2.5 Exerciţii şi probleme rezolvate

Problema 2.5.1. *Se studiază alegerea unui proiect de modernizare a unei companii. S-au prezentat 3 proiecte care pot fi viabile sau nu. Dacă notăm cu $A_i,\ i=\overline{1,3}$, evenimentul 'proiectul i este viabil", să se exprime în funcţie de A_1, A_2, A_3 următoarele evenimente:*

a) toate proiectele sunt viabile;
b) cel puţin un proiect este viabil;
c) două proiecte sunt viabile;
d) cel mult două proiecte sunt viabile;
e) un singur proiect este viabil.

Soluţie: Notăm cu $\bar{A}_i,\ i=\overline{1,3}$, evenimentul ,,proiectul i nu este viabil".

a) Notăm cu A evenimentul ,,toate proiectele sunt viabile" $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, adică toate cele 3 proiecte sunt rentabile.

b) Notăm cu B evenimentul ,,cel puţin un proiect este viabil" şi astfel putem scrie $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

c) Notăm cu C evenimentul ,,două proiecte sunt viabile".

$C = \left(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_3 \cap A_3\right)$

d) Notăm cu D evenimentul ,,cel mult două proiecte sunt viabile". Evenimentul D este echivalent cu a spune că: nici un proiect nu este viabil, doar un proiect este viabil sau două proiecte sunt viabile.

$D = \left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) \cup C.$

e) Notăm cu E evenimentul ,,un singur proiect este viabil". Atunci:

$E = \left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3\right) \cup \left(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right).$

Problema 2.5.2. *O monedă este aruncată de 3 ori şi secvenţa de mărci şi steme este înregistrată.*

a) Scrieţi spaţiul evenimentelor elementare Ω
b) Scrieţi următoarele evenimente, folosind evenimentele elementare:
A-să apară cel puţin 2 steme
B-primele 2 aruncări sunt steme
C-ultima aruncare este marcă
c) Determinaţi următoarele evenimente:
1) C_A ;   2) $A \cap B$;   3) $A \cup C$

Soluţie: Spaţiul evenimentelor aleatoare Ω este:

$\Omega = \{SSS, SSM, SMS, MSS, MMS, MSM, SMM, MMM\}$, unde cu S notăm apariţia stemei, iar cu M apariţia mărcii.

b) Evenimentele A, B, C,se scriu folosind evenimentele elementare din Ω după cum urmează:

$A = \{SSS, SSM, SMS, MSS\}$
$B = \{SSM, SSS\}$
$C = \{SSM, SMM, MMM, MSM\}$

c) Evenimentele C_A, $A \cap B, A \cup B$ se scriu folosind punctul b) astfel:

$C_A = \bar{A} = \{SMM, MMM, MMS, MSM\}$
$A \cap B = \{SSM, SSS\}$
$A \cup C = \{SSS, SSM, SMS, MSS, SMM, MMM, MSM\}$

Problema 2.5.3. *Presupunem că într-o cameră sunt 5 persoane. Care este probabilitatea ca cel puţin 2 persoane să aibă aceiaşi zi de naştere.*

Soluţie: Fie A evenimentul ,,cel puţin 2 persoane au aceiaşi zi de naştere". Atunci $\bar{A}$ este evenimentul ,,cele 5 persoane au zile de natere diferite"

Presupunem că anul are 365 zile

Aşadar $P\left(\bar{A}\right) = \frac{365\ 364\ 363\ 362\ 361}{365^5}$

Deci, $P\left(A\right) = 1 - P\left(\bar{A}\right) = 1 - \frac{365\ 364\ 363\ 362\ 361}{365^5}$

Problema 2.5.4. *In România numerele de înmatriculare ale maşinilor au 7 caractere: 2 litere urmate de 2 cifre şi alte trei litere. Dacă toate secvenţele de 7 caractere sunt egal probabile, care este probabilitatea ca numărul de înmatriculare al unei maşini noi să nu conţină cifre şi litere identice?*

Soluţie: Notăm cu A evenimentul cerut.

Alfabetul conţine 26 litere, iar cifrele de pe numărul de înmatriculare pot fi: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Numărul total de plăcuţe de înmatriculare este $26^5 \times 10^2$(corespunzătoare celor 5 litere şi 2 cifre). Numărul plăcuţelor ce conţin litere şi cifre diferite este: $(26\ 25) \times (10\ 9) \times (24\ 23\ 22)$ (corespunzătoare primelor 2 litere diferite, urmate de 2 cifre diferite şi alte trei litere diferite de primele 2 şi diferite între ele).

