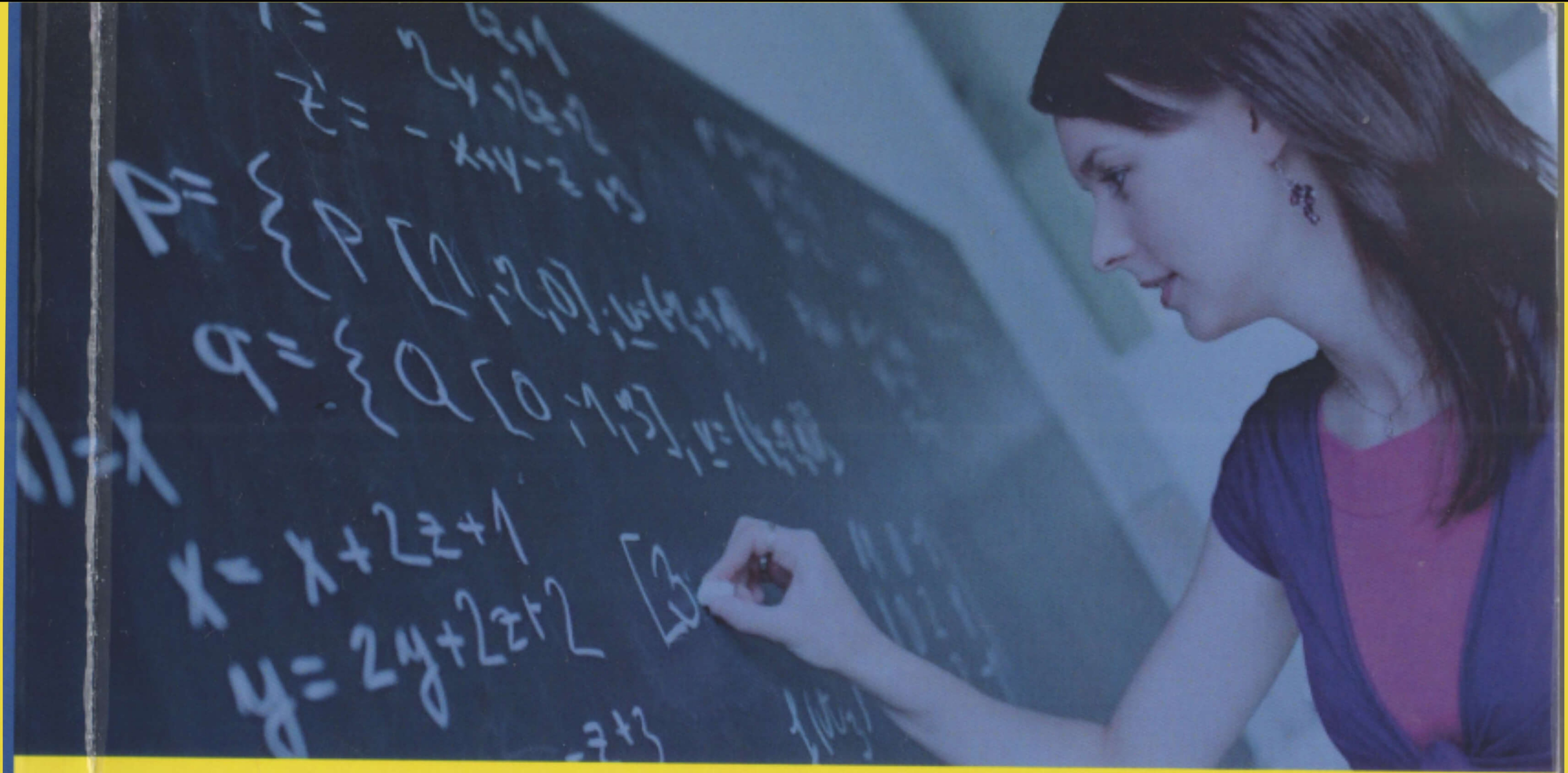

Diana Nuică

Antonio-Mihail Nuică

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Aplicaţii

Partea I

Fiparg

Analiză matematică
Aplicaţii
Partea I

Diana Nuică, Antonio-Mihail Nuică

D.T.P.: Abel Săndău
Corectură: Autorul

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
NUICĂ, ANTONIO MIHAIL
Analiză matematică. Aplicații. Partea I /Antonio-Mihail Nuică, Diana Nuică. - Pitești : Tiparg, 2019
Bibliografie
ISBN 978-606-030-048-9
517

ISBN 978-606-030-048-9

Pentru comenzi și informații contactați
Editura TIPARG
Geamăna, DN 65B Varianta Autostradă - Slatina, jud. Argeș
Tel./Fax: 0248 28 04 90; Tel.: 0248 61 54 16; 0248 61 54 17; Fax: 0248 22 13 48
Adresă corespondență: O.P. 5, C.P. 21, Pitești, Argeș
E-mail: editura@tiparg.ro; Web: www.tiparg.ro

Tipărit la S.C. TIPARG S.A.

Cuprins

Prefaţă

Prezenta lucrare este o îmbunătăţire a cărţii "Culegere de probleme de calcul diferenţial". Ea se adresează studenţilor din anul I de la secţiile de Matematică, Informatică, Electronică, Calculatoare, TCM, IEI, AR, ITT şi altele. Au fost rescrise şi îmbunătăţite aplicaţiile în informatică şi inginerie, despre rapiditatea de convergenţă a şirurilor şi seriilor, problema dependenţei funcţionale, extreme condiţionate, serii de puteri, dezvoltări în serie, etc.

CAPITOLUL 1

Şiruri în $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}^p$

1.1. Noţiuni şi rezultate teoretice

A. Şiruri de numere reale.

I. Şiruri convergente de numere reale.

DEFINIŢIA 1.1.1. Fie un şir de numere reale $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$.

a) Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *convergent* $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \big(\exists\, l \in \mathbb{R}\big)\big(\forall\, \varepsilon > 0\big)\big(\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\big)\big(\forall\, n \geq n_\varepsilon\big)\big(|x_n - l| < \varepsilon\big).$$

l se numeşte *limita şirului* $(x_n)_{n\geq 1}$ (deoarece este unică cu proprietatea de mai sus). Se scrie $x_n \longrightarrow l$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

b) Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *Cauchy* $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \big(\forall\, \varepsilon > 0\big)\big(\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\big)\big(\forall\, n, m \geq n_\varepsilon\big)\big(|x_n - x_m| < \varepsilon\big)$$

$$\Longleftrightarrow \big(\forall\, \varepsilon > 0\big)\big(\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\big)\big(\forall\, n \geq n_\varepsilon\big)\big(\forall\, p \geq 1\big)\big(|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon\big).$$

OBSERVAŢIA 1.1.2. a) Are loc $x_n \longrightarrow l \Longrightarrow |x_n| \longrightarrow |l|$.

b) Au loc echivalenţele: $x_n \longrightarrow l \Longleftrightarrow |x_n - l| \longrightarrow 0$; $x_n \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow |x_n| \longrightarrow 0$.

PROPOZIŢIA 1.1.3. *(Criteriul majorării pentru şiruri convergente şi criteriul "cleştelui").*

a) Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ cu $|x_n - l| \leq y_n$, $n \geq k$ şi $y_n \longrightarrow 0$, atunci $x_n \longrightarrow l$.

b) Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ cu $x_n \leq y_n \leq z_n$, $n \geq k$, $l \in \mathbb{R}$ şi $x_n \longrightarrow l$, $z_n \longrightarrow l$, atunci $y_n \longrightarrow l$.

PROPOZIŢIA 1.1.4. *(Operaţii algebrice cu şiruri convergente).*

Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ convergente, $x_n \longrightarrow l_1$, $y_n \longrightarrow l_2$, atunci:

a) $x_n + y_n \longrightarrow l_1 + l_2$;

b) $x_n y_n \longrightarrow l_1 l_2$;

c) $\dfrac{x_n}{y_n} \longrightarrow \dfrac{l_1}{l_2}$, *pentru* $l_2 \neq 0$;
d) $x_n^{y_n} \longrightarrow l_1^{l_2}$, *pentru* $x_n > 0$, $n \geq k$.

PROPOZIŢIA 1.1.5. *(Criteriul raportului).*
Dacă $(x_n)_{n\geq 1} \subset (0,\infty)$ *cu* $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \longrightarrow l < 1$, *atunci* $x_n \longrightarrow 0$.

TEOREMA 1.1.6. *(Teorema lui Weierstrass). Dacă* $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ *este un şir monoton şi mărginit, atunci el este convergent.*

TEOREMA 1.1.7. *(Teorema lui Cauchy). Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$. *Atunci*

$$(x_n)_{n\geq 1} \text{ este şir convergent} \iff (x_n)_{n\geq 1} \text{ este şir Cauchy.}$$

II. Şiruri de numere reale cu limită infinită.

DEFINIŢIA 1.1.8. Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$. $(x_n)_{n\geq 1}$ se spune că *are limita* $+\infty$ (respectiv $-\infty$)

$$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_\varepsilon)(x_n > \varepsilon)(\text{respectiv } x_n < -\varepsilon).$$

Se scrie $x_n \longrightarrow \infty$ (respectiv $-\infty$) sau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ (respectiv $-\infty$).

PROPOZIŢIA 1.1.9. *(Criteriul majorării pt. şiruri cu limita infinită).*
Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ *cu* $x_n \leq y_n$, $n \geq k$.
a) Dacă $x_n \longrightarrow \infty$, *atunci* $y_n \longrightarrow \infty$.
a) Dacă $y_n \longrightarrow -\infty$, *atunci* $x_n \longrightarrow -\infty$.

PROPOZIŢIA 1.1.10. *(Operaţii algebrice cu limite de şiruri).*
Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ *au limită,* $x_n \longrightarrow l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_n \longrightarrow l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, *atunci:*
a) $x_n + y_n \longrightarrow l_1 + l_2$; *caz exceptat* "$\infty - \infty$";
b) $x_n y_n \longrightarrow l_1 l_2$; *caz exceptat* "$0 \cdot \infty$";
c) $\dfrac{x_n}{y_n} \longrightarrow \dfrac{l_1}{l_2}$ *(cu* $y_n \neq 0$, $n \geq k$*); cazuri exceptate:* "∞/∞", "$0/0$";
d) $x_n^{y_n} \longrightarrow l_1^{l_2}$, *pentru* $x_n > 0$, $n \geq k$; *cazuri exceptate:* "0^0", "∞^0", "1^∞".

Cazuri particulare "interesante": "$\infty + \infty = \infty$", "$\infty + a = \infty$", $a \in \mathbb{R}$, "$a \cdot \infty = \infty$", $a > 0$, "$a \cdot \infty = -\infty$", $a < 0$, "$(\pm\infty) \cdot \infty = \pm\infty$", "$a/\infty = 0$", $a \in \mathbb{R}$, "$1/(+0) = +\infty$", "$1/(-0) = -\infty$".

PROPOZIŢIA 1.1.11. *(Criteriul raportului pentru şiruri cu limita* ∞*).*
Dacă $(x_n)_{n\geq 1} \subset (0,\infty)$ *cu* $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \longrightarrow l > 1$, *atunci* $x_n \longrightarrow \infty$.

TEOREMA 1.1.12. *("Update" la teorema lui Weierstrass).*
Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$.
a) Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ *este crescător şi nemărginit, atunci* $x_n \longrightarrow \infty$.
b) Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ *este descrescător şi nemărginit, atunci* $x_n \longrightarrow -\infty$.

PROPOZIŢIA 1.1.13. *(Criteriul Stolz-Cesaro).*
Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ *astfel încât:*
1) $(b_n)_n$ *monoton şi nemărginit;*
2) $\dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \longrightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$.
Atunci $\dfrac{a_n}{b_n} \longrightarrow l$.

COROLARUL 1.1.14. *(Criteriul D'Alembert)*
Dacă $(a_n)_{n\geq 1} \subset (0, \infty)$ *cu* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow l \in [0, \infty]$, *atunci* $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow l$.

III. Limite remarcabile.

1. $$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & q \in (-1, 1); \\ 1, & q = 1; \\ \infty, & q > 1; \end{cases}$$

2. $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \Rightarrow \left[\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e\right]$$

şi:

a) $$\left[\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}} = e\right];$$

b) $$\left[\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + y_n)}{y_n} = 1\right];$$

c) $$\left[\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a^{y_n} - 1}{y_n} = \ln a\right];$$

d) $$\left[\lim_{n\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(1 + y_n)^r - 1}{y_n} = r\right], \ a > 0, \ r \in \mathbb{R}.$$

3. $$\left[\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1\right];$$ de aici:

a) $$\left[\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n} = 1\right];$$

b) $$\left[\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin x_n}{x_n} = 1\right];$$

c) $\left[\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x_n}{x_n} = 1\right]$.

IV. Puncte limită.

DEFINIŢIA 1.1.15. Fie un şir $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$. $l \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *punct limită al lui* $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R} \iff$ există un subşir $(a_{k_n})_{n\geq 1}$ al lui $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ cu $a_{k_n} \longrightarrow l$.

Se consideră

- $L_{(a_n)_{n\geq 1}}$ - *mulţimea punctelor limită ale lui* $(a_n)_{n\geq 1}$;
- $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n := \inf L_{(a_n)_{n\geq 1}}$ - *limita inferioară a lui* $(a_n)_{n\geq 1}$;
- $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n := \sup L_{(a_n)_{n\geq 1}}$ - *limita superioară a lui* $(a_n)_{n\geq 1}$.

Se mai utilizează şi scrierea $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ (sau $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$) în loc de $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ (sau $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$).

OBSERVAŢIA 1.1.16. Evident $-\infty \leq \liminf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n \leq \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n \leq \infty$ şi $(a_n)_n$ are limită $\iff \liminf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$.

PROPOZIŢIA 1.1.17. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ *şir de numere reale cu*

$$(a_n)_{n\geq 1} = \left(a_{k_n^1}\right)_{n\geq 1} \cup \left(a_{k_n^2}\right)_{n\geq 1} \cup \ldots \cup \left(a_{k_n^p}\right)_{n\geq 1},$$

unde $\left(a_{k_n^i}\right)_{n\geq 1}$, $i \in \{1, 2, \ldots p\}$ *subşiruri "disjuncte oricare două", cu* $a_{k_n^i} \to l_i$. *Atunci*

1) $L_{(a_n)_{n\geq 1}} = \{l_1, l_2, \ldots l_p\}$, *unde* $L_{(a_n)_{n\geq 1}}$ *este mulţimea punctelor limită ale şirului.*

2) $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = \inf\limits_{i\in\overline{1,p}} \{l_i\}$, $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = \sup\limits_{i\in\overline{1,p}} \{l_i\}$;

3) Dacă $L_{(a_n)_{n\geq 1}} = \{l\}$, *adică* $l_i = l$, $\forall i = \overline{1,p}$, *atunci şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *are limită şi aceasta este* l.

PROPOZIŢIA 1.1.18. *Fie* $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ *cu* $a_n \longrightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Atunci, pentru orice subşir* $(a_{k_n})_{n\geq 1}$ *al lui* $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$, *are loc* $a_{k_n} \longrightarrow l$.

V. Rapiditatea de convergenţă a unui şir.

DEFINIŢIA 1.1.19. Fie $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$, cu $a_n \longrightarrow 0$, $b_n \longrightarrow 0$. Se spune că $(a_n)_{n\geq 1}$ *converge mai rapid decât* $(b_n)_{n\geq 1} \iff \dfrac{a_n}{b_n} \to 0$. Se scrie $a_n << b_n$.

B. Şiruri în $\mathbb{R}^p$.

DEFINIŢIA 1.1.20. Fie un şir de vectori $(x^n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^p$,

$$x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_p^n), n \geq 1$$

şi $l = (l_1, l_2, \ldots, l_p) \in \mathbb{R}^p$.

a) Şirul de vectori $(x^n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^p$ se numeşte *convergent în* $\mathbb{R}^p$ (la l)

$$\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_\varepsilon)(||x^n - l|| < \varepsilon),$$

unde $||a|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2}$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$. l se numeşte *limita şirului* $(x^n)_{n\geq 1}$ (este unică cu proprietatea de mai sus). Se scrie $x^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}^p} l$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = l$ în $\mathbb{R}^p$.

b) Şirul de vectori $(x^n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^p$ se numeşte *Cauchy în* $\mathbb{R}^p \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n_\varepsilon)(||x_n - x_m|| < \varepsilon)$$

$$\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_\varepsilon)(\forall p \geq 1)(||x_{n+p} - x_n|| < \varepsilon).$$

OBSERVAŢIA 1.1.21. a) Are loc $x^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}^p} l \Longrightarrow ||x^n|| \longrightarrow ||l||$.

b) Au loc echivalenţele:

$$x^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}^p} l \Longleftrightarrow ||x^n - l|| \longrightarrow 0; x^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}^p} \mathbf{0} \Longleftrightarrow ||x^n|| \longrightarrow 0.$$

PROPOZIŢIA 1.1.22. *(Criteriul majorării pentru şiruri în $\mathbb{R}^p$). Fie şirurile $(x^n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^p$, $(y_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ şi $l \in \mathbb{R}^p$ cu $||x^n - l|| \leq y_n$, $n \geq k$ şi $y_n \longrightarrow 0$. Atunci $x^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}^p} l$.*

PROPOZIŢIA 1.1.23. *(Caracterizarea converegenţei în $\mathbb{R}^p$ "pe componente"). Fie un şir $(x^n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^p$, $x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_p^n)$, $n \geq 1$ şi $l = (l_1, l_2, \ldots, l_p)$. Atunci*

a) $x^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}^p} l \Longleftrightarrow \Big(\forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}\Big)\Big(x_i^n \xrightarrow[n]{} l_i\Big)$.

b) $(x^n)_{n\geq 1}$ *este Cauchy în* $\mathbb{R}^p \Longleftrightarrow$

$$\Big(\forall i = \overline{1,p}\Big)\Big((x_i^n)_{n\geq 1} \text{ este Cauchy în } \mathbb{R}\Big).$$

TEOREMA 1.1.24. *(Teorema lui Cauchy pt. şiruri în $\mathbb{R}^p$). Fie şirul $(x^n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^p$. Atunci*

$(x^n)_{n\geq 1}$ este convergent în $\mathbb{R}^p \Longleftrightarrow (x^n)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy în $\mathbb{R}^p$.

1.2. Exerciţii rezolvate

EXERCIŢIUL 1.2.1. a) Să se arate, cu definiţia, că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+3}{5n+7}=\dfrac{4}{5}$; b) Să se arate că şirul $a_n=\dfrac{2^n+(-2)^n}{2^n}$ nu are limită; c) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$; d) Analog $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, $a>0$; e) Demonstraţi că şirul $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ este convergent.

SOLUŢIE. a) Fie $a_n:=\dfrac{4n+3}{5n+7}$, $n\geq 1$. Avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{5n+7}=\frac{4}{5}\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)\,(\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}^*)\,(\forall n\geqslant N_\varepsilon)\left(\left|a_n-\frac{4}{5}\right|<\varepsilon\right).$$

Dar

$$\left|a_n-\frac{4}{5}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{4n+3}{5n+7}-\frac{4}{5}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{13}{5(5n+7)}<\varepsilon\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{25n+35}{13}>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow n>\frac{13}{25\varepsilon}-\frac{7}{5}.$$

Considerând $N_\varepsilon=\left[\dfrac{13}{25\varepsilon}-\dfrac{7}{5}\right]+1$, ($N_\varepsilon=1$ pentru $\dfrac{13}{25\varepsilon}-\dfrac{7}{5}<0$) avem: pentru orice $n\geqslant N_\varepsilon$, $n>\dfrac{13}{25\varepsilon}-\dfrac{7}{5}\Leftrightarrow\left|a_n-\dfrac{4}{5}\right|<\varepsilon$.

Deci:

$$(\forall\varepsilon>0)\left(\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}^*\left(N_\varepsilon=\left[\frac{13}{25\varepsilon}-\frac{7}{5}\right]+1\right)\right)(\forall n\geqslant N_\varepsilon)\left(\left|a_n-\frac{4}{5}\right|<\varepsilon\right),$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{5n+7}=\frac{4}{5}.$$

b) Avem $a_{2k}=2$, de unde $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=2$, apoi $a_{2k+1}=0$, de unde $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}=0$; deci şirul $(a_n)_n$ nu are limită, deoarece are două subşiruri care au limite distincte.

c) Notăm $\alpha_n=\sqrt[n]{n}-1$; evident $\alpha_n>0$, $\forall n\geqslant 2$. Avem $\sqrt[n]{n}=1+\alpha_n$, de unde

$$n=(1+\alpha_n)^n=1+C_n^1\alpha_n+C_n^2\alpha_n^2+\ldots+C_n^n\alpha_n^n>C_n^2\alpha_n^2,\ \forall n\geqslant 2.$$

Aşadar $0 < \alpha_n^2 < \dfrac{n}{C_n^2}$, sau $0 < \alpha_n < \sqrt{\dfrac{n}{C_n^2}}$, $\forall n \geqslant 2$, de unde, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n}{C_n^2}} = 0$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

d) Analog cu c).

e) Fie $x_n := \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ şi $y_n := \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \geq 1$. Ţinem cont de inegalitatea lui Cebâşev:

$$(1+t)^n > 1 + tn,\ \forall t \in (-1,0) \cup (0,\infty),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Avem:

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} : \left(\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{(n+1)^2}{n^2+2n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2}$$
$$= \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} > \left(1 + \frac{n+1}{n^2+2n}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} >$$
$$> \frac{n(n+2)^2+1}{n(n+2)^2} > 1,$$

de unde $(y_n)_n$ este strict descrescător. Cum $(y_n)_n$ este un şir de numere reale pozitive, rezultă că el este converegent. Fie $y \in \mathbb{R}$ limita sa.

Deasemenea

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} : \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} > \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = 1,$$

deci $(x_n)_n$ este strict crescător. Deoarece $x_n < y_n \leq y_1 = 4$, $\forall n \geq 1$, rezultă că $(x_n)_n$ este convergent; fie $x \in \mathbb{R}$ limita sa.

Dar, $\forall n \geq 1$, avem:

$$0 < y_n - x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{y_n}{n} \leq \frac{y_1}{n} \longrightarrow 0\,(n \longrightarrow \infty),$$

de unde $x = y$. Notăm cu $e := x = y$. Avem

$$2 = x_1 < e < y_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 < 3.$$

EXERCIŢIUL 1.2.2. Utilizând criteriul majorării, să se deducă limita şirurilor:

a) $x_n = \dfrac{\sin(n+1)}{n+1}$, $n \geq 1$; b) $x_n = \dfrac{1+\cos n^2}{2n+1}$, $n \geq 1$;

c) $x_n = \dfrac{n\cos n}{n^2+2}$, $n \geq 1$.

SOLUŢIE. a) Avem

$$|x_n| = \left|\frac{\sin(n+1)}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1} =: y_n,\ n \geq 1,$$

şi, deoarece $y_n \to 0$, rezultă, din criteriul majorării că $x_n \to 0$.

b) Din

$$|x_n| = \left|\frac{1+\cos n^2}{2n+1}\right| \leq \frac{2}{2n+1} =: y_n,\ n \geq 1,$$

şi $y_n \to 0$, rezultă, din nou, cu criteriul majorării, că $x_n \to 0$.

b) Cum

$$|x_n| = \left|\frac{n\cos n}{n^2+2}\right| \leq \frac{n}{n^2+2} =: y_n,\ n \geq 1,$$

şi $y_n \to 0$, cu criteriul majorării $x_n \to 0$. □

EXERCIŢIUL 1.2.3. a) Arătaţi că dacă $(a_n)_n$ este un şir de numere reale monoton şi nemărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

b) Arătaţi că dacă $(a_n)_n$ şi $(b_n)_n$ sunt şiruri de numere reale astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, iar $(b_n)_n$ este mărginit, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

c) (Criteriul raportului) Dacă a_n este un şir de numere reale pozitive cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, cu $l \in [0,1)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

SOLUŢIE. a) Presupunem că $(a_n)_n$ este crescător şi nemărginit. Din faptul că $(a_n)_n$ este nemărginit, rezultă:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*)\left(a_{N_\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

de unde în particular rezultă că $a_{N_\varepsilon} > 0$.

Din $(a_n)_n$ şir crescător, rezultă:

$$(\forall n \geqslant N_\varepsilon)\,(a_n \geqslant a_{N_\varepsilon}),$$

de unde, din ambele relaţii de mai sus, avem:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*)\,(\forall n \geqslant N_\varepsilon)\left(a_n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} < \varepsilon\right),$$

aşadar $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

b) Avem $(b_n)_n$ şir mărginit, deci $\exists M > 0$, cu $|b_n| < M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $(a_n)_n$ este convergent la 0, avem:

$$(\exists N_\varepsilon)\,(\forall n \geqslant N_\varepsilon)\left(|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}\right).$$

De aici şi din cele de mai sus rezultă:

$$(\forall n \geqslant N_\varepsilon)\left(|a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| < \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon\right).$$

Aşadar:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*)\,(\forall n \geqslant N_\varepsilon)\,(|a_n b_n| < \varepsilon),$$

deci $(a_n b_n)_n$ este convergent la 0.

c) considerăm $0 \leqslant l < q < 1$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, iar $(-1, q)$ este vecinătate a lui l, avem:

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*)\,(\forall n \geqslant n_0)\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} < q\right).$$

Scriem inegalitatea de mai sus pentru $n = n_0$, $n = n_0 + 1$, $n = n_0 + 2$,..., obţinem

$$a_{n_0+1} < q a_{n_0},\ a_{n_0+2} < q a_{n_0+1},\ \ldots a_n < q a_{n-1},$$

de unde, pentru $n \geqslant n_0$ arbitrar, avem:

$$a_n < q a_{n-1} < q^2 a_{n-2} < \ldots < q^{n-n_0} a_{n_0} = \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}\cdot q^n.$$

Deci:

$$(\forall n \geqslant n_0)\,(0 \leqslant a_n < K\cdot q^n),$$

unde $K = \dfrac{a_{n_0}}{q^{n_0}}$. De aici trecând la limită după n $(n \geqslant n_0)$, avem:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} k q^n = 0,$$

de unde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

EXERCIŢIUL 1.2.4. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} n^k\cdot q^n = 0$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ fixat, iar $q \in (-1, 1)$. Aplicaţii: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{n}{3^n} = 0$, etc.

SOLUŢIE. Deoarece $|q| < 1$, avem $|q| = \dfrac{1}{1+a}$, $a > 0$. Deasemenea, deoarece k este natural fixat, pentru $n \geqslant k+1$, putem scrie:

$$0 \leqslant n^k|q|^n = \frac{n^k}{(1+a)^n} = \frac{n^k}{1 + aC_n^1 + ... + a^kC_n^k + a^{k+1}C_n^{k+1} + ... + a^nC_n^n}$$
$$< \frac{n^k}{a^{k+1}C_n^{k+1}} = \frac{n^k}{a^{k+1}\dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-k)}{k!}},$$

şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^{k+1}\dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-k)}{k!}} = 0$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} n^k|q|^n = 0$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} n^kq^n = 0$ (s-a utilizat şi faptul că pentru un şir $(a_n)_n$ de numere reale $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$).

REMARCĂ. Se putea utiliza şi exerciţiul precedent, punctul c): luăm $a_n = n^k|q|^n$, iar $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^k \cdot |q| \to |q| \in [0,1)$, deci, conform cu exerciţiul precedent $\lim\limits_{n\to\infty} n^k|q|^n = 0$. □

EXERCIŢIUL 1.2.5. Să se calculeze limita şirului de termen general

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}},\ n \geqslant 0.$$

SOLUŢIE. Avem, pentru orice n natural şi $k = 0, 1, ... n$:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}},$$

de unde, prin sumare

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}},$$

adică

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant a_n \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

de unde, prin trecere la limită şi ştiind că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1,$$

obţinem

$$1 \leqslant \lim_{n\to\infty} a_n \leqslant 1,$$

aşadar
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$
□

EXERCIŢIUL 1.2.6. Să se calculeze limitele şirurilor:
a) $x_n = \dfrac{n^2+n+1}{2n^2+n-1}$, $n \geq 1$; b) $x_n = \dfrac{n+1}{n^2+n+2}$, $n \geq 1$;
c) $x_n = \dfrac{n^3-2n^2+3}{n-1-2n^2}$, $n \geq 1$; d) $x_n = \dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n^2}$, $n \geq 1$;
e) $x_n = \sqrt{n^2+1}-n$, $n \geq 1$; f) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{n^2+1}-n}$, $n \geq 1$;
g) $x_n = \sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}$, $n \geq 1$.

SOLUŢIE. La a), b), c), d) are loc nedeterminare ∞/∞. Se forţează factorul comun n "la puterea cea mai mare", apoi, după simplificare, se utilizează operaţii algebrice cu limite de şiruri.

a) Avem:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{2n^2+n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}} = \frac{1+0+0}{2+0-0} = \frac{1}{2}.$$

b) Analog cu a):
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{n\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)} = \frac{1+0}{\infty(1+0+0)} = 0.$$

c) Similar cu a) şi b):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-2n^2+3}{n-1-2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^3}\right)}{n^2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}-2\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^3}\right)}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}-2}=\frac{\infty(1-0+0)}{0-0-2}=-\infty.$$

d) Cum

$$1+3+\ldots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-n=$$

$$=n(n+1)-n=n^2,$$

avem

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n^2}=1.$$

La e), f) apar nedeterminări $\infty-\infty$, care se rezolvă prin "înmulţire cu conjugata" (de fapt se utilizează formula $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, pentru $a=\sqrt{\text{expresie1}}$ şi $b=\sqrt{\text{expresie2}}$). După calcule, se utilizează operaţii algebrice cu limite de şiruri.

e) Are loc

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1\right)}=\frac{1}{\infty(\sqrt{1+0}+1)}=0.$$

f) Analog cu e):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{n^2+1}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n-n^2)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{(n^2+1-n^2)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1\right)}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1\right)}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1\right)}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1} = \frac{\infty(\sqrt{1+0}+1)}{\sqrt{1+0}+1} = \infty.$$

g) Se ţine cont de formula $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ pentru $a = \sqrt[3]{n^2+1}$, $b = \sqrt[3]{n^2-1}$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1-n^2+1}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2} + \sqrt[3]{(n^2+1)(n^2-1)} + \sqrt[3]{(n^2-1)^2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{4/3}\left(\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)} + \sqrt[3]{\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^2}\right)}$$

$$= \frac{2}{\infty\left(\sqrt[3]{(1+0)^2} + \sqrt[3]{(1+0)(1-0)} + \sqrt[3]{(1-0)^2}\right)} = 0.$$

S-au utilizat operaţii algebrice cu limite de şiruri. □

EXERCIŢIUL 1.2.7. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} a_n$, pentru

a) $a_n = \dfrac{3^n+5^n}{3^{n+1}+5^{n+1}}$, $n \geq 1$;

b) $a_n = \dfrac{\alpha^n+\beta^n}{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}$, $n \geq 1$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$;

c) $a_n = \dfrac{2^n+3\cdot 4^n+5^n}{4^{n+1}+5^{n+1}}$, $n \geq 1$.

SOLUŢIE. a) Dând factor comun la numărator 5^n, iar 5^{n+1} la numitor şi simplificând, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\left(\dfrac{3}{5}\right)^n}{5\left[1+\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n+1}\right]} = \frac{1}{5}\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n+1}\right]} = \frac{1}{5}.$$

b) La subpunctul precedent am folosit faptul că $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$, mai precis $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, pentru $q \in (-1,1)$. Acest fapt ne sugerează considerarea următoarelor cazuri:

(1) Dacă $\alpha > \beta$, i.e. $0 < \dfrac{\beta}{\alpha} < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$, de unde:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n \cdot \left[1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right]}{\alpha^{n+1} \cdot \left[1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\left[1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right]}{\left[1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\right]} = \frac{1}{\alpha}.$$

(2) Dacă $\alpha < \beta$, i.e. $0 < \dfrac{\alpha}{\beta} < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n = 0$, de unde:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta^n \cdot \left[1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\right]}{\beta^{n+1} \cdot \left[1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\left[1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\right]}{\left[1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}\right]} = \frac{1}{\beta}.$$

(3) Dacă $\alpha = \beta$, atunci $a_n = \dfrac{2\alpha^n}{2\alpha^{n+1}} = \dfrac{1}{\alpha}$, de unde

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\alpha}.$$

În concluzie

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\max(\alpha, \beta)}.$$

c) Procedând ca la subpunctele anterioare, au loc egalităţile:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n \left[\left(\frac{2}{5}\right)^n + 3\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1\right]}{5^{n+1}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} + 1\right]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 3\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1}{5\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} + 1\right]} = \frac{0+0+1}{5(0+1)} = \frac{1}{5}.$$

S-au utilizat permanent operaţii algebrice cu limite de şiruri. □

EXERCIŢIUL 1.2.8. Să se calculeze limitele şirurilor:
a) $x_n = n \sin \dfrac{2\pi}{n}$, $n \geq 1$; b) $x_n = n\operatorname{tg}\left(\dfrac{n\pi + 1}{2n^2}\right)$, $n \geq 1$;

c) $x_n = n^2 \sin \dfrac{\pi}{3n} \arcsin \dfrac{2}{3n}$, $n \geq 1$; d) $x_n = n^3 \left(\cos \dfrac{\pi}{n} - \cos \dfrac{\pi}{n+1}\right)$, $n \geq 1$.

SOLUŢIE. Au loc nedeterminări de tip $\infty \cdot 0$. Se utilizează limitele remarcabile $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin x_n}{x_n} = 1$, pentru $x_n \to 0$, etc.

a) Avem:

$$\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{2\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \cdot 2\pi = 1 \cdot 2\pi = 2\pi.$$

b) Au loc egalităţile:

$$\lim_{n\to\infty} n \mathrm{tg} \left(\frac{n\pi+1}{2n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{n\pi+1}{2n^2}\right)}{\frac{n\pi+1}{2n^2}} \cdot \frac{n\pi+1}{2n^2} \cdot n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{tg}\left(\frac{n\pi+1}{2n^2}\right)}{\frac{n\pi+1}{2n^2}} \cdot \frac{n\pi+1}{2n} = 1 \cdot \pi/2 = \pi/2.$$

c) Se poate scrie

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{3n} \arcsin \frac{2}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{3n}}{\frac{\pi}{3n}} \cdot \frac{\arcsin \frac{2}{3n}}{\frac{2}{3n}} \cdot \frac{\pi}{3n} \cdot \frac{2}{3n} \cdot n^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{3n}}{\frac{\pi}{3n}} \cdot \frac{\arcsin \frac{2}{3n}}{\frac{2}{3n}} \cdot \frac{2\pi}{9} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2\pi}{9} = \frac{2\pi}{9}.$$

d) Se va utiliza şi formula $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$:

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} -2 \sin \frac{(2n+1)\pi}{2n(n+1)} \sin \frac{\pi}{2n(n+1)} =$$

$$= -2 \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi}{2n(n+1)}}{\frac{(2n+1)\pi}{2n(n+1)}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2n(n+1)}}{\frac{\pi}{2n(n+1)}} \cdot \frac{(2n+1)\pi}{2n(n+1)} \cdot \frac{\pi}{2n(n+1)} \cdot n^3 =$$

$$= -2 \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2n(n+1)}}{\dfrac{(2n+1)\pi}{2n(n+1)}} \cdot \frac{\sin\dfrac{\pi}{2n(n+1)}}{\dfrac{\pi}{2n(n+1)}} \cdot \frac{(2n+1)n\pi^2}{4(n+1)^2} =$$

$$= -2\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{2\pi^2}{4} = -\pi^2.$$

S-au utilizat permanent operaţii algebrice cu limite de şiruri. □

EXERCIŢIUL 1.2.9. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $x_n = \left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$, $n\geq 1$; b) $x_n = n\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$, $n \geq 1$;

c) $x_n = n\left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}\right)$, $n\geq 1$; d) $x_n = n\left[1-\left(\dfrac{n^3+2}{n^3+1}\right)^3\right]$, $n\geq 1$.

SOLUŢIE. La a) are loc nedeterminare 1^∞, iar la b), c), d) nedeterminare $\infty\cdot 0$.

a) Se adună şi se scade 1 la bază, utilizându-se limita remarcabilă $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$, pentru $x_n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}-1\right)^{\frac{n^2}{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2n}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2-n+1}{2n}}\right]^{\frac{2n}{n^2-n+1}\cdot\frac{n^2}{n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2-n+1}\cdot\frac{n^2}{n+1}} = e^2.$$

b) Se va utiliza limita $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+y_n)}{y_n} = 1$, pentru $y_n\to 0$:

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}{\dfrac{1}{n+1}}\cdot\frac{n}{n+1} = 1\cdot 1 = 1.$$

c) Se va utiliza limita remarcabilă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{y_n}-1}{y_n} = \ln a \ (a>0)$, pentru $y_n \to 0$:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{1/n}-1}{1/n}-\frac{2^{1/n}-1}{1/n}\right) =$$

$$= \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}.$$

d) Se va utiliza limita remarcabilă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+y_n)^r-1}{y_n} = r \ (r\in\mathbb{R})$, pentru $y_n \to 0$:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[1-\left(\frac{n^3+2}{n^3+1}\right)^3\right] = -\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n^3+1}\right)^3-1}{\dfrac{1}{n^3+1}}\cdot\frac{n}{n^3+1} =$$

$$= -3\cdot 0 = 0.$$

S-au utilizat permanent operaţii algebrice cu limite de şiruri. □

EXERCIŢIUL 1.2.10. Să se arate că şirul de termen general

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n,\ n\geqslant 1,$$

este descrescător şi mărginit inferior, deci convergent.

SOLUŢIE. Se ştie că

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ \forall n\geqslant 1,$$

de unde, prin logaritmare

$$n(\ln(n+1)-\ln n) < 1 < (n+1)(\ln(n+1)-\ln n),\ \forall n\geqslant 1,$$

sau

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1)-\ln n < \frac{1}{n},\ \forall n\geqslant 1.$$

Dînd lui n valorile 1, 2 ,..., k, $k\in\mathbb{N}^*$ arbitrar şi sumând aceste inegalităţi, obţinem:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k+1} < \ln(k+1)-\ln 1 < 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k},\ \forall k\geqslant 1,$$

de unde

$$a_{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k+1} - \ln(k+1) < 1$$

$$a_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} - \ln k > \ln(k+1) - \ln k > 0,$$

deci, $0 < a_k < 1$, $\forall\, k \geqslant 1$.

Pe de altă parte, tot din inegalităţile de mai sus, avem:

$$a_{k+1} - a_k = \frac{1}{k+1} - \ln(k+1) + \ln k < 0,\ \forall\, k \geqslant 1,$$

deci şirul este şi descrescător; fiind şi mărginit, va rezulta că el este convergent; limita sa se notează cu c şi se numeşte constanta lui Euler (se poate deduce că $c = 0,5772...$). □

EXERCIŢIUL 1.2.11. Să se arate că următoarele şiruri sunt convergente:

a) $a_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$, $n \geqslant 1$;

b) $a_n = \dfrac{n^k}{\alpha^n}$, $n \geqslant 1$, $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha > 1$;

c) $a_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}$, $n \geqslant 1$, $\alpha > 1$.

SOLUŢIE. a) Avem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1},$$

de unde, folosind faptul că $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < e$, $\forall\, n \geqslant 1$, rezultă:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{e}{n+1},\ \forall\, n \geqslant 1,$$

sau

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,\ \forall\, n \geqslant 2.$$

Aşadar şirul $(a_n)_n$ este strict descrescător şi, fiind şi de numere reale pozitive, avem:

$$0 < a_n \leq \max(a_1, a_2),\ \forall\, n \geqslant 1.$$

Deci şirul $(a_n)_n$ este convergent, fiind monoton şi mărginit. Fie $l \in \mathbb{R}$ limita sa. Din

$$a_{n+1} = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1},\ \forall\, n \geqslant 1,$$

prin trecere la limită, obţinem:

$$l = l \cdot e \cdot 0 = 0.$$

b) Se aplică Criteriul raportului (Exerciţiul 1.2.3-c):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k \to \frac{1}{\alpha}.$$

Cum $\frac{1}{\alpha} < 1$, rezultă $a_n \to 0$.

c) Avem:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha}{n+1}, \forall n \geqslant 1,$$

de unde deducem faptul că $(a_n)_n$ este strict descrescător începînd de la un rang $n_\alpha = [\alpha] + 1$ încolo. Fiind şir de numere reale strict pozitive, avem:

$$0 < a_n \leq \max(a_1, a_2, ..., a_{n_\alpha}), \forall n \geqslant 1,$$

deci şirul este şi mărginit, aşadar convergent; notînd cu l limita sa, din relaţia

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{\alpha}{n+1}, \forall n \geqslant 1,$$

prin trecere la limită obţinem:

$$l = l \cdot 0 = 0.$$

Se mai poate aplica şi Criteriul raportului (Exerciţiul 1.2.3-c), pentru a obţine aceeaşi concluzie.

Remarcă. Rezultatele de la b) şi c) se pot rescrie, în termeni de rapiditate de convergenţă a şirurilor, astfel:

$$\frac{1}{n!} << \frac{1}{\alpha^n} << \frac{1}{n^k}, \alpha > 1, k \in \mathbb{N}^*.$$

□

EXERCIŢIUL 1.2.12. Utilizînd criteriul lui Cauchy, să se studieze convergenţa şirurilor următoare:

a) $a_n = \dfrac{\sin x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{2^2} + ... + \dfrac{\sin nx}{2^n}, n \geqslant 1.$

b) $a_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}}, n \geqslant 1.$

SOLUŢIE. a) Fie $\varepsilon > 0$. Avem:

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}\right| + \left|\frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}}\right| + \ldots \left|\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{2^{p-1}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Deoarece

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \Leftrightarrow n \geqslant n_\varepsilon = \left[\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] + 1,$$

rezultă:

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon, \forall n \geqslant n_\varepsilon = \left[\log_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] + 1, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Aşadar:

$$(\forall \varepsilon > 0)\left(\exists n_\varepsilon = \left[\log_2\left(\varepsilon^{-1}\right)\right] + 1\right)(\forall n \geqslant n_\varepsilon)(\forall p \in \mathbb{N})\left(|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon\right),$$

de unde $(a_n)_n$ este şir Cauchy, deci, din criteriul lui Cauchy de convergenţă a şirurilor de numere reale, este şi convergent.

b) Se observă că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geqslant$$
$$\geqslant \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{n\ ori} = \frac{n}{\sqrt{2n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}},$$

deci, putem afirma că:

$$\left(\exists \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists n_1 = n)(\exists p = n)\left(|a_{2n} - a_n| \geqslant \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

aşadar, $(a_n)_n$ nu este şir Cauchy, deci nici convergent. □

EXERCIŢIUL 1.2.13. Să se calculeze limitele următoarelor şiruri, utilizând Lema Stolz-Cesaro sau Corolarul său (D'Alembert):

a) $x_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n}\right)$, $n \geqslant 1$;

b) $x_n = \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$, $n \geqslant 1$, ($p \in \mathbb{N}^*$ fixat);

c) $x_n = \dfrac{\ln n}{n^k}$, $n \geqslant 1$, ($k \in \mathbb{N}^*$ fixat);

d) $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}}$, $n \geqslant 1$;

e) $x_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, $n \geqslant 1$.

SOLUŢIE. a) Fie $a_n := 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots \dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$, $b_n := n$, $n \geqslant 1$. Evident $(b_n)_n$ este strict crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. În plus

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

deci, utilizând Lema Stolz-Cesaro, rezultă că $(x_n)_n = \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_n$ are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

b) Fie $a_n := 1^p + 2^p + \ldots + n^p$, $n \geqslant 1$, $b_n := n^{p+1}$, $n \geqslant 1$. Avem că $(b_n)_n$ este strict crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. În plus

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} =$$

$$= \frac{n^p + C_p^1 n^{p-1} + \ldots}{n^{p+1} + C_{p+1}^1 n^p + C_{p+1}^2 n^{p-1} + \ldots - n^{p+1}} =$$

$$= \frac{n^p + p\,n^{p-1} + \ldots + 1}{(p+1)n^p + C_{p+1}^2 n^{p-1} + \ldots + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{p+1},$$

de unde, utilizând Lema Stolz-Cesaro, rezultă că $(x_n)_n = \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_n$ are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{p+1}$.

c) Fie $a_n := \ln n$, $n \geqslant 1$, $b_n := n^k$, $n \geqslant 1$. Evident $(b_n)_n$ este strict crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Evaluăm $\dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\ln(n+1) - \ln n}{(n+1)^k - n^k} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{k\,n^{k-1} + \ldots}.$$

Evident $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = 0$, de unde, utilizând Lema Stolz-Cesaro, rezultă că $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_n$ are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

d) Fie $a_n := \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$, $n \geq 1$. Cum $a_n > 0$, $n \geq 1$ iar

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \to 4,$$

din criteriul D'Alembert se obţine

$$\sqrt[n]{a_n} = x_n \to 4.$$

e) Cum $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$, $n \geqslant 1$, se notează $a_n := \dfrac{n!}{n^n}$, $n \geq 1$. Deoarece $a_n > 0$, $n \geq 1$ iar

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e},$$

din criteriul D'Alembert se obţine

$$\sqrt[n]{a_n} = x_n \to \frac{1}{e}.$$

□

EXERCIŢIUL 1.2.14. Să se determine

$$\inf_{n\in\mathbb{N}^*} a_n, \sup_{n\in\mathbb{N}^*} a_n, \liminf_{n\in\mathbb{N}^*} a_n, \limsup_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$$

pentru şirurile:

a) $a_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$, $n \geqslant 1$;

b) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1} \cos n\pi$, $n \geqslant 1$;

c) $a_n = \dfrac{1}{n} \cdot n^{(-1)^n} + \sin \dfrac{n\pi}{2}$, $n \geqslant 1$.

SOLUŢIE. a) Observăm că:

$$a_{2k} = \frac{2k+1}{2k-1},\ \forall k \geqslant 1;\ a_{2k} \to 1;$$

$$a_{2k+1} = \frac{2k}{2k+2},\ \forall k \geqslant 0;\ a_{2k+1} \to 1;$$

deci şirul $(a_n)_n$ are două subşiruri pentru care reuniunea mulţimilor termenilor lor este egală cu mulţimea termenilor şirului, iar intersecţia este mulţimea vidă, aceste subşiruri având aceeaşi limită; de aici deducem cu 1.1.17, că şirul iniţial are limita 1.

Deci

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = \limsup_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = 1.$$

Deasemenea, deoarece

$$a_{2k+1} = \frac{2k}{2k+2} = 1 - \frac{2}{2k+2} \leqslant 1 \leqslant 1 + \frac{2}{2p-1} = \frac{2p+1}{2p-1} = a_{2p},\ k \geqslant 0, p \geqslant 1,$$

şi, cum evident $a_{2k+1} \leqslant a_{2k+3}$, $\forall\, k \geqslant 0$, $a_{2p} \geqslant a_{2p+2}$, $\forall\, p \geqslant 1$, rezultă:

$$0 \quad a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_{2k+1} \leqslant a_{2k+3} \leqslant 1 \leqslant a_{2p+2} \leqslant a_{2p} \leqslant \ldots \leqslant a_2 = 3.$$

Aşadar

$$\inf_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = 0,\ \sup_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = 3.$$

b) Avem:

$$a_{2k} = \frac{2k-1}{2k+1},\ (a_{2k})_k \ \text{strict crescător},\ \lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1$$

$$a_{2k+1} = -\frac{2k}{2k+2},\ (a_{2k+1})_k \ \text{strict descrescător},\ \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = -1,$$

deci

$$-1 \leqslant a_{2k+3} \leqslant a_{2k+1} \leqslant a_{2p} \leqslant a_{2p+2} \leqslant 1,\ \forall k \geqslant 0,\ p \geqslant 1.$$

Intuim că $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = -1$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = 1$.

Într-adevăr, -1 este minorant pentru mulţimea termenilor şirului; orice alt $m > -1$ nu poate fi minorant pentru mulţimea termenilor şirului, deoarece va exista întotdeauna un număr $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a_{2k+1} = -\dfrac{2k}{2k+2} < m$ (deoarece $-\dfrac{2k}{2k+2} < m \Leftrightarrow 2k(m+1) > -2m$, şi cum $m > -1$, aceasta este echivalent cu $k > -\dfrac{2m}{2(m+1)}$). Analog 1 este majorant pentru mulţimea termenilor şirului şi orice alt $M < 1$ am lua el nu poate fi majorant (ca mai sus).

Pe de altă parte, notând $A := \{\, a_n \,|\, n \in \mathbb{N}^* \}$, $A_1 := \{\, a_{2k} \,|\, k \in \mathbb{N}^* \}$, $A_2 = \{\, a_{2k+1} \,|\, k \in \mathbb{N}^* \}$, observăm că $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$; deoarece $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 1$, iar $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = -1$, ţinând cont şi de cele spuse mai sus, rezultă, cu 1.1.17, că $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = -1$ şi $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = 1$.

c) Se observă că:

$$
\begin{aligned}
a_{4k} &= 1 + \sin 2k\pi = 1,\\
a_{4k+1} &= \frac{1}{(4k+1)^2} + \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{1}{(4k+1)^2}\\
a_{4k+2} &= 1 + \sin\left((2k+1)\pi\right) = 1,\\
a_{4k+3} &= \frac{1}{(4k+3)^2} + \sin\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -1 + \frac{1}{(4k+3)^2}.
\end{aligned}
$$

Rezultă, cu 1.1.17, că $L_{(a_n)_n} = \{-1, 1\}$, ($L_{(a_n)_n}$ este mulţimea punctel limită ale şirului); deci $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = -1$, $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = 1$. Se mai poate verifica simplu că $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = -1$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = 2$. □

1.3. Exerciţii propuse

EXERCIŢIUL 1.3.1. a) Să se arate, pornind de la definiţie, că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{9n-1} = \frac{2}{9},\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n-1} = 0.$$

b) Să se arate, pornind de la definiţie, că $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+1) = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} -\sqrt{n}$ $-\infty$;

c) Să se arate că următoarele şiruri nu au limită:

i) $a_n = \dfrac{n + (-1)^n n}{n}$, $n \geq 1$;

ii) $a_n = \sin(3n\pi/2)$, $n \geq 1$;

iii) $a_n = \left(1 + n \sin \dfrac{n\pi}{2}\right) \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$.

EXERCIŢIUL 1.3.2. Utilizând criteriul majorării, să se deducă limita şirurilor:

a) $x_n = \dfrac{2n+1}{3n^2+n+1}$, $n \geq 1$; b) $x_n = \dfrac{n^2}{2n^2+3n+5}$, $n \geq 1$;

c) $x_n = \dfrac{1}{n}(\sin\sqrt{n^2+1} + \cos\sqrt{n^2-1})$, $n \geq 1$; d) $x_n = \dfrac{3^n}{1+4^n}$, $n \geq 1$.

