1 Sintaxa limbajului

Vocabularul limbajului este $V \cup L \cup S$, unde

Limbajele de primul ordin au fost introduse de Frege în 1879. Comparativ cu limbajul calculului cu propoziţii, structura unui limbaj de primul ordin este mult mai complexă şi oferă un cadru suficient pentru reprezentarea unei clase relativ largi de propoziţii dintr-un limbaj natural. În contextul sistemelor bazate pe cunoştinţe, un limbaj de primul ordin este un sistem formal ataşat unui astfel de sistem şi permite proiectarea, analiza şi controlul mecanismelor inferenţiale în gestiunea cunoştinţelor stocate în baza de cunoştinţe a sistemului. Convenţional, sistemul bazat pe cunoştinţe modelat prin intermediul unui anume limbaj de primul ordin, este referit ca interpretare intenţionată pentru acel limbaj. În cadrul acestui capitol sunt prezentate sintaxa şi semantica unui limbaj de primul ordin, reprezentări normalizate pentru formulele limbajului, modele Herbrand şi metode de demonstrare automată bazate pe principiul rezoluţiei.

2 Sintaxa limbajelor de primul ordin

Vocabularul $\overline{\mathcal{V}}$ al unui limbaj de primul ordin conţine două tipuri de simboluri şi anume simbolurile logice şi simbolurile non-logice. Spre deosebire de simbolurile logice, care sunt comune tuturor limbajelor din această clasă, simbolurile non-logice sunt definite în funcţie de interpretarea intenţionată pentru limbajul respectiv. Definirea mulţimilor de simboluri non-logice pentru construirea unui limbaj de primul ordin aferent unui sistem de cunoştinţe dat se numeşte conceptualizare a sistemului.

Simbolurile logice sunt elementele mulţimii $V \cup L \cup S \cup Q$, unde:

V este mulţimea variabilelor; $V \neq \emptyset$.

$L = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\}$ este mulţimea conectivelor logice: conjuncţie, disjuncţie, implicaţie, echivalenţă şi negaţie.

$S = \{(,)\}$ este mulţimea simbolurilor de punctuaţie.

$Q = \{\forall, \exists\}$ este mulţimea cuantificatorilor; simbolul $\forall$ este cuantificatorul universal, respectiv simbolul $\exists$ este cuantificatorul existenţial.

Simbolurile non-logice sunt elementele mulţimii $CS \cup FS \cup PS$ unde:

CS este mulţimea constantelor.

FS este mulţimea simbolurilor functoriale. Fiecare functor $f \in FS$ este caracterizat de un număr natural $r(f) \geq 1$ numit aritatea functorului f.

PS este mulţimea simbolurilor predicaţionale. Fiecare predicat

$\pi \in PS$ este caracterizat de un număr natural $r(\pi) \geq 0$ numit aritatea predicatului π.

Presupunem că mulţimile V, L, S, Q, CS, FS, PS sunt două câte două disjuncte.

Vocabularul limbajului este $\overline{\mathcal{V}} = V \cup L \cup S \cup Q \cup CS \cup FS \cup PS$; elementele mulţimii $A = \overline{\mathcal{V}}^*$ se numesc asamblaje.

Pentru $\alpha \in A$ şi $x \in \overline{\mathcal{V}}$, indicăm prin $\alpha \langle x \rangle$ faptul că simbolul x apare cel puţin o dată printre simbolurile asamblajului α, respectiv prin $\alpha \rangle x \langle$ situaţia contrară.

Într-un limbaj de prim ordin identificăm două mulţimi de structuri simbolice de interes şi anume mulţimea termenilor $TERM$ şi mulţimea formulelor $FORM$.

Definiţia 2.1.1 Secvenţa de asamblaje $t_1, ..., t_n$ este o secvenţă generativă termeni (SGT), dacă pentru orice i, $1 \leq i \leq n$, t_i îndeplineşte una din condiţiile:

ι) $t_i \in V \cup CS$

$\iota\iota$) există $f \in FS$ şi există indicii $j_1, ..., j_{r(f)}$ cu $1 \leq j_p < i$, $p = 1, ..., r(f)$ astfel încât $t_i = f t_{j_1}\ t_{j_2} ...\ t_{j_{r(f)}}$ $f t_1 t_2 \ldots t_{r(f)}$

Definiţia 2.1.2 Numim termen orice asamblaj t cu proprietatea că există $n \geqq 1$ şi $t_1, ..., t_n -\ SGT$, astfel încât $t_n = t$. Mulţimea termenilor este notată $TERM$.

Observaţie Dacă $t_1, ..., t_n$ este SGT, atunci $t_1 \in V \cup CS$ şi $t_i \in TERM$, $i = 1, ..., n$. În particular rezultă $V \cup CS \subset TERM$.

Observaţie Gramatica BNF care generează limbajul teremenilor este:

$$\langle argument \rangle \to x \text{ pentru orice } x \in V$$

$$\langle argument \rangle \to c \text{ pentru orice } c \in CS$$

$$\langle functor \rangle \to f \text{ pentru orice } f \in FS$$

$$\langle lista\_argumente \rangle \to \langle argument \rangle \, \langle lista\_argumente \rangle$$

$$\langle termen \rangle \to \langle argument \rangle \mid \langle functor \rangle \, \langle lista\_argumente \rangle$$

împreună cu regula suplimentară ca numărul de termeni din lista de argumente să fie egal cu aritatea simbolului functorial respectiv.

Reprezentarea convenţională a structurilor simbolice termeni este prin intermediul arborilor de structură.

Definiţia 2.1.3 Arborele T direcţionat, cu rădăcină şi vârfurile etichetate cu simboluri din mulţimea $V \cup CS \cup FS$ este un arbore de structură termen, dacă pentru orice vârf n al arborelui,

ι) dacă $od\,(n) = 0$, atunci $\varphi\,(n) \in V \cup CS$

$\iota\iota$) dacă $od\,(n) \geq 1$, atunci $\varphi\,(n) \in FS$ şi $r\,(\varphi\,(n)) = od\,(n)$

unde $\varphi\,(n)$ este eticheta vârfului n.

Construcţia unui arbore de structură $T\,(t)$ pentru reprezentarea termenului $t \in TERM$ poate fi realizată recursiv astfel:

a) dacă $t \in V \cup CS$, atunci $T\,(t) = (\{r\}, \emptyset)$ şi $\varphi\,(r) = t$

b) dacă $t = ft_1...t_{r(f)}$ pentru anume $f \in FS$ atunci

$$T\,(t) = \left(\{r\} \cup \bigcup_{i=1}^{r(f)} V\,(T_i)\,, \bigcup_{i=1}^{r(f)} E\,(T_i) \cup \left\{ rr_1, ..., rr_{r(f)} \right\} \right),$$

unde $T\,(t_i) = (V\,(T_i)\,, E\,(T_i))\,,\ i = 1, ..., r\,(f)$, r este un vârf nou, $r \notin \bigcup_{i=1}^{r(f)} V\,(T_i)$ şi $\varphi\,(r) = f$.

Exemplul 2.1.1 Simbolurile non-logice ale limbajului de primul ordin al aritmeticii sunt: $CS = \{0\}$, $\boxed{FS} = \{+, *, S\}$, $PS = \left\{ <, \overset{\circ}{=} \right\}$, unde $r\,(+) = r\,(*) = r\,(<) = r\left(\overset{\circ}{=}\right) = 2$, $r\,(S) = 1$. Simbolul S desemnează functorul succesor; pentru orice număr natural n, $\underbrace{SS...S}_{n}0 \triangleq n$.

$S(n) = n+1$

$+(x,y) = x+y$ // $+xy$

Observaţie În acest limbaj, structurile simbolice din mulţimea $TERM$ sunt reprezentări ale expresiilor aritmetice în scriere prefixată.

Fie asamblajul $\boxed{t} = * + *SySSzSSx + xSS0$, unde $x, y, z \in V$.

Secvenţa de asamblaje $t_1 = 0$, $t_2 = x$, $t_3 = y$, $t_4 = z$, $t_5 = Sx = St_2$, $t_6 = Sy = St_3$, $t_7 = Sz = St_4$, $t_8 = SSz = St_7$, $t_9 = SSx = St_5$,

$t_{10} = *SySSz = *t_6t_8$, $t_{11} = + * SySSzSSx = +t_{10}t_9$, $t_{12} = S0$,

$t_{13} = SS0 = St_{12}$, $t_{14} = +xSS0 = +t_2t_{13}$,

$t_{15} = * + *SySSzSSx + xSS0 = *t_{11}t_{14} = \boxed{t}$

este $\boxed{SGT}$, deci $t \in TERM$.

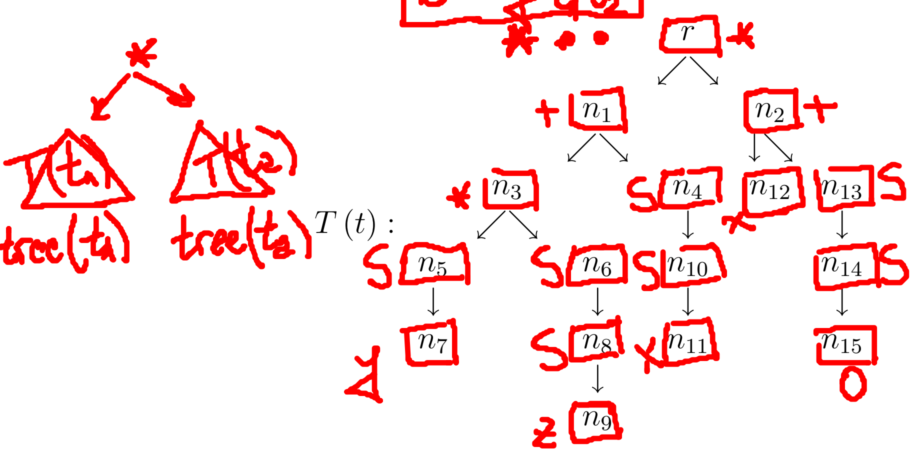
Arborele de structură $T\,(t)$ construit prin aplicarea metodei prezentate

*, +, S $r(*)=2$, $r(+)=2$, $r(S)=1$ $S(x)=x+1$

$t = * * + * S y S S z S S x + x S S 0$ $t \in TERM$

$t = * t_1 t_2$

este:



$\varphi(r) = *$

$\varphi(n_1) = +$, $\varphi(n_2) = +$
$\varphi(n_3) = *$, $\varphi(n_4) = S$
$\varphi(n_{12}) = x$, $\varphi(n_{13}) = S$

$\varphi(n_5) = S$, $\varphi(n_6) = S$
$\varphi(n_{10}) = S$, $\varphi(n_{14}) = S$
$\varphi(n_7) = y$, $\varphi(n_8) = S$
$\varphi(n_{11}) = x$, $\varphi(n_{15}) = 0$
$\varphi(n_9) = z$

Simboluri nonlogice: CS, FS, PS

Definiţia 2.1.4 Mulţimea atomilor notată *ATOM* este

$$ATOM = \{\pi \mid \pi \in PS, r(\pi) = 0\} \cup$$
$$\cup \left\{\pi t_1 ... t_{r(\pi)} \mid \pi \in PS, r(\pi) \geq 1,\ t_1, ..., t_{r(\pi)} \in TERM\right\}.$$

Atom: $\pi t_1 t_2 ... t_{r(\pi)}$ termeni

Observaţie Limbajul atomilor este generat de gramatica BNF,

$\langle simbol\_predicational \rangle \rightarrow \pi$ pentru orice π
$\langle lista\_termeni \rangle \rightarrow \langle termen \rangle \mid \langle lista\_termeni \rangle$
$\langle atom \rangle \rightarrow \langle simbol\_predicational \rangle \mid$
$\mid \langle simbol\_predicational \rangle\ \langle lista\_termeni \rangle$

term → TERM → ATOM → FORM

$r(\pi)$ = nr. de argumente al simb. pred. π

împreună cu regula suplimentară ca numărul argumentelor din lista de termeni să fie egal cu aritatea simbolului predicaţional respectiv.

