PROBABILITATI CONDITIONATE

1.

Intr-o clasa de elevi probabilitatea ca un elev cu ochii albastrii sa fie stangaci este $\frac{1}{3}$ iar probabilitatea ca un elev stangaci sa aiba ochii albastrii este $\frac{1}{2}$. Daca probabilitatea ca un elev sa nu fie nici stangaci si nici cu ochii albastrii este $\frac{4}{5}$, care este probabilitatea ca un elev sa fie si cu ochii albastrii si stangaci?

Solutie. Considerand evenimentele:

$$A: \text{"evenimentul ca un elev sa aiba ochii albastrii"}$$
$$S: \text{"evenimentul ca un elev sa fie stangaci"},$$

avem:

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap S)=P(S\,|\,A)P(A)=\frac{1}{3}P(A) \\ P(A\cap S)=P(A\,|\,S)P(S)=\frac{1}{2}P(S) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} P(A)=3P(A\cap S) \\ P(S)=2P(A\cap S) \end{cases} \quad (1)$$

$$P(A\cup S)=1-P\left(\overline{A\cup S}\right)=1-P\left(\overline{A}\cap\overline{S}\right)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5} \quad (2).$$

Cum $P(A\cup S)=P(A)+P(S)-P(A\cap S)$, tinand cont de (1) si (2), obtinem $\frac{1}{5}=3P(A\cap S)+2P(A\cap S)-P(A\cap S)$, de unde rezulta probabilitatea ceruta $P(A\cap S)=\frac{1}{20}$.

Academia de matematica

PROBABILITATI CONDITIONATE

2.

(*Formula probabilii totale*)Fie intr-un camp de probabilitate $A_1, A_2, ..., A_n$ o partitie a multiimii evenimentelor elementare (*un sistem complet de evenimente*) si B un alt eveniment. Sa se demonstreze formula:

$$P(B) = P_{A_1}(B)P(A_1) + P_{A_2}(B)P(A_2) + ... + P_{A_n}(B)P(A_n).$$

Solutie. Fie E multimea evenimentelor elementare. Tinand cont de faptul ca $E = A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_n$ si evenimentele $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt incompatibile, obtinem:

$$P(B) = P(B \cap E) = P[B \cap (A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_n)] =$$
$$P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup .... \cup (B \cap A_n)] =$$
$$P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... P(B \cap A_n) = .$$
$$P_{A_1}(B)P(A_1) + P_{A_2}(B)P(A_2) + ... + P_{A_n}(B)P(A_n)$$

3.

Printre $m+n$ bilete de examen ($m, n \in N^*$) m sunt favorabile. Studentii vin pe rand sa traga un bilet. Dintre primii doi studenti care are sansa mai mare sa traga un bilet favorabil?

Solutie. Considerand evenimentele :

$$\begin{cases} A : \text{"primul student trage un bilet favorabil"} \\ B : \text{"al doilea student trage un bilet favorabil"} \end{cases}$$

avem $P(A) = \dfrac{m}{m+n}$ *si* $P(\overline{A}) = \dfrac{n}{m+n}$ (1). Folosind apoi formula probabilitatii totale obtinem:

$$P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A}) =$$
$$\frac{m-1}{m+n-1} \cdot \frac{m}{m+n} + \frac{m}{m+n-1} \cdot \frac{n}{m+n} =$$
$$\frac{m(m+n-1)}{(m+n-1)(m+n)} = \frac{m}{m+n}.$$

Prin urmare ambii studenti au aceeasi sansa de atrage un bilet favorabil.

Academia de matematica

PROBABILITATI CONDITIONATE

4.

(*Formula lui Bayes***)**Fie $(E,\mathcal{P}(E),P)$ un camp de probabilitate si $A_1,A_2,....,A_n\in\mathcal{P}(E)$ un *sistem complet de evenimente* (*partitie a spatiului de selectie* E). Sa se arate ca pentru orice eveniment $X\in\mathcal{P}(E)$:

$$P(A_k\mid X)=\frac{P(X\mid A_k)P(A_k)}{P(X\mid A_1)P(A_1)+P(X\mid A_2)P(A_2)+.....+P(X\mid A_n)P(A_n)},\ k=\overline{1,n}$$

Solutie.

$$P(A_k\mid X)=\frac{P(X\mid A_k)P(A_k)}{P(X)}\overset{formula\ probabilitatii\ totale}{=}$$

$$\frac{P(X\mid A_k)P(A_k)}{P(X\mid A_1)P(A_1)+P(X\mid A_2)P(A_2)+.....+P(X\mid A_n)P(A_n)}.$$

PROBABILITATI CONDITIONATE

5.

Urna U_1 contine 4 bile albe si 6 bile negre, urna U_2 2 bile albe si 8 negre iar urna U_3 4 bile albe si 1 bila negra.

a. Se alege la intamplare o urna si se extrage o bila. Se constata ca este alba. Care este probabilitatea ca bila extrasa sa fi provenit din urna U_3?

b. Se pun toate bilele la un loc si se extrage o bila la intamplare. Se constata ca este alba. Care este probabilitatea ca bila extrasa sa fi provenit din urna U_3?

Solutie. Se noteaza cu A_i evenimentul "bila extrasa provine din urna U_i" si B evenimentul "bila extrasa este alba". Folosind formula lui Bayes obtinem:

$$a)P(A_3 \mid B)=\frac{P(B\mid A_3)P(A_3)}{P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+P(B\mid A_3)P(A_3)}=$$

$$\frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{4}{7};$$

$$b)P(A_3 \mid B)=\frac{P(B\mid A_3)P(A_3)}{P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+P(B\mid A_3)P(A_3)}=$$

$$\frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{25}}{\frac{4}{10}\cdot\frac{10}{25}+\frac{2}{10}\cdot\frac{10}{25}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{25}}=\frac{2}{5}.$$

Academia de matematica