EXERCIŢIUL 1.3.3. Utilizând eventual exerciţiile 1.2.3 şi 1.2.4, să se calculeze limitele şirurilor:

a) $a_n = \dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot [2 + 3(n-1)]}{5 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \ldots [5 + 5(n-1)]}$, $n \geq 1$;

b) $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n n!}$, $n \geq 1$;

c) $a_n = (0,99)^n n^2 \sin\sqrt{n+1} + \frac{n(2n+1)}{(n+2)(3n+1)} + (0,87)^n \frac{n^3}{n^2+1}$, $n \geq 1$;

d) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{3^n} + \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$;

e) $a_n = \frac{(-1)^n n^3}{n^2+1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}\right)^n$, $n \geq 1$.

EXERCIŢIUL 1.3.4. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $x_n = \frac{2n^3+2n+1}{n^3-2n+4}$, $n \geq 1$; b) $x_n = \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}$, $n \geq 1$;

c) $x_n = \frac{(n+2)^3-n^3}{(n+2)^4-n^4}$, $n \geq 1$;

d) $x_n = \frac{1\cdot 3+2\cdot 4+\ldots+n(n+2)}{(n+1)+(n+2)+\ldots+2n}$, $n \geq 1$;

e) $x_n = \sqrt{n^2+n}-n$, $n \geq 1$;

f) $x_n = \sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$, $n \geq 1$;

g) $x_n = \sqrt{n^4+n^2+1}-n^2-n$, $n \geq 1$;

h) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}-2\sqrt{n^2-n+1}}{n}$, $n \geq 1$;

i) $a_n = \sqrt[3]{n^2}\left[\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}\right]$, $n \geq 1$.

EXERCIŢIUL 1.3.5. Procedând eventual ca la exerciţiul 1.2.7, să se calculeze limitele următoarelor şiruri:

a) $a_n = \frac{2^n}{1+2^n+3^n}$, $n \geq 1$; b) $a_n = \frac{2^{2n+1}+3^n+1}{2^n+4^n}$, $n \geq 1$;

c) $a_n = \frac{3^n+2^n\cdot 5^{n+1}}{10^{n+1}+3^n}$, $n \geq 1$; d) $a_n = \frac{2^n+2\cdot 3^n+3\cdot 5^n}{3^n+3\cdot 4^n+5\cdot 5^n}$, $n \geq 1$;

e) $a_n = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)\left(\frac{3\cdot 2^n+(-1)^n}{2^n}\right)$, $n \geq 1$;

f) $a_n = \frac{3^n+(-3)^n}{2^{2n}}$, $n \geq 1$.

EXERCIŢIUL 1.3.6. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $x_n = n^2 \sin\frac{\pi}{n^2+n+1}$, $n \geq 1$; b) $x_n = n^2\left(1-\cos\frac{\pi}{3n}\right)$, $n \geq 1$;

c) $x_n = \sqrt{n}\arcsin(\sqrt{n^2+1}-n)$, $n \geq 1$;

d) $x_n = n\left(\arcsin\frac{\pi}{n+1}-\operatorname{tg}\frac{n\pi}{n^2+1}\right)$, $n \geq 1$.

EXERCIŢIUL 1.3.7. Să se calculeze limitele şirurilor:

a) $x_n = \left(\dfrac{n^2+2n}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n+1}{\sqrt{n}}}$, $n \geq 1$;

b) $x_n = \left(3\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}\right)^{\frac{n^2+n+1}{n+2}}$, $n \geq 1$;

c) $x_n = n^2 \ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right) \ln\left(\dfrac{3n+1}{3n+2}\right)$, $n \geq 1$;

d) $x_n = \dfrac{\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{4}-\sqrt[n]{3}}$, $n \geq 1$; e) $x_n = n\left[\left(1+\sin\dfrac{\pi}{2n}\right)^4 - 1\right]$, $n \geq 1$.

EXERCIŢIUL 1.3.8. Utilizând criteriul lui Cauchy să se studieze convergenţa şirurilor:

a) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$, $n \geq 1$;

b) $a_n = 1 + \dfrac{10}{1} + \dfrac{11}{3} + \ldots + \dfrac{10+n}{2n+1}$, $n \geq 1$;

c) $a_n = \sin n$;

d) $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{[1+3(n-1)][1+3n]}$, $n \geq 1$.

EXERCIŢIUL 1.3.9. Să se arate, cu ajutorul criteriului cleştelui, că şirurile următoare sunt convergente:

a) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$, $n \geqslant 1$;

b) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{k^2}{n^3}}-1\right)$, $n \geqslant 1$.

EXERCIŢIUL 1.3.10. Utilizând eventual exerciţiul 1.2.10, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

EXERCIŢIUL 1.3.11. Să se deducă converegnţa următoarelor şiruri, arătând în prealabil că sunt monotone şi mărginite:

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\ldots(2+\sqrt{n})}$, $n \geqslant 1$;

b) $a_n = \dfrac{2^n}{(n!)^2}$, $n \geqslant 1$;

c) $a_n = 2^{-\sqrt{n^2+1}}$, $n \geqslant 1$.

EXERCIŢIUL 1.3.12. Utilizând criteriul Stolz-Cesaro, sau corolarul său, criteriul D'Alembert, să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{2n^5+1}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{n^n}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^k}-\dfrac{n}{k+1}\right)$; $k\in\mathbb{N}^*$ fixat;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2^2\sqrt{2}+3^2\sqrt{3}+\ldots+n^2\sqrt{n}}{n(n+1)(2n+1)}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k+3^k+\ldots+(2n+1)^k}{n^{k+1}}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n(n+1)\cdot\ldots\cdot(2n)}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln 2\cdot\ln 3\cdot\ldots\ln n}$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n}$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2\cdot 8^n}}$.

EXERCIŢIUL 1.3.13. Să se determine $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$, $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ şi $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ pentru şirurile:

a) $a_n=\dfrac{2+(-1)^n}{n}$, $n\geqslant 1$;

b) $a_n=\dfrac{n+1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$, $n\geqslant 1$;

c) $a_n=(-1)^n\cdot\dfrac{n+1}{n}+\cos\dfrac{n\pi}{3}$, $n\geqslant 1$;

d) $a_n=\dfrac{n+1}{n}+\sin\dfrac{2n\pi}{3}$, $n\geqslant 1$;

e) $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot\left[\dfrac{1}{2}+(-1)^n\right]+\cos n\dfrac{\pi}{2}$, $n\geqslant 1$.

f) $a_n=\dfrac{n+1}{2n}\sin\dfrac{n\pi}{4}$, $n\geqslant 1$.

CAPITOLUL 2

Serii de numere reale

2.1. Noţiuni şi rezultate teoretice

I. Generalităţi.

Pentru un şir $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$, se pune problema "sumării în ordine a termenilor săi".

DEFINIŢIA 2.1.1. Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$.

i) 0) Cuplul $((x_n)_{n\geq 1}, (s_n)_{n\geq 1})$, unde $s_n = x_1+x_2+\ldots+x_n$, $n \geq 1$, se numeşte *serie de numere reale de termen general* $(x_n)_{n\geq 1}$ şi se notează $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$. $(s_n)_n$ se numeşte *şirul sumelor parţiale asociat lui* $(x_n)_n$.

1) Seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ se numeşte *convergentă* $\Longleftrightarrow$ $(s_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

2) Seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ se numeşte *divergentă* $\Longleftrightarrow$ $(s_n)_{n\geq 1}$ este divergent.

Se disting două situaţii: a) $(s_n)_{n\geq 1}$ are totuşi limită, dar infinită; b) $(s_n)_{n\geq 1}$ nu are limită.

ii) În situaţiile 1) şi 2)a) $s := \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ se notează cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ şi se numeşte *suma seriei.* În situaţia 2)b) seria se numeşte *oscilantă.*

iii) "Serie cu termeni pozitivi" se va prescurta STP.

OBSERVAŢIA 2.1.2. a) Dacă $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă, atunci $x_n \longrightarrow 0$.

b) Dacă $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ STP, atunci ea are sumă şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \in [0, \infty]$.

c) A "adăuga" sau a "scoate" un număr finit de termeni de la o serie nu-i afectează natura, ci doar suma, cu suma termenilor adăugaţi sau scoşi.

TEOREMA 2.1.3. *(Criteriul general de convergenţă a seriilor-Cauchy).*

Seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ *este convergentă* $\iff$

$\Big(\forall\,\varepsilon > 0\Big)\Big(\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\Big)\Big(\forall\, n \geq n_\varepsilon, p \geq 1\Big)\Big(|x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}| < \varepsilon\Big).$

II. Serii cu termeni pozitivi.

PROPOZIŢIA 2.1.4. *(Criteriul comparaţiei "cu inegalităţi"). Fie* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *şi* $\sum_{n\geq 1} y_n$ *STP astfel încât* $0 \leq x_n \leq y_n$, $n \geq k$. *Atunci*

a) $\sum_{n\geq 1} y_n$ *convergentă* $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} x_n$ *convergentă;*

b) $\sum_{n\geq 1} x_n$ *divergentă* $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} y_n$ *divergentă.*

PROPOZIŢIA 2.1.5. *(Criteriul comparaţiei "cu limită"). Fie* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *şi* $\sum_{n\geq 1} y_n$ *STP astfel încât există limita şirului* $\dfrac{x_n}{y_n}$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l \in (0,\infty)$. *Atunci seriile* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *şi* $\sum_{n\geq 1} y_n$ *au aceeaşi natură* $\Big($*prescurtat* $\sum_{n\geq 1} x_n \sim \sum_{n\geq 1} y_n\Big)$.

PROPOZIŢIA 2.1.6. *(Criteriul condensării). Fie* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *STP astfel încât* $x_n \searrow 0$. *Atunci* $\sum_{n\geq 1} x_n \sim \sum_{n\geq 1} 2^n \cdot x_{2^n}$.

OBSERVAŢIA 2.1.7. (Serii de referinţă). În criteriile de comparaţie anterioare "se compară" seria de studiat cu o alta, despre care se cunoaşte natura. Aceasta se alege de obicei din una din următoarele clase:

I. *Seria geometrică* $\sum_{n\geq 0} q^n$, $q \in \mathbb{R}$, este

a) convergentă pentru $q \in (-1, 1)$, cu suma $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$;

b) divergentă cu suma $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$ pentru $q \in [1, \infty)$;

c) oscilantă pentru $q \in (-\infty, -1]$.

II. *Seria armonică* $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, este

a) convergentă pentru $\alpha > 1$;

b) divergentă (evident cu suma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \infty$) pentru $\alpha \leq 1$.

PROPOZIŢIA 2.1.8. *(Criteriul radicalului). Fie* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *STP astfel încât există limita şirului* $\sqrt[n]{x_n}$ *şi* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$. *Atunci*

a) $l < 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ *convergentă;*

b) $l > 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ *divergentă;*

c) pentru $l = 1$, *nu se poate spune nimic despre natura seriei.*

PROPOZIŢIA 2.1.9. *(Criteriul raportului). Fie* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *STP astfel încât există limita şirului* $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ *şi* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$. *Atunci*

a) $l < 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ *convergentă;*

b) $l > 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ *divergentă;*

c) pentru $l = 1$, *nu se poate spune nimic despre natura seriei.*

PROPOZIŢIA 2.1.10. *(Criteriul Raabe-Duhamel). Fie* $\sum_{n\geq 1} x_n$ *STP astfel încât există limita şirului* $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$ *şi* $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l$. *Atunci*

a) $l < 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ *divergentă;*

b) $l > 1 \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} x_n$ *convergentă;*

c) pentru $l = 1$, *nu se poate spune nimic despre natura seriei.*

III. Serii de numere reale arbitrare.

Fie $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ şir de numrere reale arbitrare.

OBSERVAŢIA 2.1.11. 1) Seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ se numeşte *absolut convergentă* $\Longleftrightarrow$ seria $\sum\limits_{n\geq 1} |x_n|$ este convergentă. Se verifică simplu că orice serie absolut convergentă este convergentă. Studiul absolut convergenţei se realizează utilizând criteriile de convergenţă pentru STP.

2) Seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ se numeşte *semiconvergentă* $\Longleftrightarrow$ este convergentă şi neabsolut convergentă. Pentru studiul semiconvergenţei se vor utiliza în special unul din criteriile următoare.

3) Se poate defini noţiunea de absolut convergenţă şi pentru serii de numere complexe; orice serie absolut convergentă este convergentă.

PROPOZIŢIA 2.1.12. *(Criteriul Abel). Fie seria* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$, *cu* $x_n = \alpha_n \cdot u_n$, $n \geq 1$. *Dacă* $\alpha_n \searrow 0$ *şi şirul* $(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)_{n\geq 1}$ *este mărginit, atunci seria* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ *este convergentă.*

PROPOZIŢIA 2.1.13. *(Criteriul Leibniz). Fie seria* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$, *cu* $x_n = (-1)^n \alpha_n$, $n \geq 1$. *Dacă* $\alpha_n \searrow 0$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ *este convergentă.*

PROPOZIŢIA 2.1.14. *(Operaţii algebrice cu serii). Fie seriile convergente* $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$, $\sum\limits_{n\geq 1} y_n$, $z_n := x_1 y_{n-1} + x_2 y_{n-2} + \ldots + x_{n-1} y_1$, $n \geq 1$ *şi* $\alpha \in \mathbb{R}^*$. *Atunci*

a) seriile $\sum\limits_{n\geq 1}(x_n + y_n)$ *şi* $\sum\limits_{n\geq 1}(\alpha x_n)$ *sunt convergente şi*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha x_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

b)(Maertens) dacă în plus, cel puţin una din seriile $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\geq 1} y_n$ *este absolut convergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n\geq 1} z_n$ *este convergentă şi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n\right).$$

DEFINIŢIA 2.1.15. Fie seria $\sum_{n\geq 1} x_n$. Pentru fiecare $n \geq 1$, se notează cu R_n suma seriei următoare (dacă există):

$$R_n := x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p} + \ldots .$$

Pentru fiecare $n \geq 1$, R_n se numeşte *restul de ordin n al seriei* $\sum_{n\geq 1} x_n$.

Şirul $(R_n)_{n\geq 1}$ se numeşte *restul seriei* $\sum_{n\geq 1} x_n$.

OBSERVAŢIA 2.1.16. Din Criteriul general al lui Cauchy de convergenţă a seriilor rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este convergentă $\Longleftrightarrow R_n \to 0$.

DEFINIŢIA 2.1.17. Fie seriile numerice convergente $\sum_{n\geq 1} x_n$, $\sum_{n\geq 1} y_n$. Se spune că seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este mai rapid convergentă decât seria $\sum_{n\geq 1} y_n$ $\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{r_n}{R_n}$, unde $(r_n)_n$ şi $(R_n)_n$ sunt resturile seriilor $\sum_{n\geq 1} x_n$, $\sum_{n\geq 1} y_n$.

OBSERVAŢIA 2.1.18. Se poate demonstra că dacă seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este mai rapid convergentă decât seria $\sum_{n\geq 1} y_n$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

PROPOZIŢIA 2.1.19. *(Transformarea lui Euler). Fie seria convergentă* $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} u_n$, $u_n \in \mathbb{R}$. *Atunci seria* $\sum_{n\geq 2} (-1)^{n-1} \frac{u_n - u_{n-1}}{2}$ *este convergentă, având aceeaşi sumă cu seria iniţială.*

OBSERVAŢIA 2.1.20. Prin transformarea lui Euler, unele serii se transformă în serii mai rapid convergente.

2.2. Exerciţii rezolvate

EXERCIŢIUL 2.2.1. Să se calculeze suma seriilor:

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2-1}}$; 2. $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+1}$; 3. $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

SOLUŢIE. 1. Pt. $x_n := \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{4n^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $n \geq 1$, se obţine

$$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \ldots +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2n-3}} - \frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \longrightarrow 1,$$

de unde rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este convergentă şi are suma $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1$.

2. Deoarece $x_n := \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1 \neq 0$, rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este divergentă şi, fiind serie cu termeni pozitivi, are suma $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$.

3. Pentru $x_n := \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{n}{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$, $n \geq 2$, se obţine

$$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{3}{4} + \ldots +$$

$$+\ln\left(\frac{n-2}{n-1}\right) - \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) =$$

$$= \ln\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \longrightarrow \ln\frac{1}{2},$$

de unde rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este convergentă şi are suma $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \ln\frac{1}{2}$. □

EXERCIŢIUL 2.2.2. Studiaţi convergenţa seriilor:
a) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$; b) $\sum_{n\geq 1} n\sin\frac{1}{n}$; c) $\sum_{n\geq 1}\frac{4n-1}{3n+2}$.

SOLUŢIE. Se utilizează Observaţia 2.1.2 (condiţia necesară pentru convergenţa unei serii):

a) Deoarece $x_n := \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$ şi $e \neq 0$, rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

b) Cum $x_n := n\sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1$ şi $1 \neq 0$, rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

c) Din $x_n := \frac{4n-1}{3n+2} \to 4/3$ şi $4/3 \neq 0$, rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este divergentă. □

EXERCIŢIUL 2.2.3. Studiaţi convergenţa seriilor:
a) $\sum_{n\geq 1}\sin\frac{1}{n^4}$; b) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{3n^2+5n+8}$; c) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n^5+n+1}}$;
d) $\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt[3]{2n^5+n+1}+n+3}{4n^2-3n+1}$; e) $\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$;
f) $\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt[3]{2n^2+3}}{\sqrt[4]{3n^3+1}+2}$.

SOLUŢIE. La a), b) şi c) se observă inegalităţi simple între termenul general al seriei de studiat şi termenul unei alte serii a cărei natură se cunoaşte:

a) Se ştie că $\sin x < x$, pentru $x > 0$, de unde

$$\sin\frac{1}{n^4} < \frac{1}{n^4},\ n \geq 1.$$

Cum seria $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}$ este convergentă (serie armonică cu $\alpha = 4 > 1$), din criteriul comparaţiei "cu inegalităţi" rezultă că şi seria $\sum_{n\geq 1}\sin\frac{1}{n^4}$ este convergentă.

b) Are loc inegalitatea evidentă

$$\frac{1}{3n^2+5n+8} < \frac{1}{3n^2},\ n \geq 1.$$

Cum seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergentă (seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ este serie armonică cu $\alpha = 2 > 1$), din criteriul comparaţiei "cu inegalităţi" rezultă că şi seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3n^2+5n+8}$ este convergentă.

c) Din inegalitatea evidentă

$$\frac{1}{\sqrt{n^5+n+1}} < \frac{1}{n^{5/2}},\ n \geq 1$$

şi faptul că seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{5/2}}$ este convergentă (serie armonică cu $\alpha = 5/2 > 1$), utilizând criteriul comparaţiei "cu inegalităţi" rezultă că şi seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^5+n+1}}$ este convergentă.

La d), e) şi f) nu se mai observă inegalităţi simple între termenul general al seriei de studiat şi termenul unei alte serii. Se încearcă totuşi aplicarea criteriului comparaţiei "cu limită":

d) Fie $x_n := \frac{\sqrt[3]{2n^5+n+1}+n+3}{4n^2-3n+1}$, $y_n := \frac{1}{n^{1/3}}$, $n \geq 1$. Ideea de a considera această serie vine din faptul că diferenţa "gradelor" cantităţilor de la numitor şi numărător este $2 - 5/3 = 1/3$. Deoarece

$$\frac{x_n}{y_n} = \left(n^{1/3}\right)\frac{\sqrt[3]{2n^5+n+1}+n+3}{4n^2-3n+1} \longrightarrow \frac{\sqrt[3]{2}}{4} \in (0,\infty),$$

utilizând criteriul comparaţiei "cu limită" rezultă că

$$\sum_{n\geq 1} x_n \sim \sum_{n\geq 1} y_n.$$

Cum seria $\sum_{n\geq 1} y_n$ este divergentă (serie armonică cu $\alpha = 1/3 \leq 1$) rezultă că şi seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

e) Fie $x_n := \ln\left(1+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$, $y_n := \dfrac{1}{n^{3/2}}$, $n \geq 1$. Cum

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{\dfrac{1}{n\sqrt{n}}} \longrightarrow 1 \in (0,\infty),$$

cu ajutorul criteriului comparaţiei "cu limită" rezultă că

$$\sum_{n\geq 1} x_n \sim \sum_{n\geq 1} y_n.$$

Dar seria $\sum\limits_{n\geq 1} y_n$ este convergentă (serie armonică cu $\alpha = 3/2 > 1$), deci şi seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă.

f) Fie $x_n := \dfrac{\sqrt[3]{2n^2+3}}{\sqrt[4]{3n^3+1}+2}$. Procedând analog cu d) se consideră $y_n := \dfrac{1}{n^{1/12}}$, $n \geq 1$. Deoarece

$$\frac{x_n}{y_n} = \left(n^{1/12}\right)\frac{\sqrt[3]{2n^2+3}}{\sqrt[4]{3n^3+1}+2} \longrightarrow \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3}} \in (0,\infty),$$

utilizând criteriul comparaţiei "cu limită" rezultă că

$$\sum_{n\geq 1} x_n \sim \sum_{n\geq 1} y_n.$$

Cum seria $\sum\limits_{n\geq 1} y_n$ este divergentă (serie armonică cu $\alpha = 1/12 \leq 1$) rezultă că şi seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este divergentă. □

EXERCIŢIUL 2.2.4. Studiaţi convergenţa seriilor:

a) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n^n}{n!\cdot 3^n}$; b) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot(4n-3)}{1\cdot 6\cdot 11\cdot \ldots \cdot (5n-4)}$; c) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n!}{5^n}$;

d) $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{(\ln n)^n}$; e) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\dfrac{5n-1}{4n+3}\right)^n$; f) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(n(\sqrt[n]{2}-1)\right)^n$.

SOLUŢIE. Pentru subpunctele a), b) şi c) se va aplica criteriul raportului, iar pentru restul criteriul radicalului.

a) Fie $x_n := \dfrac{n^n}{n! \cdot 3^n}$, $n \geq 1$. Deoarece

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)! \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot 3^n}{n^n} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to \frac{e}{3},$$

iar $\dfrac{e}{3} < 1$, cu criteriul raportului rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă.

b) Fie $x_n := \dfrac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (5n-4)}$, $n \geq 1$. Cum

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-3) \cdot (4n+1)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (5n-4) \cdot (5n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (5n-4)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-3)} =$$

$$= \frac{4n+1}{5n+1} \to \frac{4}{5},$$

şi $\dfrac{4}{5} < 1$, din criteriul raportului rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă.

c) Se consideră $x_n := \dfrac{n!}{5^n}$, $n \geq 1$. Deoarece

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n!} = \frac{n+1}{5} \longrightarrow \infty,$$

utilizând criteriul raportului rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

d) Fie $x_n := \dfrac{1}{(\ln n)^n}$, $n \geq 2$. Din

$$\sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{\ln n} \longrightarrow 0$$

şi $0 < 1$, cu criteriul radicalului rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă.

e) Fie $x_n := \left(\dfrac{5n-1}{4n+3}\right)^n$, $n \geq 1$. Deoarece

$$\sqrt[n]{x_n} = \frac{5n-1}{4n+3} \longrightarrow \frac{5}{4}$$

şi $\dfrac{5}{4} > 1$, din criteriul radicalului rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

f) Se notează $x_n := \left(n(\sqrt[n]{2}-1)\right)^n$, $n \geq 1$. Cum

$$\sqrt[n]{x_n} = n(\sqrt[n]{2}-1) = \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \longrightarrow \ln 2,$$

iar $\ln 2 < 1$, folosind criteriul radicalului rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă. □

EXERCIŢIUL 2.2.5. a) Seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^k}{a^n}$ este convergentă dacă $a > 1$ şi divergentă dacă $0 < a \leq 1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

b) Seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\alpha^n}{n!}$ este absolut convergentă, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

SOLUŢIE. a) Fie $x_n := \frac{n^k}{a^n}$. Se aplică criteriul raportului:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^k} = \frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k \longrightarrow \frac{1}{a}.$$

- Dacă $a > 1$, atunci $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă.
- Dacă $a < 1$, atunci $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.
- Dacă $a = 1$, seria devine: $\sum\limits_{n\geq 1} n^k$, evident divergentă.

b) Fie $a_n := \frac{\alpha^n}{n!}$. Atunci $|a_n| = \frac{|\alpha|^n}{n!}$.
Se aplică criteriul raportului:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|\alpha|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|\alpha|^n} = \frac{|\alpha|}{n+1} \xrightarrow[n]{} 0,$$

deci $\sum\limits_{n\geq 1} |a_n|$ este convergentă, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, adică $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ este absolut convergentă, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$. □

EXERCIŢIUL 2.2.6. Să se studieze convergenţa seriilor:

1. $\sum\limits_{n\geq 1} \left(1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$; 2. $\sum\limits_{n\geq 1} \sqrt[3]{\frac{n \cdot a^n}{2n+1}}, a \in \mathbb{R}_+^*$;

3. $\sum\limits_{n\geq 3}\dfrac{1}{\left(\ln\left(\ln n\right)\right)^{\ln n}}$; 4. $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$;

5. $\sum\limits_{n\geq 1}\left(n\cdot\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$; 6. $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\sin\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$;

7. $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\,(\ln n)^{10}}$; 8. $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{1}{\sqrt{n}\,(\ln n)^{10}}$; 9. $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{(\ln n)^{10}}{n\cdot\sqrt[3]{n}}$;

10. $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{1}{n\,(\ln n)^{a}}$, $a\in\mathbb{R}$; 11. $\sum\limits_{n\geq 2}(-1)^n\dfrac{\ln n+(-1)^n}{n\,(\ln n)^2}$;

12. $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(1+a)(1+2a)(1+3a)\dots(1+na)}{n!\cdot n^{\alpha}}$, $a\geq 0,\alpha\in\mathbb{R}$.

SOLUŢIE. 1. Se notează $x_n:=\left(1-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$. Deoarece

$$x_n\longrightarrow 1-e\neq 0,$$

rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1}x_n$ este divergentă.

2. Fie $x_n:=\sqrt[3]{\dfrac{n\cdot a^n}{2n+1}}$. Se aplică criteriul raportului:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\sqrt[3]{\frac{(n+1)\cdot a^{n+1}}{2n+3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2n+1}{n\cdot a^n}}=\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}\cdot a}\longrightarrow\sqrt[3]{a}.$$

- Dacă $\sqrt[3]{a}<1$, adică $a<1$, atunci $\sum\limits_{n\geq 1}x_n$ este convergentă;
- Dacă $\sqrt[3]{a}>1$, adică $a>1$, atunci $\sum\limits_{n\geq 1}x_n$ este divergentă;
- Dacă $a=1$, atunci seria devine $\sum\limits_{n\geq 1}\sqrt[3]{\dfrac{n}{2n+1}}$. Atunci

$$x_n:=\sqrt[3]{\frac{n}{2n+1}}\longrightarrow\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\neq 0,$$

deci $\sum\limits_{n\geq 1}x_n$ este divergentă.

3. Se notează $x_n := \dfrac{1}{\left(\ln\left(\ln n\right)\right)^{\ln n}}$. x_n se mai poate scrie astfel:

$$x_n = \frac{1}{\left(e^{\ln(\ln(\ln n))}\right)^{\ln n}} = \frac{1}{\left(e^{\ln n}\right)^{\ln(\ln(\ln n))}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln(\ln n))}}.$$

Dar $\ln\left(\ln\left(\ln n\right)\right) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, deci

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\ln\left(\ln n\right)\right) > 2, n \geq n_0 \Longrightarrow n^{\ln\left(\ln\left(\ln n\right)\right)} > n^2, n \geq n_0$$

$$\Longrightarrow x_n = \frac{1}{n^{\ln(\ln(\ln n))}} < \frac{1}{n^2}, \forall n \geq n_0.$$

Cum $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ este convergentă (seria armonică cu $\alpha = 2 > 1$), rezultă, folosind criteriul comparaţiei, că $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă.

4. Pentru $x_n := \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$, $n \geq 1$ se va aplica criteriul raportului:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{2^n\cdot n!} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow \frac{2}{e}.$$

Cum $\frac{2}{e} < 1$, rezultă că $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă.

5. Dacă $x_n := \left(n \cdot \sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$, atunci

$$\sqrt[n]{\left(n\cdot\sin\frac{1}{n}\right)^{n^3}} = \left(n\cdot\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{n^2} =$$

$$\left(1 + \frac{\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}} = \left[\left(1 + \frac{\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}}\right]^{\frac{\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}n^2} \rightarrow$$

$$\longrightarrow e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}} = e^{-\frac{1}{6}},$$

deoarece $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$ (se aplică de 2 ori regula lui l'Hospital). Cum $e^{-\frac{1}{6}} < 1$, din criteriul radicalului rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă.

6. Se notează $x_n := \sin\dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Deoarece cu regula lui l'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \dfrac{1}{1+x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x + \dfrac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{1}{2},$$

rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2} = \dfrac{1}{2} \in (0,\infty)$, de unde, cu criteriul comparaţiei "cu limită",

$$\sum_{n\geq 1}\left(\sin\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \sim \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}.$$

Cum $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ este convergentă (seria armonică cu $\alpha = 2 > 1$), rezultă că $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă.

7. Fie $u_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}\,(\ln n)^{10}}$. Evident $u_n \searrow 0$. Aplicând criteriul lui Leibniz, rezultă că $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n \cdot u_n$ este convergentă.

Se notează $x_n := (-1)^n \cdot u_n$. Atunci $\sum\limits_{n\geq 2}|x_n| = \sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{1}{\sqrt{n}\,(\ln n)^{10}}$.

Fie $a_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}\,(\ln n)^{10}}$. Evident $a_n \searrow 0$, deci se poate aplica criteriul condensării:

$$2^n \cdot a_{2^n} = 2^n\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,(\ln 2^n)^{10}} = 2^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{(n\ln 2)^{10}} = \frac{1}{(\ln 2)^{10}}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n^{10}} \underset{n}{\longrightarrow} \infty \neq 0,$$

de unde rezultă că $\sum\limits_{n\geq 2} 2^n a_{2^n}$ este divergentă. Aplicând criteriul condensării, rezultă că $\sum\limits_{n\geq 2} a_n$ este divergentă. Dar $\sum\limits_{n\geq 2} a_n = \sum\limits_{n\geq 2} |x_n|$. Rezultă că $\sum\limits_{n\geq 2} |x_n|$ este divergentă.

Deoarece $\sum\limits_{n\geq 2} x_n$ este convergentă şi $\sum\limits_{n\geq 2} |x_n|$ este divergentă, rezultă că $\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^n \cdot u_n$ este semiconvergentă.

8. Fie $a_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}\,(\ln n)^{10}}$.

Evident $a_n \searrow 0$, deci se poate aplica criteriul condensării:

$$2^n \cdot a_{2^n} = 2^n \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,(\ln 2^n)^{10}} = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{(n\ln 2)^{10}} = \frac{1}{(\ln 2)^{10}} \cdot \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n^{10}} \underset{n}{\longrightarrow} \infty \neq 0,$$

deci $\sum\limits_{n\geq 2} 2^n a_{2^n}$ este divergentă. Aplicând criteriul condensării, rezultă că $\sum\limits_{n\geq 2} a_n$ este divergentă.

9. Se notează $a_n := \dfrac{(\ln n)^{10}}{n\sqrt[3]{n}}$.

Evident $a_n \searrow 0$, deci se poate aplica criteriul condensării:

$$2^n \cdot a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{(\ln 2^n)^{10}}{2^n \cdot \sqrt[3]{2^n}} = \frac{(n\ln 2)^{10}}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^n}.$$

Dintr-un exerciţiu anterior, $\sum\limits_{n\geq 2} 2^n \cdot a_{2^n}$ este convergentă pentru $a = \sqrt[3]{2} > 1$. Rezultă, aplicând criteriul condensării, că $\sum\limits_{n\geq 2} a_n$ este convergentă.

10. Fie $a_n := \dfrac{1}{n\,(\ln n)^a}$. Evident $a_n \searrow 0$, deci, din criteriul condensării

$$\sum_{n\geq 2} a_n \sim \sum_{n\geq 1} 2^n \cdot a_{2^n}.$$

Dar

$$\sum_{n\geq 2} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n\geq 2} 2^n \cdot \frac{1}{2^n (\ln 2^n)^a} = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n\ln 2)^a} = \frac{1}{(\ln 2)^a} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}.$$

Deoarece $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ este convergentă pentru $a > 1$ şi divergentă pentru $a \leq 1$, rezultă că $\sum\limits_{n\geq 2} a_n$ este convergentă dacă $a > 1$ şi divergentă dacă $a \leq 1$.

11. Se notează $x_n := (-1)^n \cdot \dfrac{\ln n + (-1)^n}{n(\ln n)^2} = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n\ln n} + \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.

Fie $y_n := (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n\ln n}$, $\alpha_n := \dfrac{1}{n\ln n}$ şi $z_n := \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.

Deoarece $\alpha_n \searrow 0$, aplicând criteriul lui Leibniz, rezultă că $\sum\limits_{n\geq 2}(-1)^n\alpha_n$ este convergentă, adică $\sum\limits_{n\geq 1} y_n$ este convergentă.

Cum şi $z_n \searrow 0$, se poate aplica criteriul condensării:

$$2^n z_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n (\ln 2^n)^2} = \frac{1}{(n\ln 2)^2} = \frac{1}{(\ln 2)^2} \cdot \frac{1}{n^2},$$

deci $\sum\limits_{n\geq 2} 2^n \cdot z_{2^n}$ este convergentă, pentru că $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergentă (seria armonică, $\alpha = 2 > 1$). Deoarece $\sum\limits_{n\geq 2} z_n \sim \sum\limits_{n\geq 2} 2^n \cdot z_{2^n}$ şi $\sum\limits_{n\geq 2} 2^n \cdot z_{2^n}$ este convergentă, rezultă că $\sum\limits_{n\geq 2} z_n$ este convergentă. Aşadar, $\sum\limits_{n\geq 2} x_n$ este convergentă.

12. Fie $x_n := \dfrac{(1+a)(1+2a)(1+3a)...(1+na)}{n!\cdot n^\alpha}$.

Se aplică criteriul raportului:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1+a)...(1+(n+1)a)}{(n+1)!(n+1)^\alpha} \cdot \frac{n!\cdot n^\alpha}{(1+a)...(1+na)} =$$

$$= \frac{1+(n+1)a}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \longrightarrow a, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

- Dacă $a < 1$, iar $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă.

• Dacă $a > 1$, iar $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

• Dacă $a = 1$, atunci $x_n = \dfrac{2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n+1)}{n!\cdot n^{\alpha}} = \dfrac{(n+1)!}{n!\cdot n^{\alpha}} = \dfrac{n+1}{n^{\alpha}}$.

a) dacă $\alpha \leq 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, deci seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este divergentă;

b) dacă $\alpha > 1 \Longrightarrow \alpha = 1+\rho \Longrightarrow x_n = \dfrac{n+1}{n^{1+\rho}} = \dfrac{1}{n^{\rho}} + \dfrac{1}{n^{1+\rho}}$.

Fie $y_n := \dfrac{1}{n^{\rho}}$ şi $z_n := \dfrac{1}{n^{1+\rho}}$. Atunci:

$\sum\limits_{n\geq 1} z_n$ este convergentă (seria armonică cu $\alpha = 1+\rho > 1$).

$\sum\limits_{n\geq 1} y_n$ este convergentă pentru $\rho > 1$ (i.e., $\alpha > 2$) şi divergentă pentru $0 < \rho < 1$ (i. e., $1 < \alpha < 2$).

Deci $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă pentru $\alpha > 2$ şi divergentă pentru $1 < \alpha < 2$. □

EXERCIŢIUL 2.2.7. Să se studieze convergenţa şi absolut convergenţa seriilor:

1. $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n+1}\dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}}$; 2. $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a^n \sin\left(bn^2\right)}{n!}, a, b \in \mathbb{R}$;

3. $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n+1}\left(\dfrac{n+1}{a\cdot n}\right)^n, a > 0$; 4. $\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^{n-1} \ln\dfrac{n+1}{n}\cdot \ln\dfrac{n-1}{n}$;

5. $\sum\limits_{n\geq 1} n!\cdot a^{n^2}, a \in \mathbb{R}$; 6. $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n-1}\cdot n\cdot \sin\dfrac{1}{n^2}$;

7. $\sum\limits_{n\geq 1}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)\cdot\dfrac{\sin n}{n}$; 8. $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n+(-1)^n\cdot i}$;

9. $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

SOLUŢIE. 1. Se notează $x_n := (-1)^n\dfrac{\sin n}{n\sqrt{n}}$.

Din $\left|x_n\right| = \dfrac{|\sin n|}{n\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ şi $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ convergentă rezultă cu criteriul comparaţiei că $\sum\limits_{n\geq 1} \left|x_n\right|$ este convergentă, adică $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este absolut convergentă.

2. Fie $x_n := \dfrac{a^n \sin\left(bn^2\right)}{n!}$. Atunci

$$|x_n| = \frac{|a|^n \cdot |\sin\left(bn^2\right)|}{n!} \leq \frac{|a|^n}{n!}, \, \forall n \geq 1, \, a, \, b \in \mathbb{R}.$$

Dar $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{|a|^n}{n!}$ este convergentă, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (conform unui exerciţiu anterior). Rezultă, aplicând criteriul comparaţiei, că $\sum\limits_{n\geq 1} |x_n|$ este convergentă, $\forall a, \, b \in \mathbb{R}$, adică $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este absolut convergentă, $\forall a, \, b \in \mathbb{R}$.

3. Fie $x_n := (-1)^{n+1} \cdot \left(\dfrac{n+1}{an}\right)^n$. Pentru studiul absolut convergenţei se aplică criteriul radicalului pentru seria $\sum\limits_{n\geq 1} |x_n| = \sum\limits_{n\geq 1} \left(\dfrac{n+1}{an}\right)^n$:

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{n+1}{an} \underset{n}{\longrightarrow} \frac{1}{a}.$$

a) Dacă $\dfrac{1}{a} < 1 \iff a > 1$, atunci $\sum\limits_{n\geq 1} |x_n|$ este convergentă $\iff$ $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este absolut convergentă;

b) Dacă $\dfrac{1}{a} > 1 \iff a \in (0, 1)$, atunci $\sum\limits_{n\geq 1} |x_n|$ este divergentă $\iff$ $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ nu este absolut convergentă. Cum

$$x_{2n+1} = \frac{1}{a^{2n+1}} \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \cdot e = \infty,$$

rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, aşadar seria $\sum\limits_{n\geq n} x_n$ este divergentă pentru $a \in (0, 1)$.

c) Dacă $a = 1$, rezultă $x_n = (-1)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ nu are limită deoarece

$$x_{2n} = -\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} \underset{n}{\longrightarrow} -e, x_{2n+1} = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} \underset{n}{\longrightarrow} e,$$

deci din nou seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

4. Fie $x_n := (-1)^{n-1}\ln\dfrac{n+1}{n}\ln\dfrac{n-1}{n} = (-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}\ln\dfrac{n}{n-1}$. Se notează $\alpha_n := \ln\dfrac{n+1}{n}\ln\dfrac{n}{n-1}$. Se arată că $\alpha_n \searrow 0$:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)\cdot\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)}{\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right)} = \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)} < 1,$$

deoarece funcţia ln este strict crescătoare, iar

$$\alpha_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln 1\cdot\ln 1 = 0.$$

Deci, cum $\alpha_n \searrow 0$, rezultă, aplicând criteriul lui Leibniz, că seria $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n\alpha_n$ este convergentă.

Mai mult, $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n\alpha_n$ este absolut convergentă. Fie $x_n := (-1)^n\cdot\alpha_n$, $n \geq 1$. Atunci

$$\frac{|x_n|}{\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n-1}} = \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}\cdot\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)}{\dfrac{1}{n-1}} \longrightarrow 1\cdot 1 = 1 \in (0,\infty),$$

deci, din criteriul comparaţiei $\sum\limits_{n\geq 1}|x_n| \sim \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n(n-1)}$.

Dar, $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n(n-1)} \sim \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ (se aplică din nou criteriul comparaţiei, deoarece: $\dfrac{\dfrac{1}{n(n-1)}}{\dfrac{1}{n^2}} \underset{n}{\longrightarrow} 1 \in (0,\infty)$, iar seria $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ este convergentă, fiind seria armonică cu $\alpha = 2 > 1\Big)$. Rezultă $\sum\limits_{n\geq 1} |x_n|$ este convergentă aşadar $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este absolut convergentă.

5. Fie $x_n := n! \cdot a^{n^2}$. Se aplică criteriul raportului pentru serii:

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{(n+1)! \cdot |a|^{(n+1)^2}}{n! \cdot |a|^{n^2}} = (n+1) \cdot |a|^{n^2+2n+1-n^2} = (n+1) \cdot |a|^{2n+1}$$

Şirul $(n+1) \cdot |a|^{2n+1} \underset{n}{\longrightarrow} 0$ pentru $|a| < 1$ (rezultă aplicând criteriul raportului pentru şiruri: $\dfrac{(n+2) \cdot |a|^{2n+3}}{(n+1) \cdot |a|^{2n+1}} = \dfrac{n+2}{n+1} \cdot |a|^2 \longrightarrow |a|^2 < 1$ deci $(n+1)|a|^{2n+1} \underset{n}{\longrightarrow} 0$).

a) dacă $|a| < 1$, atunci, conform celor de mai sus $(n+1) \cdot |a|^{2n+1} \underset{n}{\longrightarrow} 0$. Deoarece $0 < 1$, cu criteriul raportului rezultă că $\sum\limits_{n\geq 1} |x_n|$ este convergentă, adică $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este absolut convergentă, $\forall\, a \in (-1, 1)$.

b) Avem

$$|a| \geq 1 \Longrightarrow \begin{cases} n! \cdot a^{n^2} \underset{n}{\longrightarrow} \infty \text{ pentru } a \geq 1 \\ \left(n! \cdot a^{n^2}\right)_{n\geq 1} \text{ nu are limită pentru } a \leq -1 \end{cases},$$

deci $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este divergentă (cu suma ∞ pentru $a \geq 1$; oscilantă pentru $a \leq -1$).

6. Se notează $x_n := (-1)^{n-1} \cdot n \cdot \sin \dfrac{1}{n^2}$. Cum $|x_n| = \dfrac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \dfrac{1}{n}$, se consideră şi $y_n := \dfrac{1}{n}$. Deoarece $\dfrac{|x_n|}{y_n} = \dfrac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \underset{n}{\longrightarrow} 1 \in (0, \infty)$, aplicând criteriul comparaţiei, rezultă că $\sum\limits_{n\geq 1} x_n \sim \sum\limits_{n\geq 1} y_n$. Cum $\sum\limits_{n\geq 1} y_n$ este divergentă, rezultă că $\sum\limits_{n\geq 1} |x_n|$ este divergentă, adică $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ nu este absolut convergentă.

Fie $\alpha_n := n \sin \frac{1}{n^2}$. Atunci $x_n = (-1)^n \cdot \alpha_n$. Se arătă că $\alpha_n \searrow 0$. Într-adevăr

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n^2} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Pentru a deduce că α_n este descrescător, se consideră funcţia $f(x) := \frac{\sin x^2}{x}$. Atunci

$$f'(x) = \frac{\cos x^2 \cdot 2x \cdot x - \sin x^2}{x^2} = 2\cos^2 x - \frac{\sin^2 x}{x^2} > 2\cos^2 x - 1 > 0$$

pentru $x \in (0, \delta)$, $\delta > 0$ mic. Rezultă că f este strict crescătoare pe $(0, \delta)$, deci dacă $x_1 < x_2$ atunci $f(x_1) \le f(x_2)$. Pentru $x_1 = \frac{1}{n+1} = \alpha_{n+1}$ şi $x_2 = \frac{1}{n} = \alpha_n$, $n \ge n_0$, $n_0 := [1/\delta] + 1$ (rang suficient de mare pentru ca $\frac{1}{n} \in (0, \delta)$), rezultă

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) \le f\left(\frac{1}{n}\right) \Longrightarrow \alpha_{n+1} \le \alpha_n,$$

deci $(\alpha_n)_n$ este descrescător.

Cum $\alpha_n \searrow 0$, aplicând criteriul lui Leibniz, rezultă că $\sum\limits_{n\ge1} x_n$ este convergentă, deci în final seria $\sum\limits_{n\ge1} x_n$ este semiconvergentă.

7. Fie $\alpha_n := \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}{n}$ şi $x_n := \sin n$. Se va arăta că $\alpha_n \searrow 0$, iar $(S_n)_{n\ge1}$ este mărginit $\left(S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} x_k,\ n \ge 1\right)$.

Într-adevăr:

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}}{n+1} - \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}{n} =$$

$$= \frac{n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n}\right) + \frac{n}{n+1} - (n+1)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n}\right)}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{\frac{n}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots + \frac{1}{n}\right)}{n(n+1)} < 0,$$

deci $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.

Cum

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n,$$

se va utiliza formula:

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}, \ x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Atunci $S_n = \dfrac{\cos \frac{1}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}}$, $n \geq 1$, de unde rezultă simplu că şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

Ţinând cont că $\alpha_n \searrow 0$ şi $(S_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, aplicând criteriul lui Abel, rezultă că $\sum\limits_{n\geq 1} \alpha_n u_n$ este convergentă.

8. Se notează $z_n := \dfrac{1}{n + (-1)^n \cdot i}$, $n \geq 1$. Atunci

$$z_n = \frac{n + (-1)^{n+1} \cdot i}{|n + (-1)^n \cdot i|^2} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} i.$$

Pe de altă parte $|z_n| = \left|\dfrac{1}{n + (-1)^n \cdot i}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, deci

$$\sum_{n\geq 1} |z_n| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n},$$

prin aplicarea criteriului comparaţiei "cu limită", deoarece $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n]{} 1 \in (0, \infty)$.

Deci $\sum\limits_{n\geq 1} z_n$ nu este absolut convergentă.

Cum $\sum\limits_{n\geq1}\mathrm{Re}z_n = \sum\limits_{n\geq1}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, iar $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} \underset{n}{\longrightarrow} 1 \neq 0$, rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq1}\mathrm{Re}z_n$ este divergentă.

Chiar dacă seria $\sum\limits_{n\geq1}\mathrm{Im}z_n = \sum\limits_{n\geq1}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ este convergentă (cu criteriul lui Leibniz), rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq1} z_n$ este divergentă. Se poate concluziona şi faptul că efortul de a arăta că seria $\sum\limits_{n\geq1} z_n$ nu este absolut convergentă a fost inutil.

9. Fie $x_n := \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. Atunci

$$x_n = \frac{(-1)^n\left[\sqrt{n}-(-1)^n\right]}{n-(-1)^{2n}} = \frac{(-1)^n\left[\sqrt{n}-(-1)^n\right]}{n-1} = (-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}.$$

Fie $y_n := (-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$ şi $z_n := \dfrac{1}{n-1}$.

Se arată că $\sum\limits_{n\geq2} y_n$ este convergentă. Fie $\alpha_n := \dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$. Deoarece $\alpha_n \searrow 0$, se poate aplica criteriul lui Leibniz şi rezultă $\sum\limits_{n\geq2}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$ este convergentă.

Deoarece $\sum\limits_{n\geq2} z_n \equiv \sum\limits_{n\geq1}\dfrac{1}{n}$ este divergentă (seria armonică cu $\alpha = 1$), rezultă că $\sum\limits_{n\geq2}(y_n + z_n) = \sum\limits_{n\geq2} x_n$ este divergentă. □

EXERCIŢIUL 2.2.8. Să se arate că următoarele serii sunt convergente:

1. $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{\sin n\cdot\sin\frac{1}{n}}{n}$; 2. $\sum\limits_{n\geq1}\dfrac{\sin n}{n}$.

SOLUŢIE. 1. Fie $\alpha_n := \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}$ şi $u_n := \sin n$. Se va arăta că $\alpha_n \searrow 0$:

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{n+1}\sin\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} < \frac{1}{n}\left(\sin\frac{1}{n+1} - \sin\frac{1}{n}\right) < 0,$$

deoarece pentru $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ rezultă $\sin\dfrac{1}{n+1} < \sin\dfrac{1}{n}$, căci funcţia sin este crescătoare pe $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

La un exerciţiu anterior s-a arătat că şirul $(\sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n)_{n\geq 1}$ este mărginit, deci, aplicând criteriul lui Abel, rezultă că $\sum\limits_{n\geq 1}\alpha_n \cdot u_n$ este convergentă.

2. Se consideră $\alpha_n := \dfrac{1}{n}$ şi $u_n := \sin n$ şi se procedează analog cu 1. □

EXERCIŢIUL 2.2.9. Să se studieze convergenţa şi absolut convergenţa seriilor (discuţie după $x \in \mathbb{R}$):

1. $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot\left(\dfrac{1-2x}{x-5}\right)^n$;
2. $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}\cdot x^n(1-x)^n$;

SOLUŢIE. 1. Notăm $x_n := \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\dfrac{1-2x}{x-5}\right)^n$. Se aplică criteriul radicalului:

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}}\left|\frac{1-2x}{x-5}\right| \underset{n}{\longrightarrow} \left|\frac{1-2x}{x-5}\right|.$$

Atunci

$$\left|\frac{1-2x}{x-5}\right| < 1 \Longleftrightarrow -1 < \frac{1-2x}{x-5} < 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} -1 < \dfrac{1-2x}{x-5} \\ \dfrac{1-2x}{x-5} < 1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-2x+x-5}{x-5} > 0 \\ \dfrac{1-2x-x+5}{x-5} < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-x-4}{x-5} > 0 \\ \dfrac{6-3x}{x-5} < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+4}{x-5} < 0 \\ \dfrac{3x-6}{x-5} > 0 \end{cases}$$

Din următorul tabel

x	$-\infty$		-4				2			5			∞
$x+4$	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$3x-6$	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+
$x-5$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{x+4}{x-5}$	+	+	0	-	-	-	-	-	-	|	+	+	+
$\frac{3x-6}{x-5}$	+	+	+	+	+	+	0	-	-	|	+	+	+

rezultă
$$\left|\frac{1-2x}{x-5}\right| < 1 \Longleftrightarrow x \in (-4,2).$$

a) Dacă $\left|\dfrac{1-2x}{x-5}\right| < 1 \Longleftrightarrow x \in (-4,2)$, atunci $\sum\limits_{n\geq 1} |x_n|$ este convergentă, sau $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este absolut convergentă.

b) Dacă $\left|\dfrac{1-2x}{x-5}\right| = 1 \Longleftrightarrow x = 2$, seria devine $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{2n-1}$ sau $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n} \cdot \dfrac{1}{2n-1}$ (ambele sunt semiconvergente).

c) Dacă $\left|\dfrac{1-2x}{x-5}\right| > 1$, atunci $x \in \emptyset$.

