Curs 6

Ecuaţii diferenţiale de ordin superior integrabile prin cvadraturi

1. Ecuaţii diferenţiale de ordinul n de forma $x^{(n)} = f(t),\ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Fiind dată o ecuaţie diferenţială $x^{(n)} = f(t),\ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ cu condiţiile iniţiale

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \cdots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1},$$

atunci, soluţia generală se obţine prin integrări succesive, şi anume

$$\int_{t_0}^{t} x^{(n)}(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau \Leftrightarrow x^{(n-1)}(t) = x_{n-1} + \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau,$$

$$\int_{t_0}^{t} x^{(n-1)}(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} x_{n-1}d\tau + \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau \Leftrightarrow x^{(n-2)}(t) = x_{n-2} + x_{n-1}(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau \right) d\tau$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x(t) = x_0 + x_1(t - t_0) + \cdots x_{n-1}\frac{(t - t_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau \cdots d\tau$$

Observaţia 1. Soluţia generală poate fi pusă sub forma

$$x = \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t} (t - \tau)^{n-1} f(\tau)d\tau + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots c_{n-1}t^{n-1}$$

Observaţia 2. Dacă ecuaţia nu are condiţii iniţiale, atunci integralele din rezolvare vor fi integrale nedefinite.

Exemplu

Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$x''' = 24t$$

cu condiţiile iniţiale

$$x(0) = 1,\ x'(0) = -1,\ x''(0) = 2.$$

Rezolvare

Avem o ecuaţie diferenţială de ordinul trei, cu $t_0 = 0$. Integrând o dată obţinem:

$$\int_0^t x'''(\tau)d\tau = \int_0^t 24\tau d\tau \Leftrightarrow x''(\tau)\big|_0^t = 12\tau^2\Big|_0^t \Leftrightarrow x''(t) - x''(0) = 12t^2,$$

deci

$$x''(t) = 2 + 12t^2.$$

Integrând a doua oară obţinem

$$\int_0^t x''(\tau)d\tau = \int_0^t (2 + 12\tau^2)d\tau \Leftrightarrow x'(\tau)\big|_0^t = 2\tau\big|_0^t + 4\tau^3\Big|_0^t \Leftrightarrow x'(t) - x'(0) = 2t + 4t^3,$$

deci

$$x'(t) = -1 + 2t + 4t^3.$$

Integrând a treia oară obţinem

$$\int_0^t x'(\tau)d\tau = \int_0^t (-1 + 2\tau + 4\tau^3)d\tau \Leftrightarrow x(\tau)\big|_0^t = -\tau\big|_0^t + \tau^2\Big|_0^t + \tau^4\Big|_0^t \Leftrightarrow x(t) - x(0) = -t + t^2 + t^4,$$

deci soluţia ecuaţiei este

$$x(t) = 1 - t + t^2 + t^4.$$

2. Ecuaţii diferenţiale de forma $F(t, x^{(n)}) = 0$.

Fie ecuaţia diferenţială

$$F(t, x^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Dacă ecuaţia (1) poate fi rezolvată în raport cu $x^{(n)}$ şi se obţine

$$x^{(n)} = f_k(x), \tag{2}$$

atunci, prin integrarea tuturor ecuaţiilor (2) se obţin soluţiile ecuaţiei (1).

Să presupunem că ecuaţia (1) nu poate fi rezolvată în raport cu $x^{(n)}$. Atunci se face schimbarea de funcţie

$$x^{(n)} = y, \quad t = \varphi(y).$$

Avem

$$x^{(n)} = \frac{dx^{(n-1)}}{dt},$$

deci

$$dx^{(n-1)} = x^{(n)}dt,$$

de unde se obţine

$$x^{(n-1)} = \int x^{(n)}dt = \int y\varphi'(y)dy.$$

Analog se calculează $x^{(n-1)}, \cdots, x'$ şi în final se obţine soluţia sub formă parametrică

