Notiţe

Notiţe

- Axiome
- Dublă negaţie (DN)
- DvP
- Echivalenţă la Implicaţie (EI)
- Gentzen
- Funcţie de Interpretare I
- Implicaţie la Echivalenţă (IE)
- Modus Ponens (MP)
- Schema Permutării Premiselor (PP)
- rez
- REZ
- Schema Silogismului (RS)
- Substituţie
- Tablou Semantic
- Teorema Deductiei

Axiome

Fie a, b, c propoziţii elementare. Mulţimea axiomelor teoriei, notată $AXIOM$ este, $AXIOM = \{\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_2\}$ unde,

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}_1 &= (a \rightarrow (b \rightarrow a)) \\
\overline{\alpha}_2 &= ((a \rightarrow (a \rightarrow b)) \rightarrow (a \rightarrow b)), \\
\overline{\alpha}_3 &= ((a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c))), \\
\overline{\alpha}_4 &= ((a \leftrightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b)), \\
\overline{\alpha}_5 &= ((a \leftrightarrow b) \rightarrow (b \rightarrow a)), \\
\overline{\alpha}_6 &= ((a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow a) \rightarrow (a \leftrightarrow b))), \\
\overline{\alpha}_7 &= (((\neg a) \rightarrow (\neg b)) \rightarrow (b \rightarrow a)), \\
\overline{\alpha}_8 &= ((a \vee b) \leftrightarrow ((\neg a) \rightarrow b)), \\
\overline{\alpha}_9 &= ((a \wedge b) \leftrightarrow (\neg ((\neg a) \vee (\neg b)))).
\end{aligned}$$

Evident, $AXIOM \subset FORM$

Dublă negaţie (DN)

1.4.6 Schemele dublei negaţii (DN)

Pentru orice $\alpha \in FORM$, $\vdash (\alpha \leftrightarrow (\neg(\neg\alpha)))$.

Pentru $H = \{(\neg(\neg\alpha))\}$ şi $\beta \in T_h$ (de exemplu $\beta = (\alpha \to \alpha)$) fie H-secvenţa deductivă,

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 = ((\neg(\neg\alpha)) \to ((\neg\alpha) \to (\neg\beta))) \in T_h(\text{aplicaţia } 1.4.5),\\
&\gamma_2 = (\neg(\neg\alpha)) \in H,\\
&\gamma_3 = ((\neg\alpha) \to (\neg\beta)),\ \frac{\gamma_2, \gamma_1}{\gamma_3} MP,\\
&\gamma_4 = (((\neg\alpha) \to (\neg\beta)) \to (\beta \to \alpha)) = \overline{\alpha}_7 \{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\},\\
&\gamma_5 = (\beta \to \alpha), \frac{\gamma_3, \gamma_4}{\gamma_5} MP,\\
&\gamma_6 = \beta \in T_h,\\
&\gamma_7 = \alpha, \frac{\gamma_6, \gamma_5}{\gamma_7} MP.
\end{aligned}$$

Rezultă

$$\{(\neg(\neg\alpha))\} \vdash \alpha,$$

deci

$$\vdash ((\neg(\neg\alpha)) \to \alpha)$$

pentru orice formulă α, ceea ce în particular implică,

$$\vdash ((\neg(\neg(\neg\alpha))) \to (\neg\alpha)).$$

Considerăm demonstraţia formală

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= ((\neg(\neg(\neg\alpha))) \to (\neg\alpha)) \in T_h,\\
\delta_2 &= (((\neg(\neg(\neg\alpha))) \to (\neg\alpha)) \to (\alpha \to (\neg(\neg\alpha)))) =\\
&= \overline{\alpha}_7 \{(\neg(\neg\alpha)) \mid a,\ \alpha \mid b\},\\
\delta_3 &= (\alpha \to (\neg(\neg\alpha))),\ \frac{\delta_1, \delta_2}{\delta_3} MP.
\end{aligned}$$