2. Fie $x_n := \dfrac{n\cdot 3^{2n}}{2^n} \cdot x^n(1-x)^n$. Se aplică criteriul raportului:
$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{(n+1)\cdot 3^{2n+2}}{2^{n+1}} \cdot |x|^{n+1} \cdot |1-x|^n \cdot \frac{2^n}{n\cdot 3^{2n}} \cdot \frac{1}{|x|^n} \cdot \frac{1}{|1-x|^n} =$$
$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{n+1}{n}|x(1-x)| \underset{n}{\rightarrow} \frac{9}{2}|x-x^2|.$$
Atunci
$$\frac{9}{2}|x(1-x)| < 1 \Longleftrightarrow |x-x^2| < \frac{2}{9} \Longleftrightarrow -\frac{2}{9} < x - x^2 < \frac{2}{9} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{6}, \frac{1}{3}\right) \bigcup \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{6}\right).$$

a) Dacă $\dfrac{9}{2}|x(1-x)| < 1 \Longleftrightarrow x \in \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{17}}{6}, \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{17}}{6}\right)$, atunci $\sum\limits_{n\geq 1} |x_n|$ este convergentă, adică seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este absolut convergentă.

b) Dacă $\frac{9}{2}|x(1-x)| > 1 \iff x \in \left(-\infty, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{6}, \infty\right)$, atunci seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este divergentă.

c) Dacă $\frac{9}{2}|x(1-x)| = 1 \iff x \in \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{6}\right\}$ seria devine: $\sum_{n\geq 1} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n = \sum_{n\geq 1} n$ sau $\sum_{n\geq 1} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)^n = \sum_{n\geq 1} (-1)^n n$, fiind divergentă în ambele cazuri. □

EXERCIŢIUL 2.2.10. a) Fie seria $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} u_n$, cu $u_n \searrow 0$, deci convergentă. Dacă se adună un număr finit de termeni ai acestei serii, eroarea comisă faţă de suma sa este inferioară primului termen neglijat, prin lipsă sau prin adaos, după cum numărul termenilor însumaţi este par sau impar.

b) Să se arate că

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

c) Să se aplice rezultatul de la a) pentru seria de la b) şi a obţine $\ln 2$ cu 3 zecimale exacte.

d) Este posibil să se obţină $\ln 2$ cu 3 zecimale exacte sumând cât mai puţin termeni?

SOLUŢIE. a) Fie $s_n := u_1 - u_2 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n$, $n \geq 1$ şi $s := \lim_{n\to\infty} s_n$ suma seriei. Cum $u_n > u_{n+1}$, rezultă

$$s_{2n+2} < s < s_{2n+1}, n \geq 1,$$

de unde apoi

$$s_{2n+1} - s_{2n} = u_{2n+1},\ s_{2n+1} - s_{2n+2} = u_{2n+2}, n \geq 1,$$

deci

$$0 < s - s_{2n} < u_{2n+1},\ 0 < s_{2n+1} - s < u_{2n+2}, n \geq 1,$$

sau

$$0 < (-1)^n (s - s_n) < u_{n+1},\ n \geq 1,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

b) Fie $(s_n)_n$ şirul sumelor parţiale al seriei date. Avem

$$s_{2n} := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n} =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) =$$
$$\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n} - \ln 2n\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) + \ln 2n - \ln n$$
$$\longrightarrow c - c + \ln 2 = \ln 2,$$

c fiind limita şirului lui Euler (a se vedea Exerciţiul 1.2.10). Cum

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{2n},$$

rezultă

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln 2.$$

Pentru altă soluţie a se vedea şi Exerciţiul 5.2.18.

c) Pentru a obţine valoarea lui $\ln 2$ cu 3 zecimale exacte, aplicând a) pentru seria de la b), va trebui să se sumeze 999 termeni (corespunzător lui $|s - s_n| = |R_n| < u_{n+1} < \frac{1}{10^3}$).

d) Aplicând de trei ori transformarea lui Euler, se obţine succesiv

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} - \ldots + \frac{1}{4n(2n-1)} - \frac{1}{4n(2n+1)} \ldots = \ln 2,$$

$$\frac{3}{8} + \frac{8}{24} - \frac{1}{48} + \frac{1}{120} - \ldots + \frac{1}{4n(4n^2-1)} - \frac{1}{8n(n+1)(2n+1)} \ldots = \ln 2,$$

$$\frac{17}{48} + \frac{33}{96} - \frac{1}{160} + \frac{1}{480} - \ldots + \frac{3}{8n(4n^2-2)(2n+2)} -$$
$$- \frac{3}{16n(n+1)(2n+1)(2n+3)} \ldots = \ln 2.$$

Pentru calculul lui $\ln 2$ cu 3 zecimale exacte cu ajutorul primei serii era nevoie să se sumeze 999 de termeni, pe când în ultima serie este nevoie să se sumeze doar 3 termeni, anume:

$$\ln 2 \simeq \frac{67}{96} - \frac{1}{160} + \frac{1}{480} = 0,693.$$

□

2.3. Exerciţii propuse

EXERCIŢIUL 2.3.1. Să se calculeze suma seriilor:
1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$; 2. $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$; 3. $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$.

EXERCIŢIUL 2.3.2. Studiaţi convergenţa seriilor:
a) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2n+1}{3+2n}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$; b) $\sum_{n\geq 1} n^2 \text{tg}\,\frac{1}{n^2}$; c) $\sum_{n\geq 1} \frac{2n-1}{5n+3}$.

EXERCIŢIUL 2.3.3. Studiaţi convergenţa seriilor:
a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3+5}$; b) $\sum_{n\geq 1} n^2 \sin\frac{\pi}{3^n}$; c) $\sum_{n\geq 1} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$;
d) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{2n^3+n^2+4}}$; e) $\sum_{n\geq 1} \text{arctg}\,\frac{1}{n\sqrt{n}}$; f) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{5n+4}}{2n^2-1}$.

EXERCIŢIUL 2.3.4. Studiaţi convergenţa seriilor:
a) $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n\cdot 2^n}a^n$, $a>0$; b) $\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; c) $\sum_{n\geq 1} \frac{4^n+5^n}{n!}$;
d) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n^2+2n+3}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$; e) $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)^n$;
f) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot a^n$, $a>0$.

EXERCIŢIUL 2.3.5. Să se studieze convergenţa seriilor:
1. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt[3]{n^2+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{n^a\cdot\sqrt{n^2+n+1}}$, $a\in\mathbb{R}$; 2. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{(n+(-1)^n)}}$; 3. $\sum_{n\geq 1} \frac{3^n\cdot n!}{n^n}$;
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{C_{2n}^n}}$; 5. $\sum_{n\geq 1} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}\cdot n^a$, $a\in\mathbb{R}$;
6. $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt[3]{n^3+a\cdot n(n+1)+1}-n\right)^n$, $a\in\mathbb{R}_+^*$; 7. $\sum_{n\geq 1} \left(n\cdot\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;
8. $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt[3]{n^3+an+1}-n\right)$, $a>0$; 9. $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt[3]{n^3+a}-n\right)$;
10. $\sum_{n\geq 1} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{n^a}$, $a\in\mathbb{R}$; 11. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^3 n}{n}$.

EXERCIŢIUL 2.3.6. a) Să se arate că:

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

b) Să se studieze convergenţa seriei:

$$\sum_{n\ge 1}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot(2n)}\right)^{\alpha}\cdot n^{\beta},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

EXERCIŢIUL 2.3.7. Să se studieze convergenţa şi absolut convergenţa seriilor:

1. $\displaystyle\sum_{n\ge 1}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)^{a},a>0;$
2. $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\frac{1}{i+n\cdot(-1)^n};$
3. $\displaystyle\sum_{n\ge 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}};$
4. $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\frac{\cos n}{\sqrt{n}+\cos n};$
5. $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\frac{\sin n}{\sqrt{n}+\cos n};$
6. $\displaystyle\sum_{n\ge 1}(-1)^{n-1}\left(\sqrt[3]{n^3+an^2+1}-n\right)^{n},a>0.$

EXERCIŢIUL 2.3.8. Să se arate că următoarele serii sunt convergente:
1. $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$; 2. $\displaystyle\sum_{n\ge 1}(-1)^n\frac{\cos n\cdot\cos n^2}{n}$.

EXERCIŢIUL 2.3.9. Să se studieze convergenţa şi absolut convergenţa seriilor (discuţie după $x\in\mathbb{R}$):
1. $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\frac{x^n+x^{-n}}{n^2}$; 2. $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\frac{5^n+(-3)^n}{n}(x+1)^n$; 3. $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\frac{3^n}{x^n+x^{-n}}$.

EXERCIŢIUL 2.3.10. Ştiind că $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$ (a se vedea Exerciţiul 5.2.21), să se determine valoarea lui π cu 4 zecimale exacte, utilizând eventual transformarea lui Euler, pentru a însuma cât mai puţini termeni.

CAPITOLUL 3

Limite de funcţii şi continuitate

3.1. Noţiuni şi rezultate teoretice

A. Limite şi continuitate pentru funcţii reale de variabilă reală.

I. Vecinătăţi şi puncte de acumulare (în $\overline{\mathbb{R}}$).

DEFINIŢIA 3.1.1. (Definiţia vecinătăţilor).
a) $V \subset \mathbb{R}$ se numeşte *vecinătate a lui* $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset V$.
b) $V \subset \mathbb{R}$ se numeşte *vecinătate a lui* $+\infty \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$, $(\varepsilon, \infty) \subset V$.
c) $V \subset \mathbb{R}$ se numeşte *vecinătate a lui* $-\infty \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$, $(-\infty, -\varepsilon) \subset V$.
d) Pentru $a \in \overline{\mathbb{R}}$, se consideră $\mathcal{V}(a) := \left\{V \subset \mathbb{R} \,\middle|\, V \text{ vecinătate a lui } a\right\}$.

DEFINIŢIA 3.1.2. Fie $D \subset \mathbb{R}$. $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *punct de acumulare pentru* $D \Longleftrightarrow \big(\forall\, V \in \mathcal{V}(a)\big)\big((V \setminus \{a\}) \cap D \neq \emptyset\big)$. Se notează

$$D' := \left\{a \in \overline{\mathbb{R}} \,\middle|\, a \text{ punct de acumulare pentru } D\right\}.$$

OBSERVAŢIA 3.1.3. (ε-caracterizarea punctelor de acumulare). În funcţie de situaţiile $a \in \mathbb{R}$, $a = \infty$, sau $a = -\infty$, se obţin următoarele caracterizări echivalente ale punctelor de acumulare:
a) dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci $a \in D' \Longleftrightarrow$

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\Big(\big((a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\}\big) \cap D \neq \emptyset\Big).$$

b) dacă $a = +\infty$, atunci $a \in D' \Longleftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0)\Big((\varepsilon, \infty) \cap D \neq \emptyset\Big)$.
c) dacă $a = -\infty$, atunci $a \in D' \Longleftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0)\Big((-\infty, -\varepsilon) \cap D \neq \emptyset\Big)$.

II. Limite de funcţii reale de variabilă reală. Definiţie şi caracterizări.

Fie $D \subset \mathbb{R}$ şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $a \in D'$.

DEFINIŢIA 3.1.4. Se spune că f *are limita* l *în punctul* $a \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(l))(\exists U \in \mathcal{V}(a))\Big(\forall x \in (U \setminus \{a\}) \cap D\Big)\big(f(x) \in V\big).$$

l este unică cu proprietatea de mai sus. Se scrie $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$ sau $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

OBSERVAŢIA 3.1.5. (Caracterizările $\varepsilon - \delta$ a limitelor de funcţii reale de variabilă reală). În funcţie de situaţiile $a \in \mathbb{R}$ sau $a = \infty$, sau $a = -\infty$ şi $l \in \mathbb{R}$, sau $l = \infty$, sau $l = -\infty$ şi de forma particulară a vecinătăţilor acestora, se obţin 9 caracterizări $\varepsilon - \delta$ a limitelor de funcţii reale de variabilă reală. Vom prezenta doar 3 dintre ele:

a) dacă $l \in \mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)\Big(\forall x \in ((a-\delta_\varepsilon, a+\delta_\varepsilon)\setminus\{a\})\cap D\Big)\big(f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)\big)$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)\Big(\forall x \in D, x \neq a, |x-a| < \delta_\varepsilon\Big)\big(|f(x) - l| < \varepsilon\big).$$

b) dacă $l = +\infty$ şi $a \in \mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)\Big(\forall x \in D, x \neq a, |x-a| < \delta_\varepsilon\Big)\big(f(x) > \varepsilon\big).$$

c) dacă $l \in \mathbb{R}$ şi $a = +\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = l \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)\Big(\forall x \in D,\, x > \delta_\varepsilon\Big)\big(|f(x) - l| < \varepsilon\big).$$

PROPOZIŢIA 3.1.6. *(Caracterizarea "pe şiruri" a limitelor de funcţii reale de variabilă reală). Dacă* $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ *şi* $a \in D'$, *atunci:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \left(\left.\begin{array}{c} (x_n)_{n\geq 1} \subset D \setminus \{a\} \\ x_n \longrightarrow a \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow l \right).$$

III. Criteriul majorării. Operaţii algebrice cu limite de funcţii. "Schimbarea de variabilă" la limite de funcţii.

PROPOZIŢIA 3.1.7. *(Criteriul majorării pentru limite de funcţii reale de variabilă reală). Fie* $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ *şi* $a \in D'$.

a) Dacă $l \in \mathbb{R}$ *şi* $|f(x)-l| \leq g(x)$, $\forall x \in (V \setminus \{a\}) \cap D$ *(*V *o vecinătate a lui* a*) şi* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, *atunci* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

b) Dacă $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in (V \setminus \{a\}) \cap D$ *(*V *o vecinătate a lui* a*) şi* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, *atunci* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

c) Dacă $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in (V \setminus \{a\}) \cap D$ *(*V *o vecinătate a lui* a*) şi* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, *atunci* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

PROPOZIŢIA 3.1.8. *(Operaţii algebrice cu limite de funcţii reale de variabilă reală). Fie* $D \subseteq \mathbb{R}$, f, $g : D \to \mathbb{R}$ *şi* $a \in D'$. *Dacă* f *şi* g *au limită în* a, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, *atunci:*

a) $f + g$ *are limită în* a *şi* $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$; *caz exceptat* "$\infty - \infty$";

b) fg *are limită în* a *şi* $\lim\limits_{x \to a}(f(x)g(x)) = l_1 l_2$; *caz exceptat* "$0 \cdot \infty$";

b) $\dfrac{f}{g}$ *are limită în* a *şi* $\lim\limits_{x \to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{l_1}{l_2}$, *pentru* $g(x) \neq 0$, $x \in V \cap D$, $V \in \mathcal{V}(a)$; *cazuri exceptate:* "∞/∞", "$0/0$";

d) f^g *are limită în* a *şi* $\lim\limits_{x \to a}\left(f(x)^{g(x)}\right) = l_1^{l_2}$, *pentru* $f(x) > 0$, $x \in V \cap D$, $V \in \mathcal{V}(a)$; *cazuri exceptate:* "0^0", "∞^0", "1^∞".

PROPOZIŢIA 3.1.9. *("Schimbarea de variabilă" la limite de funcţii reale de variabilă reală). Fie* $D \subseteq \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $u : D \longrightarrow E$, $f : E \to \mathbb{R}$ *şi* $a \in D'$. *Se presupune că*

(1) u *are limită în* a *şi* $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$;

(2) $b \in E'$, f *are limită în* b *şi* $\lim\limits_{y \to b} f(y) = l \in \overline{\mathbb{R}}$;

(3) $u(x) \neq b$ *pentru* $x \neq a$, $x \in V \cap D$ *(*V *o vecinătate a lui* a*).*

Atunci $f \circ u$ *are limită în* a *şi*

$$\lim_{x \to a} f(u(x)) = \lim_{y \to b} f(y) = l.$$

IV. Limite remarcabile de funcţii reale de variabilă reală.

• Utilizând caracterizarea "pe şiruri" a limitelor de funcţii şi limite remarcabile de şiruri, se obţin:

1. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$; de aici: $\lim\limits_{y \to 0}(1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$; $\lim\limits_{y \to 0}\dfrac{\ln(1 + y)}{y} = 1$; $\lim\limits_{y \to 0}\dfrac{a^y - 1}{y} = \ln a$; $\lim\limits_{y \to 0}\dfrac{(1 + y)^r - 1}{y} = r$, $a > 0$, $r \in \mathbb{R}$.

2. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

3. $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{x^n}{a^x} = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a > 1$; de aici $\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$.

• "Schimbarea de variabilă" şi limitele remarcabile anterioare dau următoarele limite remarcabile auxiliare.

4. Dacă $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$, $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \infty$, atunci

$$\lim_{x \to a}\left(1 + \frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)} = e; \ \lim_{x \to a}\frac{u(x)^n}{a^{u(x)}} = 0, \ n \geq 1, \ a > 1; \ \lim_{x \to a}\frac{\ln u(x)}{u(x)} = 0.$$

5. Dacă $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D'$, $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$, $u(x) \neq 0$ pentru $x \neq a$, $x \in V \cap D$ (V o vecinătate a lui a), atunci

$$\lim_{x \to a} (1 + u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e; \ \lim_{x \to a} \frac{\ln(1 + u(x))}{u(x)} = 1; \ \lim_{x \to a} \frac{a^{u(x)} - 1}{u(x)} = \ln a;$$

$$\lim_{x \to a} \frac{(1 + u(x))^r - 1}{u(x)} = r, \ a > 0, \ r \in \mathbb{R}; \ \lim_{x \to a} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1;$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{tg} u(x)}{u(x)} = 1; \ \lim_{x \to a} \frac{\arcsin u(x)}{u(x)} = 1; \ \lim_{x \to a} \frac{\operatorname{arctg} u(x)}{u(x)} = 1.$$

V. Limite laterale pentru funcţii reale de variabilă reală.

DEFINIŢIA 3.1.10. (Definiţia limitelor laterale pentru funcţii reale de variabilă reală). Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in D'$ cu proprietatea că $a \in ((-\infty, a) \cap D)'$ (respectiv $a \in ((a, \infty) \cap D)'$). Atunci se spune că f *are limită la stânga (respectiv dreapta) în* a $\iff$ există $\lim\limits_{x \to a} f\big|_{(-\infty,a)\cap D}(x)$ (respectiv $\lim\limits_{x \to a} f\big|_{(a,\infty)\cap D}(x)$). Se scrie $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x)$, sau $\lim\limits_{x \searrow a} f(x)$.

PROPOZIŢIA 3.1.11. *(Caracterizarea "pe şiruri" a limitelor laterale de funcţii reale de variabilă reală). Fie* $D \subseteq \mathbb{R}$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}$.

a) Dacă $a \in ((-\infty, a) \cap D)'$, *atunci:*

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \left(\left. \begin{array}{c} (x_n)_{n \geq 1} \subset D, \, x_n < a \\ x_n \longrightarrow a \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow l \right).$$

b) Dacă $a \in ((a, \infty) \cap D)'$, *atunci:*

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \left(\left. \begin{array}{c} (x_n)_{n \geq 1} \subset D, \, x_n > a \\ x_n \longrightarrow a \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow l \right).$$

PROPOZIŢIA 3.1.12. *(Caracterizarea limitelor de funcţii reale de variabilă reală cu limite laterale). Dacă* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $a \in D'$ *cu proprietatea că* $a \in ((-\infty, a) \cap D)'$, $a \in ((a, \infty) \cap D)'$, *atunci:*

$$\textit{există } \lim_{x \to a} f(x) \textit{ şi } \lim_{x \to a} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\textit{există } \lim_{x \nearrow a} f(x) =: l_s(a), \ \lim_{x \searrow a} f(x) =: l_d(a) \textit{ şi } l_s(a) = l_d(a) = l \right).$$

VI. Continuitatea funcţiilor reale de variabilă reală. Definiţie şi caracterizări echivalente.

Fie $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $a \in D$.

DEFINIŢIA 3.1.13. (Definiţia continuităţii). Se spune că f *este continuă în punctul* $a \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \big(\forall V \in \mathcal{V}(f(a))\big)\big(\exists U \in \mathcal{V}(a)\big)\Big(\forall x \in U \cap D\Big)\big(f(x) \in V\big).$$

OBSERVAŢIA 3.1.14. (Caracterizarea $\varepsilon - \delta$ a continuităţii funcţiilor reale de variabilă reală). f este continuă în punctul $a \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0)\big(\exists \delta_\varepsilon > 0\big)\Big(\forall x \in (a-\delta_\varepsilon, a+\delta_\varepsilon) \cap D\Big)\big(f(x) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)\big)$$

$$\Leftrightarrow \big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta_\varepsilon > 0\big)\Big(\forall x \in D, |x-a| < \delta_\varepsilon\Big)\big(|f(x) - f(a)| < \varepsilon\big).$$

PROPOZIŢIA 3.1.15. *(Caracterizarea "pe şiruri" a continuităţii pentru funcţii reale de variabilă reală). Dacă $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$, atunci:*

$$f \text{ continuă în } a \Leftrightarrow \left(\left.\begin{matrix} (x_n)_{n\geq 1} \subset D \\ x_n \longrightarrow a \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(a) \right).$$

PROPOZIŢIA 3.1.16. *(Caracterizarea "cu limită" a continuităţii pentru funcţii reale de variabilă reală). Dacă $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ şi $a \in D \cap D'$, atunci:*

$$f \text{ continuă în } a \Leftrightarrow \text{există } \lim_{x \to a} f(x) \text{ şi } \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

VII. Operaţii algebrice şi de compunere cu funcţii reale continue de variabilă reală.

PROPOZIŢIA 3.1.17. *(Operaţii algebrice cu funcţii reale de variabilă reală continue).*

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$. Dacă f şi g sunt continue în a (pe D), atunci:

a) $f + g$ este continuă în a (pe D);

b) fg este continuă în a (pe D);

c) $\dfrac{f}{g}$ este continuă în a, dacă $g(x) \neq 0$, $x \in V \cap D$, $V \in \mathcal{V}(a)$ (pe D, dacă $g(x) \neq 0$, $x \in D$);

d) f^g este continuă în a, dacă $f(x) > 0$, $x \in V \cap D$, $V \in \mathcal{V}(a)$ (pe D, dacă $f(x) > 0$, $x \in D$).

PROPOZIŢIA 3.1.18. *(Compunerea funcţiilor reale de variabilă reală continue). Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $u : D \longrightarrow E$, $f : E \to \mathbb{R}$ şi $a \in D$, $b := u(a) \in E$. Dacă u este continuă în a (pe D) iar f este continuă în b (pe E), atunci $f \circ u$ este continuă în a (pe D).*

PROPOZIŢIA 3.1.19. *(Inversarea funcţiilor reale de variabilă reală continue). Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow E$ bijectivă, $a \in D$, $b := f(a) \in E$. Dacă f este continuă în a (pe D), atunci f^{-1} este continuă în b (pe E).*

VII. Continuitate uniformă pentru funcţii reale de variabilă reală.

DEFINIŢIA 3.1.20. (Continuitate uniformă pentru funcţii reale de variabilă reală). Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$. Se spune că f *este uniform continuă pe D* $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)\Big(\forall x, x' \in D,\, |x - x'| < \delta_\varepsilon\Big)\big(|f(x) - f(x')| < \varepsilon\big).$$

OBSERVAŢIA 3.1.21. (Criteriu de necontinuitate uniformă pentru funcţii reale de variabilă reală). Avem

$$f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ nu este uniform continuă pe } D \Leftrightarrow$$

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0,\ \forall\, \delta > 0,\ \exists\, x_\delta,\, y_\delta \in D \text{ cu } |x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ şi } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Drept consecinţă, următorul enunţ va implica necontinuitatea uniformă a funcţiei pe mulţimea D:

$$\exists\varepsilon_0 > 0, \forall n,\ \exists\, x_n,\, y_n \in D \text{ cu } |x_n - y_n| < \alpha(n) \text{ şi } |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0,$$

unde $\alpha(n)$ este o expresie de n care tinde la zero, sau:

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0,\ \exists\ (x_n)_n,\ (y_n)_n \subset D \text{ cu } |x_n - y_n| \to 0 \text{ şi } |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

TEOREMA 3.1.22. *Fie $K \subset \mathbb{R}$ compactă (i.e. închisă şi mărginită) şi $f : K \to \mathbb{R}$ continuă pe K. Atunci f este uniform continuă pe K.*

B. Limite şi continuitate pentru funcţii de mai multe variabile reale.

I. Vecinătăţi şi puncte de acumulare (în $\mathbb{R}^p$).

DEFINIŢIA 3.1.23. (Definiţia vecinătăţilor şi punctelor de acumulare în $\mathbb{R}^p$).

a) $V \subset \mathbb{R}^p$ se numeşte *vecinătate a lui $a \in \mathbb{R}^p$* $\Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \subset V$, unde $B(a, \varepsilon) := \big\{x \in \mathbb{R}^p \,\big|\, \|x - a\| < \varepsilon\big\}$ este *bila de centru a şi rază ε*. Pentru $a \in \mathbb{R}^p$, se consideră $\mathcal{V}(a) := \big\{V \subset \mathbb{R}^p \,\big|\, V \text{ vecinătate a lui } a\big\}$.

b) Fie $D \subset \mathbb{R}^p$. Atunci

$$a \in \mathbb{R}^p \text{ se numeşte } \textit{punct de acumulare pentru} D \Longleftrightarrow$$

$$\big(\forall\, V \in \mathcal{V}(a)\big)\big((V \setminus \{a\}) \cap D \neq \emptyset\big).$$

Se notează

$$D' := \{a \in \mathbb{R}^p \mid a \text{ punct de acumulare pentru } D\}.$$

OBSERVAŢIA 3.1.24. (ε-caracterizarea punctelor de acumulare). Dacă $a \in \mathbb{R}^p$, atunci $a \in D' \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\Big(\big(B(a,\varepsilon) \setminus \{a\}\big) \cap D \neq \emptyset\Big)$.

II. Limite de funcţii de mai multe variabile reale. Definiţie şi caracterizări.

Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^q$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_p), \ldots,$$
$$f_q(x_1, x_2, \ldots, x_p)),$$

$l = (l_1, l_2, \ldots l_q) \in \mathbb{R}^q$ şi $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p) \in D'$.

DEFINIŢIA 3.1.25. Se spune că f *are limita* l *în punctul* $a \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(l))(\exists U \in \mathcal{V}(a))\Big(\forall x \in (U \setminus \{a\}) \cap D\Big)\big(f(x) \in V\big).$$

l este unică cu proprietatea de mai sus. Se scrie $f(x) \xrightarrow[\mathbb{R}^p \ni x \to a]{\mathbb{R}^q} l$ sau $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

OBSERVAŢIA 3.1.26. (Caracterizarea $\varepsilon - \delta$ a limitelor de funcţii de mai multe variabile reale). Au loc echivalenţele: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)\Big(\forall x \in \big(B(a, \delta_\varepsilon) \setminus \{a\}\big) \cap D\Big)\big(f(x) \in B(l, \varepsilon)\big)$$

$$\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)\Big(\forall x \in D, x \neq a, ||x - a|| < \delta_\varepsilon\Big)\big(||f(x) - l|| < \varepsilon\big).$$

PROPOZIŢIA 3.1.27. *(Caracterizarea "pe şiruri" şi "pe componente" a limitelor de funcţii de mai multe variabile reale).*

Dacă $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : D \to \mathbb{R}^q$ *şi* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p) \in D'$, $l = (l_1, \ldots l_q) \in \mathbb{R}^q$, *atunci:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow$$

$$\left(\left. \begin{array}{c} \big(x^n := (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_p^n)\big)_{n \geq 1} \subset D \setminus \{a\} \\ x^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}^p} a \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n]{\mathbb{R}^q} l \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\left. \begin{array}{c} \big(x^n := (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_p^n)\big)_{n \geq 1} \subset D \setminus \{a\} \\ x_1^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}} a_1, x_2^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}} a_2, \ldots, x_p^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}} a_p \end{array} \right\} \Rightarrow f_j(x_n) \xrightarrow[n]{\mathbb{R}} l_j,\ j = \overline{1,q} \right)$$

$$\Leftrightarrow \Big(\forall j = \overline{1,q}\Big)\Big(\textit{există } \lim_{x \to a} f_j(x) \textit{ şi } \lim_{x \to a} f_j(x) = l_j\Big).$$

III. Criteriul majorării şi "schimbarea de variabilă" pentru limite de funcţii de mai multe variabile reale.

PROPOZIŢIA 3.1.28. *(Criteriul majorării pentru limite de funcţii de mai multe variabile reale). Fie* $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : D \to \mathbb{R}^q$, $g : D \to \mathbb{R}$ *şi* $a \in D'$, $l \in \mathbb{R}^q$. *Dacă* $\|f(x) - l\| \leq g(x)$, $\forall x \in (V \setminus \{a\}) \cap D$ $(V \in \mathcal{V}(a))$ *şi* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, *atunci* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

PROPOZIŢIA 3.1.29. *("Schimbarea de variabilă" la limite de funcţii de mai multe variabile reale). Fie* $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $E \subseteq \mathbb{R}^q$, $u : D \longrightarrow E$, $f : E \to \mathbb{R}^s$ *şi* $a \in D'$. *Se presupune că*

(1) u *are limită în* a *şi* $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b \in \mathbb{R}^q$;

(2) $b \in E'$, f *are limită în* b *şi* $\lim\limits_{y \to b} f(y) = l \in \mathbb{R}^s$;

(3) $u(x) \neq b$ *pentru* $x \neq a$, $x \in V \cap D$ *(*V *o vecinătate a lui* a*).*

Atunci $f \circ u$ *are limită în* a *şi*

$$\lim_{x \to a} f(u(x)) = \lim_{y \to b} f(y) = l.$$

IV. Continuitatea funcţiilor de mai multe variabile reale. Definiţie şi caracterizări.

Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^q$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_p), \ldots, f_q(x_1, x_2, \ldots, x_p))$$

şi $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p) \in D$.

DEFINIŢIA 3.1.30. Se spune că f *este continuă în punctul* $a \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(f(a)))(\exists U \in \mathcal{V}(a))\Big(\forall x \in U \cap D\Big)(f(x) \in V).$$

OBSERVAŢIA 3.1.31. (Caracterizarea $\varepsilon - \delta$ a continuităţii funcţiilor de mai multe variabile reale). Au loc echivalenţele: f este continuă în punctul $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p) \in D \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)\Big(\forall x \in B(a, \delta_\varepsilon) \cap D\Big)(f(x) \in B(f(a), \varepsilon))$$

$$\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)\Big(\forall x \in D, \|x - a\| < \delta_\varepsilon\Big)(\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon).$$

PROPOZIŢIA 3.1.32. *(Caracterizarea "pe şiruri" şi "pe componente" a continuităţii funcţiilor de mai multe variabile reale).*

Dacă $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : D \to \mathbb{R}^q$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p) \in D$, *atunci:*

$$f \text{ continuă în } a \Leftrightarrow$$

$$\left(\left.\begin{array}{c}\left(x^n := (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_p^n)\right)_{n\geq 1} \subset D \\ x^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}^p} a\end{array}\right\} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n]{\mathbb{R}^q} f(a)\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\left.\begin{array}{c}\left(x^n := (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_p^n)\right)_{n\geq 1} \subset D \\ x_1^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}} a_1, x_2^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}} a_2, \ldots, x_p^n \xrightarrow[n]{\mathbb{R}} a_p\end{array}\right\} \Rightarrow f_j(x_n) \xrightarrow[n]{\mathbb{R}} f_j(a),\ j = \overline{1,p}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall j = \overline{1,q}\right)\left(f_j \text{ continuă în } a\right).$$

VII. Operaţii algebrice şi de compunere cu funcţii continue de mai multe variabile reale.

PROPOZIŢIA 3.1.33. *(Operaţii algebrice cu funcţii continue de mai multe variabile reale).*

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$, f, $g : D \to \mathbb{R}^q$ şi $a \in D$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă f şi g sunt continue în a, atunci:

a) $f + g$ este continuă în a;

b) αf este continuă în a.

Dacă $q = 1$, atunci

c) fg este continuă în a;

d) $\dfrac{f}{g}$ este continuă în a (dacă $g(x) \neq 0$, $x \in V \cap D$, $V \in \mathcal{V}(a)$).

PROPOZIŢIA 3.1.34. *(Compunerea funcţiilor de mai multe variabile reale continue). Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $E \subseteq \mathbb{R}^q$, $u : D \longrightarrow E$, $f : E \to \mathbb{R}^s$ şi $a \in D$, $b := u(a) \in E$. Dacă u este continuă în a (pe D) iar f este continuă în b (pe E), atunci $f \circ u$ este continuă în a (pe D).*

VIII. Continuitate uniformă pentru funcţii de mai multe variabile reale.

DEFINIŢIA 3.1.35. (Continuitate uniformă pentru funcţii de mai multe variabile reale). Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ şi $f : D \to \mathbb{R}^q$. Se spune că f *este uniform continuă pe D* $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)\left(\forall x, x' \in D,\ ||x-x'|| < \delta_\varepsilon\right)(||f(x)-f(x')|| < \varepsilon).$$

OBSERVAŢIA 3.1.36. (Criteriu de necontinuitate uniformă pentru funcţii de mai multe variabile reale). Avem

$$f : D \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q \text{ nu este uniform continuă pe } D \Leftrightarrow$$
$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x_\delta,\ y_\delta \in D,\ ||x_\delta - y_\delta|| < \delta,\ ||f(x_\delta) - f(y_\delta)|| \geqslant \varepsilon_0.$$

Drept consecinţă, următorul enunţ va implica necontinuitatea uniformă a funcţiei pe mulţimea D:

$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall n, \exists\, x_n,\, y_n \in D$ cu $||x_n - y_n|| < \alpha(n)$, $||f(x_n) - f(y_n)|| \geqslant \varepsilon_0$,

unde $\alpha(n)$ este o expresie de n care tinde la zero, sau:

$\exists\, \varepsilon_0 > 0$, $\exists\, (x_n)_n, (y_n)_n \subset D$ cu $||x_n - y_n|| \to 0$, $||f(x_n) - f(y_n)|| \geqslant \varepsilon_0$.

TEOREMA 3.1.37. *Fie $K \subset \mathbb{R}^p$ compactă (i.e. închisă şi mărginită) şi $f : K \to \mathbb{R}^q$. Dacă f este continuă pe K, atunci f este uniform continuă pe K.*

3.2. Exerciţii rezolvate

EXERCIŢIUL 3.2.1. Să se arate, utilizând definiţia, că
a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(x^3 - x + 1\right) = 1$;
b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+1}{3x+2} = \dfrac{2}{3}$.

SOLUŢIE. a) Fie $\varepsilon > 0$. Se observă că

$$\left|x^3 - x + 1 - 1\right| = \left|x^3 - x\right| = \left|(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 2(x-1)\right|.$$

Se consideră $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât $\delta_\varepsilon^3 + 3\delta_\varepsilon^2 + 2\delta_\varepsilon < \varepsilon$. Un astfel de δ_ε există. De exemplu $0 < \delta_\varepsilon < 1$, de unde $\delta_\varepsilon^3 < \delta_\varepsilon$, $\delta_\varepsilon^2 < \delta_\varepsilon$, apoi se consideră δ_ε cu condiţia suplimentară $6\delta_\varepsilon < \varepsilon$). Pentru orice x cu proprietatea $|x - 1| < \delta_\varepsilon$, rezultă

$$\begin{aligned}\left|x^3 - x + 1 - 1\right| &= \left|(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 2(x-1)\right| \leqslant \\ &\leqslant |x-1|^3 + 3|x-1|^2 + 2|x-1| \leqslant \\ &\leqslant \delta_\varepsilon^3 + 3\delta_\varepsilon^2 + 2\delta_\varepsilon < \varepsilon,\end{aligned}$$

deci, cu definiţia cu "ε şi δ_ε" a limitei unei funcţii într-un punct se deduce că

$$\lim_{x \to 1} \left(x^3 - x + 1\right) = 1.$$

b) Fie $\varepsilon > 0$. Se observă că

$$\left|\frac{2x+1}{3x+2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{3|3x+2|} < \varepsilon \Leftrightarrow \max\left\{0, \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} - 2\right)\right\} < x.$$

Considerând $\delta_\varepsilon > \max\left\{0, \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3\varepsilon} - 2\right)\right\}$, rezultă evident că

$$x > \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{2x+1}{3x+2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon,$$

adică $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x+1}{3x+2} = \dfrac{2}{3}$. □

EXERCIŢIUL 3.2.2. Să se arate că nu există următoarele limite
a) $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x$;
b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \cos \dfrac{1}{x}$.

SOLUŢIE. a) Fie $f(x) := \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Fie $x_n = 2n\pi$, $y_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $n \geq 1$. Atunci $x_n \longrightarrow \infty$, $y_n \longrightarrow \infty$ şi

$$f(x_n) = \cos(2n\pi) = 1 \longrightarrow 1,$$

$$f(y_n) = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \longrightarrow 0,$$

de unde, utilizând caracterizarea limitelor de funcţii cu ajutorul şirurilor, rezultă că f nu are limită spre ∞.

b) Fie funcţia $f(x) = \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

Se consideră şirurile $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. Evident

$$x_n \longrightarrow 0,\ y_n \longrightarrow 0,$$

$$f(x_n) = 2n\pi\cos(2n\pi) = 2n\pi \longrightarrow \infty,$$

$$f(y_n) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \longrightarrow 0,$$

deci se neagă din nou caracterizarea limitelor de funcţii cu ajutorul şirurilor; rezultă că f nu are limită în 0. □

EXERCIŢIUL 3.2.3. Să se arate că

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

SOLUŢIE. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $[x] \leq x < [x]+1$ ($[x]$ este partea întreagă a lui x), de unde, pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} \tag{3.2.1}$$

Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale pozitive, cu $x_n \longrightarrow \infty$, arbitrar, fixat. Considerăm

$$y_n := \left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]},\ z_n := \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}.$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \dfrac{1}{n+1}},$$

iar $([x_n])_n$ este un subşir al şirului $(n)_n$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$. Analog $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = e$. Din relaţia (3.2.1) rezultă apoi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$. Cum $(x_n)_n$ a fost ales arbitrar, rezultă în final că

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$\square$

EXERCIŢIUL 3.2.4. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+2x^3+2}{2x^4-x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^2+x+5}{4x-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-5x+8}}{x-4}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{2x^2+x-3}$; e) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$; g) $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}}\dfrac{\arcsin(2+3x)}{\operatorname{tg}(9x^2-4)}$;

h) $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{5^x-\sqrt{5}}{4x^2-1}$; i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{\ln(1+8x)}$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3+2x}\right)^{\frac{x^2+1}{x-1}}$; k) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

SOLUŢIE. a) Fiind caz de nedeterminare $\dfrac{\infty}{\infty}$ cu funcţii polinomiale, se forţează factorul comun

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^4+2x^3+2}{2x^4-x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(-3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^4}\right)}{x^4\left(2-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^4}}{2-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}} = \frac{-3+0+0}{2-0+0} = -\frac{3}{2}.$$

b) Analog cu a) se obţine

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2+x+5}{4x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(-3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}{x\left(4-\dfrac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-3+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{4-\frac{1}{x}} = (-\infty)\frac{-3+0+0}{4-0} = \infty.$$

c) Analog cu a) şi b) rezultă

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^2-5x+8}}{x-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{8}{x^2}}}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{9-\frac{5}{x}+\frac{8}{x^2}}}{1-\frac{4}{x}} = -\frac{\sqrt{9-0+0}}{1-0} = -3.$$

d) Fiind caz de nedeterminare $\frac{0}{0}$ cu funcţii polinomiale, se caută descompunerea în factori după $(x-1)$:

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-x}{2x^2+x-3} = \lim_{x\to1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(2x+3)} = \lim_{x\to1} \frac{x}{2x+3} = \frac{1}{5}.$$

e) Fiind caz de nedeterminare $\frac{0}{0}$ cu funcţii polinomiale şi radicali, se înmulţeşte "cu conjugata":

$$\lim_{x\to4} \frac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3} = \lim_{x\to4} \frac{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}{2x+1-9} =$$

$$= \lim_{x\to4} \frac{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}{2(x-4)} = \lim_{x\to4} \frac{(\sqrt{2x+1}+3)}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

f), g), h) şi i) se încadrează la nedeterminare $\frac{0}{0}$ şi se încearcă fructificarea limitelor remarcabile:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \lim_{x\to0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \cdot \frac{3x}{4x}\right) = \lim_{x\to0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \cdot \frac{3}{4}\right) =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4};$$

$$\lim_{x\to-\frac{2}{3}} \frac{\arcsin(2+3x)}{\operatorname{tg}(9x^2-4)} =$$

$$= \lim_{x\to-\frac{2}{3}} \left[\frac{\arcsin(2+3x)}{2+3x} \cdot \frac{9x^2-4}{\operatorname{tg}(9x^2-4)} \cdot \frac{3x+2}{(3x-2)(3x+2)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to -\frac{2}{3}} \left[\frac{\arcsin(2+3x)}{2+3x}\cdot\frac{9x^2-4}{\operatorname{tg}(9x^2-4)}\cdot\frac{1}{3x-2}\right] = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x\to 1/2}\frac{5^x-\sqrt{5}}{4x^2-1} = \lim_{x\to 1/2}\frac{\sqrt{5}}{4}\frac{5^{x-\frac{1}{2}}-1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1/2}\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{5^{x-\frac{1}{2}}-1}{x-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\ln 5\cdot 2 = \frac{\sqrt{5}\ln 5}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\ln(1+8x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot\frac{8x}{\ln(1+8x)}\cdot\frac{4x}{8x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot\frac{8x}{\ln(1+8x)}\cdot\frac{1}{2}\right) = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

j) şi k) se încadrează la nedeterminare 1^∞:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{3+2x}\right)^{\frac{x^2+1}{x-1}} = \left[\left(1+\frac{-2}{3+2x}\right)^{\frac{3+2x}{-2}}\right]^{\frac{-2}{3+2x}\cdot\frac{x^2+1}{x-1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2(x^2+1)}{(3+2x)(x-1)}} = e^{-1}.$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{x\operatorname{tg}x}}\right]^{\frac{x\operatorname{tg}x}{\sin^2 x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2} = e^{1\cdot 1^2} = e.$$

S-au utilizat permanent şi operaţii algebrice cu limite de funcţii. □

EXERCIŢIUL 3.2.5. Să se calculeze:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$;

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$;

iii) $\lim\limits_{x\to e}(\ln x)^{\frac{1}{x^2-3ex+2e^2}}$.

SOLUŢIE. i) Se obţine succesiv

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\right)=1+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}.$$

ii) Se obţine:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}\right)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}}\cdot\left(\frac{x\sin x}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x^2}{4}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\cdot 4+\frac{2\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{\frac{x^2}{4}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\cdot 4\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(1\cdot 1\cdot 4+2\cdot 1\cdot 1\cdot 4)=\frac{12}{2}=6.$$

iii) Fiind o nedeterminare de tipul 1^∞, se adună şi scade 1 "la bază", obţinându-se succesiv

$$\lim_{x\to e}(\ln x)^{\frac{1}{x^2-3ex+2e^2}}=\lim_{x\to e}\left[(1+\ln x-1)^{\frac{1}{\ln x-1}}\right]^{\frac{\ln x-1}{x^2-3ex+2e^2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{(x-e)(x-2e)}}=e^{\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln\left(1+\frac{x-e}{e}\right)}{\frac{x-e}{e}}\cdot\frac{1}{e(x-2e)}}=$$

$$=e^{1\cdot\frac{1}{e(-e)}}=e^{-\frac{1}{e^2}}.$$

□

EXERCIŢIUL 3.2.6. Să se studieze existenţa limitelor laterale în $x=0$, pentru funcţia:

$$f(x)=\left|\sin\frac{1}{x}\right|\cdot\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}.$$

SOLUŢIE. Observăm că:

$$(x\to 0,\ x>0)\Rightarrow\left(\frac{1}{x}\to\infty\right)\Rightarrow\left(2^{\frac{1}{x}}\to\infty\right)\Rightarrow\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\to 0\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\sin\frac{1}{x}\right|\cdot\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\to 0,$$

deoarece funcţia $\left|\sin\frac{1}{x}\right|$ este mărginită pe o vecinătate a lui 0. Deci

$$\lim_{x\searrow 0}\left[\left|\sin\frac{1}{x}\right|\cdot\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right]=0.$$

Deoarece, pentru $x\to 0$, $x<0$, avem $2^{\frac{1}{x}}\to 0$, deci $\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\to 1$ şi, cum $\left|\sin\frac{1}{x}\right|$ nu are limită la stânga în 0, intuim că nu există limita lui f la stânga în 0. Într-adevăr, considerând $x_n=-\frac{1}{2n\pi}$, $y_n=-\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, avem că:

$$x_n\to 0,\ x_n<0,\ f(x_n)=|\sin(-2n\pi)|\cdot\frac{1}{1+2^{-2n\pi}}=0\longrightarrow 0,$$

$$y_n\to 0,\ y_n<0,\ f(y_n)=\left|\sin\left(-2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right|\cdot\frac{1}{1+2^{-2n\pi+\frac{\pi}{2}}}=$$

$$=1\cdot\frac{1}{1+2^{-2n\pi+\frac{\pi}{2}}}=\frac{1}{1+2^{-2n\pi+\frac{\pi}{2}}}\to 1,$$

deci nu există limita

$$\lim_{x\nearrow 0}\left[\left|\sin\frac{1}{x}\right|\cdot\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right].$$

□

EXERCIŢIUL 3.2.7. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:[0,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\sin x}-1}{x-\dfrac{\pi}{2}}, & x\neq\dfrac{\pi}{2},\\ 1\,, & x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

SOLUŢIE. Avem:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}-1}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\left(\sqrt{\sin x}+1\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{2}}{\left(\sqrt{\sin x}+1\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}+1}\cdot\frac{2\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}+1}\cdot\frac{\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}}{\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}}\cdot\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

iar $0 \neq 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, deci f nu este continuă în $\frac{\pi}{2}$. Evident f este continuă pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ (provenind din operaţii algebrice şi de compunere cu funcţii continue pe $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$). □

EXERCIŢIUL 3.2.8. Să se studieze uniform continuitatea funcţiilor pe mulţimile indicate:
i) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}\sin^2 x^2$, $x \in [0,\infty)$; ii) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$, $x \in (1,\infty)$.

SOLUŢIE. i) Deoarece f este continuă pe $[0,\infty)$, rezultă că f este uniform continuă pe orice $[a,b] \subset [0,\infty)$ (orice funcţie continuă pe un interval compact este uniform continuă pe acel interval). Dar f nu este uniform continuă pe $[0,\infty)$. Într-adevăr, considerând $x_n = \sqrt{2n\pi} \in [0,\infty)$, $y_n = \sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \in [0,\infty)$, avem:

$$|x_n - y_n| = \left|\sqrt{2n\pi} - \sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right| = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2n\pi}} \longrightarrow 0,$$

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 1 + \frac{1}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}+1} \geqslant 1,$$

de unde, cu criteriul de neconvergenţă uniformă, f nu este uniform continuă pe $[0,\infty)$.

ii) Ţinând cont de faptul că $\operatorname{arctg}\alpha - \operatorname{arctg}\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}$, $\forall\,\alpha$, $\beta\in\mathbb{R}$, cu $1+\alpha\beta\neq 0$ şi acceptând fără demonstraţie că $|\operatorname{arctg} x| < |x|$, $\forall x\in\mathbb{R}^*$, avem că, pentru orice x_1, $x_2\in(1,\infty)$:

$$|f(x_1)-f(x_2)| = \left|\operatorname{arctg}\frac{x_1-x_2}{1+x_1x_2}\right| < \frac{|x_1-x_2|}{1+x_1x_2} < |x_1-x_2|\,.$$

Considerând $\varepsilon>0$ arbitrar şi alegând δ_ε astfel încât $0<\delta_\varepsilon<\varepsilon$, putem spune că:

$$\begin{gathered}\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta_\varepsilon>0,\ \forall\,x_1,\ x_2\in(1,\infty) \text{ cu } |x_1-x_2|<\delta_\varepsilon \Rightarrow\\ \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)| < |x_1-x_2| < \delta_\varepsilon < \varepsilon,\end{gathered}$$

de unde f este uniform continuă pe $(1,\infty)$. □

EXERCIŢIUL 3.2.9. Fie funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\,, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Să se studieze continuitatea lui f.

SOLUŢIE. f este continuă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, provenind din operaţii algebrice şi de compunere cu funcţii continue pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Pentru a studia continuitatea lui f în $(0,0)$ se utilizează caracterizarea continuităţii "cu şiruri" pentru funcţii reale de două variabile reale.

Se observă că:

$$\left(\left.\begin{array}{c}((x_n,y_n))_{n\geq1}\subset\mathbb{R}^2\\ (x_n,y_n)\longrightarrow(0,0)\\ (x_n,y_n)\neq(0,0)\\ y_n=x_n\end{array}\right\}\Rightarrow f(x_n,y_n)=\frac{x_n^2}{2x_n^2}=\frac{1}{2}\longrightarrow 1\neq 0=f(0,0)\right),$$

aşadar se neagă continuitatea "pe şiruri", deci funcţia nu este continuă în $(0,0)$.

Dacă se consideră un şir de puncte $((x_n,y_n))_{n\geq1}$ care tinde către $(0,0)$ de-a lungul unei drepte ce trece prin origine ($y=mx$), atunci limita şirului $(f(x_n,y_n))_{n\geq1}$ depinde de panta dreptei:

$$\left(\left.\begin{array}{c}((x_n,y_n))_{n\geq1}\subset\mathbb{R}^2\\ (x_n,y_n)\longrightarrow(0,0)\\ (x_n,y_n)\neq(0,0)\\ y_n=mx_n\end{array}\right\}\Rightarrow f(x_n,y_n)=\frac{mx_n^2}{x_n^2(1+m^2)}=\frac{m}{1+m^2}\right),$$

deci se neagă caracterizarea "pe şiruri" a limitelor de funcţii, aşadar f nu are nici limită globală în $(0,0)$. □

EXERCIŢIUL 3.2.10. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea lui f pe $\mathbb{R}^2$.

SOLUŢIE. Evident f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, provenind din operaţii algebrice şi de compunere cu funcţii continue pe $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Observăm că

$$\left(\left. \begin{array}{c} ((x_n, y_n))_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^2 \\ (x_n, y_n) \longrightarrow (0,0) \\ (x_n, y_n) \neq (0,0) \\ y_n = m x_n \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_n, y_n) = \frac{m x_n^2}{|x_n| \sqrt{(1+m^2)}} \longrightarrow 0 \right).$$

Nu se poate trage concluzia continuităţii lui f în origine, deoarece şirul $((x_n, y_n))_{n \geq 1}$ nu a fost ales arbitrar în domeniul funcţiei, ci arbitrar de-a lungul dreptei de ecuaţie $y = mx$. Faptul că se obţine mereu valoarea limitei 0 pe diverse direcţii permite să se intuiască faptul că dacă funcţia ar avea limită în origine atunci aceasta ar trebui să fie exact 0. Într-adevăr, deoarece

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2},\ \forall (x,y) \neq (0,0),$$

şi, cum evident $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} = 0$, se deduce din Criteriul Majorării pentru limite de funcţii de două variabile că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0,$$

şi cum $0 = f(0,0)$, rezultă că f este continuă şi în $(0,0)$. A se vedea în Figura 3.2.1 graficul funcţiei. S-a aplicat inegalitatea mediilor pentru numerele x^2 şi y^2: $\dfrac{x^2+y^2}{2} \geqslant \sqrt{x^2y^2} = |xy|$. □

EXERCIŢIUL 3.2.11. Să se studieze existenţa limitei funcţiei $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ în punctele de acumulare ale domeniului său.