Reprezentarea convenţională a atomilor este prin intermediul arborilor de structură. Pentru $\pi \in PS, r(\pi) = 0$ arborele de structură este $T(\pi) = (\{r\}, \emptyset)$, $\varphi(r) = \pi$. Pentru $\pi \in PS, r(\pi) \geq 1$ şi $t_1, ..., t_{r(\pi)} \in TERM$, arborele de structură corespunzător atomului $\alpha = \pi t_1 ... t_{r(\pi)}$ este

$$T(\alpha) = \left(\{n\} \cup \bigcup_{i=1}^{r(\pi)} V(t_i), \underbrace{\bigcup_{i=1}^{r(\pi)} E(t_i) \cup \{nn_1, ..., nn_{r(\pi)}\}}_{E}\right)$$

unde $T(t_i) = (V(t_i), E(t_i))$ este arborele de structură corespunzător termenului t_i, $i = 1, ..., r(\pi)$ şi $n \notin \bigcup_{i=1}^{r(\pi)} V(t_i)$.

$T(t_i)$ subarborele asociat argumentului t_i, $i=1..r(\pi)$

Definiţia 2.1.5 Secvenţa de asamblaje $\alpha_1, ..., \alpha_n$ este o secvenţă generativă formule (*SGF*), dacă pentru orice i, $1 \leq i \leq n$, α_i îndeplineşte una din condiţiile:

Exemplu: Fie atomul $\alpha = < + Sx * xy * y SSx$

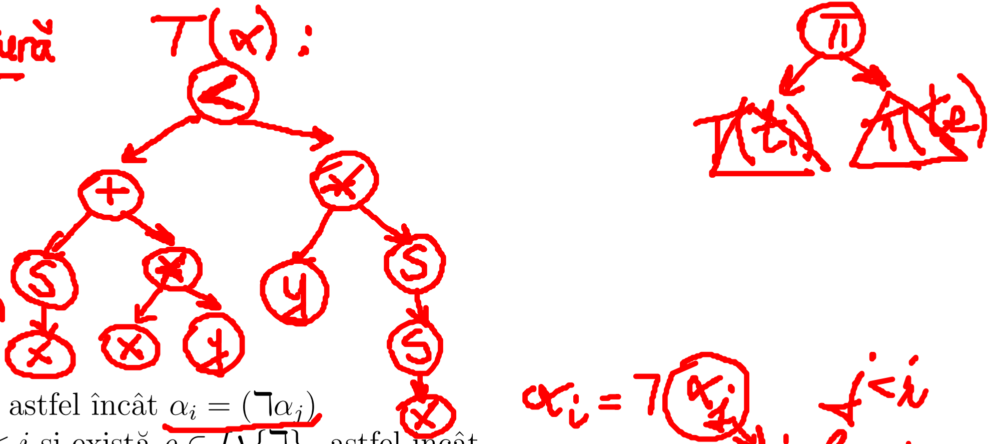
$\alpha = \pi t_1 t_2$, $r(\pi) = 2$, $\pi \in PS$

$PS = \{<, \stackrel{?}{=}\}$

$< xy \Leftrightarrow x < y$, $r(<) = 2$
$\stackrel{?}{=} xy \Leftrightarrow x \stackrel{?}{=} y$, $r(\stackrel{?}{=}) = 2$

Arborele de structură

$T(\alpha)$:



$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$\pi\, t_1 \dots t_{\pi(n)}$

$\alpha_i = \neg(\alpha_j)$ $\quad j<i$ inclus în SGF

$\alpha_i = \alpha_j \rho \alpha_k$

$\imath$) $\alpha_i \in ATOM$

$\imath\imath$) există $1 \leq j < i$, astfel încât $\alpha_i = (\neg \alpha_j)$

$\imath\imath\imath$) există $1 \leq j, k < i$ şi există $\rho \in L \setminus \{\neg\}$, astfel încât $\alpha_i = (\alpha_j \rho \alpha_k)$

$\imath\nu$) există $1 \leq j < i$ şi există $x \in V$, astfel încât $\alpha_i = \forall x \alpha_j$

ν) există $1 \leq j < i$ şi există $x \in V$, astfel încât $\alpha_i = \exists x \alpha_j$

Definiţia 2.1.6 Numim formulă orice asamblaj α cu proprietatea că există $n \geqq 1$ şi $\alpha_1, ..., \alpha_n$ − SGF $\alpha_n = \alpha$. Mulţimea formulelor este notată $FORM$.

Observaţie Limbajul formulelor este generat de gramatica

$$\begin{aligned}
&\langle conectiva \rangle \to \wedge | \vee | \to | \leftrightarrow \\
&\langle cuantificator \rangle \to \forall | \exists \\
&\langle formula \rangle \to \langle atom \rangle \,|\, (\neg \langle formula \rangle) \,| \\
&\qquad\qquad | \, (\langle formula \rangle \, \langle conectiva \rangle \, \langle formula \rangle) \,| \\
&\qquad\qquad\quad | \, \langle cuantificator \rangle \, \langle formula \rangle \, .
\end{aligned}$$

Observaţie Din *Definiţia* 2.1.5 rezultă $ATOM \subset FORM$ şi dacă $\alpha \in ATOM$, atunci $(\neg\alpha) \in FORM$. Convenim să numim literal orice structură simbolică din mulţimea $ATOM \cup \neg ATOM$.

Exemplul 2.1.2 Reprezentarea simbolică în limbajul de prim ordin al aritmeticii a afirmaţiei "Pentru orice x număr natural, are loc egalitatea $(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$" este,

$$\alpha = \forall x \stackrel{\circ}{=} * + xS0 + xSS0 + + + * xx * SSS0xSS0$$

Într-adevăr, deoarece numerele naturale $1, 2, 3$ sunt reprezentate respectiv prin $S0, SS0, SSS0$, rezultă că termenii $* + xS0 + xSS0$, $+ + + * xx * SSS0xSS0$ reprezintă expresiile aritmetice $(x + 1)(x + 2)$, respectiv $x^2 + 3x + 2$.

Structura simbolică α este o formulă, deoarece secvenţa

$$\underbrace{\stackrel{\circ}{=} * + xS0 + xSS0 + + + *xx * SSS0xSS0, \ \forall x\pi = \alpha}_{\pi}$$

$\alpha \in FORM$?

SGF

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = \alpha$

$\alpha = \forall x \stackrel{\circ}{=} t_1 t_2 \in ATOM$

SGF: $\stackrel{\circ}{=} t_1 t_2$, $\forall x \stackrel{\circ}{=} t_1 t_2$ $\Rightarrow \alpha \in FORM$

este SGF.

Exemplul 2.1.3 Reprezentarea simbolică în limbajul de primul ordin al aritmeticii a afirmaţiei "Pentru orice numere naturale x, y, dacă $x < y$ atunci există z număr natural astfel încât $x+z = y$", este $\alpha = \forall x \forall y \left(< xy \to \exists z \stackrel{\circ}{=} +xzy \right)$.

Secvenţa de asamblaje

SGF

$$< xy, \stackrel{\circ}{=} +xzy, \exists z \stackrel{\circ}{=} +xzy, \qquad \left(< xy \to \exists z \stackrel{\circ}{=} +xzy \right),$$

$$\forall y \left(< xy \to \exists z \stackrel{\circ}{=} +xzy \right), \qquad \forall x \forall y \left(< xy \to \exists z \stackrel{\circ}{=} +xzy \right) = \alpha$$

$\alpha_j \rho \alpha_k$, $\rho = \to$

maxim(A, B, Max)

este SGF, deci $\alpha \in FORM$.

Convenim să numim expresie orice structură simbolică din mulţimea $TERM \cup FORM$.Variabilele care apar în expresiile unui limbaj de prim ordin pot fi libere sau legate.

Pentru orice expresie α , notăm cu $FV(\alpha)$ mulţimea variabilelor libere din α, respectiv cu $BV(\alpha)$ mulţimea variabilelor legate. Mulţimile FV, BV se calculează recursiv în modul următor.

1) Pentru $t \in TERM$,

* $t = f t_1 t_2 \ldots t_{r(f)}$, $r(f)$ = aritatea lui f, $f \in FS$; $t \in V \cup CS$

$$FV(t) = \begin{cases} \{t\} & \text{dacă } t \in V \\ \emptyset & \text{dacă } t \in CS \\ \bigcup_{i=1}^{r(f)} FV(t_i) & \text{dacă } t = f t_1 \ldots t_{r(f)},\ f \in FS \end{cases}$$

$FV(t_i)$, $i = 1..r(f)$

$$BV(t) = \begin{cases} \emptyset & \text{dacă } t \in CS \cup V \\ \bigcup_{i=1}^{r(f)} BV(t_i) & \text{dacă } t = f t_1 \ldots t_{r(f)},\ f \in FS \end{cases}$$

(Obs: $BV(t) = \emptyset$)

2) Pentru $\boxed{\alpha \in FORM,}$

SGF α

* $\alpha \in ATOM$, $\pi t_1 t_2 \ldots t_{r(\pi)}$, $\pi \in PS$

* $\alpha = \neg\beta$

* $\alpha = \beta \rho \psi$, $\rho \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

* $\alpha = \forall x \beta$

* $\alpha = \exists x \beta$

($\alpha \in ATOM$, $r(\pi) = 0$)

$$\boxed{FV(\alpha)} = \begin{cases} \emptyset & \text{dacă } \alpha \in PS,\ r(\alpha) = 0 \\ \bigcup_{i=1}^{r(\pi)} FV(t_i) & \text{dacă } \alpha = \pi t_1 \ldots t_{r(\pi)},\ \pi \in PS,\ r(\pi) \geq 1 \\ FV(\beta) & \text{dacă } \alpha = (\neg\beta) \\ FV(\beta) \cup FV(\gamma) & \text{dacă } \alpha = (\beta\rho\gamma),\ \rho \in L \setminus \{\neg\} \\ FV(\beta) \setminus \{x\} & \text{dacă } \alpha = \forall x\beta \text{ sau } \alpha = \exists x\beta,\ x \in V \end{cases}$$

($\alpha \in ATOM$ $r(\pi) \geq 1$

($\alpha = \beta \wedge \psi$, $\alpha = \beta \rightarrow \psi$, $\alpha = \beta \vee \psi$, $\alpha = \beta \leftrightarrow \psi$)

$$BV(\alpha) = \begin{cases} \emptyset & \text{dacă } \alpha \in PS,\ r(\alpha) = 0 \\ \emptyset & \text{dacă } \alpha = \pi t_1 \ldots t_{r(f)},\ \pi \in PS,\ r(\pi) \geq 1 \\ BV(\beta) & \text{dacă } \alpha = (\neg\beta) \\ BV(\beta) \cup BV(\gamma) & \text{dacă } \alpha = (\beta\rho\gamma),\ \rho \in L \setminus \{\neg\} \\ BV(\beta) \cup \{x\} & \text{dacă } \alpha = \forall x\beta \text{ sau } \alpha = \exists x\beta,\ x \in V. \end{cases}$$

} $\alpha \in ATOM$

Observaţie Din construcţie rezultă că pentru orice $t \in TERM \cup ATOM$, $BV(t) = \emptyset$. De asemenea, 'legarea' unei variabile revine la prezenţa în structura simbolică respectivă a unei cuantificări, existenţiale sau universale, relativ la acea variabilă.

