Seminar03

Aplicaţii ale ecuaţiilor diferenţiale afine şi ale ecuaţiilor de tip omogen

Enunţuri

1.

(Încărcarea unui condensator printr-o rezistenţă) (D. Constantinescu)

Se dă un circuit format dintr-un condensator, o rezistenţă şi o sursă de curent cu o anumită forţă electromotoare constantă. Intensitatea curentului şi diferenţa de potenţial la borne în funcţie de un anumit moment de timp la care se face măsurătoarea, este soluţia problemei Cauchy:

$$\begin{cases} R \cdot q'(t) + \frac{Q(t)}{C} = E \\ q(0) = 0 \end{cases}$$

unde:

- C - capacitatea condensatorului,
- R - rezistenţa
- E - forţa electromotoare,
- t - variabilă independentă,
- q - sarcina condensatorului,
- i - intensitatea curentului,
- v - diferenţa de potenţial la borne

2.

(Intensitatea curentului electric dintr-un circuit)

Intensitatea curentului electric dintr-un circuit în care acţionează o forţă electromotoare datorată unei variaţii de flux şi având o rezistenţă şi o bobină montate în serie, este dată de soluţia ecuaţiei diferenţiale afine

$$L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = -nSB \cdot cos\omega t,$$

unde:

- R - rezistenţa,
- L - inducţia bobinei,
- n - numarul de spire din cadrul considerat,
- S - aria spirelor,
- B - inducţia câmpului magnetic,
- E - forţa electromotoare,
- ω - viteza unghiulară,
- i - intensitatea curentului electronic,
- t - variabilă independentă.

3.

(Modificarea temperaturii unui corp în funcţie de mediu dacă pentru încălzire se foloseşte energie electrică) este soluţie ecuaţia: $T' + \frac{dS}{mC}T = \frac{w}{4{,}18 \cdot m \cdot C}$ unde:

- T - temperatura corpului
- w - puterea electrică
- m - masa corpului
- C - căldura masică
- S - suprafaţa de răcire
- α - coeficientul de împrăştiere

4.

Curbele ortogonale plane pentru tangenta dintr-un punct A al unei curbe care taie axa Ox în B, astfel încât $|OB| = |AB|$ sunt soluţiile ecuaţiei $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

5.

Curbele ortogonale ale cercurilor cu centrul pe Ox şi tangente axei Oy sunt soluţiile ecuaţiei $y' = \frac{y^2 - x^2}{2yx}$.

Rezolvare

Exerciţiu01

1 $\begin{cases} R \cdot q'(t) + \frac{q(t)}{C} = E \\ q(0) = 0 \end{cases}$

$R q'(t) + \frac{q(t)}{C} = E \;\Big|\; : R$

$q'(t) + \frac{q(t)}{RC} = \frac{E}{R}$

$q' + \underbrace{\frac{1}{RC}}_{A(t)} q = \underbrace{\frac{E}{R}}_{B(t)}$ (ec. afină)

Etapa 1

$q' + \frac{1}{RC} q = 0 \iff \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} q$

$\frac{1}{q} dq = -\frac{1}{RC} dt \iff \int \frac{1}{q} dq = -\int \frac{1}{RC} dt$

$\ln q = -\frac{1}{RC} t + K$

$q = e^{-\frac{1}{RC}t + K}$

$\Rightarrow \boxed{q_0 = K \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}$

Etapa 2

$\varphi_0 = K(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

$\left(K(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}\right)' + \frac{1}{RC} \cdot K(t) e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{R}$

$K'(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + \cancel{K(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right)} + \cancel{\frac{1}{RC} \cdot K(t) e^{-\frac{t}{RC}}} = \frac{E}{R}$

$K'(t) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{R} \;\Big|\; \cdot e^{t/RC}$

$K'(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{t/RC}$

$K(t) = \int \frac{E}{R} e^{t/RC} dt = \frac{E}{R} \cdot \frac{e^{\frac{t}{RC}}}{\frac{1}{RC}} = \frac{E}{\cancel{R}} \cdot e^{\frac{t}{RC}} \cdot \frac{\cancel{R}C}{1}$

$K(t) = CE e^{t/RC}$

$\Rightarrow \varphi_0 = CE \cdot e^{t/RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \boxed{\varphi_0 = CE}$