deci

$$\vdash (\alpha \to (\neg(\neg\alpha))),$$

adică

$$\{\alpha\} \vdash (\neg(\neg\alpha)).$$

deci

$$\vdash (\alpha \to (\neg (\neg \alpha))) \,,$$

adică

$$\{\alpha\} \vdash (\neg (\neg \alpha)) \,.$$

Fie demonstraţia formală,

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= ((\neg (\neg \alpha)) \to \alpha) \in T_h, \\
\eta_2 &= (\alpha \to (\neg (\neg \alpha))) \in T_h, \\
\eta_3 &= (\alpha \leftrightarrow (\neg (\neg \alpha))) \,, \frac{\eta_1, \eta_2}{\eta_3} IE.
\end{aligned}$$

Din rezultatele stabilite obţinem schemele de inferenţă (DN) reprezentate prin

$$\frac{\alpha}{(\neg (\neg \alpha))} DN$$

şi respectiv

$$\frac{(\neg (\neg \alpha))}{\alpha} DN.$$

Observaţia 1.4.1 Mulţimea formulelor false este nevidă. Într-adevăr, deoarece $T_h \neq \emptyset$, fie $\alpha \in T_h$. Evident, rezultă $(\neg (\neg \alpha)) \in T_h$ deci $(\neg \alpha)$ este formulă falsă. Convenim să notăm prin $\top$ o formulă demonstrabilă, respectiv prin $\bot$ o formulă falsă oarecare.

DvP

Definiţia 4.2.2 *Fie $S(\alpha)$ o reprezentare clauzală liberă de tautologii şi λ literal. Fie submulţimile de clauze,*

$$\begin{aligned}
\alpha_\lambda^+ &= \{k \mid k \in S(\alpha), k \langle \lambda \rangle\} \,, \\
\alpha_\lambda^- &= \{k \mid k \in S(\alpha), k \langle (\neg \lambda) \rangle\} \,, \\
\alpha_\lambda^0 &= \{k \mid k \in S(\alpha), k \rangle \lambda \langle ,\ k \rangle (\neg \lambda) \langle\} \,, \\
POS_\lambda(\alpha) &= \alpha_\lambda^0 \cup \left\{k \setminus \lambda \ \mid k \in \alpha_\lambda^+\right\} , \\
NEG_\lambda(\alpha) &= \alpha_\lambda^0 \cup \left\{k \setminus (\neg \lambda) \ \mid k \in \alpha_\lambda^-\right\} .
\end{aligned}$$

Observaţia 4.2.2 Evident, $\alpha_\lambda^+ = \alpha_{(\neg\lambda)}^-, \alpha_\lambda^- = \alpha_{(\neg\lambda)}^+, \alpha_\lambda^0 = \alpha_{(\neg\lambda)}^0$. Deoarece $S(\alpha)$ este reprezentare clauzală liberă de tautologii, pentru orice literal λ , $\alpha_\lambda^+, \alpha_\lambda^-, \alpha_\lambda^0$ este o partiţie a mulţimii $S(\alpha)$.

De asemenea, $\alpha_\lambda^+ = \alpha_{(\neg\lambda)}^-, \alpha_\lambda^- = \alpha_{(\neg\lambda)}^+, \alpha_\lambda^0 = \alpha_{(\neg\lambda)}^0$.

```
procedure DvP;
Intrare: Structură de date pentru stocarea reprezentării clauzale S(α)
EliminaTautologii(S(α));
γ ← S(α); T ← ∅; sw ← false;
repeat
if γ = ∅ then
        write ('Validabilă');
        sw ← true
    else
      if □ ∈ γ then
              if T = ∅ then
                      write ('Invalidabilă');
                      sw ← true
                  else
                    γ ← TOP(T);
                    POP(T);
              endif
          else
             if (există λ clauză unitară) or (există λ literal pur ) then
                                                                  γ ← NEG_λ(γ)
                                                                else
                                                                  alege ( λ literal);
                                                                  γ ← NEG_λ(γ);
                                                                  PUSH(T, POS_λ(γ))
             endif
      endif
endif
until sw
end.
```

