notăm cu  $f$  funcția definită pe  $R$  prin egalitățile

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0, \end{cases}$$

deducem că seria de funcții  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  este simplu convergentă pe  $R$  către funcția  $f$ . Seria

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  este absolut convergentă pe  $R$ , deoarece, pentru fiecare  $x \in R$ , seria  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  este formată din numere pozitive.

2) Pentru fiecare număr întreg  $n \geq 1$ , să considerăm funcția  $f_n$  definită pe  $R$  prin  $f_n(x) = \frac{\sin^n x}{n^2}$ , și seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ . Această serie este absolut convergentă pe toată dreapta. Într-adevăr, dacă  $x \in R$  este un punct oarecare, obținem seria de numere:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin^2 x}{2^2} + \dots + \frac{\sin^n x}{n^2} + \dots$$

Avem  $\left| \frac{\sin^n x}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2}$  și, cum seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  este convergentă (seria armonică generalizată cu  $\alpha = 2$ ), deducem din criteriul comparației că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin^n x}{n^2} \right|$  este convergentă, adică seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^2}$  este absolut convergentă.

Se va arăta că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  este uniform convergentă pe  $R$ .

3) Pentru fiecare  $n \in N$ , fie  $f_n$  funcția definită pe  $R$  prin egalitatea  $f_n(x) = \cos^n x$ . Să considerăm seria  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ . Pentru  $x = k\pi$  ( $k$  întreg), obținem seria de numere

$$\sum_n f_n(k\pi) = \cos k\pi + \cos^2 k\pi + \dots + \cos^n k\pi + \dots$$

Pentru  $k$  par, obținem seria  $1 + 1 + \dots + 1 + \dots$

Pentru  $k$  impar, obținem seria  $-1 + 1 - 1 + \dots$

În ambele cazuri, seria este divergentă.

Pentru  $x \neq k\pi$ , seria este însă absolut convergentă, cum se poate constata aplicind criteriul rădăcinii al lui Cauchy :

$$\sqrt[n]{|f_n|} = \sqrt[n]{|\cos^n x|} = |\cos x| < 1.$$

Mulțimea de convergență a acestei serii este deci  $R - \{k\pi\}_{k \in Z}$ .

4) Pentru fiecare  $n \in N$  să considerăm funcția  $f_n$  definită pe  $R$  prin egalitatea  $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{n}$ , și seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ . Această serie nu este absolut convergentă în nici un punct. Într-adevăr, dacă  $x \in R$  este oarecare, obținem seria de numere

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{e^{ix}}{1} + \frac{e^{2ix}}{2} + \frac{e^{3ix}}{3} + \dots + \frac{e^{nix}}{n} + \dots$$

și cum  $e^{nx} > 1$ , avem  $\frac{e^{nx}}{n} > \frac{1}{n}$ ; termenii acestei serii sunt mai mari decât termenii corespunzători ai seriei armonice  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , care este divergentă. Din criteriul comparației, deducem

că și seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}$  este divergentă.

Mulțimea de convergență a seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  este vidă.

5) Fie  $(a_n)$  un șir de numere și pentru fiecare  $n$  să considerăm funcția constantă  $f_n(x) = a_n$  definită pe o mulțime  $A$ . Dacă seria numerică  $\sum a_n$  este convergentă, atunci seria de funcții  $\sum f_n$  este uniform convergentă pe  $A$ .

## 2. Restul seriei

Să considerăm seria de funcții definite pe o mulțime  $A$ :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k = f_{n+1} + f_{n+2} + \dots + f_{n+p} + \dots$$

Această serie se numește restul de rang  $n$  al seriei  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ . Dacă restul de rang  $n$  este o serie convergentă pe  $A$ , vom nota cu  $R_n$  suma sa.  $R_n$  va fi numit de asemenea restul de ordinul  $n$  al seriei  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ .

**Propoziție.** O serie de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  definite pe  $A$  este convergentă (simple sau uniform) pe  $A$ , dacă și numai dacă restul său de orice rang este convergent (simple sau uniform) pe  $A$ .

Într-adevăr, să notăm cu

$$S_m = f_1 + f_2 + \dots + f_m$$

sumele parțiale ale seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  și cu

$$\sigma_p = f_{n+1} + f_{n+2} + \dots + f_{n+p}$$

sumele parțiale ale restului de ordin  $n$ . Avem

$$S_{n+p} = S_n + \sigma_p.$$

Din această egalitate deducem că sirul de funcții  $(S_{n+p})_{1 \leq p \leq \infty}$  este simple (sau uniform) convergent pe  $A$ , dacă și numai dacă sirul de funcții  $(\sigma_p)_{1 \leq p \leq \infty}$  este simple (sau uniform) convergent pe  $A$ . Adică seria  $\sum_n f_n$  este simple (sau uniform) convergentă pe  $A$ , dacă și numai dacă restul de ordin  $n$  este o serie simple (sau uniform) convergentă pe  $A$ .

**Observații.** 1°. Din demonstrație rezultă că, dacă un singur rest este convergent (simple sau uniform) pe  $A$ , atunci seria este convergentă (simple sau uniform) pe  $A$ . Rezultă atunci că orice rest este convergent (simple sau uniform) pe  $A$ .

2°. Dacă notăm cu  $f$  suma seriei  $f_n$  și cu  $R_n$  suma restului de rang  $n$ , rezultă atunci că avem

$$f = S_n + R_n.$$

**Propozitie.** Fie  $\sum_n f_n$  o serie de funcții convergentă pe  $A$ . Seria este simplu (sau uniform) convergentă pe  $A$  către o funcție  $f$ , dacă și numai dacă șirul  $(R_n)$  al resturilor este un șir de funcții simplu (sau uniform) convergent către 0 pe  $A$ .

Într-adevăr, din egalitatea  $f = S_n + R_n$ , deducem

$$f - S_n = R_n.$$

Atunci, conform definiției, seria este simplu (sau uniform) convergentă pe  $A$  către  $f$ , dacă și numai dacă șirul  $(S_n)$  al sumelor parțiale este simplu (sau uniform) convergent pe  $A$  către  $f$ , adică dacă și numai dacă  $(f - S_n) = (R_n)$  este simplu (sau uniform) convergent către 0 pe  $A$ .

*Exemplu.* Să considerăm funcțiile  $f_n : R \rightarrow R$  definite astfel:

$$f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \text{ și seria de funcții } \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Fie  $x$  un punct oarecare din  $R$ . Să considerăm restul  $R_n$  al seriei. Seria de numere

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^3} - \frac{x^2}{(1+x^2)^4} + \dots$$

fiind alternată, iar șirul termenilor fiind descrescător și convergent către 0, diferența  $S_n(x) - (Sx)$  este mai mică decât termenul

$$|u_{n+1}| = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Cum

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x),$$

avem

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{x^2}{1+(1+n)x^2+\dots+x^{2n+2}} \leq \frac{x^2}{(1+n)x^2} \leq \frac{1}{1+n}.$$

Deoarece șirul  $\left(\frac{1}{1+n}\right)$  are limita zero, șirul resturilor  $(R_n)$  este uniform convergent către 0 pe  $R$ , și deci seria este uniform convergentă pe  $R$ . Seria este deasemenea absolut convergentă pe  $R$ , deoarece s-a arătat că seria

$$\Sigma |f_n(x)| = \Sigma \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

este convergentă.

### 3. Criterii de convergență uniformă

Acste criterii se deduc din cele corespunzătoare de la sirurile de funcții combinate cu cele de la seriile de numere.

■

**Criteriul I (Cauchy).** O serie de funcții  $\sum f_n$  definite pe  $A$ , este uniform convergentă pe  $A$ , dacă și numai dacă, pentru orice  $\epsilon > 0$ , există un număr  $N(\epsilon)$ , astfel încât oricare ar fi  $n \geq N(\epsilon)$  și  $p \geq 1$  și oricare ar fi  $x \in A$ , să avem

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \epsilon.$$

Într-adevăr, dacă notăm cu  $(S_n)$  sumele parțiale ale seriei, avem

$$S_{n+p} - S_n = f_{n+1} + f_{n+2} + \dots + f_{n+p}.$$

Seria este uniform convergentă pe  $A$ , dacă și numai dacă sirul de funcții  $(S_n)$  este uniform convergent pe  $A$ ; după criteriul lui Cauchy pentru siruri de funcții, sirul  $(S_n)$  este uniform convergent pe  $A$ , dacă și numai dacă, pentru orice  $\epsilon > 0$ , există un număr  $N(\epsilon)$ , astfel încât, oricât ar fi  $n \geq N(\epsilon)$ ,  $p \geq 1$  și oricare ar fi  $x \in A$ , avem :

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \epsilon,$$

adică

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \epsilon.$$

*Exemplu.* Dacă  $f_n(x) = u_n$  este o funcție constantă definită pe  $R$  și dacă seria de numere  $\sum u_n$  este convergentă, atunci seria de funcții  $\sum f_n$  este uniform convergentă pe  $R$ .

Fie  $\epsilon > 0$ ; deoarece seria  $\sum u_n$  este convergentă, există  $N(\epsilon)$  astfel încât, oricare ar fi  $n \geq N(\epsilon)$  și  $p \geq 1$ , să avem

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \epsilon.$$

Atunci, oricare ar fi  $x \in R$ ,  $n \geq N(\epsilon)$  și  $p \geq 1$ , avem

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \epsilon,$$

deci seria  $\sum f_n$  este uniform convergentă pe  $R$ .

Din criteriul lui Cauchy vom deduce alt criteriu foarte util în aplicații.

**Criteriul II.** Fie  $\sum f_n$  și  $\sum \varphi_n$  două serii de funcții definite pe  $A$ . Dacă avem

$$|f_n(x)| \leq \varphi_n(x), \text{ pentru orice } n \in N \text{ și orice } x \in A$$

și dacă seria  $\sum \varphi_n$  este uniform convergentă pe  $A$ , atunci și seria  $\sum f_n$  este uniform convergentă pe  $A$ .

Fie  $\varepsilon > 0$ . Aplicînd seriei  $\sum \varphi_n$  criteriul precedent de convergență uniformă, găsim un număr  $N(\varepsilon)$ , astfel încît oricare ar fi  $n \geq N(\varepsilon)$  și  $p \geq 1$  și oricare ar fi  $x \in A$  să avem

$$\varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \dots + \varphi_{n+p}(x) < \varepsilon.$$

Atunci, pentru  $n \geq N(\varepsilon)$ ,  $p \geq 1$  și  $x \in A$  avem

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| &\leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \dots \\ &\dots + |f_{n+p}(x)| \leq \varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \dots + \varphi_{n+p}(x) < \varepsilon \end{aligned}$$

și deci, conform primului criteriu de convergență uniformă, seria  $\sum f_n$  este uniform convergentă pe  $A$ .

Criteriul II se aplică adesea în cazul particular al următorului :

**Corolar.** Fie  $\sum f_n$  o serie de funcții definite pe  $A$  și  $\sum a_n$  o serie convergentă de numere pozitive. Dacă avem

$$|f_n(x)| \leq a_n, \text{ pentru orice } n \in N \text{ și orice } x \in A,$$

atunci seria  $\sum f_n$  este uniform convergentă pe  $A$ .

În adevăr, punînd  $\varphi_n(x) = a_n$ , seria de funcții constante  $\sum \varphi_n$  este uniform convergentă.

**O b s e r v a t i e.** Din acest corolar deducem că este suficient să majorăm o serie de funcții printr-o serie convergentă de numere, pentru a deduce că seria de funcții este uniform convergentă.

*Exemplu.* 1) Fie seria de funcții  $\sum_n f_n$ , unde pentru fiecare  $n \in N$ , funcția  $f_n$  este definită pe  $R$  prin  $f_n(x) = \frac{\sin^n x}{n^2}$ . Pentru orice  $x \in R$  și orice  $n \in N$  avem

$$\left| \frac{\sin^n x}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2}.$$

Cum seria de numere  $\sum \frac{1}{n^2}$  este convergentă, deducem că seria de funcții  $\sum f_n$  este uniform convergentă pe  $R$ .

2) Pentru fiecare  $n \in N$  să considerăm funcția  $f_n$  definită pe  $R$  prin  $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ , și să considerăm seria de funcții  $\sum f_n$ . Această serie este convergentă pe  $(1, +\infty)$ , deoarece dacă  $x > 1$ , obținem seria armonică generalizată, cu exponentul  $x > 1$ :

$$\frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots + \frac{1}{n^x} + \dots$$

Pentru  $x < 1$ , seria este divergentă. Dacă  $1 < a < +\infty$ , seria este uniform convergentă pe  $(a, +\infty)$ , deoarece dacă  $x \geq a$ , atunci  $n^x \geq n^a$ , deci  $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$ , și seria  $\sum_n \frac{1}{n^a}$  este convergentă.

