

## Conice (continuare)

Formule:

- Ecuația pantelor axelor de simetrie ale unei conice nedegenerate cu centru la distanță finită este:  

$$a_{12}(m^2 - l^2) + (a_{11} - a_{22})lm = 0$$
 sau,  
 dacă notăm  $\frac{m}{l} = k \Rightarrow a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0$ .
- Ecuațiile axelor de simetrie ~~sunt~~ se determină după formula ec. dreptelor care trec prin centrul  $C(x_0, y_0)$  și au panta  $m$ :  

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

( $m_1, m_2$  determinate mai sus)
- Ecuația care determină direcțiile asimptotice  

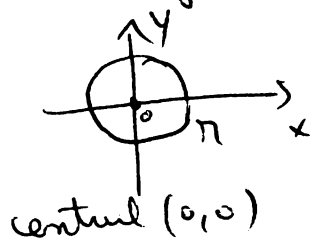
$$a_{11}l^2 + 2a_{12}ml + a_{22}m^2 = 0, \quad k = \frac{m}{l}$$

reprezintă panta asimptotei
- Ec. unei asimptote este  

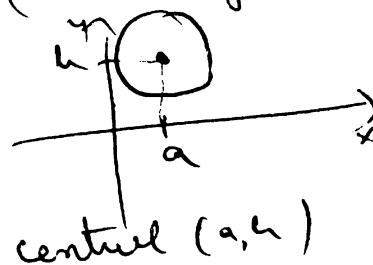
$$l \cdot g'_x(x, y) + m \cdot g'_y(x, y) = 0.$$

### Construcția conicelor pe ec. canonică

Cerc:  $x^2 + y^2 = r^2$



$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

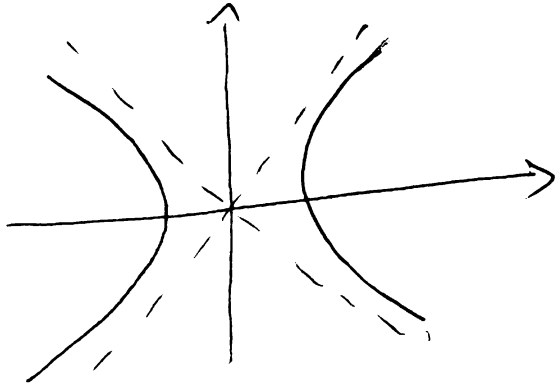


Elipsa:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



În cazul în care axa al centrului se det. coord. centrului, axele de simetrie și punctele de interes.

Hyperbolă  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

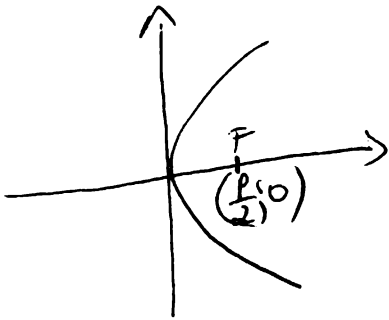


Se stabilesc asimptotele și centrul.

Axe de simetrie:  $x=0$   
 $y=0$ .

Centrul  $(0,0)$ ,  $k = \pm \frac{a}{b} \Rightarrow y = \frac{a}{b}x, y = -\frac{a}{b}x$  asimptote

Parabolă:  $y^2 = 2px$



Se stabilește ec. axei parabolei, apoi se determină coordonatele vârfului, ec. tg. în vf. și punctele de intersecție ale parabolei cu axele de coord.

$k=0 \Rightarrow 01$  asimptote

$$0 \cdot x^2 + 2 \cdot 0 \cdot xy + y^2 - 2px + 0 \cdot y + 0 = 0$$

Axa:  $2y = 0 \Rightarrow y = 0$ .

Pt. vârf: intersecția parabolei cu axa de simetrie:

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0) - \text{vf.}$$

Tangenta în vârf:  $y \cdot y_0 = 2p(x + x_0)$   
 $y \cdot 0 = 2p \cdot x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{ch. } 01$ .