Exemplul 4.2.2 Evoluţia determinată de procedura DvP pentru datele de intrare

$$S(\alpha) = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$$

unde

$$\begin{aligned} k_1 &= (\neg p) \vee o, \\ k_2 &= (\neg p) \vee (\neg c), \\ k_3 &= (\neg m) \vee c \vee i, \\ k_4 &= m, \\ k_5 &= p, \\ k_6 &= (\neg i). \end{aligned}$$

este :

Iniţializări: $\gamma \leftarrow \{(\neg p) \vee o, (\neg p) \vee (\neg c), (\neg m) \vee c \vee i, m, p, (\neg i)\}$;
$sw \leftarrow false; T \leftarrow \emptyset$

Iteraţia 1: $\lambda = m$ clauză unitară
$\gamma \leftarrow NEG_m(\gamma) = \{(\neg p) \vee o, (\neg p) \vee (\neg c), c \vee i, p, (\neg i)\}$

Iteraţia 2: $\lambda = p$ clauză unitară
$\gamma \leftarrow NEG_p(\gamma) = \{o, (\neg c), c \vee i, (\neg i)\}$

Iteraţia 3: $\lambda = o$ clauză unitară (literalul o este şi literal pur)
$\gamma \leftarrow NEG_o(\gamma) = \{(\neg c), c \vee i, (\neg i)\}$

Iteraţia 4: $\lambda = (\neg c)$ clauză unitară
$\gamma \leftarrow NEG_{(\neg c)}(\gamma) = \{i, (\neg i)\}$

Iteraţia 5: $\lambda = i$ clauză unitară
$\gamma \leftarrow NEG_i(\gamma) = \{\square\}$

Iteraţia 6: $\square \in \gamma$ şi $T = \emptyset \Rightarrow$write $('invalidalibil\breve{a}')$, sw$\leftarrow$ $true$
$\Rightarrow$ STOP.

Exemplul 4.2.3 Evoluţia determinată de procedura DvP pentru datele de intrare

$$S(\alpha) = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$$

unde

$$\begin{aligned} k_1 &= a \vee (\neg b) \vee c, \\ k_2 &= (\neg a) \vee (\neg c), \\ k_3 &= (\neg c) \vee b, \\ k_4 &= (\neg b) \vee a. \end{aligned}$$

este:

Iniţializări: $\gamma \leftarrow \{a \vee (\neg b) \vee c, (\neg a) \vee (\neg c), (\neg c) \vee b, (\neg b) \vee a\}$;
$sw \leftarrow false; T \leftarrow \emptyset$,

Iteraţia 1: Nu există clauză unitară şi nici literal pur; apelul alege (λ literal) selectează $\lambda = a$
$\gamma \leftarrow NEG_a(\gamma) = \{(\neg c), (\neg c) \vee b\}$
$T \leftarrow POS_a(\gamma) = \{(\neg b) \vee c, (\neg c) \vee b, (\neg b)\}$,

Iteraţia 2: $\lambda = (\neg c)$ clauză unitară (literalul $(\neg c)$ este şi literal pur)
$\gamma \leftarrow NEG_{(\neg c)}(\gamma) = \emptyset$,

Iteraţia 3: $\gamma = \emptyset \Rightarrow$ decizia terminală 'validabilă'.