Deci, $P\left(A\right) = \frac{26\ 25\ 10\ 9\ 24\ 23\ 22}{26^5 10^2} = 0,597$

Problema 2.5.5. *Fie* $P_B\left(A\right) = \frac{1}{2}$, $P_{\bar{B}}\left(A\right) = \frac{1}{2}$ *şi* $P_A\left(B\right) = \frac{1}{2}$. *Se cere :*

a) să se determine $P\left(A\right)$ *şi* $P\left(B\right)$.

b) evenimentele A *şi* B *sunt independente?*

Soluţie: Folosind definiţia probabilităţii condiţionate se obţinė:

$P_B\left(A\right) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}$

$P_{\bar{B}}\left(A\right) = \frac{P\left(A\cap \bar{B}\right)}{P\left(\bar{B}\right)} = \frac{P(A\setminus B)}{1-P(B)} = \frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)} = \frac{1}{2}$

$P_A\left(B\right) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2}$

Dacă notăm $P\left(A\right) = x,\ P\left(B\right) = y,\ P\left(A\cap B\right) = z,$ se obţine sistemul liniar:

$\begin{cases} \frac{z}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{x-z}{1-y} = \frac{1}{2} \\ \frac{z}{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}y \\ z = \frac{1}{2}x \\ x - z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y \end{cases}$, de unde prin calcule $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2},\ z = \frac{1}{4}$.

In concluzie: $P\left(A\right) = \frac{1}{2},\quad P\left(B\right) = \frac{1}{2}$

Condiţia ca evenimentele A şi B să fie independente este: $P\left(A\cap B\right) = P\left(A\right)\ P\left(B\right)$

Deoarece $P\left(A\cap B\right) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} = P\left(A\right)\ P\left(B\right)$ se obţine că evenimentele A şi B sunt independente.

Problema 2.5.6. *O firmă de asigurări are clienţi din 3 categorii de risc: ridicat, mediu, scăzut, care au respectiv probabilităţile de a cere despăgubiri în caz de accidente: 0,02, 0,01, 0,0025 într-un an. Proporţiile celor 3 categorii de clienţi în cadrul companiei sunt respectiv 10%, 20%, 70%. Care este probabilitatea ca un client al firmei să fie despăgubit? Care este proporţia de despăgubiri ce provin într-un an de la clienţii cu risc ridicat?*

Soluţie: Notăm cu B evenimentul ,,un client al companiei este despăgubit"şi cu:

A_1-evenimentul ,,clientul provine din categoria de risc ridicat"

A_2-evenimentul ,,clientul provine din categoria de risc mediu"

A_3-evenimentul ,,clientul provine din categoria de risc scăzut"

Sistemul $\{A_1,\ A_2,\ A_3\}$, formează un sistem complet de evenimente deoarece reuniunea lor este evenimentul sigur Ω şi sunt două câte două incompatibile. Astfel conform formulei probabilităţii totale:

$P\left(B\right) = P\left(A_1\right)\ P\left(\frac{B}{A_1}\right) + P\left(A_2\right)\ P\left(\frac{B}{A_2}\right) + P\left(A_3\right)\ P\left(\frac{B}{A_3}\right) = 0,1\ 0,02 + 0,2\ 0,01 + 0,7\ 0,025 = 0,00575.$

Pentru a răspunde la a doua întrebare folosim formula lui Bayes:
$P\left(A_1/B\right)=\frac{P(A_1)\ P(B/A_1)}{P(A_1)\ P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)}=\frac{0{,}1\ 0{,}02}{0{,}00575}=0,347.$

Problema 2.5.7. *La o loterie sunt 100 bilete, din care 10 sunt câştigătoare. Opersoană cumpără 15 bilete. Săse determine probabilitatea ca:*

a) 1 bilet să fie câştigător;

b) să se obţină toate cele 10 bilete câştigătoare;

c) cel puţin 2 bilete să fie câştigătoare.

