14

C

Recapitulare finală

Modele de subiecte pentru examen

S1. Fie sistemul de vectori

$S = \{ \vec{x}_1 = (-1,2,5), \ \vec{x}_2 = (0,1,2), \ \vec{x}_3 = (1,2,1) \}$.

Se cere:

a) Verificați dacă S formează o bază și, în caz afirmativ, să se calculeze coordonatele vectorului $\vec{x} = (3,4,9)$ în această bază

b) Calculați unghiul dintre vectorii $\vec{x}_1$ și $\vec{x}_2$

c) Stabiliți dacă vectorii $\vec{x}_2$ și $\vec{x}_3$ sunt coliniari

d) Stabiliți dacă vectorii $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ sunt coplanari.

e) Să se ortogonalizeze și apoi să se ortonormeze sistemul S.

Rezolvare

a) Vom aplica regula pivotului

	$\vec{x}_1$	$\vec{x}_2$	$\vec{x}_3$	$\vec{x}$
$\vec{e}_1$	$\boxed{-1}$	0	1	3
$\vec{e}_2$	2	1	2	4
$\vec{e}_3$	5	2	1	9
$\vec{x}_1$	1	0	-1	-3
$\vec{e}_2$	0	$\boxed{+1}$	4	10
$\vec{e}_3$	0	+2	6	24
$\vec{x}_1$	1	0	-1	-3
$\vec{x}_2$	0	1	4	10
$\vec{e}_3$	0	0	$\boxed{-2}$	4
$\vec{x}_1$	1	0	0	-5
$\vec{x}_2$	0	1	0	18
$\vec{x}_3$	0	0	1	-2

S-a obținut $I_3 \Rightarrow$ S - bază, iar coord. lui x în baza S sunt $\vec{x}_S = (-5,18,-2)$

b) Fie $\alpha = \widehat{(\vec{x}_1, \vec{x}_2)}$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle}{\|\vec{x}_1\| \cdot \|\vec{x}_2\|}$$

$$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = (-1)\cdot 0 + 2\cdot 1 + 5\cdot 2 = 2+10 = 12$$

$$\|\vec{x}_1\| = \sqrt{\langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle} = \sqrt{(-1)^2+2^2+5^2} = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30}$$

$$\|\vec{x}_2\| = \sqrt{\langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle} = \sqrt{0^2+1^2+2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{12}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{5}} = \frac{12\cdot\sqrt{30}\cdot\sqrt{5}}{30\cdot 5} = \frac{\cancel{12}^{\,6}\cdot\cancel{5}\cdot\sqrt{6}}{\cancel{30}_{\,15}\cdot\cancel{5}} = \frac{\cancel{6}^{\,2}\sqrt{6}}{\cancel{15}_{\,5}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

c) Pt. a stabili dacă vectorii sunt ~~coplanari~~ coliniari, calculăm produsul vectorial dintre cei 2 vectori.

$$\vec{x}_2 \times \vec{x}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

Cum $\vec{x}_2 \times \vec{x}_3 \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_2, \vec{x}_3$ nu sunt ~~coplanari~~ coliniari

d) Pt. a stabili dacă vectorii sunt coplanari, calculăm produsul mixt dintre cei trei vectori

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1+4-5+4 = 2 \neq 0$$

Cum $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) \neq 0 \Rightarrow$ vectorii nu sunt coplanari

e) Cum S e bază $\Rightarrow$ S este liniar independent, deci, se poate ortogonaliza.

Fie $B^{\perp} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$, cu $\vec{y}_i \perp \vec{y}_j$, $\forall i \neq j$

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1 \Rightarrow \boxed{\vec{y}_1 = (-1, 2, 5)}$$

$$\vec{y}_2 = \vec{x}_2 + \alpha \vec{y}_1 \quad | \cdot \langle \vec{y}_1 \rangle$$

$$\langle \vec{y}_2, \vec{y}_1 \rangle = \langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle + \alpha \langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle$$