4. Continuitatea, integrabilitatea  
și derivabilitatea seriilor uniform convergente.

**T e o r e m a 1\***. Fie  $\sum f_n$  o serie de funcții, uniform convergentă pe o mulțime\*  $A \subset R$ , către o funcție  $f$ . Dacă toate funcțiile  $f_n$  sunt continue într-un punct  $x_0 \in A$  (sau pe  $A$ ), atunci și funcția sumă  $f$  este continuă în  $x_0$  (respectiv pe  $A$ ).

În adevăr, sumele parțiale  $S_n = f_1 + \dots + f_n$  sunt funcții continue în  $x_0$  (respectiv pe  $A$ ), iar sirul  $(S_n)$  converge uniform pe  $A$  către  $f$ . Se aplică apoi teorema corespunzătoare de la sirurile de funcții.

**T e o r e m a 2.** Fie  $\sum f_n$  o serie de funcții, uniform convergentă pe un interval  $[a, b]$  către o funcție  $f$ . Dacă toate funcțiile  $f_n$  sunt integrabile pe  $[a, b]$ , atunci:

1) funcția  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ ,

2) seria integralelor  $\sum \int_a^b f_n dx$  este convergentă și

$$\sum \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx.$$

În adevăr, sumele parțiale  $S_n = f_1 + \dots + f_n$  sunt funcții integrabile pe  $[a, b]$ , iar sirul  $(S_n)$  converge uniform către  $f$ . Din teorema de integrare termen cu termen a sirurilor de funcții rezultă că  $f$  este integrabilă pe  $[a, b]$ , că sirul integralelor  $\left( \int_a^b S_n dx \right)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n dx = \int_a^b f dx.$$

Dar

$$\int_a^b S_n dx = \int_a^b f_1 dx + \dots + \int_a^b f_n dx,$$

\*  $A$  poate fi orice spațiu topologic.

deci sumele parțiale ale seriei  $\sum \int_a^b f_n dx$  converg către  $\int_a^b f dx$ , adică

$$\sum \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx.$$

*Observație.* Deoarece  $f = \sum f_n$ , egalitatea precedentă se scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n dx,$$

iar teorema precedentă se numește teorema de integrare termen cu termen a seriilor de funcții.

**T e o r e m a 3.** Fie  $\sum f_n$  o serie de funcții derivabile pe un interval  $I$ . Dacă :

- 1) seria  $\sum f_n$  este uniform convergentă pe  $I$  către o funcție  $f$ ,
  - 2) seria derivatelor  $\sum f'_n$  este uniform convergentă pe  $I$  către o funcție  $g$ ,
- atunci  $f$  este derivabilă pe  $I$  și  $f' = g$ .

Considerăm sumele parțiale  $S_n = f_1 + \dots + f_n$  care formează un șir de funcții derivabile pe  $I$  și uniform convergent către  $f$ . Derivatele  $S'_n = f'_1 + \dots + f'_n$  sunt sumele parțiale ale seriei derivatelor  $\sum f'_n$ , deci șirul  $(S'_n)$  converge uniform către  $g$ . Din teorema de derivare termen cu termen a șirurilor de funcții deducem că  $f$  este derivabilă pe  $I$  și că  $f' = g$ .

*Observație.* Deoarece  $f = \sum f_n$  și  $g = \sum f_n$ , egalitatea  $f' = g$  se scrie

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n,$$

iar teorema precedentă se numește teorema de derivare termen cu termen a seriilor de funcții.

În cazul intervalelor mărginite avem teorema următoare :

**T e o r e m a 4.** Fie  $I$  un interval mărginit și  $\sum f_n$  o serie de funcții derivabile pe  $I$ . Dacă :

- 1) seria  $\sum f_n$  este convergentă într-un punct  $x_0 \in I$ ,
- 2) seria derivatelor  $\sum f'_n$  este uniform convergentă pe  $I$  către o funcție  $g$ , atunci :
  - (i) seria  $\sum f_n$  este uniform convergentă pe  $I$  către o funcție  $f$ ;
  - (ii) funcția  $f$  este derivabilă și  $f' = g$ .

În adevăr sumele parțiale  $S_n = f_1 + \dots + f_n$  formează un sir de funcții derivabile, convergent în  $x_0$ , iar sirul derivaților  $(S'_n) = (f'_1 + \dots + f'_n)$  este uniform convergent către  $g$ . Se aplică atunci teorema corespunzătoare de la sirurile de funcții.

**T e o r e m a 5.** Suma unei serii uniform convergente  $\sum g_n$  de funcții derivate pe un interval oarecare  $I$  este o funcție derivată.

Ca și în cazul teoremelor precedente se aplică sirului sumelor parțiale  $S_n = g_1 + \dots + g_n$  teorema corespunzătoare de la sirurile de funcții.

Acest corolar se poate enunța și astfel:

*Dacă seria  $\sum g_n$  este uniform convergentă pe  $I$  către o funcție  $g$  și dacă funcțiile  $g_n$  au primitive pe  $I$ , atunci și  $g$  are primitive pe  $I$ .*

## 5. Operații cu serii de funcții

Dacă  $A_1$  este mulțimea de convergență a seriei  $\sum f_n$  și  $f$  suma acestei serii, iar  $A_2$  este mulțimea de convergență a seriei  $\sum g_n$  și  $g$  suma sa, atunci :

1) Seria sumă  $\sum (f_n + g_n)$  este convergentă pe  $A_1 \cap A_2$  și are suma  $f + g$ .

2) Seria  $\sum \alpha f_n$  este convergentă pe  $A_1$  și are suma  $\alpha f$ .

Aceste afirmații se demonstrează luând seriile de numere  $\sum f_n(x)$  și  $\sum g_n(x)$  și folosind proprietățile seriilor de numere.

## § 5. Serii de puteri

### I. Definiția seriilor de puteri

Numim o serie de puteri, o serie de funcții  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  definite pe  $R$ , unde fiecare funcție  $f_n$  este produsul dintre un număr  $a_n$  și o funcție putere  $x^n$ ,  $f_n(x) = a_n x^n$ , ( $n \in N$ ).

Așadar, o serie de puteri are forma :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \text{ pentru } x \in R,$$

unde  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  sunt numere. Numărul  $a_n$  se numește coeficiențul termenului de rang  $n$ . O serie de puteri se scrie prescurtat  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  sau  $\sum a_n x^n$ .

Toate rezultatele privind seriile de funcții sunt valabile, evident, și pentru seriile de puteri.

În studiul seriilor de puteri, ne interesează în primul rând mulțimea de convergență a seriei. Pentru seriile de puteri mulțimea de convergență nu este vidă. Ea conține cel puțin punctul 0, deoarece pentru  $x = 0$ , seria se scrie

$$a_0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots$$

și este evident convergentă, suma sa fiind  $a_0$ .

Există serii de puteri pentru care mulțimea de convergență se reduce numai la 0.

*Exemplu.* Fie seria de puteri

$$1 + x + 2^2 x^2 + 3^3 x^3 + \dots + n^n x^n + \dots$$

Această serie este convergentă numai în punctul 0. Într-adevăr, fie  $x_0 \neq 0$ . Să arătăm că seria de numere

$$1 + x_0 + 2^2 x_0^2 + \dots + n^n x_0^n + \dots$$

este divergentă. Avem  $|n^n x_0^n| = (|nx_0|)^n$ . Dacă  $n > \left\lfloor \frac{1}{x_0} \right\rfloor$ , atunci  $n|x_0| > 1$  și deci  $(|nx_0|)^n > 1$ .

Rezultă că sirul termenilor seriei  $(n^n x_0^n)$  nu este convergent către 0, și deci seria este divergentă.

Este posibil ca mulțimea de convergență a unei serii să fie toată dreapta  $R$ .

*Exemplu.* Fie seria de puteri

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Fie  $x_0 \in R$  un punct oarecare. Să considerăm seria de numere

$$1 + \frac{x_0}{1!} + \frac{x_0^2}{2!} + \dots + \frac{x_0^n}{n!} + \dots$$

și să-i aplicăm criteriul raportului; avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x_0^{n+1}|}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x_0^n|} = \frac{|x_0|}{n+1}.$$

Sirul  $\left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$  are limita  $k = 0 < 1$ , deci seria de numere este absolut convergentă.

Cum  $x_0$  a fost arbitrar, rezultă că seria de puteri este convergentă în orice punct de pe dreapta, adică mulțimea de convergență a seriei este toată dreapta.

## 2. Raza de convergență

Despre mulțimea de convergență a unei serii de puteri ne dă informații teorema următoare:

**T e o r e m a I a l u i A b e l.** Pentru orice serie de puteri  $\sum a_n x^n$  există un număr  $R$  astfel ca  $0 \leq R \leq +\infty$  și astfel încât:

- 1) Seria este absolut convergentă pe intervalul deschis  $(-R, R)$ .
- 2) Pentru orice  $x$ , astfel ca  $|x| > R$ , seria este divergentă.

Pentru orice număr  $0 < r < R$ , seria este uniform convergentă pe intervalul închis  $[-r, r]$ .

Numărul  $R$  care îndeplinește condițiile 1 și 2 se numește raza de convergență a seriei de puteri, iar intervalul  $(-R, R)$  se numește interval de convergență al seriei de puteri.

**Demonstrație.** Dacă seria de puteri este convergentă numai în punctul 0, luând  $R = 0$ , teorema este demonstrată.

Vom presupune deci că mulțimea de convergență conține puncte diferite de 0. Fie atunci  $x_0 \neq 0$  un punct, în care seria este convergentă, adică astfel ca seria de numere  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$  să fie convergentă. Termenii acestei serii formează un sir  $(a_n x_0^n)$  convergent către 0, deci acest sir este mărginit. Există atunci un număr  $M$  astfel încit să avem:

$$|a_n x_0^n| < M \text{ pentru } n = 0, 1, 2, \dots$$

Fie  $x$  un punct oarecare astfel ca  $|x| < |x_0|$ . Avem

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

Cum  $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ , seria geometrică  $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$  este convergentă și, conform criteriului comparației, rezultă că și seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$$

este convergentă, adică seria  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  este *absolut convergentă*.

Așadar, dacă  $x_0 \neq 0$  este un punct de convergență al seriei, atunci orice punct  $x$  pentru care  $|x| < |x_0|$ , este punct de convergență *absolută* a

seriei. Rezultă că mulțimea de convergență conține întreg intervalul  $(-|x_0|, |x_0|)$ .

De aici deducem că dacă  $x_1$  este un punct de divergență al seriei, atunci orice punct  $x$  pentru care  $|x| > |x_1|$  este punct de divergență al seriei.

Într-adevăr, dacă ar exista un punct  $x_0$ , cu  $|x_0| > x_1$  în care seria este convergentă, atunci, după cele demonstreate mai sus, seria ar fi convergentă și în  $x_1$  (deoarece  $|x_1| < |x_0|$ ), ceea ce este fals.

Să notăm cu  $A$  mulțimea de convergență a seriei de puteri.

Avem evident  $0 \in A$ . Luăm  $R = \sup A$ . Avem  $R > 0$ . Să arătăm că  $R$  este raza de convergență a seriei, dacă  $R$  îndeplinește condițiile 1 și 2.

1) Fie  $x \in (-R, R)$ . Avem  $|x| < R$ . Există deci un punct  $x_0 \in A$  cuprins între  $|x|$  și  $R$ ,  $|x| < x_0 < R$ . Cum  $x_0$  este punct de convergență al seriei, din cele de mai sus rezultă că seria este absolut convergentă în  $x$ , deoarece  $|x| < x_0$ .

2) Dacă  $R = +\infty$ , inegalitatea  $|x| > R$  nu are sens, deci în acest caz condiția 2 din enunțul teoremei este de prisos.

Să presupunem deci  $R < +\infty$ . Fie  $x$  un punct astfel ca  $|x| > R$ . Dacă  $x$  ar fi punct de convergență, atunci orice punct  $y$ , astfel ca  $R < y < |x|$ , ar fi punct de convergență, deci  $y \in A$ , deci  $R$  ar mai fi marginea superioară a mulțimii  $A$ . Am ajunge la o contradicție. Așadar, dacă  $|x| > R$ , seria este divergentă în punctul  $x$ .