$q = q_0 + \varphi_0 = K \cdot e^{-t/RC} + CE$

$q(0) = K + CE = 0 \Rightarrow K = -CE \Rightarrow q_{RC} = CE - CE e^{-\frac{t}{RC}}$

$$v(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{CE\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)}{C} = E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$i(t) = q'(t) = -\cancel{C}E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left(-\frac{1}{R\cancel{C}}\right) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Exerciţiu02

$$2)\ L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = -nSB \cos\omega t \quad | : L$$

$$i'(t) + \underbrace{\frac{R}{L}}_{A(t)} i(t) = \underbrace{-\frac{nSB}{L}\cos\omega t}_{B(t)}$$

Etapa 1

$$i'(t) + \frac{R}{L} i(t) = 0$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt$$

$$\int \frac{1}{i} di = -\int \frac{R}{L} dt$$

$$\ln i = -\frac{R}{L} t + C$$

$$i = e^{-\frac{R}{L}t + C} \Rightarrow \boxed{i_0 = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}}$$

Etapa 2 $\quad i_0 = C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$

$$\left(C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t}\right)' + \frac{R}{L} \cdot C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = -\frac{nSB}{L} \cos\omega t$$

$$C'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \cancel{C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \left(-\frac{R}{L}\right)} + \cancel{\frac{R}{L} C(t) e^{-\frac{R}{L}t}} = -\frac{nSB}{L}\cos\omega t$$

$$C'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = -\frac{nSB}{L} \cos\omega t \quad | \cdot e^{\frac{R}{L}t}$$

$$C'(t) = -\frac{nSB}{L} \cos\omega t \cdot e^{\frac{R}{L}t}$$

$$C(t) = -\frac{nSB}{L} \int \underbrace{\cos\omega t}_{f} \cdot \underbrace{e^{\frac{R}{L}t}}_{g'} dt$$

$$f' = -\omega \sin\omega t, \quad g = \frac{e^{\frac{R}{L}t} \cdot L}{R}$$

$$C(t) = -\frac{nSB}{L}\left(\frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cdot \cos\omega t + L\int \omega \sin\omega t \cdot \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{R}\right.$$

$$= -\frac{nSB}{L} \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cos\omega t - \frac{nSB}{L} \cdot \frac{\omega L}{R} \int \sin\omega t \cdot e^{\frac{R}{L}t}\, dt$$

Neterminat

$c(t) =$

$$I = \int \cancel{\sin}\, \omega t \cdot e^{+\frac{R}{L}t}\, dt$$

$$\underset{\downarrow}{\omega\cos\omega t} \quad \underset{\downarrow}{e^{\frac{R}{L}t}}$$

$$f \qquad g'$$

$$f' = \omega \cos \omega t, \quad g = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t}$$

$$= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cdot \omega \cdot \cos \omega t - \int \omega \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t \, dt$$

$$= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cdot \omega \cos \omega t - \frac{\omega L}{R} \int \underbrace{e^{\frac{R}{L}t}}_{g'} \underset{\downarrow f}{\cos \omega t}\, dt$$

$$f' = -\omega \sin \omega t$$

$$g = \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t}$$

$$= \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cdot \omega \cos \omega t - \frac{\omega L}{R} \left(-\frac{\omega L}{R} \sin \omega t\, e^{\frac{R}{L}t} + \int \frac{\omega \cdot L}{R} \underbrace{e^{\frac{L}{L}t} \cos \omega t \, dt}_{I} \right)$$

$$I = \frac{\omega L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2 \sin \omega t\, e^{\frac{R}{L}t} - \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2 I$$

$$I \left[1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2 \right] = \frac{\omega L}{R} \cdot e^{\frac{R}{L}t} \left(\cos \omega t + \frac{\omega L}{R} \sin \omega t \right)$$

$$\Rightarrow c(t) = \frac{\omega L}{R} e^{\frac{R}{L}t} \left(\cos \omega t + \frac{\omega L}{R} \sin \omega t \right) \Big/ \left(1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2 \right) + C_1$$

$$\gamma_0 = c(t) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{\frac{\omega L}{R} \left(\cos \omega t + \frac{\omega L}{R} \sin \omega t \right)}{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2} + C_1 e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i(t) = i_0 + \gamma_0 = c\, e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\frac{\omega L}{R} \left(\cos \omega t + \frac{\omega L}{R} \sin \omega t \right)}{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}$$