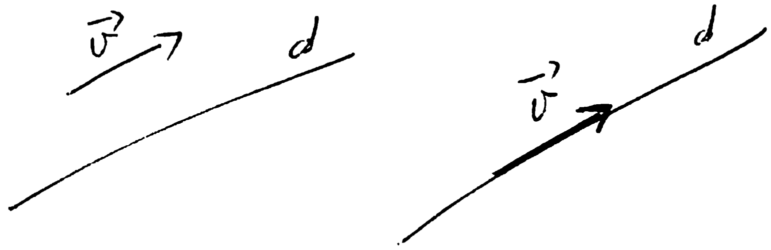
Dreapta în spațiu

Def Se numește <u>vector director</u> al direcției dreptei d orice vector nenul $\vec{v}=(l,m,n)$ a cărui direcție coincide cu direcția dreptei d.



Teorema Ecuațiile carteziene ale dreptei care trece prin $M(x_0,y_0,z_0)$ și are ca vector director vectorul nenul $\vec{v}=(l,m,n)$ sunt

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Ecuațiile parametrice scalare ale dreptei ce trece prin $M(x_0,y_0,z_0)$ și are ca vector director vectorul nenul $\vec{v}=(l,m,n)$ sunt

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

Ec. parametrică vectorială este $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{v}$

Ex Să se scrie ecuațiile carteziene și parametrice scalare ale dreptei ce trece prin punctul $M(2,1,-2)$ și are direcția $\vec{v}=(1,-1,4)$

Sol
$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{4} \quad (\text{ec. carteziene})$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{4} = t$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x-2 = t \\ y-1 = -t \\ z+2 = 4t \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = -2+4t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{(ec. parametrice scalare)}$$

Temă

1. Să se scrie ec. carteziene și parametrice scalare ale dreptei ce trece prin punctul $M(-1,2,3)$ și are direcția vectorului director $\vec{v} = (-1,2,2)$
2. Să se scrie ec. carteziene și parametrice scalare ale dreptei ce trece prin punctul $M(0,1,5)$ și are direcția vectorului director $\vec{v} = (3,1,-2)$.

Prop Ecuațiile carteziene ale dreptei determinate de două puncte $M_1(x_1,y_1,z_1)$ și $M_2(x_2,y_2,z_2)$ sunt

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Ex Să se scrie ec carteziene și parametrice scalare ale dreptei determinate de punctele $A(2,1,3)$ și $B(-1,4,2)$.

Sol.

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-1}{4-1} = \frac{z-3}{2-3} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-1}$$

(ec carteziene)

Ec parametrice:

$$\begin{cases} x-2 = -3t \\ y-1 = 3t \\ z-3 = -t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+3t \\ z = 3-t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

Temă

Să se scrie ec. carteziene și parametrice scalare ale dreptelor ce trec prin punctele

a) $A(2,-1,4)$, $B(-1,2,1)$

b) $A(0,1,5)$, $B(-1,2,0)$

Teoremă

Ecuațiile canonice ale dreptei de intersecție a planelor neparalele

$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ și

$P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ sunt

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n},$$ unde $M(x_0, y_0, z_0)$

este un punct pe această dreaptă și

$\vec{v} = (l, m, n)$ este vectorul determinat de

$\vec{n_1} \times \vec{n_2}$

Ex

Să se scrie ec canonice ale dreptei d de intersecție a planelor

$P_1 \quad 2x + 5y - z + 2 = 0$

$P_2 \quad x - 8y + z - 2 = 0$

Sol

Căutăm un punct pe dreapta d. Pt aceasta rezolvăm sistemul format de ec celor două plane.

$$\begin{cases} 2x + 5y - z + 2 = 0 \\ x - 8y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - z = -2 - 5y \\ x + z = 2 + 8y \end{cases}$$

$$3x = 3y \Rightarrow \boxed{x = y}$$

$$z = 2 + 8y - y = \boxed{2 + 7y = z}$$

Pt $y = 1 \Rightarrow x = 1$, $z = 9$

$\Rightarrow M(1,1,9)$

Normalele la cele 2 plane sunt: $\vec{n_1}=(2,5,-1)$, $\vec{n_2}=(1,-8,1)$

$$\Rightarrow \vec{n_1}\times\vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -8 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i}-3\vec{j}-21\vec{k}$$

$\Rightarrow v=(-3,-3,-21)$

$\Rightarrow$ Ec. carteziene sunt:

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-9}{-21}$$

Temă

Să se determine ec. carteziene și parametrice scalare ale dreptelor determinate de intersecțiile planelor

a) $P_1: x+5y-z+4=0$
$P_2: -x+2y+3z-4=0$

b) $P_1: 2x-y+z+5=0$
$P_2: -x+4y-z+3=0$.

Prop Distanța de la un punct $M(x_0,y_0,z_0)$ la dreapta d de ecuație

$$d: \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$ este

$$d(M,d)=\frac{\|\vec{MM_1}\times\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|},$$ unde $M_1(x_1,y_1,z_1)$ este un punct al dreptei d.