Exemplul 2.1.4 Pentru $t = * + * SySSzSSx + xSS0$ considerat în *Exemplul*

$t = * + * SySSzSSx + xSS0$

$r(*) = 2$, $r(+) = 2$, $r(S) = 1$

$[(y+1)(z+2)+(x+2)] \cdot [x+2] = t$

2.1.1 rezultă

$$
\begin{aligned}
BV(t) &= \emptyset, \\
FV(t) &= FV(+ * SySSzSSx) \cup FV(+xSS0) = \\
&= FV(*SySSz) \cup FV(SSx) \cup FV(x) \cup FV(SS0) = \\
&= FV(Sy) \cup FV(SSz) \cup FV(Sx) \cup \{x\} \cup FV(S0) = \\
&= \{y\} \cup FV(Sz) \cup \{x\} \cup \{x\} \cup FV(0) = \\
&= \{y\} \cup \{z\} \cup \{x\} \cup \emptyset = \{x, y, z\}.
\end{aligned}
$$

REFORM

Pentru formula $\alpha = \forall x \forall y \left(< xy \rightarrow \exists z \mathrel{\mathring{=}} +xzy\right)$ din *Exemplul* 2.1.3, obţinem

($\forall x \forall y$ dacă $x<y$ atunci $\exists z$ a.î. $x+z=y$)

$$
\begin{aligned}
\boxed{FV(\alpha)} &= FV\left(\forall y \left(< xy \rightarrow \exists z \mathrel{\mathring{=}} +xzy\right)\right) \setminus \{x\} = \\
&= FV\left(\left(< xy \rightarrow \exists z \mathrel{\mathring{=}} +xzy\right)\right) \setminus \{x, y\} = \\
&= \left(FV(< xy) \cup FV\left(\exists z \mathrel{\mathring{=}} +xzy\right)\right) \setminus \{x, y\} = \\
&= \left(FV(x) \cup FV(y) \cup \left(FV\left(\mathrel{\mathring{=}} +xzy\right) \setminus \{z\}\right)\right) \setminus \{x, y\} = \\
&= (\{x\} \cup \{y\} \cup ((FV(+xz) \cup FV(y)) \setminus \{z\})) \setminus \{x, y\} = \\
&= (\{x, y\} \cup ((FV(x) \cup FV(z) \cup FV(y)) \setminus \{z\})) \setminus \{x, y\} = \\
&= (\{x, y\} \cup ((\{x\} \cup \{z\} \cup \{y\}) \setminus \{z\})) \setminus \{x, y\} = \\
&= (\{x, y\} \cup \{x, y\}) \setminus \{x, y\} = \emptyset.
\end{aligned}
$$

$\{x,y\} \setminus \{x,y\} = \emptyset$.

$\alpha = \forall x \forall y \beta$: $FV(\beta) \setminus \{x\}$

$\alpha = \forall y \beta'$: $FV(\beta') \setminus \{y\}$

$\beta' = \delta \rightarrow \psi$

$<xy \in ATOM$: $FV(x) \cup FV(y)$

$\psi = \exists z \psi'$: $FV(\psi') \setminus \{z\}$

$\alpha = \forall x \forall y \left(<xy \rightarrow \exists z \mathrel{\mathring{=}} +xzy\right)$

$\forall x$: $BV(\beta) \cup \{x\}$

$$
\begin{aligned}
BV(\alpha) &= BV\left(\forall y \left(< xy \rightarrow \exists z \mathrel{\mathring{=}} +xzy\right)\right) \cup \{x\} = \\
&= BV\left(\left(< xy \rightarrow \exists z \mathrel{\mathring{=}} +xzy\right)\right) \cup \{x, y\} = \\
&= \left(BV(< xy) \cup BV\left(\exists z \mathrel{\mathring{=}} +xzy\right)\right) \cup \{x, y\} = \\
&= \left(\emptyset \cup \left(BV\left(\mathrel{\mathring{=}} +xzy\right) \cup \{z\}\right)\right) \cup \{x, y\} = \\
&= BV\left(\mathrel{\mathring{=}} +xzy\right) \cup \{z\} \cup \{x, y\} = \\
&= \emptyset \cup \{x, y, z\} = \{x, y, z\}.
\end{aligned}
$$

$\beta = \forall y \beta'$: $BV(\beta') \cup \{y\}$

$\beta' = \delta \rightarrow \psi$: $BV(\delta) \cup BV(\psi)$

$\delta = \pi xy \in ATOM \Rightarrow \emptyset$

$\psi = \exists z \psi'$: $BV(\psi') \cup \{z\}$

$\psi' = \pi t_1 t_2 \in ATOM$: $\emptyset$

Observaţie În general se doreşte ca pentru orice formulă α, să nu existe cuantificări multiple asupra aceleiaşi variabile şi

$FV(\alpha) \cap BV(\alpha) = \emptyset$.

Regulile de bună formare pentru structurile simbolice din *FORM*

(*Definiţia* 2.1.5) permit însă generarea de formule α, astfel încât $FV(\alpha) \cap BV(\alpha) \neq \emptyset$ respectiv formule cu cuantificări multiple asupra aceleiaşi variabile.

De exemplu, în limbajul de primul ordin al aritmeticii, secvenţa $< xy$,
$< +xyz, \exists y < +xyz, \forall x \exists y < +xyz, (< xy \to \forall x \exists y < +xyz)$,
$\forall x (< xy \to \forall x \exists y < +xyz) = \alpha$
este SGF, deci $\alpha \in FORM$.

$$\begin{aligned} FV(\alpha) &= FV((< xy \to \forall x \exists y < +xyz)) \setminus \{x\} = \\ &= (FV(< xy) \cup FV(\forall x \exists y < +xyz)) \setminus \{x\} = \\ &= (\{x, y\} \cup (FV(\exists y < +xyz) \setminus \{x\})) \setminus \{x\} = \\ &= (\{x, y\} \cup (FV(< +xyz) \setminus \{x, y\})) \setminus \{x\} = \\ &= (\{x, y\} \cup (\{x, y, z\} \setminus \{x, y\})) \setminus \{x\} = \{y, z\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BV(\alpha) &= BV((< xy \to \forall x \exists y < +xyz)) \cup \{x\} = \\ &= (BV(< xy) \cup BV(\forall x \exists y < +xyz)) \cup \{x\} = \\ &= (BV(\exists y < +xyz) \cup \{x\}) \cup \{x\} = \\ &= ((BV(< +xyz) \cup \{x, y\})) \cup \{x\} = \{x, y\}, \end{aligned}$$

deci $FV(\alpha) \cap BV(\alpha) \neq \emptyset$.

Definiţia 2.1.7 Dacă $\alpha = \forall x \beta \in FORM$, atunci formula β este domeniul variabilei x.

Analog, dacă $\alpha = \exists x \beta$, atunci domeniul variabilei x este β.

De exemplu, în formula $\alpha = \forall x (< xy \to \forall x \exists y < +xyz)$, domeniul primei cuantificări asupra variabilei x este $(< xy \to \forall x \exists y < +xyz)$ respectiv domeniul celei de a doua cuantificări asupra aceleiaşi variabile este formula $\exists y < +xyz$.

În scopul evitării cuantificărilor multiple asupra aceleiaşi variabile în formula α şi pentru asigurarea condiţiei $FV(\alpha) \cap BV(\alpha) = \emptyset$, ocurenţele în α ale fiecărui simbol $x \in BV(\alpha)$ sunt substituite printr-un simbol nou de variabilă (care nu apare în α) cu excepţia subexpresiei domeniu al variabilei respective.

De exemplu, pentru $\alpha = \forall x (< xy \to \forall x \exists y < +xyz)$, domeniul celei de a doua cuantificări asupra variabilei x este $\exists y < +xyz$, deci ocurenţele variabilei x în exteriorul domeniului ei vor fi substituite cu $u \in V$; rezultă $\forall u (< uy \to \forall x \exists y < +xyz)$.

De asemenea, ocurenţele variabilei y în exteriorul domeniului ei vor fi substituite cu $p \in V$. Obţinem $\alpha' = \forall u (< up \to \forall x \exists y < +xyz)$ şi $FV(\alpha') = \{p, z\}$, $BV(\alpha') = \{x, y, u\}$. Cu toate că prin aplicarea acestei transformări structura simbolică reprezentând o formulă se modifică, aşa după cum va rezulta în secţiunea următoare, formula iniţială şi formula rezultată sunt echivalente din punct de vedere semantic.

α

Definiţia 2.1.8 Spunem că formula α este închisă, dacă $FV(\alpha) = \emptyset$. Mulţimea formulelor închise este notată $FORM_0$.

Dacă $\alpha \in FORM \setminus FORM_0$ şi $FV(\alpha) = \{x_1, ...x_n\}$, formulele închise $\boxed{\overline{\alpha}} = \forall x_1...\forall x_n \alpha$, $\boxed{\underline{\alpha}} = \exists x_1...\exists x_n \alpha$ se numesc închidere universală, respectiv existenţială ataşată formulei α. $x_i \in V$, $i=\overline{1,n}$

Definiţia 2.1.9 Se numeşte substituţie o mulţime de perechi $\boxed{\theta} = \{t_1 \mid x_1, ..., t_n \mid x_n\}$, unde $t_i \in TERM$, $x_i \in V$, $x_i \neq x_j$, $x_i \neq t_i$ pentru orice $1 \leq i \neq j \leq n$. $t_i \mid x_i$ t_i - termen substituent $x_i \in V$ variabila substituita

Termenii $t_1, ..., t_n$ se numesc termeni substituenţi pentru variabilele substituite $x_1, ..., x_n$. Substituţia θ este o substituţie de bază, dacă în structurile simbolice corespunzătoare termenilor substituenţi nu apar simboluri de variabile.

Substituţia vidă, notată ε, corespunde mulţimii vide. Spunem că θ este substituţie proprie, dacă nici o variabilă substituită nu are ocurenţe în termenul substituent pereche.

Mulţimea substituţiilor este notată $SUBST$.

