13 Rezolvare

a)

În acest caz, $\delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$, deci cuadrica este cu centru. Coordonatele centrului se obţin rezolvând sistemul

$$\begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ x + 7y + z - 3 = 0 \\ x + y + 5z + 2 = 0 \end{cases}.$$

Obţinem $C(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. După translaţia $x = x'$, $y = \frac{1}{2} + y'$, $z = -\frac{1}{2} + z'$, ecuaţia cuadricei devine

$$5x'^2 + 7y'^2 + 5z'^2 + 2x'y' + 2x'z' + 2y'z' - \frac{3}{2} = 0.$$

Valorile proprii ale matricei $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ sunt $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 8$, iar vectorii proprii ortonormaţi corespunzători $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, matricea de trecere de la baza canonică la această bază fiind

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

După schimbarea de variabilă $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, ecuaţia cuadricei devine

$$4X^2 + 5Y^2 + 8Z^2 - \frac{3}{2} = 0 \text{ sau } \frac{X^2}{\frac{3}{8}} + \frac{Y^2}{\frac{3}{10}} + \frac{Z^2}{\frac{3}{16}} - 1 = 0.$$

Aşadar cuadrica este un elipsoid.

b)

În acest caz, $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Valorile proprii ale matricei $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -4$, iar vectorii proprii ortonormați corespunzători sunt $(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. După schimbarea de variabilă $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, ecuația cuadricei devine $6y'^2 - 4z'^2 - \sqrt{6}x' + 2\sqrt{3}y' + 3\sqrt{2}z' - 5 = 0$, care se mai poate scrie sub forma $6(y' + \frac{\sqrt{3}}{6})^2 - 4(z' - \frac{3\sqrt{2}}{8})^2 - \sqrt{6}x' - \frac{35}{8} = 0$. Notând $X = x' - \frac{35}{8\sqrt{6}}$, $Y = y' + \frac{\sqrt{3}}{6}$, $Z = z' - \frac{3\sqrt{2}}{8}$, obținem ecuația canonică a cuadricei: $6Y^2 - 4Z^2 - \sqrt{6}X = 0$. Cuadrica este un paraboloid hiperbolic.