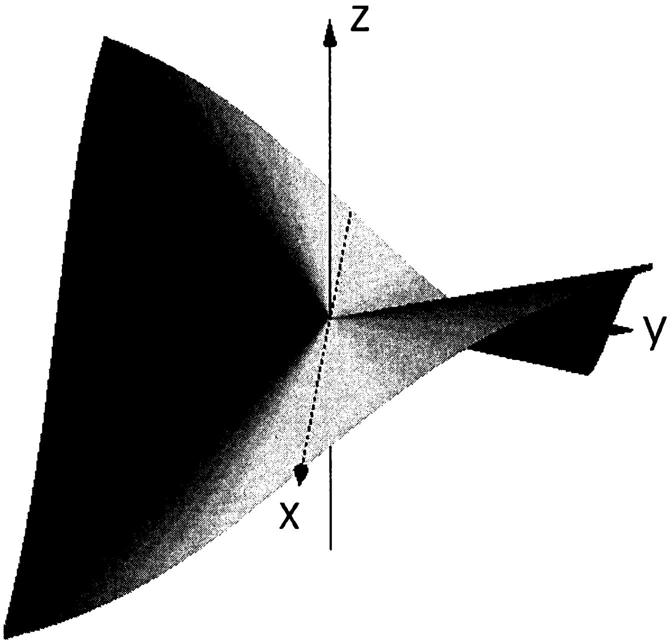

FIGURA 3.2.1

SOLUŢIE. Domeniul maximal de definiţie al funcţiei f este

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y \},$$

iar mulţimea punctelor de acumulare a lui D este $D' = \mathbb{R}^2$.

f este continuă pe D, fiind raport de funcţii continue pe D. Rezultă deci că f are limită în orice astfel de punct şi valoarea ei este egală cu valoarea funcţiei.

Se consideră $(a, a) \in D' \backslash D$, cu $a \neq 0$.

Se presupune $a > 0$. Fie $((x_n, y_n))_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^2$, cu $x_n \neq y_n$, $(x_n, y_n) \longrightarrow (a, a)$. Aşadar $x_n \longrightarrow a$, $y_n \longrightarrow a$, deci $x_n + y_n \longrightarrow 2a$, $x_n - y_n \longrightarrow 0$. Atunci

$$\left(\left. \begin{array}{c} ((x_n, y_n))_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^2 \\ (x_n, y_n) \longrightarrow (a, a) \\ x_n - y_n > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_n, y_n) = \frac{x_n + y_n}{x_n - y_n} \longrightarrow \frac{2a}{+0} = +\infty \right),$$

$$\left(\left.\begin{array}{c}((x_n,y_n))_{n\geq 1}\subset\mathbb{R}^2\\(x_n,y_n)\longrightarrow(a,a)\\x_n-y_n<0\end{array}\right\}\Rightarrow f(x_n,y_n)=\frac{x_n+y_n}{x_n-y_n}\longrightarrow\frac{2a}{-0}=-\infty\right),$$

deci f are limita $+\infty$ în (a,a) (pentru $a>0$) "dinspre semiplanul inferior" determinat de dreapta $y=x$ şi limita $-\infty$ "dinspre semiplanul superior" determinat de aceeaşi dreaptă, dar nu are limită totală în astfel de puncte (adică limită cu puncte din întregul domeniu al funcţiei, $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq y\}$).

Dacă $a<0$, se consideră $((x_n,y_n))_{n\geq 1}\subset\mathbb{R}^2$ cu $x_n\neq y_n$, $(x_n,y_n)\longrightarrow(a,a)$. Se obţine

$$\left(\left.\begin{array}{c}((x_n,y_n))_{n\geq 1}\subset\mathbb{R}^2\\(x_n,y_n)\longrightarrow(a,a)\\x_n-y_n>0\end{array}\right\}\Rightarrow f(x_n,y_n)=\frac{x_n+y_n}{x_n-y_n}\longrightarrow\frac{2a}{+0}=-\infty\right),$$

$$\left(\left.\begin{array}{c}((x_n,y_n))_{n\geq 1}\subset\mathbb{R}^2\\(x_n,y_n)\longrightarrow(a,a)\\x_n-y_n<0\end{array}\right\}\Rightarrow f(x_n,y_n)=\frac{x_n+y_n}{x_n-y_n}\longrightarrow\frac{2a}{-0}=+\infty\right),$$

deci f are limita $-\infty$ în (a,a) (pentru $a<0$) "dinspre semiplanul inferior" determinat de dreapta $y=x$ şi limita $+\infty$ "dinspre semiplanul superior", dar nu are limită totală (vezi figura 3.2.2).

Dacă $a=0$, atunci

$$\left(\left.\begin{array}{c}((x_n,y_n))_{n\geq 1}\subset\mathbb{R}^2\\(x_n,y_n)\longrightarrow(0,0)\\(x_n,y_n)\neq(0,0)\\y_n=mx_n,\ m\neq 1\end{array}\right\}\Rightarrow f(x_n,y_n)=\frac{x_n(1+m)}{x_n(1-m)}=\frac{1+m}{1-m}\right),$$

deci limita funcţiei "după direcţia unei drepte" care trece prin origine depinde de panta dreptei; aceasta implică faptul că f nu are limită globală în origine. □

EXERCIŢIUL 3.2.12. Să se studieze existenţa limitei funcţiei $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{x}$ în orice punct din $\mathbb{R}^2$.

SOLUŢIE. Domeniul maximal de definiţie al funcţiei f este

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq 0\},$$

iar $D'=\mathbb{R}^2$.

În puncte ale lui D funcţia f este continuă (raport de funcţii continue pe D) şi deci are limită şi valoarea ei este egală cu valoarea funcţiei.

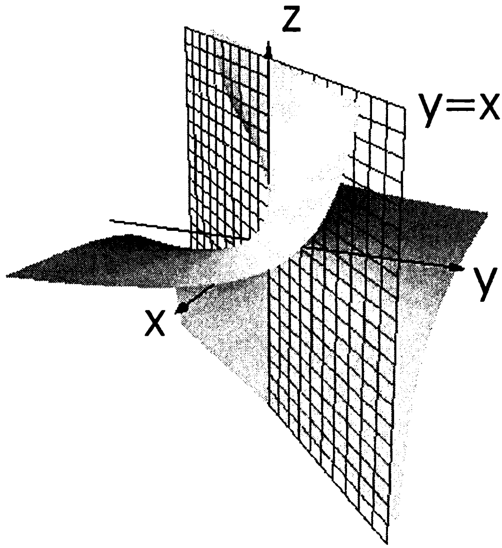

FIGURA 3.2.2

Se consideră $(0, a) \in D' \setminus D$, cu $a \neq 0$ şi şirul arbitrar $((x_n, y_n))_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^2$, cu $x_n \neq 0$, $(x_n, y_n) \longrightarrow (0, a)$. Rezultă $x_n \longrightarrow 0$, $y_n \longrightarrow a$, de unde $x_n y_n \longrightarrow 0$, $\sin x_n y_n \longrightarrow 0$. Din $y_n \longrightarrow a \neq 0$, $\exists n_a$, astfel încât $\forall n \geqslant n_a$, $y_n \neq 0$, şi, deci şi $x_n y_n \neq 0$; deci

$$\left(\left. \begin{array}{c} ((x_n, y_n))_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^2 \\ (x_n, y_n) \longrightarrow (0, a) \\ x_n \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_n, y_n) = \frac{\sin x_n y_n}{x_n} = \frac{\sin x_n y_n}{x_n y_n} \cdot y_n \longrightarrow a \right),$$

aşadar există limita în $(0, a)$, $a \neq 0$ şi

$$\lim_{(x,y) \to (0,a)} f(x, y) = a.$$

Pentru studiul existenţei limitei în $(0, 0)$, se observă că:

$$\left(\left. \begin{array}{c} ((x_n, y_n))_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^2 \\ (x_n, y_n) \longrightarrow (0, 0) \\ x_n \neq 0,\ y_n \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_n, y_n) = \frac{\sin x_n y_n}{x_n} = \frac{\sin x_n y_n}{x_n y_n} \cdot y_n \longrightarrow 0 \right),$$

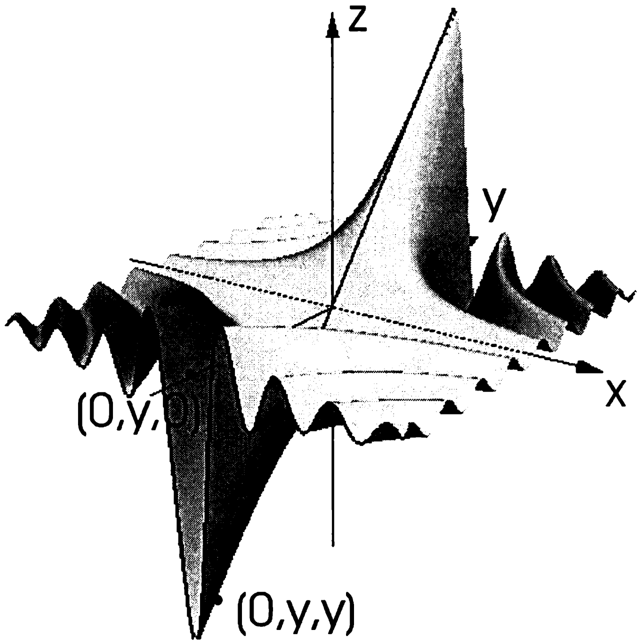

FIGURA 3.2.3

$$\left(\left.\begin{array}{c} ((x_n, y_n))_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^2 \\ (x_n, y_n) \longrightarrow (0,0) \\ x_n \neq 0,\ y_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_n, y_n) = \frac{0}{x_n} = 0 \longrightarrow 0 \right),$$

deci orice şir de puncte tinzînd la $(0,0)$ din domeniul funcţiei se consideră, se obţine $f(x_n, y_n) \longrightarrow 0$.

Se poate aşadar prelungi prin continuitate funcţia f în puncte $(0,y)$ şi prelungirea este $\widetilde{f}(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x}, & x \neq 0 \\ y\,, & x = 0 \end{cases}.$$

(a se vedea graficul în figura 3.2.3). □

EXERCIŢIUL 3.2.13. Să se arate că funcţia $f(x,y) = \dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ are limită după direcţia oricărei drepte în origine, dar nu are limită globală (în raport cu ansamblul variabilelor).

SOLUŢIE. Domeniul maximal de definiţie al funcţiei f este

$$D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \neq 2x\},$$

iar $(0,0)$ este punct de acumulare al lui D. Are sens punerea problemei limitei în origine.

Deoarece

$$\left(\left.\begin{array}{c} ((x_n,y_n))_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^2 \\ (x_n,y_n) \longrightarrow (0,0) \\ (x_n,y_n) \neq (0,0) \\ y_n = mx_n \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_n,y_n) = \frac{m^2x_n^2+2x_n}{m^2x_n^2-2x_n} \longrightarrow -1\right),$$

f are limită după orice direcţie în origine şi această limită este mereu egală cu -1. Nu rezultă însă de aici existenţa limitei în raport cu ansamblul variabilelor în origine; într-adevăr, se observă că:

$$\left(\left.\begin{array}{c} ((x_n,y_n))_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^2 \\ (x_n,y_n) \longrightarrow (0,0) \\ (x_n,y_n) \neq (0,0) \\ y_n = m\sqrt{x_n} \\ x_n > 0,\ m \neq \pm\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_n,y_n) = \frac{m^2x_n+2x_n}{m^2x_n-2x_n} = \frac{m^2+2}{m^2-2}\right),$$

deci funcţia are limită "după parabole" de ecuaţie $y^2 = mx$, cu $x > 0$. Cum aceste limite sunt dependente de m, rezultă că funcţia f nu are limită în origine în raport cu ansamblul variabilelor. □

EXERCIŢIUL 3.2.14. Să se studieze continuitatea funcţiilor

a) $f : [0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} (1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

b) $f : [0,\infty) \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} (1+x+y)^{\frac{1}{x+2y}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

SOLUŢIE. a) Se deduce că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),xy\neq 0} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0),xy\neq 0} \left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} = e^0 = 1,$$

deoarece, din inegalitatea mediilor

$$\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{xy},\ \forall\,(x,y) \in [0,\infty)\times[0,\infty), xy \neq 0,$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0),xy\neq 0} \frac{1}{2}\sqrt{xy} = 0$, şi cu criteriul majorării

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),xy\neq 0} \frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 0.$$

Apoi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0),xy=0} f(x,y) = 1$, iar $f(0,0) = 1$, deci f continuă în $(0,0)$. f este evident continuă pe $[0,\infty)\times[0,\infty)\setminus\{(0,0)\}$ (provine din operaţii algebrice şi de compunere cu funcţii continue).

b) Se scrie, pentru $(x,y) \in [0,\infty)\times[0,\infty)$, $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f(x,y) = (1+x+y)^{\frac{1}{x+y}} = \left[(1+x+y)^{\frac{1}{x+y}}\right]^{\frac{x+y}{x+2y}},$$

de unde

$$x > 0,\ m \in \mathbb{R} \Longrightarrow f(x,mx) = \left[(1+x+mx)^{\frac{1}{x+mx}}\right]^{\frac{(1+m)x}{(1+2m)x}} \xrightarrow[0<x\to 0]{} e^{\frac{1+m}{1+2m}},$$

deci nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Evident f nu e continuă în $(0,0)$.

Dar f evident continuă pe $[0,\infty)\times[0,\infty)\setminus\{(0,0)\}$ (provine din operaţii algebrice şi de compunere cu funcţii continue). □

EXERCIŢIUL 3.2.15. Fie $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x) | x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^4-y^4}{x^3-y^3}.$$

a) Pentru $\alpha \neq 0$, să se determine $\lim\limits_{(x,y)\to(\alpha,\alpha)} f(x,y)$.

b) Să se determine $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

SOLUŢIE. Fie $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x) | x \in \mathbb{R}\}$. Atunci $D' = \mathbb{R}^2$.

a) Pentru $\alpha \neq 0$

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\alpha)} \frac{x^4-y^4}{x^3-y^3} = \lim_{(x,y)\to(\alpha,\alpha)} \frac{x^3+x^2y+xy^2+y^3}{x^2+xy+y^2} = \frac{4\alpha^3}{3\alpha^2} = \frac{4}{3}\alpha.$$

b) Pentru $\alpha = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^3-y^3} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+x^2y+xy^2+y^3}{x^2+xy+y^2} = 0,$$

deoarece

$$\left|\frac{x^3+x^2y+xy^2+y^3}{x^2+xy+y^2}\right| \leq |x| + \frac{|y^3|}{\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2} \leq |x|+\frac{4}{3}|y|,$$

$\forall(x,y) \neq (0,0)$, $x \neq y$ şi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(|x|+\frac{4}{3}|y|\right) = 0$, aplicându-se criteriul majorării. □

EXERCIŢIUL 3.2.16. Fie $f : D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x)|x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^5-y^5}{(x^3-y^3)(x^2+y^2)}.$$

a) Pentru $\alpha \neq 0$, să se determine $\lim\limits_{(x,y)\to(\alpha,\alpha)} f(x,y)$.

b) Există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

SOLUŢIE. Evident $D' = \mathbb{R}^2$.

a) Pentru $\alpha \neq 0$

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\alpha)} \frac{x^5-y^5}{(x^3-y^3)(x^2+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(\alpha,\alpha)} \frac{x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4}{(x^2+xy+y^2)(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{5\alpha^4}{3\alpha^2\cdot 2\alpha^2} = \frac{5}{6}.$$

b) Pentru $\alpha = 0$ rezultă

$$f(x,y) = \frac{x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4}{(x^2+xy+y^2)(x^2+y^2)}, \ \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x \neq y.$$

Atunci, pentru $y = mx$, $x \neq 0$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f(x,mx) = \frac{x^4+mx^4+m^2x^4+m^3x^4+m^4x^4}{(x^2+mx^2+m^2x^2)(x^2+m^2x^2)} =$$

$$= \frac{(1+m+m^2+m^3+m^4)\cdot x^4}{(1+m+m^2)(1+m^2)\cdot x^4} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1+m+m^2+m^3+m^4}{(1+m+m^2)(1+m^2)}.$$

De aici rezultă că nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. □

EXERCIŢIUL 3.2.17. Să se cerceteze dacă există limita funcţiei

$$f : D = \mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\,|\,x \neq \pm 1, y \neq -1\} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{\sqrt{xy+x-y+3}-2}{(x^2-1)(y^3+1)}$$

în $(1,-1)$.

SOLUŢIE. Pentru $(x,y) \in D$

$$\frac{\sqrt{xy+x-y+3}-2}{(x^2-1)(y^3+1)} = \frac{xy+x-y-1}{(x^2-1)(y^3+1)(\sqrt{xy+x-y+3}+2)} =$$
$$= \frac{(x-1)(y+1)}{(x-1)(x+1)(y+1)(y^2-y+1)(\sqrt{xy+x-y+3}+2)} =$$
$$= \frac{1}{(x+1)(y^2-y+1)(\sqrt{xy+x-y+3}+2)}$$
$$\xrightarrow[(x,y)\to(1,-1),x\neq 1,y\neq -1]{} \frac{1}{2\cdot 3\cdot \sqrt{-1+1+1+3}+2} = \frac{1}{24}.$$

□

EXERCIŢIUL 3.2.18. Să se cerceteze dacă există limita funcţiei

$$f : D := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y,z) = \frac{\ln(1+x^2+y^2+2z^2)}{x^2+y^2+z^2}$$

în $(0,0,0)$.

SOLUŢIE. Pentru $(x,y,z) \neq (0,0,0)$

$$f(x,y,z) = \frac{\ln(1+x^2+y^2+2z^2)}{x^2+y^2+z^2} =$$
$$= \frac{\ln(1+x^2+y^2+2z^2)}{x^2+y^2+2z^2}\cdot\frac{x^2+y^2+2z^2}{x^2+y^2+z^2} =$$
$$= \frac{\ln(1+x^2+y^2+2z^2)}{x^2+y^2+2z^2}\cdot\left(1+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

Atunci, dacă $z^2 = m^2(x^2+y^2)$, $m \in \mathbb{R}$,

$$f(x,y,\pm m\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{\ln[1+(1+2m^2)(x^2+y^2)]}{1+(1+2m^2)(x^2+y^2)}\cdot\left(1+\frac{m^2}{1+m^2}\right),$$

$$f(x,y,z) \xrightarrow[(x,y,z)\to(0,0,0),z=\pm m\sqrt{x^2+y^2}]{} 1+\frac{m^2}{1+m^2},$$

deci nu există $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$. □

EXERCIŢIUL 3.2.19. Să se cerceteze dacă există limita funcţiei

$$f : D := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y,z) = \frac{\ln(1+x^2+y^2+2z^2)^y}{x^2+y^2+z^2}$$

în $(0,0,0)$.

SOLUŢIE. Pentru $(x,y,z) \neq (0,0,0)$;

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \frac{\ln(1+x^2+y^2+2z^2)^y}{x^2+y^2+z^2} = y\cdot\frac{\ln(1+x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} = \\
&= y\left[\frac{\ln(1+x^2+y^2+2z^2)}{x^2+y^2+2z^2}\cdot\frac{x^2+y^2+2z^2}{x^2+y^2+z^2}\right] = \\
&= \frac{\ln(1+x^2+y^2+2z^2)}{x^2+y^2+2z^2}\cdot\left(1+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\right)\cdot y \\
&=: g(x,y,z)\cdot h(x,y,z)
\end{aligned}$$

Dacă $x^2+y^2+2z^2 = t$, atunci

$$(x,y,z)\to(0,0,0) \Rightarrow t\to 0,\ (x,y,z)\neq(0,0,0) \Rightarrow t\neq 0,$$

şi

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} g(x,y,z) = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \tag{3.2.2}$$

Evident

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} h(x,y,z) = 0, \tag{3.2.3}$$

deoarece

$$\left|h(x,y,z)\right| = \left|1+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\right|\cdot|y| \leq 2|y|,\ \forall (x,y,z)\neq(0,0,0)$$

şi se aplică Criteriul Majorării, etc.

Din (3.2.2) şi (3.2.3) rezultă

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 1\cdot 0 = 0.$$

□

EXERCIŢIUL 3.2.20. Să se cerceteze dacă există limita funcţiei

$$f : D := \mathbb{R}^3\setminus\{(1,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y,z) = \frac{\ln(1+x^2+y^2+2z^2)^{y^3}}{(x-1)^2+y^2+z^2}$$

în $(1,0,0)$.

SOLUŢIE. Pentru $(x,y,z)\neq(1,0,0)$

$$f(x,y,z) = \frac{\ln(1+x^2+y^2+2z^2)^{y^3}}{(x-1)^2+y^2+z^2} =$$

$$= \ln(1+x^2+y^2+2z^2)\cdot\frac{y^3}{(x-1)^2+y^2+z^2}$$

$$\xrightarrow[(x,y,z)\to(1,0,0)]{} \ln 2 \cdot 0 = 0,$$

deoarece $\ln(1 + x^2 + y^2 + 2z^2) \xrightarrow[(x,y,z)\to(1,0,0)]{} \ln 2$ şi

$$\left|\frac{y^3}{(x-1)^2 + y^2 + z^2}\right| = \frac{y^2}{(x-1)^2 + y^2 + z^2}|y| \le |y|, \ \forall (x,y,z) \neq (1,0,0),$$

evident $|y| \xrightarrow[(x,y,z)\to(1,0,0)]{} 0$ şi se aplică criteriul majorării pentru a deduce că

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = 0.$$

□

EXERCIŢIUL 3.2.21. Să se cerceteze dacă există limita funcţiei

$$f : D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y) = (x^2 + y^2)^{x^2 y}$$

în $(0,0)$.

SOLUŢIE. Pentru $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x^2+y^2)^{x^2 y} = \left[e^{\ln(x^2+y^2)}\right]^{x^2 y} = e^{x^2 y \ln(x^2+y^2)} = \\ &= e^{x^2 y \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)} = e^{-\frac{\ln\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\frac{1}{x^2+y^2}}\cdot\frac{x^2 y}{x^2+y^2}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 1, \end{aligned}$$

deoarece

i) $\left|\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}|y| \le |y|$, $(x,y) \neq (0,0)$ şi se aplică Criteriul Majorării, deci $\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$;

ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\frac{1}{x^2+y^2}}{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$, unde $\dfrac{1}{x^2+y^2} = t$; $(x,y) \to (0,0) \Rightarrow t \to \infty$. □

EXERCIŢIUL 3.2.22. Să se cerceteze dacă există limita funcţiei

$$f : D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 \ln\sqrt{x^2+y^2}$$

în $(0,0)$.

Soluţie. Pentru $(x, y) \neq (0,0)$

$$f(x,y) = x^2 \ln \sqrt{x^2+y^2} = -\frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0,$$

deoarece

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$, unde $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = t$, iar $(x,y) \to (0,0) \Rightarrow t \to \infty$;

ii) $\left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|x| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}} \cdot |x| \leq |x|$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$, se aplică criteriul Majorării şi rezultă $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

□

Exerciţiul 3.2.23. Să se studieze dacă există limita funcţiei

$$f : D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^6+y^6}$$

în $(0,0)$.

Soluţie. Pentru $(x,y) \neq (0,0)$ şi $n \in \mathbb{N}$

$$f(x,y) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^6+y^6} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{1}{x^6+y^6} = \frac{\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)^n}{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{(x^2+y^2)^n}{x^6+y^6}.$$

Dar

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)^n}{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^t} = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.2.4}$$

Pentru $n \geq 4$, din nou se poate aplica criteriul majorării şi se deduce că

$$\frac{(x^2+y^2)^n}{x^6+y^6} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0. \tag{3.2.5}$$

Din (3.2.4) şi (3.2.5) rezultă că există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \cdot 0 = 0$. □

EXERCIŢIUL 3.2.24. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\ln(1+y^2),\ y\neq 0\\ x^2,\ y=0\end{cases}$$

Să se studieze continuitatea lui f.

SOLUŢIE. Pentru $a\in\mathbb{R}$ arbitrar:

$$\lim_{(x,y)\to(a,0),y=0} f(x,y)=\lim_{x\to a} x^2=a^2,$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,0),y\neq 0} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,0),y\neq 0}\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\ln(1+y^2)=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(a,0),y\neq 0}\frac{\ln(1+y^2)}{y^2}\cdot(x^2+y^2)=1\cdot a^2=a^2,$$

deci există $\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y)$ şi $\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y)=a^2$. Cum $f(a,0)=a^2$, trezultă că f este continuă în $(a,0)$, pentru oricare $a\in\mathbb{R}$.

În final f este evident continuă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(a,0)|\ a\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^2\setminus Ox$ (provenind din operaţii algebrice şi de compunere cu funcţii continue). □

EXERCIŢIUL 3.2.25. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+ay+10,\ x\geq 0\\ y\sin x+b,\ x<0\end{cases},$$

$a,\ b\in\mathbb{R}$. Să se determine a şi b astfel încât f să fie continuă.

SOLUŢIE. Pentru $\beta\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,\beta),x\geq 0} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,\beta),x\geq 0}(x^2+ay+10)=a\beta+10,$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,\beta),x<0} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,\beta),x<0}(y\sin x+b)=b,$$

deci f continuă în $(0,\beta)\Leftrightarrow a\beta+10=b$.

f este evident continuă pe $\mathbb{R}^2\setminus Oy$ (provine din operaţii algebrice cu funcţii continue), deci f este continuă pe $\mathbb{R}^2\Leftrightarrow f$ continuă pe $Oy\Leftrightarrow$ f continuă în orice $(0,\beta),\beta\in\mathbb{R}\Leftrightarrow a\beta+10=b,\ \forall\beta\in\mathbb{R}\Leftrightarrow a=0$, $b=10$. □

EXERCIŢIUL 3.2.26. Fie funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}(1+x^2)^{\frac{y}{x^4+y^2}},\ (x,y)\neq(0,0)\\ 1,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Să se arate că

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, există $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$;

b) $\forall y \in \mathbb{R}$, există $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$;

c) funcţiile g, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, $h(y) := \lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, sunt continue şi

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right).$$

d) nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

SOLUŢIE. a), b) Evident

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{y\to 0} f(x,y) = (1+x^2)^0 = 1$$

şi

$$y \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{x^2 y}{x^4+y^2}} = e^0 = 1.$$

c) Se deduce că $g(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(y) = 1$, $\forall y \in \mathbb{R}$, deci

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1 = \lim_{y\to 0} h(y);$$

d) Pentru $m \in \mathbb{R}$,

$$y = mx^2, x \neq 0 \Rightarrow f(x, mx^2) = \left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{mx^4}{(1+m^2)x^4}} \longrightarrow e^{\frac{m}{1+m^2}},$$

deci nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, de unde rezultă că f nu e continuă în $(0,0)$. $\square$

EXERCIŢIUL 3.2.27. Să se studieze continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, \ (x,y) = (0,0); \\ \dfrac{x^2-2}{x^2+y^2}(\sqrt{1-x^2-y^2}-1), \ 0 < x^2+y^2 \le 1; \\ (x^2+y^2)^{\frac{\ln(1+y^2)}{x^2+y^2-1}}, \ x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

SOLUŢIE. Avem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+(-x^2-y^2)}-1}{-x^2-y^2} \cdot \frac{x^2-2}{-1} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

şi, cum $f(0,0) = 0$, rezultă că f nu este continuă în $(0,0)$.

Fie $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ cu $a^2+b^2=1$. Deoarece

$$\lim_{(x,y)\to(a,b),x^2+y^2\le 1} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b),x^2+y^2\le 1} \frac{x^2-2}{x^2+y^2}(\sqrt{1-x^2-y^2}-1) =$$

$$= \frac{a^2-2}{1}(\sqrt{1-1}-1) = 2-a^2 = f(a,b)$$

şi

$$\lim_{(x,y)\to(a,b),x^2+y^2>1} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b),x^2+y^2>1} (x^2+y^2)^{\frac{\ln(1+y^2)}{x^2+y^2-1}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(a,b),x^2+y^2>1} \left[(1+x^2+y^2-1)^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}\right]^{\ln(1+y^2)} =$$

$$= e^{\ln(1+b^2)} = 1+b^2 = 2-a^2$$

rezultă că f este continuă în (a,b), pentru orice $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ cu $a^2+b^2=1$.

Evident f continuă pe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, 0 < x^2+y^2 < 1\}$ şi pe $\{(x,y) | \, x^2+y^2 > 1\}$ (provenind din operaţii algebrice şi de compunere cu funcţii continue).

În final rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. □

3.3. Exerciţii propuse

EXERCIŢIUL 3.3.1. Să se arate, utilizând definiţia, că

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{1+x} = 0$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{2}$.

EXERCIŢIUL 3.3.2. Să se arate că nu există limitele funcţiilor în punctele indicate:

a) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x_0 = 0$;

b) $f(x) = (1+\sin x)\ln x$, $x_0 = +\infty$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 0$.

EXERCIŢIUL 3.3.3. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-2x^2+1}{-x^3+x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-x-3}{-2x+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{-x^3+2x-1}}{2x+1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6}$; e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\arcsin 3x}$; g) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\arcsin(x+1)}{\operatorname{tg}(1-x^2)}$;

h) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5^x-25}{x^2-4}$; i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1+3x)}$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{3+x}\right)^{\frac{x^2}{x+2}}$; k) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{\arcsin x}}$.

EXERCIŢIUL 3.3.4. Să se calculeze:

i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{a^{\operatorname{ctg} x}-a}{x-\dfrac{\pi}{4}}$, $a>0$;

ii) $\lim\limits_{x\searrow 0} (1+\operatorname{tg} x^2)^{\frac{1}{x^2}}$;

iii) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x-x^a}{x-a}$, $a>0$.

EXERCIŢIUL 3.3.5. Să se studieze existenţa limitelor laterale în $x=0$, pentru funcţia $f:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x) = x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{1+a^{\frac{1}{x}}}$, $a>0$.

EXERCIŢIUL 3.3.6. Să se studieze continuitatea funcţiilor

$$a)\ f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases},$$

$$b)\ f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+\sin x^2}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

EXERCIŢIUL 3.3.7. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie continuă pe domeniul ei de definiţie:

$$a)\ f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{2x}, & x\in[-1,0)\\ a, & x=0\\ \dfrac{x^2+4x}{\operatorname{tg}4(x^2+4x)}+\dfrac{1}{4}, & x\in(0,1]\end{cases},$$

$$b)\ f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2\sin x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x<0\\ a, & x=0\\ 2^{-\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2e^x}}, & x\in(0,\infty)\end{cases},$$

$$c)\ f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}.$$

EXERCIŢIUL 3.3.8. Să se determine a şi b parametri reali astfel încât funcţia $f:(-\infty,2]\cup\{3\}\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}ax+1, & x\leqslant -1\\ bx-1, & -1<x<2\\ 3, & x=2\\ 4, & x=3\end{cases},$$

să fie continuă pe domeniul ei de definiţie.

EXERCIŢIUL 3.3.9. Poate fi prelungită prin continuitate în 0 funcţia

$$f(x)=1-x\sin\frac{1}{x}?$$

EXERCIŢIUL 3.3.10. Fie

$$f:[-1,2]\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}a, & -1\leqslant x<0\\ \sqrt{x^2-2x+1}, & 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases},\ a\in\mathbb{R}.$$

Determinaţi a astfel încât f să fie continuă.

EXERCIŢIUL 3.3.11. Să se studieze continuitatea funcţiei lui Dirichlet pe $\mathbb{R}$:

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{Q}\end{cases}.$$

EXERCIŢIUL 3.3.12. Să se arate că

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{2}{x^2}, & x=0\\ \alpha, & x\neq 0\end{cases},\ \alpha\in\mathbb{R},$$

este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $\alpha=0$.

EXERCIŢIUL 3.3.13. Utilizând definiţia, să se arate că

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,-1)}(3x-2y)=14;$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}(xy-3x+4)=0.$

EXERCIŢIUL 3.3.14. Există limitele:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2};$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x-y}{x+y};$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}?$

EXERCIŢIUL 3.3.15. Să se studieze existenţa limitei funcţiilor în punctele indicate:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{3-x+y}{4+x-2y}$; (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3x-2y}{2x-3y}$ (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,\pi)}x^2\sin\dfrac{y}{x};$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$; (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}e^{-1/x^{2(y-1)^2}};$

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2x-y}{x^2+y^2}$; (g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}};$

(h) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}\dfrac{\arcsin(xy-2)}{\operatorname{arctg}(3xy-6)}.$

EXERCIŢIUL 3.3.16. Există $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\dfrac{4x+y-3z}{2x-5y+2z}?$

EXERCIŢIUL 3.3.17. Să se calculeze

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x^2+y^2)\,x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)};$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^4y^4)}{(x^2+y^2)^2};$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)\mathrm{tg}\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}$.

EXERCIŢIUL 3.3.18. Să se arate că

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$;

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} = 0$.

EXERCIŢIUL 3.3.19. Să se studieze existenţa limitei funcţiei $f(x,y) = \dfrac{xy}{x-y}$ în punctele de acumulare ale domeniului său.

EXERCIŢIUL 3.3.20. Să se cerceteze dacă există limita funcţiei

$$f : D := \mathbb{R}^3 \setminus \{(1,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y,z) = \frac{\ln(1+x^2+y^2+2z^2)^y}{(x-1)^2+y^2+z^2}$$

în $(1,0,0)$.

EXERCIŢIUL 3.3.21. Aceeaşi cerinţă ca la exerciţiul 3.3.19 pentru

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^3+y^3}.$$

EXERCIŢIUL 3.3.22. Cercetaţi continuitatea următoarelor funcţii în punctele indicate:

(a) $f(x,y) = 2x^2+y^2$, (x_0,y_0);

(b) $f(x,y) = \dfrac{2x}{x+5y}$, $(0,0)$;

(c) $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$; $(0,0)$.

EXERCIŢIUL 3.3.23. Să se studieze continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{\sqrt{1+x^2y}-1}, & x^2y \neq 0 \\ 2\,, & x^2y = 0 \end{cases}$$

EXERCIŢIUL 3.3.24. Aceeaşi cerinţă ca la exerciţiul 3.3.23 pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+x-y}, & x \neq y \text{ şi } y \neq x+1 \\ 4\,, & x = y \text{ sau } y = x+1 \end{cases}$$

EXERCIŢIUL 3.3.25. Aceeaşi cerinţă ca la exerciţiul 3.3.23 pentru funcţia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} x, & xy \geqslant 0 \\ y\,, & xy < 0 \end{cases}.$$

EXERCIŢIUL 3.3.26. Fie $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

şi $U = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leqslant x^2 \right\}$. Arătaţi că f nu este continuă în $(0,0)$ dar $f|_U$ este continuă în $(0,0)$.

EXERCIŢIUL 3.3.27. a) Să se studieze uniform continuitatea următoarelor funcţii pe mulţimile indicate:
i) $f(x) = \sin x^2$, $x \in \mathbb{R}$;
ii) $f(x) = x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$;
iii) $f(x) = \frac{x}{1+x} + x$, $x \in (0, \infty)$;
iv) $f(x) = \frac{x}{1+x} + x$, $x \in (-1, \infty)$;
v) $f(x) = e^x \cos \dfrac{1}{x}$, $x \in (0,1)$.

EXERCIŢIUL 3.3.28. Să se studieze uniform continuitatea funcţiei $f(x) = \ln x$, pe intervale de forma $(0, a]$ şi $[a, \infty)$ cu $a > 0$, apoi pe tot $(0, \infty)$.

EXERCIŢIUL 3.3.29. Să se studieze uniform continuitatea funcţiei

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y},\ (x,y) \in (1,2) \times (1,2).$$

EXERCIŢIUL 3.3.30. Fie funcţia $f(x,y) = xy + 6x$. Arătaţi că ea este uniform continuă pe domeniul $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

CAPITOLUL 4

Diferenţiabilitate

4.1. Noţiuni şi rezultate teoretice

A. Derivabilitatea funcţiilor reale de variabilă reală.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D'$.

DEFINIŢIA 4.1.1. (Definiţia derivabilităţii).

a) Funcţia f *are derivată (este derivabilă) în punctul* x_0 dacă există (există şi este finită) limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Numărul $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se numeşte *derivata în* x_0 şi se notează cu $f'(x_0)$.

b) Dacă în plus $x_0 \in ((-\infty, x_0) \cap D)'$, atunci funcţia f *are derivată (este derivabilă) la stânga în punctul* x_0 dacă există (există şi este finită)

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Numărul $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se numeşte *derivata la stânga în* x_0 *a lui* f şi se notează cu $f'_s(x_0)$.

c) Dacă în plus $x_0 \in ((x_0, \infty) \cap D)'$, atunci funcţia f *are derivată (este derivabilă) la dreapta în punctul* x_0 dacă există (există şi este finită)

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Numărul $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se numeşte *derivata la dreapta în* x_0 *a lui* f şi se notează cu $f'_d(x_0)$.

PROPOZIŢIA 4.1.2. *(Caracterizarea derivabilităţii cu derivate laterale). Fie* $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in ((-\infty, x_0) \cap D)' \cap ((x_0, \infty) \cap D)'$. *Atunci* f *este derivabilă în* $x_0 \iff f$ *derivabilă la stânga şi la dreapta în punctul* x_0 *şi* $f'_d(x_0) = f'_s(x_0)$.

PROPOZIŢIA 4.1.3. *(Operaţii algebrice şi de compunere cu funcţii derivabile).*

I. Fie f, $g: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D'$ *şi* f *şi* g *derivabile în* x_0. *Atunci*

a) $f + g$ *este derivabilă în* x_0 *şi* $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

b) $f \cdot g$ *este derivabilă în* x_0 *şi*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0);$$

c) dacă $g(x) \neq 0$, $x \in V \cap D$ $(V \in \mathcal{V}(a))$ *rezultă* f/g *este derivabilă în* x_0 *şi*

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

II. Fie D, $E \subset \mathbb{R}$, $u: D \to E$, $x_0 \in D \cap D'$, $f: E \to \mathbb{R}$, $y_0 = u(x_0) \in E \cap E'$, u *derivabilă în* x_0, f *derivabilă în* y_0. *Atunci* $f \circ u$ *este derivabilă în* x_0 *şi*

$$(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0)) \cdot u'(x_0).$$

PROPOZIŢIA 4.1.4. *(Legătura derivabilităţii cu continuitatea). Fie* $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D'$ *şi* f *derivabilă în* x_0. *Atunci* f *este continuă în* x_0.

TEOREMA 4.1.5. *(Fermat). Dacă o funcţie* f *este derivabilă în punctul de extrem local* x_0 *şi* $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, *atunci*

$$f'(x_0) = 0.$$

TEOREMA 4.1.6 (Teorma lui Rolle). *Fie* $f: I \to \mathbb{R}$, I*-interval, şi două puncte* $a < b$ *din intervalul* I. *Dacă:*

(1) f *este continuă pe* $[a, b]$,
(2) f *este derivabilă pe* (a, b),
(3) $f(a) = f(b)$,

atunci există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ *în care derivata se anulează.*

TEOREMA 4.1.7 (Teorema lui Lagrange). *Fie* $f: I \to \mathbb{R}$, I*-interval, şi două puncte* $a < b$ *din intervalul* I. *Dacă:*

(1) f *este continuă pe* $[a, b]$,
(2) f *este derivabilă pe* (a, b),

atunci există cel puţin un punct $c \in (a,b)$*, astfel încât*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

DEFINIŢIA 4.1.8. (Derivate de ordin superior). Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D'$. f se numeşte *derivabilă de ordin* 2 *în* $x_0 \iff$ există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, astfel încât f este derivabilă de ordinul 1 pe $V \cap D$ şi $f' : V \cap D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0.

Inductiv, se pot defini şi derivatele de ordin superior ale lui f în x_0.

TEOREMA 4.1.9 (Teorema lui l'Hôspital, cazul $\frac{0}{0}$). *Fie* $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ *interval şi* $x_0 \in I'$. *Se presupune că:*

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$;
(2) f *şi* g *sunt derivabile pe* $I \setminus \{x_0\}$;
(3) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$;
(4) *există* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci:

(a) $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$;
(b) *funcţia* $\dfrac{f}{g}$ *are limită în* x_0 *şi*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

TEOREMA 4.1.10. *(Teorema lui l'Hospital, cazul* $\frac{\infty}{\infty}$*). Fie* $I \subset \mathbb{R}$ *un interval,* $x_0 \in I'$ *şi* $f, g : I \to \mathbb{R}$. *Se presupune că:*

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$;
(2) f *şi* g *sunt derivabile pe* $I \setminus \{x_0\}$;
(3) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$;
(4) *există* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci funcţia $\dfrac{f}{g}$ *are limită în* x_0 *şi*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

TEOREMA 4.1.11. *(Formula lui Taylor cu rest Lagrange). Dacă* $f : I \to \mathbb{R}$ *(*$I \subset \mathbb{R}$ *interval),* $x_0 \in I$ *şi* f *este derivabilă de ordin* $n+1$ *pe* I, $n \in \mathbb{N}^*$, *atunci pentru orice* $x \in I$, *există* ξ *între* x_0 *şi* x *cu proprietatea*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.$$

B. Diferenţiabilitatea funcţiilor vectoriale de variabilă vectorială.

I. Derivate parţiale şi diferenţiabilitate pentru funcţii vectoriale de variabilă vectorială. Criterii de diferenţiabilitate.
Se vor considera în continuare funcţii $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

şi se vor prezenta conceptele şi rezultatele pe cazul particular $n = 2$, $m = 1$ şi cazul general $n \geq 1$, $m \geq 1$ arbitrare.

DEFINIŢIA 4.1.12. (Definiţia derivabilităţii după direcţia unui versor).
I. ($n = 2$, $m = 1$). Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, deschis, $(a, b) \in D$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}$ versor. Atunci *f este derivabilă după direcţia lui u în* $(a, b) \Leftrightarrow$ următoarea limită există şi este finită:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((a, b) + t(u_1, u_2)) - f(a, b)}{t}.$$

Limita de mai sus se va nota $\dfrac{\partial f}{\partial u}(a, b)$ şi se va numi *derivata lui f după direcţia lui u în* (a, b).
II. ($n \geq 1$, $m \geq 1$ arbitrare). Fie $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, deschis, $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ versor. Atunci *f este derivabilă după direcţia lui u în a* $\Leftrightarrow$ următoarea limită există în $\mathbb{R}^m$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}.$$

Limita de mai sus se va nota $\dfrac{\partial f}{\partial u}(a)$ şi se va numi *derivata lui f după direcţia lui u în a*. Se deduce că f este derivabilă după direcţia lui u în $a \Longleftrightarrow f_j$ sunt derivabile după direcţia lui u în a, $\forall\, j = \overline{1, m}$ şi

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial u}(a) \right).$$

OBSERVAŢIA 4.1.13. (Derivate parţiale).
I. ($n = 2$, $m = 1$). Dacă $u = (1, 0) = e_1$ sau $u = (0, 1) = e_2$, se obţin aşa numitele *derivate parţiale ale lui f în* (a, b) *în raport cu x, respectiv y*:

$$\frac{\partial f}{\partial e_1}(a, b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} =: \frac{\partial f}{\partial x}(a, b);$$

$$\frac{\partial f}{\partial e_2}(a,b) = \lim_{y\to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} =: \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

II. ($n \geq 1$, $m \geq 1$ arbitrare). Dacă $u = (0,\dots,0,1,0,\dots,0) = e_i$, se obţin aşa numitele *derivate parţiale ale lui f în a în raport cu x_i*:

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \lim_{x_i\to a_i} \frac{f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{x_i-a_i} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Se deduce că f este derivabilă parţial în raport cu x_i în $a \iff f_j$ sunt derivabile parţial în raport cu x_i în a, $\forall\, j = \overline{1,m}$ şi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a),\dots,\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a)\right).$$

DEFINIŢIA 4.1.14. (Definiţia diferenţiabilităţii).

I. ($n = 2$, $m = 1$). Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, deschis, $(a,b) \in D$. Atunci f *este diferenţiabilă în* $(a,b) \Leftrightarrow \exists T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ liniară, astfel încât

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-f(a,b)-T(x-a,y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0.$$

II. ($n \geq 1$, $m \geq 1$ arbitrare). Fie $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, deschis, $a = (a_1,\dots,a_n) \in D$. Atunci f *este diferenţiabilă în* $a \Leftrightarrow$

$$(\exists T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ liniară })\left(\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{||x-a||} = 0 \in \mathbb{R}^m\right).$$

(pentru $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x|| := \sqrt{x_1^2+\dots x_n^2}$).

Se deduce simplu că aplicaţia T cu proprietatea de mai sus este unică şi se va numi *diferenţiala lui f în a* ($T =: df(a)$ pe cazul general, $T =: df(a,b)$ pentru $n = 2$, $m = 1$).

Se deduce că f este diferenţiabilă în $a \iff f_j$ sunt diferenţiabile în a, $\forall\, j = \overline{1,m}$ şi

$$df(a) = (df_1(a),\dots,df_m(a)).$$

TEOREMA 4.1.15. *(Legătura diferenţiabilităţii cu derivabilitatea după direcţii).*

I. ($n = 2$, $m = 1$). Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, deschis, $(a,b) \in D$. Atunci, dacă f este diferenţiabilă în (a,b) *rezultă că $\forall u = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$ versor, există $\frac{\partial f}{\partial u}(a,b)$ şi $\frac{\partial f}{\partial u}(a,b) = df(a,b)(u_1,u_2)$. În particular*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = df(a,b)(1,0);\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = df(a,b)(0,1).$$

II. ($n \geq 1$, $m \geq 1$ arbitrare). Fie $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, deschis, $a \in D$. Atunci, dacă f este diferenţiabilă în *a rezultă că $\forall u \in \mathbb{R}^n$ versor, există $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ şi $\frac{\partial f}{\partial u}(a) = df(a)(u)$. În particular, $\forall\, i = \overline{1,n}$*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df(a)(e_i).$$

CONSECINŢA 4.1.16. *(Expresia diferenţialei).*

I. ($n = 2$, $m = 1$). Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, deschis, $(a,b) \in D$. Atunci, dacă f este diferenţiabilă în (a,b) rezultă că $\forall v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$df(a,b)(v_1,v_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)v_2,$$

sau, dacă se notează cu dx, respectiv dy aplicaţiile proiecţie pe cele două axe, se obţine

$$df(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)dy.$$

II. ($n \geq 1$, $m \geq 1$ arbitrare). Fie $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, deschis, $a \in D$. Atunci, dacă f este diferenţiabilă în a rezultă că $\forall v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$df(a)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)v_i,$$

sau, dacă se notează cu dx_i aplicaţiile proiecţie pe axe, se obţine

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i.$$

OBSERVAŢIA 4.1.17. (Jacobiana unei funcţii diferenţiabile).

I. ($n = 2$, $m = 1$). Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, deschis, $(a,b) \in D$. Atunci, dacă f este diferenţiabilă în (a,b), se va nota $J_f(a,b) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$, se va numi *Jacobiana lui f în (a,b)* şi este exact matricea asociată diferenţialei $df(a,b)$ în bazele canonice ale lui $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{R}$. Rezultă că $\forall v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$df(a,b)(v_1,v_2) = J_f(a,b) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

II. ($n \geq 1$, $m \geq 1$ arbitrare). Fie $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, deschis, $a \in D$. Atunci, dacă f este diferenţiabilă în a, se va nota $J_f(a) :=$

$\left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right)_{j=\overline{1,m},i=\overline{1,n}}$, se va numi *Jacobiana lui f în a* şi este exact matricea asociată diferenţialei $df(a)$ în bazele canonice ale lui $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{R}^m$. Rezultă că $\forall v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$df(a)(v_1, \dots, v_n) = J_f(a) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

PROPOZIŢIA 4.1.18. *(Criteriu de diferenţiabilitate).*

I. $(n = 2,\ m = 1)$. Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, deschis, $(a, b) \in D$. Atunci f diferenţiabilă în $(a, b) \Leftrightarrow$

i) există derivatele parţiale $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) \in \mathbb{R}$;

ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - a)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0.$

II. $(n \geq 1,\ m \geq 1$ arbitrare$)$. Fie $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, deschis, $a \in D$. Atunci f este diferenţiabilă în $a \Leftrightarrow$

i) există derivatele parţiale $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, n$;

ii) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)}{||x - a||} = 0 \in \mathbb{R}^m.$

PROPOZIŢIA 4.1.19. *(Crit. de diferenţiabilitate "cu derivate parţiale").*

I. $(n = 2,\ m = 1)$. Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, deschis, $(a, b) \in D$. Dacă există derivatele parţiale $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ pe o vecinătate a lui (a, b) (pe D) şi sunt continue în (a, b) (pe D), atunci f diferenţiabilă în (a, b) (pe D).

II. $(n \geq 1,\ m \geq 1$ arbitrare$)$. Fie $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, deschis, $a \in D$. Dacă există derivatele parţiale $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$ pe o vecinătate a lui a (pe D) şi sunt continue în a (pe D), atunci f diferenţiabilă în a (pe D).

II. Derivate parţiale pentru funcţii vectoriale compuse de variabilă vectorială.

PROPOZIŢIA 4.1.20. *(Diferenţiala şi derivate parţiale de funcţii compuse).*

I. Fie $f : E \subset \mathbb{R}^n \to F \subset \mathbb{R}^m$, E, F deschise, $g : F \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Se va nota variabila funcţiei f cu $x = (x_1, \ldots, x_n)$ iar variabila funcţiei g cu $y = (y_1, \ldots, y_m)$. Funcţia compusă $h = g \circ f$ are forma

$$h(x) = g(f(x)) = g(f_1(x), \ldots, f_m(x)) =$$
$$= g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Atunci, dacă f diferenţiabilă în x, iar g în $y = f(x)$, atunci $g \circ f$ diferenţiabilă în x şi $d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$, adică

$$J_{g\circ f}(x) = J_g(f(x)) \cdot J_f(x),$$

sau

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x))\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) + \ldots + \frac{\partial g}{\partial y_l}(f(x))\frac{\partial f_l}{\partial x_i}(x) + \ldots +$$
$$+\frac{\partial g}{\partial y_m}(f(x))\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x),\ i \in \{1, \ldots, n\}.$$

II. De exemplu, fie funcţiile

$$f : E \subset \mathbb{R}^2 \to F \subset \mathbb{R}^2, f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

şi $g : F \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, E şi F deschise.