Definiţia 2.1.10 Fie $t \in TERM$, $\theta \in SUBST$. Rezultatul aplicării substituţiei θ termenului t, notat $t\theta$, este definit prin:

$$t\theta = \begin{cases} t \ , \quad \text{dacă } \theta = \varepsilon \text{ sau } t \in CS \text{ sau } t \in V \setminus \{x_1, ..., x_n\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \theta = \{t_1 \mid x_1, ..., t_n \mid x_n\} \\ t_i \ , \quad \text{dacă } t = x_i \in \{x_1, ..., x_n\} \\ ft_1\theta...t_{r(f)}\theta \ , \quad \text{dacă } t = ft_1...t_{r(f)}. \end{cases}$$

Observaţie Din *Definiţia* 2.1.10 rezultă imediat că pentru orice $t \in TERM$, $\theta \in SUBST$, $t\theta \in TERM$.

Exemplul 2.1.5 Pentru termenul $t = * + *SySSzSSx + xSS0$ în limbajul de primul ordin al aritmeticii şi $\theta = \{S0 \mid x, +xy \mid y, *yz \mid z\}$, obţinem,

$$\begin{aligned} t\theta &= *t_1\theta t_2\theta, \quad \text{unde } t_1 = + * SySSzSSx, \ t_2 = +xSS0 \\ t_1\theta &= +t_3\theta t_4\theta, \quad \text{unde } t_3 = *SySSz, \ t_4 = SSx \\ t_3\theta &= *t_5\theta t_6\theta, \quad \text{unde } t_5 = Sy, \ t_6 = SSz. \end{aligned}$$

Deoarece $t_5\theta = Sy\theta = S + xy$ si $t_6\theta = SSz\theta = SS * yz$, $t_4\theta = SSx\theta = SSS0$, rezultă în continuare $t_1\theta = + * S + xySS * yzSSS0$.

De asemenea, $t_2\theta = +x\theta SS0\theta = +S0SS0$, deci obţinem în final

$$t\theta = * + *S + xySS * yzSSS0 + S0SS0.$$

Observaţie Fie $t \in TERM$, $\theta \in SUBST$. Arborele de structură $T(t\theta)$ rezultă prin aplicarea arborelui de structură $T(t)$ a transformării constând în substituirea vârfurilor terminale ale căror etichete sunt variabile substituite de θ, prin arborii de structură corespunzători termenilor asociaţi în substituţia θ. Cu alte cuvinte termenul $t\theta$ rezultă prin substituirea în structura simbolică t a fiecărei variabile substituite de θ prin termenul pereche corespunzător.

Fie $t = * + *SySSzSSx + xSS0$ şi $\theta = \{S0 \mid x, +xy \mid y, *yz \mid z\}$ ($Exemplul$ 2.1.5).

Arborii de structură corespunzători termenilor t, $S0, +xy, *yz$ sunt

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & * & & \\
 & & & & \swarrow\searrow & & \\
 & & & + & & + & \\
 & & & \swarrow\searrow & & \downarrow\searrow & \\
 & & * & & S & x & S \\
T(t): & & \swarrow\searrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & S & & S & S & & S \\
 & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & y & & S & x & & 0 \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & z & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & S & & & + & \\
T(S0): & \downarrow & T(+xy): & & \swarrow\searrow & \\
 & 0 & & x & & y
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
 & & * & \\
T(*yz): & & \swarrow\searrow & \\
 & y & & z
\end{array}
$$

Prin substituirea în $T(t)$ a vârfurilor terminale cu etichete simboluri de variabile substituite de θ, prin arborii de structură corespunzători termenilor asociaţi, rezultă arborele

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & * & & \\
 & & & & & \swarrow\searrow & & \\
 & & & & + & & + & \\
 & & & & \swarrow\searrow & & \downarrow\searrow & \\
 & & & * & & S & S & S \\
 & & & \swarrow\searrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
T: & & S & & S & S & 0 & S \\
 & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & + & & S & S & & 0 \\
 & & \swarrow\searrow & & \downarrow & \downarrow & & \\
 & x & & y & * & 0 & & \\
 & & & & \swarrow\searrow & & & \\
 & & & y & & z & &
\end{array}$$

Evident, $T = T(t\theta)$.

Definiţia 2.1.11 Fie $\alpha \in ATOM$, $\theta \in SUBST$. Rezultatul aplicării substituţiei θ atomului α, notat $\alpha\theta$, este definit prin:

$$\alpha\theta = \begin{cases} \alpha\ , & \text{dacă } \alpha \in PS \text{şi } r(\alpha) = 0\ , \\ \pi t_1\theta ... t_{r(f)}\theta\ , & \text{dacă } \alpha = \pi t_1 ... t_{r(\pi)}. \end{cases}$$

Evident, $\alpha\theta \in ATOM$.

Definiţia 2.1.12 Fie $\alpha \in FORM \setminus ATOM$, $\theta \in SUBST$. Rezultatul aplicării substituţiei θ atomului α, notat $\alpha\theta$, este definit prin:

ι) dacă $\theta = \varepsilon$, atunci $\alpha\theta = \alpha$

$\iota\iota$) dacă $\theta = \{t_1 \mid x_1, ..., t_n \mid x_n\}$, atunci

$$\alpha\theta = \begin{cases} (\urcorner\beta\theta)\ , & \text{dacă } \alpha = (\urcorner\beta)\ , \\ (\beta\theta\rho\gamma\theta)\ , & \text{dacă } \alpha = (\beta\theta\rho\gamma\theta)\ ,\ \rho \in L \setminus \{\urcorner\}\ , \\ \forall x\beta\theta, & \text{dacă } \alpha = \forall x\beta \text{şi } x \notin \{x_1, ..., x_n\}\ , \\ \exists x\beta\theta, & \text{dacă } \alpha = \exists x\beta \text{şi } x \notin \{x_1, ..., x_n\}\ , \\ \alpha\theta', & \text{dacă } \alpha = \exists x\beta \text{ sau } \alpha = \forall x\beta \text{ şi} \\ & \qquad x = x_i \in \{x_1, ..., x_n\}\ ,\ \theta' = \theta \setminus \{t_i \mid x_i\}\ . \end{cases}$$

Evident, pentru orice $\alpha \in FORM$ şi $\theta \in SUBST$, $\alpha\theta \in FORM$.

Observaţie Din *Definiţiile* 2.1.10, 2.1.11, 2.1.12 rezultă că dacă

$\alpha \in FORM \cup TERM$, $\theta \in SUBST$, atunci $\alpha\theta$ rezultă prin substituirea variabilelor libere din α prin termenii pereche corespunzători în substituţia θ. În particular, dacă $\alpha \in FORM_0$, atunci $\alpha\theta = \alpha$ pentru orice $\theta \in SUBST$.

Exemplul 2.1.6 Fie formulele

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (\exists y \mathrel{\mathring{=}} +xyz \rightarrow < xz)\,, \quad \alpha_2 = \exists y\, (\mathrel{\mathring{=}} +xyz \rightarrow < xz)\,, \\ \alpha_3 &= (\mathrel{\mathring{=}} +xyz \rightarrow < xz)\,, \quad \alpha_4 = \forall x \forall z\, (\mathrel{\mathring{=}} +xyz \rightarrow \exists y < xz)\end{aligned}$$

în limbajul de primul ordin al aritmeticii şi

$$\theta = \{+S0z \mid x, *zz \mid y,\ SS0 \mid z\ \}\,.$$

Rezultă

$$\begin{aligned}FV\,(\alpha_1) &= FV\,(\alpha_2) = \{x, z\}\,, \\ FV\,(\alpha_3) &= \{x, y, z\}\,, \quad FV\,(\alpha_4) = \emptyset, \\ \alpha_1\theta &= (\exists y \mathrel{\mathring{=}} + + S0zySS0 \rightarrow < +S0zSS0)\,, \\ \alpha_2\theta &= \exists y\, (\mathrel{\mathring{=}} + + S0zySS0 \rightarrow < +S0zSS0)\,, \\ \alpha_3\theta &= (\mathrel{\mathring{=}} + + S0z * zzSS0 \rightarrow < +S0zSS0)\,, \\ \alpha_4\theta &= \alpha_4.\end{aligned}$$

Definiţia 2.1.13 Fie λ, $\theta \in SUBST$. Compunerea substituţiilor λ, θ, notată $\lambda\cdot\,\theta$ este definită prin

ι) dacă $\theta = \varepsilon$, atunci $\lambda\cdot\,\theta = \lambda$,

$\iota\iota$) dacă $\lambda = \varepsilon$, atunci $\lambda\cdot\,\theta = \theta$,

$\iota\iota\iota$) dacă $\theta \neq \varepsilon$ şi $\lambda \neq \varepsilon$, atunci $\lambda\cdot\,\theta$ rezultă din mulţimea

$$\{t_1\theta \mid x_1, ..., t_n\theta \mid x_n, s_1 \mid y_1, ..., s_m \mid y_m\}$$

prin eliminarea perechilor $t_i\theta \mid x_i$ pentru care $t_i\theta = x_i$ şi a perechilor $s_j \mid y_j$ pentru care $y_j \in \{x_1, ..., x_n\}$, unde $\lambda = \{t_1 \mid x_1, ..., t_n \mid x_n\}$, $\theta = \{s_1 \mid y_1, ..., s_m \mid y_m\}$.

Exemplul 2.1.7 Fie $\lambda = \{+SySz \mid x,\ x \mid y\}$, $\theta = \{y \mid x,\ x \mid z\}$.

Din mulţimea

$$\{+Sy\theta Sz\theta \mid x,\ x\theta \mid y, y \mid x,\ x \mid z\} = \{+SySx \mid x,\ y \mid y, y \mid x,\ x \mid z\}$$

prin eliminarea perechilor $y \mid y$, $y \mid x$ rezultă

$$\lambda \cdot \theta = \{+SySx \mid x,\ x \mid z\}\,.$$

Din mulţimea

$$\begin{aligned}&\{y\lambda \mid x,\ x\lambda \mid z, +SySz \mid x,\ x \mid y\} = \\ &\qquad = \{x \mid x,\ +SySz \mid z, +SySz \mid x,\ x \mid y\}\end{aligned}$$

prin eliminarea perechilor $x \mid x$ şi $+SySz \mid x$, rezultă

$$\theta \cdot \lambda = \{+SySz \mid z,\ x \mid y\}.$$

Observaţie Operaţia de compunere a substituţiilor nu este comutativă. Pentru orice λ, θ, η substituţii proprii $\lambda \cdot (\theta \cdot \eta) = (\lambda \cdot \theta) \cdot \eta$.

Dacă $E \in TERM \cup ATOM$, atunci $E(\lambda \cdot \theta) = (E\lambda)\,\theta$.

Definiţia 2.1.14 Fie $E = \{E_1, ..., E_n\} \subset TERM \cup ATOM$.

Substituţia θ este substituţie unificator pentru E dacă, $E_i\theta = E_j\theta$, $1 \leq i, j \leq n$. Mulţimea E este unificabilă, dacă există substituţie unificator pentru E. Dacă θ este substituţie unificator pentru E, spunem că $E\theta = \{E_1\theta\}$ este singleton.

