Normalizarea CNF a formulelor logice

Lect.univ.dr. ŞTEFAN Florentina-Alina

1.1 Noţiuni teoretice

Definiţia 1.1.1 *Un literal este o propoziţie elementară sau negaţia unei propoziţii elementare. Mulţimea literalilor este* $V \cup \neg V$. *Dacă* $p \in V$ *atunci literalii* $p, (\neg p)$ *se numesc literali complementari. Literalii din* V *se numesc literali pozitivi respectiv literalii din* $\neg V$ *se numesc* literali negativi.

Definiţia 1.1.2 *Se numeşte* clauză *o structură simbolică* $k = \bigvee_{i=1}^{n} L_i$ *de tip disjunctiv pentru o mulţime de literali* $\{L_1, \ldots, L_n\}$. *Clauza corespunzătoare mulţimii vide de literali se numeşte clauza vidă şi este notată* $k = \square$.

Observaţia 1.1.1 Pentru $k \neq \square$, mulţimea modelelor clauzei $k = \bigvee_{i=1}^{n} L_i; n \geq 1$ este evident $\aleph(k) = \bigcup_{i=1}^{n} \aleph(L_i)$. Conform convenţiilor Bourbaki, calculul mulţimii $\aleph(\square)$ revine la reuniune dupĂŁ mulţimea vidă de indici, deci $\aleph(\square) = \emptyset$. Cu alte cuvinte, clauza vidă este invalidabilă.

Definiţia 1.1.3 *Se numeşte* formulă normalizată CNF *(***C***onjunctive* **N***ormal* **F***orm) o structură simbolică* $\alpha = \bigwedge_{i=1}^{n} k_i$ *de tip conjunctiv pentru o mulţime de clauze* $\{k_1, \ldots, k_n\}$. *Mulţimea clauzelor* $S(\alpha) = \{k_1, \ldots, k_n\}$ *se numeşte* reprezentare clauzală *pentru formula* α. *Formula CNF corespunzătoare mulĂžimii vide de clauze se numeşte* formulĂŁ vidă *şi este notată* $\alpha = \emptyset$.

Observaţia 1.1.2 Dacă $\alpha = \bigwedge_{i=1}^{n} k_i; n \geq 1$, atunci $\aleph(\alpha) = \aleph(S(\alpha)) = \bigcap_{i=1}^{n} \aleph(k_i)$. Conform convenţiilor Bourbaki, calculul mulţimii $\aleph(\emptyset)$ revine la intersecţie după mulţime vidă de indici, deci $\aleph(\emptyset) = \Im$. Cu alte cuvinte, formula vidă este tautologie.

Rezultatul stabilit de următoarea teoremă exprimă faptul că din punct de vedere semantic, se poate presupune întotdeauna că se dispune de reprezentări normalizate CNF pentru formulele limbajului calculului cu propoziţii.

Teorema 1.1.1 *Pentru orice* $\alpha \in FORM$ *există* α' *formulă normalizată CNF şi* $\alpha \equiv \alpha'$.

Demonstraţie. Aplicăm succesiv subformulelor formulei α următoarele transformări:
$T1$. Eliminarea conectivei "$\leftrightarrow$": Fiecare subformulă de tipul $(\beta \leftrightarrow \gamma)$ se substituie cu

$$((\beta \to \gamma) \wedge (\gamma \to \beta)), \ (\beta \leftrightarrow \gamma) \equiv ((\beta \to \gamma) \wedge (\gamma \to \beta)).$$

$T2$. Eliminarea conectivei "$\to$": Fiecare subformulă de tipul $(\beta \to \gamma)$ se substituie cu

$$((\neg\beta) \vee \gamma), \ (\beta \to \gamma) \equiv ((\neg\beta) \vee \gamma).$$