Rezolvare: Se aplică schema urnei cu 2 stări şi bila nerevenită.

a) $P_{10,90}\left(1,14\right)=\frac{C_{10}^{1}\ C_{90}^{14}}{C_{100}^{15}}$ b) $P_{10,90}\left(10,5\right)=\frac{C_{10}^{10}\ C_{90}^{5}}{C_{100}^{15}}$

c) Fie A evenimentul ca ,,cel puţin 2 bilete să fie câştigătoare,,. Considerăm $\bar{A}$ evenimentul contrar ca ca cel mult unul din cele 15 cumpărate să fie câştigător. Are loc:

$P\left(\bar{A}\right)=P_{10,90}\left(0,15\right)+P_{10,90}\left(1,14\right)=\frac{C_{10}^{0}\ C_{90}^{15}}{C_{100}^{15}}+\frac{C_{10}^{1}\ C_{90}^{14}}{C_{100}^{15}}$

Probabilitatea cerută va fi $P\left(A\right)=1-P\left(\bar{A}\right)$

Problema 2.5.8. *Un depozit de piese auto are în stoc piese de la 4 furnizori în următoarele cantităţi: 100 de la furnizorul F_1, 50 de la F_2, 30 de la F_3 şi 80 de la F_4.*

In decursul unei săptămâni, depozitul a vândut 45 piese. Care e probabilitatea ca din cele 45 de piese vândute, 15 să provină de la furnizorul F_1, 5 de la F_2, 10 de la F_3 şi 15 de la F_4.

Rezolvare: Se aplică schema urnei cu 4 stări şi bila nerevenită, unde $a_1=100, a_2=50, a_3=30, a_4=80$ $k_1=15, k_2=5, k_3=10, k_4=15$. Probabilitatea cerută este:

$P_{100,50,30,80}\left(15,5,10,15\right)=\frac{C_{100}^{15}\ C_{50}^{5}\ C_{30}^{10}\ C_{80}^{15}}{C_{260}^{45}}$

Problema 2.5.9. *Pe parcursul unei săptămâni s-a dat predicţia cursului valutar, astfel încât cursul poate să crească zilnic cu probabilitatea $\frac{1}{4}$, respectiv să scadă cu probabilitatea $\frac{3}{4}$. Stabiliţi probabilitatea ca:*

a) în 5 zile ale săptămânii cursul valutar să crească;

b) în cel mult 3 zile cursul valutar să crească;

c) în cel puţin 2 zile cursul valutar să crească;

Rezolvare: Considerăm evenimentul A ,,cursul valutar să crească într-o zi,,. In fiecare zi poate avea loc A sau $\bar{A}$.

Se aplică schema urnei cu 2 stări şi bila revenită (schema binomială), unde: $n=7$, $p=P\left(A\right)=\frac{1}{4}$, $q=P\left(\bar{A}\right)=\frac{3}{4}$,

Probabilitatea de a se produce A de k ori este: $P\left(k\right)=C_7^k\,p^k q^{7-k}$.

a) Probabilitatea cerută este: $P_7\left(5\right)=C_7^5\,p^5 q^{7-5}=C_7^5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^2$

b) Probabilitatea cerută este:

$\sum\limits_{k=0}^{3}P_7\left(k\right)=\sum\limits_{k=0}^{3}C_7^k\,p^k\,q^{7-k}=\sum\limits_{k=0}^{3}C_7^k\ \left(\frac{1}{4}\right)^k\ \left(\frac{3}{4}\right)^{7-k}.$

c) Notăm cu C evenimentul ,,cursul valutar să crească în cel puţin 2 zile,,. Atunci $\overline{C}$ este evenimentul: ,,cursul valutar să nu crească în nici o zi sau să crească într-o zi,,. Aşadar putem scrie:

$P\left(\overline{C}\right)=P_7\left(0\right)+P_7\left(1\right)=C_7^0\ \left(\frac{1}{4}\right)^0\ \left(\frac{3}{4}\right)^7+C_7^1\ \left(\frac{1}{4}\right)^1\ \left(\frac{3}{4}\right)^6$

Probabilitatea cerută este:

$P\left(C\right)=1-P\left(\bar{C}\right).$

Problema 2.5.10. *Un supermarket vinde următoarele sortimente de cafea: naturală, cappuccino şi expresso. Probabilitatea ca un client să cumpere cafea naturală este 0,55, cappuccino 0,3, iar expresso 0,15.*

Determinaţi probabilitatea ca din 100 clienţi, 70 să cumpere cafea naturală, 20 să cumpere cappuccino, iar 10 să cumpere expresso.