Exemplul 2.1.8 Fie $E = \{fgxhfab,\ fyhz\}$ unde $f, g, h \in FS$, $r(f) = 2$, $r(g) = r(h) = 1$, $x, y, z \in V$, $a, b \in CS$. Pentru $\theta = \{gx \mid y,\ fab \mid z\}$ obţinem $fgxhfab\theta = fyhz\theta = fgxhfab$ deci θ este substituţie unificator pentru E.

Definiţia 2.1.15 Fie E mulţime unificabilă. Substituţia unificator σ este un cel mai general unificator pentru E, dacă pentru orice substituţie unificator θ există $\lambda \in SUBST$, astfel încât $\theta = \sigma \cdot \lambda$. Substituţia cel mai general unificator este referită prin termenul de mgu (**m**ost **g**eneral **u**nifier) pentru mulţimea dată.

Definiţia 2.1.16 Dezacordul $D(E)$ al mulţimii

$E = \{E_1, ..., E_n\} \subset TERM \cup ATOM$ este mulţimea rezultată prin reţinerea câte unei subexpresii din fiecare expresie din E începând cu prima poziţie în ordinea de la stânga la dreapta în care cel puţin două expresii diferă.

Observaţie Arborii de structură corespunzători elementelor din $D(E)$ sunt subarborii arborilor de structură ai expresiilor din E având rădăcinile primele vârfuri (în traversarea top-down şi left-to-right) cu etichete distincte.

Exemplul 2.1.9 Fie $E_1 = fgxgxyhby, E_2 = fgxzaha,\ E_3 = fgxhabz$, unde $f, g, h \in FS$, $r(f) = 3$, $r(g) = 2$, $r(h) = 1$, $x, y, z \in V$, $a, b \in CS$. Dezacordul mulţimii $E = \{E_1, E_2,\ E_3\}$ este

$D(E) = \{gxy,\ z,\ ha\}$.

Arborii de structură corespunzători termenilor E_1, E_2, E_3 sunt:

$$T(E_1): \quad \begin{array}{ccccc} & & & f & \\ & & \swarrow & \downarrow & \searrow \\ & g & & h & y \\ & \swarrow\downarrow & & \downarrow & \\ x & \mathbf{g} & & b & \\ & \swarrow\ \searrow & & & \\ \mathbf{x} & & & \mathbf{y} & \end{array}$$

$$T(E_2): \quad \begin{array}{ccccc} & & & f & \\ & & & \swarrow\downarrow\searrow & \\ & & g & a & h \\ & & \swarrow\downarrow & & \downarrow \\ & x & \mathbf{z} & & a \end{array}$$

$$T(E_3): \quad \begin{array}{ccccc} & & & f & \\ & & & \swarrow\downarrow\searrow & \\ & & g & h & z \\ & & \swarrow\downarrow & \downarrow & \\ & x & \mathbf{h} & b & \\ & & \downarrow & & \\ & & \mathbf{a} & & \end{array}$$

Arborii de structură corespunzători termenilor din mulţimea $D(E)$ sunt

$$T(gxy): \begin{array}{ccc} & \mathbf{g} & \\ & \swarrow\ \searrow & \\ \mathbf{x} & & \mathbf{y} \end{array} \qquad T(z): \ z \qquad T(z): \begin{array}{c} \mathbf{h} \\ \downarrow \\ \mathbf{a} \end{array}.$$

Verificarea proprietăţii că o mulţime $E \subset TERM \cup ATOM$ este unificabilă/neunificabilă şi calculul unui mgu în cazul în care E este unificabilă pot fi realizate pe baza procedurii de unificare Robinson.

```
procedure UnificareRobinson(E : MultimeExpresii);
W_0 ← E; σ_0 ← ε; k ← 0; gata ← false;
repeat
    if (W_k este singleton) then
            write ('E este unificabilă', σ_k , 'mgu pentru E' );
                gata ← true
            else
                calculează (W_k, D_k);
                if există (x, t, D_k) then
                        alege (x_k, t_k, D_k);
                        W_{k+1} ← W_k {t_k | x_k};
                        σ_{k+1} ← σ_k · {t_k | x_k};
                        k ← k + 1
                    else
                        write ('E nu este unificabilă');
                        gata ← true
                endif
    endif
until gata
```

end;

Apelurile de proceduri iniţiate de procedura $UnificareRobinson$ determină următoarele acţiuni:

calculează (W, D): calculează D dezacordul mulţimii W,

există (x, t, D) : returnează *true*, dacă şi numai dacă există $x \in V \cap D$ şi există $t \in TERM \cap D$, astfel încât $t\,\rangle x \langle$

alege (x, t, D) : selectează $x \in V \cap D$ şi $t \in TERM \cap D$ astfel încât $t\,\rangle x \langle$

$Teorema$ 2.1.1 (Teorema de unificare Robinson) Procedura $UnificareRobinson$ este un algoritm care decide corect asupra proprietăţii de a fi unificabilă, respectiv neunificabilă a mulţimii E. Dacă E este unificabilă şi calculul se termină cu W_k singleton, atunci σ_k este un mgu pentru E.

Demonstraţie Deoarece σ_k , $k = 0, 1, ...$ sunt substituţii proprii şi

$W_{k+1} = W_k \{t_k \mid x_k\}$ rezultă $W_k \langle x_k \rangle$ şi $W_{k+1} \rangle x_k \langle$. Evident, pentru orice $k \geqslant 0$, şi orice $p \geqslant k + 1$, $W_p \rangle x_k \langle$. În consecinţă numărul de variabile cu ocurenţe în expresiile din mulţimea curentă W_k descreşte la fiecare pas al buclei $repeat - until$, deci după un număr finit de etape expresiile mulţimii curente W_k nu vor mai conţine simboluri din V, stare în care, evident, una din cele două condiţii care determină terminarea calculului este îndeplinită.

Demonstrăm prin inducţie că pentru orice $k \geqslant 0$, $W_k = E\sigma_k$. Proprietatea este evidentă pentru $k = 0$. Deoarece substituţiile calculate de algoritm sunt substituţii proprii, dacă nici una din condiţiile terminale nu este îndeplinită la pasul k şi presupunând că $W_k = E\sigma_k$, rezultă

$$W_{k+1} = W_k \{t_k \mid x_k\} = (E\sigma_k) \{t_k \mid x_k\} = E (\sigma_k \cdot \{t_k \mid x_k\}) = E\sigma_{k+1}.$$

Presupunem că mulţimea E este unificabilă. Fie θ substituţie unificator pentru E. Demonstrăm că pentru orice $k \geqslant 0$ există

$\lambda_k \in SUBST$, astfel încât $\theta = \sigma_k \cdot \lambda_k$. Deoarece $\sigma_0 = \varepsilon$ pentru $\lambda_0 = \theta$, obţinem $\sigma_0 \cdot \lambda_0 = \theta$. Presupunem că există $\lambda_p \in SUBST$, astfel încât $\theta = \sigma_p \cdot \lambda_p$, pentru $p = 0, 1, ..., k$.

a) Dacă W_k este singleton, atunci calculul se termină cu decizia $'E\ este\ unificabilă'$ şi σ_k este $'mgu\ pentru\ E'$. Deoarece $W_k = E\sigma_k$, rezultă σ_k este substituţie unificator pentru E. În plus, cum substituţia unificator θ pentru E este arbitrară şi există $\lambda_k \in SUBST$, astfel încât $\theta = \sigma_k \cdot \lambda_k$, rezultă că substituţia σ_k calculată de algoritm este într-adevăr mgu pentru E.

b) Dacă W_k nu este singleton, atunci apelul *calculează* (W_k, D_k) determină evaluarea mulţimii dezacord $D_k = D(W_k)$. Deoarece W_k nu este singleton, mulţimea D_k conţine cel puţin două elemente. Mulţimea $E\theta$ este singleton şi $E\theta = E(\sigma_k \cdot \lambda_k) = (E\sigma_k)\lambda_k = W_k\lambda_k$ deci λ_k este substituţie unificator pentru D_k,ceea ce implică $t_1\lambda_k = t_2\lambda_k$ pentru orice $t_1, t_2 \in D_k$.

Fie $t_1, t_2 \in D_k$, $t_1 \neq t_2$ arbitrare. Evident, dacă $t_1 = f_1 s_1 ... s_{p_1}$ şi $t_2 = f_2 d_1 ... d_{p_2}$, unde $f_i \in FS \cup PS$, $i = 1, 2$, cum $t_1\lambda_k = t_2\lambda_k$, rezultă $f_1 = f_2$. În concluzie, toate structurile $t \in (TERM \cup ATOM) \cap D_k$ şi care nu sunt simboluri din V au acelaşi prim simbol.

Dacă $\{t_1, t_2\} \subset CS \cap D_k$, atunci $t_i = t_i\lambda_k$, $i = 1, 2$, ceea ce implică $t_1\lambda_k \neq t_2\lambda_k$. În consecinţă, mulţimea $CS \cap D_k$ are cel mult un element. Pe baza argumentelor considerate rezultă că există $x \in V \cap D_k$ şi $t \in TERM \cap D_k$, $t \neq x$. Evident x, t nu pot fi unificate de λ_k, dacă $t\langle x \rangle$, deci $t\rangle x \langle$. Rezultă că apelul *există* (x, t, D_k) returnează *true* deci calculul continuă cel puţin încă o etapă. În particular, rezultă $t\rangle x \langle$ pentru orice $x \in V \cap D_k$ şi $t \in TERM \cap D_k$, astfel încât $t \neq x$. Fie $x_k \in V \cap D_k$, $t_k \in TERM \cap D_k$ selectate prin apelul *alege* (x_k, t_k, D_k), deci $W_{k+1} = W_k\{t_k \mid x_k\}$ şi $\sigma_{k+1} = \sigma_k \cdot \{t_k \mid x_k\}$.

Definim $\lambda_{k+1} = \lambda_k \setminus \{t_k\lambda_k \mid x_k\}$. Deoarece $t_k \rangle x_k \langle$ şi $W_{k+1} \rangle x_k \langle$, obţinem $t_k\lambda_{k+1} = t_k\lambda_k$,

$$
\begin{aligned}
W_{k+1}\lambda_{k+1} &= (W_k\{t_k \mid x_k\})(\lambda_k \setminus \{t_k\lambda_k \mid x_k\}) = \\
&= W_k(\{t_k \mid x_k\} \cdot (\lambda_k \setminus \{t_k\lambda_k \mid x_k\})) = \\
&= W_k(\{t_k\lambda_k \mid x_k\} \cup (\lambda_k \setminus \{t_k\lambda_k \mid x_k\})) = W_k\lambda_k = E\theta
\end{aligned}
$$

deci λ_{k+1} este substituţie unificator pentru $D(W_{k+1})$.

De asemenea,

$$
\begin{aligned}
\sigma_{k+1} \cdot \lambda_{k+1} &= (\sigma_k \cdot \{t_k \mid x_k\}) \cdot \lambda_{k+1} = \\
&= \sigma_k \cdot (\{t_k \mid x_k\} \cdot \lambda_{k+1}) = \sigma_k \cdot \lambda_k = \theta.
\end{aligned}
$$

În concluzie, dacă E este unificabilă, atunci există $k \geqslant 0$, astfel încât W_k este singleton, deci algoritmul decide corect şi calculează σ_k mgu pentru E.