Se defineşte funcţia compusă

$$h = g \circ f,\ h(x, y) = g(f(x, y)) = g(u(x, y), v(x, y)).$$

Atunci (notând tot cu u şi v variabilele funcţiei g) rezultă

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u(x, y), v(x, y))\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x, y), v(x, y))\frac{\partial v}{\partial x}(x, y),$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u(x, y), v(x, y))\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u(x, y), v(x, y))\frac{\partial v}{\partial y}(x, y).$$

Se poate scrie prin abuz

$$g(x, y) = g(u(x, y), v(x, y)).$$

III. Derivate parţiale de ordin superior pentru funcţii vectoriale de variabilă vectorială.

DEFINIŢIA 4.1.21. Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D deschis, $f = f(x_1, \ldots, x_n)$. Fie $a \in D$. Se presupune că pe o vecinătate V a lui a există derivata parţială în raport cu una din variabile, x_i. Dacă funcţia $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ admite derivata parţială în raport cu variabila x_j în punctul a, $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$, aceasta se notează $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ şi se numeşte *derivata parţială de ordin doi în raport cu x_i şi x_j a funcţiei f în punctul a.* Se spune că f *admite derivată parţială de ordin doi în raport cu x_i şi x_j în a.* Dacă $i = j$, atunci derivata de mai sus se notează $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ şi se numeşte *derivata de ordin doi în raport cu x_i a funcţiei f în a.* Pentru $m = 1$ se va nota

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)\right)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

şi se va numi *Hessiana lui f în a.*

Dacă derivatele parţiale de ordin doi există în fiecare punct din D se spune că f *admite derivate parţiale de ordin doi pe D.*

Se pot defini apoi, dacă acestea există, *derivatele parţiale de ordin trei*:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)(a), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)(a),$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)(a), \text{ etc.}$$

şi de ordin mai mare ca trei.

TEOREMA 4.1.22 (Teorema lui Schwarz). *Fie funcţia $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, D deschisă, care admite pe D derivatele parţiale de ordin doi*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \text{ unde } i \neq j, \text{ fixaţi.}$$

Dacă în punctul $a = (a_1, \dots, a_k) \in D$ aceste derivate sunt continue, ele sunt egale.

IV. Extreme libere pentru funcţii reale de variabilă vectorială.

TEOREMA 4.1.23. *(Fermat). Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (D deschis) o funcţie care admite derivate parţiale de ordinul întâi în raport cu toate variabilele într-un punct $a \in D$. Dacă a este punct de extrem local, atunci*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0.$$

(adică a este punct critic pentru f).

TEOREMA 4.1.24. *(Condiţii suficiente de extrem). Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (D deschisă) o funcţie de clasă C^2 pe D (cu derivate parţiale de ordin doi continue pe D) şi $a \in D$ un punct critic.*

1) Dacă matricea Hessiană a lui f în a, $H_f(a)$ este pozitiv definită, atunci a este punct de minim local pentru f.

2) Dacă matricea Hessiană a lui f în a, $H_f(a)$ este negativ definită, atunci a este punct de maxim local pentru f.

3) Dacă în plus f este de clasă C^3 şi matricea Hessiană a lui f în a, $H_f(a)$ este nedefinită, atunci a nu este punct de extrem local pentru f.

PROPOZIŢIA 4.1.25. *(Criteriul lui Sylvester). Fie $A = (a_{ji})_{j,i=\overline{1,n}}$ o matrice simetrică de tip $n \times n$. Sunt adevărate echivalenţele:*

a) A este pozitiv definită $\Leftrightarrow$ toţi minorii diagonali $\Delta_1 = a_{11}$,
$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, ..., $\Delta_n = \det A$, *sunt strict pozitivi.*

b) A este negativ definită $\Leftrightarrow$ $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $(-1)^n \Delta_n > 0$.

V. Extreme condiţionate pentru funcţii reale de variabilă vectorială.

Se dă o funcţie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D deschis şi relaţiile

$$\left\{ \begin{array}{c} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{array} \right. \tag{4.1.1}$$

cu $g_1, \dots, g_m : D \to \mathbb{R}$ şi $m < n$.

Să notăm $A = \{x \in D;\ x \text{ verifică relaţiile (4.1.1)}\}$.

Se caută punctele $x_0 \in A$ cu proprietatea că există U, vecinătate a lui x_0 astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, $f(x) - f(x_0)$ să aibă semn constant. Un astfel de punct se numeşte *punct de extrem local condiţionat de (4.1.1) pentru f* (sau *punct de extrem local cu legături*).

Se va da în continuare o condiţie necesară pentru ca un punct să fie punct de extrem local condiţionat.

Fie $k = n - m$. Se notează

$$\frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_{k+1}, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_{k+1}} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_{k+2}} & & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_{k+1}} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_{k+2}} & & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_{k+1}} & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_{k+2}} & & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

TEOREMA 4.1.26. *(Condiţii necesare de extrem condiţionat). Se presupune că x_0 este punct de extrem local pentru f cu legăturile (4.1.1). Se presupune de asemenea că f şi g_i, $i = 1, \ldots, m$ sunt de clasă C^1 pe D, şi că*

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_{k+1}, \ldots, x_n)}(x_0) \neq 0.$$

Atunci există m numere reale $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (numite multiplicatorii lui Lagrange) astfel încât funcţia

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots +$$

$$+\lambda_m g_m(x_1, \ldots, x_n)$$

să verifice:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x_0) = 0,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x_0) = 0,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m.$$

TEOREMA 4.1.27. *(Condiţii suficiente de extrem condiţionat). Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, funcţiile f, $g_1, \ldots, g_m : D \to \mathbb{R}$, de clasă C^2 pe D şi (x_0, λ_0) (cu $x_0 \in D$) un punct critic pentru funcţia Lagrange*

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots +$$

$$+\lambda_m g_m(x_1, \ldots, x_n).$$

Se consideră forma pătratică

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(x_0, \lambda_0)\, \xi_i \xi_j$$

şi relaţiile

$$(4.1.2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_0)\xi_1 + \ldots + \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}(x_0)\xi_n = 0, \\ \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1}(x_0)\xi_1 + \ldots + \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}(x_0)\xi_n = 0, \end{cases}$$

obţinute prin diferenţierea relaţiilor (4.1.1) în x_0 după vectorul $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Se consideră mulţimea $\Gamma = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) | \xi_1, \ldots, \xi_n$ verifică relaţiile (4.1.2) $\}$.

a) Dacă $\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_n) > 0$ pentru orice $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \Gamma$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq (0, \ldots, 0)$, atunci x_0 este punct de minim local cu legăturile (4.1.1) pentru f.

b) Dacă $\Phi(\xi_1, \dots, \xi_n) < 0$ *pentru orice* $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Gamma$, $(\xi_1, \dots, \xi_n) \neq (0, \dots, 0)$, *atunci* x_0 *este punct de maxim local cu legăturile (4.1.1) pentru* f.

c) Dacă $\Phi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ *nu are semn constant pe* Γ, *atunci* x_0 *nu este punct de extrem local cu legăturile (4.1.1) pentru* f.

VI. Funcţii implicite.

Fie $F : U \times V \to \mathbb{R}^p$ unde $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^p$ deschişi. Deci F, este funcţie de (x, y) unde $x = (x_1, \dots, x_k) \in U \subset \mathbb{R}^k$, iar $y = (y_1, \dots, y_p) \in V \subset \mathbb{R}^p$.

Se va nota în cele ce urmează cu $J_{F,y}(x, y)$ matricea derivatelor parţiale ale funcţiei F (adică ale componentelor sale $F_1, \dots, F_p$) în raport cu $y_1, \dots, y_p$. Analog, se va nota cu $J_{F,x}(x, y)$ matricea derivatelor parţiale ale funcţiei F (adică ale componentelor sale $F_1, \dots, F_p$) în raport cu $x_1, \dots, x_k$, calculate în (x, y):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & & \frac{\partial F_1}{\partial y_p} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & & \frac{\partial F_2}{\partial y_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_p}{\partial y_1} & \frac{\partial F_p}{\partial y_2} & & \frac{\partial F_p}{\partial y_p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & & \frac{\partial F_2}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_p}{\partial x_1} & \frac{\partial F_p}{\partial x_2} & & \frac{\partial F_p}{\partial x_k} \end{pmatrix},$$

Se observă că ele sunt matrice de tip $p \times p$ şi $p \times k$.

TEOREMA 4.1.28. *(Teorema funcţiilor implicite). Fie* $F : U \times V \to \mathbb{R}^p$, *unde* $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^p$ *deschişi. Presupunem că* F *este de clasă* C^1 *pe* $U \times V$. *Fie* $(x_0, y_0) \in U \times V$ *pentru care sunt adevărate condiţiile:*

$F(x_0, y_0) = 0$ *şi matricea* $J_{F,y}(x_0, y_0)$ *este inversabilă.*

Atunci există o vecinătate $U_1 \subset U$ *a lui* x_0 *şi o vecinătate* $V_1 \subset V$ *a lui* y_0 *şi o unică funcţie* $f : U_1 \to V_1$ *astfel încât* $f(x_0) = y_0$, *şi* $F(x, f(x)) = 0$.

Mai mult, f *este de clasă* C^1 *şi*

$$J_f(x) = -J_{F,y}(x, f(x))^{-1} \cdot J_{F,x}(x, f(x)).$$

4.2. Exerciţii rezolvate

EXERCIŢIUL 4.2.1. Studiaţi derivabilitatea funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

a) $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

SOLUŢIE. a) Considerând şirurile

$$x_n = 1/2n\pi \searrow 0,\ y_n = 1/(2n\pi + \pi/2) \searrow 0,$$

deoarece

$$f(x_n) = \sin 2n\pi = 0 \to 0,\ f(y_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1,$$

rezultă că f nu are limită la dreapta în 0 (analog se va deduce că nu are limită nici la stânga în 0), deci evident nu e continuă în 0, deci nici derivabilă în 0.

Evident f este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ (provenind din operaţii algebrice şi de compunere cu funcţii derivabile pe $\mathbb{R}^*$) şi

$$f'(x) = \left(\sin \frac{1}{x}\right)' = \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}.$$

b) f este continuă în 0, deoarece există $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ şi

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Într-adevăr, deoarece

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|,\ x \neq 0,$$

din criteriul majorării va rezulta că există limita lui f în 0 şi este egală cu 0.

Studiem derivabilitatea lui f în 0. Avem

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x},\ x \neq 0,$$

care nu are limită în 0 (vezi a)), deci, cu definiţia, f nu are derivată (deci nu e nici derivabilă) în 0.

Evident f este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ (provenind din operaţii algebrice şi de compunere cu funcţii derivabile pe $\mathbb{R}^*$) şi

$$f'(x) = \left(x \sin \frac{1}{x}\right)' = \sin \frac{1}{x} + x \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}.$$

c) f este continuă în 0, deoarece există $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ şi

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Într-adevăr, deoarece

$$\left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| \leq x^2,\ x \neq 0,$$

din criteriul majorării va rezulta că există limita lui f în 0 şi este egală cu 0.

Studiem derivabilitatea lui f în 0. Avem

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x},\ x \neq 0,$$

care are limită în 0 (vezi b)), egală cu 0, deci, cu definiţia, f este derivabilă în 0 şi $f'(0) = 0$.

Evident f este derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ (provenind din operaţii algebrice şi de compunere cu funcţii derivabile pe $\mathbb{R}^*$) şi

$$f'(x) = \left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)' = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Se poate demonstra (exerciţiu !) că f nu este derivabilă de ordin 2 în 0.

d) f este continuă în 0, deoarece există $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x)$ şi

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Studiem derivabilitatea lui f în 0.

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x e^{1/x^2}} = \lim_{y \to \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = 0,$$

conform unei limite remarcabile. Deci f este derivabilă la dreapta în 0 şi $f'_d(0) = 0$. Se deduce evident apoi că f este derivabilă la stânga în 0 şi $f'_s(0) = 0$. Aşadar, în final, f este derivabilă în 0 şi

$$f'(0) = f'_d(0) = f'_s(0) = 0.$$

Evident f este derivabilă pe $(-\infty, 0)$ şi pe $(0, \infty)$ (provenind din operaţii algebrice şi de compunere cu funcţii derivabile: pe $(-\infty, 0)$ - funcţie constantă - pe $(0, \infty)$ - compunere de funcţie polinomială cu funcţia exponenţială) şi

$$f'(x) = 0, \; x < 0,$$

$$f'(x) = \left(e^{-1/x^2}\right)' = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3}, \; x > 0.$$

Aşadar, în final, f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Se poate demonstra, prin inducţie după n (exerciţiu !), că f este derivabilă de ordin n pe $\mathbb{R}$, cu n arbitrar. □

EXERCIŢIUL 4.2.2. Utilizând regulile lui l'Hospital, să se calculeze:

$$a) \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}; \; b) \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - x \sin x - \cos x}{x^2}; \; c) \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3^{\sin^2 x} - 3}{x - \frac{\pi}{2}};$$

$$d) \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 3x)}; \; e) \lim_{x \searrow 0} x^{\operatorname{tg} x}.$$

SOLUŢIE. Se observă că la punctele a), b), c) avem nedeterminare de tipul $\frac{0}{0}$, la d) de tipul $\frac{\infty}{\infty}$, iar la e) şi f) de tipul 0^0, care se va transforma uşor în $\frac{0}{0}$; în fiecare caz se va încerca aplicarea regulilor lui l'Hospital.

a) Fie $f(x) = \operatorname{tg} x - x$, $g(x) = x - \sin x$, $x \in D = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Observăm că sunt îndeplinite condiţiile din teorema lui l'Hospital (cazul $\frac{0}{0}$):

(1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$;

(2) f şi g sunt derivabile pe D şi $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$, $g'(x) = 1 - \cos x$;

(3) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in D = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2.$

Conform teoremei lui l'Hospital, rezultă că:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = 2.$$

b) Considerăm funcţiile $f(x) = e^{x^2} - x\sin x - \cos x$, $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}^*$. Avem:

(1) f şi g de două ori derivabile pe $\mathbb{R}^*$ şi

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - \sin x - x\cos x + \sin x = 2xe^{x^2} - x\cos x,\ g'(x) = 2x,$$
$$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - \cos x + x\sin x,\ g''(x) = 2;$$

(2) $g''(x) = 2 \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 0$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - \cos x + x\sin x}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Aplicând teorema lui l'Hospital de două ori, rezultă că:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{2}.$$

c) Procedând analog cu subpunctele anterioare (ipotezele din teorema lui l'Hospital, cazul $\frac{0}{0}$, fiind satisfăcute pentru funcţiile $f(x) = 3^{\sin^2 x} - 3$ şi $g(x) = x - \dfrac{\pi}{2}$, $x \in \left(\left(-\infty, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \infty\right)\right)$, obţinem:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3^{\sin^2 x} - 3}{x - \dfrac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x\cos x}{1} = 0.$$

d) Fie $f(x) = \ln(\sin 2x)$, $g(x) = \ln(\sin 3x)$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$ (alegerea acestui interval este dictată de domeniile de existenţă ale funcţiilor f şi g; să se verifice acest fapt!). Avem:

(1) f şi g derivabile pe $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $f'(x) = \dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}$, $g'(x) = \dfrac{3\cos 2x}{\sin 3x}$;

(2) $g'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\searrow 0} |f(x)| = \lim\limits_{x\searrow 0} |g(x)| = \infty$;

(4) $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\searrow 0} \left(\dfrac{\cos 2x}{\cos 3x} \cdot \dfrac{2x}{\sin 2x} \cdot \dfrac{\sin 3x}{3x}\right) = 1$.

Din teorema lui l'Hospital (cazul $\frac{\infty}{\infty}$), rezultă că

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\searrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1.$$

e) Deoarece $x^{\operatorname{tg} x} = \exp(\operatorname{tg} x \cdot \ln x) = \exp\left(\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}}\right)$, $\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, avem:

$$\lim_{x \searrow 0} x^{\operatorname{tg} x} = \exp\left(\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}}\right).$$

Considerând $f(x) = \ln x$, $g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{ctg} x$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, avem:

(1) f şi g sunt derivabile pe $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$şi $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $g'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

(2) $g'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \neq 0$, $\forall x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x \searrow 0} |f(x)| = \lim\limits_{x \searrow 0} |g(x)| = \infty$;

(4) $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}} = -\lim\limits_{x \searrow 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \cdot \sin x\right) = -1 \cdot 0 = 0.$

În final

$$\lim_{x \searrow 0} x^{\operatorname{tg} x} = \exp\left(\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}}\right) = \exp(0) = 1.$$

REMARCA I. S-a utilizat o consecinţă a teoremei lui l'Hospital (pentru a cărei demonstraţie se aplică succesiv teorema lui l'Hospital de n ori): *Dacă funcţiile f şi g, definite pe $I \setminus \{x_0\}$ (I interval):*

(1) *admit derivate de ordinul n pe $I \setminus \{x_0\}$;*

(2) $g^{(n)}(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = a_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} |f'(x)| = \lim\limits_{x \to x_0} |g'(x)| = a_1, \ldots,$
$\lim\limits_{x \to x_0} \left|f^{(n-1)}(x)\right| = \lim\limits_{x \to x_0} \left|g^{(n-1)}(x)\right| = a_{n-1}$, *unde* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ *sunt* 0 *sau* ∞;

(4) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = l$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$,

atunci

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}=l.$$

REMARCA II. Unele din limitele de mai sus se pot calcula şi fără regulile lui l'Hospital; altele nu; de exemplu, la punctul b) mai putem scrie:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-x\sin x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}-\frac{x\sin x}{x^2}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}-\frac{\sin x}{x}\right)=1+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.3. a) Să se calculeze $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$ pentru funcţia

$$f(x,y)=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y}.$$

b) Să se studieze existenţa derivatelor parţiale în origine şi pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ pentru funcţia:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

c) Să se calculeze $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-2,2)$, pentru $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$.

d) Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul n pe $\mathbb{R}^2$ pentru funcţia

$$f(x,y)=e^{ax+by}.$$

SOLUŢIE. a) Din definiţia derivatelor parţiale avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4},0\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x,0)-f\left(\frac{\pi}{4},0\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{|\sin x|-\sin\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(s-a folosit faptul că $|\sin x| = \sin x$, pentru x într-o vecinătate suficient de mică a lui $\frac{\pi}{4}$).

b) Avem, pentru $x \neq 0$:

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x},$$

funcţie care nu are limită în 0, deci, conform definiţiei, nu există $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. Analog nu exista nici $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Studiem existenţa derivatei parţiale în raport cu x într-un punct $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}$. Avem:

$$\frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x^2 + y_0^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{x - x_0} =$$

$$= \frac{x^2 - x_0^2}{(x - x_0)(\sqrt{x^2 + y_0^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})} =$$

$$= \frac{x + x_0}{\sqrt{x^2 + y_0^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}},$$

de unde,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \frac{2x_0}{2\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

REMARCĂ. Se observă că pentru calculul derivatei am repetat practic aceiaşi paşi care se parcurgeau şi la calculul cu ajutorul definiţiei a derivatei funcţiei de o variabilă reală $\sqrt{x^2 + y_0^2}$. Dar pentru funcţii de o variabilă reală se folosea direct tabelul derivatelor funcţiilor elementare împreună cu regulile de derivare a funcţiilor compuse, etc., aşadar:

Pentru a deriva parţial o funcţie de două variabile reale în raport cu una din variabile se fixează cealaltă variabilă, gândindu-se constantă, şi se derivează după regulile uzuale de la funcţii de o variabilă reală, bineînţeles pe baza tabelului derivatelor funcţiilor elementare.

c) Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-2,2) = \lim_{y \to 2} \frac{f(-2,y) - f(-2,2)}{y - 2} = \lim_{y \to 2} \frac{\sqrt[3]{4y} - 2}{y - 2} =$$

$$= \lim_{y \to 2} \frac{4y - 8}{(y - 2)(\sqrt[3]{16y^2} + 2\sqrt[3]{4y} + 4)} =$$

$$= \lim_{y \to 2} \frac{4}{\sqrt[3]{16y^2} + 2\sqrt[3]{4y} + 4} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,2) = \lim_{y\to 2} \frac{f(x,y)-f(x,2)}{y-2} = \lim_{y\to 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 y} - \sqrt[3]{2x^2}}{y-2} =$$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{x^2 y - 2x^2}{(y-2)(\sqrt[3]{x^4 y^2} + \sqrt[3]{2x^4 y} + \sqrt[3]{4x^4})} =$$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^4 y^2} + \sqrt[3]{2x^4 y} + \sqrt[3]{4x^4}} =$$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{x}{\sqrt[3]{xy^2} + \sqrt[3]{2xy} + \sqrt[3]{4x}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt[3]{4x} + \sqrt[3]{4x} + \sqrt[3]{4x}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{4}}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,2) = \lim_{x\to -2} \frac{\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{3}}{x-(-2)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \cdot \lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{4}}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \cdot \lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{(x+2)(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{16})} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \cdot \lim_{x\to -2} \frac{x-2}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{16}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{-4}{3\sqrt[3]{16}} = -\frac{1}{9}.$$

d) Derivînd după regula stabilită la punctul b), avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{ax+by}\right) = ae^{ax+by},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{ax+by}\right) = be^{ax+by},$$

apoi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(ae^{ax+by}\right) = a^2 e^{ax+by},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(be^{ax+by}\right) = b^2 e^{ax+by},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(be^{ax+by}\right) = abe^{ax+by} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Se poate arăta uşor, prin inducţie matematică, că avem următoarele expresii ale derivatelor de ordinul n:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(x,y) = a^{n-k} b^k e^{ax+by},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $k \in \{0, 1, ..., n\}$. □

EXERCIŢIUL 4.2.4. Fie funcţia $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2$. Calculaţi, utilizând definiţia, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

SOLUŢIE. a) Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[2(x_0+h)^2 - (x_0+h)\,y_0 + y_0^2] - [2x_0^2 - x_0y_0 + y_0^2]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4hx_0 + 2h^2 - hy_0}{h} = \lim_{h\to 0}(4x_0 + 2h - y_0) = 4x_0 - y_0.$$

b) Avem

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{[2x_0^2 - x_0(y_0+k) + (y_0+k)^2] - [2x_0^2 - x_0y_0 + y_0^2]}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{-kx_0 + 2ky_0 + k^2}{k} = \lim_{k\to 0}(-x_0 + 2y_0 + k) = -x_0 + 2y_0.$$

Cum $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x - y,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + 2y.$$

Formal, $\frac{\partial f}{\partial x}$ se obţine din $f(x,y)$ prin derivare în raport cu x, cu y gândit constant. Similar, $\frac{\partial f}{\partial y}$ se obţine din $f(x,y)$ prin derivare în raport cu y, cu x gândit constant. □

EXERCIŢIUL 4.2.5. Arătaţi că funcţia

$$U(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}},\ (x,y,z) \neq (0,0,0),$$

satisface ecuaţia lui Laplace pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

SOLUŢIE. Avem

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}[-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}]=$$

$$=(-x)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{-5}{2}}\cdot 2x+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{-3}{2}}\cdot(-1)=$$

$$=\frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Analog

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

În final

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.6. Pentru $z(x,y)=x^2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, calculaţi $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

SOLUŢIE. Avem

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cdot\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=x^2\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{1}{x}=\frac{x^3}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right)=$$

$$=\frac{(x^2+y^2)(3x^2)-(x^3)(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^4+3x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.7. a) Să se scrie $J_f(x,y,z)$ (Jacobiana funcţiei f într-un punct (x,y,z)) şi diferenţiala $df(x,y,z)$, unde

$$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ f(x,y,z)=\left(\sin\left(x^2+y^2+z^2\right),\ xyze^{x^2+y^2+z^2}\right).$$

b) Să se scrie Hessiana $H_f(x,y)$ a funcţiei f într-un punct (x,y), unde

$$f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right).$$

SOLUŢIE. a) Fie

$$f_1(x,y,z) = \sin\left(x^2+y^2+z^2\right),$$

$$f_2(x,y,z) = xyze^{x^2+y^2+z^2}.$$

Avem:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x\cos\left(x^2+y^2+z^2\right),\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y\cos\left(x^2+y^2+z^2\right),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z\cos\left(x^2+y^2+z^2\right),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = yze^{x^2+y^2+z^2} + xyze^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x = yz\left(1+2x^2\right)e^{x^2+y^2+z^2},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = xze^{x^2+y^2+z^2} + xyze^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2y = xz\left(1+2y^2\right)e^{x^2+y^2+z^2},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = xye^{x^2+y^2+z^2} + xyze^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2z = xy\left(1+2z^2\right)e^{x^2+y^2+z^2},$$

deci

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2x\cos\left(x^2+y^2+z^2\right) & 2y\cos\left(x^2+y^2+z^2\right) & 2z\cos\left(x^2+y^2+z^2\right) \\ yz\left(1+2x^2\right)e^{x^2+y^2+z^2} & xz\left(1+2y^2\right)e^{x^2+y^2+z^2} & xy\left(1+2z^2\right)e^{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

În final $df(x,y,z)(u,v,w) = J_f(x,y,z)\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, $\forall\,(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$.

b) Derivatele parţiale de ordinul I şi II ale lui f sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

de unde

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2\left(y^2 - x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \dfrac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ \dfrac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \dfrac{2\left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{pmatrix}.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.8. Fie funcţia $U = x^2 e^{y/x}$.

a) Să se calculeze dU.

b) Să se arate că $(3x^2y - 2y^2)dx + (x^3 - 4xy + 6y^2)dy$ poate fi scrisă ca diferenţiala unei funcţii ϕ care se cere a fi găsită.

SOLUŢIE. a) Metoda 1. Avem

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x^2 e^{\frac{y}{x}} \left(-\frac{y}{x^2}\right) + 2xe^{\frac{y}{x}}\ , \ \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 e^{\frac{y}{x}} \left(\frac{1}{x}\right).$$

Atunci

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = (2xe^{\frac{y}{x}} - ye^{\frac{y}{x}})dx + xe^{\frac{y}{x}}dy.$$

Metoda 2. Avem

$$dU = x^2 d(e^{\frac{y}{x}}) + e^{\frac{y}{x}} d(x^2) = x^2 e^{\frac{y}{x}} d\left(\frac{y}{x}\right) + 2xe^{\frac{y}{x}}dx =$$

$$= x^2 e^{\frac{y}{x}} \left(\frac{xdy - ydx}{x^2}\right) + 2xe^{\frac{y}{x}}dx = \left(2xe^{\frac{y}{x}} - ye^{\frac{y}{x}}\right)dx - xe^{\frac{y}{x}}dy$$

b) Metoda 1. Presupunem că

$$(3x^2y - 2y^2)dx + (x^3 - 4xy + 6y^2)dy = d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy.$$

Atunci

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 3x^2y - 2y^2,\ (1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^3 - 4xy + 6y^2\ (2).$$

Din ecuaţia (1) de mai sus, prin integrare relativ la x, cu y constant, avem

$$\phi = x^3y - 2xy^2 + f(y),$$

unde $f(y)$ este constanta de integrare. Introducând în ecuaţia (2) se obţine

$$x^3 - 4xy + f'(y) = x^3 - 4xy + 6y^2,$$

deci $f'(y) = 6y^2$, $f(y) = 2y^3 + c$.

În final, funcţia căutată este

$$\phi(x) = x^3 y - 2xy^2 + 2y^3 + c,$$

c fiind o constantă reală arbitrară. O astfel de funcţie trebuie să existe, deoarece, dacă

$$P(x,y) := 3x^2 y - 2y^2,\ Q(x,y) := x^3 - 4xy + 6y^2,$$

atunci $\partial P/\partial y = 3x2 - 4y = \partial Q/\partial x$ pe $\mathbb{R}^2$. Dacă $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$, expresia nu ar fi fost o diferenţială exactă.

Metoda 2. Se poate scrie:

$$(3x^2 y - 2y^2)dx + (x^3 - 4xy + 6y^2)dy =$$
$$= (3x^2 y dx + x^3 dy) - (2y^2 dx + 4xydy + 6y^2 dy) =$$
$$= d(x^3 y) - d(2xy^2) + d(2y^2) = d(x^3 y - 2xy^2 + 2y^3) =$$
$$= d(x^3 y - 2xy^2 + 2y^3 + c),$$

funcţia căutată fiind atunci $\phi(x,y) := x^3 y - 2xy^2 + 2y^3 + c$.

Această metodă se bazează pe abilitatea de a recunoaşte diferenţiale exacte. Înainte de a încerca aşa ceva, trebuie verificat că $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. □

EXERCIŢIUL 4.2.9. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată prin:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; în origine f nu este diferenţiabilă dar are derivate parţiale.

SOLUŢIE. Pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3 - y^2 x}{(x^2+y^2)^2},$$

funcţii care, fiind continue pe $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (mulţime deschisă), din criteriul de diferenţiabilitate cu derivate parţiale rezultă că f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Deoarece
$$f(0,0)=0,\ f(x,0)=\frac{0}{x^2}=0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ x\neq 0,$$
rezultă că
$$f(\,\cdot\,,0)\equiv 0 \text{ pe } \mathbb{R},$$
de unde
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\Big(x\longrightarrow f(x,0)\Big)'(0)=0.$$
Analog există $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Presupunem că f este diferenţiabilă în origine; rezultă că
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=0,$$
adică
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0.$$
Notăm $g(x,y):=\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Avem, pentru $x\neq 0$ şi un $m\in\mathbb{R}$ arbitrar fixat:
$$g(x,mx)=\frac{mx^2}{(x^2+m^2x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{mx^2}{x^3(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{x(1+m^2)^{\frac{3}{2}}},$$
funcţie care nu are limită în 0, deci g nu are limită după direcţia dreptei $y=mx$ în $(0,0)$ şi deci nici limită în raport cu ansamblul variabilelor. Aşadar presupunerea făcută este falsă, deci f nu este diferenţiabilă în origine.

REMARCĂ. f nu este nici măcar continuă în origine, deoarece limitele "după direcţia unei drepte" în origine depind de panta acestei drepte:
$$\lim_{x\to 0}f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^2}=\frac{m}{1+m^2}.$$
Deci funcţia nu are limită în origine în raport cu ansamblul variabilelor, deci nu este nici continuă şi deci nici diferenţiabilă în origine. □

EXERCIŢIUL 4.2.10. Fie funcţia
$$f:D:=\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x,y)=\sqrt{x^4+y^2}.$$
Să se arate că există $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ şi nu există $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Este f diferenţiabilă în $(0,0)$?

SOLUŢIE. Pentru $x \neq 0$

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x^4}-0}{x-0} = \frac{x^2}{x} = x \longrightarrow 0,$$

deci există $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ şi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Pentru $y \neq 0$

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \frac{\sqrt{y^2}-0}{y-0} = \frac{|y|}{y} = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases},$$

deci nu există $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Se observă că $f = \sqrt{\cdot} \circ \varphi_2$, unde $\varphi(x,y) = x^4 + y^2$ iar $\sqrt{\circ}$ nu e derivabilă în 0. De aceea se aplică definiţia în studiul derivatelor parţiale ale funcţiei f în $(0,0)$. În rest, pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f este evident derivabilă parţial, în raport cu x, respectiv y şi derivatele se calculează cu regulile de clasa a XI-a.

Deoarece nu există $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ evident rezultă că f nu e diferenţiabilă în $(0,0)$. $\square$

EXERCIŢIUL 4.2.11. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = (x+2)^2 - 2xz + y\ln[1+(x-z)^2] + z^2 + z$$

şi $u = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$. Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial u}(\pi, \sqrt{2}, \pi)$.

SOLUŢIE. Derivatele parţiale ale lui f (pe $\mathbb{R}^3$) sunt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2(x+2) - 2z + y\frac{2(x-z)}{1+(x-z)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \ln[1+(x-z)^2];$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -2x + y\frac{-2(x-z)}{1+(x-z)^2} + 2z + 1.$$

Atunci

$$\frac{\partial f}{\partial u}(\pi, \sqrt{2}, \pi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\pi, \sqrt{2}, \pi) \cdot \frac{2}{7} + \frac{\partial f}{\partial y}(\pi, \sqrt{2}, \pi) \cdot \frac{3}{7} + \frac{\partial f}{\partial z}(\pi, \sqrt{2}, \pi) \cdot \frac{6}{7} =$$

$$= 4 \cdot \frac{2}{7} + 0 \cdot \frac{3}{7} + 1 \cdot \frac{6}{7} = \frac{14}{7} = 2.$$

$\square$

EXERCIŢIUL 4.2.12. Pentru aplicaţia

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy),$$

să se determine $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,2,3)$, unde $u = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

SOLUŢIE. Derivatele parţiale ale lui f (pe $\mathbb{R}^3$) sunt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = (2x, -z, -y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = (-z, 2y, -x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = (-y, -x, 2z),$$

deci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3) = (2,-3,-2),\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3) = (-3,2,-1),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3) = (-2,-1,6).$$

Se obţine

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1,2,3) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[(2,-3,-2) + (-3,2,-2) + (-2,-1,6)\Big] = \frac{1}{\sqrt{3}}(-3,-2,3).$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.13. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Să se arate că f este continuă în $(0,0)$, are derivată după direcţia oricărui versor în $(0,0)$ şi nu este diferenţiabilă în $(0,0)$.

SOLUŢIE. Deoarece

$$|f(x,y) - 0| = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^2 \cdot |x| \leq |x|,\ \forall (x,y) \neq (0,0),$$

iar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$, din criteriul majorării rezultă $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ şi, cum $f(0,0) = 0$, f este continuă în $(0,0)$.

Dacă $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ versor $((u_1^2 + u_2^2 = 1))$, atunci

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f\Big((0,0)+t(u_1,u_2)\Big)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(tu_1,tu_2)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t^5u_1^5}{(t^2u_1^2+t^2u_2^2)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{t^5u_1^5}{t^4} = u_1^5\lim_{t\to 0} t = 0\end{aligned}$$

În particular, pentru $u = e_1 = (1,0)$, respectiv $u = e_2 = (0,1)$ rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial e_1}(0,0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial e_2}(0,0) = 0.$$

Se estimează

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \frac{x^5}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Dacă $g(x,y) := \dfrac{x^5}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$, atunci

$$y = mx, x \neq 0 \Longrightarrow g(x,y) = g(x,mx) = \frac{x^5}{(1+m^2)^{\frac{5}{2}}\cdot |x|^5} =: \varphi(x).$$

Cum φ nu are limită în 0, rezultă că g nu are limită în $(0,0)$, i.e. f nu e diferenţiabilă în $(0,0)$. $\square$

Exerciţiul 4.2.14. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{\sqrt{3x^4+y^{14}}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0)\end{cases}$$

Să se arate că f are derivată după direcţia oricărui versor în $(0,0)$ dar f nu este continuă în $(0,0)$ (deci nici diferenţiabilă în $(0,0)$).

Soluţie. Pentru $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ versor, rezultă

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f\Big((0,0)+t(u_1,u_2)\Big)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(tu_1,tu_2)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{t^4\cdot u_1\cdot u_2^3}{\sqrt{3t^4u_1^4+t^{14}u_2^{14}}} = u_1u_2^3\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\sqrt{3u_1^4+t^{10}u_2^{14}}} = 0.\end{aligned}$$

Cum

$$x = y^{\frac{14}{4}}\cdot m, y > 0 \Rightarrow f(my^{\frac{14}{4}}, y) = \frac{my^6\cdot\sqrt{y}}{\sqrt{3y^{14}+y^{14}}} = \frac{my^6\cdot\sqrt{y}}{2|y^7|} = \frac{m}{2}\cdot\frac{y^6\sqrt{y}}{|y|^7},$$

au loc implicaţiile

$$\text{nu există } \lim_{y\to 0} f(my^{\frac{14}{4}}, y) \Longrightarrow \text{ nu există } \lim_{(x,y)\to(0,0), x=my^{14/4}} f(x,y) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{ nu există } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Longrightarrow f \text{ nu e continuă în } (0,0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f \text{ nu e diferenţiabilă în } (0,0).$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.15. Să se studieze continuitatea şi diferenţiabilitatea funcţiilor $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 y^2}{x^6+y^6}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

SOLUŢIE. a) Cum

$$|f(x,y) - 0| = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^2 \cdot |xy| \leq |xy|, \ \forall (x,y) \neq (0,0)$$

şi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy| = 0$, din criteriul majorării rezultă că $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ şi, cum $f(0,0) = 0$, f este continuă în $(0,0)$. Evident f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (chiar diferenţiabilă). Apoi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(y,0) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Cum

$$\left| \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \left| \frac{x^5 y}{(x^2+y^2)^{5/2}} \right| = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot |y| \leq |y|,$$

iar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, din criteriul majorării rezultă

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0,$$

deci f este diferenţiabilă în $(0,0)$.

b) Deoarece

$$|f(x,y) - 0| = \frac{|x|^5 \cdot |y|^2}{(|x|^6 + |y|^6)^1} \le (|x|^6)^{\frac{5}{6}+\frac{2}{6}-1} + (|y|^6)^{\frac{5}{6}+\frac{2}{6}-1} =$$

$$= (|x|^6)^{\frac{1}{6}} + (|y|^6)^{\frac{1}{6}} = |x| + |y| =: g(x,y),\ \forall (x,y) \neq (0,0),$$

iar $g(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$, din criteriul majorării rezultă că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

şi, cum $f(0,0) = 0$, f este continuă în $(0,0)$.

f are derivate parţiale în $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Pentru studiul diferenţiabilităţii în $(0,0)$ se scrie:

$$\left| \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} \right| =$$

$$= \frac{|x^5 y^2|}{(x^6 + y^6)\sqrt{x^2 + y^2}} =: g(x,y), \forall (x,y) \neq (0,0).$$

Deoarece pentru $m \in \mathbb{R}$

$$g(x, mx) = \frac{m^2 |x|^7}{(1 + m^6) \cdot x^6 \sqrt{1 + m^2} \cdot |x|} =$$

$$= \frac{m^2}{(1 + m^6)\sqrt{1 + m^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{m^2}{(1 + m^6)\sqrt{1 + m^2}},$$

rezultă că nu există $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$, deci f nu e diferenţiabilă în $(0,0)$.

c) Deoarece

$$|f(x,y)-0| = \left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{3}{2}}|y| \le |y|,\ \forall (x,y) \ne (0,0)$$

şi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, din criteriul majorării rezultă că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

şi, cum $f(0,0)=0$, va rezulta că f este continuă în $(0,0)$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$, dar

$$y \ne 0 \Longrightarrow \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \frac{\frac{y^4}{|y|^3}}{y} = \frac{y^3}{|y|^3} = \begin{cases} 1, & y>0 \\ -1, & y<0 \end{cases}.$$

Dar nu există $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^3}{|y^3|}$, adică nu există $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, de unde rezultă că f nu e diferenţiabilă în $(0,0)$. □

Exerciţiul 4.2.16. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases},$$

este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$. Să se deducă apoi că există derivate parţiale de ordinul doi mixte în origine care nu sunt egale. Să se justifice acest fapt.

Soluţie. Pentru $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, avem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =& y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \\ =& y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + y\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =& x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} = \\ =& x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - x\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2.\end{aligned}$$

Deasemenea:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0\cdot\dfrac{x^2-0}{x^2+0}}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0\cdot\dfrac{0-y^2}{0+y^2}}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Se observă că:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = |y|\cdot\frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} + |y|\cdot\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2 \leq 2|y|,$$

şi, cum evident

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2|y| = 0,$$

din criteriul majorării pentru limite de funcţii de mai multe variabile, rezultă:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

deci $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continuă în $(0,0)$.

Analog $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ continuă în $(0,0)$.

Cum $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sunt evident continue pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (provenind din operaţii algebrice şi de compunere cu funcţii continue pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$), rezultă că $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$. Deoarece $\mathbb{R}^2$ este o mulţime deschisă, din criteriul de diferenţiabilitate cu derivate parţiale, f este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

Apoi, se verifică uşor prin calcul că:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + y\left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2\right) = $$

$$= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + 8x^2y^2\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Deoarece funcţia f este evident de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (care este mulţime deschisă), din teorema lui Schwarz rezultă că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + 8x^2y^2\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Pentru calculul derivatelor parţiale de ordinul doi mixte în origine se va folosi definiţia. Avem, din calculul derivatelor de ordinul I pe $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y, \ \forall\, y \neq 0,$$

şi cum şi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0,$$

avem că:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y, \ \forall\, y \in \mathbb{R},$$

de unde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \left(y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, y)\right)'(0) = -1.$$

Analog

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x, \ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

de unde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \left(x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)\right)'(0) = 1.$$

Se poate arăta uşor, făcînd limite pe direcţii că funcţia

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + 8x^2y^2 \frac{x^2 - y^{2\,3}}{x^2 + y^2},$$

nu are limită în origine, şi deci nu este nici continuă în raport cu ansamblul variabilelor în origine, aşadar nu sunt îndeplinite condiţiile din teorema lui Schwarz. De aceea orice rezultat este posibil, în cazul de faţă derivatele mixte nefiind egale. □

EXERCIŢIUL 4.2.17. Arătaţi că $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, pentru $z = z(x, y)$, $x = x(u, v, w)$ şi $y = y(u, v, w)$.

SOLUŢIE. Avem

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw,$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw.$$

Atunci

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy =$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}\right)dw=$$
$$=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv+\frac{\partial z}{\partial w}dw=dz,$$
utilizând generalizarea formulelor din Exerciţiul ??. □

EXERCIŢIUL 4.2.18. Pentru aplicaţia
$$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x,y)=H(xy,x/y),$$
să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I ($H:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $H\in C^1(\mathbb{R}^2)$).

SOLUŢIE. Schema de derivare este:

$$\begin{tikzcd}
 & & u \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
f \arrow[r] & H \arrow[ur] \arrow[dr] & & x & y \\
 & & v \arrow[ur] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

unde $u=u(x,y)=xy$, $v=v(x,y)=x/y$.

Derivatele parţiale ale lui f pe $\mathbb{R}^2$ sunt:
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial H}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial H}{\partial u}\cdot y+\frac{\partial H}{\partial v}\cdot\frac{1}{y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial H}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial H}{\partial u}\cdot x+\frac{\partial H}{\partial v}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right).$$
□

EXERCIŢIUL 4.2.19. Să se arate că aplicaţia
$$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x,y,z)=g(xyz,x+y+z),$$
este soluţie a ecuaţiei diferenţiale
$$x(y-z)\frac{\partial f}{\partial x}+y(z-x)\frac{\partial f}{\partial y}+z(x-y)\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$
unde $g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$.

SOLUŢIE. Schema de derivare este:

$$
\begin{tikzcd}
 & & u \arrow[dr] \arrow[drr] \arrow[drrr] & & & \\
f \arrow[r] & g \arrow[ur] \arrow[dr] & & x & y & z \\
 & & v \arrow[ur] \arrow[urr] \arrow[urrr] & & &
\end{tikzcd}
$$

unde $u = u(x,y,z) = xyz$, $v = v(x,y,z) = x + y + z$.

Aşadar, derivatele parţiale ale lui f pe $\mathbb{R}^3$ sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot yz + \frac{\partial g}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot xz + \frac{\partial g}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot xy + \frac{\partial g}{\partial v}.$$

Se verifică simplu egalitatea (pe $\mathbb{R}^3$):

$$x(y-z)\frac{\partial f}{\partial x} + y(z-x)\frac{\partial f}{\partial y} + z(x-y)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.20. Să se arate că

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ F(x,y,z) = \varphi(x - yz, y^2 + z^2),$$

este soluţie a ecuaţiei

$$(z^2 - y^2)\frac{\partial F}{\partial x} + z\frac{\partial F}{\partial y} - y\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

unde $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

SOLUŢIE. Schema de derivare este:

$$
\begin{tikzcd}
 & & u \arrow[dr] \arrow[drr] \arrow[drrr] & & & \\
F \arrow[r] & \varphi \arrow[ur] \arrow[dr] & & x & y & z \\
 & & {} \arrow[ur] \arrow[urr] \arrow[urrr] & & &
\end{tikzcd}
$$

unde $u = u(x,y,z) = x - yz$, $v = v(x,y,z) = y^2 + z^2$.

Aşadar, derivatele parţiale ale lui F pe $\mathbb{R}^3$ sunt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot (-z) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot (2y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot (-y) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot (2z).$$

Se verifică imediat egalitatea (pe $\mathbb{R}^3$):

$$(z^2 - y^2)\frac{\partial F}{\partial x} + z\frac{\partial F}{\partial y} - y\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.21. Să se rezolve ecuaţia diferenţială $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ utilizând schimbarea de variabile $u = x$, $v = x^2 + y^2$?

SOLUŢIE. Se poate arăta că, dacă $D := \mathbb{R} \times (0, \infty)$, aplicaţia

$$T : D \to D,\ T(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) = \left(x, x^2 + y^2\right)$$

este bijecţie (Exerciţiu!).

Definim $\widetilde{z} : D \to \mathbb{R}^2$, $\widetilde{z} = z \circ T^{-1}$. Avem:

$$\begin{tikzcd}
D \ni (x,y) \arrow[r, "z"] \arrow[d, shift right, "T"'] & z(x,y) \in \mathbb{R}^2 \\
D \ni (u(x,y), v(x,y)) \arrow[u, shift right, "T^{-1}"'] \arrow[ur, "\widetilde{z}"'] &
\end{tikzcd}$$

Deci $z = \widetilde{z} \circ T$, adică

$$z(x,y) = \widetilde{z}(u(x,y), v(x,y)) = \widetilde{z}(x, x^2 + y^2),\ (x,y) \in D.$$

Aşadar, schema de derivare a funcţiei compuse $z = \widetilde{z} \circ T$ este

$$\begin{tikzcd}
 & & u \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
z \arrow[r] & \widetilde{z} \arrow[ur] \arrow[dr] & & x & y \\
 & & v \arrow[ur] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

deci

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \text{ (pe } D\text{)}.$$

sau, mai explicit

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u}(u(x,y),v(x,y)) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}(u(x,y),v(x,y)) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u}(u(x,y),v(x,y)) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v}(u(x,y),v(x,y)) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x,y),$$

pentru orice $(x,y) \in D$.

Avem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v} \cdot 2x = \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} + \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v} \cdot 2x,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v} \cdot 2y = \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v} \cdot 2y, \ \forall\, (x,y) \in D.$$

Deci, ecuaţia iniţială devine

$$y\left(\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} + \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v} \cdot 2x\right) - x\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial v} \cdot 2y = 0,$$

adică

$$y\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} = 0,$$

dar, deoarece $(x,y) \in D$, deci $y > 0$, ecuaţia este echivalentă cu

$$\frac{\partial \widetilde{z}}{\partial u} = 0,$$

deci $\widetilde{z}(u,v) = c\psi(v)$, $c \in \mathbb{R}$, ψ de clasă C^1. În final

$$z(x,y) = \widetilde{z}(x, x^2 + y^2) = c\psi(x^2 + y^2), \ (x,y) \in D.$$

$\square$

EXERCIŢIUL 4.2.22. Să se arate că, dacă funcţia $u = u(\xi,\eta)$ este armonică pe $\mathbb{R}^2$ $\left(\text{adică } \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(\xi,\eta)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(\xi,\eta) = 0, \forall\,(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2\right)$, atunci şi funcţia

$$f(x,y) = u\left(\xi(x,y),\eta(x,y)\right) = u\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

este armonică pe mulţimea $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2>0\right\}$.

SOLUŢIE. Din formula de derivare a funcţiilor compuse, avem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Aplicând din nou aceeaşi formulă de derivare, obţinem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

Rezultă:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{(-x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\cdot\frac{(-2xy)(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}+$$
$$+\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{(-x^2+y^2)(-2xy)}{(x^2+y^2)^4}+$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\frac{(-2xy)^2}{(x^2+y^2)^4} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) =$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{(-x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\cdot\frac{(-2xy)(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}+$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\frac{(-2xy)^2}{(x^2+y^2)^4} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)+$$
$$+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{(-2xy)^2}{(x^2+y^2)^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\cdot\frac{(x^2-y^2)(-2xy)}{(x^2+y^2)^4}+$$
$$+\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\cdot\frac{(-2xy)(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4}+$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) =$$
$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{(-2xy)^2}{(x^2+y^2)^4} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\cdot\frac{(-2xy)(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4}+$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)+$$
$$+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

Deci:

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\left[\frac{(y^2-x^2)^2+(-2xy)^2}{(x^2+y^2)^4}\right] + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\cdot\left[\frac{(-2xy)^2+(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^4}\right]$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\cdot\frac{(y^2-x^2)(-2xy)}{(x^2+y^2)^4} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\cdot\frac{(x^2-y^2)(-2xy)}{(x^2+y^2)^4}+$$
$$+\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\right].$$

Deoarece

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)=$$

$$=\frac{-2x^3-2xy^2-4xy^2+4x^3-2x^3-2xy^2+8xy^2}{(x^2+y^2)^3}=0,$$

şi analog

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)=0,$$

se obţine în final

$$\Delta f(x,y)=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^2},$$

şi cum u este armonică,

$$\Delta f(x,y)=0.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.23. Dacă $T=T(x,y)=x^3-xy+y^3$, $x=x(\rho,\phi)=\rho\cos\phi$ şi $y=y(\rho,\phi)=\rho\sin\phi$, să se calculeze $\partial T/\partial\rho$, $\partial T/\partial\phi$.

SOLUŢIE. Se notează, prin abuz $T(\rho,\phi):=T(x(\rho,\phi),y(\rho,\phi))$. Utilizând observaţia de la sfârşitul Propoziţiei 4.1.20, avem

$$\frac{\partial T}{\partial \rho}=\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}=(3x^2-y)(\cos\phi)+(3y^2-x)(\sin\psi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi}=\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi}=(3x^2-y)(-\rho\sin\phi)+(3y^2-x)(\rho\cos\phi).$$

Rezultatul se poate obţine şi prin compunerea funcţiilor şi derivarea directă a compunerii. □

EXERCIŢIUL 4.2.24. Dacă $U=U(x,y,z)=z\sin(y/x)$, iar $x=x(r,s)=3r^2+2s$, $y=y(r,s)=4r-2s^3$ şi $z=z(r,s)=2r^2-3s^2$, să se determine $\partial U/\partial r$ şi $\partial U/\partial s$.