$T3$. Se aduc negaţiile în faţa literalilor:
i) Fiecare subformulă de tipul $(\neg(\beta \vee \gamma))$ se substituie cu

$$((\neg\beta) \wedge (\neg\gamma)),\ (\neg(\beta \vee \gamma)) \equiv ((\neg\beta) \wedge (\neg\gamma)).$$

ii) Fiecare subformulă de tipul $(\neg(\beta \wedge \gamma))$ se substituie cu

$$((\neg\beta) \vee (\neg\gamma)),\ (\neg(\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\neg\beta) \vee (\neg\gamma)).$$

$T4$. Eliminarea negaţiilor multiple: Fiecare subformulă de tipul $(\neg(\neg\beta))$ se substituie cu

$$\beta,\ (\neg(\neg\beta)) \equiv \beta$$

$T5$. Obţinerea structurii CNF: Fiecare subformulă de tipul $(\beta \vee (\gamma \wedge \delta))$ se substituie prin

$$((\beta \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \delta)),\ (\beta \vee (\gamma \wedge \delta)) \equiv ((\beta \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \delta)).$$

Respectiv $((\gamma \wedge \delta) \vee \beta)$ se substituie prin

$$((\gamma \vee \beta) \wedge (\delta \vee \beta)),\ ((\gamma \wedge \delta) \vee \beta) \equiv ((\gamma \vee \beta) \wedge (\delta \vee \beta)).$$

Deoarece aplicarea fiecărei transformări determină substituirea unei subformule cu o subformulă semantic echivalentă cu ea, la fiecare etapă se obţine o formulă semantic echivalentă cu formula iniţială. Rezultă în final o reprezentare normalizată CNF semantic echivalentă cu formula iniţială. ■

Exemplul 1.1.1 *Reduceţi la CNF formulele*
a) $(\neg p \to q) \to (q \to \neg r)$
b) $p \vee (\neg q \wedge (r \to \neg p))$
Soluţie
a)
1. $\neg(\neg p \to q) \vee (q \to \neg r)$
2. $\neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee \neg r)$
3. $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee \neg r)$
4. $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$.
b)
1. $p \vee (\neg q \wedge (\neg r \vee \neg p))$
2. $p \vee (\neg q \wedge \neg(r \wedge p))$
3. $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg(r \wedge p))$
4. $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg q)$

Exemplul 1.1.2 *Să se determine forma normal conjunctivă (CNF) pentru formula dată*

$$\alpha = (\neg a \to b) \to ((c \to \neg d) \to (\neg a \to d)).$$

Soluţie
Forma normal conjunctivă se obţine astfel:
1. $\neg(a \vee b) \vee (\neg(\neg c \vee \neg d) \vee (a \vee d))$
2. $(\neg a \wedge \neg b) \vee ((c \wedge d) \vee (a \vee d))$
3. $(\neg a \wedge \neg b) \vee ((c \vee a \vee d) \wedge (d \vee a))$
4. $((\neg a \wedge \neg b) \vee (c \vee a \vee d)) \wedge ((\neg a \wedge \neg b) \vee (d \vee a))$
5. $(\neg a \vee c \vee a \vee d) \wedge (\neg b \vee c \vee a \vee d) \wedge (\neg a \vee d \vee a) \wedge (\neg b \vee d \vee a)$.

1.2 Exerciţii

TEMĂ: Rezolvaţi următoarele exerciţii:

Exerciţiul 1.2.1 *Să se stabilească forma normală conjunctivă (CNF) pentru expresiile logice:*
1) $(a \to b) \to c$;
2) $(a \to b) \vee (b \to a)$;
3) $(\neg a \to (a \to b))$;
4) $(a \to (b \to c)) \to (a \to (c \to b))$;
5) $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$;

Exercițiul 1.2.2 *Reduceți la CNF următoarele formule:*
1. $p \to (q \wedge r)$
2. $(p \vee q) \to r$
3. $\neg(\neg p \vee q) \vee (r \to \neg s)$
4. $\neg((p \to (q \to r))) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
5. $\neg(((a \to b) \to a) \to a)$
6. $\neg(a \vee (a \to b))$
7. $((x \to y) \to (z \to \neg x)) \to (\neg y \to \neg z)$