Astfel, numărul  $R$  definit mai sus este raza de convergență a seriei.

Rămîne de demonstrat ultima parte a teoremei. Fie  $r$  un număr astfel ca  $0 < r < R$ . Urmează că  $r$  este un punct de convergență absolută a seriei, adică seria de numere pozitive  $\sum |a_n r^n| = \sum |a_n| r^n$  este convergentă.

Pentru orice  $x \in [-r, r]$ , avem  $|x| < r$ , și deci

$$|a_n x^n| = |a_n| |x^n| < |a_n| r^n.$$

Conform criteriului II de convergență uniformă a seriilor de funcții, rezultă că seria  $\sum_n a_n x^n$  este uniform convergentă pe  $[-r, r]$ . Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

**Observație.** În cazul cînd  $0 < R < +\infty$ , teorema lui Abel nu spune cum se comportă seria de puteri în punctele  $-R$  și  $R$ , extremitățile intervalului de convergență. Se poate întîmpla ca unul din aceste puncte sau ambele să fie puncte de divergență, sau unul din ele sau ambele să fie puncte de convergență, sau, în sfîrșit, seria să fie oscilantă în aceste puncte.

*Dacă într-unul din punctele  $-R$  sau  $R$  seria este absolut convergentă, atunci seria este absolut convergentă și în celălalt punct.*

Într-adevăr, pentru ambele serii,  $\sum_n a_n (-R)^n$  și  $\sum_n a_n R^n$ , seria modulelor este aceeași  $\sum_n |a_n| R^n$ , deci dacă una este absolut convergentă, atunci și cealaltă este absolut convergentă.

Rezultă că dacă în unul din punctele  $-R$  sau  $R$  seria este divergentă în celălalt punct seria nu este absolut convergentă.

*Exemplu.* 1) Seria geometrică

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

este absolut convergentă pentru  $|x| < 1$ , și divergentă pentru  $|x| > 1$ . Aici raza de convergență este  $R = 1$ . Pentru  $x = 1$ , obținem seria de numere pozitive

$$1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

care este divergentă și are suma  $+\infty$ . Pentru  $x = -1$ , obținem seria de numere

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \dots$$

care este oscilantă.

Așadar multimea de convergență este  $A = (-1, 1)$ .

2) Fie seria

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

Să arătăm că  $R = 1$ . Fie  $x_0 > 0$ ; să considerăm seria de numere pozitive

$$\frac{x_0}{1} + \frac{x_0^2}{2} + \dots + \frac{x_0^n}{n} + \dots$$

Să-i aplicăm criteriul lui d'Alembert. Avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x_0^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x_0^n} = \frac{n}{n+1} x_0.$$

Limita acestui sir este  $k = x_0$ . Dacă  $x_0 < 1$ , seria este convergentă; dacă  $x_0 > 1$ , seria este divergentă. Așadar  $R = 1$ .

Pentru  $x = 1$ , obținem seria

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

care este divergentă (seria armonică). Pentru  $x = -1$ , obținem seria

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots$$

care este convergentă, deoarece se obține din seria armonică alternată prin înmulțire cu  $-1$ .

Mulțimea de convergență a seriei este deci  $[-1, 1]$ .

• Să observăm că în  $-1$  seria este semiconvergentă, iar pe  $(-1, 1)$ , seria este absolut convergentă.

3) Seria

$$-\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots$$

are mulțimea de convergență  $(-1, +1]$ . În punctul  $+1$  seria este semiconvergentă, iar pe  $(-1, 1)$  seria este absolut convergentă.

4) Seria

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2^\alpha} + \frac{x^3}{3^\alpha} + \dots + \frac{x^n}{n^\alpha} + \dots$$

unde  $\alpha > 1$ , este absolut convergentă pe  $[-1, 1]$ .

Într-adevăr, fie  $x_0 > 0$  un punct oarecare; să considerăm seria de numere pozitive

$$\frac{x_0}{1^\alpha} + \frac{x_0^\alpha}{2^\alpha} + \dots + \frac{x_0^\alpha}{n^\alpha} + \dots$$

Să aplicăm criteriul lui d'Alembert

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \cdot \frac{n^\alpha}{x_0^n} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^\alpha x_0.$$

Șirul  $\left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$  are limita  $k = x_0$ . Dacă  $x_0 < 1$ , seria este convergentă, și dacă  $x_0 > 1$ , seria este divergentă. Așadar  $R = 1$ .

Pentru  $x = 1$ , obținem seria

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$$

care este convergentă (seria armonică generalizată cu  $\alpha > 1$ ). Pentru  $x = -1$ , obținem seria

$$-\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n^\alpha} + \dots$$

care este absolut convergentă, deoarece seria modulelor este seria armonică generalizată de mai sus. Așadar, mulțimea de convergență este  $A = [-1, +1]$  și anume, toate punctele acestei mulțimi sunt puncte de convergență absolută.

### 3. Teorema lui Cauchy-Hadamard

Teorema lui Abel afirmă doar existența razei de convergență, dar nu dă nici o metodă de a o calcula. O asemenea metodă este dată de teorema următoare, a cărei demonstrație folosește criteriul lui Cauchy.

**Teorema lui Cauchy și Hadamard.** Fie  $\sum a_n x^n$  o serie de puteri și  $R$  raza de convergență. Să notăm  $\omega = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ . Atunci

$$R = \frac{1}{\omega} \text{ dacă } 0 < \omega \leq +\infty \text{ și } R = +\infty \text{ dacă } \omega = 0.$$

**Demonstrație.** Fie  $x_0$  un punct oarecare; să considerăm seria de numere  $\sum_n |a_n| |x_0|^n$ . Termenii acestei serii sunt  $u_n = |a_n| |x_0|^n$ . Să-i aplicăm criteriul lui Cauchy. Avem

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{|a_n|} |x_0|,$$

și deci

$$\limsup_n \sqrt[n]{u_n} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} |x_0| = \omega |x_0|.$$

Dacă  $\omega = 0$ , atunci  $\limsup_n \sqrt[n]{u_n} = 0 < 1$ , deci seria  $\sum a_n x_0^n$  este absolut convergentă oricare ar fi  $x_0$ , deci  $R = +\infty$ ; dacă  $\omega = +\infty$ , și  $x_0 \neq 0$ , avem  $\limsup_n \sqrt[n]{u_n} = +\infty > 1$ , deci seria  $\sum a_n x_0^n$  este divergentă pentru orice  $x_0 \neq 0$ , adică  $R = 0$ ; dacă  $0 < \omega < +\infty$ , atunci: dacă  $|x_0| < \frac{1}{\omega}$  avem  $\omega |x_0| < 1$ , și deci seria  $\sum a_n x_0^n$  este absolut convergentă. Dacă  $|x_0| > \frac{1}{\omega}$ , luăm un punct  $x_1$  astfel ca  $|x_1| > |x_0| > \frac{1}{\omega}$ . Atunci  $\omega |x_0| > 1$ , și deci seria  $\sum |a_n| |x_0|^n$  este divergentă. Din demonstrația primei teoreme a lui Abel, rezultă că seria  $\sum a_n x_1^n$  este divergentă. Așadar  $R = \frac{1}{\omega}$ .

*Exemplu.* 1)  $\sum_n x^n$ ; avem  $\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ , deci  $\omega = 1$ , și deci  $R = 1$ .

2)  $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ ; avem  $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$ ,  $\omega = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ , deci  $R = +\infty$ .

3)  $\sum_n n^n x^n$ ; avem  $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^n} = n$ , deci  $R = 0$ .

În multe cazuri, pentru calculul razei de convergență  $R$  se poate folosi propoziția următoare, a cărei demonstrație folosește criteriul lui d'Alembert.

**Propozitie.** Fie  $\sum a_n x^n$  o serie de puteri. Să presupunem că sirul  $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$  are limită (finită sau infinită). Atunci

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Fie  $x_0 \neq 0$  un punct oarecare. Să considerăm seria numerică  $\sum |a_n| |x_0|^n$  și să-i aplicăm criteriul lui d'Alembert. Avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x_0|.$$

Dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 0$ , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty, \text{ oricare ar fi } x_0 \neq 0,$$

deci seria este divergentă pentru orice  $x_0 \neq 0$ , și deci  $R = 0$ . Să presupunem acum că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = l > 0$ . Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x_0|}{l}.$$

Dacă  $|x_0| < l$  atunci  $\frac{|x_0|}{l} < 1$ , deci seria este convergentă, iar dacă  $|x_0| > l$ , atunci  $\frac{|x_0|}{l} > 1$ , deci seria este divergentă. Deducem că  $l$  este raza de convergență a seriei.

*Observație.* La criteriul lui d'Alembert se folosește raportul  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ , în timp ce pentru calculul razei de convergență se folosește raportul  $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ .

*Exemplu.* Să considerăm seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Avem

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = +\infty, \text{ deci } R = +\infty.$$

#### 4. Continuitatea sumei unei serii de puteri

Fie  $\sum a_n x^n$  o serie de puteri,  $A$  mulțimea sa de convergență și  $R$  raza sa de convergență. Știm că  $0 \in A$ , și că  $(-R, R) \subset A \subset [-R, +R]$ . Pentru fiecare  $x \in A$ , să notăm

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Am obținut astfel o funcție  $x \rightarrow S(x)$  definită pe  $A$ ; această funcție este suma seriei de puteri  $\sum_n a_n x^n$  pe mulțimea  $A$ .

Vom nota cu  $S$  această funcție.

**O b s e r v a t i e.** Trebuie reținut că suma  $S$  a seriei de puteri este o funcție definită numai pe mulțimea  $A$ , deși funcțiile de puteri din care este formată seria sunt definite pe toată dreapta.

Accentuăm acest lucru, deoarece s-ar putea ca funcția sumă  $S$  să se poată exprima prin operații asupra funcțiilor elementare, operații care au un sens și pentru care nu aparțin lui  $A$ . În acest caz trebuie să facem distincție între suma  $S$  și funcția definită prin aceste operații.

*Exemplu.* Să considerăm seria de puteri

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Mulțimea de convergență este  $A = (-1, 1)$ . Este o serie geometrică cu rația  $x$ . Dacă  $|x| < 1$ , s-a arătat că suma acestei serii este  $\frac{1}{1-x}$ . Așadar funcția sumă  $S$  este definită pe  $(-1, 1)$

prin egalitatea  $S(x) = \frac{1}{1-x}$ . Putem scrie

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \text{ pentru } -1 < x < 1.$$

Totuși, operația  $\frac{1}{1-x}$  are sens pentru orice  $x \neq 1$ . Dacă notăm cu  $f$  funcția definită pe  $R - \{1\}$ , prin  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ , funcțiile  $S$  și  $f$  sunt diferite, deoarece au domenii de definiție diferite; anume, funcția  $S$  este restricția funcției  $f$ , la intervalul  $(-1, 1)$ . De altfel pentru  $|x| > 1$ , egalitatea

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

nu mai este adevărată, deoarece seria din membrul drept este divergentă.

**P r o p o z i t i e.** Suma  $S$  a unei serii de puteri  $\sum a_n x^n$  este o funcție continuă pe intervalul de convergență.

Fie  $R$  raza de convergență a seriei și  $A$  mulțimea de convergență a seriei. Funcția sumă  $S$  a seriei este definită pe  $A$ , deci  $S(x)$  are sens pentru orice  $x \in (-R, R)$ .

Fie  $x_0 \in (-R, R)$  un punct oarecare; să arătăm că funcția  $S$  este continuă în  $x_0$ . Avem  $-R < x_0 < R$ , deci există un număr  $r$  pozitiv, astfel că  $-R < -r < x_0 < r < R$ . Dar pe intervalul închis  $[-r, r]$  seria este uniform convergentă, și deoarece termenii seriei sunt funcții continue, rezultă că suma ei  $S$  este o funcție continuă pe  $[-r, r]$ ; în particular este continuă în  $x_0$ .

Cum  $x_0$  a fost arbitrar în  $(-R, R)$ , rezultă că funcția  $S$  este continuă pe tot intervalul  $(-R, R)$ .

**Corolar.** Suma  $S$  a unui serii de puteri  $\sum a_n x^n$  este uniform continuă pe orice interval compact conținut în intervalul de convergență.

Într-adevăr, dacă  $I = [a, b]$  este un interval compact conținut în intervalul de convergență, funcția  $S$  este continuă pe  $I$ , deci uniform continuă.

**O b s e r v a ţ i e .** Dacă seria este convergentă și în punctul  $-R$  sau în punctul  $R$ , atunci funcția  $S$  este definită și în  $-R$  sau în  $R$ .