SOLUŢIE. Se notează, prin abuz $U(r,s):=U(x(r,s),y(r,s),z(r,s))$. Utilizând observaţia de la sfârşitul Propoziţiei 4.1.20, avem

$$\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}=$$

$$=\left\{\left(z\cos\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right\}(6r)+\left\{\left(z\cos\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\right\}(4)+\left(\sin\frac{y}{x}\right)(4r)=$$

$$= -\frac{6ryz}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{4z}{x}\cos\frac{y}{x} + 4r\sin\frac{y}{x}.$$

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} =$$

$$= \left\{\left(z\cos\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right\}(2) + \left\{\left(z\cos\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\right\}(-6s^2) + \left(\sin\frac{y}{x}\right)(-6s) =$$

$$= -\frac{2yz}{x^2}\cos\frac{y}{x} - \frac{6s^2z}{x}\cos\frac{y}{x} - 6s\sin\frac{y}{x}.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.25. Dacă $V = V(x, y)$, $x = x(\rho, \phi) = \rho\cos\phi$, $y = (\rho, \phi) = \rho\sin\phi$, să se arate că

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)^2.$$

SOLUŢIE. Se notează, prin abuz $V(\rho, \phi) := V(x(\rho, \phi), y(\rho, \phi))$. Utilizând observaţia de la sfârşitul Propoziţiei 4.1.20, avem

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\phi + \frac{\partial V}{\partial y}\sin\phi,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi} = \frac{\partial V}{\partial x}(-\rho\sin\phi) + \frac{\partial V}{\partial y}(\rho\cos\phi).$$

Împărţind a doua ecuaţie prin ρ, se obţine

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial x}\sin\phi + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\phi.$$

Se obţine

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\cos\phi + \frac{\partial V}{\partial y}\sin\phi\right)^2 + \left(-\frac{\partial V}{\partial x}\sin\phi + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\phi\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.26. Pentru $z = f(x^2y)$, unde f este diferenţiabilă, are loc relaţia

$$x(\partial z/\partial x) = 2y(\partial z/\partial y).$$

SOLUŢIE. Fie $x^2y = u$. Atunci $z = f(u)$ şi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = f^{'}(u)\cdot 2xy,\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = f^{'}(u)\cdot x^2.$$

Avem

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = f^{'}(u)\cdot 2x^2y\ ,\ 2y\frac{\partial z}{\partial y} = f^{'}(u)\cdot 2x^2y,$$

deci

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = 2y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Se poate proceda şi astfel:

$$dz = f^{'}(x^2y)d(x^2y) = f^{'}(x^2y)(2xydx + x^2dy),$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Atunci

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf^{'}(x^2y),\ \frac{\partial z}{\partial x} = x^3f^{'}(x^2y).$$

Prin eliminarea lui $f^{'}(x^2y)$ se obţine: $x\frac{\partial z}{\partial x} = 2y\frac{\partial z}{\partial y}$. □

EXERCIŢIUL 4.2.27. Fie $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $F : D \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă ($D \subset \mathbb{R}^2$ deschisă) astfel încât $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p F(x,y)$. Atunci

$$x\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = pF.$$

SOLUŢIE. Fie $\lambda x = u$, $\lambda y = v$. Atunci

$$F(u,v) = \lambda^p F(x,y).$$

Derivând în raport cu λ în partea stângă se obţine

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \lambda} = \frac{\partial F}{\partial u}x + \frac{\partial F}{\partial v}y,$$

iar în partea dreaptă $p\lambda^{p-1}F$. Atunci

$$x\frac{\partial F}{\partial u} + y\frac{\partial F}{\partial v} = p\lambda^{p-1}F.$$

Pentru $\lambda = 1$ (adică $u = x$, $v = y$) se obţine

$$x\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = pF.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.28. Pentru $F(x,y) = x^4y^2 \arcsin(y/x)$, să se arate că

$$x\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 6F.$$

SOLUŢIE. Avem

$$F(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^4(\lambda y)^2 \arcsin(\lambda y/\lambda x) = \lambda^6 x^4 y^2 \arcsin(y/x) = \lambda^6 F(x,y),$$

deci se poate aplica exerciţiul precedent pentru $p = 6$. Evident se poate rezolva şi prin diferenţiere directă. □

EXERCIŢIUL 4.2.29. Arătaţi că $Y(x,t) = f(x+at)+g(x-at)$ satisface ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2},$$

f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fiind de clasă C^2 iar $a \in \mathbb{R}$ este constantă.

SOLUŢIE. Fie $u = x+at$, $v = x-at$; atunci $Y = f(u)+g(v)$. Atunci

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = af'(u) - ag'(v),$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = f'(u) - g'(v).$$

Derivând din nou se obţine

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial Y_t}{\partial t} = \frac{\partial Y_t}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial Y_t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u}[af'(u)-ag'(v)](a)+\frac{\partial}{\partial v}[af'(u)-ag'(v)](-a) = a^2f''(u)+a^2g''(v),$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{\partial Y_x}{\partial x} = \frac{\partial Y_t}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Y_x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}[f'(u) - g'(v)] = f''(u) + g''(v).$$

În final

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.30. Dacă $U = U(x,y)$ iar $x = x(r,s) = 2r - s$ şi $y = y(r,s) = r + 2s$, să se calculeze $\dfrac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ în funcţie de derivatele parţiale ale lui U în raport cu r şi s (U de clasă C^2 pe un domeniu D din $\mathbb{R}^2$).

SOLUŢIE. Din $x = 2r - s$, $y = r + 2s$ rezultă

$$r = r(x,y) = (2x+y)/5,\ s = s(x,y) = (2y-x)/5.$$

Atunci

$$\partial r/\partial x = 2/5,\ \partial s/\partial x = -1/5,\ \partial r/\partial y = 1/5,\ \partial s/\partial y = 2/5.$$

Se notează, prin abuz $U(x,y) = U(r(x,y), s(x,y))$.
Avem

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{2}{5}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{5}\frac{\partial U}{\partial s},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2}{5}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{5}\frac{\partial U}{\partial s}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{2}{5}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{5}\frac{\partial U}{\partial s}\right)\frac{\partial s}{\partial y} =$$

$$= \left(\frac{2}{5}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{5}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial s}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial s} - \frac{1}{5}\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right)\left(\frac{2}{5}\right) =$$

$$= \frac{1}{25}\left(2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + 3\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial s} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}\right).$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.31. Să se scrie formula lui Taylor de ordinul 4 pentru funcţia $f(x) = \sin x$ în punctul $a = \frac{\pi}{2}$. Să se evalueze eroarea comisă în aproximarea $\sin x \simeq T_4(x)$, $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

SOLUŢIE. Din formula lui Taylor cu rest Lagrange

$$\begin{aligned} f(x) \quad = \quad & f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \\ & + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-a)^5,\ x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

unde ξ este un punct situat între a şi x.

Pentru $f(x) = \sin x$ rezultă $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, $f^{(5)}(x) = \cos x$, şi în punctul $a = \frac{\pi}{2}$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f^{(4)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f^{(5)}(\xi) = \cos\xi$. Înlocuind în formula lui Taylor, rezultă

$$\sin x = 1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \frac{\cos\xi}{5!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5.$$

Pentru x aproape de $\frac{\pi}{2}$, se poate aproxima $\sin x$ astfel

$$\sin x \approx 1 - \frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4. \tag{4.2.1}$$

Se poate evalua eroarea din această aproximare. Astfel

$$|r_n(x,a)| = \left|\frac{\cos\xi}{5!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5\right| \le \frac{1}{5!}\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^5.$$

Dacă $x \in \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)$, restul formulei lui Taylor se majorează prin

$$|r_n(x,a)| \le \frac{\varepsilon^5}{5!}.$$

Dacă, de exemplu, $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$, atunci pe intervalul $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ (4.2.1) este adevărată cu o eroare mai mică de

$$|r_n(x,a)| \le \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 \le \frac{1}{120} \le 0,0084.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.32. Să se calculeze, folosind formula lui Taylor de ordinul 3, valoarea aproximativă a lui $\sqrt[3]{9}$.

SOLUŢIE. Fie funcţia $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Se va aproxima această funcţie pe o vecinătate a lui 8, ţinând cont de faptul că se pot calcula exact valoarile funcţiei f şi a derivatelor acesteia în $x = 8$.

Formula lui Taylor de ordinul 3 în jurul lui 8 este

$$f(x) = f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 +$$
$$+\frac{f'''(8)}{3!}(x-8)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-8)^4,$$

unde ξ este un punct între 8 şi x.

Derivatele funcţiei $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ sunt $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$, $f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$, $f^{(4)}(x) = -\frac{80}{81}x^{-\frac{11}{3}}$.

Formula lui Taylor devine

$$\sqrt[3]{x} = 2 + \frac{1}{3}2^{-2}(x-8) - \frac{1}{2!}\frac{2}{9}2^{-5}(x-8)^2 + \frac{1}{3!}\frac{10}{27}2^{-8}(x-8)^3 -$$
$$-\frac{1}{4!}\frac{80}{81}\xi^{-\frac{11}{3}}(x-8)^4$$

şi, dacă $x = 9$ se obţine

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{9} &= 2 + \frac{1}{3}2^{-2} - \frac{1}{2!}\frac{2}{9}2^{-5} + \frac{1}{3!}\frac{10}{27}2^{-8} - \frac{1}{4!}\frac{80}{81}\xi^{-\frac{11}{3}} = \\
&= 2 + \frac{1}{3\cdot 2^2} - \frac{1}{9\cdot 2^5} + \frac{5}{81\cdot 2^8} - \frac{1}{3}\frac{10}{81}\frac{1}{\xi^{\frac{11}{3}}} = \\
&= \frac{81\cdot 2^9 + 27\cdot 2^6 - 9\cdot 2^3 + 5}{81\cdot 2^8} - \frac{10}{243}\frac{1}{\xi^{\frac{11}{3}}} = \\
&= \frac{43133}{20736} - \frac{10}{243}\frac{1}{\xi^{\frac{11}{3}}} = 2,080102 - \frac{10}{243}\frac{1}{\xi^{\frac{11}{3}}}.
\end{aligned}$$

Întrucât $\xi \in (8, 9)$, rezultă că restul formulei poate fi majorat astfel

$$\frac{10}{243}\frac{1}{c^{\frac{11}{3}}} \le \frac{10}{243}\frac{1}{2^{11}} = 0,0000201,$$

putându-se scrie $\sqrt[3]{9} \simeq 2,0801$. □

EXERCIŢIUL 4.2.33. Fie $f : \left\{(x, y) \subset \mathbb{R}^2;\ x + y^2 \ge 0\right\} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = e^{\sqrt{x+y^2}-1}$. Să se scrie polinomul Taylor de ordinul doi pentru funcţia f, în jurul punctului $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

SOLUŢIE. Derivatele parţiale de ordin 1 şi 2 sunt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}e^{\sqrt{x+y^2}-1},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x+y^2}}e^{\sqrt{x+y^2}-1},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{1}{4\sqrt{(x+y^2)^3}}e^{\sqrt{x+y^2}-1} + \frac{1}{4\,(x+y^2)}e^{\sqrt{x+y^2}-1},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x, y) = -\frac{y}{2\sqrt{(x+y^2)^3}}e^{\sqrt{x+y^2}-1} + \frac{y}{2\,(x+y^2)}e^{\sqrt{x+y^2}-1},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{x+y^2}} - y\frac{y}{\sqrt{(x+y^2)^3}} + \frac{y^2}{x+y^2}\right)e^{\sqrt{x+y^2}-1}.$$

Derivatele în punctul $(1, 0)$ sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = \frac{1}{2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) = 1.$$

Polinomul Taylor de ordinul doi pentru funcţia f în jurul punctului (1,0) este

$$T_2(x,y) = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\,(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)\,(x-1)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0)\,(x-1)\,y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)y^2 = 1 + \frac{1}{2}\,(x-1) + \frac{1}{2}y^2.$$

Pe o vecinătate mică a lui $(1,0)$ are loc aproximarea

$$f(x,y) \cong 1 + \frac{1}{2}\,(x-1) + \frac{1}{2}y^2.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.34. Pentru funcţia

$$f(x,y) = x^y,\ x > 0,\ y > 0,$$

să se scrie polinomul lui Taylor de gradul al treilea în punctul $(1,1)$. Să se deducă apoi valoarea aproximativă pentru $(1,1)^{1,2}$.

SOLUŢIE. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x,$$

apoi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y(y-1)x^{y-2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^y(\ln x)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

şi

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = y(y-1)(y-2)x^{y-3},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = x^y(\ln x)^3,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y(y-1)x^{y-2}\right) = (2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2}\ln x$$

$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y),$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^y(\ln x)^2\right) = x^y(\ln x)^3 + x^y \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y).$$

De aici

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1),\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,1) = 0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,1) = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1,1) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(1,1) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(1,1) = 1,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(1,1) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(1,1) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(1,1) = 0.$$

Polinomul Taylor de ordinul trei asociat funcţiei f în punctul $(1,1)$ este:

$$\begin{aligned} T_3(x,y) =& 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{1}{2!}\left[2(x-1)(y-1)\right] + \frac{1}{3!}3(x-1)^2(y-1) = \\ =& 1 + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2(y-1). \end{aligned}$$

Atunci

$$(1,1)^{1,2} \approx 1 + 0,1 + 0,1 \times 0,2 + \frac{1}{2!}(0,1)^2(0,2) = 0,1021.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.35. Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^3 + 4xy - 2x^2 - 22x - 2y^2 + 10y.$$

SOLUŢIE. Punctele staţionare ale lui f pe $\mathbb{R}^2$, sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 4y - 4x - 22 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x - 4y + 10 = 0 \end{cases}$$

Sistemul este echivalent cu

$$\begin{cases} x^2 = 4 \\ 4x - 4y + 10 = 0 \end{cases},$$

de unde se obţin soluţiile:

$$S = \{(2, 9/2), (-2, 1/2)\}.$$

Hessiana funcţiei f într-un punct arbitrar (x,y) din $\mathbb{R}^2$ este:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

1) In $(2, 9/2)$, hessiana este

$$H_f(2, 9/2) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

de unde

$$\Delta_1 = 8 > 0,\ \Delta_2 = -48 < 0,$$

deci $(2, 9/2)$ nu este punct de extrem.

2) In $(-2, 1/2)$, hessiana este

$$H_f(-2, 1/2) = \begin{pmatrix} -16 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

de unde

$$\Delta_1 = -16 < 0,\ \Delta_2 = 48 > 0,$$

deci $(-2, 1/2)$ este punct de maxim local strict. □

EXERCIŢIUL 4.2.36. Să se calculeze punctele de extrem ale funcţiei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

SOLUŢIE. Se determină punctele staţionare ale lui f pe $\mathbb{R}^2$, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}.$$

Se obţin soluţiile:

$$S = \{(0, 0), (1, 1)\}.$$

Hessiana funcţiei f într-un punct arbitrar (x, y) din $\mathbb{R}^2$ este:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

1) Hessiana în $(0, 0)$ este

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

de unde

$$\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = -9 < 0,$$

deci $(0, 0)$ nu este punct de extrem.

2) Hessiana în $(1, 1)$ este

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

de unde

$$\Delta_1 = 6 > 0,\ \Delta_2 = 27 > 0,$$

deci $(1,1)$ este punct de minim local strict. □

EXERCIŢIUL 4.2.37. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^3 + x^2y + xy^2 + 1.$$

SOLUŢIE. Se determină punctele staţionare ale lui f pe $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2xy = 0 \end{cases} \iff (x = y = 0).$$

Deci

$$S = \{(0,0)\}.$$

Hessiana funcţiei f într-un punct arbitrar (x,y) din $\mathbb{R}^2$ este:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x + 2y & 2x + 2y \\ 2x + 2y & 2x \end{pmatrix},$$

iar în $(0,0)$ este

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $f(x,x) = 3x^3 + 1 =: \varphi(x)$ iar 0 nu este punct de extrem al lui φ, va rezulta că nici $(0,0)$ nu este punct de extrem pentru f. □

EXERCIŢIUL 4.2.38. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (x + y^2)e^{x+2y}.$$

SOLUŢIE. Se rezolvă sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x+2y}(1 + x + y^2) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x+2y}(2x + 2y + 2y^2) = 0 \end{cases}.$$

Singura soluţie (punct critic al lui f) este $(-2,1)$.
Hessiana funcţiei f într-un punct arbitrar (x,y) din $\mathbb{R}^2$ este:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+2y}(2 + x + y^2) & 2e^{x+2y}(1 + x + y + y^2) \\ 2e^{x+2y}(1 + x + y + y^2) & 2e^{x+2y}(1 + 2x + 4y + 2y^2) \end{pmatrix},$$

iar în $(-2,1)$ este

$$H_f(-2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Cum $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = 2 > 0$, $(-2,1)$ este punct de minim local al lui f. $\square$

EXERCIŢIUL 4.2.39. Să se calculeze punctele de extrem ale funcţiei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

SOLUŢIE. Determinăm punctele staţionare ale funcţiei:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - x^3 \\ x^3 + y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - x^3 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 2x - x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in \{(0,0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}.$$

Avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4,$$

deci hessiana lui f într-un punct oarecare din $\mathbb{R}^2$ este:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

1) In punctele $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, avem:

$$H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix},$$

de unde

$$\Delta_1 = 20 > 0,\ \Delta_2 = 384 > 0,$$

deci ambele sunt puncte de minim local strict.

2) In $(0,0)$, hessiana este:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

şi, deoarece $\Delta_2 = 0$, nu putem preciza nimic despre natura punctului $(0,0)$ cu această metodă.

Se observă că:

$$f(x,-x) = 2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 4) < 0 = f(0,0),\ \forall x \in (-2,2),\ x \neq 0,$$

$$f(x,x) = 2x^4 > 0 = f(0,0),\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,$$

deci, în orice vecinătate a lui $(0,0)$ există puncte diferite de $(0,0)$ în care funcţia ia atât valori strict mai mari decât valoarea funcţiei în origine cât şi strict mai mici; rezultă aşadar că $(0,0)$ nu este punct de extrem. □

EXERCIŢIUL 4.2.40. Să se determine valorile extreme ale funcţiei:

$$f : [0,\pi] \times [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y) = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y).$$

SOLUŢIE. f este continuă pe $K = [0,\pi] \times [0,\pi]$ (mulţime compactă), deci, din teorema lui Weierstrass f este mărginită şi îşi atinge marginile, adică:

$$\begin{aligned}
\exists\,(x_m, y_m) \in K,\ \text{cu } f(x_m, y_m) &= \inf_{(x,y)\in K} f(x,y) = \min_{(x,y)\in K} f(x,y),\\
\exists\,(x_M, y_M) \in K,\ \text{cu } f(x_M, y_M) &= \sup_{(x,y)\in K} f(x,y) = \max_{(x,y)\in K} f(x,y).
\end{aligned}$$

Avem $\partial K = \Big(\{0,\pi\} \times [0,\pi]\Big) \cup \Big([0,\pi] \times \{0,\pi\}\Big)$. Avem că $f(x,y) = 0$, pentru orice $(x,y) \in \partial K$. Dar, există puncte în care f ia valori pozitive: $f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} > 0 = f(x,y),\ \forall\,(x,y) \in \partial K$, dar şi negative: $f\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} < 0 = f(x,y),\ \forall\,(x,y) \in \partial K$. Aşadar f nu-şi atinge nici minimul nici maximul pe frontieră.

Calculăm punctele staţionare ale lui f în $(0,\pi) \times (0,\pi)$:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \sin y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) = 0\\
\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) = 0
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\sin y(\cos x \sin(x+y) + \sin x \cos(x+y)) = 0\\
\sin x(\cos y \sin(x+y) + \sin y \cos(x+y)) = 0
\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}
\sin y \sin(2x+y) = 0\\
\sin x \sin(x+2y) = 0
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\sin x = 0\\
\sin y = 0
\end{cases} \vee \begin{cases}
\sin x = 0\\
\sin(2x+y) = 0
\end{cases} \vee \begin{cases}
\sin y = 0\\
\sin(x+2y) = 0
\end{cases} \vee \begin{cases}
\sin(2x+y) = 0\\
\sin(x+2y) = 0
\end{cases}$$

Deoarece $(x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi)$, rezultă $\sin x \neq 0$ şi $\sin y \neq 0$, deci sistemul iniţial va fi echivalent cu:

$$\begin{cases} \sin(2x+y) = 0 \\ \sin(x+2y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ x+2y \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y \in \{\pi, 2\pi\} \\ x+2y \in \{\pi, 2\pi\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y = \pi \\ x+2y = \pi \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+y = 2\pi \\ x+2y = 2\pi \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+y = \pi \\ x+2y = 2\pi \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+y = 2\pi \\ x+2y = \pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \\ y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} \\ y = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = \pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pi \\ y = 0 \end{cases},$$

de unde, ţinînd din nou cont că $(x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi)$, rezultă în final că:

$$S = \left\{ \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \right\}.$$

Cum punctele de extrem ale funcţiei pe $(0,\pi) \times (0,\pi)$ se află printre punctele staţionare din $(0,\pi) \times (0,\pi)$ iar funcţia are sigur două puncte de extrem în $(0,\pi) \times (0,\pi)$ (extemele globale, care am arătat că pe frontieră nu pot fi), rezultă că $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ sunt singurele puncte de extrem ale lui f în $(0,\pi) \times (0,\pi)$, deci şi în $[0,\pi] \times [0,\pi]$, acestea fiind chiar extremele globale ale funcţiei pe K. Aşadar $(x_m, y_m) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, iar $(x_M, y_M) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$. □

EXERCIŢIUL 4.2.41. Fie ecuaţia

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), \tag{4.2.2}$$

unde $a > 0$ (ea defineşte implicit o curbă plană, numită lemniscata lui Bernoulli, care este reprezentată în figura 4.2.1). Să se determine punctele în vecinătatea cărora această relaţie defineşte o funcţie $y = f(x)$.

SOLUŢIE. Se consideră $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2).$$

Atunci

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 4y(x^2+y^2) + 2a^2 y = 2y\left[2(x^2+y^2) + a^2\right],$$

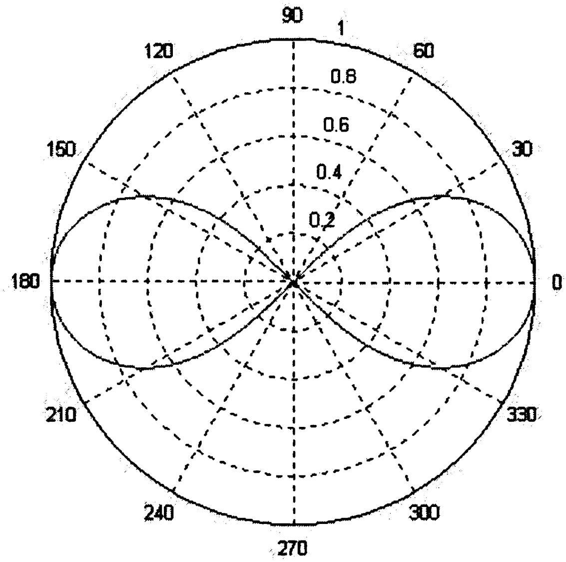

FIGURA 4.2.1

deci

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0 \Longleftrightarrow y \neq 0.$$

Teorema funcţiilor implicite se poate aplica în jurul oricărui punct (x_0, y_0) cu $F(x_0, y_0) = 0$ şi $y_0 \neq 0$. Există o vecinătate U a lui x_0, o vecinătăte V a lui y_0 şi o funcţie $f : U \to V$ astfel încât $y_0 = f(x_0)$, şi $F(x, f(x)) = 0$, $\forall\, x \in U$, adică

$$\left(x^2 + f(x)^2\right)^2 - a^2\left(x^2 - f(x)^2\right) = 0.$$

În punctele $(x_0, 0)$ cu $F(x_0, 0) = 0$ teorema funcţiilor implicite nu se poate aplica. Impunând condiţia $y = 0$ în (4.2.2) se găseşte

$$x^4 = a^2 x^2,$$

echivalent cu $x = 0$, sau $x = -a$, $x = a$. Se găsesc punctele $(0,0)$, $(-a, 0)$, $(a, 0)$ de pe lemniscata lui Bernoulli. Se observă în Fig 4.2.1 că în punctul $(0,0)$ se întâlnesc patru ramuri ale curbei, deci relaţia (4.2.2) nu poate defini o funcţie unică $y = f(x)$ în jurul punctului $(0,0)$.

În punctul $(-a,0)$, tangenta la curbă este paralelă cu axa Oy şi orice vecinătate a lui $(-a,0)$ conţine două arce de curbă care se întâlnesc (având aceeaşi tangentă) în acest punct, deci din nou nu este verificată condiţia de unicitate a funcţiei definite de (4.2.2). Acelaşi argument pentru punctul $(a,0)$. □

EXERCIŢIUL 4.2.42. Fie egalitatea

$$x+y+e^y=0. \tag{4.2.3}$$

Să se arate că se poate explicita y ca funcţie de x în mod unic într-o vecinătate a lui $(-1,0)$. Să se aproximeze funcţia implicită cu un polinom de gradul al treilea.

SOLUŢIE. Se observă că punctul $(x,y)=(-1,0)$ verifică (4.2.3).

Fie $F(x,y)=x+y+e^y$. Atunci $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=1+e^y$, deci $\dfrac{\partial F}{\partial y}(-1,0)=2$. Din teorema funcţiilor implicite rezultă existenţa unei vecinătăţi U a lui -1, a unei vecinătăţi V a lui 0 şi a unei funcţii $y=f(x)$, $f:U\to V$, astfel încât $f(-1)=0$ şi $F(x,f(x))=0$. În plus, nu se poate explicita direct, prin calcul, y ca funcţie de x din (4.2.3). Se poate obţine însă o aproximare a lui $f(x)$ în jurul lui $x=-1$, cu ajutorul polinomului Taylor al funcţiei.

Pentru a afla derivata în $x=-1$ a lui f, se derivează relaţia

$$x+f(x)+e^{f(x)}=0$$

în raport cu x :

$$1+f'(x)+e^{f(x)}f'(x)=0. \tag{4.2.4}$$

Pentru $x=-1$ rezultă $1+f'(-1)\left(1+e^0\right)=0$, de unde $f'(-1)=-\frac{1}{2}$. Pentru derivata de ordin doi, se mai derivează o dată relaţia (4.2.4)

$$f''(x)+e^{f(x)}\left(f'(x)\right)^2+e^{f(x)}f''(x)=0, \tag{4.2.5}$$

de unde, pentru $x=-1$,

$$f''(-1)(1+e^0)+e^0\left(-\frac{1}{2}\right)^2=0,$$

deci $f''(-1)=-\frac{1}{8}$.

Derivând din nou relaţia (4.2.5) se obţine

$$f'''(x)+e^{f(x)}\left(f'(x)\right)^3+3e^{f(x)}f'(x)f''(x)+e^{f(x)}f'''(x)=0.$$

Pentru $x = -1$,

$$f'''(-1)(1+e^0) + e^0\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3e^0\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{8}\right) = 0$$

şi

$$f'''(-1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{16}\right) = -\frac{1}{32}.$$

Scriind polinomul Taylor de ordin trei pe o vecinătate a lui $x = -1$ se obţine

$$f(x) \cong f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{1}{2}f''(-1)(x+1)^2 + \frac{1}{6}f'''(-1)(x+1)^3,$$

deci

$$f(x) \cong -\frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{16}(x+1)^2 - \frac{1}{192}(x+1)^3.$$

Pentru un grad de precizie mai mare, se pot calcula derivate de ordin superior ale lui f în $x = -1$. □

Exerciţiul 4.2.43. Fie relaţiile

$$\begin{cases} u^2 + 2v^2 + x^2 - y^2 = 0, \\ 3u^3 + v^3 + 2x^3 + x^2y - y^3 = 0. \end{cases} \tag{4.2.6}$$

Să se arate că se pot explicita u şi v funcţie de x şi y pe o vecinătate a lui $(1,2)$.

Soluţie. Se observă că perechile $(x_0, y_0) = (1,2)$, $(u_0, v_0) = (1,1)$ verifică (4.2.6).

Se cercetează dacă se pot explicita în mod unic (u,v) ca funcţii de (x,y) pe o vecinătate a lui $(1,2)$.

Se notează

$$F(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} u^2 + 2v^2 + x^2 - y^2 \\ 3u^3 + v^3 + 2x^3 + x^2y - y^3 \end{pmatrix}.$$

Avem

$$F'_{(u,v)}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 4v \\ 9u^2 & 3v^2 \end{pmatrix},$$

şi

$$F'_{(u,v)}(1,2,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinantul acestei matrici este egal cu -30, deci matricea este inversabilă.

Se poate aplica teorema funcţiilor implicite, care afirmă existenţa unei vecinătăţi U a lui $(x_0, y_0) = (1, 2)$, a unei vecinătăţi V a lui $(u_0, v_0) = (1, 1)$ şi a unei funcţii vectoriale de componente (u, v), definită pe U cu valori în V, astfel încât

$$F(x, y, u(x, y), v(x, y)) = 0$$

şi $u(1, 2) = 1$, $v(1, 2) = 1$.

Se pot calcula derivatele parţiale ale funcţiilor (u, v). Pentru aceasta, derivăm întâi după x relaţiile (4.2.6). Obţinem:

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} + 4v\dfrac{\partial v}{\partial x} + 2x = 0, \\ 9u^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3v^2\dfrac{\partial v}{\partial x} + 6x^2 + 2xy = 0. \end{cases}$$

Scriem aceste relaţii pentru $(x_0, y_0) = (1, 2)$:

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial u}{\partial x}(1, 2) + 8\dfrac{\partial v}{\partial x}(1, 2) + 2 = 0, \\ 9\dfrac{\partial u}{\partial x}(1, 2) + 3\dfrac{\partial v}{\partial x}(1, 2) + 10 = 0. \end{cases}$$

Acesta este un sistem de ecuaţii liniare în necunoscutele $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1, 2)$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}(1, 2)$ de determinant diferit de zero. Se poate atunci rezolva şi se obţin derivatele parţiale după x. Analog se obţin derivatele parţiale după y. Se pot obţine de asemenea derivate parţiale de ordin superior, derivând de mai multe ori relaţiile (4.2.6). □

EXERCIŢIUL 4.2.44. Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \end{cases},$$

se poate rezolva în raport cu x pe o vecinătate a punctului $(1, 2, -3)$ şi să se calculeze $y'(1)$ şi $z'(1)$.

SOLUŢIE. Fie

$$F = (F_1, F_2) : E = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$$

$$F(x, y, z) = (F_1(x, y, z),\ F_2(x, y, z)) = (x + y + z,\ x^2 + y^2 + z^2 - 14).$$

$E = \mathbb{R}^3$ este o mulţime deschisă, iar în punctul $(1, 2, -3) \in E$ sunt satisfăcute ipotezele din Teorema funcţiilor implicite:

(1) $F_1(1, 2, -3) = 0$, $F_2(1, 2, -3) = 0$.

(2) F are derivate parţiale continue pe tot $\mathbb{R}^3$ (mai mult, $F_1, F_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$).

(3)

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2z \end{vmatrix} = 2(z-y),$$

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}(1,2,-3) = -10 \neq 0.$$

Rezultă:

$$\left(\begin{array}{l} \exists\, U_0 \in \mathcal{V}(1) \\ \exists\, V_0 \in \mathcal{V}(2,-3) \end{array}\right)\left(\forall x \in U_0\right)\left(\begin{array}{l} \exists!\, y = y(x) = f_1(x) \\ \exists!\, z = z(x) = f_2(x) \end{array},\ (y,z) \in V_0\right)$$

$$\left(F(x,y(x),z(x)) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y(x) + z(x) = 0 \\ x^2 + y^2(x) + z^2(x) = 14 \end{array}\right.\right).$$

Deci, putem spune că pe o vecinătate suficient de mică U_0 a lui 1 putem rezolva în mod unic sistemul de ecuaţii în raport cu x.

Mai mult, pentru orice punct $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ cu $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ şi $2(z_0 - y_0) \neq 0$, avem:

$$\left(\begin{array}{l} \exists\, U_0 \in \mathcal{V}(x_0), \\ \exists\, V_0 \in \mathcal{V}(y_0, z_0) \end{array}\right)\left(\forall x \in U_0\right)\left(\begin{array}{l} \exists!\, y = y(x) = f_1(x) \\ \exists!\, z = z(x) = f_2(x) \end{array},\ (y,z) \in V_0\right)$$

$$\left(F(x,y(x),z(x)) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y(x) + z(x) = 0 \\ x^2 + y^2(x) + z^2(x) = 14 \end{array}\right.\right).$$

Pentru a obţine expresiile lui y' şi z' funcţie de x, y şi z în jurul unor astfel de puncte, derivăm în sistemul iniţial în raport cu x, gândind pe y şi z ca funcţie de x:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + y'(x) + z'(x) = 0 \\ 2x + 2y(x)y'(x) + 2z(x)z'(x) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y'(x) + z'(x) = -1 \\ 2y(x)y'(x) + 2z(x)z'(x) = -2x \end{array}\right. .$$

Sau, mai pe scurt:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + y' + z' = 0 \\ 2x + 2yy' + 2zz' = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y' + z' = -1 \\ 2yy' + 2zz' = -2x \end{array}\right. ,$$

sistem, care, cu regula lui Cramer (determinantul fiind nenul) dă soluţia unică:

$$y' = \frac{x-z}{z-y},\ z' = \frac{y-x}{z-y},$$

sau, mai explicit:

$$y'(x) = \frac{x - z(x)}{z(x) - y(x)},\ z'(x) = \frac{y(x) - x}{z(x) - y(x)}.$$

Apoi

$$y'(1) = \frac{1 - z(1)}{z(1) - y(1)} = \frac{1-(-3)}{-3-2} = -\frac{4}{5},$$
$$z'(1) = \frac{y(1) - 1}{z(1) - y(1)} = \frac{2-1}{-3-2} = -\frac{1}{5}.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.45. Dacă $U = U(x,y) = x^3y$, calculaţi dU/dt dacă $x^5 + y = t$ şi $x^2 + y^3 = t^2$ şi se consideră (prin abuz) $U = U(t) = U(x(t), y(t))$.

SOLUŢIE. Ecuaţiile de mai sus definesc x şi y ca funcţii (implicite) de t. Diferenţiind în raport cu t, avem

$$5x^4(dx/dt) + dy/dt = 1,$$
$$2x(dx/dt) + 3y^2(dy/dt) = 2t.$$

De aici se obţin dx/dt şi dy/dt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2t & 3y^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5x^4 & 1 \\ 2x & 3y^2 \end{vmatrix}} = \frac{3y^2 - 2t}{15x^4y^2 - 2x},\ \frac{dy}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} 5x^4 & 1 \\ 2x & 2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5x^4 & 1 \\ 2x & 3y^2 \end{vmatrix}} = \frac{10x^4t - 2x}{15x^4y^2 - 2x}.$$

Atunci

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (3x^2y)\left(\frac{3y^2 - 2t}{15x^4y^2 - 2x}\right) + (x^3)\left(\frac{10x^4t - 2x}{15x^4y^2 - 2x}\right).$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.46. Dacă $F(x,y,z) = 0$ defineşte z ca funcţie implicită de x şi y într-un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$, să se demonstreze că

(a) $\partial z/\partial x = -\dfrac{\partial F}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial F}{\partial z}$;

(b) $\partial z/\partial y = -\dfrac{\partial F}{\partial y}\Big/\dfrac{\partial F}{\partial z}$, pentru $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

SOLUŢIE. Cum $z = z(x, y)$, avem

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Atunci

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy = 0.$$

Cum x şi y sunt variabile indepenedente, avem

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

de unde se obţin formulele dorite. Acestea se puteau însă obţine şi direct. □

EXERCIŢIUL 4.2.47. Dacă $F(x, y, u, v) = 0$ şi $G(x, y, u, v) = 0$, calculaţi $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$.

SOLUŢIE. Cele două ecuaţii definesc variabilele dependente u şi v ca funcţii (implicite) de variabilele x şi y. Avem

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv = 0,$$

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial u}du + \frac{\partial G}{\partial v}dv = 0.$$

Cum $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, avem

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy.$$

Din toate cele demai sus se obţine, dacă prin abuz

$$F = F(x, y) = F(x, y, u(x, y), v(x, y)),$$

$$G = G(x, y) = G(x, y, u(x, y), v(x, y)),$$

atunci

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = 0,$$

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy = 0.$$

Cum x şi y sunt independente, coeficienţii lui dx şi dy din ultimele ecuaţii sunt zero. Se obţine

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial x},$$
$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial y}.$$

Rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ -\frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & -\frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & -\frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ -\frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & -\frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & -\frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$

Determinantul funcţional $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$, notat $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$, este jacobianul aplicaţiei (F, G) relativ la u şi v şi este presupus nenul. □

EXERCIŢIUL 4.2.48. Dacă $u^2 - v = 3x + y$ şi $u - 2v^2 = x - 2y$, să se calculeze $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial y$.

SOLUŢIE. Metoda 1. Se diferenţiază ecuaţiile în raport cu x, considerând u şi v ca funcţii de x şi y. Avem

$$2u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial u}{\partial x} - 4v\frac{\partial v}{\partial x} = 1,$$

de unde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1 - 12v}{1 - 8uv}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2u - 3}{1 - 8uv}.$$

Se diferenţiază apoi ecuaţiile în raport cu y:

$$2u\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}=1,\ u\frac{\partial u}{\partial y}-4v\frac{\partial v}{\partial y}=-2,$$

de unde

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2-4v}{1-8uv},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-4u-1}{1-8uv}.$$

S-a presupus permanent că $1-8uv\neq 0$.

Metoda 2. Se notează

$$F(x,y,u,v):=u^2-v-3x-y=0,\ G(x,y,u,v):=u-2v^2-x+2y=0.$$

Din Exerciţiul anterior

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -1 & -4v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u & -1\\ 1 & -4v\end{vmatrix}}=\frac{1-12v}{1-8uv},$$

dacă $1-8uv\neq 0$. Similar se pot obţine celelalte derivate. $\square$

EXERCIŢIUL 4.2.49. Fie

$$F(u,v,w,x,y)=0,\ G(u,v,w,x,y)=0,\ H(u,v,w,x,y)=0.$$

Să se calculeze (a) $\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_x$, (b) $\left.\dfrac{\partial x}{\partial v}\right|_w$, (c) $\left.\dfrac{\partial w}{\partial u}\right|_y$.

SOLUŢIE. Din sistemul de trei ecuaţii cu cinci necunoscute se pot obţine (teoretic) trei variabile funcţie de celelalte două. Atunci trei variabile sunt dependente şi două independente. Dacă se cere să se calculeze $\partial v/\partial y$, şi s-ar şti că v este variabilă dependentă iar y este o variabilă independentă, nu s-ar şti cealaltă variabilă independentă. Notaţia $\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_x$ indică faptul că se vrea calculul lui $\partial v/\partial y$, cu x constantă; i.e., x este cealaltă variabilă independentă.

(a) Diferenţiind ecuaţiile în raport cu y, cu x constantă, se obţine

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial y}=0.$$

Se rezolvă funcţie de $\dfrac{\partial v}{\partial y}$:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial w}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial w}\\ \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial w}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} & \frac{\partial F}{\partial w}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} & \frac{\partial G}{\partial w}\\ \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial v} & \frac{\partial H}{\partial w}\end{vmatrix}}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}.$$

Metoda jacobianului este utilă pentru a scrie rezultatul imediat, ca în Exerciţiul 4.2.47. Pentru a calcula $\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_x$ se obţine inversul raportului celor doi jacobieni, numărătorul conţinând variabila indepenedentă y, iar numitorul variabila depenedentă v pe aceleaşi poziţii. Utilizând această schemă se poate scrie

$$\left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_w=-\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(v,y,u)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,u)}},\quad \left.\frac{\partial w}{\partial u}\right|_y=-\frac{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(w,x,v)}}.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.50. Dacă $z^3-xz-y=0$, z definită implicit, să se arate că

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{3z^2-x}{(3z^2-x)^3}.$$

SOLUŢIE. Derivând în raport cu x, cu y constant, şi cu $z=z(x,y)$, x şi y fiind variabile independente, se obţine

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial x}-z=0,$$

deci

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{3z^2-x}.$$

Derivând în raport cu y, cu x constant, se obţine

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0,$$

deci

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3z^2 - x}.$$

În final

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{-1}{(3z^2-x)^2}\left(6z\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right) = \frac{1-6z[z/(3z^2-x)]}{(3z^2-x)^2} = -\frac{3z^2-x}{(3z^2-x)^3}.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.51. Fie $u = f(x,y)$ şi $v = g(x,y)$, unde $f,\ g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ deschisă, $f,\ g \in C(D)$. Deduceţi că o condiţie necesară şi suficientă ca să existe o relaţie funcţională între u and v de forma $\phi(u,v) = 0$ este ca $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \equiv 0$.

SOLUŢIE. Necesitatea: Se va demonstra că

$$\phi(u,v) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \equiv 0.$$

Se observă că

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial u}du + \frac{\partial \phi}{\partial v}dv = \frac{\partial \phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial \phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = 0.$$

Atunci

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Derivatele $\dfrac{\partial \phi}{\partial u}$ and $\dfrac{\partial \phi}{\partial v}$ nu pot fi identic zero; altfel, nu ar exista relaţie funcţională, contradicţie! Deci

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \equiv 0.$$

Suficienţa. Se va demonstra că $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \equiv 0 \Longrightarrow$ există o relaţie funcţională între u şi v; i.e., $\phi(u,v) = 0$.

Se presupune pentru început că $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ şi $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$. Rezultă atunci că jacobianul este identic nul, deci $u = c_1$, care este o relaţie funcţională trivială.

Se presupune acum că $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ nu sunt zero simultan; de exemplu $\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq 0$. Se poate rezolva atunci ecuaţia $u = f(x,y)$ pentru a obţine $x = F(u,y)$, de unde

$$u = f\{F(u,y), y\},$$
$$v = g\{F(u,y), y\}.$$

De aici

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial u}{\partial y}dy =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u}du + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy,$$
$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial v}{\partial y}dy =$$
$$= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u}du + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy.$$

Rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u} = 1,\ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

de unde

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}\Big/\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Atunci

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u}du + \left\{\frac{\partial v}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\Big/\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial v}{\partial y}\right\}dy =$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u}du + \left(\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}\right)dy.$$

Din ipoteză

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0,$$

de unde expresia diferenţialei lui ϕ devine

$$d\phi = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u}du.$$

De aici şi din cele de mai sus va rezulta

$$\partial v/\partial y = 0,$$

adică v nu depinde de y ci depinde doar de u; i.e., v este funcţie de u, adică există o relaţie funcţională de tipul

$$\phi(u,v) = 0.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.52. (a) Pentru

$$u = \frac{x+y}{1-xy}, \; v = \operatorname{arctg} y,$$

calculaţi $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

(b) Sunt u şi v sunt funcţional dependente? Dacă da, aflaţi această relaţie funcţională.

SOLUŢIE. (a) Avem

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1+y^2}{(1-xy)^2} & \dfrac{1+x^2}{(1-xy)^2} \\ \dfrac{1}{1+x^2} & \dfrac{1}{1+y^2} \end{vmatrix} = 0 \text{ dacă } xy \neq 1.$$

(b) Se aplică Exerciţiul 4.2.51: cum jacobianul este identic zero pe un domeniu, trebuie să existe o relaţie funcţională între u şi v; aceasta este $\operatorname{tg} v = u$; i.e.,

$$\phi(u,v) = u - \operatorname{tg} v = 0.$$

Aceasta se poate realiza direct rezolvând în raport cu x una dintre ecuaţii şi substituind apoi în a doua: de exemplu

$$v = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \Longrightarrow \operatorname{arctg} x = c - \operatorname{arctg} y,$$

deci

$$x = \operatorname{tg}(v - \operatorname{arctg} y) = \frac{\operatorname{tg} v - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)}{1 + \operatorname{tg} v \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)} = \frac{\operatorname{tg} v - y}{1 + y \operatorname{tg} v}.$$

Se substituie apoi în

$$u = \frac{x+y}{1-xy},$$

se simplifică şi se obţine $u = \operatorname{tg} v$. □

EXERCIŢIUL 4.2.53. (a) Pentru

$$x = u - v + w,\ y = u^2 - v^2 - w^2,\ z = u^3 + v,$$

să se calculeze $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

(b) Explicaţi semnificaţia faptului că jacobianul nu se anulează.

SOLUŢIE. (a) Avem

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2u & -2v & -2w \\ 3u^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 6wu^2 + 2u + 6u^2v + 2w.$$

(b) Ecuaţiile se pot rezolva simultan pentru u, v, w funcţie de x, y, z într-un domeniu D dacă jacobianul nu se anulează pe D. □

EXERCIŢIUL 4.2.54. Domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$ este mărginit de dreptele de ecuaţie $x + y = 6$, $x - y = 2$, and $y = 0$.

(a) Determinaţi domeniul $D' := T(D)$ în coordonate uv unde T este transformarea determinată de $x = u + v$, $y = u - v$, i.e. $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Calculaţi determinantul matricei J_T $\det J_T(u,v) =: \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

(c) Comparaţi valoarea obţinută la (b) cu raportul ariilor domeniilor D şi D'.

SOLUŢIE. (a) Domeniul D este un triunghi mărginit de dreptele $x + y = 6$, $x - y = 2$, şi $y = 0$.

Transformarea T "duce" dreapta $x + y = 6$ în dreapta $(u+v) + (u-v) = 6$, i.e. $u = 3$. Similar, dreapta $x - y = 2$ devine $(u+v) - (u-v) = 2$, i.e. $v = 1$. Apoi $y = 0$ devine $u - v = 0$, i.e. $u = v$. D' este domeniul mărgint de dreptele $u = 3$, $v = 1$, and $u = v$.

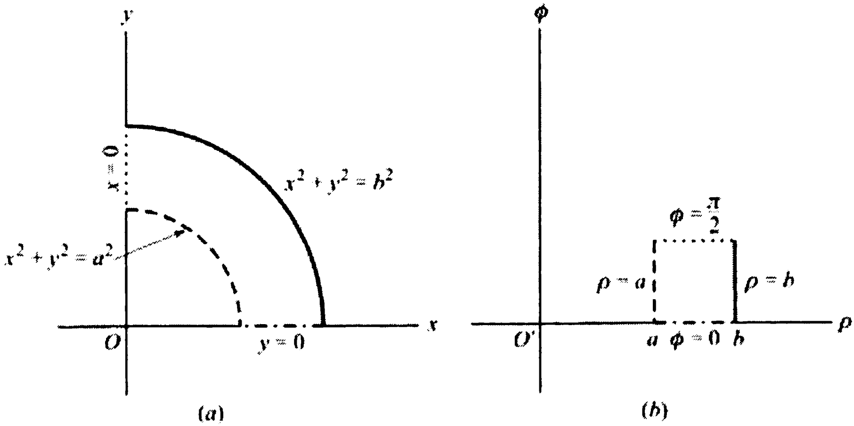

FIGURA 4.2.2

(b) Avem

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u}(u+v) & \dfrac{\partial}{\partial u}(u+v) \\ \dfrac{\partial}{\partial v}(u-v) & \dfrac{\partial}{\partial b}(u-v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

(c) Aria lui D este 4, iar a lui D' este 2, raportul fiind $4/2 = 2$, egal cu valoarea de la (b). Cum determinantul (jacobianul) este constant egal cu 2, aria oricărui domeniu D va fi dublul ariei lui D', unde $D' = T(D)$. □

EXERCIŢIUL 4.2.55. Un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$ este mărginit de curbele

$$x^2 + y^2 = a^2,\ x^2 + y^2 = b^2,\ x = 0,\ y = 0,$$

unde $0 < a < b$.

(a) Să se determine domeniul $D' = T(D)$, unde

$$(x,y) = T(\rho,\phi),\ x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,\ \rho > 0,\ 0 \le \phi < 2\pi.$$

(b) Să se analizeze situaţia $a = 0$.

(c) Calculaţi $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\phi)}$.

(d) Calculaţi $\dfrac{\partial(\rho,\phi)}{\partial(x,y)}$.

SOLUŢIE. (a) Domeniul D (a se vedea Figura 4.2.2(a)) este mărginit de $x = 0$ (figurat punctat), $y = 0$ (punctat şi întrerupt), $x^2 + y^2 = a^2$ (figurat întrerupt), şi $x^2 + y^2 = b^2$ (îngroşat).

Imaginea prin T a lui $x^2+y^2 = a^2$ şi a lui $x^2+y^2 = b^2$ sunt $\rho^2 = a^2$ şi $\rho^2 = b^2$, i.e. $\rho = a$ şi $\rho = b$. Imaginea lui $x = 0$, $a \leq y \leq b$ devine $\phi = \frac{\pi}{2}$, $a \leq \rho \leq b$; imaginea lui $y = 0$, $a \leq x \leq b$ devine $\phi = 0$, $a \leq \rho \leq b$.

Domeniul D' se poate vedea în Figura 4.2.2(b).

Altă metodă: Cum ρ este distanţa la origine în planul xy iar ϕ este unghiul măsurat de la sensul pozitiv a lui Ox, este clar că domeniul poate fi văzut şi ca $a \leq \rho \leq b$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, ca în Figura 4.2.2(b).

(b) Pentru $a = 0$, domeniul D devine un sfert dintr-o regiune circulară de rază b, iar D' este tot un dreptunghi. Motivul este dat de faptul că $x = y = 0$ este dus în $\rho = 0$, $\phi \in [0, \pi/4]$.

(c) $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cos\phi) & \frac{\partial}{\partial\phi}(\rho\cos\phi) \\ \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sin\phi) & \frac{\partial}{\partial\phi}(\rho\sin\phi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi \\ \sin\phi & \rho\cos\phi \end{vmatrix} =$$

$$= \rho(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = \rho.$$

(d) Se utilizează Exerciţiul 4.2.57(b) pentru $u = \rho$, $v = \phi$:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\phi)}\frac{\partial(\rho,\phi)}{\partial(x,y)} = 1,$$

de unde se deduce şi (c):

$$\frac{\partial(\rho,\phi)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\rho}.$$

Valoarea se putea obţine şi prin diferenţiere directă. □

EXERCIŢIUL 4.2.56. Deduceţi că după transformarea $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ ecuaţia

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

devine

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0.$$

SOLUŢIE. Fie

$$T(\rho,\theta) := (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = (x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)) = (x,y).$$

Se presupune că ea se poate inversa pe un domeniu, astfel că se poate considera că ρ şi θ sunt funcţii de x şi y:

$$(\rho, \theta) = (\rho(x,y), \theta(x,y)) = T^{-1}(x,y).$$

Evident, prin abuz, se notează şi aici tot cu V, aplicaţia $V \circ T$, deci se poate gândi şi că $V = V \circ T^{-1}$, sau

$$V(x,y) = V(\rho(x,y), \theta(x,y)).$$

Avem

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x},$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Derivând $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ în raport cu x, amintindu-ne că ρ şi θ sunt funcţii de x şi y, se obţine

$$1 = -\rho\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial \rho}{\partial x},\ 0 = \rho\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Rezultă apoi

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos\theta,\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{\rho}.$$

Analog

$$0 = -\rho\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial \rho}{\partial y},\ 1 = \rho\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial y} + i\sin\theta\frac{\partial \rho}{\partial y}.$$

Rezolvând se obţine

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin\theta,\ \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{\rho}.$$

Din toate cele de mai sus se obţine

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta},$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

De aici

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\cos\theta\frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} =$$

$$= \left(\cos\theta\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2} + \frac{\sin\theta}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\partial\theta}\right)(\cos\theta)$$

$$+\left(-\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\rho} + \cos\theta\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\right)\left(-\frac{\sin\theta}{\rho}\right),$$

sau

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial\theta} -$$

$$-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho} + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}.$$

Analog

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \sin^2\theta\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial\theta} +$$

$$+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial\rho\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho} + \frac{\cos^2\theta}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}.$$

Adunând ultimele două ecuaţii se obţine egalitatea cerută

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = 0.$$

□

EXERCIŢIUL 4.2.57. (a) Pentru $x = f(u,v)$ şi $y = g(u,v)$, unde $u = \Phi(r,s)$ şi $v = \Psi(r,s)$, să se demonstreze că

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)}.$$

(b) Deduceţi că

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1,$$

pentru $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ şi interpretaţi geometric rezultatul.