Rezolvare: Aplicăm schema urnei cu 3 stări şi bila revenită (schema multinomială)
Fie A_i, evenimentul ca un client să cumpere sortimentul i de cafea , $i = \overline{1,3}$. Avem evident:
$p_1 = P(A_1) = 0,55$, $p_2 = P(A_2) = 0,3$, $p_3 = P(A_3) = 0,15$, $n = 100$, $k_1 = 70$, $k_2 = 20$, $k_3 = 10$
Probabilitatea cerută este:
$P_{100}(70, 20, 10) = \frac{100!}{70!20!10!}\,(0,55)^{70}\,(0,30)^{20}\,(0,15)^{10}$

Problema 2.5.11. *Care e probabilitatea ca al 80-lea client care intră într-o bancă, să fie a 20-a persoană care încheie o poliţă de asigurare, ştiind că probabilitatea ca cineva să încheie o poliţă de asigurare este de 0,6.*

Rezolvare: Se aplică schema lui Pascal cu $n = 80$ (numărul clienţilor), $k = 20$ (numărul succeselor), $p = 0,6$, $q = 0,4$.

Probabilitatea cerută este: $C_{n-1}^{k-1}\,p^k\,q^{n-k} = C_{79}^{19}\,(0,6)^{20}\,(0,4)^{60}$.

Problema 2.5.12. *La trei reprezentanţe ale concernului Nokia se găsesc telefoane mobile cu ecran color sau alb-negru în următoarele proporţii: la prima reprezentanţă 14 cu ecran color şi 16 cu ecran alb-negru, la a doua 13 cu ecran color şi 17 cu ecran alb-negru, iar la a treia 14 cu ecran color şi 18 cu ecran alb-negru. Se alege la întâmplare câte un telefon mobil de la fiecare reprezentanţă, pentru a fi supus unor probe de verificare. Care e probabilitatea ca din cele 3 telefoane alese două să fie cu ecran color, iar unul cu ecran alb-negru?*

Rezolvare: Aplicăm schema lui Poisson. Pentru aceasta notăm cu p_i probabilitatea ca telefonul ales de la reprezentanţa i să aibă ecran color, $i = \overline{1,3}$. Avem că:
$p_1 = \frac{14}{30}$, $q_1 = \frac{16}{30}$, $p_2 = \frac{13}{30}$, $q_2 = \frac{17}{30}$, $p_3 = \frac{14}{32}$, $q_3 = \frac{18}{32}$
Conform schemei lui Poisson, probabilitatea cerută este dată de coeficientul lui t^2 al polinomului
$(p_1 t + q_1)(p_2 t + q_2)(p_3 t + q_3)$
adică de:

$$p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = \tfrac{14}{30}\tfrac{13}{30}\tfrac{18}{32} + \tfrac{14}{30}\tfrac{17}{30}\tfrac{14}{32} + \tfrac{16}{30}\tfrac{13}{30}\tfrac{14}{32} = 0,33.$$

Problema 2.5.13. *Variabila aleatoare discretă X ia valorile -1, 0, 1 cu probabilităţile p_1, $\frac{1}{3}$ şi respectiv p_3. Să se determine*

a) *probabilităţile p_1 şi p_3 ştiind că valoarea medie a variabilei aleatoare X este $\frac{1}{3}$;*

b) *abaterea medie pătratică;*

c) *momentul centrat de ordinul trei;*

d) *valoarea medie şi dispersia variabilei aleatoare $Y = 3X + 2$.*

Rezolvare.

a) Valoarea medie a variabilei aleatoare de tip discret X este

$$M(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p_i = (-1)\cdot p_1 + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot p_3 = \frac{1}{3},$$

prin urmare $p_3 - p_1 = \frac{1}{3}$.