Echivalenţă la Implicaţie (EI)

1.4.4 Schemele "trecerii" de la echivalenţă la implicaţie (EI)

Deoarece pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$,

$$\overline{\alpha}_4 \{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\} = ((\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\alpha \to \beta))$$

şi

$$\overline{\alpha}_5 \{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\} = ((\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\beta \to \alpha))$$

rezultă

$$\{(\alpha \leftrightarrow \beta)\} \vdash (\alpha \to \beta) \text{ şi } \{(\alpha \leftrightarrow \beta)\} \vdash (\beta \to \alpha).$$

Schemele „trecerii" de la echivalenţă la implicaţie (EI) sunt reprezentate prin $\frac{(\alpha \leftrightarrow \beta)}{(\alpha \to \beta)} EI$ respectiv $\frac{(\alpha \leftrightarrow \beta)}{(\beta \to \alpha)} EI$.

Gentzen

Definiţia 2.2.4 *Regulile de inferenţă Gentzen sunt:*

G1. $\frac{H \Longrightarrow \Gamma \cup \{\alpha\}}{H \cup \{(\neg\alpha)\} \Longrightarrow \Gamma}$, *(*regula negaţie stânga*);*

G2. $\frac{H \cup \{\alpha,\beta\} \Longrightarrow \Gamma}{H \cup \{(\alpha \wedge \beta)\} \Longrightarrow \Gamma}$, *(*regula conjuncţiei stânga*);*

G3. $\frac{H \cup \{\alpha\} \Longrightarrow \Gamma,\ H \cup \{\beta\} \Longrightarrow \Gamma}{H \cup \{(\alpha \vee \beta)\} \Longrightarrow \Gamma}$,*(*regula disjuncţie stânga*);*

G4. $\frac{H \cup \{\beta\} \Longrightarrow \Gamma,\ H \Longrightarrow \Gamma \cup \{\alpha\}}{H \cup \{(\alpha \to \beta)\} \Longrightarrow \Gamma}$, *(*regula implicaţiei stânga*);*

G5. $\frac{H \cup \{\alpha\} \Longrightarrow \Gamma}{H \Longrightarrow \Gamma \cup \{(\neg\alpha)\}}$, *(*regula negaţiei dreapta*);*

G6. $\frac{H \Longrightarrow \Gamma \cup \{\alpha\},\ H \Longrightarrow \Gamma \cup \{\beta\}}{H \Longrightarrow \Gamma \cup \{(\alpha \wedge \beta)\}}$, *(*regula conjuncţie dreapta*);*

G7. $\frac{H \Longrightarrow \Gamma \cup \{\alpha,\beta\}}{H \Longrightarrow \Gamma \cup \{(\alpha \vee \beta)\}}$, *(*regula disjuncţie dreapta*);*

G8. $\frac{H \cup \{\alpha\} \Longrightarrow \Gamma \cup \{\beta\}}{H \Longrightarrow \Gamma \cup \{(\alpha \to \beta)\}}$, *(*regula implicaţie dreapta*).*

unde H,Γ *sunt mulţimi arbitrare de formule;* $\alpha, \beta \in FORM$.

Funcţie de Interpretare I

3.2 Aplicaţii

Exemplul 3.2.1 *Să se determine rezultatul aplicării funcţiei de interpretare I asupra următoarei formule:*

a) $\alpha_1 = (\neg a \vee b) \to (\neg(a \to b) \to (\neg b \wedge a))$

Soluţie

$$\begin{aligned} I(\alpha_1) &= I(\neg a \vee b) \to I(\neg(a \to b) \to (\neg b \wedge a)) \\ &= \neg(\neg I(a) \vee I(b)) \vee (\neg(I(a) \to I(b)) \to (\neg I(b) \wedge I(a))) \\ &= (I(a) \wedge \neg I(b)) \vee ((\neg I(a) \vee I(b)) \vee (\neg I(b) \wedge I(a))) \\ &= (I(a) \wedge \neg I(b)) \vee ((\neg I(a) \vee I(b) \vee \neg I(b)) \wedge (\neg I(a) \vee I(b) \vee I(a))) \\ &= (I(a) \wedge \neg I(b)) \vee (T \wedge T) \\ &= I(a) \wedge \neg I(b)) \vee T = T. \end{aligned}$$

