Temă - Curs 8 Petrulescu Mihai-Ziloiu

1. a) Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M(\overset{x_0}{3},\overset{y_0}{-1},\overset{z_0}{2})$ și e perpendicular pe vectorul $\vec{n}=(\overset{A}{-1},\overset{B}{2},\overset{C}{-5})$

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$

$(-1)(x-3)+2(y+1)+(-5)(z-2)=0$

$\Rightarrow -x+3+2y+2-5z+10=0 \Rightarrow -x+2y-5z+15=0.$

b) Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M(1,2,-5)$ și are direcția vectorului normal $\vec{n}=(-3,2,4)$.

$(-3)(x-1)+2(y-2)+4(z+5)=0$

$\Rightarrow -3x+3+2y-4+4z+20=0 \Rightarrow -3x+2y+4z+19=0.$

2. Să se scrie ec. planului care trece prin punctul M și este paralel cu vectorii $\vec{v_1}, \vec{v_2}$.

a) $M(2,-1,0)$; $\vec{v_1}=(3,1,-1)$; $\vec{v_2}=(-1,2,0)$.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

$\Leftrightarrow 6(z+1)+(y-1)+(z+1)+2(x-2)=0$

$\Leftrightarrow 6z+6+y-1+z+1+2x-4=0 \Leftrightarrow 2x+y+7z+2=0.$

b) $M(1,-2,3)$; $\vec{v_1}=(-1,2,1)$; $\vec{v_2}=(3,0,-1)$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow (-2)(x-1)+3(y+2)-6(z-3)-(y+2)=0 \Leftrightarrow -2x+2+3y+6-6z+18-y-2=0$

$\Leftrightarrow -2x+2y-6z+24=0.$

3. Să se determine ecuația planului ce trece prin punctele:

a) $A(2,1,3)$, $B(-1,2,0)$, $C(1,1,1)$.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=0.$$

$\Leftrightarrow -2(x-2)+3(y-1)+(z-3)-6(y-1)=0 \Leftrightarrow -2x+4+3y-3+z-3-6y+6=0$

$\Leftrightarrow -2x-3y+z+4=0.$

b) $A(0,1,-1)$, $B(-2,0,2)$, $C(4,3,0)$.

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x-4(z+1)+12(y-1)+4(z+1)-6x+2(y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow -x-4z-4+12y-12+4z+4-6x+2y-2=0.$$

$$\Leftrightarrow -7x+14y-14=0.$$

4. a) Să se calculeze distanța de la punctul $M(3,0,2)$ la planul P de ec.

$5x-y+4z-2=0.$

$$d(M,P)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|5\cdot3+(-1)\cdot0+4\cdot2-2|}{\sqrt{5^2+(-1)^2+4^2}}=\frac{|15+8-2|}{\sqrt{25+1+16}}=$$

$$=\frac{21}{\sqrt{42}}=\frac{21\sqrt{42}}{42}=\frac{\sqrt{42}}{2}$$

b) Să se calculeze distanța de la pct $M(1,2,0)$ la planul P de ec. $2x-5y+3z-8=0$

$$d(M,P)=\frac{|2\cdot1+(-5)\cdot2+3\cdot0-8|}{\sqrt{2^2+(-5)^2\cdot3^2}}=\frac{|2-10-8|}{\sqrt{4+25+9}}=\frac{16}{\sqrt{38}}=\frac{16\sqrt{38}}{38}=\frac{8\sqrt{38}}{19}$$

5. Să se determine unghiurile dintre planele:

a) $P_1: 3x-2y+z-5=0$; $P_2: -3x+4y-5z+1=0$.

Direcțiile normale ale celor 2 planuri sunt:

$\vec{n_1}=(3,-2,1)$; $\vec{n_2}=(-3,4,-5)$.

$$\cos\theta=\frac{\langle\vec{n_1},\vec{n_2}\rangle}{\|\vec{n_1}\|\cdot\|\vec{n_2}\|}\ ;\ \langle\vec{n_1},\vec{n_2}\rangle=3\cdot(-3)+(-2)\cdot4+1\cdot(-5)=-9-8-5=-22.$$

$$\|\vec{n_1}\|=\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$$

$$\|\vec{n_2}\|=\sqrt{(-3)^2+4^2+(-5)^2}=\sqrt{9+16+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

$$\cos\theta=\frac{-22}{\sqrt{14}\cdot5\sqrt{2}}=\frac{-22\sqrt{28}}{14\cdot10}=\frac{-22\sqrt{28}}{140}=\frac{-11\sqrt{28}}{70}\Rightarrow\theta=\arccos\left(\frac{-11\sqrt{28}}{70}\right)$$

b) $P_1: x+2y-3z+1=0$; $P_2: -4x+y-z-3=0$.

Direcțiile normale ale celor 2 plane sunt: $\vec{n_1}=(1,2,-3)$; $\vec{n_2}=(-4,1,-1)$.

$$\langle\vec{n_1},\vec{n_2}\rangle=1\cdot(-4)+2\cdot1+(-3)\cdot(-1)=-4+2+3=1$$

$$\|\vec{n_1}\|=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}.$$

$$\|\vec{n_2}\|=\sqrt{(-4)^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{16+1+1}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}}{14\cdot18}=\frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}}{14\cdot18}=\frac{\sqrt{28}}{84}\Rightarrow\theta=\arccos\left(\frac{\sqrt{28}}{84}\right)$$