Laboratorul 10
Exerciţii recapitulative

Observaţia 1.0.1 *Pentru orice* $\alpha \in FORM$ *există* α' *formulă normalizată CNF şi* $\alpha \equiv \alpha'$.

Pentru determinarea formei CNF, se vor ţine cont de următorii paşi.

Demonstraţie. Se aplică succesiv subformulelor formulei α următoarele transformări:

$T1$. Eliminarea conectivei "$\leftrightarrow$": Fiecare subformulă de tipul $(\beta \leftrightarrow \gamma)$ se substituie cu

$$((\beta \to \gamma) \wedge (\gamma \to \beta)), \ (\beta \leftrightarrow \gamma) \equiv ((\beta \to \gamma) \wedge (\gamma \to \beta)).$$

$T2$. Eliminarea conectivei "$\to$": Fiecare subformulă de tipul $(\beta \to \gamma)$ se substituie cu

$$((\neg\beta) \vee \gamma), \ (\beta \to \gamma) \equiv ((\neg\beta) \vee \gamma).$$

$T3$. Se aduc negaţiile în faţa literalilor:

i) Fiecare subformulă de tipul $(\neg(\beta \vee \gamma))$ se substituie cu

$$((\neg\beta) \wedge (\neg\gamma)), \ (\neg(\beta \vee \gamma)) \equiv ((\neg\beta) \wedge (\neg\gamma)).$$

ii) Fiecare subformulă de tipul $(\neg(\beta \wedge \gamma))$ se substituie cu

$$((\neg\beta) \vee (\neg\gamma)), \ (\neg(\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\neg\beta) \vee (\neg\gamma)).$$

$T4$. Eliminarea negaţiilor multiple: Fiecare subformulă de tipul $(\neg(\neg\beta))$ se substituie cu

$$\beta, \ (\neg(\neg\beta)) \equiv \beta$$

$T5$. Obţinerea structurii CNF: Fiecare subformulă de tipul $(\beta \vee (\gamma \wedge \delta))$ se substituie prin

$$((\beta \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \delta)), \ (\beta \vee (\gamma \wedge \delta)) \equiv ((\beta \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \delta)).$$

respectiv $((\gamma \wedge \delta) \vee \beta)$ se substituie prin

$$((\gamma \vee \beta) \wedge (\delta \vee \beta)), \ ((\gamma \wedge \delta) \vee \beta) \equiv ((\gamma \vee \beta) \wedge (\delta \vee \beta)).$$

■

Exemplul 1.0.1 Fie $a, b \in V$, $\alpha = (((\neg b) \to (\neg a)) \longleftrightarrow (a \to b))$
Aplicarea transformării $T1$ determină substituirea subformulei

$$(((\neg b) \to (\neg a)) \longleftrightarrow (a \to b))$$

prin

$$((((\neg b) \to (\neg a)) \to (a \to b)) \wedge ((a \to b) \to ((\neg b) \to (\neg a))))$$

Rezultă

$$\alpha_1 = ((((\neg b) \to (\neg a)) \to (a \to b)) \wedge ((a \to b) \to ((\neg b) \to (\neg a))))$$

Aplicarea transformării $T2$ determină:
substituirea subformulei

$$(((\neg b) \to (\neg a)) \to (a \to b)) \text{ prin } ((\neg ((\neg b) \to (\neg a))) \vee (a \to b)) .$$

substituirea subformulei

$$((a \to b) \to ((\neg b) \to (\neg a))) \text{ prin } ((\neg (a \to b)) \vee ((\neg b) \to (\neg a))) .$$

substituirea subformulei

$$(a \to b) \text{ prin } ((\neg a) \vee b) .$$

substituirea subformulei

$$((\neg b) \to (\neg a)) \text{ prin } ((\neg (\neg b)) \vee (\neg a)) .$$

Rezultă $\alpha_2 = (((\neg ((\neg (\neg b)) \vee (\neg a))) \vee ((\neg a) \vee b)) \wedge ((\neg ((\neg a) \vee b)) \vee ((\neg (\neg b)) \vee (\neg a))))$
Aplicarea transformării $T3$ determină:
substituirea subformulei

$$(\neg ((\neg (\neg b)) \vee (\neg a))) \text{ prin } ((\neg (\neg (\neg b))) \wedge (\neg (\neg a))) .$$

substituirea subformulei

$$(\neg ((\neg a) \vee b)) \text{ prin } ((\neg (\neg a)) \wedge (\neg b)) .$$

Rezultă

$$\alpha_3 = ((((\neg (\neg (\neg b))) \wedge (\neg (\neg a))) \vee ((\neg a) \vee b)) \wedge (((\neg (\neg a)) \wedge (\neg b)) \vee ((\neg (\neg b)) \vee (\neg a)))) .$$

Aplicarea transformării $T4$ determină:
substituirea subformulei

$$(\neg (\neg b)) \text{ prin } b.$$

substituirea subformulei

$$(\neg (\neg a)) \text{ prin } a.$$

Rezultă

$$\alpha_4 = ((((\neg b) \wedge a) \vee ((\neg a) \vee b)) \wedge ((a \wedge (\neg b)) \vee (b \vee (\neg a)))) .$$

Aplicarea transformării $T5$ determină:

substituirea subformulei

$$(((\neg b) \wedge a) \vee ((\neg a) \vee b)) \text{ prin } (((\neg b) \vee ((\neg a) \vee b)) \wedge (a \vee ((\neg a) \vee b)))\,.$$

substituirea subformulei

$$((a \wedge (\neg b)) \vee (b \vee (\neg a))) \text{ prin } ((a \vee (b \vee (\neg a))) \wedge ((\neg b) \vee (b \vee (\neg a))))\,.$$

Rezultă reprezentarea normalizată CNF pentru formula α,

$$\alpha' = ((((\neg b) \vee ((\neg a) \vee b)) \wedge (a \vee ((\neg a) \vee b))) \wedge ((a \vee (b \vee (\neg a))) \wedge ((\neg b) \vee (b \vee (\neg a)))))$$

şi $\alpha \equiv \alpha'$.

Exemplul 1.0.2 *Să se determine forma normal conjunctivă (CNF) pentru formula:*

$$\neg(\neg a \vee b) \vee (c \rightarrow \neg d)$$

Soluţie
1. $\neg(\neg a \vee b) \vee (\neg c \vee \neg d)$
2. $(\neg\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg c \vee \neg d)$
3. $(a \wedge \neg b) \vee (\neg c \vee \neg d)$
4. $(a \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)$.

Exerciţii

Exerciţiul 1.0.1 *Să se determine forma normal conjunctivă (CNF) şi să se aplice algoritmul Davis-Putnam pentru formula*

$$\alpha = (\neg(a \wedge b)) \leftrightarrow (\neg c \rightarrow d).$$

Exerciţiul 1.0.2 *Să se determine forma normal conjunctivă (CNF) şi să se aplice algoritmul bazat pe rezoluţie pentru formula*

$$\alpha = (\neg(a \vee b)) \leftrightarrow (\neg a \vee c).$$