Propoziția de mai sus nu spune dacă funcția  $S$  este în acest caz continuă în  $-R$  sau  $R$ . Acest lucru va reieși din teorema următoare:

**T e o r e m a II a l u i A b e l .** Fie  $\sum a_n x^n$  o serie de puteri și  $R$  raza sa de convergență. Dacă seria este convergentă în punctul  $R$  (sau în punctul  $-R$ ), atunci suma  $S$  a seriei este o funcție continuă în punctul  $R$  (sau în punctul  $-R$ ).

**Demonstrație.** Vom demonstra teorema numai pentru cazul cînd seria este convergentă în  $R$ . Pentru cazul convergenței în  $-R$ , demonstrația se face la fel.

Presupunem, aşadar, că seria de numere

$$a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \dots + a_n R^n + \dots$$

este convergentă.

Să arătăm în acest caz că seria  $\sum a_n x^n$  este uniform convergentă pe  $[0, R]$ . Fie  $\epsilon > 0$ ; deoarece seria de numere  $\sum a_n R^n$  este convergentă, există un număr  $N(\epsilon)$ , astfel, încît, oricare ar fi  $n \geq N(\epsilon)$  și  $p \geq 1$ , să avem

$$|a_{n+1} R^{n+1} + a_{n+2} R^{n+2} + \dots + a_{n+p} R^{n+p}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Să notăm cu  $S_n$  sumele parțiale ale acestei serii. Pentru a simplifica scrisul, vom nota  $\sigma_p = S_{n+p} - S_n$ , pentru  $p \geq 1$ . Condiția de mai sus se scrie atunci

$$|\sigma_p| < \frac{\epsilon}{2} \text{ pentru orice } p \geq 1.$$

Să remarcăm de asemenea că avem

$$a_{n+1} R^{n+1} = S_{n+1} - S_n = \sigma_1$$

$$a_{n+2} R^{n+2} = S_{n+2} - S_{n+1} = (S_{n+2} - S_n) - (S_{n+1} - S_n) = \sigma_2 - \sigma_1$$

.....

$$a_{n+p} R^{n+p} = S_{n+p} - S_{n+p-1} = (S_{n+p} - S_n) - (S_{n+p-1} - S_n) = \sigma_p - \sigma_{p-1}.$$

Fie un punct oarecare  $x \in [0, R]$ ; să notăm  $y = \frac{x}{R}$ . Avem  $x = Ry$  și  $0 \leq y \leq 1$ . Atunci, pentru  $n \geq N(\epsilon)$ , avem

$$\begin{aligned} a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \dots + a_{n+p}x^{n+p} &= a_{n+1}R^{n+1}y^{n+1} + a_{n+2}R^{n+2}y^{n+2} + \dots \\ \dots + a_{n+p}R^{n+p}y^{n+p} &= \sigma_1y^{n+1} + (\sigma_2 - \sigma_1)y^{n+2} + \dots + (\sigma_p - \sigma_{p-1})y^{n+p} = \\ &= \sigma_1y^{n+1} + \sigma_2y^{n+2} - \sigma_1y^{n+2} + \dots + \sigma_py^{n+p} - \sigma_{p-1}y^{n+p} = \\ &= \sigma_1y^{n+1}(1-y) + \sigma_2y^{n+2}(1-y) + \dots + \sigma_{p-1}y^{n+p-1}(1-y) + \sigma_py^{n+p} = \\ &= y^{n+1}(1-y)(\sigma_1 + \sigma_2y + \sigma_3y^2 + \dots + \sigma_{p-1}y^{p-2}) + \sigma_py^{n+p}. \end{aligned}$$

Tinând seama că  $0 \leq y^{n+1} \leq 1$ ,  $a < y^{n+p} \leq 1$ , și  $|\sigma_i| < \frac{\epsilon}{2}$ ,  $i = 1, 2, \dots$

deducem

$$\begin{aligned} |a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \dots + a_{n+p}x^{n+p}| &\leq \\ \leq (1-y)(|\sigma_1| + |\sigma_2|y + \dots + |\sigma_{p-1}|y^{p-2}) + |\sigma_p| &\leq \\ \leq (1-y)\frac{\epsilon}{2}(1+y+\dots+y^{p-2}) + \frac{\epsilon}{2} &\leq \frac{\epsilon}{2}(1-y)\frac{1-y^{p-1}}{1-y} + \frac{\epsilon}{2} = \\ = \frac{\epsilon}{2}(1-y^{p-1}) + \frac{\epsilon}{2} &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Conform criteriului lui Cauchy pentru serii de funcții, deducem că seria  $\sum a_n x^n$  este uniform convergentă pe  $[0, R]$ . Deoarece termenii seriei sunt funcții continue pe  $[0, R]$ , rezultă că și suma  $S$  a seriei este o funcție continuă pe  $[0, R]$  și în particular  $S$  este continuă în  $R$ .

**Observație.** Fie  $\sum a_n x^n$  o serie de puteri,  $R$  — raza sa de convergență și  $S$  — suma sa. Dacă se știe că seria este convergentă în  $R$ , și dacă se cunosc valorile funcției pe  $(-R, R)$ , atunci funcția  $S$  fiind continuă în  $R$ , avem

$$\lim_{x \rightarrow R^-} S(x) = S(R).$$

În acest fel avem posibilitatea să găsim suma seriei în punctul  $R$ , cunoscând suma sa în interiorul intervalului de convergență.

**Exemplu.** Fie seria

$$x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Audem  $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ . Acest șir are limita 1, deci  $R = 1$ . Pentru  $x = 1$ , obținem seria armonică alternată

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

care este convergentă.

Pentru  $x = -1$  obținem seria

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots$$

care este divergentă, deoarece se obține din seria armonică prin înmulțire cu  $-1$ . Multimea de convergență a acestei serii este deci  $(-1, 1]$ . Se va arăta mai departe că pe intervalul deschis  $(-1, 1)$  suma seriei este  $\ln(1+x)$ :

$$S(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Cum  $S$  este continuă în punctul 1, avem

$$S(1) = \lim_{x \rightarrow 1} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln(1+x) = \ln 2.$$

Așadar, suma seriei armonice alternate este  $\ln 2$ :

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Acest rezultat ne dă posibilitatea să calculăm cu aproximatie pe  $\ln 2$ , însumind un număr suficient de mare de termeni ai seriei armonice alternate. Dar seria armonică alternată converge „foarte incet”, aşa încit, trebuie să însumăm un număr foarte mare de termeni, pentru a obține cîteva zecimale exacte din reprezentarea numărului  $\ln 2$  în fracție zecimală. Practic, pentru calculul logaritmilor, se folosesc alte serii care converg „mai repede”.

## 5. Operații cu serii de puteri

Fie  $\sum a_n x^n$  și  $\sum b_n x^n$  două serii de puteri. Suma lor  $\sum (a_n + b_n) x^n$  este tot o serie de puteri. Dacă  $R_1$  este raza de convergență a seriei  $\sum a_n x^n$  și  $R_2$  raza de convergență a seriei  $\sum b_n x^n$ , atunci:

1) raza  $R$  de convergență a seriei sumă  $\sum (a_n + b_n) x^n$  verifică inegalitatea

$$R \geq \inf(R_1, R_2);$$

2) raza de convergență a seriei  $\alpha \sum a_n x^n = \sum \alpha a_n x^n$ , ( $\alpha \neq 0$ ) este  $R_1$ .

Într-adevăr, dacă  $x_0$  este un punct oarecare astfel ca  $|x_0| < R_1$  și  $|\alpha x_0| < R_2$ , atunci serile de numere  $\sum a_n x_0^n$  și  $\sum b_n x_0^n$  sunt convergente, deci și seria  $\sum (a_n + b_n) x_0^n$  este convergentă.

Rezultă că seria sumă  $\Sigma (a_n + b_n)x^n$  este absolut convergentă, deci  $|x_0| \leq R$ . Cum  $x_0$  a fost ales arbitrar astfel ca  $|x_0| < R_1$  și  $|x_0| < R_2$ , rezultă că  $R \geq \inf(R_1, R_2)$ .

**Observație.** Este posibil ca  $R > \inf(R_1, R_2)$ . De exemplu, dacă  $R_1 < +\infty$  și dacă  $b_n = -a_n$  pentru fiecare  $n \in N$ , atunci  $R_2 = R_1$  și  $R = +\infty$ .

Dacă  $S_1$  este suma seriei  $\Sigma a_n x^n$  și  $S_2$  este suma seriei  $\Sigma b_n x^n$ , și dacă notăm cu  $S$  suma seriei  $\Sigma (a_n + b_n)x^n$ , atunci

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x) \text{ pentru orice } |x| < R,$$

cum se poate constata imediat, pentru fiecare punct din  $(-R, R)$ .

**Observație.** Dacă  $A_1$  este mulțimea de convergență a seriei  $\Sigma a_n x^n$ ,  $A_2$ , mulțimea de convergență a seriei  $\Sigma b_n x^n$ , atunci  $S_1$  este definită pe  $A_1$  și  $S_2$  este definită pe  $A_2$ . Mulțimea  $A$  de convergență a seriei  $\Sigma (a_n + b_n)x^n$  conține mulțimea  $A_1 \cap A_2$ .

Suma  $S$  a seriei  $\Sigma (a_n + b_n)x^n$  este definită pe  $A$ , și

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x).$$

## 6. Derivarea seriilor de puteri

Fie  $(x_n)$  un sir de numere și  $\omega = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Din definiția punctelor limită ale unui sir rezultă că există un subșir  $(x_{n_p})_{p \in N}$  convergent către  $\omega$ .

Să observăm că dacă  $(y_{n_k})_{k \in N}$  este un subșir oarecare convergent al sirului  $(x_n)$ , limita sa este mai mică decât  $\omega$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \leq \overline{\lim_n} x_n = \omega.$$

Reamintim că dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$ , atunci  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \alpha_n x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Fie acum  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  o serie de puteri:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Să considerăm seria cu derivatele termenilor acestei serii:

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

Am obținut tot o serie de puteri, pe care o vom numi seria derivatelor.

Teorema următoare arată legătura dintre mulțimile de convergență ale celor două serii, și dintre sumele lor.

**Theoremă.** Dacă  $\sum a_n x^n$  este o serie de puteri și  $S$  suma sa, atunci:

1) Seria derivatelor are aceeași rază de convergență.

2) Funcția  $S$  este derivabilă pe intervalul de convergență și derivata  $S'$  este egală cu suma seriei derivatelor.

**Demonstrație:** 1) Fie  $R$  raza de convergență a seriei  $\sum a_n x^n$ . Avem  $R = \frac{1}{\omega}$  dacă  $\omega \neq 0$  și  $R = +\infty$  dacă  $\omega = 0$ , unde  $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ .

Să calculăm raza de convergență a seriei derivatelor  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ .

Pentru fiecare  $x \neq 0$  fixat, seria numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  este convergentă dacă și numai dacă seria numerică  $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$  este convergentă, deoarece seria a doua se obține din prima prin înmulțire cu numărul  $x$ .

Așadar, seria de puteri  $\sum n a_n x^{n-1}$  are aceeași rază de convergență cu seria de puteri  $\sum n a_n x^n$ . Pentru ultima serie, coeficientul lui  $x^n$  este  $n a_n$ . Avem  $\sqrt[n]{n |a_n|} = \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|}$ ; deoarece sirul  $(\sqrt[n]{n})$  are limită 1, rezultă că sirul  $(\sqrt[n]{n |a_n|})$  are aceeași limită superioară ca și sirul  $(\sqrt[n]{|a_n|})$ , adică  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n |a_n|} = \omega$ .

Rezultă că seria  $\sum n a_n x^n$ , deci și seria  $\sum n a_n x^{n-1}$ , are aceeași rază de convergență  $R$ , ca și seria  $\sum a_n x^n$ .

2) Fie  $x_0 \in (-R, R)$ , și fie  $r > 0$ , astfel ca  $r < R$  și  $-r < x_0 < r$ . Pe segmentul  $[-r, +r]$ , seria derivatelor este uniform convergentă către suma  $\sigma(x)$ . Cum seria  $\sum a_n x^n$  este convergentă în  $x_0$ , rezultă că ea este uniform convergentă pe  $[-r, r]$ , că suma sa  $S$  este derivabilă pe  $[-r, r]$ , și că  $S' = \sigma$ .

În particular,  $S'$  este derivabilă în  $x_0$ , și  $S'(x_0) = \sigma(x_0)$ .