Presupunem că mulţimea E nu este unificabilă. Deoarece pentru orice $k \geqslant 0$, $W_k = E\sigma_k$ rezultă că pentru orice $k \geqslant 0$, W_k nu este singleton. În consecinţă, terminarea calculului rezultă prin returnarea valorii $false$ de apelul $exista(x, t, D_k)$ pentru anume $k \geqslant 0$, deci şi în acest caz decizia algoritmului este corectă.

Observaţie Mecanismul de unificare descris de procedura $UnificareRobinson$ revine la tentativa de 'reparare' a dezacordurilor existente în structurile simbolice din mulţimea E,prin aplicarea, atunci când este posibil, de substituţii cu efect de unificare local. Din argumentele stabilite în demonstraţia *Teoremei* 2.1.1 obţinem că dezacordurile 'nereparabile' sunt de două categorii:

a) $t_1 \notin V$, $t_2 \notin V$ şi $frontchar\,(t_1) \neq frontchar\,(t_2)$, unde $frontchar\,(t)$ reprezintă primul simbol al structurii t,

b) $t_1 \in V$, $t_2 \notin V$ şi $t_2\,\langle t_1 \rangle$

Exemplul 2.1.10 Fie

$$E = \{\pi x f x a s,\ \pi y f g t a g z,\ \pi x f u w g v,\ \pi z f u a g v\},$$

$\pi \in PS$, $r(\pi) = 3$, $f, g \in FS$, $r(f) = 2$, $r(g) = 1, a \in CS$, $u, v, t, s, x, y, z \in V$.

Aplicarea procedurii *UnificareRobinson* mulţimii E determină umătoarea evoluţie:

$k = 0$, $\sigma_0 = \varepsilon$, $W_0 = \{\pi x f x a s,\ \pi y f g t a g z,\ \pi x f u w g v,\ \pi z f u a g v\}$
calculează $(W_0, D_0) \Rightarrow D_0 = \{x, y, z\}$
$există\,(x, t, D_0) \Rightarrow true$
$alege\,(x_0, t_0, D_0) \Rightarrow x_0 = y$, $t_0 = x$
$W_1 \leftarrow W_0\,\{x \mid y\} = \{\pi x f x a s,\ \pi x f g t a g z,\ \pi x f u w g v,\ \pi z f u a g v\}$
$\sigma_1 \leftarrow \sigma_0 \cdot \{x \mid y\} = \{x \mid y\}$
$k \leftarrow 1$
$\mathbf{k = 1}$, $\sigma_1 = \{x \mid y\}$,
$W_1 = \{\pi x f x a s,\ \pi x f g t a g z,\ \pi x f u w g v,\ \pi z f u a g v\}$
calculează $(W_1, D_1) \Rightarrow D_1 = \{x, z\}$
$există\,(x, t, D_1) \Rightarrow true$
$alege\,(x_1, t_1, D_1) \Rightarrow x_1 = z$, $t_1 = x$
$W_2 \leftarrow W_1\,\{x \mid z\} = \{\pi x f x a s,\ \pi x f g t a g x,\ \pi x f u w g v,\ \pi x f u a g v\}$
$\sigma_2 \leftarrow \sigma_1 \cdot \{x \mid z\} = \{x \mid y, x \mid z\}$
$k \leftarrow 2$
$\mathbf{k = 2}$, $\sigma_2 = \{x \mid y, x \mid z\}$,
$W_2 = \{\pi x f x a s,\ \pi x f g t a g x,\ \pi x f u w g v,\ \pi x f u a g v\}$
calculează $(W_2, D_2) \Rightarrow D_2 = \{x, gt, u\}$
$există\,(x, t, D_2) \Rightarrow true$
$alege\,(x_2, t_2, D_2) \Rightarrow x_2 = x$, $t_2 = gt$
$W_3 \leftarrow W_2\,\{gt \mid x\} = \{\pi g t f g t a s, \pi g t f g t a g g t, \pi g t f u w g v, \pi g t f u a g v\}$
$\sigma_3 \leftarrow \sigma_2 \cdot \{gt \mid x\} = \{gt \mid y,\ gt \mid z,\ gt \mid x\}$
$k \leftarrow 3$
$\mathbf{k = 3}$, $\sigma_3 = \{gt \mid y,\ gt \mid z,\ gt \mid x\}$,
$W_3 = \{\pi g t f g t a s,\ \pi g t f g t a g g t,\ \pi g t f u w g v,\ \pi g t f u a g v\}$
calculează $(W_3, D_3) \Rightarrow D_3 = \{gt, u\}$
$există\,(x, t, D_3) \Rightarrow true$

$alege\,(x_3, t_3, D_3) \Rightarrow x_3 = u,\, t_3 = gt$
$W_4 \leftarrow W_3\,\{gt \mid u\} = \{\pi gtfgtas, \pi gtfgtaggt, \pi gtfgtwgv, \pi gtfgtagv\}$
$\sigma_4 \leftarrow \sigma_3 \cdot \{gt \mid u\} = \{gt \mid y,\ gt \mid z,\ gt \mid x,\ gt \mid u\}$
$k \leftarrow 4$
$\mathbf{k = 4}$, $\sigma_4 = \{gt \mid y,\ gt \mid z,\ gt \mid x,\ gt \mid u\}$,
$W_4 = \{\pi gtfgtas,\ \pi gtfgtaggt,\ \pi gtfgtwgv,\ \pi gtfgtagv\}$
$calculează\ (W_4, D_4) \Rightarrow D_4 = \{a, w\}$
$există\,(x, t, D_4) \Rightarrow true$
$alege\,(x_4, t_4, D_4) \Rightarrow x_4 = w,\, t_4 = a$
$W_5 \leftarrow W_4\,\{a \mid w\} = \{\pi gtfgtas,\ \pi gtfgtaggt,\ \pi gtfgtagv\}$
$\sigma_5 \leftarrow \sigma_4 \cdot \{a \mid w\} = \{gt \mid y,\ gt \mid z,\ gt \mid x,\ gt \mid u,\ a \mid w\}$
$k \leftarrow 5$
$\mathbf{k = 5}$, $\sigma_5 = \{gt \mid y,\ gt \mid z,\ gt \mid x,\ gt \mid u,\ a \mid w\}$,
$W_5 = \{\pi gtfgtas,\ \pi gtfgtaggt,\ \pi gtfgtagv\}$
$calculează\ (W_5, D_5) \Rightarrow D_5 = \{s, ggt, gv\}$
$există\,(x, t, D_5) \Rightarrow true$
$alege\,(x_5, t_5, D_5) \Rightarrow x_5 = s,\, t_5 = gv$
$W_6 \leftarrow W_5\,\{gv \mid s\} = \{\pi gtfgtagv,\ \pi gtfgtaggt\}$
$\sigma_6 \leftarrow \sigma_5 \cdot \{gv \mid s\} = \{gt \mid y,\ gt \mid z,\ gt \mid x,\ gt \mid u,\ a \mid w,\ gv \mid s\}$
$k \leftarrow 6$
$\mathbf{k = 6}$, $\sigma_6 = \{gt \mid y,\ gt \mid z,\ gt \mid x,\ gt \mid u,\ a \mid w,\ gv \mid s\}$,
$W_6 = \{\pi gtfgtagv,\ \pi gtfgtaggt\}$
$calculează\ (W_6, D_6) \Rightarrow D_6 = \{v, gt\}$
$există\,(x, t, D_6) \Rightarrow true$
$alege\,(x_6, t_6, D_6) \Rightarrow x_6 = v,\, t_6 = gt$
$W_7 \leftarrow W_6\,\{gt \mid v\} = \{\ \pi gtfgtaggt\}$
$\sigma_7 \leftarrow \sigma_6 \cdot \{gt \mid v\} = \{gt \mid y, gt \mid z, gt \mid x, gt \mid u, a \mid w, gv \mid s, gt \mid v\}$
$k \leftarrow 6$
$\mathbf{k = 7}$; W_7 este singleton$\Rightarrow$
$E\ este\ unificabilă,$
$\{gt \mid y, gt \mid z, gt \mid x, gt \mid u, a \mid w, gv \mid s, gt \mid v\}$ $mgu\ pentru\ E.$

Exemplul 2.1.11 Fie $E = \{fgxyhzgahx,\ fghazhhygaha\}$ unde $f, g, h \in FS$, $r\,(f) = 3$, $r\,(g) = 2$, $r\,(h) = 1$, $a \in CS$, $x, y, z \in V$.

Aplicarea procedurii $UnificareRobinson$ mulţimii E determină umătoarea evoluţie:

$k = 0$, $\sigma_0 = \varepsilon, W_0 = \{fgxyhzgahx,\ fghazhhygaha\}$
$calculează\ (W_0, D_0) \Rightarrow D_0 = \{x, ha\}$
$există\,(x, t, D_0) \Rightarrow true$
$alege\,(x_0, t_0, D_0) \Rightarrow x_0 = x,\, t_0 = ha$
$W_1 \leftarrow W_0\,\{ha \mid x\} = \{fghayhzgahha,\ fghazhhygaha\}$

$\sigma_1 \leftarrow \sigma_0 \cdot \{ha \mid x\} = \{ha \mid x\}$
$k \leftarrow 1$
$\mathbf{k = 1}, \sigma_1 = \{ha \mid x\}, W_1 = \{fghayhzgahha,\ fghazhhygaha\}$
$calculeaz\breve{a}\ (W_1, D_1) \Rightarrow D_1 = \{y, z\}$
$exist\breve{a}\,(x, t, D_1) \Rightarrow true$
$alege\,(x_1, t_1, D_1) \Rightarrow x_1 = z,\ t_1 = y$
$W_2 \leftarrow W_1\{y \mid z\} = \{fghayhygahha,\ fghayhhygaha\}$
$\sigma_2 \leftarrow \sigma_1 \cdot \{y \mid z\} = \{ha \mid x,\ y \mid z\}$
$k \leftarrow 2$
$\mathbf{k = 2},\ \sigma_2 = \{ha \mid x,\ y \mid z\},$
$W_2 = \{fghayhygahha,\ fghayhhygaha\}$
$calculeaz\breve{a}\ (W_2, D_2) \Rightarrow D_2 = \{y, hy\}$
$exist\breve{a}\,(x, t, D_2) \Rightarrow false$
$\Rightarrow E\ nu\ este\ unificabil\breve{a}.$

Exemplul 2.1.12 Fie $E = \{fxfxy, fgyfguz\}$, unde $f, g \in FS$, $r(f) = 2$, $r(g) = 1$, $x, y, z \in V$.

Pentru

$$\theta = \{gga \mid x,\ ga \mid u,\ ga \mid y,\ ga \mid z\}$$

obţinem $E\theta = \{fggafggaga\}$ deci E este unificabilă şi θ este substituţie unificator pentru E.