b) $\alpha_2 = \neg a \to (\neg b \to \neg a)$

$$I(\alpha_2) = \neg I(a) \to (\neg I(b) \to \neg I(a)) = I(a) \vee (I(b) \vee \neg I(a)) = I(a) \vee I(b) \vee \neg I(a) = T.$$

c) $\alpha_3 = (\neg a \to \neg b) \to (b \to a)$

$$\begin{aligned} I(\alpha_3) &= (\neg I(a) \to \neg I(b)) \to (I(b) \to I(a)) = \neg(I(a) \vee \neg I(b)) \vee (\neg I(b) \vee I(a)) = \\ &= (\neg I(a) \wedge I(b)) \vee (\neg I(b) \vee I(a)) = \\ &= (\neg I(b) \vee I(a) \vee \neg I(a)) \wedge (\neg I(b) \vee I(a) \vee I(b)) = T \wedge T = T \end{aligned}$$

d) $\alpha_4 = (\neg a \wedge \neg b) \leftrightarrow \neg(\neg a \to b)$

$$\begin{aligned} I(\alpha_4) &= (\neg I(a) \wedge \neg I(b)) \leftrightarrow \neg(\neg I(a) \to I(b)) = \\ &= ((\neg I(a) \wedge \neg I(b)) \to \neg(\neg I(a) \to I(b))) \wedge (\neg(\neg I(a) \to I(b)) \to (\neg I(a) \wedge \neg I(b))) = \\ &= ((I(a) \vee I(b)) \vee \neg(I(a) \vee I(b))) \wedge ((I(a) \vee I(b)) \vee (\neg I(a) \wedge \neg I(b))) = \\ &= T \wedge ((I(a) \vee I(b)) \vee \neg(I(a) \vee I(b))) = T \wedge T = T. \end{aligned}$$

Implicaţie la Echivalenţă (IE)

1.4.2 Schema "trecerii" de la implicaţie la echivalenţă (IE)

Pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in FORM$,

$$\{(\alpha \to \beta), (\beta \to \alpha)\} \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta).$$

Deoarece

$$\vdash \overline{\alpha}_6 \{\alpha \mid a,\ \beta \mid b\} = ((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to (\alpha \leftrightarrow \beta)))$$

utilizând corolarul teoremei deducţiei obţinem

$$\{(\alpha \to \beta), (\beta \to \alpha)\} \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta).$$

Schema trecerii de la implicaţie la echivalenţă este reprezentată $\frac{(\alpha\to\beta),(\beta\to\alpha)}{(\alpha\leftrightarrow\beta)} IE$.

Modus Ponens (MP)

Modelarea proceselor de raţionament în contextul limbajului calculului cu propoziţii este realizată pe baza a două reguli de inferenţă şi anume, regula substituţiei SUB de tip $(1,1)$ şi regula modus ponens MP de tip $(2,1)$, definite prin,

$$\begin{aligned} SUB &= \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in FORM, \exists \sigma \in SUBST, \beta = \alpha\sigma\}, \\ MP &= \{(\{\alpha, (\alpha \to \beta)\}, \beta) \mid \alpha, \beta \in FORM\}. \end{aligned}$$

Dacă $\alpha \in AXIOM$ şi $\sigma \in SUBST$, convenim să numim $\alpha\sigma$ exemplu de axiomă α sau instanţiere a axiomei α.