Ex Să se calculeze distanța de la $M(1,2,3)$ la dreapta d de ec. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+1}{4}$

Sol

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+1}{4}=t \Rightarrow \begin{cases} x=1+3t \\ y=4+2t \\ z=-1+4t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

Pt. $t=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \\ z=-1 \end{cases}$, deci putem lua $M_1(1,4,-1)$

$\overrightarrow{MM_1}$ are coordonatele $(x_{M_1}-x_M, y_{M_1}-y_M, z_{M_1}-z_M)$,

$\Rightarrow \overrightarrow{MM_1}=(1-1, 4-2, -1-3)=(0,2,-4)$

Vectorul director al dreptei d este $\vec{v}=(3,2,4)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MM_1}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}=16\vec{i}+12\vec{j}-6\vec{k}$$

$$\|MM_1\times\vec{v}\|=\sqrt{16^2+12^2+(-6)^2}=\sqrt{256+144+36}=\sqrt{436}$$

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{3^2+2^2+4^2}=\sqrt{9+4+16}=\sqrt{29}$$

$$\Rightarrow d(M,d)=\frac{\|\overrightarrow{MM_1}\times\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}=\frac{\sqrt{436}}{\sqrt{29}}$$

Temă:

1. Să se determine distanța de la $M(-1,2,4)$ la dreapta de ec $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+1}{1}$
2. Să se determine distanța de la $M(1,2,-3)$ la dreapta de ec $\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{2}$

Def. Unghiul dintre două drepte este unghiul ascuțit dintre vectorii directori corespunzători celor două drepte.

Ex. Să se determine unghiul dintre dreptele d_1 și d_2,

d_1: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$

d_2: dreapta ce trece prin punctele $M_1(1,2,-1)$, $M_2(-1,2,-5)$

Sol. Vectorul director al dreptei d_1 este $\vec{v_1} = (2,3,1)$

Dreapta d_2 are ec $\frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-2}{2-2} = \frac{z+1}{-5+1} \Leftrightarrow$

$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-4} \Rightarrow$ vectorul director este $\vec{v_2} = (-2,0,-4)$

Unghiul dintre cele 2 drepte este unghiul dintre vectorii $\vec{v_1}$ și $\vec{v_2}$ $\Rightarrow$

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle}{\|\vec{v_1}\| \cdot \|\vec{v_2}\|}$$

$\langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle = 2\cdot(-2) + 3\cdot 0 + 1\cdot(-4) = -4+0-4 = -8$

$\|\vec{v_1}\| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$\|\vec{v_2}\| = \sqrt{(-2)^2+0^2+(-4)^2} = \sqrt{4+0+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{-\cancel{8}\,4}{\sqrt{14}\cdot \cancel{2}\sqrt{5}} = \frac{-\cancel{4}^{\,2}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}}{\cancel{14}_{\,7}\cdot 5} = \frac{-2\sqrt{70}}{35}$$

$$\Rightarrow \theta = \pi - \arccos\frac{2\sqrt{70}}{35}$$

Temă

Să se determine unghiul dintre dreptele d_1, d_2 dacă

a) d_1: este dreapta care trece prin punctele $A(1,2,-3)$ $B(0,1,4)$

d_2: este dreapta de intersecția a planelor

$$P_1: \ 2x - y + z + 4 = 0$$
$$P_2: \ -x + y - z - 3 = 0$$

b) $d_1: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+4}{1} = \dfrac{z-5}{3}$

$$d_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Def Fie P un plan de vector normal $\vec{n} = (A, B, C)$ și d o dreaptă de vector director $\vec{v} = (l, m, n)$. Unghiul dintre dreapta d și planul P este unghiul ascuțit α care satisface relația

$$\sin \alpha = \frac{\langle \vec{n}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Ex Să se determine unghiul dintre dreapta de ecuații $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-1}{4}$ și planul de ec.

$P: \ 2x + 4y + z + 2 = 0$.

Sol. Vectorul normal planului P este $\vec{n} = (2,4,1)$

Vectorul director al dreptei d este $\vec{v} = (2,1,4)$

$$\langle \vec{n}, \vec{v} \rangle = 2\cdot 2 + 4\cdot 1 + 1\cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 12$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2+1^2+4^2} = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{12}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{21}} = \dfrac{\cancel{12}\,4}{\cancel{21}\,7} = \dfrac{4}{7} \Rightarrow \alpha = \arcsin\dfrac{4}{7}$

Temă

1 Să se determine unghiul dintre dreapta de ec

$$\begin{cases} x = 1+4t \\ y = -2+t \\ z = 3+5t \end{cases}$$

și planul de care trece prin punctele $A(2,1,3)$, $B(0,1,4)$, $C(1,0,1)$

2 . Să se determine unghiul dintre dreapta determinată de intersecția planelor de ec.

$$2x+y-z+3=0$$
$$-x+3y+z-2=0$$

și planul P de ec. $x-4y+z-3=0$.