Calculul substituţiilor λ_k, astfel încât pentru orice $k \geqslant 0$,
$\theta = \sigma_k \cdot \lambda_k$, unde σ_k rezultă prin aplicarea procedurii
$UnificareRobinson$ mulţimii E:

$k = 0,\ \sigma_0 = \varepsilon, W_0 = \{fxfxy, fgyfguz\}, \lambda_0 = \theta$
$calculeaz\breve{a}\ (W_0, D_0) \Rightarrow D_0 = \{x, gy\}$
$exist\breve{a}\,(x, t, D_0) \Rightarrow true$
$alege\,(x_0, t_0, D_0) \Rightarrow x_0 = x,\ t_0 = gy$
$W_1 \leftarrow W_0\{gy \mid x\} = \{fgyfgyy, fgyfguz\}$
$\sigma_1 \leftarrow \sigma_0 \cdot \{gy \mid x\} = \{gy \mid x\}$
$\lambda_1 \leftarrow \lambda_0 \setminus \{gy\lambda_0 \mid x\} = \{\ ga \mid u,\ ga \mid y,\ ga \mid z\}$
$k \leftarrow 1$
$\mathbf{k = 1}, \sigma_1 = \{gy \mid x\},\ W_1 = \{fgyfgyy, fgyfguz\}$
$calculeaz\breve{a}\ (W_1, D_1) \Rightarrow D_1 = \{u, y\}$
$exist\breve{a}\,(x, t, D_1) \Rightarrow true$
$alege\,(x_1, t_1, D_1) \Rightarrow x_1 = u,\ t_1 = y$
$W_2 \leftarrow W_1\{y \mid u\} = \{fgyfgyy, fgyfgyz\}$
$\sigma_2 \leftarrow \sigma_1 \cdot \{y \mid u\} = \{gy \mid x,\ y \mid u\}$
$\lambda_2 \leftarrow \lambda_1 \setminus \{y\lambda_1 \mid u\} = \{\ ga \mid y,\ ga \mid z\}$
$k \leftarrow 2$
$\mathbf{k = 2}, \sigma_2 = \{gy \mid x,\ y \mid u\}, W_2 = \{fgyfgyy, fgyfgyz\}$

$calculează\ (W_2, D_2) \Rightarrow D_2 = \{y, z\}$
$există\, (x, t, D_2) \Rightarrow true$
$alege\, (x_2, t_2, D_2) \Rightarrow x_2 = y,\ t_2 = z$
$W_3 \leftarrow W_2\, \{z \mid y\} = \{fgzfgzz\}$
$\sigma_3 \leftarrow \sigma_2 \cdot \{z \mid y\} = \{z \mid y,\ gy \mid x,\ y \mid u\}$
$\lambda_3 \leftarrow \lambda_2 \setminus \{z\lambda_2 \mid y\} = \{\ ga \mid z\}$
$k \leftarrow 3$
$\mathbf{k} = \mathbf{3}$, W_3 este singleton $\Rightarrow$
$E\ este\ unificabilă,\ \{z \mid y,\ gy \mid x,\ y \mid u\}\ mgu\ pentru\ E.$

3 Semantici pentru limbajele de primul ordin

Prezenţa variabilelor în structurile simbolice termeni şi formule ale limbajelor de primul ordin necesită o manieră nouă în definirea semanticilor pentru limbajele din această clasă. Definirea unei semantici presupune în primul rând acordarea fiecărui simbol non-logic a unei anumite semnificaţii şi anume: semnificaţia fiecărui functor să fie aceea de funcţie cu număr de argumente egal cu aritatea functorului, semnificaţia fiecărui simbol predicaţional să fie aceea de predicat care exprimă o relaţie între un număr de obiecte egal cu aritatea simbolului, respectiv semnificaţia fiecărei constante să fie aceea de individ particular din domeniul suport. Semnificaţiile acordate simbolurilor non-logice induc în continuare semnificaţii pentru structurile din mulţimea $TERM \cup FORM$ şi anume: expresie funcţională pentru structurile simbolice de tipul termen, predicate desemnând relaţii între expresii funcţionale pentru atomi şi respectiv expresii logice rezultate prin utilizarea mai multor predicate şi a cuantificatorilor pentru formulele limbajului.

Mulţimea funcţiilor definite pe mulţimea A cu valori în mulţimea B este notată $[A \to B]$.

Definiţia 2.2.1 Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de primul ordin. Perechea (D, I) se numeşte L-structură, unde D este o mulţime nevidă numită domeniu de interpretare şi $I = (I_{CS}, I_{FS}, I_{PS})$,

$I_{CS} : CS \to D,$

$I_{FS} : FS \to \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [D^n \to D]$, astfel încât pentru orice $f \in FS$,

$I_{FS}\,(f) : D^{r(f)} \to D,$

$I_{PS} : PS \to \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [D^n \to D] \cup \{T, F\}$, astfel încât pentru orice $\pi \in PS$,

$I_{PS}(\pi) : D^{r(\pi)} \rightarrow \{T, F\}$ dacă $r(\pi) \geq 1$, respectiv

$I_{PS}(\pi) \in \{T, F\}$, dacă $r(\pi) = 0$.

Convenim să notăm: $I_{CS}(a) \triangleq a^I$, $I_{FS}(f) \triangleq f^I$, $I_{PS}(\pi) \triangleq \pi^I$; a^I, f^I, π^I sunt respectiv interpretările constantei a , a simbolului functorial f şi a simbolului predicaţional π în L-structura $M = (D, I)$.

Fie $M = (D, I)$ o L-structură. Semnificaţia fiecărui termen $t \in TERM$, notată t^I,este aceea de rezultat al evaluării arborelui de structură $T(t)$ conform regulilor de calcul asociate de L-structura M simbolurilor functoriale cu ocurenţe în structura simbolică t şi a interpretărilor considerate pentru simbolurile din mulţimea CS. Evaluarea arborilor de structură necesită însă ca şi variabilele din structurile simbolice din mulţimea $TERM$ să aibă "atribuite valori" din domeniul de interpretare D. Cu alte cuvinte, simbolurile din V etichete ale unor vârfuri din $T(t)$ corespund unor locaţii de memorie cărora M nu le alocă informaţie. Evident, într-un arbore de structură numai vârfurile terminale pot avea etichete simboluri din V.

Numim asociere (valuaţie) orice funcţie $s : V \rightarrow D$.

Definiţia 2.2.2 Fie $s \in [V \rightarrow D]$, $x \in V$, $a \in D$.

Notăm cu $s[x := a] \in [V \rightarrow D]$ asocierea definită prin

$$y \in V, \quad s[x := a](y) = \begin{cases} s(y), & \text{dacă } y \neq x \\ a, & \text{dacă } y = x \end{cases}$$

Pentru $n \geq 1$, dacă $x_1, ..., x_n \in V$, $a_1, ..., a_n \in D$, asocierea $s[x_1 := a_1, ..., x_n := a_n]$ este definită recursiv de relaţia

$$s[x_1 := a_1, ..., x_n := a_n] = s[x_1 := a_1, ..., x_{n-1} := a_{n-1}][x_n := a_n]$$

Observaţie Dacă $x_1, ..., x_n \in V$ sunt astfel încât pentru orice

$1 \leq i \neq j \leq n$, $x_i \neq x_j$, atunci pentru orice permutare σ a mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$ rezultă

$$s[x_1 := a_1, ..., x_n := a_n] = s\left[x_{\sigma(1)} := a_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)} := a_{\sigma(n)}\right].$$

Dacă $x \in V$, $a, b \in D$, atunci $s[x := a, x := b] = s[x := b]$, deci în cazul în care variabilele $x_1, ..., x_n$ nu sunt distincte două câte două,

$s[x_1 := a_1, ..., x_n := a_n] \neq s\left[x_{\sigma(1)} := a_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)} := a_{\sigma(n)}\right]$

Definiţia 2.2.3 Fie $M = (D, I)$ o L-structură. Semnificaţia t^I indusă de M pentru termenul $t \in TERM$ este $t^I \in [[V \rightarrow D] \rightarrow D]$ definită prin,

$s \in [V \rightarrow D]$,

$$t^I(s) = \begin{cases} t^I, & \text{dacă } t \in CS \\ s(t), & \text{dacă } t \in V \\ f^I\left(t_1^I(s), ..., t_{r(f)}^I(s)\right), & \text{dacă } t = ft_1...t_{r(f)} \end{cases}$$

Exemplul 2.2.1 Considerăm $M = (D, I)$ interpretarea intenţionată pentru limbajul de primul ordin al aritmeticii. În această L-structură, domeniul de interpretare este mulţimea numerelor naturale N, interpretarea simbolului constantă 0 este numărul natural 0, regulile de calcul asociate simbolurilor functoriale $+, *$ fiind suma şi respectiv produsul numerelor naturale argumente. Interpretarea functorului succesor este funcţia care calculează succesorul argumentului în mulţimea N.

$D = N$, $I_{cs}(0) = 0$,

$I_{FS}(+) = +^I : N \times N \to N$, pentru orice $n, m \in N$,

$+^I(n, m) = n + m$

$I_{FS}(*) = *^I : N \times N \to N$, pentru orice $n, m \in N$, $*^I(n, m) = n \cdot m$

$I_{FS}(S) = S^I : N \to N$, pentru orice $n \in N$, $S^I(n) = n + 1$

Interpretările simbolurilor predicaţionale sunt

$I_{PS}(<) =<^I: N \times N \to \{T, F\}$, pentru orice $n, m \in N$,

$$<^I(n, m) = \begin{cases} T, \text{ dacă } n < m \\ F, \text{ dacă } n \geq m \end{cases}$$

$I_{PS}(\mathring{=}) ==^I: N \times N \to \{T, F\}$, pentru orice $n, m \in N$,

$$=^I(n, m) = \begin{cases} T, \text{ dacă } n = m \\ F, \text{ dacă } n \neq m \end{cases}$$

Observaţie Definiţiile interpretărilor simbolurilor predicaţionale pot fi exprimate prin

$$\begin{aligned} <\ ^I(n, m) &= if\ n < m\ then\ T\ else\ F \\ =\ ^I(n, m) &= if\ n = m\ then\ T\ else\ F. \end{aligned}$$

Fie termenul $t = * + *SySSzSSx + xSS0$, considerat în *Exemplul* 2.1.1., $x, y, z \in V$ şi fie $s \in [V \to N]$ arbitrar.

Deoarece $t = *\underbrace{+ * SySSzSSx}_{t_1}\underbrace{+xSS0}_{t_2}$,

$$t^I(s) = *^I\left(t_1^I(s), t_2^I(s)\right) = t_1^I(s) \cdot t_2^I(s).$$

Deoarece, $t_1 = +\underbrace{*SySSz}_{t_{11}}\underbrace{SSx}_{t_{12}}$ şi $t_2 = +\underbrace{x}_{t_{21}}\underbrace{SS0}_{t_{22}}$, rezultă

$$\begin{aligned} t_1^I(s) &= +^I\left(t_{11}^I(s), t_{12}^I(s)\right) = t_{11}^I(s) + t_{12}^I(s), \\ t_2^I(s) &= +^I\left(t_{21}^I(s), t_{22}^I(s)\right) = t_{21}^I(s) + t_{22}^I(s) = \\ &= s(x) + S^I\left(S^I\left(0^I\right)\right) = s(x) + S^I\left(S^I(0)\right) = \\ &= s(x) + S^I(0 + 1) = s(x) + 0 + 1 + 1 = s(x) + 2 \end{aligned}$$

Iterând, obţinem în continuare

$$\begin{aligned}
t_{11}^I(s) &= *^I\left((Sy)^I(s), (SSz)^I(s)\right) = S^I(s(y)) \cdot S^I\left(S^I(s(z))\right) = \\
&= (s(y)+1)\cdot(s(z)+1+1) = (s(y)+1)\cdot(s(z)+2) \\
t_{12}^I(s) &= (SSx)^I(s) = S^I\left(S^I(s(x))\right) = (s(x)+2)
\end{aligned}$$

Rezultă

$$t_1^I(s) = (s(y)+1)\cdot(s(z)+2) + (s(x)+2)$$

deci,

$$t^I(s) = ((s(y)+1)\cdot(s(z)+2) + s(x)+2)\cdot(s(x)+2).$$

În particular pentru $s \in [V \to N]$, $s(x) = 1$, $s(y) = 5$, $s(z) = 1$, $t^I(s) = 63$.