Se presupune că există derivatele parţiale ale funcţiilor de mai sus.

SOLUŢIE. (a) Avem

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial s} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)\partial(u,v)}{\partial(u,v)\partial(r,s)},$$

utilizând un rezultat cu privire la multiplicarea determinanţilor.

(b) Dacă $r = x$, $s = y$ la (a), atunci

$$\frac{\partial(x,y)\partial(u,v)}{\partial(u,v)\partial(x,y)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = 1.$$

Ecuaţiile

$$x = f(u,v),\ y = g(u,v)$$

definesc o transformare a punctelor (x,y) din planul Oxy în puncte (u,v) din planul Ouv. Inversa acestei transformări este

$$u = \Phi(x,y),\ v = \Psi(x,y).$$

Rezultatul afirmă că jacobienii acestor două transformări sunt inverşi unul altuia. □

SOLUŢIE. Metoda 1. Notăm $g(x,y) = x + 2y - 3$ şi

$$\Phi(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 - 3x - 4y + 1 + \lambda(x + 2y - 3).$$

Sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y,z) = 2x - 3 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y,z) = 2y - 4 + 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda}(x,y,z) = x + 2y - 3 = 0, \end{cases}$$

are soluţia $x = y = \lambda = 1$.

Pentru $\lambda = 1$ se obţine

$$\Phi(x,y,1) =: \Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 3x - 4y + 1 + x + 2y - 3.$$

Studiem pozitivitatea formei $d^2\Phi(1,1)$. Avem

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,y) = 2 = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,y),\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}(x,y) = 0,$$

deci

$$d^2\Phi(1,1) = 2dx^2 + 2dy^2,$$

care este evident o formă pătratică pozitiv definită, deci $(1,1)$ este punct de minim local al lui f condiţionat de $g(x,y) = 0$.

Metoda 2. Din condiţia $x + 2y = 3$, rezultă $x = 3 - 2y$, de unde

$$f(x,y) = f(3-2y,y) = (3-2y)^2 + y^2 - 3(3-2y) - 4y + 3 =$$
$$= 5y^2 - 10y + 3 = \varphi(y).$$

Aplicaţia φ este o funcţie de gradul al doilea, având ca valoare minimă pe 1 atinsă în punctul 1. Deci $(1,1)$ este punct de minim local al lui f condiţionat de $x+2y=3$. $\square$

EXERCIŢIUL 4.2.58. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=xyz,$$

condiţionate de ecuaţia $x+y+z=24$.

SOLUŢIE. Notăm $F(x,y,z)=x+y+z-24$ şi formăm funcţia

$$\Phi(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda F(x,y,z)=xyz+\lambda(x+y+z-24),$$

apoi sistemul

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y,z)=yz+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y,z)=xz+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}(x,y,z)=xy+\lambda=0,\\ F(x,y,z)=x+y+z-24=0.\end{cases}$$

Din primele trei ecuaţii rezultă:

$$yz=xz=xy=-\lambda,$$

din prima egalitate rezultînd:

$$z(x-y)=0.$$

1) Dacă $z=0$, atunci $\lambda=0$, de unde $xy=0$, adică $x=0\vee y=0$. Obţinem următoarele soluţii ale sistemului iniţial: $(0,24,0)$ şi $(24,0,0)$, ambele pentru $\lambda=0$.

2) Dacă $x-y=0$, utilizând toate celelalte relaţii se obţin soluţiile $(0,0,24)$, $\lambda=0$, precum şi $(8,8,8)$, $\lambda=-64$.

I. $\lambda=0$. Funcţia ajutătoare devine:

$$\Phi(x,y,z)=xyz=f(x,y,z).$$

Pentru a vedea dacă vreunul dintre punctele $(24,0,0)$, $(0,24,0)$, $(0,0,24)$ este punct de extrem condiţionat, calculăm diferenţiala $d^2\Phi$ în aceste puncte. Hessiana lui Φ într-un punct oarecare este:

$$H_\Phi(x,y,z)=\begin{pmatrix}0&z&y\\ z&0&x\\ y&x&0\end{pmatrix}.$$

Deci

$$H_\Phi(24,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \\ 0 & 24 & 0 \end{pmatrix},$$

iar

$$d^2\Phi(24,0,0) = 48dydz,$$

care este o formă pătratică nedefinită, deci $(24,0,0)$ nu este punct de extrem condiţionat.

Analog se obţine $d^2\Phi(0,24,0) = 48dxdz$ şi $d^2\Phi(0,0,24) = 48dxdy$, forme pătratice nedefinite, deci nici punctele $(0,24,0)$, $(0,0,24)$ nu sunt puncte de extrem condiţionat.

II. $\lambda = -64$. Funcţia ajutătoare devine:

$$\Phi(x,y,z) = xyz - 64(x+y+z-24).$$

În acest caz hessiana într-un punct oarecare coincide cu cea de la I (funcţia care dă restricţia fiind afină):

$$H_\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezultă:

$$H_\Phi(8,8,8) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 0 \end{pmatrix},$$

de unde

$$d^2\Phi(8,8,8) = 16(dxdy + dydz + dxdz).$$

Dar, din restricţia $x + y + z - 24 = 0$, prin diferenţiere, se obţine $dx + dy + dz = 0$, adică $dz = -dx - dy$, aşadar:

$$d^2\Phi(8,8,8) = 16\left[dxdy - (dx+dy)^2\right] = -16(dx^2 + dy^2 - dxdy),$$

formă pătratică negativ definită. Deci $(8,8,8)$ este punct de maxim local condiţionat. □

EXERCIŢIUL 4.2.59. Să se determine extremele funcţiei $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ cu legăturile

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, \tag{4.2.7}$$

$$2x + y = 0. \tag{4.2.8}$$

SOLUŢIE. Considerăm funcţia Lagrange a problemei:

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 \left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 \right) + \lambda_2 (2x + y)$$

şi calculăm derivatele parţiale:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= 2(1+\lambda_1)x + 2\lambda_2,\\
\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= \left(2 + \frac{\lambda_1}{2}\right) y + \lambda_2,\\
\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= \left(2 + \frac{2\lambda_1}{9}\right) z.
\end{aligned}$$

Considerăm sistemul

$$\left\{ \begin{array}{c} 2(1+\lambda_1)x + 2\lambda_2 = 0,\\ (4+\lambda_1)y + 2\lambda_2 = 0,\\ (9+\lambda_1)z = 0,\\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1,\\ 2x + y = 0. \end{array} \right. \tag{4.2.9}$$

A treia ecuaţie implică

$$\lambda_1 = -9 \text{ sau } z = 0.$$

Considerăm întâi $\lambda_1 = -9$. Sistemul devine

$$\left\{ \begin{array}{c} -16x + 2\lambda_2 = 0,\\ -5y + 2\lambda_2 = 0,\\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1,\\ 2x + y = 0, \end{array} \right.$$

de unde

$$x = \frac{\lambda_2}{8},\ y = \frac{2\lambda_2}{5}.$$

Dar ultima ecuaţie implică

$$\frac{\lambda_2}{4} + \frac{2\lambda_2}{5} = 0,$$

deci $\lambda_2 = 0$. Atunci

$$x = 0,\ y = 0,\ z_{1,2} = \pm 3.$$

Considerăm acum $z = 0$, şi găsim sistemul

$$(4.2.10)\qquad \begin{cases} 2(1+\lambda_1)x + 2\lambda_2 = 0, \\ (4+\lambda_1)y + 2\lambda_2 = 0, \\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

Scădem a doua ecuaţie din prima şi avem

$$2(1+\lambda_1)x - (4+\lambda_1)y = 0.$$

Pentru ca sistemul format din această ecuaţie şi ultima ecuaţie din sistemul de mai sus să aibă soluţie nenulă, trebuie ca determinantul

$$\begin{vmatrix} 2(1+\lambda_1) & -(4+\lambda_1) \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

să fie egal cu zero. Adică $2(1+\lambda_1) + 2(4+\lambda_1) = 0$ şi

$$\lambda_1 = -\frac{5}{2}.$$

Pe de altă parte ultimele două ecuaţii din (4.2.10) implică

$$x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ y_{1,2} = \mp\sqrt{2}.$$

Se obţine $\lambda_2 = \dfrac{3}{2}x$, deci $\lambda_2 = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ sau $\lambda_2 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.
În concluzie, am obţinut următoarele soluţii ale sistemului (4.2.9):

$$x = y = 0,\ z = \pm 3,\ \lambda_1 = -9,\ \lambda_2 = 0,$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ y = \mp\sqrt{2},\ z = 0,\ \lambda_1 = -\frac{5}{2},\ \lambda_2 = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Scriem a doua diferenţială a funcţiei L după x, y, z:

$$d^2L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 2(1+\lambda_1)(dx)^2 + (4+\lambda_1)(dy)^2 + (9+\lambda_1)(dz)^2.$$

Pentru prima grupă de soluţii

$$d^2L(0,0,\pm 3,-9,0) = -16(dx)^2 - 5(dy)^2,$$

expresie negativă pentru orice alegere a tripletei $(dx,\ dy,\ dz)$. Rezultă că punctele $(0,0,\pm 3)$ sunt puncte de maxim local pentru funcţia f, cu restricţiile (4.2.7), (4.2.8).

Pentru a doua grupă de soluţii

$$d^2L\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\sqrt{2},0,-\frac{5}{2},3\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=-3\,(dx)^2+\frac{3}{2}\,(dy)^2+\frac{13}{2}\,(dz)^2.$$

Această formă pătratică este nedefinită şi trebuie să apelăm la diferenţialele legăturilor în punctele găsite.

Diferenţiala pentru (4.2.8) este

$$2dx+dy=0.$$

De aici $dy=-2dx$ şi înlocuind mai sus, găsim

$$d^2L\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\sqrt{2},0,-\frac{5}{2},3\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=3\,(dx)^2+\frac{13}{2}\,(dz)^2.$$

Această formă pătratică este pozitivă pentru orice alegere a tripletei $(dx,\ dy,\ dz)$, deci punctele $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\sqrt{2},0\right)$ sunt puncte de maxim local pentru funcţia f, cu restricţiile (4.2.7), (4.2.8). □

4.3. Exerciţii propuse

EXERCIŢIUL 4.3.1. Studiaţi derivabilitatea funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

a) $f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{2}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{2x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 0, \\ \sin x, & x \geq 0. \end{cases}$

EXERCIŢIUL 4.3.2. Să se calculeze, utilizând regulile lui l'Hospital, următoarele limite:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \sin 2x};\ b)\ \lim_{x\searrow 1} (x-1)\exp\left(\frac{1}{x-1}\right);\ c)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1};$$

$$d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{xe^{ax} - 2ax}\ (a \in \mathbb{R});\ e)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{x^{-2}}$$

EXERCIŢIUL 4.3.3. Determinaţi domeniul de definiţie şi reprezentaţi-l grafic pentru fiecare din funcţiile

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-1}$; (b) $f(x,y) = \ln(x+y)$;

(c) $f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{2x-y}{x+y}\right)$.

EXERCIŢIUL 4.3.4. Determinaţi domeniul de definiţie şi reprezentaţi-l grafic pentru funcţia $f(x,y,z) = \sqrt{\dfrac{x+y+z-1}{x^2+y^2+z^2-1}}$.

EXERCIŢIUL 4.3.5. Stabiliţi numele fiecărei suprafeţe în parte:
(a) $3x + 2z = 12$; (b) $4z = x^2 + y^2$; (c) $z = x^2 - 4y^2$;
(d) $x^2 + z^2 = y^2$; (e) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$; (f) $x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 36$;
(g) $x^2 + y^2 = 2y$; (h) $z = x + y$; (i) $y^2 = 4z$; (j) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 2 = 0$.

EXERCIŢIUL 4.3.6. Construiţi graficul domeniului mărginit de suprafeţele $x^2 + y^2 = a^2$ şi $x^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$.

EXERCIŢIUL 4.3.7. Desenaţi punctele (x, y, z) cu proprietatea

(a) $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=z^2$;
(b) $x^2+y^2<z<x+y$.

EXERCIŢIUL 4.3.8. *Curbele de nivel* ale unei funcţii $z=f(x,y)$ sunt acele curbe din planul Oxy definite prin $f(x,y)=c$, $c\in\mathbb{R}$. Ele dau constituie o modalitate sugestivă de a intui graficul lui f. Analog, the *suprafeţele de nivel* ale lui $w=f(x,y,z)$ sunt acele suprafeţe din sistemul de coordonate $(Oxyz)$ definite de $f(x,y,z)=c$, $c\in\mathbb{R}$. Descrieţi şi trasaţi curbele şi supreafeţele de nivel pentru fiecare din funcţiile următoare:

(a) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$; (b) $f(x,y)=4xy$; (c) $f(x,y)=\tan^{-1}y/(x+1)$;

(d) $f(x,y)=x^{2/3}+y^{2/3}$; (e) $f(x,y,z)=x^2+4y^2+16z^2$; (f) $\sin(x+z)/(1-y)$.

EXERCIŢIUL 4.3.9. a) Să se calculeze, pornind de la definiţie $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, pentru $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y\right)$.

b) Să se calculeze, pornind de la definiţie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1)$, pentru $f(x,y)=xy\ln x$.

c) Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I pentru următoarele funcţii pe domeniile lor de definiţie:

i) $f(x,y)=\ln\left(x+\dfrac{y}{x}\right)$; ii) $f(x,y)=a^{-\frac{x}{y}}$, $a>0$ fixat; iii) $f(x,y)=x^y$; iv) $f(x,y)=(1+xy)^x$; v) $f(x,y,z)=x^{y^z}$; vi) $f(x,y,z)=xe^{x^2+y^2+z^2}$.

d) Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul n pe $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ pentru funcţia

$$f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

EXERCIŢIUL 4.3.10. Dacă

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-xy}{x+y}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

să se calculeze

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$; (b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$; (c) Să se studieze existenţa limitei

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y);$$

de ce nu este ea egală cu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$?

EXERCIŢIUL 4.3.11. Pentru $f(x,y) = (x-y)\sin(3x+2y)$, calculaţi (a) $\frac{\partial f}{\partial x}$; (b) $\frac{\partial f}{\partial y}$; (c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; (d) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$; (e) $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(0, \pi/3)$.

EXERCIŢIUL 4.3.12. (a) Demonstraţi prin diferenţiere directă că

$$z = xy\mathrm{tg}\,(y/x)$$

satisface ecuaţia

$$x(\partial z/\partial x) + y(\partial z/\partial y) = 2z,\ (x,y) \neq (0,0).$$

(b) Să se discute (a) pentru alte puncte (x,y), presupunând $z = 0$ în $(0,0)$.

EXERCIŢIUL 4.3.13. Verificaţi că $\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}$ pentru următoarele funcţii
(a) $f(x,y) = (2x-y)/(x+y)$;
(b) $f(x,y) = x\mathrm{tg}\,xy$;
(c) $f(x,y) = \cosh(y + \cos x)$
indicând puncte care nu satisfac asta, argumentând eventual de ce.

EXERCIŢIUL 4.3.14. Demonstraţi că funcţia $z = \ln\{(x-a)^2 + (y-b)^2\}$ satisface ecuaţia

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,\ (x,y) \neq (a,b).$$

EXERCIŢIUL 4.3.15. Demonstraţi că funcţia $z = x\cos(y/x) + \mathrm{tg}\,(y/x)$ satisface ecuaţia

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,\ x \neq 0.$$

EXERCIŢIUL 4.3.16. Calculaţi o valoare aproximativă a lui

$$\sqrt[5]{(3.8)^2 + 2(2.1)^3}$$

utilizând diferenţiale.

EXERCIŢIUL 4.3.17. Determinaţi care din expresiile următoare este o diferenţială exactă şi găsiţi acea funcţie a cărei diferenţială este:
(a) $(2xy^2 + 3y\cos 3x)dx + (2x^2y + \sin 3x)dy$;
(b) $(6xy - y^2)dx + 2(xe^y - x^2)dy$;
(c) $(z^3 - 3y)dx + (12y^2 - 3x)dy + 3xz^2dz$.

EXERCIŢIUL 4.3.18. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dată prin:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases},$$

este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$; în origine f nu este diferenţiabilă, este continuă şi are derivate parţiale.

EXERCIŢIUL 4.3.19. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dată prin:

$$f(x,y)=\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases},$$

este continuă dar nu are derivate parţiale de ordinul I în origine. Este f diferenţiabilă în origine?

EXERCIŢIUL 4.3.20. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dată prin:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases},$$

este continuă, are derivate parţiale de ordinul I dar nu este diferenţiabilă în origine.

EXERCIŢIUL 4.3.21. Să se studieze diferenţiabilitatea funcţiilor $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

a) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^4+y^6}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases};$

b) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^4+y^6}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$

EXERCIŢIUL 4.3.22. Să se arate că următoarele funcţii sunt armonice pe mulţimile specificate:

a) $f(x,y)=x^2-y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
b) $f(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
c) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$, $(x,y)\neq(0,0)$.

EXERCIŢIUL 4.3.23. Să se calculeze jacobiana J_f într-un punct curent pentru funcţiile:

i) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x^2y-y, x^3-y^4)$.
ii) $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(xe^{x+y}, x^2y^3, \ln(2+x^2+y^2))$.

iii) $f : (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \left(y^2 - xe^{z^2} - y\ln x, \dfrac{x}{zy}\right)$.
iv) $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, xyz, xy - zx + 2yz\right).$$

Să se scrie expresia diferenţialei df într-un punct curent.

EXERCIŢIUL 4.3.24. Să se calculeze hessiana H_f într-un punct curent pentru funcţiile:
i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3y + y^4$.
ii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = xye^x + x^2$.
iii) $f : (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy + ye^z + z\ln x$.
iv) $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
Să se scrie expresia diferenţialei a II-a d^2f într-un punct curent.

EXERCIŢIUL 4.3.25. Să se calculeze $d(g \circ f)$, unde:
i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x+y,\, x-y)$, $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$g(u,v) = \left(u^2 - v^2,\, 2uv\right).$$

ii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x-y,\, x+y,\, xy)$, $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$g(u,v,w) = \left(v^3 - w^3,\, 3u - w\right).$$

EXERCIŢIUL 4.3.26. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei

$$f(x,y) = xy \cdot \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),\ (x,y) \neq (0,0),$$

unde $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe $\mathbb{R}$.

EXERCIŢIUL 4.3.27. Să se calculeze laplaceianul $\left(\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$ funcţiei $f(x,y) = x\varphi\left(x^2+y^2\right)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, unde $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilă de ordinul doi pe $\mathbb{R}$.

EXERCIŢIUL 4.3.28. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I şi II ale funcţiei

$$z(x,y) = f\left(x^2y,\, \frac{y}{x}\right),\ y \neq 0,$$

unde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ are derivate parţiale de ordinul II continue pe $\mathbb{R}^2$.

EXERCIŢIUL 4.3.29. Să se arate că funcţia
$$z(x,y) = \sin y \cdot \varphi(\sin x - y)$$
verifică ecuaţia
$$\frac{1}{\cos x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z\operatorname{ctg} y,$$
unde $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe $\mathbb{R}$.

EXERCIŢIUL 4.3.30. Să se arate că funcţia
$$z(x,y) = y \cdot \varphi\left(y\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)$$
verifică ecuaţia
$$x\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} + 2y^2\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z\right) = 0,$$
unde $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe $\mathbb{R}$.

EXERCIŢIUL 4.3.31. Să se arate că funcţia
$$\omega(x,y,z) = \varphi\left(xy,\, x^2+y^2-z^2\right)$$
verifică ecuaţia
$$xz\frac{\partial \omega}{\partial x} - yz\frac{\partial \omega}{\partial y} + \left(x^2-y^2\right)\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0,$$
unde $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

EXERCIŢIUL 4.3.32. Să se arate că funcţiile următoare sunt soluţii ale ecuaţiilor diferenţiale precizate

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = xg(x^2-y^2)$ pentru
$$xy\frac{\partial f}{\partial x} + x^2\frac{\partial f}{\partial y} = yf,$$
unde $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \in C^1(\mathbb{R})$.

b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = g(xyz, yz+zx-xy)$ pentru
$$x^2(y+z)\frac{\partial f}{\partial x} - y^2(z+x)\frac{\partial f}{\partial y} + z^2(y-x)\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$
unde $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

c) $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = g\left(\frac{y}{x}, \frac{z+x^2+y^2}{x}\right)$ pentru
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + (z-x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

unde $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

EXERCIŢIUL 4.3.33. (a) Pentru $U(x, y, z) = 2x^2 - yz + xz^2$, $x = 2\sin t$, $y = t^2 - t + 1$, $z = 3e^{-t}$, să se găsească $\frac{dU}{dt}(0)$.

(b) Pentru $H(x, y) = \sin(3x - y)$, $x^3 + 2y = 2t^3$, şi $x - y^2 = t^2 + 3t$, să se găsească dH/dt.

EXERCIŢIUL 4.3.34. Pentru $F(x, y) = (2x + y)/(y - 2x)$, $x = 2u - 3v$ şi $y = u + 2v$, să se găsească

(a) $\frac{\partial F}{\partial u}$; (b) $\frac{\partial F}{\partial v}$; (c) $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$; (d) $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$; (e) $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$.

EXERCIŢIUL 4.3.35. Pentru $U(x, y) = x^2 F(y/x)$, deduceţi că

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} = 2U,$$

F fiind de clasă C^1.

EXERCIŢIUL 4.3.36. Dacă

$$x = u\cos\alpha - v\sin\alpha,\ y = u\sin\alpha + v\cos\alpha,$$

unde $\alpha \in \mathbb{R}$, iar $V = V(x, y)$, deduceţi că

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2.$$

EXERCIŢIUL 4.3.37. Pentru

$$x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,$$

ecuaţiile

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

devin

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \phi},\ \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \phi}.$$

EXERCIŢIUL 4.3.38. Utilizând Exerciţiul 4.3.37, deduceţi că în urma transformării

$$x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,$$

ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + -\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0.$$

EXERCIŢIUL 4.3.39. Să se determine punctele de extrem local ale funcţiilor:

a) $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$, $x > 0$, $y > 0$.

b) $f(x,y) = x^4 + 4x^2y + y^3 + 4y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

c) $f(x,y) = xy\ln\left(x^2+y^2\right)$, $(x,y) \neq (0,0)$.

d) $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

e) $f(x,y) = x^3 - y^3 + 9xy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

f) $f(x,y) = x^3 + x^2y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

g) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 5$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

EXERCIŢIUL 4.3.40. Să se determine punctele de extrem local ale funcţiilor:

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

b) $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

c) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

d) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{x+z} + \dfrac{z}{x+y}$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

EXERCIŢIUL 4.3.41. Să se arate că funcţia

$$f(x,y) = \left(x - y^2\right)\left(2x - y^2\right)$$

are un minim în $(0,0)$ de-a lungul oricărei drepte care trece prin origine dar nu are un minim în raport cu ansamblul variabilelor în origine.

EXERCIŢIUL 4.3.42. i) Să se arate că ecuaţia $x+y+2z = e^z$ defineşte implicit o funcţie $z = f(x,y)$ în vecinătatea punctului $(x_0, y_0, z_0) = (1,0,0)$. Să se calculeze, în plus, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ în punctul indicat.

ii) Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 2xyz + 2 \end{cases},$$

se poate rezolva în raport cu x pe o vecinătate a punctului $(1,1,0)$ şi să se calculeze $y'(1)$ şi $z'(1)$.

iii) Să se calculeze $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, unde u şi v sunt funcţii definite implicit prin

$$\begin{cases} xy - 2y^2 + yu + x + y + v = 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \ln\left(u^2 + v^2\right) = 0 \end{cases}$$

în punctul $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 1, 1, 0)$.

EXERCIŢIUL 4.3.43. Pentru $F(x, y) = 0$, deduceţi că

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

EXERCIŢIUL 4.3.44. Pentru $x^3 + y^3 - 3xy = 0$, determinaţi dy/dx, d^2y/dx^2.

EXERCIŢIUL 4.3.45. Pentru

$$xu^2 + v = y^3,\ yu - xv^3 = 4x,$$

determinaţi $\frac{\partial u}{\partial x}$ şi $\frac{\partial v}{\partial y}$.

EXERCIŢIUL 4.3.46. Dacă $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, unde f şi g sunt funcţii diferenţiabile, deduceţi că

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} = 1.$$

Explicaţi care variabile sunt considerate independente în fiecare derivată parţială.

EXERCIŢIUL 4.3.47. Pentru

$$f(x, y, r, s) = 0,\ g(x, y, r, s) = 0,$$

deduceţi că

$$\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = 0.$$

Explicaţi care variabile sunt considerate independente. Ce notaţii se pot utiliza pentru a indica variabilele independente considerate?

EXERCIŢIUL 4.3.48. Calculaţi $\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}$ pentru

$$F(u, v) = -3u^2 - uv,\ G(u, v) = 2uv^2 + v^3.$$

EXERCIŢIUL 4.3.49. Dacă

$$F = x + 3y^2 - z^3,\ G = 2x^2yz,\ H = 2z^2 - xy,$$

calculaţi $\dfrac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}$.

EXERCIŢIUL 4.3.50. Pentru

$$u = \arcsin x + \arcsin y,\ v = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2},$$

decideţi dacă există vreo relaţie funcţională între u şi v, şi găsiţi-o.

EXERCIŢIUL 4.3.51. Pentru

$$F = xy + yz + zx,\ G = x^2 + y^2 + z^2,\ H = x + y + z,$$

determinaţi dacă există vreo relaţie funcţională între F, G, H şi găsiţi-o.

EXERCIŢIUL 4.3.52. (a) Pentru

$$x = f(u,v,w),\ y = g(u,v,w),\ z = h(u,v,w),$$

dacă $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$, deduceţi că

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x,v,z)} \cdot \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,w)} = 1.$$

(b) Daţi o interpretare a lui (a) in termeni de transformări.

EXERCIŢIUL 4.3.53. Dacă

$$f(x,y,z) = 0,\ g(x,y,z) = 0,$$

arătaţi că

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(z,x)}} = \frac{dz}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}},$$

dând condiţii ca egalităţile de mai sus să aibă loc.

EXERCIŢIUL 4.3.54. Dacă

$$x + y^2 = u,\ y + z^2 = v,\ z + x^2 = w,$$

calculaţi $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$, presupunând că ecuaţiile iniţiale definesc x, y, şi z ca funcţii de clasă C^2 de u, v şi w.

EXERCIŢIUL 4.3.55. Enunţaţi şi demonstraţi un rezultat identic cu Exerciţiul 4.2.51, pentru situaţia

$$u = f(x,y,z),\ v = g(x,y,z),\ w = h(x,y,z).$$

EXERCIŢIUL 4.3.56. Pentru transformarea $T = T(u, v)$ dată de

$$x = 2u + v,\ y = u - 3v,$$

(a) desenaţi domeniul $D' = T(D)$ în planul Ouv, unde D este domeniul din planul Oxy mărginit de $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$;

(b) calculaţi $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$;

(c) comparaţi valoarea de la (b) cu raportul ariilor domeniilor D şi D'.

EXERCIŢIUL 4.3.57. (a) Demonstraţi că prin transformarea liniară dată de

$$x = a_1u + a_2v,\ y = b_1u + b_2v\,(a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0)$$

dreptele şi cercurile din planul Oxy sunt transformate tot în drepte şi cercuri din planul Ouv.

(b) Calculaţi Jacobianul J al transformării de la (a) şi analizaţi cazul $J = 0$.

EXERCIŢIUL 4.3.58. Pentru

$$x = \cos u \cosh v,\ y = \sin u \sinh v:$$

(a) să se arate că curbele de coordonate $u = a$ şi $v = b$ în planul Ouv sunt mapate în hiperbole şi elipse în planul Oxy;

(b) să se calculeze $\left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$;

(c) să se calculeze $\left|\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right|$.

EXERCIŢIUL 4.3.59. Pentru transformarea $T = T(u, v, w)$, dată de

$$x = 2u + 3v - w,\ y = 2v + w,\ z = 2u - 2v + w,$$

(a) desenaţi domeniul $K' = T(K)$ din spaţiul $Ouvw$, unde K este domeniul din spaţiul $Oxyz$ mărginit de $x = 0$, $x = 8$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$, $z = 6$;

(b) calculaţi $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$;

(c) comparaţi valoarea de la (b) cu raportul ariilor domeniilor D şi D'.

EXERCIŢIUL 4.3.60. Dându-se transformarea în coordonate sferice

$$x = r\sin\phi\cos\theta,\ y = r\sin\phi\sin\theta,\ z = r\cos\phi,$$

unde $r \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$, să se descrie suprafeţele de coordonate

(a) $r = a$, (b) $\theta = b$, şi (c) $\phi = c$, unde a, b, $c \in \mathbb{R}$.

EXERCIŢIUL 4.3.61. Dacă $F(P, V, T) = 0$, demonstraţi că

$$\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_v \left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_p = -\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_T, \quad \left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_v \left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_p \left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T = -1.$$

Aceste rezultate sunt utile în termodinamică, unde P, V, şi T corespund to presiunii, volumului şi temperaturii unui sistem fizic.

EXERCIŢIUL 4.3.62. Dacă ecuaţia $F(x/y, z/y) = 0$ defineşte implicit pe z funcţie de x şi y, atunci

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

EXERCIŢIUL 4.3.63. Dacă ecuaţia $F(x + y - z, x^2 + y^2) = 0$ defineşte implicit pe z funcţie de x şi y, atunci

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = x - y.$$

EXERCIŢIUL 4.3.64. Dacă $x = f(u, v)$ şi $y = g(u, v)$, deduceţi că

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u},$$

unde $J = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, f şi g fiind de clasă C^1.

EXERCIŢIUL 4.3.65. Dacă

$$x = f(u, v),\ y = g(u, v),\ z = h(u, v),$$

$$F(x, y, z) = 0,$$

deduceţi că

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}dx + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}dy + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}dz = 0,$$

unde f, g, h şi F sunt funcţii de clasă C^1.

EXERCIŢIUL 4.3.66. Dacă

$$x = \phi(u, v, w),\ y = \Psi(u, v, w),$$

$$u = f(r, s),\ v = g(r, s),\ w = h(r, s),$$

deduceţi că

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(v,w)} = \frac{\partial(v,w)}{\partial(r,s)} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(w,u)} + \frac{\partial(w,u)}{\partial(r,s)},$$

unde ϕ, Φ, f, g, h sunt funcţii de clasă C^1.

EXERCIŢIUL 4.3.67. (a) Demonstraţi că

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix},$$

stabilind astfel o regulă de înmulţire a doi determinanţi de ordin doi, de genul celei din Exerciţiul 4.2.57.

(b) Generalizaţi rezultatul de la (a) la determinanţi de ordin 3, 4, etc.

EXERCIŢIUL 4.3.68. Dacă x, y, şi z sunt funcţii de u, v, w, iar u, v, w sunt funcţii de r, s şi t, deduceţi că

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,t)} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \cdot \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(r,s,t)}.$$

EXERCIŢIUL 4.3.69. Dându-se ecuaţiile

$$F_j(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n) = 0,\ j = 1,2,\cdots,n,$$

deduceţi că, pentru F_j, satisfăcând certe ipoteze

$$\frac{\partial y_r}{\partial x_s} = \frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_r,\cdots,F_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,x_s,\cdots,y_n)} \Big/ \frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)},$$
$$r = 1,\ldots,n,\ s = 1,\ldots,m.$$

EXERCIŢIUL 4.3.70. (a) Dacă $F = F(x,y)$ este funcţie omogenă de grad 2, deduceţi că

$$x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2F.$$

(b) Exemplificaţi (a) pentru $F(x,y) = x^2\ln(y/x)$.

EXERCIŢIUL 4.3.71. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei

$$f(x,y,z) = xy^2z^3,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,$$

condiţionate de $x + y + z = 12$.

EXERCIŢIUL 4.3.72. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei

$$f(x,y,z) = x - 2y + 2z,$$

condiţionate de $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

EXERCIŢIUL 4.3.73. Să se calculeze $\inf f$ şi $\sup f$ pentru
$$f : D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2.$$

EXERCIŢIUL 4.3.74. Să se calculeze punctele de extrem ale funcţiei
$$f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y),$$
în domeniul $D = \{(x, y) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant \pi\}$.

EXERCIŢIUL 4.3.75. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei
$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 4y + 1,$$
condiţionate de $x + 2y = 3$.

EXERCIŢIUL 4.3.76. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx,$$
condiţionate de $x + y + z = 3$.

EXERCIŢIUL 4.3.77. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei
$$f(x, y, z) = xyz,$$
condiţionate de $x + y - z = 5$ şi $x - y + z = 2$.

EXERCIŢIUL 4.3.78. Să se scrie formula lui Taylor de ordinul n cu rest în forma lui Lagrange pentru următoarele funcţii în punctele indicate:
i) $f(x, y) = 3x^2 - xy - 2y^2 + 3x - y + 2$, $(x_0, y_0) = (1, -2)$, $n = 4$.
ii) $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $n = 4$.
iii) $f(x, y) = \ln[(1 + x)(1 + y)]$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $n = 5$.
iv) $f(x, y) = e^{2x} \ln(1 + y)$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $n = 3$.
v) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $n = 2$.
vi) $f(x, y, z) = 2x^3 + xy^2 + 4yz + 9z^2 - 1$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$, $n = 3$.
vii) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$, $n = 2$.

EXERCIŢIUL 4.3.79. Pentru $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $y \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ mic, să se justifice aproximările:
i) $\dfrac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \dfrac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)$, ii) $(1 + x)^m (1 + y)^n \approx 1 + mx + ny$,
iii) $\ln(1 + x) \ln(1 + y) \approx xy$, iv) $\operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{1 + xy} \approx x + y$,
v) $\operatorname{arctg} \dfrac{1 + x + y}{1 - x + y} \approx \dfrac{\pi}{4} + x(1 - y)$.

CAPITOLUL 5

Şiruri şi serii de funcţii

5.1. Noţiuni şi rezultate teoretice

A. Şiruri de funcţii.

I. Şiruri de funcţii. Generalităţi.

Pentru $A \subset \mathbb{R}$ şi $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, se pune problema determinării următoarei submulţimi a lui A, notată

$$B := \{x \in A \,|\, (f_n(x))_{n\geq 1} \text{ este convergent}\}\,;$$

deasemenea, se pune problema "rapidităţii de convergenţă" a fiecăruia dintre şirurile $(f_n(x))_{n\geq 1}$, $x \in B$, anume în ce măsură acestea sunt "la fel de rapid convergente".

Definiţia 5.1.1. Fie $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$, $B \subset A$.

1) Se spune că $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge simplu la f pe mulţimea B* $\left(f_n \xrightarrow[B]{s} f\right)$

$$\Longleftrightarrow \Big(\forall\, x \in B\Big)\Big((f_n(x))_{n\geq 1} \text{ este convergent la } f(x)\Big) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \Big(\forall\, x \in B\Big)\Big(\forall\, \varepsilon > 0\Big)\Big(\exists\, n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}\Big)\Big(\forall\, n \geq n_{x,\varepsilon}\Big)\Big(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big).$$

2) $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge uniform la f pe mulţimea B* $\left(f_n \xrightarrow[B]{u} f\right) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \Big(\forall\, \varepsilon > 0\Big)\Big(\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\Big)\Big(\forall\, n \geq n_\varepsilon\Big)\Big(\forall\, x \in B\Big)\Big(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\Big).$$

Observaţia 5.1.2. 1) Evident $f_n \xrightarrow[B]{u} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow[B]{s} f$, reciproca fiind falsă.

2) Convergenţa uniformă a lui $(f_n)_{n\geq 1}$ la f pe B înseamnă de fapt că toate şirurile $(f_n(x))_{n\geq 1}$, $x \in B$ sunt "la fel de rapid convergente", lucru evidenţiat prin existenţa aceluiaşi rang n_ε, pentru toţi $x \in B$, pentru care $f_n(x)$ se află "ε-aproape" de $f(x)$.

3) Se deduce simplu următorul *Criteriu de uniform convergenţă*:

$$f_n \xrightarrow[B]{u} f \iff \sup_{x\in B} |f_n(x) - f(x)| \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

Sau, dacă

$$|f_n(x) - f(x)| \leq b_n,\ n \geq n_0,\ x \in B;\ b_n \to 0,$$

atunci evident $f_n \xrightarrow[B]{u} f$.

4) Este util şi următorul *Criteriu de neuniform convergenţă*: dacă există $(x_n)_{n\geq 1} \subset B$ cu $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to 0$, atunci $(f_n)_{n\geq 1}$ nu converge uniform la f pe B.

II. Teoreme "de transfer" pentru şiruri de funcţii.

Fie $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, şi $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$, $B \subset A$.

TEOREMA 5.1.3. *(Teorema "de transfer de continuitate"). (TTC). Fie $f_n \xrightarrow[B]{u} f$, f_n continue în $x_0 \in B$ (pe întreaga mulţime B). Atunci f este continuă în x_0 (pe B).*

TEOREMA 5.1.4. *(Teorema "de transfer de derivabilitate"). (TTD). Fie $B = I$ interval din $\mathbb{R}$, $f_n \xrightarrow[I]{u} f$, f_n derivabile pe I, $f_n' \xrightarrow[I]{u} g$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$. Atunci f este derivabilă pe I şi $f' = g$ pe I.*

TEOREMA 5.1.5. *(Teorema "de transfer de integrabilitate"). (TTI). Fie $f_n \xrightarrow[B]{u} f$ cu $B = [a, b] \subset \mathbb{R}$, f_n integrabile pe $[a, b]$. Atunci f este integrabilă pe $[a, b]$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$.*

B. Serii de funcţii.

I. Serii de funcţii. Generalităţi.

Pentru $A \subset \mathbb{R}$ şi $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, se pune problema determinării următoarei submulţimi a lui A:

$$B := \left\{ x \in A \,\middle|\, \sum_{n\geq 1} f_n(x) \text{ este convergentă} \right\}$$

şi a "rapidităţii de convergenţă" a fiecăreia dintre seriile $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$, $x \in B$, precum şi în ce măsură acestea sunt "la fel de rapid convergente".

DEFINIŢIA 5.1.6. Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$.

0) Cuplul $((f_n)_{n\geq 1}, (s_n)_{n\geq 1})$, unde $s_n(x) = f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$, $x \in A$, $n \geq 1$, se numeşte *serie de funcţii de termen general* $(f_n)_{n\geq 1}$ şi se notează $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$.

1) $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ *converge simplu la* $s : B \to \mathbb{R}$ *pe mulţimea* B $\left(\sum\limits_{n\geq 1} f_n \xrightarrow[B]{s} s\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow s_n \xrightarrow[B]{s} s \Leftrightarrow \Big(\forall x \in B\Big)\Big(\sum_{n\geq 1} f_n(x) \text{ este conv. şi } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)\Big).$$

2) $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ *converge uniform la* $s : B \to \mathbb{R}$ *pe* B $\left(\sum\limits_{n\geq 1} f_n \xrightarrow[B]{u} s\right) \Leftrightarrow s_n \xrightarrow[B]{u} s$

$$\Leftrightarrow \Big(\forall \varepsilon > 0\Big)\Big(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\Big)\Big(\forall n \geq n_\varepsilon\Big)\Big(\forall x \in B\Big)\Big(|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon\Big).$$

OBSERVAŢIA 5.1.7. 1) Deoarece pentru majoritatea seriilor numerice nu se poate preciza efectiv suma lor, se va utiliza următoarea sintagmă în locul celei din definiţia anterioară:

Seria $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ *converge simplu pe mulţimea* B $\left(\sum\limits_{n\geq 1} f_n \xrightarrow[B]{s}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \Big(\forall x \in B\Big)\Big(\sum_{n\geq 1} f_n(x) \text{ este convergentă }\Big).$$

Studiul convergenţei seriei de funcţii $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ înseamnă aşadar studiul convergenţei seriilor numerice $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$, funcţie de "parametrul" $x \in A$.

2) Cu aceleaşi argumente ca la 1) şi utilizând *Criteriul general de convergenţă al seriilor numerice*, se poate deduce următoarea caracterizare a convergenţei uniforme:

Seria $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ *converge uniform pe* B $\left(\sum\limits_{n\geq 1} f_n \xrightarrow[B]{u}\right) \Leftrightarrow$

$$\Big(\forall \varepsilon\Big)\Big(\exists n_\varepsilon\Big)\Big(\forall n \geq n_\varepsilon, p \geq 1\Big)\Big(\forall x \in B\Big)\Big(|f_{n+1}(x)+\ldots+f_{n+p}(x)| < \varepsilon\Big).$$

3) Funcţia sumă a unei serii de funcţii (care "colectează" sumele seriilor numerice $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in B$) se apelează cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ chiar dacă nu se poate determina efectiv (nu provine neapărat din operaţii algebrice şi

de compunere cu funcţii elementare). Utilizând "derivarea şi integrarea termen cu termen" a seriilor de funcţii se pot determina însă destule astfel de sume.

TEOREMA 5.1.8. *(Criteriul lui Weierstrass de convergenţă uniformă). Dacă $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ şi $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ astfel încât $|f_n(x)| \leq a_n$, $n \geq k$, $x \in B$, $B \subset A$ şi $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ convergentă, atunci $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge uniform pe B.*

II. Teoreme "de transfer" pentru serii de funcţii.

Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $B \subset A$.

TEOREMA 5.1.9. *(Teorema "de transfer de continuitate"). (TTC-serii). Dacă $\sum\limits_{n\geq 1} f_n \xrightarrow[B]{u}$ şi f_n continue în $x_0 \in B$ (pe întreaga mulţime B), atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este continuă în x_0 (pe mulţimea B).*

TEOREMA 5.1.10. *(Teorema "de derivare termen cu termen"). (DTT). Fie $B = I$ interval din $\mathbb{R}$, $\sum\limits_{n\geq 1} f_n \xrightarrow[I]{u}$, f_n derivabile pe I, $\sum\limits_{n\geq 1} f_n' \xrightarrow[B]{u}$. Atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este derivabilă pe I şi $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ pe I.*

TEOREMA 5.1.11. *(Teorema "de integrare termen cu termen"). (ITT). Dacă $\sum\limits_{n\geq 1} f_n \xrightarrow[B]{u}$, $B = [a,b] \subset \mathbb{R}$ şi f_n integrabile pe $[a,b]$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx \right) = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx.$$

C. Serii de puteri.

I. Serii de puteri. Generalităţi.

DEFINIŢIA 5.1.12. Fie $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$.

1) Seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$, cu $f_n(x) = a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$, se numeşte *serie de puteri*; se mai scrie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

2) $B := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n \text{ convergentă} \right\}$ se numeşte *mulţimea de convergenţă (simplă) a seriei de puteri.*

TEOREMA 5.1.13. *(Teorema lui Abel). Pentru seria de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$, există un unic $R \in [0, \infty]$ cu următoarele proprietăţi.*

I. Dacă $R = 0$, $B = \{0\}$;

II. Dacă $0 < R < \infty$,

a) seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ este absolut convergentă $\forall\, x \in (-R, R)$ şi divergentă $\forall\, x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ (deci $(-R, R) \subset B \subset [-R, R]$);

b) seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ este uniform convergentă pe orice interval $[-r, r]$, $0 < r < R$.

III. Dacă $R = \infty$,

a) seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ este absolut convergentă $\forall\, x \in (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ (deci $B = \mathbb{R}$);

b) seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ este uniform convergentă pe orice interval $[-r, r]$, $r > 0$.

R se numeşte raza de convergenţă a seriei de puteri.

TEOREMA 5.1.14. *(Teorema lui Hadamard). Pentru seria de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$, fie $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} =: \omega \in [0, \infty]$ (sau $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} =: \omega$). Atunci raza de convergenţă a seriei este dată de:*

a) $R = 0$, dacă $\omega = \infty$;

b) $R = \infty$, dacă $\omega = 0$;

c) $R = \dfrac{1}{\omega}$, dacă $0 < \omega < \infty$.

II. Teoreme "de transfer" pentru serii de puteri.

TEOREMA 5.1.15. *(Continuitatea sumei seriei de puteri). Pentru seria de puteri* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$ *cu raza de convergenţă* $R > 0$, *suma sa* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este continuă pe* $(-R, R)$.

TEOREMA 5.1.16. *(Teorema a II-a a lui Abel). Pentru seria de puteri* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$ *cu raza de convergenţă* $0 < R < \infty$, *dacă* $R \in B$ *(sau* $-R \in B$*), atunci suma sa* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este funcţie continuă în* R *(respectiv* $-R$*).*

TEOREMA 5.1.17. *(Derivabilitatea sumei seriei de puteri).*

a) Dacă seria de puteri $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$ *are raza de convergenţă* $R > 0$, *atunci seria derivatelor* $\sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$ *are aceeaşi rază de convergenţă,* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este derivabilă pe* $(-R, R)$ *şi*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

b) Enunţ similar cu a) pentru seria derivatelor de orice ordin.

III. Formula lui Taylor. Serii Taylor. Dezvoltări în serie.

Se consideră $I \subset \mathbb{R}$ interval, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $x_0 \in I$ (punct interior lui I). Se reaminteşte formula lui Taylor cu rest Lagrange: dacă f este derivabilă de ordin $n+1$ pe I, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci pentru orice $x \in I$, există ξ între x_0 şi x cu proprietatea

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f'(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}.$$

OBSERVAŢIA 5.1.18. 1. Polinomul

$$T_n(x) := f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

se numeşte *polinomul Taylor de ordin (grad) n asociat lui f în punctul x_0.*

2. $R_{n+1}(x) := \dfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ se numeşte *restul Lagrange de ordin $n+1$ asociat lui f în x_0.*

3. Există şi o variantă de formulă Taylor, dar cu un aşazis rest Cauchy. *Restul Cauchy de ordin $n+1$ asociat lui f în x_0* este

$$R_{n+1}(x) := \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n (x-x_0),$$

cu ξ între x şi x_0.

DEFINIŢIA 5.1.19. Dacă f este indefinit derivabilă pe I, seria de puteri

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,\ x \in \mathbb{R}$$

se numeşte *seria Taylor asociată lui f în x_0.*

TEOREMA 5.1.20. *(de dezvoltare în serie a unei funcţii indefinit derivabile). Dacă f este indefinit derivabilă pe I, B este mulţimea de convergenţă a seriei Taylor asociate lui f în x_0, iar $R_{n+1}(x) \longrightarrow 0$, $\forall\, x \in I \cap B$, atunci*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,\ x \in I \cap B.$$

5.2. Exerciţii rezolvate

EXERCIŢIUL 5.2.1. Să se studieze convergenţa simplă şi uniformă a şirurilor de funcţii $(f_n)_{n\geq 1}$:

1. $f_n(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$;
2. $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$, $x \in [0,\infty)$.

SOLUŢIE. 1. Se consideră cazurile:

- $x \in (-1,1) \Longrightarrow f_n(x) = x^n \underset{n}{\longrightarrow} 0$;
- $x > 1 \Longrightarrow f_n(x) = x^n \underset{n}{\longrightarrow} \infty$;
- $x = 1 \Longrightarrow f_n(1) = 1 \underset{n}{\longrightarrow} 1$;
- $x \leq -1 \Longrightarrow f_n(x) = (-1)^n |x|^n$ care nu are limită.

Deci $f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f$, unde $f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1) \\ 1, x = 1 \end{cases}$.

Se consideră apoi în criteriul de neconvergenţă uniformă, de exemplu, $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, pentru care $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2} \not\xrightarrow[n]{} 0$ şi rezultă că

$$f_n \not\xrightarrow[{[0,1]}]{u} f.$$

Totuşi

$$f_n \xrightarrow[{[0,\delta]}]{u} f, \forall\, 0 < \delta < 1,$$

deoarece

$$\sup_{x \in [0,\delta]} |f_n(x) - 0| \leq \delta^n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

iar $\delta^n \to 0$, deci

$$\sup_{x \in [0,\delta]} |f_n(x) - 0| \xrightarrow[n]{} 0.$$

2. Evident $f_n \xrightarrow[{[0,\infty)}]{s} \mathbf{0}$.

Fie $g_n(x) := |f_n(x) - 0| = f_n(x)$.

Realizăm tabelul de variaţie pentru $f_n = g_n$:

x	0							δ			∞
$f_n' = g_n'$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f_n = g_n$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\frac{\delta}{\delta+n}$	$\nearrow$	$\nearrow$	1

Din tabel rezultă

$$\sup_{x \in [0,\infty)} g_n(x) = 1 \to 1 \neq 0 \Longleftrightarrow f_n \not\xrightarrow[{[0,\infty)}]{u} f,$$

dar şi

$$\sup_{x \in [0,\delta]} g_n(x) = \frac{\delta}{\delta + n} \xrightarrow[n]{} 0 \Longleftrightarrow f_n \xrightarrow[{[0,\delta]}]{u} \mathbf{0}, \forall\, \delta > 0.$$

□

Exerciţiul 5.2.2. Să se studieze convergenţa simplă şi uniformă a şirurilor de funcţii $(f_n)_{n \geq 1}$:

1. $f_n(x) = x^n + \frac{1}{3^n x^n}$, $x \in \mathbb{R}^*$;
2. $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$, $x \in [0, \infty)$;
3. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

4. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx^2}{n}$, $x \in \mathbb{R}$;
5. $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, $x > 0$.