$$x = \psi(y), \quad t = \varphi(y).$$

Exemplu

Să se rezolve ecuaţia diferenţială
$$x'' + e^{x''} = t.$$

Rezolvare

Cum ecuaţia este de forma $F(t, x^{(n)}) = 0$, cu $n = 2$ vom face schimbarea de funcţie $x'' = y$, deci ecuaţia devine
$$y + e^y = t = \varphi(y).$$
Avem
$$x'' = \frac{dx'}{dt} \Rightarrow dx' = x''dt = y(1 + e^y)dy \Rightarrow x' = \int y(1 + e^y)dy = \int ydy + \int ye^y dy,$$
deci
$$x' = \frac{y^2}{2} + ye^y - e^y + c_1.$$
Dar $x' = \dfrac{dx}{dt}$, deci
$$dx = x'dt = \left(\frac{y^2}{2} + ye^y - e^y + c_1\right)(1 + e^y)dy$$
Rezultă
$$x = \int \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2}e^y + ye^y + ye^{2y} - e^y - e^{2y} + c_1 + c_1e^y\right) dy$$
Calculând integralele se obţine soluţia parametrică
$$x = \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2}y^2e^y + \frac{1}{2}ye^{2y} - \frac{3}{4}e^{2y} - e^y + c_1y + c_1e^y + c_2$$
$$t = y + e^y.$$

3. Ecuaţii diferenţiale de forma $F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \cdots, x^{(n)}) = 0, \ k \in \mathbb{N}^*$.

În astfel de ecuaţii lipsesc necunoscuta x şi derivatele sale până la ordinul $k - 1$.

Se face schimbarea de funcţie $x^{(k)} = y$ şi astfel, ecuaţia se reduce la o ecuaţie diferenţială de ordinul $n - k$,
$$F(t, y, y', \cdots, y^{(n-k)}) = 0$$
şi una de ordinul k
$$x^{(k)} = y.$$

Exemplu

Să se rezolve ecuaţia diferenţială
$$x^{(5)} - \frac{1}{t}x^{(4)} = 0.$$

Rezolvare

Cum avem o ecuaţie diferenţială de forma $F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \cdots, x^{(n)}) = 0$ cu $k = 4$, vom face schimbarea de variabilă $x^{(4)} = y$, de unde rezultă $x^{(5)} = y'$. Înlocuind în ecuaţia iniţială obţinem ecuaţia cu variabile separabile

$$y' - \frac{1}{t}y = 0$$

Rezolvând această ecuaţie obţinem

$$y' = \frac{1}{t}y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{t}dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{t}dt \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|t| + c,$$

deci

$$y = tc_1.$$

Atunci

$$x^{(4)} = tc_1,$$

$$x''' = \int tc_1\ dt = \frac{t^2}{2}c_1 + c_2$$

$$x'' = \int \left(\frac{t^2}{2}c_1 + c_2\right)\ dt = \frac{t^3}{6}c_1 + tc_2 + c_3$$

$$x' = \int \left(\frac{t^3}{6}c_1 + c_2 t + c_3\right)\ dt = \frac{t^4}{24}c_1 + \frac{t^2}{2}c_2 + tc_3 + c_4$$

$$x = \int \left(\frac{t^4}{24}c_1 + \frac{t^2}{2}c_2 + tc_3 + c_4\right)\ dt = \frac{t^5}{120}c_1 + \frac{t^3}{6}c_2 + \frac{t^2}{2}c_3 + c_4 t + c_5.$$

4. Ecuaţii diferenţiale de forma $F(t, x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0$, unde F este o funcţie omogenă de grad r în $x, x', \cdots, x^{(n)}$.