Mai ştim că $\sum\limits_{i=1}^{3} p_i = 1,$ prin urmare $p_1 + \frac{1}{3} + p_3 = 1$. Aşadar obţinem următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} p_3 - p_1 = \frac{1}{3} \\ p_1 + p_3 + \frac{1}{3} = 1 \end{cases}$$

având soluţiile $p_1 = \frac{1}{6}$ şi $p_3 = \frac{1}{2}$. Prin urmare distribuţia variabilei aleatoare date este

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Dispersia variabilei aleatoare X o putem calcula cu ajutorul formulei

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left[M(X)\right]^2.$$

Ştiind că valoarea medie $M(X) = \frac{1}{3}$, mai rămâne de calculat valoare medie $M\left(X^2\right)$:

$$M\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \cdot p_i = (-1)^2 \cdot \frac{1}{6} + 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

Prin urmare

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left[M(X)\right]^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

Aşadar obţinem abaterea medie pătratică

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

c) Momentul centrat de ordinul 3 al variabilei X este

$$\begin{aligned} \mu_3 &= M\left[(X - M(X))^3\right] = M\left[\left(X - \frac{1}{3}\right)^3\right] = \\ &= \sum_{i=1}^{3} \left(X_i - \frac{1}{3}\right)^3 \cdot p_i = \\ &= \left(-1 - \frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \left(0 - \frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{7}{27}. \end{aligned}$$

Cunoscând faptul că momentul centrat de ordinul k se poate exprima şi cu ajutorul momentelor de ordinul k prin formula

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i \, \nu_{k-i} \, \upsilon_1^i,$$

putem obţine rezultatul de mai sus astfel

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_{1.}^3$$

Momentul de ordinul 3 al variabilei aleatoare X este

$$\nu_3 = M\left(X^3\right) = \sum_{i=1}^{3} x_i^3 \cdot p_i = \frac{1}{3}.$$

Prin urmare momentul centrat de ordinul 3 este

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^2 = \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{7}{27}.$$

d) Folosindu-ne de proprietăţile valorii medii şi a dispersiei obţinem:

$$\begin{aligned} M(Y) &= M(3X+2) = 3 \cdot M(X) + 2 = 3; \\ D(Y) &= D(3X+2) = 3^2 \cdot D(X) = 5. \end{aligned}$$

Problema 2.5.14. *Fie X o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate*

$$f(x) = \begin{cases} x\,e^{-x} & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & \text{dacă } x \leq 0 \end{cases}.$$

Să se determine valoarea medie şi dispersia.

Rezolvare. Valoarea medie a variabilei aleatoare de tip continuu este

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x} dx = \Gamma(3) = 2.$$

Pentru dispersie folosim formula

$$D(X) = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2,$$

unde

$$M\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx = \int_0^{\infty} x^3 \cdot e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3! = 6.$$

Prin urmare $D(X) = 6 - 4 = 2$, iar abaterea medie pătratică este

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2}.$$

Problema 2.5.15. *O variabilă aleatoare X urmează legea binomială cu valoarea medie egală cu 300 şi dispersia egală cu 100. Să se afle n, p şi q.*

Rezolvare. Variabila aleatoare ce urmează legea binomială are $M(X) = n \cdot p$ şi $D(X) = n \cdot p \cdot q$. Prin urmare $n \cdot p = 300$ şi $n \cdot p \cdot q = 100$. Efectuând substituţia obţinem $300\,q = 100$. Prin urmare $q = \frac{1}{3}$. Rezultă de aici că $p = 1 - q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ şi prin urmare $n = \frac{300}{p}$, deci $n = 450$.

Problema 2.5.16. *Probabilitatea cu care se consumă energie electrică într-o unitate comercială într-o zi este 0,8. Fie X numărul zilelor din săptămână când consumul este normal. Să se scrie distribuţia variabilei aleatoare X şi să se calculeze valoarea sa medie şi dispersia.*

Rezolvare. Se observă că variabila aleatoare X urmează legea binomială de parametrii: $n = 7$ (sunt 7 zile într-o săptămână), $p = 0,8$ (probabilitatea să se consume energie electrică în unitatea comercială) şi $q = 1 - p = 0,2$.

Distribuţia variabilei aleatoare este următoarea:

$$X : \begin{pmatrix} k \\ C_7^k \cdot (0,8)^k \cdot (0,2)^{7-k} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,7}}$$

Valoarea medie este dată de formula: $M(X) = n \cdot p = 7 \cdot 0,8 = 5,6$.

Dispersia este: $D(X) = n \cdot p \cdot q = 7 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 5,6 \cdot 0,2 = 11,2$.

