Laborarator 7 – Probabilități și Statistică Matematică

ELEMENTE DE CALCULUL PROBABILITATILOR

1. *Aruncarea cu banul*

In acest exemplu vrem să simulăm aruncarea unei monede (echilibrate) folosind functia $\boldsymbol{sample}()$. Această funcție permite extragerea cu sau fără întoarcere ($replace\ =\ TRUE$ sau $replace\ =\ FALSE$ – aceasta este valoarea prestabilită) a unui eșantion de volum dat (size) dintr-o mulțime de elemente x.

Spre exemplu, dacă vrem să simulăm 10 aruncări cu banul atunci apelăm:

```
> sample(c("H","T"),10,replace=TRUE)
 [1] "H" "H" "H" "T" "T" "H" "T" "T" "H" "T"
```

Pentru a estima probabilitatea de apariție a stemei (H) repetăm aruncarea cu banul de 10000 de ori și calculăm raportul dintre numărul de apariții ale evenimentului $A = \{H\}$ și numărul total de aruncări:

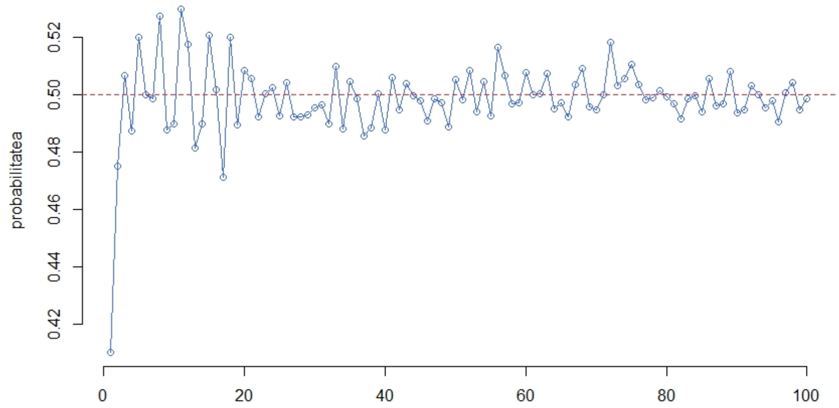
```
> #atunci cand moneda este echilibrata
> a=sample(c("H","T"),10000,replace=TRUE)
> p= sum(a == "H")/length(a)
> p
[1] 0.4992
```

Și pentru cazul in care moneda nu este echilibrată:

```
> a=sample(c("H","T"),10000,replace=TRUE, prob = c(0.2,0.8))
> p= sum(a == "H")/length(a)
> p
[1] 0.2042
```

Putem vedea cum evoluează această probabilitate in funcție de numărul de repetări:

```
> y=rep(0,100)
> for (i in 1:100) { a=sample (c("H","T"), i*100,replace=TRUE)
+ y[i]= sum(a=="H")/length(a)}
> plot(1:100, y, type="o", col= "royalblue", bty="n", xlab="", ylab="probabilitatea")
> abline (h=0.5,lty=2,col="brown3")
```



- **Aplicatii:**

1. Aruncarea unui zar:
   a) Să se calculeze probabilitatea ca la aruncarea unui zar să apară fața cu trei puncte.
   b) Să se calculeze probabilitatea ca la aruncarea unui zar să apară un număr par.
   c) Să se calculeze probabilitatea ca la arumcarea unui zar să apară fața cu un număr cel mult egal cu șase.
2. Dintr-o urna cu 15 bile numerotate de la 1 la 15 se extrage o bila la intamplare. Se considera evenimentele: A=obtinerea unui numar prim; B=obtinerea unui numar par; C= obtinerea unui numar divizibil cu 3. Sa se calculeze probabilitatile acestor evenimente.

2. Numărul de băieti dintr-o familie cu doi copii

O familie are doi copii. Care este probabilitatea ca ambii copii să fie băieti stiind că cel putin unul dintre copii este băiat ? Care este probabilitatea ca ambii copii să fie băieti stiind că cel mai tânăr este băiat?

Pentru a răspunde la cele două întrebări să observăm că cei doi copii (copilul mai mare si cel mai mic) pot fi ambii de sex masculin sau feminin, prin urmare avem patru combinatii de sexe, pe care le presupunem egal probabile. Putem reprezenta spatiul stărilor prin $\Omega = \{BB, BF, FB, FF\}$ unde $P(BB) = P(BF) = P(FB) = P(FF)$= 1/ 4.
Pentru a răspunde la prima întrebare avem:

$$P(BB|cel\ putin\ unul\ este\ băiat) = P(BB|BF \cup FB \cup BB) = \frac{P(BB \cap (BF \cup FB \cup BB))}{P(BF \cup FB \cup BB)} = \frac{P(BB)}{P(BF \cup FB \cup BB)} = 1/3.$$

Iar pentru cea de-a doua întrebare:

$$P(BB|cel\ mai\ tânăr\ este\ băiat) = P(BB|FB \cup BB) = \frac{P(BB \cap (FB \cup BB))}{P(FB \cup BB)} = \frac{P(BB)}{P(FB \cup BB)} = 1/2.$$

Vom încerca să răspundem la aceste întrebări si cu ajutorul limbajului R, prin simulare.
Am văzut că prin repetarea de N ori a unui experiment în conditii identice,

$P(A|B) \approx \frac{N(A \cap B)}{N(B)}$ unde $N(A \cap B)$ este numărul de realizări (din N) a evenimentului A∩B iar $N(B)$ este numărul de realizări a evenimentului B.

Să considerăm N = 10^5 si fie

```
N = 10^5
copil1 = sample(c("baiat", "fata"), N, replace = TRUE)
copil2 = sample(c("baiat", "fata"), N, replace = TRUE)
```

Aici copil1 este un vector de lungime N care reprezintă sexul primului copil si în mod similar copil2 reprezintă sexul celui de-al doilea copil. Fie A evenimentul ca ambii copii să fie băieti si B evenimentul prin care cel mai tânăr este băiat.

```
nB = sum(copil2 == "baiat")
nAB = sum(copil1 == "baiat" & copil2 == "baiat")
p2 = nAB/nB
```

Prin urmare probabilitatea (simulată) ca familia să aibă cei doi copii băieti stiind că cel tânăr este băiat este 0.4991515.

Considerând acum C evenimentul prin care familia are cel putin un copil băiat, avem

```
nC = sum(copil1 == "baiat" | copil2 == "baiat")
p1 = nAB/nC
```

de unde probabilitatea ca familia să aibă doar băieti stiind că cel putin unul este băiat este 0.3339566.

- **Aplicatii:**

1. O urna contine 3 bile albe si 4 bile negre, iar o alta urna contine 4 bile albe si 5 bile negre. Din fiecare urna se extrage cate o bila. Se considera evenimentele: A=bila extrasa din prima urna este alba; B=bila extrasa din a doua urna este alba. Sa se calculeze: $P(A \cap B), P(AUB), P(A - B), P(\bar{A})$.
2. Se arunca un zar de 3 ori. Care este probabilitatea sa obtinem de fiecare data „cifra 6”?
3. O urna contine 6 bile albe si 5 bile negre. Se extrag succesiv 3 bile fara intoarcerea bilei extrase. Care este probabilitatea ca prima bila sa fie alba, iar celelalte doua negre?