$\langle \vec{y}_2, \vec{y}_1 \rangle = 0$ (deoarece $\vec{y}_1 \perp \vec{y}_2$)

$$\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle = \langle \vec{x}_2, \vec{x}_1 \rangle = 12$$

$$\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle = 30$$

$$\Rightarrow 12 + 30\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{12}{30} = -\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \vec{y}_2 = (0, 1, 2) - \frac{2}{5}(-1, 2, 5) = (0, 1, 2) + \left(\frac{2}{5}, \frac{-4}{5}, -2\right)$$

$$\boxed{\vec{y}_2 = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)}$$

$$\vec{y}_3 = \vec{x}_3 + \beta_1 \vec{y}_1 + \beta_2 \vec{y}_2 \quad | \cdot \langle \vec{y}_1 \rangle$$

$$\langle \vec{y}_3, \vec{y}_1 \rangle = \langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle + \beta_1 \langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle + \beta_2 \langle \vec{y}_2, \vec{y}_1 \rangle$$

$$\langle \vec{y}_3, \vec{y}_1 \rangle = \langle \vec{y}_2, \vec{y}_1 \rangle = 0$$

$$\langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = -1 + 4 + 5 = 8$$

$$\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle = 30$$

$$8 + 30\beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = -\frac{8}{30} = -\frac{4}{15}$$

$$\vec{y}_3 = \vec{x}_3 + \beta_1 \vec{y}_1 + \beta_2 \vec{y}_2 \quad | \cdot \langle \vec{y}_2 \rangle$$

$$\langle \vec{y}_3, \vec{y}_2 \rangle = \langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle + \beta_1 \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2 \rangle + \beta_2 \langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle$$

$$\langle \vec{y}_3, \vec{y}_2 \rangle = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2 \rangle = 0.$$

$$\langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot 0 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle = \frac{4}{25} + \frac{1}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\beta_2 = 0 \quad \Rightarrow \beta_2 = -4$$

$$\vec{y}_3 = (1,2,1) - \frac{4}{15}(-1,2,5) - 4\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$$

$$= \left(1 + \frac{4}{15} - \frac{8}{5},\ 2 - \frac{8}{15} - \frac{4}{5},\ 1 - \frac{20}{15}\right)$$

$$= \left(\frac{15+4-28}{15},\ \frac{30-8-12}{15},\ \frac{15-20}{15}\right) = \left(-\frac{9}{15}, \frac{10}{15}, -\frac{5}{15}\right)$$

$$\boxed{\vec{y}_3 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)}$$

$$S^{\perp} = \left\{\vec{y}_1 = (-1,2,5),\ \vec{y}_2 = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0\right),\ \vec{y}_3 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$S_M^{\perp} = \left\{\frac{1}{\|\vec{y}_1\|}\cdot\vec{y}_1,\ \frac{1}{\|\vec{y}_2\|}\cdot\vec{y}_2,\ \frac{1}{\|\vec{y}_3\|}\cdot\vec{y}_3\right\}$$

$$\|\vec{y}_1\| = \sqrt{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1\rangle} = \sqrt{\langle \vec{x}_1, \vec{x}_1\rangle} = \sqrt{30}$$

$$\|\vec{y}_2\| = \sqrt{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2\rangle} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\|\vec{y}_3\| = \sqrt{\langle \vec{y}_3, \vec{y}_3\rangle} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{81+125}{25\cdot 9}}$$

$$= \frac{\sqrt{206}}{5\cdot 3}$$

$$S_M^{\perp} = \left\{\frac{1}{\sqrt{30}}(-1,2,5),\ \sqrt{5}\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0\right),\ \frac{15}{\sqrt{206}}\left(-\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}$$

52

Se consideră punctele $A(0,2,-1)$, $B(1,3,0)$, $C(-1,4,1)$, $\Delta(1,1,2)$. Să se determine:

a) vectorul director al dreptei AB, ecuațiile carteziene și ecuațiile parametrice scalare ale dreptei ce trece prin punctele A și B

b) ecuația planului $P \perp AB$ și care conține punctul C

c) coordonatele punctului $\{O\} = AB \cap (P)$

d) aria triunghiului ABC, precum și înălțimea din C.

e) volumul tetraedrului determinat de punctele A, B, C, Δ, în cazul în care acestea sunt necoplanare, precum și înălțimea din Δ a acestui tetraedru

f) mărimea unghiului dintre dreptele AB și $C\Delta$.