SOLUŢIE. 1. Se impun cazurile:

• $x > 1 \Longrightarrow \left(x^n \underset{n}{\longrightarrow} \infty \wedge \dfrac{1}{3^n x^n} \underset{n}{\longrightarrow} 0\right) \Longrightarrow f_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} \infty$;

• $x = 1 \Longrightarrow f_n(1) = 1 + \dfrac{1}{3^n} \underset{n}{\longrightarrow} 1$;

• $x = -1 \Longrightarrow f_n(-1) = (-1)^n + \dfrac{1}{3^n(-1)^n}$ care nu are limită;

• $x > -1 \Longrightarrow \left(\begin{array}{l} f_{2n}(x) = (-x)^{2n} + \dfrac{1}{3^{2n}\,(-x)^{2n}} \underset{n}{\longrightarrow} \infty + 0 = \infty \\ f_{2n+1}(x) = (-x)^{2n+1} + \dfrac{1}{3^{2n+1}\,(-x)^{2n+1}} \underset{n}{\longrightarrow} -\infty \end{array}\right)$

$\Longrightarrow (f_n(x))_{n\geq 1}$ nu are limită;

• $x \in (-1, 1) \Longrightarrow x^n \underset{n}{\longrightarrow} 0$:

∘ $\left|\dfrac{1}{3x}\right| < 1 \Longleftrightarrow |x| > \dfrac{1}{3} \Longleftrightarrow x \in \left(-1, -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}, 1\right) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left(x^n \underset{n}{\longrightarrow} 0,\ \frac{1}{3^n x^n} = \left(\frac{1}{3x}\right)^n \underset{n}{\longrightarrow} 0\right) \Longrightarrow f_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} 0;$$

∘ $\left|\dfrac{1}{3x}\right| > 1 \Longleftrightarrow |x| < \dfrac{1}{3} \Longleftrightarrow x \in \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left(x^n \underset{n}{\longrightarrow} 0,\ \frac{1}{3^n x^n} = \left(\frac{1}{3x}\right)^n \underset{n}{\longrightarrow} \infty\right) \Longrightarrow f_n(x) \underset{n}{\longrightarrow} \infty;$$

∘ dacă $x = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow f_n\left(\dfrac{1}{3}\right) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 1 \underset{n}{\longrightarrow} 1$;

∘ dacă $x = -\dfrac{1}{3} \Longrightarrow f_n\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + (-1)^n$ nu are limită;

Deci: $f_n \xrightarrow[(-1,-\frac{1}{3})\cup[\frac{1}{3},1]]{s} f$, $\quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(-1, -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}, 1\right) \\ 1, & x \in \left\{\dfrac{1}{3}, 1\right\} \end{cases}$

Se ia apoi în criteriul de neconvergenţă uniformă, $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{n}}$, pentru care $x_n \in \left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$ de la un rang suficient de mare (deoarece

$x_n \to 1$) şi $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3^n\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n]{} \frac{1}{3} \neq 0$ şi rezultă că

$$f_n \underset{(\frac{1}{3},1)}{\not\xrightarrow{u}} f.$$

2. Evident $f_n \xrightarrow[{[0,\infty)}]{s} \mathbf{0}$, unde $\mathbf{0}$ va desemna mereu funcţia identic nulă (aici pe mulţimea $[0,\infty)$). Dar

$$0 \le \frac{1}{x+n} \le \frac{1}{n},\ n \ge 1,\ x \in [0,\infty),$$

şi cum $b_n := \frac{1}{n} \to 0$, rezultă din criteriul de convergenţă uniformă că

$$f_n \xrightarrow[{[0,\infty)}]{u} \mathbf{0}.$$

3. Evident $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{s} \mathbf{0} =: f$. Se consideră apoi în criteriul de neconvergenţă uniformă, $x_n = \frac{1}{n}$, pentru care $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2} \xrightarrow[n]{} \frac{1}{2} \neq 0$ şi rezultă că $f_n \underset{\mathbb{R}}{\not\xrightarrow{u}} f$; mai mult, deoarece $x_n \to 0$, va rezulta că $(f_n)_n$ nu converge uniform la $\mathbf{0}$ pe nicio submulţime din $\mathbb{R}$ care conţine pe 0.

4. Deoarece $|f_n(x)| = \left|\frac{\sin nx^2}{n}\right| \le \frac{1}{n}$, $n \ge 1$, $x \in \mathbb{R}$, rezultă direct faptul că

$$f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} \mathbf{0}.$$

5. $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx \xrightarrow[n]{} \frac{\pi}{2}$, pentru oricare $x \in [0,\infty)$, deci

$$f_n \xrightarrow[{[0,\infty)}]{s} \frac{\pi}{2} =: f.$$

Fie $g_n(x) := |f_n(x) - f(x)| = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx$, $x \ge 0$, $n \ge 1$. g_n este derivabilă pe $[0,\infty)$ şi $g_n'(x) = -\frac{n}{1+n^2x^2} < 0$, $x \ge 0$, deci g_n este strict descrescătoare pe $[0,\infty)$. Cum $g_n(0) = \frac{\pi}{2}$, rezultă că

$$\sup_{x\in[0,\infty)} g_n(x) = \frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2},\ \text{aşadar } f_n \underset{[0,\infty)}{\not\xrightarrow{u}} \frac{\pi}{2}.$$

De fapt $(f_n)_n$ nu converge uniform la f pe nicio submulţime din $[0,\infty)$ care conţine pe 0. □

EXERCIŢIUL 5.2.3. Să se arate că $f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n}$ converge uniform pe $(0,\pi)$ la o funcţie derivabilă, dar $f_n'(x)$ nu este convergent pentru niciun $x \in (0,\pi)$.

SOLUŢIE. Deoarece $|f_n(x)| = \dfrac{|\cos x|}{n} \le \dfrac{1}{n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| \le \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Cum $\dfrac{1}{n} \underset{n}{\longrightarrow} 0$, rezultă că

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| \underset{n}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} \mathbf{0}.$$

Evident $f_n \xrightarrow[(0,\pi)]{u} \mathbf{0}$ şi f_n derivabile pe $\mathbb{R}$, $n \ge 1$, deci f_n derivabile şi pe $(0,\pi)$, $\forall n \ge 1$ şi $f_n'(x) = \dfrac{-\sin nx}{n}\cdot n = -\sin nx$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cum nu există $\lim\limits_{t\to\infty} \sin t$, va rezulta că nu există nici $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$ pentru $x \in (0,\pi)$. Deci $\left(f_n'(x)\right)_{n\ge1}$ nu are limită pentru niciun $x \in (0,\pi)$. $\square$

EXERCIŢIUL 5.2.4. Fie $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\ln\left(1+n^4x^2\right)}{n}$, $n \ge 1$.

a) Arătaţi că f_n converge uniform la o funcţie derivabilă f.

b) Să se studieze dacă $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n'(x) = f'(x)$.

c) Converge f_n' uniform ?

SOLUŢIE. a) • Dacă $x = 0$, atunci $f_n(0) = 0 \underset{n}{\longrightarrow} 0$.

• Dacă $x \in (0,1]$, atunci

$$f_n(x) = \frac{\ln\left[n^4x^2\left(1+\dfrac{1}{n^4x^2}\right)\right]}{n} = \frac{\ln n^4 + \ln x^2 + \ln\left(1+\dfrac{1}{n^4x^2}\right)}{n} =$$

$$= \frac{4\ln n}{n} + \frac{2\ln x}{n} + \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^4x^2}\right)}{\dfrac{1}{n^4x^2}} \cdot \frac{1}{n^5x^2} \underset{n}{\longrightarrow} 0 + 0 + 1\cdot 0,$$

de unde rezultă $f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} \mathbf{0} = f$.

Fie $g_n(x) := |f_n(x) - 0| = \dfrac{\ln\left(1+n^4x^2\right)}{n} = f_n(x)$.
Realizăm tabelul de variaţie pentru $f_n = g_n$:

x	0										1
$f_n' = g_n'$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f_n = g_n$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\dfrac{\ln(1+n^4)}{n}$

Deoarece

$$\frac{\ln(1+n^4)}{n} = \frac{\ln n^4 + \ln\left(1+\dfrac{1}{n^4}\right)}{n} = 4\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^4}\right)}{\dfrac{1}{n^4}} \cdot \frac{1}{n^3} \underset{n}{\longrightarrow} 0$$

rezultă că

$$\sup_{x\in[0,1]} g_n(x) = \frac{\ln\left(1+n^4\right)}{n} \underset{n}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{u} \mathbf{0}.$$

b) Evident f_n sunt derivabile pe $[0,1]$, $\forall\, n \geq 1$, deci

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+n^4x^2} \cdot 2n^4x = \frac{2n^3x}{1+n^4x^2} \underset{n}{\longrightarrow} 0,\ \forall\, x \in [0,1] \Longrightarrow f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} \mathbf{0}.$$

Evident $f_n' \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f'$ deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$, $\forall\, x \in [0,1]$.

c) Fie $|f_n'(x) - 0| = f_n'(x) =: h_n(x)$. Rezultă

$$h_n'(x) = \frac{2n^3\left(1+n^4x^2\right) - 2n^3x \cdot 2n^4x}{\left(1+n^4x^2\right)^2} = \frac{2n^3 - 2n^7x^2}{\left(1+n^4x^2\right)^2} = \frac{2n^3\left(1-n^4x^2\right)}{\left(1+n^4x^2\right)^2}.$$

Întocmim tabelul de variaţie pentru functia h:

x	0					$\dfrac{1}{n^2}$					1
$h_n' = g_n'$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	0	-	-	-	-	-
$h_n = g_n$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	n	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\dfrac{2n^3}{1+n^4}$

Deoarece $\sup\limits_{x\in[0,1]} h_n(x) = n \underset{n}{\longrightarrow} \infty \Longrightarrow f_n' \overset{u}{\underset{[0,1]}{\not\longrightarrow}} \mathbf{0}$. $\square$

EXERCIŢIUL 5.2.5. Fie

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},\ n \geq 1.$$

Arătaţi că funcţiile f_n sunt discontinue în orice $x \in \mathbb{R}$, dar f_n converge uniform la o funcţie continuă.

SOLUŢIE. Dacă $x \in \mathbb{Q}$, atunci $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \underset{n}{\longrightarrow} 0$. Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $f_n(x) = 0 \underset{n}{\longrightarrow} 0$. Rezultă că $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{s} \mathbf{0}$.

Se va arăta că funcţiile f_n, $n \geq 1$ nu sunt continue în niciun $x \in \mathbb{R}$. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\left(\begin{array}{l} \exists (x_k)_k \subset \mathbb{Q},\ x_k \underset{k}{\longrightarrow} x_0 \Longrightarrow f_n(x_k) = \dfrac{1}{n} \overset{k}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n} \\ \exists (y_k)_k \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ y_k \underset{k}{\longrightarrow} x_0 \Longrightarrow f_n(y_k) = 0 \overset{k}{\longrightarrow} 0 \end{array} \right),$$

deci f_n nu este continuă în x_0, pentru orice n.

Se arată că $(f_n)_n$ converge uniform la funcţia $\mathbf{0}$ (evident funcţie continuă): fie $g_n(x) := |f_n(x) - 0|$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$. Se observă că $g_n(x) = f_n(x)$ şi

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} g_n(x) = \frac{1}{n} \underset{n}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} \mathbf{0}.$$

□

EXERCIŢIUL 5.2.6. Arătaţi că $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ este convergent pentru $x \in [0,1]$, dar $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) dx$.

SOLUŢIE. Evident $f_n(0) = 0 \underset{n}{\longrightarrow} 0$ şi

$$x \in [0,1] \Longrightarrow f_n(x) = \frac{n}{\left(e^{x^2}\right)^n} \cdot x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \cdot x = 0.$$

(s-a folosit faptul că pentru $x \in (0,1]$, $e^{x^2} > e^0 = 1$ şi limita remarcabilă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0$, $\forall\, a > 1$).

Rezultă atunci că $f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} \mathbf{0} =: f$.

Fie $x_n := \dfrac{1}{n} \Longrightarrow |f_n(x_n) - f(x_n)| = \dfrac{n \cdot \frac{1}{n}}{e^{n \cdot \frac{1}{n^2}}} = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{n}}} \underset{n}{\longrightarrow} \dfrac{1}{e^0} = 1$. Folosind criteriul de neconvergenţă uniformă, rezultă că $f_n \underset{[0,1]}{\overset{u}{\not\longrightarrow}} \mathbf{0}$. Aşadar, nu se poate aplica teorema de transfer de integrabilitate. Se observă că

$$\int_0^1 f_n(x)dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-nx^2} \cdot (-nx^2)' = -\frac{1}{2e^{-nx^2}}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\left(e^{-n} - 1\right) \underset{n}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \int_0^1 0dx = 0,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \neq \int_0^1 \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx.$ □

Exerciţiul 5.2.7. Arătaţi că $f_n(x) = nx(1-x)^n$ nu este uniform convergent pe [0,1], dar

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx.$$

Soluţie. Dacă $x = 0$, atunci $f_n(0) = 0 \underset{n}{\longrightarrow} 0$.

Dacă $x = 1$, atunci $f_n(1) = 0 \underset{n}{\longrightarrow} 0$.

Dacă $x \in (0,1)$, atunci

$$1 - x \in (0,1) \Longrightarrow n(1-x)^n \underset{n}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow f_n(x) = nx(1-x)^n \underset{n}{\longrightarrow} 0,$$

ţinând cont că $n \cdot a^n \underset{n}{\longrightarrow} 0$, pentru $a \in (0,1)$.

Rezultă $f_n \underset{[0,1]}{\overset{s}{\longrightarrow}} \mathbf{0} := f$.

Fie $x_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}} \in (0,1)$, $\forall n \geq 1$. Atunci

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n = \frac{1}{2}n\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right] =$$

$$= -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{2} \underset{n}{\longrightarrow} -\left(\ln\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{2}.$$

Rezultă, aplicând criteriul de neconvergenţă uniformă că

$$f_n \underset{[0,1]}{\overset{u}{\not\longrightarrow}} \mathbf{0}.$$

Relaţia se verifică imediat. $\square$

EXERCIŢIUL 5.2.8. Este permisă trecerea la limită sub integrală în

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx?$$

SOLUŢIE. Se notează $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in [0,1]$. Dacă $x = 0$, atunci $f_n(0) = 0 \underset{n}{\longrightarrow} 0$. Dacă $x \in (0,1]$, atunci $f_n(x) = 0 \underset{n}{\longrightarrow} 0$. Rezultă $f_n \underset{[0,1]}{\overset{s}{\longrightarrow}} \mathbf{0} =: f$.

Fie $x_n = \frac{1}{n} \in (0,1)$, $\forall n \geq 1$. Atunci $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + n^2 \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$. Rezultă, aplicând criteriul de neconvergenţă uniformă că $f_n \underset{[0,1]}{\overset{u}{\not\longrightarrow}} \mathbf{0}$. Deci nu se poate aplica teorema de transfer de integrabilitate pentru şiruri de funcţii.

Totuşi, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) = \int_0^1 \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$. Într-adevăr:

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \int_0^1 0 dx = 0,$$

$$\int_0^1 f_n(x) = \int_0^1 \frac{1}{2n} \cdot \frac{2n^2 x}{1+n^2x^2} dx = \frac{1}{2n} \ln\left(1+n^2x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\ln\left(1+n^2\right)}{2n} \underset{n}{\longrightarrow} 0,$$

ţinând cont că:

$$\frac{\ln\left(1+n^2\right)}{n}=\frac{\ln n^2+\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n}=$$

$$=\frac{2\ln n}{n}+\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n}\underset{n}{\longrightarrow}0+\frac{1}{\infty}=0.$$

EXERCIŢIUL 5.2.9. Fie $f_n:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$, $n\geq 2$,

$$f_n(x)=\begin{cases} nf(x),\ \text{dacă } x\in\left(0,\dfrac{1}{n}\right] \\ 0,\ \text{dacă } x=0 \text{ sau } x\in\left(\dfrac{1}{n},1\right] \end{cases},$$

unde $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ este o funcţie dată, f continuă.

Să se arăte că $f_n(x)$ este convergent şi să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \text{ şi } \int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx.$$

Să se verifice dacă f_n converge uniform în următoarele cazuri:

a) $f(x)=1$; b) $f(x)=x$; c) $f(x)=x^2$.

SOLUŢIE. Dacă $x=0$, atunci $f_n(0)=0\underset{n}{\longrightarrow}0$.

Dacă $x\in(0,1]$, atunci $\exists\, n_x\in\mathbb{N}$ astfel încât $\dfrac{1}{n_x}<x\Longleftrightarrow x$ $\left(\dfrac{1}{n_x},1\right]$. Atunci

$$n\geq n_x\Longrightarrow x\in\left(\frac{1}{n_x},1\right]\subset\left(\frac{1}{n},1\right],\ f_n(x)=0\xrightarrow[n\to\infty]{n\geq n_x}0,$$

deci $f_n\xrightarrow[{[0,1]}]{s}\mathbf{0}=:h$.

Evident $\int\limits_0^1 \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \int\limits_0^1 0dx = 0$ şi

$$\int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} f_n(x)dx + \int\limits_{\frac{1}{n}}^1 f_n(x) =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{n}} nf(x)dx + \int\limits_{\frac{1}{n}}^1 0dx = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} nf(x)dx =$$

$$= n\int\limits_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx = n \cdot f(\xi_n) \cdot \left(\frac{1}{n} - 0\right) = f(\xi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0),$$

ţinând cont că $\xi_n \in (0, 1/n)$ (din teorema de medie), deci $\xi_n \underset{n}{\longrightarrow} 0$ şi f continuă în 0.

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x) = f(0)$, iar $\int\limits_0^1 \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = 0$. Dacă $f(0) \neq 0$, din teorema de transfer de integrabilitate rezultă că $f_n \overset{u}{\underset{[0,1]}{\not\longrightarrow}} f$. De exemplu, pentru a) $f(x) = 1$.

a) $f_n \overset{u}{\underset{[0,1]}{\not\longrightarrow}} 1$, deoarece $f(0) = 1 \neq 0$.

b) Fie $g_n(x) := |f_n(x) - h(x)| = |f_n(x)| = \begin{cases} nx, & x \in \left(0, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & x = 0 \vee x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$

Atunci: $\sup\limits_{x\in[0,1]} g_n(x) = g_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \underset{n}{\longrightarrow} 1 \neq 0 \Longrightarrow f_n \overset{u}{\underset{[0,1]}{\not\longrightarrow}} h \equiv \mathbf{0}$.

c) Fie $g_n(x) := |f_n(x) - h(x)| = |f_n(x)| = \begin{cases} nx^2, & x \in \left(0, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & x = 0 \vee x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$

Atunci: $\sup\limits_{x\in[0,1]} g_n(x) = g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \underset{n}{\longrightarrow} 0$, deci $f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{u} h \equiv \mathbf{0}$. □

EXERCIŢIUL 5.2.10. Să se studieze uniform convergenţa seriilor pe domeniile indicate:

1. $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin x}{\sqrt[4]{n^5+x^6}}$, $x \in \mathbb{R}$;
2. $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos nx}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$;
3. $\sum_{n\geq 1} \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{x^2+n^3}$, $x \in \mathbb{R}$;
4. $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, $x \in [0,\infty)$.

SOLUŢIE. 1. Fie $f_n(x) := \dfrac{\sin x}{\sqrt[4]{n^5+x^6}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$. Deoarece

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^{5/4}},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1,$$

iar seria $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{5/4}}$ este convergentă (seria armonică cu $\alpha = 5/4$), din criteriul lui Weierstrass de convergenţă uniformă a seriilor de funcţii rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră $f_n(x) := \dfrac{\cos nx}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$. Deoarece

$$|\cos nx| \leq 1,\ x \in \mathbb{R},\ n \geq 1,$$

rezultă

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1,$$

iar seria $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ fiind convergentă (seria armonică cu $\alpha = 2$), din nou din criteriul lui Weierstrass de convergenţă a seriilor de funcţii rezultă că $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

3. Fie $f_n(x) := \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{x^2+n^3}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$. Deoarece, din inegalitatea mediilor aplicată numerelor x^2 şi n^3, se obţine

$$|f_n(x)| \leq \frac{2|x|}{x^2+n^3} \leq \frac{1}{n^{3/2}},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1,$$

iar seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ este convergentă (seria armonică cu $\alpha = 3/2$), din nou cu criteriul lui Weierstrass rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

4. Deoarece

$$\left|\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right| \leq \frac{1}{n^2},\ x \in [0,\infty),\ n \geq 1,$$

iar seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergentă (seria armonică cu $\alpha = 2$), din criteriul lui Weierstrass rezultă că seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ este uniform convergentă pe $[0,\infty)$. □

EXERCIŢIUL 5.2.11. Găsiţi un şir de funcţii $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f_n discontinue în orice punct astfel încât $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ este uniform convergentă, iar suma sa să fie o funcţie continuă pe $\mathbb{R}$.

SOLUŢIE. Se consideră $f_n(x) := \frac{1}{n(n+1)}$, $x \in \mathbb{Q}$, $f_n(x) := \frac{1}{2^n}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $n \geq 1$. Similar exerciţiului 5.2.5 se arată că f_n sunt discontinue în orice punct $x \in \mathbb{R}$.

Din

$$\frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{n \cdot n},\ \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2},\ n \geq 4,$$

rezultă

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2},\ \forall n \geq 4.$$

Cum $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ este convergentă (serie armonică, $\alpha = 2 > 1$), rezultă, aplicând criteriul lui Weierstrass pentru serii de funcţii, că $\sum_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

Pe de altă parte

$$\bullet\, x \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

$$\bullet\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1,$$

de unde

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 1, \forall\, x \in \mathbb{R}, f \equiv 1 \text{ continuă pe } \mathbb{R}.$$

□

EXERCIŢIUL 5.2.12. Fie seria $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n+x}}{n^2}$, $x \geq 0$. Să se studieze:

a) convergenţa punctuală;

b) convergenţa absolută;

c) convergenţa uniformă pe $[0, \infty)$;

d) convergenţa uniformă pe $[0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$;

e) continuitatea sumei seriei;

f) derivabilitatea sumei seriei. Se poate deriva seria termen cu termen?

SOLUŢIE. Se notează $f_n(x) := (-1)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{n+x}}{n^2}$, $x \geq 0$.

a), b) Se aplică criteriul comparaţiei:

$$\frac{|f_n(x)|}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \frac{\frac{\sqrt{n+x}}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{\frac{n+x}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \in (0, \infty), \ \forall\, x \geq 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} |f_n(x)| \sim \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}, \ \forall\, x \geq 0.$$

Cum $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ este convergentă $\left(\text{serie armonică, } \alpha = \frac{3}{2} > 1\right)$, rezultă $\sum_{n\geq 1} |f_n(x)|$ este convergentă, $\forall\, x \geq 0$, sau seria $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ este absolut convergentă $\forall\, x \geq 0$. Rezultă $\sum_{n\geq 1} f_n$ este simplu convergentă pe $[0, \infty)$.

c), d) Deoarece

$$|f_n(x)| = \frac{\sqrt{n+x}}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n+\varepsilon}}{n^2},\ \forall n \geq 1,\ \forall x \in [0,\varepsilon],$$

cum $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+\varepsilon}}{n^2}$ este convergentă $\left(\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+\varepsilon}}{n^2} \sim \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right.$ si $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ este convergentă $\Longrightarrow \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+\varepsilon}}{n^2}$ este convergentă$\left.\right)$, cu criteriul lui Weierstrass rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe $[0,\varepsilon]$.

e) Din faptul că $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe $[0,\varepsilon]$ şi f_n sunt continue pe $[0,\varepsilon]$, $\forall n \geq 1$, rezultă, folosind teorema de transfer de continuitate pentru şiruri de funcţii, că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \overset{not}{=}: f$ continuă pe $[0,\varepsilon]$. Cum ε este arbitrar, rezultă $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este continuă pe $[0,\infty)$.

f) Evident $f_n'(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n+x}}$ şi

$$|f_n'(x)| = \frac{1}{2n^2\sqrt{n+x}} \leq \frac{1}{2n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{\frac{5}{2}}},\ \forall x \geq 0,\ \forall n \geq 1.$$

Cum $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2n^{\frac{5}{2}}}$ este convergentă (serie armonică, $\alpha = \frac{5}{2} > 1$), aplicând criteriul lui Weierstrass, rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} f_n'$ converge uniform pe $[0,\infty)$.

Din faptul că $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă pe $[0,\varepsilon]$ şi $\sum\limits_{n\geq 1} f_n'$ converge uniform pe $[0,\infty)$, se obţine, folosind teorema de transfer de derivabilitate pentru serii de funcţii, că se poate deriva termen cu termen seria $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ pe $[0,\varepsilon]$, $\forall \varepsilon > 0$. Evident $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ derivabilă pe $[0,\varepsilon]$, $\forall \varepsilon > 0$, deci derivabilă pe $[0,\infty)$. □

EXERCIŢIUL 5.2.13. Să se arăte că seria $\sum\limits_{n\geq 0} \sin x \cos^n x$ se poate integra termen cu termen pe $[a,b] \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Să se integreze pe $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ şi să se deducă identitatea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln 2$.

SOLUŢIE. Se notează $f_n(x) := \sin x \cos^n x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

• Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, se obţine:

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{|\sin x| \cdot |\cos x|^{n+1}}{|\sin x| \cdot |\cos x|^n} = |\cos x| < 1.$$

Rezultă aplicând criteriul raportului că seria $\sum\limits_{n\geq 0} |f_n(x)|$ este convergentă, sau seria $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ este absolut convergentă, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

• Dacă $x = \frac{\pi}{2}$, seria devine: $\sum\limits_{n\geq 0} 0$, serie trivial convergentă.

Fie $[a,b] \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Cum funcţia sin este stict crescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ şi funcţia cos este strict descrescătoare pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă

$$|f_n(x)| = |\sin x| \cdot |\cos x|^n \leq \sin b \cdot (\cos a)^n, \ \forall x \in [a,b].$$

Cum $\sum\limits_{n\geq 1} (\cos a)^n$ este convergentă (serie geometrică, $q = \cos a < 1$), aplicând criteriul lui Weierstrass, se obţine faptul că seria $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ este uniform convergentă pe $[a,b]$.

Deoarece f_n este integrabilă pe $[a,b]$, $\forall n \geq 1$, folosind teorema de transfer de integrabilitate pentru serii de funcţii, se poate integra termen cu termen seria $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ pe $[a,b]$. Pentru $[a,b] = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ rezultă:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^n x)(-\sin x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} \Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \right),$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \frac{1}{1-\cos x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}.$$

Dar

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \frac{1}{1-\cos x} dx = \ln(1-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln 1 - \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

Aşadar, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n} = \ln 2.$ □

Exerciţiul 5.2.14. Arătaţi că seria $\sum_{n\geq 0}(-1)^n t^{2n}$ este uniform convergentă pe $[a,b] \subseteq (-1,1)$. Pentru $x \in (-1,1)$, integrând seria termen cu termen pe $[0,x]$ sau $[x,0]$, deduceţi că $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x$ şi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Soluţie. Notăm $f_n(t) := (-1)^n \cdot t^{2n}$. Atunci

$$|f_n(t)| = |t|^{2n} \leq a^{2n},\ \forall t \in [-a,a],\ \forall 0 < a < 1.$$

Cum $\sum_{n\geq 1} a^{2n} \equiv \sum_{n\geq 0} \left(a^2\right)^n$ este convergentă (serie geometrică cu raţia $q = a^2 \in (0,1)$), rezultă, aplicând criteriul lui Weierstrass, că $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniform pe $[-a,a]$. Rezultă că $\forall x \in (-1,1)$ seria $\sum_{n\geq 0} f_n$ este uniform convergentă pe $[0,x]$ sau $[x,0]$ şi din teorema de transfer de integrabilitate pentru serii (deoarece f_n este integrabilă pe $[0,x]$ sau $[x,0]$), se obţine:

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\Bigg|_0^x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ \forall x \in (-1,1).$$

Dar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$, $q \in (-1,1)$ iar pentru $q = \left(-t^2\right)$ rezultă

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-t^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = \frac{1}{1-(-t^2)} = \frac{1}{1+t^2},\ t \in (-1,1),$$

deci

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\right] dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg} t \Big|_0^x = \operatorname{arctg} x,\ \forall x \in (-1,1).$$

Aşadar,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x,\ \forall x \in (-1,1).$$

Pentru $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ rezultă

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 3^n \cdot \sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 3^n} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

□

EXERCIŢIUL 5.2.15. Determinaţi domeniul de convergenţă şi calculaţi suma seriilor:

a) $\sum\limits_{n\geq 0} n x^n$;

b) $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

c) $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n!}$;

d) $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ şi $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

SOLUŢIE. a) Deoarece $a_n = n$, $\omega = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, deci raza de convergenţă este $R = 1$. Dacă $x = 1$, sau $x = -1$ se obţine o serie evident divergentă. Aşadar mulţimea de convergenţă este $B = (-1,1)$.

Se scrie $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$. Integrând termen cu termen seria $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ (se poate face asta pe orice interval compact $[0,x]$ sau $[x,0]$ inclus în $(-1,1)$) se obţine

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (nt^{n-1})dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, x \in (-1,1).$$

De aici

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, x \in (-1,1)$$

şi în final

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, x \in (-1,1).$$

b) Deoarece $a_{2n} = 0$, $a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$, avem

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2n+1}\right|} = 1,$$

deci raza de convergenţă a seriei de puteri este $R = 1$.

Dacă $x = 1$, seria devine $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1}$, care este divergentă. Dacă $x = -1$, seria devine

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^{2n+1} \frac{1}{2n+1} = -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1},$$

care este tot divergentă. Deci mulţimea de convergenţă este $B = (-1,1)$. Derivând termen cu termen (se poate face asta pe orice interval compact inclus în $(-1,1)$) se obţine

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}, x \in (-1,1).$$

Integrând apoi pe orice interval compact $[0,x]$ sau $[x,0]$ din $(-1,1)$ se obţine

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = -\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|, x \in (-1,1).$$

Aşadar
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), x \in (-1,1).$$

c) Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, rezultă că raza de convergenţă a seriei de puteri este $R = \infty$. Deci mulţimea de convergenţă este $B = \mathbb{R}$. Derivând termen cu termen (se poate face asta pe orice interval compact din $\mathbb{R}$) se obţine

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} =: s(x), x \in \mathbb{R}.$$

Singura soluţiei a ecuaţiei $s'(x) = s(x)$ este $s(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, deci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \ x \in \mathbb{R}.$$

d) Cum $a_{2n} = 0$, $a_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$, avem

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\right|} = 0,$$

deci raza de convergenţă a seriei de puteri este $R = \infty$. Deci mulţimea de convergenţă este $B = \mathbb{R}$. Analog pentru cealaltă. Derivând termen cu termen seriile se obţine

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} =: s_1(x), x \in \mathbb{R};$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)' =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =: s_2(x), x \in \mathbb{R}.$$

Se obţin egalităţile $s_2'(x) = s_1(x)$, $s_1'(x) = -s_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Singurele funcţii care satisfac egalităţile anterioare sunt $s_1(x) = \cos x$ şi $s_2(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Deci

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in \mathbb{R}.$$

□

EXERCIŢIUL 5.2.16. a) Să se dezvolte în serie Taylor în jurul punctului $a = 1$ funcţia

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2/3\} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{1}{3x+2}.$$

b) Să se dezvolte în serie Taylor în jurul punctului $a = -2$ funcţia

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1/2, 3\} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{3x-2}{2x^2 - 5x - 2}.$$

SOLUŢIE. a) Metoda 1. Seria Taylor asociată lui f în $a = 1$ este

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n.$$

f este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-2/3\}$ şi

$$f(x) = (3x+2)^{-1},$$

$$f'(x) = 3(-1)(3x+2)^{-2},$$

$$f''(x) = 3^2(-1)(-2)(3x+2)^{-3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$f^{(n)}(x) = 3^n(-1)(-2)\dots(-n)(3x+2)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n \cdot 3^n \cdot n!}{(3x+2)^{n+1}},$$

de unde

$$f^{(n)}(1) = \frac{(-1)^n \cdot 3^n \cdot n!}{5^{n+1}},$$

iar seria Taylor asociată lui f în $a = 1$ devine

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-3)^n}{5^{n+1}}(x-1)^n.$$

Se va nota $y := x - 1$ şi $a_n = \dfrac{(-3)^n}{5^{n+1}}$. Atunci

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{(-3)^{n+1}}{5^{n+2}}\right|}{\left|\dfrac{(-3)^n}{5^{n+1}}\right|} = \frac{3}{5},$$

deci raza de convergenţă a seriei Taylor asociate lui f în $a = 1$ este $\dfrac{5}{3}$. Cum pentru $y = \dfrac{5}{3}$ seria devine $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n \dfrac{1}{5}$, care este evident divergentă, iar pentru $y = -\dfrac{5}{3}$ se obţine seria $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{5}$, evident tot divergentă, rezultă că mulţimea de convergenţă a seriei Taylor asociate lui f în $a = 1$ este $\left(1 - \dfrac{5}{3}, 1 + \dfrac{5}{3}\right) = \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$. Restul lui Lagrange de ordin $n+1$ asociat lui f în $a = 1$ este

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-3)^{n+1}}{(3c+2)^n}(x-1)^{n+1},$$

cu c între 1 şi x. Se poate deduce utilizând criteriul raportului că $R_{n+1}(x) \to 0$, deci, conform teoremei de dezvoltabilitate a unei funcţii în serie de puteri, f se poate deci scrie ca

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{5^{n+1}}(x-1)^n,\ x \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right).$$

Metoda 2. Avem

$$f(x) = \frac{1}{3x+2} = f(x) = \frac{1}{3(x-1)+5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \left[-\frac{3}{5}(x-1)\right]} =$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{5^{n+1}}(x-1)^n,$$

pentru $\left|-\frac{3}{5}(x-1)\right| < 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$. Am utilizat formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q},\ |q| < 1.$$

b) Vom aplica doar Metoda 2: Avem

$$f(x)=\frac{3x-2}{2x^2-5x-2}=\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{x-3}=$$

$$=\frac{1}{2x+4-3}+\frac{1}{x+2-5}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}(x+2)}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}(x+2)}=$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n(x+2)^n-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n(x+2)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right](x+2)^n,$$

pentru

$$\left|\frac{2}{3}(x+2)\right|<1,\ \left|\frac{1}{5}(x+2)\right|<1\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

□

EXERCIŢIUL 5.2.17. a) Să se dezvolte în serie de puteri în jurul lui 0 funcţia exponenţială.

b) Să se calculeze valoarea lui $\frac{1}{\sqrt{e}}$ cu trei zecimale exacte.

c) Să se dezvolte în serie de puteri în jurul lui 0 funcţia $f(x)=e^{x^2}$.

d) Determinaţi suma seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{an^2+bn+c}{n!},\ a,b,c\in\mathbb{R}.$$

SOLUŢIE. a) Cum $f(x)=e^x$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f^{(n)}(x)=e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, iar seria Taylor în 0 este $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$, care are mulţimea de convergenţă $\mathbb{R}$, conform teoremei de dezvoltabilitate a unei funcţii în serie de puteri, f se poate deci scrie ca $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ dacă

$$|R_{n+1}(x)|=\left|\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

c între 0 şi x. Dar

$$R_{n+1}(x)=\frac{1}{(n+1)!}e^cx^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\ x\in\mathbb{R},$$

din criteriul raportului de la şiruri. Deci

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in\mathbb{R}.$$

b) În relaţia anterioară, pentru $x=-1/2$ obţinem

$$e^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n!},$$

de unde

$$\left|e^{-1/2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!}\right|=\left|\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right|e^c=|R_{n+1}(x)|,$$

$c\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$. Deoarece $e^c<e^0=1$, pentru a obţine valoarea lui $1/\sqrt{e}$ cu trei zecimale exacte este suficient să avem

$$\left|\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right|<\frac{1}{10^3},$$

ceea ce se întâmplă pentru $n\geq 4$. Aşadar

$$1/\sqrt{e}=e^{-1/2}\cong T_4\left(-\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=0}^{4}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!}\cong 0,606.$$

c) Utilizând a) cu x^2 în loc de x, avem

$$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!},\ x\in\mathbb{R}.$$

d) Utilizând a) cu $x=1$, avem

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e.$$

Apoi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} = e,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} = 2e,$$

de unde, în final,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{an^2+bn+c}{n!} = (2a+b+c)e, \ a,b,c \in \mathbb{R}.$$

□

EXERCIŢIUL 5.2.18. a) Să se dezvolte în serie Taylor, în vecinătatea lui 0, funcţia $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$.

b) Să se arate că

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

SOLUŢIE. a) Seria Taylor asociată lui f în $a = 0$ este

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

f este indefinit derivabilă pe $(-1,\infty)$ şi

$$f'(x) = (x+1)^{-1}, f''(x) = (-1)(x+1)^{-2}, f'''(x) = (-1)(-2)(x+1)^{-3},$$

iar în general

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}, \ f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

iar seria Taylor asociată lui f în $a = 0$ devine

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Avem, pentru $a_n := \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$,

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{(-1)^{n+2}}{n+1}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right|} = \frac{n}{n+1} = 1,$$

deci raza de convergenţă a seriei Taylor asociate lui f în $a = 0$ este 1. Pentru $x = 1$ seria devine $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, care este evident convergentă, cu criteriul lui Leibniz, iar pentru $x = -1$ este tot divergentă. Rezultă că mulţimea de convergenţă a seriei Taylor asociate lui f în $a = 0$ este $(-1, 1]$. Cum restul lui Lagrange de ordin $n + 1$ asociat lui f în $a = 0$ este

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(-1)^{n+2}\frac{n!}{(1+c)^{n+1}},$$

cu $0 < |c| < |x| < 1$, deci $0 < \left|\dfrac{x}{1+c}\right| < 1$, se poate deduce utilizând criteriul raportului că $R_{n+1}(x) \to 0$, $x \in (-1, 1]$. Conform teoremei de dezvoltabilitate a unei funcţii în serie de puteri, f se poate scrie

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,\ x \in (-1, 1]\,.$$

b) Pentru $x = 1$ se obţine

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

□

EXERCIŢIUL 5.2.19. a) Să se dezvolte în serie Taylor, în vecinătatea lui 0 funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

b) Să se determine $\cos 1$ cu 2 zecimale exacte.

c) Să se dezvolte în serie Taylor, în vecinătatea lui 0 funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^2 x$.

SOLUŢIE. a) Seria Taylor asociată lui f în $a = 0$ este

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

f este indefinit derivabilă pe $(-1, \infty)$ şi

$$f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x,\ f^{IV}(x) = \cos x, \ldots$$

iar în general

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),\ n \in \mathbb{N}^*,$$

de unde

$$f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2},$$

iar seria Taylor asociată lui f în $a = 0$ devine

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdots = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Avem, pentru $a_{2n} := (-1)^n \frac{1}{(2n)!}$, $a_{2n+1} = 0$,

$$\omega = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+2)!}\right|}{\left|(-1)^n \frac{1}{(2n)!}\right|} = 0,$$

deci mulţimea de convergenţă a seriei Taylor asociate lui f în $a = 0$ este $\mathbb{R}$. Cum restul lui Lagrange de ordin $n+1$ asociat lui f în $a = 0$ este

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos\left[c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right],$$

cu $0 < |c| < |x|$, iar $\left|\cos(c + (n+1)\frac{\pi}{2})\right| < 1$, se poate deduce utilizând criteriul raportului că $R_{n+1}(x) \to 0$, $x \in \mathbb{R}$. Conform teoremei de dezvoltabilitate a unei funcţii în serie de puteri, f se poate scrie

$$f(x) = \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R}.$$

b) În relaţia anterioară, pentru $x = 1$ obţinem

$$\cos 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!},$$

de unde

$$\left|\cos 1 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k)!}\right| = \left|\frac{\cos\left[c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(n+1)!}\right| = |R_{n+1}(x)|,$$

$c \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece

$$\left|\cos\left[c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right]\right| \leq 1,$$

pentru a obţine valoarea lui $\cos 1$ cu două zecimale exacte este suficient să avem

$$\frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{10^2},$$

ceea ce se întâmplă pentru $n \geq 5$. Aşadar

$$\cos 1 \cong T_5(1) = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k \frac{1}{(2k)!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} \cong 0,54.$$

c) Din $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ şi utilizând a) se obţine

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!},\ x \in \mathbb{R}.$$

□

EXERCIŢIUL 5.2.20. Să se dezvolte în serie Taylor, în vecinătatea lui 0, funcţia $f : (-1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

SOLUŢIE. Seria Taylor asociată lui f în $a = 0$ este

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

f este indefinit derivabilă pe $(-1,\infty)$ şi

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

de unde

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1),\ n \in \mathbb{N}^*,$$

iar seria Taylor asociată lui f în $a = 1$ devine

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

Se va nota $a_n := \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$. Atunci

$$\omega = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-\alpha}{n+1} = 1,$$

deci raza de convergenţă a seriei Taylor asociate lui f în $a=1$ este 1.

Se va folosi restul lui Cauchy de ordin $n+1$ asociat lui f în $a=0$, care este

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n x = \frac{x(x-c)^n}{n!}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+c)^{\alpha-n-1},$$

cu c între 0 şi x. Se va nota $u := c/x$; rezultă atunci $0<u<1$, deci

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}(1-u)^n}{n!}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+ux)^{\alpha-n-1} =$$

$$= \frac{(\alpha-1)\dots(\alpha-1-n+1)x^n}{n!}\alpha x(1+ux)^{\alpha-1}\left(\frac{1-u}{1+ux}\right)^n.$$

Cum $|x|<1$, $0<u<1$, rezultă că $0<\left(\dfrac{1-u}{1+ux}\right)^n<1$, de unde

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha-1)\dots(\alpha-1-n+1)x^n}{n!} = 0,$$

deci $R_{n+1}(x)\to 0$ pentru $|x|<1$.

Conform teoremei de dezvoltabilitate a unei funcţii în serie de puteri, f se poate deci scrie ca

$$f(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{n\geq 0}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\ x\in(-1,1).$$

□

EXERCIŢIUL 5.2.21. a) Să se dezvolte în serie Taylor, în vecinătatea lui 0, funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

b) Să se arate că

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

SOLUŢIE. a) f este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi, utilizând din nou formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q},\ |q|<1,$$

se obţine

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\ |x| < 1.$$

Integrând termen cu termen, se obţine

$$f(x) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C,\ x \in (-1,1).$$

Pentru $x = 0$, rezultă $C = 0$, deci

$$f(x) = \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x \in (-1,1).$$

b) Utilizând Teorema a II-a a lui Abel seriei de mai sus, pentru $R = 1$, se obţine că

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

□

Exerciţiul 5.2.22. Să se dezvolte în serie Taylor, în vecinătatea lui 0, funcţia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$.

Soluţie. f este indefinit derivabilă pe $(-1,1)$ şi

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}},\ x \in (-1,1).$$

Se va utiliza Exerciţiul 5.2.20, cu $\alpha = -1/2$ şi înlocuind x cu $-x^2$:

$$f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} \cdot (-x^2)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)} \cdot x^{2n},\ x \in (-1,1).$$

Prin integrare termen cu termen se obţine

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C,\ x \in (-1,1).$$

Pentru $x = 0$, se obţine $C = 0$, deci

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \; x \in (-1,1).$$

□

EXERCIŢIUL 5.2.23. Să se dezvolte în serie Taylor, în vecinătatea lui 0, funcţiile:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$;

b) $f(x) = \sin(2x) + \cos^2 x$.

SOLUŢIE. a) f se poate scrie

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{1-x} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n,$$

dezvoltările putându-se scrie pentru $|x/2| < 1$ şi $|x| < 1$, adică pentru $x \in (-1,1)$.

b) Deoarece $f(x) = \sin(2x) + \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ şi ţinându-se cont de un exerciţiu anterior, se obţine

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}, \; x \in \mathbb{R},$$

care se poate prelucra, etc. □

5.3. Exerciţii propuse

EXERCIŢIUL 5.3.1. Să se studieze convergenţa simplă şi uniformă a şirurilor de funcţii $(f_n)_{n\geq 1}$ pe domeniile indicate:

1. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+x+n}$, a) $x \in [0,\infty)$; b) $x \in [1,\infty)$;
2. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $x \in [0,1]$;
3. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, a) $x \in [0, 1-\varepsilon)$, b) $x \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, c) $x \in [1+\varepsilon, \infty)$, unde $\varepsilon \in (0,1)$;
4. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $x \in [0,1]$; 5. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$, $x \in \mathbb{R}$;

6. $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$, $x \in (0,\infty)$; 7. $f_n(x) = \sin\dfrac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$;

8. $f_n(x) = e^{n(x-1)}$, $x \in (0,1)$; 9. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$, a) $x \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, b) $x \in \mathbb{R}$; 10. $f_n(x) = x \cdot \operatorname{arctg} nx$, $x \in [0,\infty)$;

11. $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, a) $x \in [a,b]$, b) $x \in \mathbb{R}$;

12. $f_n(x) = n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$, $x \in [1,a]$, $a > 1$; 13. $f_n(x) = \dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}$, $x \in (0,1)$;

14. $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$, $x \in [0,2]$; 15. $f_n(x) = \dfrac{n^7x^5}{1+n^{10}x^7}$, $x \in [0,\infty)$;

16. $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{\sqrt{1+n^4x^{14}}}$, a) $x \in [0,1]$, b) $x \in [1,\infty)$.

Exerciţiul 5.3.2. Fie $f_n : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\operatorname{arctg} x^n$, $x \geq 0$, $n \geq 1$.

a) Să se arate că f_n converge uniform la o funcţie derivabilă f.

b) Să se studieze dacă $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n'(x) = f'(x)$.

c) Converge f_n' uniform?

Exerciţiul 5.3.3. Fie şirul de funcţii $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$. Să se studieze dacă f_n este uniform convergent şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 (1+x^2)f_n(x)dx$.

Exerciţiul 5.3.4. Să se studieze uniform convergenţa seriilor pe domeniile indicate:

1. $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{nx}{1+n^5x^2}$, $x \in \mathbb{R}$; 2. $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x}{1+n^3x^2}$, $x \in [0,\infty)$;

3. $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \dfrac{\sqrt{x^2+n}}{n}$, $x \in \mathbb{R}$; 4. $\sum\limits_{n\geq 1} x^2e^{-nx}$, $x \in [0,\infty)$;

5. $\sum\limits_{n\geq 1} 2^n \sin\dfrac{1}{3^nx}$, $x \in (0,\infty)$; 6. $\sum\limits_{n\geq 2} \ln\left(1+\dfrac{x}{n(\ln n)^2}\right)$, $x \in (0,a)$, $a > 0$;

7. $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$, $x \in (0,\infty)$;

8. $\sum_{n\geq 1} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\ldots(1+nx)}$, a) $x \in [0,\varepsilon)$, b) $x \in [\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$.

EXERCIŢIUL 5.3.5. Să se determine domeniul de existenţă pentru $f(x)$ şi să se studieze continuitatea lui f:

a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$; b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$; c) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2}$.

EXERCIŢIUL 5.3.6. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n^x}$.

EXERCIŢIUL 5.3.7. Fie $f_n(x) = (-1)^n(1-x)x^n$, $x \in [0,1]$, $n \geq 0$. Să se arate că: a) $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ este absolut convergentă; b) $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ este uniform convergentă; c) $\sum_{n\geq 0} |f_n(x)|$ nu este uniform convergentă.

EXERCIŢIUL 5.3.8. Este permisă derivarea termen cu termen a serilor:

a) $\sum_{n\geq 1} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+x}}$, $x \in [1, \infty)$?

EXERCIŢIUL 5.3.9. Să se determine domeniul de convergenţă şi să se calculeze suma seriilor:

a) $\sum_{n\geq 1} n(n+1)x^n$; b) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n-1}$;

c) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$; d) $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{3n-1}}{3n-1}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1} =?$;

e) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{5^n \cdot n!} \cdot x^{2n-1}$; f) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2 + (-1)^n}{2^n \cdot n!} \cdot x^n$;

g) $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{2n^2+1}{(2n)!} \cdot x^{2n}$; h) $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$;

i) $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$.

EXERCIŢIUL 5.3.10. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul punctului $a = 1$ funcţia

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1/3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{3x-1}.$$

EXERCIŢIUL 5.3.11. a) Să se dezvolte în serie de puteri în jurul lui 0 funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x+1}$, $g(x) = e^{x^3}$.

b) Să se calculeze valoarea lui $\sqrt[3]{e}$ cu patru zecimale exacte.

c) Determinaţi suma seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 2n + 1}{n!}.$$

EXERCIŢIUL 5.3.12. a) Să se dezvolte în serie Taylor, în vecinătatea lui 0 funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

b) Să se determine $\sin 1$ cu 3 zecimale exacte.

c) Să se dezvolte în serie Taylor, în vecinătatea lui 0 funcţiile f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^3 x$, $g(x) = \sin x^2$.

EXERCIŢIUL 5.3.13. Să se dezvolte în serie Taylor, în vecinătatea lui -1 funcţiile:

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{1/2, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x - 1}{2x^2 - 5x + 2}$;

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 3, 5\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)(x-5)}$.

EXERCIŢIUL 5.3.14. Să se dezvolte în serie Taylor, în vecinătatea lui 0, funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

EXERCIŢIUL 5.3.15. Să se dezvolte următoarele funcţii în serie Taylor în jurul punctelor indicate:

a) $f : (-\infty, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(2 - x)$, $a = -3$;

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$, $a = 2$;

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1/2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2x + 1}$, $a = 0$;

d) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos x$, $a = 0$.

EXERCIŢIUL 5.3.16. Să se dezvolte în serie de puteri în jurul lui 0 funcţiile:

a) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = \ln(2 - x)$, $x \in (-\infty, 2)$.

EXERCIŢIUL 5.3.17. Să se dezvolte în serie Taylor, în vecinătatea lui 0, funcţiile:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$; b) $f(x) = \cos(3x) - \sin^2 x$;

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 8x + 15}$; d) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 + 4x - 4}$;

e) $f(x) = \dfrac{x^5}{(x-1)^2}$; f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-3x}}$;

g) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x-2)}$; h) $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$;

i) $f(x) = \ln\left(1-x+x^2\right)$; j) $f(x) = \cos^3 x$.

Bibliografie

[1] H. Amann, J. Escher, *Analysis I*, Birkhauser Verlag, 2005.

[2] H. Amann, J. Escher, *Analysis II*, Birkhauser Verlag, 2006.

[3] L. Aramă, T. Morozan, *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, vol.1, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.

[4] S. Dedu, F. Şerban, *Matematici aplicate în economie*, Editura Teocora, 2009.

[5] A. V. Ion, A. Nuică, *Calcul diferenţial. Teorie şi aplicaţii*, Editura Universităţii din Piteşti, 2005.

[6] C. Meghea, *Bazele analizei matematice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1977.

[7] C. Meghea, I. Meghea, *Tratat de calcul diferenţial şi calcul integral pentru învăţământul politehnic*, vol.1, Editura Tehnică, 1997.

[8] M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Manual de analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, vol.1, 1963, vol.2, 1964.

[9] Gh. Sireţchi, *Calcul diferenţial şi integral*, vol.1, Noţiuni fundamentale, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

[10] Gh. Sireţchi, *Calcul diferenţial şi integral*, vol.2, Exerciţii, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

[11] O. Stănăşilă, *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[12] R. Wrede, M.R. Spiegel, *Advanced Calculus*, Third Edition, McGraw Hill, 2010.

ISBN 978-606-030-048-9