Cum  $x_0$  a fost arbitrar în  $(-R, R)$ , rezultă că  $S$  este derivabilă pe  $(-R, R)$  și că  $S' = \sigma$ .

**Observație.** Dacă punem  $S(x) = \sum a_n x^n$  pentru  $x \in (-R, R)$ , teorema de mai sus spune că pentru a deriva suma unei serii de puteri, putem deriva seria termen cu termen:

$$S'(x) = \sum (a_n x^n)' = \sum n a_n x^{n-1}.$$

Putem acum pleca de la seria  $\sum n a_n x^{n-1}$  și să formăm seria derivatelor termenilor săi  $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ . Această serie se numește seria deri-

vatelor de ordinul 2. Ea are tot raza de convergență  $R$ , și suma sa este derivata  $\sigma'$  a sumei seriei  $\Sigma n a_n x^{n-1}$ . Putem considera seria derivatelor de orice ordin și, repetînd raționamentul, deducem următoarea :

**T e o r e m ă.** Dacă  $\Sigma a_n x^n$  este o serie de puteri și  $R$  raza sa de convergență, atunci,

- 1) Seria derivatelor de ordin  $n$  are aceeași rază de convergență  $R$ .
- 2) Suma  $S$  a seriei este indefinit derivabilă pe intervalul de convergență, și derivata de ordin  $n$ ,  $S^{(n)}$  este egală cu suma seriei derivatelor de ordin  $n$ .

Pe baza acestei teoreme, dacă se cunoaște suma unei serii, se obține prin derivare suma seriei derivatelor.

*Exemplu.* 1) Avem :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Atunci

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots \text{ pentru } |x| < 1.$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot x + \dots + n(n-1)x^{n-2} + \dots \text{ pentru } |x| < 1 \text{ etc.}$$

2) Să considerăm seria

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

Această serie este convergentă pentru  $|x| < 1$ . Să notăm cu  $f$  suma sa :

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Prin derivare obținem :

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x} \text{ pentru } |x| < 1;$$

cum derivata funcției  $g(x) = -\ln(1-x)$  este  $g'(x) = \frac{1}{1-x}$ , deducem că  $f(x) = g(x) + C$ .

Pentru  $x = 0$ , avem

$$f(0) = 0 \text{ și } g(0) = 0, \text{ deci } C = 0 \text{ și deci } f(x) = g(x).$$

Așadar avem

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \text{ pentru } |x| < 1.$$

3) Dacă în exemplul 1 schimbăm  $x$  cu  $-x$ , obținem

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \text{ pentru } |x| < 1.$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \dots + (-1)^n n x^{n-1} + \dots \text{ pentru } |x| < 1.$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 - 3 \cdot 2 \cdot x + \dots + (-1)^n n(n-1) x^{n-2} + \dots \text{ pentru } |x| < 1 \text{ etc.}$$

4) Dacă în exemplul 1 punem  $x^2$  în loc de  $x$ , obținem

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots \text{ pentru } |x| < 1$$

și prin derivare se obține suma altor serii convergente pentru  $|x| < 1$ .

5) De asemenea, dacă în exemplul 3 punem  $x^3$  în loc de  $x$ , obținem

$$\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots + (-1)^n x^{3n} + \dots \text{ pentru } |x| < 1.$$

6) Să considerăm seria

$$\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Să notăm cu  $R$  raza sa de convergență și cu  $f$  suma sa.

Prin derivare obținem seria

$$1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots$$

pentru care  $R = 1$  și care are suma  $\frac{1}{1-x^2}$ . Rezultă că și seria dată are raza de convergență  $R = 1$ , și suma sa  $f$  are derivata  $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ . Cum funcția  $g(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$  are aceeași derivată,  $g'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ , rezultă că  $f = g + C$ ; dar pentru  $x = 0$ , avem  $f(0) = 0$  și  $g(0) = 0$ , deci  $C = 0$ . Urmează că  $f(x) = g(x)$ , și deci

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \text{ pentru } |x| < 1.$$

7) Exemplul 6 se poate obține și astfel: să considerăm seria de la exemplul 2

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + \dots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Să schimbăm pe  $x$  cu  $-x$ . Obținem

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Scăzind prima serie din ultima, obținem

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right) \text{ pentru } |x| < 1.$$

Acea să egalitate, valabilă pentru  $|x| < 1$ , ne permite să calculăm logaritmul oricărui număr. Fie, într-adevăr,  $y > 0$  un număr real oarecare. Să găsim un număr  $x$ , astfel ca

$$\frac{1+x}{1-x} = y. \text{ Obținem } x = \frac{y-1}{y+1}. \text{ Avem } |x| < 1$$

și deci

$$\ln y = \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( \frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3} \frac{(y-1)^3}{(y+1)^3} + \dots + \frac{1}{2n+1} \frac{(y-1)^{2n+1}}{(y+1)^{2n+1}} + \dots \right)$$

Seria din paranteză este „foarte repede” convergentă, aşa încât, însumind un număr mic de termeni se obțin destule zecimale exacte ale lui  $\ln y$ .

Acesta este modul în care se calculează tablele de logaritmi.

8) Să reluăm seria de la 5 :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Să considerăm seria

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Seria derivatelor acesteia este seria de mai sus, deci seria aceasta are raza de convergență  $R = 1$ . Suma sa  $f$  este derivabilă și avem  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  pentru  $|x| < 1$ . Dar funcția  $g(x) = \operatorname{arctg} x$  are aceeași derivată, deci  $f(x) = \operatorname{arctg} x + C$  pentru  $|x| < 1$ . Cum pentru  $x = 0$  avem  $f(0) = 0$  și  $\operatorname{arctg} 0 = 0$ , rezultă  $C = 0$  și deci

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \text{ pentru } |x| < 1.$$

Să observăm că pentru  $x = 1$ , obținem seria

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

care este convergentă, cum se verifică ușor folosind criteriul lui Leibniz.

Deoarece  $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ , din teorema 2 a lui Abel obținem

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Această serie poate servi pentru calculul numărului  $\pi$ , dar seria este „încet convergentă”, aşa încât în practică se folosesc alte serii „mai repede” convergente.

9) Să considerăm seria

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Am văzut că pentru această serie avem  $R = +\infty$ . Să însemnăm cu  $f(x)$  suma sa. Prin derivare obținem

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = f(x).$$

Funcția  $f(x)$  are proprietatea că prin derivare se reproduce. Singurele funcții cu această proprietate sunt funcțiile

$$f(x) = Ce^x,$$

deoarece, dacă  $f' = f$ , atunci  $\frac{f'}{f} = 1$ , sau  $(\ln f)' = 1$ , de unde  $\ln f = x + \ln C$ , de unde  $f = Ce^x$ . Dar pentru  $x = 1$ , obținem  $f(1) = 1$ , și  $Ce^1 = 0$ , și deci  $C = 1$ . Așadar  $f(x) = e^x$ , și deci

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Pentru  $x = 1$ , obținem

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Această serie servește pentru calculul numărului  $e$ .

Aici avem al treilea mod de a defini numărul  $e$ , ca sumă a seriei de mai sus, celelalte două moduri fiind: ca limită a șirului  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  și ca bază a funcției exponențiale care în 0 are derivata 1.

10) Să considerăm seria

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{k(k-1) \dots (k-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

unde  $k$  este un număr real oarecare. Această serie se numește *seria binomială*. Aplicind criteriul lui d'Alembert se deduce că seria are raza de convergență  $R = 1$ .

Fie  $f$  suma acestei serii pe intervalul  $(-1, 1)$ . Așadar

$$f(x) = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{k(k-1) \dots (k-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

pentru  $|x| < 1$ .

Prin derivare obținem

$$f'(x) = k + \frac{k(k-1)}{1!} x + \dots + \frac{k(k-1) \dots (k-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} + \dots$$

pentru  $|x| < 1$ .

Înmulțind seria aceasta cu  $x$ , suma ei este  $xf'(x)$ . Atunci

$$\begin{aligned} f'(x) + xf'(x) &= k + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{k(k-1)\dots(k-n)}{n!} + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{(n-1)!} \right] x^n = \\ &= k \left( 1 + \sum \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} x^n \right) = kf(x) \text{ pentru } |x| < 1. \end{aligned}$$

De aici deducem

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{1+x} \text{ pentru } |x| < 1.$$

Funcția din membrul stîng este derivata funcției  $g(x) = \ln f(x)$ ; funcția din membrul drept este derivata funcției  $h(x) = k \ln(1+x)$ . Așadar,

$$g'(x) = h'(x) \text{ pentru } |x| < 1,$$

deci cele două funcții diferă printr-o funcție constantă  $M$

$$g(x) = h(x) + M.$$

Dacă punem  $C = e^M$  atunci  $M = \ln C$ , deci

$$\ln f(x) = k \ln(1+x) + \ln C$$

sau

$$\ln f(x) = \ln C (1+x)^k,$$

de unde

$$f(x) = C(1+x)^k.$$

Dar pentru  $x = 0$  seria binomială are suma

$$f(0) = 1$$

și deci

$$1 = C.$$

Așadar

$$f(x) = (1+x)^k$$

și deci, pentru  $|x| < 1$ ,

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

11) Dind lui  $k$  diferite valori, în seria binomială, obținem:

pentru  $k = \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2!} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!} x^4 + \dots + \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!} x^n + \dots \end{aligned}$$

pentru  $|x| < 1$ ;

pentru  $k = -\frac{1}{2}$  :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} x^3 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^n + \dots$$

pentru  $|x| < 1$ .

De altfel, seria a două se obține din prima prin derivare.

Schimbând  $x$  cu  $-x$ , în ultima serie, obținem

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^2 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^n + \dots$$

pentru  $|x| < 1$ .

Inlocuind acum  $x$  cu  $x^2$ , obținem

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n} + \dots$$

pentru  $|x| < 1$ .

12) Să considerăm seria

$$x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2! 5} x^5 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n! (2n+1)} x^{2n+1} + \dots$$

Prin derivare, obținem seria care are suma  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , și care are raza de convergență  $R = 1$ , deci și seria dată are raza de convergență 1. Dacă notăm cu  $f(x)$  suma seriei, avem

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pentru } |x| < 1$$

și cum  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  este derivata funcției  $x \rightarrow \arcsin x$ , deducem

$$f(x) = \arcsin x + C \quad \text{pentru } |x| < 1.$$

Pentru  $x = 0$ , avem  $f(0) = 0$ , și  $\arcsin 0 = 0$ , deci  $C = 0$ , și deci  $f(x) = \arcsin x$ . Așadar,

$$\arcsin x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2! 5} x^5 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

pentru  $|x| < 1$ .

Pentru  $x = \frac{1}{2}$  avem  $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ , și deci

$$\frac{\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2! 5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \frac{1}{2n+1} + \dots$$

Această serie permite să calculăm cu aproximatie numărul  $\pi$ .

## 7. Serii Taylor

Fie  $a \in R$  un punct oarecare. Vom numi serie Taylor o serie de puteri ale funcției  $(x - a)$ , de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n + \dots$$

Punind  $y = x - a$ , obținem seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n + \dots$$

Fie  $R$  raza de convergență a acestei serii de puteri. Pentru  $-R < y < R$ , seria este convergentă, și pentru  $|y| > R$  seria este divergentă. Inegalitatea  $-R < y < R$  se scrie

$$-R < x - a < R$$

sau

$$a - R < x < a + R,$$

deci seria inițială este convergentă în intervalul  $(a - R, a + R)$  cu centru în  $a$ .

Toate proprietățile seriilor de puteri se mențin pentru seriile Taylor:

1) Pentru orice serie Taylor  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ , există un număr  $R$ ,  $(0 \leq R \leq +\infty)$  numit raza de convergență, astfel încât:

Seria este absolut convergentă pe intervalul  $(a - R, a + R)$ .

Seria este divergentă pentru  $|x - a| > R$ .

2) Pentru orice  $0 < r < R$ , seria este uniform convergentă pe intervalul închis  $[a - r, a + r]$ .

3) Suma seriei este o funcție continuă pe  $(a - R, a + R)$ .

4) Dacă punem  $\omega = \lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$ , atunci

$$R = \frac{1}{\omega} \text{ dacă } 0 < \omega \leq +\infty \text{ și } R = +\infty, \text{ dacă } \omega = 0.$$

5) Suma a două serii Taylor  $\sum a_n(x - a)^n$  și  $\sum b_n(x - a)^n$  este tot o serie Taylor, cu raza de convergență egală cel puțin cu cea mai mică rază de convergență a celor două serii.