Parabolă  $\cap 01$ :  $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$ .  $(0,0)$

Parabolă  $\cap 0x$ :  $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$ .  $(0,0)$

Ex 1. Să se stabilească natura și genul conice, apoi să se construiască.

$$\Gamma: x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 + 6 - 36 - 1 - 4 = -25 \neq 0$$

$\Rightarrow$  conică nedegenerată

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \text{parabolă (fără centru)}$$

Axa parabolei:  $a_{11} g'_x(x, y) + a_{12} g'_y(x, y) = 0$

$$(2x - 4y - 6) + (-2)(-4x + 8y + 2) = 0$$

$$2x - 4y - 6 + 8x - 16y - 4 = 0$$

$$10x - 20y - 10 = 0$$

$$\boxed{x - 2y - 1 = 0}$$

Coord. vârfului (intersecția axa cu parabola)

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y + 1 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow x = 2y + 1 \end{cases}$$

$$(2y + 1)^2 - 4y(2y + 1) + 4y^2 - 6(2y + 1) + 2y + 1 = 0$$

$$4y^2 + 4y + 1 - 8y^2 - 4y + 4y^2 - 12y - 6 + 2y + 1 = 0$$

$$-10y - 4 = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{10} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{2}{5}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow V\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

Parabolă  $\cap$  OY:  $x = 0 \Rightarrow 4y^2 + 2y + 1 = 0$

$$\Delta = 4 - 16 = -12 < 0 \Rightarrow \text{nu există intersecție cu axa OY}$$

Parabolă  $\cap$  OX:  $y = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0$

$$\Delta = 36 - 4 = 32 \Rightarrow x_1, x_2 = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

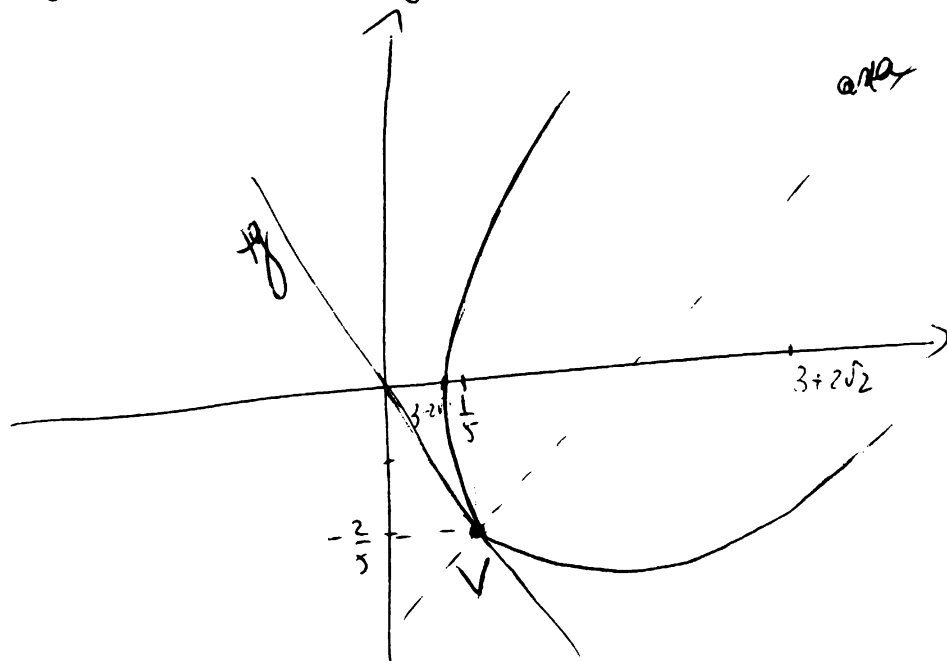
Tangenta în  $y$  :

$$a_{11}xx_0 + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}yy_0 + a_{10}(x+x_0) + a_{20}(y+y_0) + a_{00} = 0$$

$$\frac{1}{5}x - 2\left(x \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{5}y\right) + 4y \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + (-3)\left(x + \frac{1}{5}\right) + \left(y - \frac{2}{5}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y - \frac{8}{5}y - 3x - \frac{3}{5} + y - \frac{2}{5} + 1 = 0$$

$$-2x - y = 0 \Rightarrow 2x + y = 0$$



2. Se dau hiperbola  $\Gamma: 4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$  și punctele  $A(0, 2)$ ,  $B(-1, 2)$ . Se cer :

- centrul, axele și asimptotele hiperbolei
- polara punctului  $B$  în raport cu conica
- tangenta în punctul  $A$  la conică
- să se construiască conica.