Definiţia 1. O funcţie $F(t, x, x', \cdots, x^{(n)})$ se numeşte *omogenă de grad* r în $x, x', \cdots, x^{(n)}$ dacă

$$F(t, mx, mx', \cdots, mx^{(n)}) = m^r F(t, x, x', \cdots, x^{(n)}).$$

Se face schimbarea de funcţie $x' = xy$ şi, astfel, se coboară ordinul cu o unitate. Prin derivare obţinem:

$$x'' = x'y + xy' = xy^2 + xy'$$

$$x''' = x'y^2 + 2xyy' + x'y' + xy'' = x'y^2 + 2xyy' + xyy' + xy'' = x'y^2 + 3xyy' + xy''$$

....

Înlocuind derivatele lui x în ecuaţia iniţială şi ţinând cont de omogenitatea lui F, obţinem o ecuaţie de ordinul $n - 1$.

Algoritmul de repetă până ajungem la x.

Exemplu

Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$xx'' - (x')^2 = 6tx^2.$$

Rezolvare

Avem o ecuaţie diferenţială de forma $F(t, x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0$, cu $n = 2$, iar dacă înlocuim pe x cu mx, pe x' cu mx' c si pe x'' cu mx'' obţinem:

$$mx \cdot mx'' - m^2(x')^2 = 6tm^2x^2.$$

Împărţind această ecuaţie prin m^2 se obţine ecuaţia iniţială, deci $F(t, x, x', x'') = 0$ este o funcţie omogenă de grad 2. Facem schimbarea de funcţie $x' = xy$, deci $x'' = x'y + xy' = xy^2 + xy'$. Înlocuind în ecuaţia iniţială, avem

$$x(xy^2 + xy') - x^2y^2 = 6tx^2 \Leftrightarrow x^2y^2 + x^2y' - x^2y^2 = 6tx^2.$$

Reducând pe x^2y^2 şi împărţind prin x^2 se obţine ecuaţia diferenţială direct integrabilă $y' = 6t$, a cărei soluţie este $y = 3t^2 + c_1$.

Dar $y = \dfrac{x'}{x}$, deci

$$\frac{x'}{x} = 3t^2 + c_1 \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = (3t^2 + c_1)dt \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int (3t^2 + c_1)dt \Leftrightarrow \ln|x| = t^3 + c_1t + c_2,$$

de unde se obţine soluţia generală

$$x = e^{t^3 + c_1t + c_2}.$$

5. Ecuaţii diferenţiale de forma $F(x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0$.

În aceste ecuaţii lipseşte variabila independentă t.

Ordinul ecuaţiei se reduce cu o unitate dacă se consideră ca funcţie necunoscută $y = \dfrac{dx}{dt}$, iar ca variabilă independentă x. Avem

$$x'' = y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$x''' = y'' = \left(y \cdot \frac{dy}{dx}\right)' = y' \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = y \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y \cdot \frac{d^2y}{d^2x}.$$

Analog se calculează toate derivatele până la ordinul n. Introducând expresiile lui x', x'', $\cdots$, $x^{(n)}$ în ecuaţia iniţială se obţine o nouă ecuaţie de ordin $n - 1$. Dacă reuşim să determinăm soluţia generală a acestei ecuaţii (de forma $y = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_{n-1})$) atunci $\dfrac{dx}{dt} = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_{n-1})$.

Exemplu

Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$xx'' - (x')^2 = 0.$$

Rezolvare

Vom face schimbarea de variabilă $y = x' = \dfrac{dx}{dt}$, deci

$$x'' = y' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Introducând pe x' şi x'' în ecuaţia iniţială obţinem

$$xy\frac{dy}{dx} - y^2 = 0 \Leftrightarrow y\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0.$$

Rezultă

$$y = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow x = c_1$$

sau

$$x\frac{dy}{dx} - y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| + c_1 \Leftrightarrow y = c_1 x,$$

deci

$$\frac{dx}{dt} = c_1 x \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = c_1 dt \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int c_1 dt \Leftrightarrow \ln|x| = c_1 t + c_2,$$

de unde rezultă soluţia generală e ecuaţiei

$$x = e^{c_1 t + c_2}.$$