6) O serie Taylor se poate deriva termen cu termen. Seria derivatelor are aceeași rază de convergență și suma sa este derivata sumei Taylor inițiale.

7) Suma unei serii Taylor este indefinit derivabilă în  $(a - R, a + R)$ .

*Exemplu.* 1) Să considerăm seria Taylor

$$1 + (x - a) + (x - a)^2 + \dots + (x - a)^n + \dots$$

Este seria geometrică cu razia  $x - a$ , deci seria este convergentă dacă  $|x - a| < 1$  și divergentă dacă  $|x - a| > 1$ . Raza de convergență este  $R = 1$ , iar intervalul de convergență este  $(a - 1, a + 1)$ .

Suma seriei pe acest interval este  $\frac{1}{1 - (x - a)} = \frac{1}{1 - x + a}$ .

$$\frac{1}{1 - x + a} = 1 + (x - a) + \dots + (x - a)^n + \dots \text{ pentru } a - 1 < x < a + 1.$$

Prin derivare se obține

$$\frac{1}{(1 - x + a)^2} = 1 + 2(x - a) + 3(x - a)^2 + \dots + n(x - a)^{n-1} + \dots$$

pentru  $a - 1 < x < a + 1$ .

$$2) \ln(1 - x + a) = - (x - a)^2 - \frac{(x - a)^3}{2} - \dots - \frac{(x - a)^n}{n} - \dots$$

pentru  $|x - a| < 1$  adică  $a - 1 < x < a + 1$ .

$$3) \frac{1}{1 + (x - a)^2} = 1 - (x - a)^2 + (x - a)^4 - \dots + (-1)^n (x - a)^{2n} + \dots$$

pentru  $|x - a| < 1$  etc.

## 8. Dezvoltări în serie

Fie  $I$  un interval și  $a \in I$ . Fie  $f: I \rightarrow R$  o funcție indefinit derivabilă în punctul  $a$ . Să considerăm seria Taylor următoare:

$$f(a) + \frac{x - a}{1!} f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

Această serie se numește *seria Taylor a funcției  $f$  în punctul  $a$* . Ea are o rază de convergență  $0 \leq R \leq +\infty$ , o mulțime de convergență  $A$  care conține cel puțin punctul  $a$ , și un interval de convergență  $(a - R, a + R) \subset A$ .

Suma  $T$  a acestei serii este o funcție definită pe  $A$ .

Dacă notăm cu  $T_n$  sumele parțiale ale acestei serii

$$T_n(x) = f(a) + \frac{x - a}{1!} f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a),$$

$T_n$  sunt polinoame definite pe toată dreapta.

Șirul  $(T_n)$  al acestor polinoame este convergent pe  $A$  către  $T$ .

Trebuie observat că mulțimea  $A$  de convergență a seriei Taylor nu este neapărat o submulțime a intervalului  $I$  pe care este definită funcția  $f$ . De altfel, seria Taylor este perfect determinată prin cunoașterea derivatelor funcției  $f$  în punctul  $a$ , deci de cunoașterea valorilor funcției  $f$  într-o anumită vecinătate a punctului  $a$ , pe care o putem alege arbitrar, oricât de mică.

Să observăm de asemenea că  $T_n$  sănt polinoamele lui Taylor din formulele lui Taylor atașate funcției  $f$  în punctul  $a$ :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x),$$

$$x \in I,$$

unde  $R_n$  este restul formulei lui Taylor al funcției  $f$  în punctul  $a$ ;  $R_n$  este o funcție definită pe  $I$ , ca și  $f$ . Avem deci

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \text{ pentru orice } x \in I,$$

de unde

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x) \text{ pentru } x \in I.$$

$R_n$  nu trebuie confundat cu restul seriei Taylor. Pentru a le deosebi, vom nota cu  $\rho_n$  restul de rang  $n$  al seriei Taylor;  $\rho_n$  este o funcție definită pe mulțimea  $A$  de convergență a acestei serii.

Avem

$$T(x) = T_n(x) + \rho_n(x) \quad \text{pentru orice } x \in A.$$

Se pune întrebarea dacă avem

$$f(x) = T(x) \quad \text{pentru } x \in A \cap I,$$

adică dacă suma seriei Taylor a funcției  $f$ , pe mulțimea  $A \cap I$ , este chiar funcția  $f$ . Acest lucru nu se întimplă totdeauna, cum reiese din exemplul următor:

*Exemplu.* Fie  $f: R \rightarrow R$  funcția definită prin egalitățile

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

Această funcție este continuă în 0, deoarece  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$ .

Această funcție are deriveate de orice ordin în 0 și  $f^{(n)}(0) = 0$ .

Seria Taylor a acestei funcții în 0 este

$$0 + 0x + 0x^2 + \dots$$

Raza sa de convergență  $R = +\infty$  și suma sa este  $T(x) \equiv 0$ .  
Totuși, pentru  $x \neq 0$ , avem  $f(x) \neq 0$ , și deci avem

$$f(0) = T(0), \text{ dar } f(x) \neq T(x) \text{ pentru orice } x \neq 0.$$

Răspunsul întrebării de mai sus este dat de teorema următoare :

**Theoremă.** Seria Taylor a funcției  $f$  în punctul  $a$  este convergentă într-un punct  $x \in A \cap I$  către valoarea  $f(x)$  a funcției  $f$  în  $x$ , dacă și numai dacă valorile în  $x$  ale resturilor  $R_n$  ale formulelor lui Taylor formează un șir  $(R_n(x))$ , convergent către 0.

Într-adevăr, din egalitatea

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x)$$

deducem că  $f(x)$  este limita șirului  $T_n(x)$ , dacă și numai dacă șirul  $(R_n(x))$  are limită 0. Cum în acest caz șirul  $(T_n(x))$  are ca limită suma  $T(x)$  a seriei Taylor, și cum limita unui șir este unică, deducem că  $f(x) = T(x)$ .

Prin urmare, dacă  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , putem scrie

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

**Corolar.** Fie  $B$  o submulțime a mulțimii  $A \cap I$ . Avem

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

pentru orice  $x \in B$ , dacă și numai dacă șirul de funcții  $(R_n)$  format cu resturile formulelor lui Taylor este convergent pe  $B$  către 0.

Egalitatea de mai sus se numește *formula de dezvoltare a funcției  $f$  în serie Taylor în jurul punctului  $a$* .

**Observație.** Dacă  $f(x) = T(x)$ , atunci  $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ , deoarece  $R_n(x) = T(x) - T_n(x)$  și  $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ .

Dacă  $0 \in I$  și  $f$  este indefinit derivabilă în 0, atunci seria Taylor a funcției  $f$  în punctul 0 are forma

$$f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

Această serie se mai numește *seria MacLaurin* a funcției  $f$ .

*Exemple de dezvoltări în serie MacLaurin.* 1) Să considerăm funcția  $f: R \rightarrow R$  definită prin  $f(x) = e^x$ . Această funcție este indefinit derivabilă în orice punct.

Avem

$$f^{(n)}(x) = e^x, \text{ și } f^{(n)}(0) = 1, \text{ oricare ar fi } n \in N.$$

Formula lui MacLaurin cu restul sub forma lui Lagrange este

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{C_x},$$

unde  $C_x$  este un număr cuprins între 0 și  $x$ ,  $x < C_x < 0$  sau  $0 < C_x < x$ , și  $C_x$  depinde, în general, și de  $n$ .

Avem

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{C_x}$$

și

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{C_x} \leq e^{|C_x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Oricare ar fi  $x \in R$ , avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ , deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ , deci suma seriei MacLaurin, pentru orice  $x \in R$ , este  $e^x$ .

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Deoarece  $x$  este arbitrar, prin aceasta am și demonstrat că mulțimea  $A$  de convergență a seriei este totă dreapta, și suma ei este  $e^x$  pe totă dreapta.

2) Fie funcția  $f: R \rightarrow [-1, 1]$  definită prin  $f(x) = \sin x$ . Funcția este indefinit derivabilă pe  $R$ , și avem

$$\begin{array}{lll} f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\ f''''(x) = \sin x & f''''(0) = 0 \end{array}$$

Seria MacLaurin este

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Se calculează că raza de convergență este  $R = +\infty$ . Aceasta va rezulta de altfel și din cele ce urmează.

Să considerăm formula lui MacLaurin cu restul în forma lui Lagrange

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin \left( C_x + \frac{2n+1}{2} \pi \right),$$

unde  $C_x$  este cuprins între 0 și  $x$ . Restul  $R_n$  este

$$R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin \left( C_x + \frac{2n+1}{2}\pi \right)$$

și cum  $\left| \sin \left( C_x + \frac{2n+1}{2}\pi \right) \right| \leq 1$ , deducem

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Șirul  $(R_n(x))$  are limita 0, și deci  $\sin x$  este suma seriei MacLaurin în punctul  $x$ . Dar  $x$  a fost arbitrar, și deci pentru orice  $x \in R$  avem

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Și în acest caz seria MacLaurin converge pe toată dreapta către funcția  $\sin x$ .

3) Funcția  $f: R \rightarrow [-1, +1]$  definită prin  $f(x) = \cos x$ , este indefinit derivabilă.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0 \\ f''''(x) = \cos x & f''''(0) = 1 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Formula lui MacLaurin cu restul lui Lagrange se scrie

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!} \cos(C_x + (n+1)\pi)$$

și cum  $|\cos \theta| \leq 1$ , pentru restul acestei formule avem

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

și deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ ; rezultă că suma seriei MacLaurin este  $\cos x$ . Cum  $x$  a fost arbitrar, pentru orice  $x \in R$  avem

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

Prin aceasta s-a și demonstrat că seria este convergentă pentru orice  $x \in R$ .

4) Fie  $f: (-1, +\infty) \rightarrow R$ , definită prin  $f(x) = \ln(1+x)$ .

Funcția este indefinit derivabilă pe  $(-1, +\infty)$ .

$$f(x) = \ln(1+x) \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad f'''(0) = 2!$$

.....

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

Seria MacLaurin este

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

S-a arătat că mulțimea de convergență a acestei serii este  $A = (-1, 1]$ . Să arătăm că pe  $A$ , suma seriei este  $\ln(1+x)$ .

Pentru aceasta considerăm formula lui MacLaurin, cu restul lui Lagrange

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f(C_x),$$

unde  $0 < C_x < x$ , iar  $C_x$  depinde și de  $n$ . Dacă  $x \in (-1, +1]$  avem  $|x| \leq 1$ , deci  $|C_x| < 1$ .

Dar

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \text{ și deci pentru restul } R_n \text{ avem}$$

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{(1+C_x)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \left| \frac{x}{1+C_x} \right|^{n+1}.$$

Dacă  $0 < x \leq 1$ , atunci avem  $0 < C_x < x$ , deci  $1 + C_x > 1$

și deci  $\frac{x}{1+C_x} \leq x$ . Atunci

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} |x|^{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{și deci}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

Urmează că pentru  $x \in [0, 1]$ , avem

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Egalitatea aceasta este adevărată pentru orice  $x \in (-1, 1]$ , cum s-a arătat cu ajutorul teoremei de derivare termen cu termen a serilor de puteri.

Acesta este un exemplu în care mulțimea de definiție a funcției este  $= (-1, +\infty)$  și mulțimea de convergență a seriei este  $A = (-1, 1]$ , iar seria are ca sumă funcția  $f$  pe mulțimea  $A \cap I = (-1, 1]$ .

5) Să considerăm acum funcția  $f: R \rightarrow R$  definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{pentru } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pentru } x \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

Această funcție este, evident, iudefinit derivabilă în 0, și derivatele sale în 0 sunt egale cu derivatele funcției  $x \rightarrow \ln(1+x)$  în 0, deci are aceeași serie MacLaurin. Avem deci

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \text{ pentru } x \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right].$$

Dar seria este convergentă pe  $(-1, 1]$ . Așadar,  $I = R$ ,  $A = (-1, +1]$

$$\text{și } B = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \neq A \cap I.$$

6) În exemplul 4, înlocuind  $x$  cu  $-x$ , obținem funcția  $f$  definită pe  $(-\infty, +1)$  prin  $f(x) = \ln(1-x)$ . Seria Taylor a acestei funcții este

$$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

Pe intervalul  $[-1, 1)$ , suma acestei serii este  $\ln(1-x)$ .