Exemplul 1.2.2 Pentru orice $\alpha \in FORM$, $\vdash (\alpha \to \alpha)$.
Într-adevăr, următoarea secvenţă de formule este o demonstraţie formală pentru $(\alpha \to \alpha)$,

$$\beta_1 = (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) = \overline{\alpha}_1 \{\alpha \mid a,\ \alpha \mid b\},$$
$$\beta_2 = ((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)) = \overline{\alpha}_2 \{\alpha \mid a,\ \alpha \mid b\},$$
$$\beta_3 = (\alpha \to \alpha),\ \frac{\beta_1, \beta_2}{\beta_3} MP.$$

Exemplul 1.2.3 Pentru orice $\alpha \in FORM$, $\vdash (\alpha \vee (\neg\alpha))$.
Considerăm demonstraţia formală,

$$\beta_1 = ((\alpha \vee (\neg\alpha)) \leftrightarrow ((\neg\alpha) \to (\neg\alpha))) = \overline{\alpha}_8 \{\alpha \mid a,\ (\neg\alpha) \mid b\},$$
$$\beta_2 = (((\alpha \vee (\neg\alpha)) \leftrightarrow ((\neg\alpha) \to (\neg\alpha))) \to (((\neg\alpha) \to (\neg\alpha)) \to (\alpha \vee (\neg\alpha)))) =$$
$$= \overline{\alpha}_5 \{(\alpha \vee (\neg\alpha)) \mid a,\ ((\neg\alpha) \to (\neg\alpha)) \mid b\},$$
$$\beta_3 = (((\neg\alpha) \to (\neg\alpha)) \to (\alpha \vee (\neg\alpha))),\ \frac{\beta_1, \beta_2}{\beta_3} MP.$$
$$\beta_4 = ((\neg\alpha) \to (\neg\alpha)),\ \vdash \beta_4,$$
$$\beta_5 = (\alpha \vee (\neg\alpha)),\ \frac{\beta_4, \beta_3}{\beta_5} MP.$$

Schema Permutării Premiselor (PP)

1.4.3 Schema permutării premiselor (PP)

Pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in FORM$,

$$\vdash ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))).$$

Fie $H = \{\alpha, \beta, (\alpha \to (\beta \to \gamma))\}$. Evident, secvenţa $\alpha, (\alpha \to (\beta \to \gamma)), (\beta \to \gamma), \beta, \gamma$ este o H-secvenţă deductivă, deci $\{\alpha, \beta, (\alpha \to (\beta \to \gamma))\} \vdash \gamma$.

Aplicând teorema deducţiei rezultă

$$\{\beta, (\alpha \to (\beta \to \gamma))\} \vdash (\alpha \to \gamma),$$
$$\{(\alpha \to (\beta \to \gamma))\} \vdash (\beta \to (\alpha \to \gamma)),$$
$$\vdash ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))).$$

Schema permutării premiselor este reprezentată $\frac{(\alpha \to (\beta \to \gamma))}{(\beta \to (\alpha \to \gamma))} PP$.

rez

Definiţia 4.3.1 *Fie k_1, k_2 clauze şi λ literal. Clauzele k_1, k_2 sunt λ-rezolubile dacă $k_1\langle\lambda\rangle$ şi k_2 $\langle(\neg\lambda)\rangle$. Clauza $rez_\lambda(k_1, k_2) = (k_1 \setminus \lambda) \vee (k_2 \setminus (\neg\lambda))$ este λ-rezolventa perechii de clauze (k_1, k_2) . Clauzele k_1, k_2 se numesc clauze parentale ale rezolventei.*

Observaţia 4.3.2 În particular, pentru $\alpha = \lambda$, $\beta = (k_2 \setminus (\neg\lambda))$, $\gamma = (k_1 \setminus \lambda)$, din observaţia precedentă rezultă

$$\{k_1, k_2\} \vDash rez_\lambda(k_1, k_2)$$

sau echivalent,

$$\aleph(k_1) \cap \aleph(k_2) \subset \aleph(rez_\lambda(k_1, k_2)).$$

Evident, dacă niciuna din clauzele k_1, k_2 nu este tautologie atunci

$$rez_\lambda(k_1, k_2)\rangle\lambda\langle$$

şi

$$rez_\lambda(k_1, k_2)\rangle(\neg\lambda)\langle.$$

Exemplul 4.3.1 Fie

$$k_1 = a \vee (\neg b) \vee c,$$
$$k_2 = (\neg a) \vee (\neg c),$$
$$k_3 = (\neg b) \vee (\neg a).$$