Problema 2.5.17. *O agenţie imobiliară are spre vânzare un imobil cu 10 apartamente. Patru dintre acestea sunt cu o singură cameră. În decurs de o săptămână s-au prezentat la agenţia imobiliară 3 cumpărători. Fie X numărul clienţilor ce au cumpărat apartamente cu o cameră. Să se scrie distribuţia variabilei aleatoare X şi să se calculeze valoarea medie şi dispersia ei.*

Rezolvare. Variabila aleatoare X urmează legea hipergeometrică de parametrii $n = 3,\ a = 4,\ b = 6, p = 0,4,\ q = 0,6$.

Distribuţia variabilei aleatoare X este:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ p(0) & p(1) & p(2) & p(3) \end{pmatrix}.$$

cu $p(k) \geq 0,\ k = \overline{0,3}$ şi $\sum\limits_{k=0}^{3} p(k) = 1$, unde $p(k),\ k = \overline{0,3}$ reprezintă probabilităţile evenimentelor ca din cele trei apartamente cumpărate k să fie cu o singură cameră. Aceste probabilităţi sunt calculate cu ajutorul schemei hipergeometrică şi sunt egale cu:

$$p(k) = \frac{C_4^k C_6^{3-k}}{C_{10}^3},\ k = \overline{0,3}.$$

Se obţine $p(0) = \frac{1}{6},\ p(1) = \frac{1}{2},\ p(2) = \frac{3}{10}$ şi $p(3) = \frac{1}{30}$.

Prin urmare distribuţia lui X este:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

X urmând legea hipergeometrică are:

$$M(X) = n \cdot p = 3 \cdot 0,4 = 1,2$$

şi

$$D(X) = n \cdot p \cdot q \frac{a+b-n}{a+b-1} = 3 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot \frac{10-3}{10-1} = 1,2 \cdot 0,6 \cdot \frac{7}{9} = 0,56.$$

Problema 2.5.18. *O variabilă aleatoare X urmează legea binomială cu parametrii $n = 4$ şi $p = \frac{1}{4}$.*

a) *Scrieţi distribuţia variabilei aleatoare X.*

b) *Scrieţi funcţia densitate de probabilitate a variabilei aleatoare normale cu aceiaşi valoare medie şi dispersie ca şi X.*

c) *Calculaţi $P(1 \leq X < 2)$.*

Rezolvare. a) Distribuţia variabilei aleatoare X ce urmează legea binomială este:

$$X : \begin{pmatrix} k \\ C_4^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{4-k} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,4}}$$

b) Valoarea medie şi dispersia pentru variabila aleatoare X sunt:
$M(X) = n \cdot p = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ şi $D(X) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$.
Dacă variabila aleatoare X' urmează legea normală cu funcţia densitate de probabilitate

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

şi având media şi dispersia egale cu cele ale variabilei aleatoare X, atunci: $m = M(X') = M(X) = 1$ şi $\sigma^2 = D(X') = D(X) = \frac{3}{4}$.

Prin urmare $\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Atunci $f(x) = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\, e^{-\frac{2(x-1)^2}{3}}$.

c) $P(1 \leq X < 2) = F(2) - F(1) = \sum\limits_{k=0}^{2} p(k) - \sum\limits_{k=0}^{1} p(k) = p(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0,21.$

Problema 2.5.19. *Variabila aleatoare X urmează legea uniformă având valoarea medie şi dispersia egale cu 4 respectiv $\frac{1}{3}$. Să se scrie funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X.*

Rezolvare. Dacă variabila aleatoare X urmează legea uniformă pe intervalul (a, b) atunci funcţia de repartiţie va fi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

iar valoarea medie şi dispersia se calculează ca $M(X) = \frac{a+b}{2}$, respectiv $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$. Aşadar obţinem sistemul:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 4 \\ \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{cu soluţia } a = 3,\ b = 5.$$

Rezultă că funcţia de repartiţie va fi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3 \\ \frac{x-3}{2}, & 3 < x \leq 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}.$$

2.6 Teme de control

1. O monedă este aruncată de 3 ori şi secvenţa de mărci (M) şi steme (S) ce apare este înregistrată.

   a) Scrieţi spaţiul evenimentelor elementare Ω

   b) Scrieţi următoarele evenimente, folosind evenimentele elementare: A: ”să apară cel puţin 2 steme” B: ”primele 2 aruncări sunt steme” C: ”ultima aruncare este marcă”

   c) Determinaţi următoarele evenimente: $\overline{A}$; $A \cap B$; $A \cup C$.