*Exemple de dezvoltări în serie Taylor.* 1) Fie  $f(x) = e^x: R \rightarrow R$  și fie  $a \in R$ . Avem

$$f(a) = e^a, f'(a) = e^a, \dots, f^{(n)}(a) = e^a, \dots \text{ și}$$

$$e^x = e^a + \frac{x-a}{1!} e^a + \frac{(x-a)^2}{2!} e^a + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} e^a + \dots \text{ pentru } x \in R.$$

2) Fie  $f(x) = \sin x: R \rightarrow R$  și  $a \in R$ . Avem:

$$f(a) = \sin a, f'(a) = \cos a, f''(a) = -\sin a, f'''(a) = -\cos a, f^{IV}(a) = \sin a, \dots$$

$$\sin x = \sin a + \frac{x-a}{1!} \cos a - \frac{(x-a)^2}{2!} \sin a - \frac{(x-a)^3}{3!} \cos a +$$

$$+ \frac{(x-a)^4}{4!} \sin a - \dots \text{ pentru orice } x \in R.$$

3) Fie  $f(x) = \cos x: R \rightarrow R$ ,  $a \in R$ . Avem

$$f(a) = \cos a, f'(a) = -\sin a, f''(a) = -\cos a, f'''(a) = \sin a, f^{IV}(a) = \cos a, \dots$$

$$\cos x = \cos a - \frac{x-a}{1!} \sin a - \frac{(x-a)^2}{2!} \cos a + \frac{(x-a)^3}{3!} \sin a +$$

$$+ \frac{(x-a)^4}{4!} \cos a - \dots \text{ pentru orice } x \in R.$$

4) Fie  $f(x) = \ln(1+x) : (-1, +\infty) \rightarrow R$ , și fie  $a > -1$ .

Avem

$$f(a) = \ln(1+a)$$

$$f'(a) = \frac{1}{1+a}$$

$$f''(a) = -\frac{1}{(1+a)^2}$$

.....

$$f^{(n)}(a) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+a)^n}$$

.....

$$\ln(1+x) = \ln(1+a) + \frac{x-a}{1+a} - \frac{(x-a)^2}{2(1+a)^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-a)^n}{n(1+a)^n} + \dots$$

pentru  $x$  în intervalul de convergență al seriei. Să calculăm raza de convergență.

Avem  $\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n(1+a)^n}}$ . Acest sir are limita  $\frac{1}{1+a}$ , deci avem  $R = 1+a$ . Observăm că intervalul de convergență este  $(a-R, a+R) = (-1, 1+2a)$ , deci pentru orice serie Taylor a funcției  $f(x) = \ln(1+x)$ , intervalul de convergență are extremitatea stingă în punctul  $-1$ . Așadar, cu cit  $a$  este mai aproape de  $-1$ , cu atit raza de convergență a seriei Taylor este mai mică.

5) Prin derivare obținem

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+a} - \frac{x-a}{(1+a)^2} + \dots + (-1)^n \frac{(x-a)^n}{(1+a)^{n+1}} + \dots \text{ pentru } -1 < x < 1+2a;$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+a)^2} - \frac{2(x-a)}{(1+a)^3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n(x-a)^{n-1}}{(1+a)^{n+1}} + \dots$$

pentru  $-1 < x < 1+2a$ .

Schimbind  $x$  în  $-x$  și  $a$  în  $-a$  avem

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-a} + \frac{x-a}{(1-a)^2} + \dots + \frac{(x-a)^n}{(1-a)^{n+1}} + \dots \text{ pentru } -1+2a < x < 1;$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-a)^2} + \frac{2(x-a)}{(1-a)^3} + \dots + (-1)^n \frac{n(x-a)^{n-1}}{(1-a)^{n+1}} + \dots \text{ pentru } 1+2a < x < 1.$$

# CUPRINSUL

	<u>Pag.</u>
<b>Prefață . . . . .</b>	<b>3</b>
Capitolul I	
<b>MULTIMI ȘI FUNCȚII</b>	
<b>§ 1. Apartenență, incluziune, părțile unei multimi</b>	<b>7</b>
1. Exemple de multimi . . . . .	7
2. Elementele unei multimi . . . . .	7
3. Moduri de definire a multimilor . . . . .	8
4. Relația de egalitate . . . . .	8
5. Relația de apartenență . . . . .	9
6. Părțile unei multimi . . . . .	9
7. Relația de incluziune . . . . .	10
<b>§ 2. Operații cu multimile . . . . .</b>	<b>11</b>
1. Reuniunea și intersecția . . . . .	11
2. Diferența. Complementara . . . . .	12
3. Produs cartezian . . . . .	13
<b>§ 3. Funcții . . . . .</b>	<b>14</b>
1. Definiția funcției . . . . .	14
2. Graficul unei funcții . . . . .	16
3. Familii. Șiruri . . . . .	17
4. Reuniuni și intersecții de familii . . . . .	18
5. Restricții și extensiuni de funcții . . . . .	18
6. Funcții compuse . . . . .	19
<b>§ 4. Aplicații biunivoce. Funcții inverse . . . . .</b>	<b>21</b>
1. Imagini directe de multimi printr-o funcție. Aplicație pe o mulțime . . . . .	21
2. Imagini reciproce de multimi printr-o funcție. Aplicații biunivoce . . . . .	22
3. Funcții inverse . . . . .	24
<b>§ 5. Multimi numărabile . . . . .</b>	<b>26</b>
1. Corespondența biunivocă a două multimi . . . . .	26
2. Multimi numărabile . . . . .	26
<b>§ 6. Despre negație . . . . .</b>	<b>28</b>

## Capitolul II

## MULTIMI DE NUMERE REALE. FUNCȚII REALE

	Peg.
<b>§ 1. Numere reale . . . . .</b>	<b>31</b>
1. Structura algebrică a numerelor reale . . . . .	31
2. Clase de numere reale . . . . .	33
3. Structura de ordine . . . . .	35
4. Modulul . . . . .	38
5. Reprezentarea numerelor reale prin puncte pe o dreaptă . . . . .	39
6. Reprezentarea perechilor de numere prin puncte din plan . . . . .	39
7. Intervale . . . . .	39
<b>§ 2. Puteri întregi . . . . .</b>	<b>41</b>
1. Puteri naturale . . . . .	41
2. Puteri întregi . . . . .	42
3. Inegalitatea lui Bernoulli . . . . .	42
<b>§ 3. Multimi mărginite . . . . .</b>	<b>44</b>
1. Multimi majorate. Multimi minorate. Multimi mărginite . . . . .	44
2. Marginile unei multimi . . . . .	45
<b>§ 4. Strucutra topologică pe dreaptă . . . . .</b>	<b>47</b>
1. Vecinătățile unui punct pe dreaptă . . . . .	47
2. Puncte interioare. Multimi deschise . . . . .	48
3. Puncte aderente. Aderența unei multimi. Multimi închise . . . . .	51
4. Puncte de acumulare. Teorema lui Weierstrass-Bolzano . . . . .	54
5. Multimi compacte. Teorema lui Borel-Lebesgue . . . . .	56
<b>§ 5. Funcții reale . . . . .</b>	<b>59</b>
1. Funcții reale, funcții de variabilă reală . . . . .	59
2. Operații cu funcții reale . . . . .	59
3. Structura de ordine pe mulțimea funcțiilor reale . . . . .	62
4. Funcții mărginite . . . . .	64
5. Funcții monotone . . . . .	67
6. Oscilația unei funcții pe o mulțime . . . . .	69
7. Oscilația unei funcții într-un punct . . . . .	70

## Capitolul III

## SIRURI DE NUMERE

<b>§ 1. Generalități . . . . .</b>	<b>72</b>
1. Denumiri și notații . . . . .	72
2. Operații cu siruri . . . . .	73
3. Siruri mărginite . . . . .	74
4. Siruri monotone . . . . .	76
5. Subsiruri . . . . .	77
<b>§ 2. Siruri convergente . . . . .</b>	<b>78</b>
1. Un exemplu de sir convergent . . . . .	78
2. Definiția limitei . . . . .	79
3. Siruri convergente către 0 . . . . .	83
4. Proprietățile sirurilor convergente . . . . .	85

	Pag.
<b>§ 3. Operații cu șiruri convergente . . . . .</b>	<b>88</b>
1. Operații cu șiruri convergente către zero . . . . .	89
2. Operații cu șiruri convergente . . . . .	90
3. Cîtul a două șiruri convergente . . . . .	93
4. Trecerea la limită în inegalități . . . . .	96
<b>§ 4. Șiruri fundamentale (Cauchy) . . . . .</b>	<b>97</b>
1. Definiția șirului fundamental . . . . .	97
2. Subșiruri convergente. Lema lui Cesàro . . . . .	99
3. Criteriul lui Cauchy . . . . .	102
<b>§ 5. Șiruri monotone . . . . .</b>	<b>105</b>
1. Teorema de convergență a șirurilor monotone . . . . .	105
2. Numărul $e$ . . . . .	108
<b>§ 6. Proprietăți suplimentare ale șirurilor convergente . . . . .</b>	<b>110</b>
1. Schimbarea ordinii termenilor unui șir convergent . . . . .	110
2. Puncte de acumulare ale unei mulțimi . . . . .	111
<b>§ 7. Puteri și logaritmi . . . . .</b>	<b>113</b>
1. Radicali . . . . .	113
2. Proprietățile radicalilor . . . . .	114
3. Puteri raționale . . . . .	115
4. Proprietățile puterilor raționale . . . . .	117
5. Șiruri de puteri raționale . . . . .	118
6. Puteri reale . . . . .	121
7. Proprietățile puterilor reale . . . . .	122
8. Logaritmi . . . . .	125
9. Proprietățile logaritmilor . . . . .	128

Capitolul IV<sub>1</sub>**DREAPTA ÎNCHEIATĂ**

<b>§ 1. Mulțimi nemărginite . . . . .</b>	<b>132</b>
1. Mulțimi nemajorate . . . . .	132
2. Mulțimi neminorate . . . . .	133
3. Mulțimi nemărginite . . . . .	134
4. Funcții nemărginite . . . . .	135
<b>§ 2. Extinderea structurii topologice la dreapta închelată . . . . .</b>	<b>137</b>
1. Vecinătățile lui $+\infty$ și $-\infty$ . . . . .	137
2. Puncte de acumulare infinite . . . . .	137
<b>§ 3. Șiruri cu limită <math>+\infty</math> sau <math>-\infty</math> . . . . .</b>	<b>138</b>
1. Șiruri cu limită infinită . . . . .	138
2. Criterii pentru existența limitelor infinite . . . . .	141
3. Șiruri monotone nemărginite . . . . .	141
4. Proprietăți ale șirurilor cu limite infinite . . . . .	143
5. Trecerea la limită în inegalități . . . . .	146
6. Modulul . . . . .	146

	Pag.
§ 4. Operații cu șiruri care au limită . . . . .	147
1. Suma șirurilor care au limită . . . . .	147
2. Produsul cu scalari al șirurilor care au limită . . . . .	149
3. Produsul șirurilor care au limită . . . . .	150
4. Cîtul șirurilor care au limită . . . . .	152
5. Aplicații . . . . .	155
6. Puteri . . . . .	159
§ 5. Punete limită ale unui șir . . . . .	161

## Capitolul V

### LIMITE DE FUNCȚII. CONTINUITATE

§ 1. Limita unei funcții într-un punct . . . . .	166
1. Punerea problemei . . . . .	166
2. Definiția limitei cu ajutorul vecinătăților . . . . .	167
3. Definiția cu $\epsilon$ și $\delta$ a limitei . . . . .	168
4. Definiția cu șiruri a limitei . . . . .	172
5. Exemple . . . . .	174
§ 2. Limite laterale . . . . .	177
1. Limite relative la submulțimi . . . . .	177
2. Limita la stînga . . . . .	179
3. Limita la dreapta . . . . .	180
4. Calculul limitei cu ajutorul limitelor laterale . . . . .	181
§ 3. Proprietățile limitelor de funcții . . . . .	185
1. Proprietăți ale limitelor . . . . .	185
2. Proprietăți ale funcțiilor deduse din proprietățile limitelor . . . . .	188
3. Criterii de existență a limitelor de funcții . . . . .	189
4. Operații cu funcțiile care au limită . . . . .	194
5. Exemple . . . . .	197
6. Limitele funcțiilor compuse . . . . .	202
§ 4. Funcții continue . . . . .	203
1. Definiția continuității . . . . .	203
2. Puncte de discontinuitate . . . . .	210
3. Continuitatea relativă la o submulțime . . . . .	215
4. Continuitatea laterală . . . . .	216
§ 5. Proprietățile funcțiilor continue . . . . .	219
1. Operații cu funcții continue . . . . .	219
2. Proprietățile locale ale funcțiilor continue . . . . .	220
3. Prelungirea prin continuitate a unei funcții . . . . .	222
4. Proprietatea lui Darboux . . . . .	224
5. Rezolvarea ecuațiilor $x^n = a$ și $a^x = b$ . . . . .	231
6. Continuitatea funcțiilor compuse . . . . .	232
7. Continuitatea funcțiilor inverse . . . . .	232
8. Proprietățile funcțiilor continue pe mulțimi compacte . . . . .	234
9. Funcții uniform continue . . . . .	236
10. Funcții semicontinue . . . . .	240