Clauzele k_1, k_2 sunt a-rezolubile şi c-rezolubile.

$$rez_a(k_1, k_2) = (\neg b) \vee c \vee (\neg c)$$
$$rez_c(k_1, k_2) = a \vee (\neg b) \vee (\neg a)$$

Clauzele k_1, k_3 sunt a-rezolubile

$$rez_a(k_1, k_3) = (\neg b) \vee c \vee (\neg b) \equiv c \vee (\neg b)$$

Clauzele k_2, k_3 nu sunt rezolubile.

Din exemplele considerate rezultă că este posibil ca rezolventa a două clauze să fie clauză tautologie în condiţiile în care ambele clauze parentale nu sunt tautologii. De asemenea, este posibil ca în rezolventa unei perechi de clauze să fie generate duplicate ale unuia sau mai mulţi literali.

REZ

Definiţia 4.3.2 *Fie $S(\alpha)$ o reprezentare clauzală liberă de tautologii şi λ literal. Rezoluţia $REZ_\lambda(\alpha)$ în raport cu literalul λ este reprezentarea clauzală,*

$$REZ_\lambda(\alpha) = \alpha_\lambda^0 \cup \left\{rez_\lambda(k_1, k_2) \mid k_1 \in \alpha_\lambda^+, k_2 \in \alpha_\lambda^-\right\}$$

Exemplul 4.3.2 Dacă

$$S(\alpha) = \{(\neg p) \vee o, (\neg p) \vee (\neg c), (\neg m) \vee c \vee i, m, p, (\neg i)\}$$

atunci,

$$\begin{aligned}
REZ_p(\alpha) &= \{(\neg m) \vee c \vee i, m, (\neg i), o, (\neg c)\},\\
REZ_c(REZ_p(\alpha)) &= \{(\neg m) \vee i, m, (\neg i), o\},\\
REZ_i(REZ_c(REZ_p(\alpha))) &= \{(\neg m), m, o\},\\
REZ_m(REZ_i(REZ_c(REZ_p(\alpha)))) &= \{\square, o\}.
\end{aligned}$$

Schema Silogismului (RS)

1.4.1 Schema silogismului (RS)

Pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in FORM, \{(\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma)\} \vdash (\alpha \to \gamma)$.
Deoarece

$$\vdash \overline{\alpha}_3 \{\alpha \mid a,\ \beta \mid b,\ \gamma \mid c\} = ((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\beta \to \gamma)))$$

utilizând corolarul teoremei deducţiei obţinem

$$\{(\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma)\} \vdash (\alpha \to \gamma).$$

Schema (regula) silogismului este reprezentată convenţional $\frac{(\alpha\to\beta),(\beta\to\gamma)}{(\alpha\to\gamma)}RS$.

1.4.5 Aplicaţie 5

Pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$,

$$\vdash ((\neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)).$$

Secvenţa

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \to (\alpha \to \beta)) = \overline{\alpha}_7 \{\beta \mid a,\ \alpha \mid b\}, \\
\gamma_2 &= ((\neg\alpha) \to ((\neg\beta) \to (\neg\alpha))) = \overline{\alpha}_1 \{(\neg\alpha) \mid a,\ (\neg\beta) \mid b\}, \\
\gamma_3 &= ((\neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)),\ \frac{\gamma_2, \gamma_1}{\gamma_3}RS,
\end{aligned}$$

este o demonstraţie formală, deci $\vdash ((\neg\alpha) \to (\alpha \to \beta))$.