Sol.

$$a) \text{Centrul : } \begin{cases} \frac{1}{2} g'_x(x, y) = 0 \\ \frac{1}{2} g'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} (4y + 16) = 0 \\ \frac{1}{2} (4x + 6y + 12) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow y = -4$$

$$\Rightarrow C(3, -4)$$

Axele: Ec. care determină direcțiile axelor este:

$$(a_{11} - a_{22})lm + a_{12}(m^2 - l^2) = 0, \quad | : l^2$$

unde  $(l, m)$  reprezintă direcția unei axe ~~oarecare~~

$$\text{Notăm } k = \frac{m}{l}$$

$$\Rightarrow (a_{11} - a_{22})k + a_{12}(k^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2k^2 - 3k - 2 = 0, \text{ cu rădăcinile}$$

$$k_1 = 2, k_2 = -\frac{1}{2}$$

Axele sunt drepte care trec prin centru.

$\Rightarrow$  Ec. axelor sunt:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y + 4 = 2(x - 3) \Leftrightarrow y + 4 = 2x - 6$$

$$\boxed{2x - y - 10 = 0}$$

$$y + 4 = -\frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y + 4 = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

$$2y + 8 = -x + 3$$

$$\boxed{x + 2y + 5 = 0}$$

Ec. asimptotelor:

Pantele asimptotelor sunt răd. ec.

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0 \quad | : l^2$$

$$\Rightarrow a_{11} + 2a_{12}\frac{m}{l} + a_{22}\left(\frac{m}{l}\right)^2 = 0$$

$$a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0 \Leftrightarrow 3k^2 + 4k = 0$$

$$\Rightarrow k(3k + 4) = 0 \quad \begin{cases} k = 0 \\ k = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{pt. } k=0 \Leftrightarrow \frac{m}{l}=0 \Rightarrow m=0$$

$$\text{Ec. asymptotei: } l g'_x(x,y) + m g'_y(x,y) = 0$$

$$l \cdot (4y+16) + 0(4x+6y+12) = 0$$

$$4y+16=0 \Rightarrow \boxed{y+4=0}$$

$$\text{pt. } k=-\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{m}{l}=-\frac{4}{3} \Rightarrow m=-4p$$

$$l=3p$$

$$\text{Ec. asymptotei: } 3p(4y+16) - 4p(4x+6y+12) = 0 \quad | :p$$

$$12y+48-16x-24y-48=0$$

$$-12y-16x=0 \quad | : -4$$

$$3y+4x=0 \Rightarrow \boxed{4x+3y=0}$$

$$\text{h) Ec. polare pt. } B(-1,2)$$

$$a_{11}xx_0 + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}yy_0 + a_{10}(x+x_0) + a_{20}(y+y_0) + a_{00} = 0$$

$$0 \cdot x \cdot (-1) + 2(x \cdot 2 + (-1) \cdot y) + 3 \cdot y \cdot 2 + 8(x-1) + 6(y+2) - 36 = 0$$

$$4x - 2y + 6y + 8x - 8 + 6y + 12 - 36 = 0$$

$$12x + 10y - 32 = 0 \quad | : 2$$

$$6x + 5y - 16 = 0.$$

$$\text{c) } H(0,2) \quad 0 \cdot x \cdot 0 + 2(x \cdot 2 + 0 \cdot y) + 3 \cdot y \cdot 2 + 8(x-0) + 6(y+2) - 36 = 0$$

$$4x + 6y + 8x + 6y + 12 - 36 = 0$$

$$12x + 12y - 24 = 0$$

$$x + y - 2 = 0$$