## Capitolul VI

## DERIVATE

	Pag.
<b>§ 1. Originea geometrică și fizică a derivatei . . . . .</b>	<b>242</b>
1. Problema tangentei . . . . .	242
2. Problema vitezei . . . . .	243
3. Densitatea liniară a unei bare materiale . . . . .	244
<b>§ 2. Derivata . . . . .</b>	<b>246</b>
1. Definiția derivatei . . . . .	246
2. Continuitatea funcțiilor derivabile . . . . .	248
3. Derivate laterale . . . . .	249
4. Derivata pe un interval . . . . .	254
5. Exemple de funcții derivabile . . . . .	255
<b>§ 3. Operații cu funcții derivabile . . . . .</b>	<b>259</b>
1. Operații algebrice . . . . .	259
2. Derivabilitatea funcțiilor compuse . . . . .	266
3. Derivabilitatea funcțiilor inverse . . . . .	269
<b>§ 4. Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile . . . . .</b>	<b>277</b>
1. Teorema lui Fermat . . . . .	277
2. Teorema lui Rolle . . . . .	280
3. Teorema lui Lagrange . . . . .	282
4. Consecințe ale teoremei creșterilor finite . . . . .	285
5. Teorema lui Cauchy . . . . .	289
6. Teorema lui Darboux . . . . .	291
<b>§ 5. Derivate de ordin superior. Formula lui Taylor . . . . .</b>	<b>293</b>
1. Derivate de ordin superior . . . . .	293
2. Operații cu funcții derivabile de $n$ ori . . . . .	296
3. Formula lui Taylor . . . . .	301
4. Puncte de extrem ale unei funcții . . . . .	307
<b>§ 6. Reguliile lui l'Hospital . . . . .</b>	<b>310</b>
1. Cazul $\frac{0}{0}$ . . . . .	310
2. Cazul $\frac{\infty}{\infty}$ . . . . .	317
3. Alte cazuri . . . . .	325
<b>§ 7. Aplicațiiile derivatelor la studiul funcțiilor . . . . .</b>	<b>330</b>
1. Derivata întii. Intervale de monotonie. Puncte de extrem . . . . .	330
2. Derivata a doua. Convexitate și concavitate. Puncte de inflexiune . . . . .	334
3. Asimptote . . . . .	341
4. Reprezentarea grafică a funcțiilor . . . . .	347
<b>§ 8. Diferențiale . . . . .</b>	<b>350</b>
1. Definiția diferențialei . . . . .	350
2. Diferențiala funcțiilor compuse . . . . .	354
3. Diferențiale de ordin superior . . . . .	355

	Pag.
<b>§ 9. Aplicațiiile derivatei în fizică . . . . .</b>	356
1. Viteza în mișcarea rectilinie . . . . .	356
2. Accelerația în mișcarea rectilinie . . . . .	357
3. Viteza și accelerată unghiulară . . . . .	358
4. Debitul unui lichid . . . . .	358
5. Intensitatea curentului electric . . . . .	359
6. Densitatea unei repartiții liniare de masă . . . . .	359
<b>Capitolul VII</b>	
<b>INTEGRAREA</b>	
<b>§ 1. Multimi măsurabile în sensul lui Jordan . . . . .</b>	360
1. Multimi pe dreaptă măsurabile Jordan . . . . .	360
2. Multimi de măsură Jordan nulă . . . . .	367
3. Multimi neglijabile . . . . .	370
4. Multimi plane măsurabile Jordan . . . . .	372
5. Multimi măsurabile Jordan în spațiul $R^3$ . . . . .	374
<b>§ 2. Integrala în sensul lui Riemann . . . . .</b>	375
1. Probleme care conduc la noțiunea de integrală . . . . .	375
2. Definiția integralei în sensul lui Riemann . . . . .	378
3. Criteriul lui Darboux . . . . .	385
4. Clase de funcții integrabile . . . . .	390
5. Criteriul lui Lebesgue . . . . .	391
<b>§ 3. Proprietățile funcțiilor integrabile . . . . .</b>	394
1. Spațiul funcțiilor integrabile. Liniaritatea integralei . . . . .	394
2. Proprietăți de monotonie ale integralei . . . . .	397
3. Formule de medie . . . . .	401
4. Proprietatea de ereditate. Aditivitatea integralei ca funcție de interval . . . . .	403
5. Integrarea pe o reuniune de intervale . . . . .	406
<b>§ 4. Primitive . . . . .</b>	409
1. Integrala needefinită . . . . .	409
2. Formula lui Leibniz-Newton . . . . .	413
3. Tabloul primitivelor imediate . . . . .	418
4. Proprietățile primitiveelor . . . . .	420
5. Metode de calcul al primitiveelor . . . . .	423
6. Primitivele funcțiilor raționale . . . . .	434
7. Integrarea funcțiilor continue . . . . .	444
<b>§ 5. Metode de integrare . . . . .</b>	446
1. Integrarea prin părți . . . . .	446
2. Transcențența numărului $e$ . . . . .	451
3. Transcențența numărului $\pi$ . . . . .	453
4. Schimbarea de variabilă (integrarea funcțiilor compuse) . . . . .	455
<b>§ 6. Integrale reductibile la integrale raționale . . . . .</b>	460
1. Considerații preliminare . . . . .	460
2. Integrale de funcții exponentiale . . . . .	464
3. Integrale de funcții trigonometrice . . . . .	465
4. Integrale de funcții iraționale . . . . .	478

	Pag.
<b>§ 7. Metode de calcul aproximativ al integralei</b> . . . . .	499
1. Metoda dreptunghiurilor . . . . .	499
2. Metoda trapezelor . . . . .	502
3. Formula lui Simpson . . . . .	507
<b>§ 8. Aplicațiiile Integralei în geometrie și fizică</b> . . . . .	511
1. Aria unei suprafețe plane mărginite de o curbă . . . . .	511
2. Aria unei suprafețe plane mărginite de o curbă dată în coordonate polare . . . . .	517
3. Volumul corpuriilor de rotație . . . . .	520
4. Lungimi de arce . . . . .	523
5. Suprafețe de rotație . . . . .	526
6. Centre de greutate . . . . .	530
7. Lucrul mecanic . . . . .	532

### Capitolul VIII

#### FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

<b>§ 1. Spațiile <math>R^n</math></b> . . . . .	534
1. Spațiul cu $n$ dimensiuni . . . . .	534
2. Structura de spațiu vectorial pe $R^n$ . . . . .	535
3. Produsul scalar . . . . .	537
4. Norma în spațiul $R^n$ . . . . .	538
5. Distanța în $R^n$ . . . . .	541
<b>§ 2. Topologia în <math>R^n</math></b> . . . . .	542
1. Vecinătățile unui punct din $R^n$ . . . . .	542
2. Multimi deschise . . . . .	546
3. Multimi închise. Frontieră . . . . .	546
4. Puncte de acumulare . . . . .	547
5. Multimi mărginite. Multimi compacte. Multimi conexe . . . . .	548
<b>§ 3. Șiruri de puncte din spațiul <math>R^n</math></b> . . . . .	548
1. Șiruri convergente. Proprietăți . . . . .	548
2. Șiruri fundamentale. Criteriul lui Cauchy . . . . .	551
3. Lema lui Cesaro. Teorema lui Weierstrass-Bolzano. Teorema lui Borel-Lebesgue . . . . .	554
<b>§ 4. Funcții definite pe multimi din <math>R^n</math></b> . . . . .	557
1. Funcții vectoriale de variabilă vectorială . . . . .	557
2. Aplicații. Curbe și suprafețe. Transformări punctuale . . . . .	560
3. Operații cu funcții vectoriale . . . . .	563
4. Componerea funcțiilor vectoriale . . . . .	564
5. Inversarea funcțiilor vectoriale . . . . .	568
6. Funcții mărginite . . . . .	569
<b>§ 5. Limite. Continuitate</b> . . . . .	571
1. Limite de funcții vectoriale . . . . .	571
2. Limite iterate . . . . .	575
3. Continuitatea funcțiilor vectoriale . . . . .	576
4. Continuitate parțială . . . . .	578
5. Funcții vectoriale uniform continue . . . . .	580
6. Funcții vectoriale continue pe multimi compacte . . . . .	581
7. Funcții vectoriale continue pe multimi conexe . . . . .	581
8. Derivata funcțiilor vectoriale de o variabilă . . . . .	584
9. Viteză și accelerată în mișcarea în spațiu . . . . .	587
10. Integrarea funcțiilor vectoriale de o variabilă . . . . .	587

	Pag.
<b>§ 6. Derivate parțiale. Diferențiale</b> . . . . .	590
1. Derivate parțiale . . . . .	590
2. Diferențabilitatea funcțiilor de mai multe variabile . . . . .	596
3. Diferențiala funcțiilor de mai multe variabile . . . . .	605
4. Derivate parțiale de ordin superior . . . . .	607
5. Diferențiale de ordin superior . . . . .	614
6. Diferențialele și derivele parțiale ale funcțiilor compuse . . . . .	616
7. Diferențialele și derivele parțiale de ordin superior ale funcțiilor compuse . . . . .	630
8. Formula lui Taylor . . . . .	639
9. Extremele funcțiilor de mai multe variabile . . . . .	645
10. Funcții omogene și teorema lui Euler . . . . .	653
<b>§ 7. Funcții implicate</b> . . . . .	655
1. Funcții implicate de una sau mai multe variabile . . . . .	655
2. Sisteme de funcții implicate . . . . .	661
3. Transformări regulate . . . . .	668
4. Dependență funcțională . . . . .	674
5. Extreme condiționate . . . . .	682

## Capitolul IX

### SERII DE NUMERE. ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII

<b>§ 1. Serii de numere</b> . . . . .	690
1. Definiția serilor convergente . . . . .	690
2. Influența unui număr finit de termeni asupra convergenței serilor . . . . .	693
3. Proprietăți ale șirului termenilor și ale sumelor parțiale . . . . .	695
4. Operații cu serii . . . . .	697
5. Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare . . . . .	699
6. Serii alternate . . . . .	701
<b>§ 2. Serii absolut convergente</b> . . . . .	703
1. Serii absolut convergente. Serii semiconvergente . . . . .	703
2. Serii cu termeni pozitivi . . . . .	707
<b>§ 3. Șiruri de funcții</b> . . . . .	717
1. Multimea de convergență . . . . .	717
2. Convergență simplă. Convergență uniformă . . . . .	718
3. Criterii de convergență uniformă . . . . .	721
4. Continuitatea și convergență uniformă . . . . .	723
5. Integrabilitatea și convergență uniformă . . . . .	724
6. Derivabilitatea și convergență uniformă . . . . .	725
7. Aproximarea uniformă a funcțiilor continue . . . . .	729
8. Aproximarea funcțiilor continue prin funcții poligonale . . . . .	730
9. Șiruri de funcții egale și egale mărginite . . . . .	733
<b>§ 4. Serii de funcții</b> . . . . .	735
1. Convergență simplă și uniformă . . . . .	735
2. Restul seriei . . . . .	739
3. Criterii de convergență uniformă . . . . .	741
4. Continuitatea, integrabilitatea și derivabilitatea serilor uniform convergente . . . . .	743
5. Operații cu serii de funcții . . . . .	745

	<u>Pag.</u>
<b>§ 5. Serii de puteri . . . . .</b>	<b>745</b>
1. Definiția seriilor de puteri . . . . .	745
2. Raza de convergență . . . . .	747
3. Teorema lui Cauchy-Hadamard . . . . .	750
4. Continuitatea sumei unei serii de puteri . . . . .	752
5. Operații cu serii de puteri . . . . .	756
6. Derivarea seriilor de puteri . . . . .	757
7. Serii Taylor . . . . .	765
8. Dezvoltări în serie . . . . .	766

Coli de tipar: 49,—



Intreprinderea Poligrafică Cluj  
Str. Brassai 5—7  
Republica Socialistă România  
Comanda nr. 415/971—5029