În particular rezultă

$$\{(\neg\alpha), \alpha\} \vdash \beta$$

pentru orice $\beta \in FORM$, deci pentru orice $\alpha \in FORM$,

$$T(\{(\neg\alpha), \alpha\}) = FORM.$$

Substituţie

Definiţia 1.2.2 *Fie $\alpha \in FORM$, $\sigma \in SUBST$. Se numeşte* rezultat *al aplicării substituţiei σ formulei α, structura simbolică $\alpha\sigma$ calculată astfel:*

$\alpha\sigma =$
if $\sigma = \varepsilon$ **then** α
else if $\sigma = \{\gamma_1 \mid a_1, \ldots, \gamma_n \mid a_n\}$ **then**
if $\alpha \in V \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ **then** α
else if $\alpha = a_i$ **then** γ_i
else if $\alpha = (\neg\beta)$ **then** $(\neg\beta\sigma)$
else if $\alpha = (\beta\rho\delta)$ **pentru anume** $\rho \in L \setminus \{\neg\}$ **then** $(\beta\sigma\rho\delta\sigma)$

Exemplul 1.2.1 Fie $\alpha = ((a \wedge b) \to c)$ şi $\sigma = \{((\neg a) \vee p) \mid a, c \mid b, (a \vee x) \mid p, b \mid q\}$. Rezultă,

$$\alpha\sigma = ((a \wedge b)\sigma \to c\sigma) = ((a\sigma \wedge b\sigma) \to c\sigma) = ((((\neg a) \vee p) \wedge c) \to c),$$

deoarece $a\sigma = ((\neg a) \vee p)$, $b\sigma = c$, $c\sigma = c$.

Tablou Semantic

Generarea unui tablou semantic este bazată pe următoarele două tipuri de reguli:

1. $\alpha - reguli$ ($Reguli\ pentru\ \alpha - formule$)

γ	γ_1	γ_2
$(\neg(\neg\delta))$	δ	
$(\delta \wedge \eta)$	δ	η
$(\neg(\delta \vee \eta))$	$(\neg\delta)$	$(\neg\eta)$
$(\neg(\delta \to \eta))$	δ	$(\neg\eta)$
$(\delta \leftrightarrow \eta)$	$(\delta \to \eta)$	$(\eta \to \delta)$

2. $\beta - reguli$ ($Reguli\ pentru\ \beta - formule$)

γ	γ_1	γ_2
$(\delta \vee \eta)$	δ	η
$(\neg(\delta \wedge \eta))$	$(\neg\delta)$	$(\neg\eta)$
$(\delta \to \eta)$	$(\neg\delta)$	η
$(\neg(\delta \leftrightarrow \eta))$	$(\neg(\delta \to \eta))$	$(\neg(\eta \to \delta))$

Teorema Deductiei

Corolarul teoremei deducţiei oferă o modalitate de a stabili că anumite formule sunt demonstrabile, şi anume permite reducerea problemei determinării unei demonstraţii formale la determinarea unei secvenţe deductive. În particular, deoarece o regulă de inferentă $\Re$ de tipul $(p, 1)$, $p \geq 1$ exprimă în fapt ideea că formula din partea de concluzie a regulei este „direct" deductibilă sub mulţimea de ipoteze reprezentată de mulţimea premisă, rezultă că $((\alpha_1, \ldots, \alpha_p), \beta) \in \Re$ poate fi reprezentată $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\} \vdash \beta$, sau echivalent, pe baza corolarului teoremei deducţiei,

$$\vdash (\alpha_1 \to (\alpha_2 \to (\cdots \to (\alpha_n \to \beta)))).$$

În particular deoarece pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$, $(\{\alpha, (\alpha \to \beta)\}, \beta) \in MP$ rezultă $\{\alpha, (\alpha \to \beta)\} \vdash \beta$ deci, pe baza corolarului teoremei deducţiei obţinem următoarele concluzii:

$$\begin{array}{l} \vdash (\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)), \\ \vdash ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)), \\ \{\alpha\} \vdash ((\alpha \to \beta) \to \beta), \\ \{(\alpha \to \beta)\} \vdash (\alpha \to \beta). \end{array}$$