g) mărimea unghiului dintre dreapta AB și planul $(AC\Delta)$

Rezolvare

a) $\vec{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A) = (1,1,1)$

$$AB: \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{z-z_A}{z_B-z_A}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1} \quad \text{(ec. carteziene)}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1} = t \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t+2 \\ z = t-1 \end{cases} \quad \text{(ec. parametrice scalare)}$$

b) $P \perp AB \Rightarrow AB$ reprezintă normala la plan

$\vec{AB} = (\underset{l}{1}, \underset{m}{1}, \underset{n}{1})$

$$P: l(x-x_C) + m(y-y_C) + n(z-z_C) = 0$$

$$1(x+1) + 1(y-4) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x+y+z-4=0}$$

c) Pt. a determina coordonatele lui O, vom rezolva sistemul format de ec. parametrice ale dr. AB și ec. planului P: $O(x,y,z)=?$

$$\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ x=t \\ y=t+2 \\ z=t-1 \end{cases}$$

$t+t+2+t-1-4=0 \Rightarrow 3t=3 \Rightarrow t=1$

$\Rightarrow x=1,\ y=3,\ z=-1 \Rightarrow \boxed{O(1,3,-1)}$

d) $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|}{2}.$

$\vec{AB}=(1,1,1)$

$\vec{AC}=(x_C-x_A,\ y_C-y_A,\ z_C-z_A)=(-1,2,2)$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-3\vec{j}+3\vec{k}$$

$\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|=\sqrt{9+9}=\sqrt{9\cdot 2}=3\sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}_{\Delta ABC}&=\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \mathcal{A}_{\Delta ABC}&=\frac{AB\cdot h_C}{2} \\ AB&=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}\cdot h_C}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow h_C=\dfrac{^{\sqrt{3})}3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{6}}{3}=\sqrt{6}.$

e) Volumul tetraedrului det. de A, B, C, D este

$$V=\frac{|(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})|}{6}.$$

$\vec{AD}=(x_D-x_A,\ y_D-y_A,\ z_D-z_A)=(1,-1,3)$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + \cancel{2} + 1 - \cancel{2} + 2 + 3 = 12$$

$$V = \frac{12}{6} = 2.$$

$$\text{Dar } V = \frac{\mathcal{A}_{ABC} \cdot h_D}{3} \Bigg\} \quad \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot h_D}{3} = 2$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot h_D = 6$$

$$h_D = \frac{2 \cdot \cancel{6}^{2}}{\cancel{3}\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

f) $m(\widehat{AB, CD}) = ?$

$$m(\widehat{AB, CD}) = m(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \alpha.$$

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$

$\overrightarrow{CD} = (2, -3, 1)$

$$\cos\alpha = \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{CD}\|}$$

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle = 2 - 3 + 1 = 0.$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow m(\widehat{AB, CD}) = 90^\circ.$$

g) Determinăm mai întâi ec. planului (ACD), pt. a găsi coordonatele normalei la plan.

$$(ACD): \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A & z_D - z_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ -1 - 0 & 4 - 0 & 1 - 0 \\ 1 - 0 & 1 - 0 & 2 - 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{7x + 3y - 5z = 0} \Rightarrow \vec{n} = (7, 3, -5)$$

Dacă $\measuredangle$ format de AB cu planul (ACD) este β, atunci $\sin\beta = \dfrac{\langle \vec{n}, \vec{AB} \rangle}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{AB}\|}$

$\langle \vec{n}, \vec{AB} \rangle = 7\cdot 1 + 3\cdot 1 + (-5)\cdot 1 = 7+3-5 = 5$

$\|\vec{n}\| = \sqrt{7^2+3^2+(-5)^2} = \sqrt{49+9+25} = \sqrt{83}$

$\|\vec{AB}\| = \sqrt{3}$

$$\sin\beta = \frac{5}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{83}} = \frac{5\sqrt{3\cdot 83}}{3\cdot 83}$$

$$\beta = \arcsin \frac{5\sqrt{3\cdot 83}}{3\cdot 83}$$