Observaţie Procedeul descris revine la traversarea cu evaluare top-down a arborelui rezultat prin transformarea arborelui de structură al termenului conform L-structurii şi a asocierii s considerate. Arborele transformat rezultă prin substituirea etichetelor simboluri functoriale şi constante prin valorile funcţiilor I_{FS}, respectiv I_{CS} şi substituirea fiecărei etichete $x \in V$ prin $s(x)$. Pentru termenul considerat în *Exemplul* 2.1.1. dacă $s(x) = 1$, $s(y) = 5$, $s(z) = 1$, atunci arborele transformat este

$$T\left(t^I(s)\right): \quad \begin{array}{cccccc}
 & & & r\left(*^I\right) & & \\
 & & & \swarrow\ \searrow & & \\
 & & n_1\left(+^I\right) & & n_2\left(+^I\right) & \\
 & & \swarrow\ \searrow & & \downarrow\ \searrow & \\
 & n_3\left(*^I\right) & & n_4\left(S^I\right) & n_{12}(1) & n_{13}\left(S^I\right) \\
 & \swarrow\ \searrow & & \downarrow & & \downarrow \\
n_5\left(S^I\right) & & n_6\left(S^I\right) & n_{10}\left(S^I\right) & & n_{14}\left(S^I\right) \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
n_7(5) & & n_8\left(S^I\right) & n_{11}(1) & & n_{15}(0) \\
 & & \downarrow & & & \\
 & & n_9(1) & & &
\end{array}$$

etichetele vârfurilor fiind indicate în paranteze.

Calculul valorii $t^I(s)$ poate fi realizat prin traversarea cu evaluare bottom-up a arborelui de structură transformat.

Valoarea $t^I(s) \in D$ este informaţia asociată vârfului rădăcină rezultată la terminarea traversării .

De exemplu, notând cu $\inf(n)$ informaţia la nivelul vârfului n rezultată prin traversarea cu evaluare botom-up a arborelui, pentru arborele $T\left(t^I(s)\right)$ de mai sus obţinem

$inf\,(n_7) = s\,(y) = 5,\ \ inf\,(n_5) = 5+1 = 6,\ \ inf\,(n_9) = s\,(z) = 1,$
$inf\,(n_8) = 1+1 = 2,\ inf\,(n_6) = 2+1 = 3,$
$inf\,(n_3) = inf\,(n_5)\cdot inf\,(n_6) = 18,$
$inf\,(n_{11}) = s\,(x) = 1,\ inf\,(n_{10}) = 1+1 = 2,\ inf\,(n_4) = 2+1 = 3,$
$inf\,(n_1) = inf\,(n_3) + inf\,(n_4) = 21,\ inf\,(n_{15}) = 0^I = 0,$
$inf\,(n_{14}) = 0+1 = 1,\ inf\,(n_{13}) = 1+1 = 2,\ inf\,(n_{12}) = s\,(x) = 1,$
$inf\,(n_2) = inf\,(n_{12}) + inf\,(n_{13}) = 3,$
$inf\,(r) = inf\,(n_1)\cdot inf\,(n_2) = 63,$
deci $t^I\,(s) = 63$.

Semnificaţia indusă de o L-structură $M = (D, I)$ structurilor simbolice din mulţimea $ATOM$ este de predicat ce exprimă o relaţie între termenii argumente.

Definiţia 2.2.4 Fie $M = (D, I)$ o L-structură şi $\alpha \in ATOM$. Interpretarea atomului α în L-structura $M = (D, I)$, este
$\alpha^I : [V \to D] \to \{T, F\}$ definită prin, $s \in [V \to D]$,

$$\alpha^I\,(s) = \begin{cases} I_{PS}\,(\alpha)\,, \quad \text{dacă } \alpha \in PS,\ r\,(\alpha) = 0 \\ \pi^I\left(t_1^I\,(s)\,, ..., t_{r(\pi)}^I\,(s)\right), \quad \text{dacă } \alpha = \pi t_1 ... t_{r(\pi)}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \pi \in PS\ ,\ r\,(\pi) \geq 1 \end{cases}$$

Exemplul 2.2.2 Fie $M = (D, I)$ interpretarea intenţionată pentru limbajul de primul ordin al aritmeticii (*Exemplul* 2.2.1). Structura simbolică
$\alpha = \overset{\circ}{=} * + xS0 + xSS0 + + + *xx * SSS0xSS0$ este
$\alpha \overset{\circ}{=} \underbrace{* + xS0 + xSS0}_{t_1}\underbrace{+ + *xx * SSS0xSS0}_{t_2}$, unde $t_1, t_2 \in TERM$,
deci $\alpha \in ATOM$.
Pentru $s \in [V \to D]$ asociere oarecare, obţinem
$\alpha^I\,(s) = \overset{\circ}{=}^I\left(t_1^I\,(s)\,, t_2^I\,(s)\right) = if\ t_1^I\,(s) = t_2^I\,(s)\ \ then\ T\ else\ F$
$t_1^I\,(s) = *^I\left((+xS0)^I\,(s)\,, (+xSS0)^I\,(s)\right) = (s\,(x)+1)\cdot(s\,(x)+2)$
$t_2^I\,(s) = +^I\left((+*xx*SSS0x)^I\,(s)\,, (SS0)^I\,(s)\right) =$
$+^I\left((*xx)^I\,(s)\,, (*SSS0x)^I\,(s)\right) + 2 = s\,(x)\cdot s\,(x) + 3\cdot s\,(x) + 2.$
Evident, pentru orice asociere s , $t_1^I\,(s) = t_2^I\,(s)$ deci $\alpha^I\,(s) = T$.
Observaţie Similar structurilor simbolice de tipul $TERM$, dacă
$\alpha \in ATOM$, atunci valoarea $\alpha^I\,(s) \in \{T, F\}$ rezultă ca informaţie asociată vârfului rădăcină prin traversarea cu evaluare bottom-up a arborelui de structură corespunzător atomului α.

Exemplul 2.2.3 Fie $M = (D, I)$ interpretarea intenţionată pentru limbajul de primul ordin al aritmeticii. Arborele de structură corespunzător

atomului $\alpha =< * + *SySSzSSx + xSS0u$, unde
$x, y, z, u \in V$ este

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & \bar{r}\,(<) & \\
 & & & & & \swarrow\ \searrow & \\
 & & & & r\,(*) & & r'\,(u) \\
 & & & & \swarrow\ \searrow & & \\
 & & & n_1\,(+) & & n_2\,(+) & \\
 & & & \swarrow\ \searrow & & \downarrow\searrow & \\
T\,(\alpha): & & n_3\,(*) & & n_4\,(S) & n_{12}\,(x) & n_{13}\,(S) \\
 & & \swarrow\ \searrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & n_5\,(S) & & n_6\,(S) & n_{10}\,(S) & & n_{14}\,(S) \\
 & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & n_7\,(y) & & n_8\,(S) & n_{11}\,(x) & & n_{15}\,(0) \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & n_9\,(z) & & &
\end{array}
$$

etichetele vârfurilor fiind indicate în paranteze.

Pentru $s \in [V \to D]$, $s(x) = 1$, $s(y) = 5$, $s(z) = 1$, $s(u) = 30$, arborele transformat este

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & \bar{r}\,\left(<^I\right) & \\
 & & & & & \swarrow\ \searrow & \\
 & & & & r\,\left(*^I\right) & & r'\,(30) \\
 & & & & \swarrow\ \searrow & & \\
 & & & n_1\,\left(+^I\right) & & n_2\,\left(+^I\right) & \\
 & & & \swarrow\ \searrow & & \downarrow\searrow & \\
T\,\left(\alpha^I\right): & & n_3\,\left(*^I\right) & & n_4\,\left(S^I\right) & n_{12}\,(1) & n_{13}\,\left(S^I\right) \\
 & & \swarrow\ \searrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & n_5\,\left(S^I\right) & & n_6\,\left(S^I\right) & n_{10}\,\left(S^I\right) & & n_{14}\,\left(S^I\right) \\
 & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & n_7\,(5) & & n_8\,\left(S^I\right) & n_{11}\,(1) & & n_{15}\,\left(0^I\right) \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & n_9\,(1) & & &
\end{array}
$$

prin traversarea cu evaluare bottom-up a arborelui $T(\alpha)$, informaţia asociată vârfului r este 63 (*Exemplul* 2.2.1) respectiv informaţia asociată vârfului r' este 30, ceea ce determină pentru vârful rădăcină informaţia F, deci $\alpha^I(s) = F$.

Pentru construirea semanticii induse de o L-structură formulelor limbajului, introducem operatorii $(A_x)_{x\in V}$, $(E_x)_{x\in V}$,

$$
\begin{aligned}
A_x &: [[V \to D] \to \{T, F\}] \to [[V \to D] \to \{T, F\}], \\
E_x &: [[V \to D] \to \{T, F\}] \to [[V \to D] \to \{T, F\}],
\end{aligned}
$$

definiţi în modul următor: pentru orice $\varphi \in [[V \to D] \to \{T, F\}]$ şi orice $s \in [V \to D]$

$(A_x(\varphi))(s) = T$, dacă şi numai dacă pentru orice $a \in D$,
$\varphi(s[x := a]) = T$,

$(E_x(\varphi))(s) = T$, dacă şi numai dacă există $a \in D$,
astfel încât $\varphi(s[x := a]) = T$.

Semantica indusă de o L-structură $M = (D, I)$ fiecărei formule α a limbajului, notată α^I, este similară semanticii induse pentru atomii limbajului şi anume α^I este funcţie definită pe mulţimea asocierilor cu valori în mulţimea $\{T, F\}$, $\alpha^I : [V \to D] \to \{T, F\}$.

Este suficient să definim α^I pentru $\alpha \in FORM \setminus ATOM$.

Definiţia 2.2.5 Fie $M = (D, I)$ o L-structură şi

$\alpha \in FORM \setminus ATOM$.

Pentru orice $s \in [V \to D]$, interpretarea $\alpha^I : [V \to D] \to \{T, F\}$ a formulei α în M este definită prin

$$\alpha^I(s) = \begin{cases} \neg\beta^I(s) & \text{dacă } \alpha = (\neg\beta), \\ \beta^I(s) \wedge \gamma^I(s) & \text{dacă } \alpha = (\beta \wedge \gamma), \\ \beta^I(s) \vee \gamma^I(s) & \text{dacă } \alpha = (\beta \vee \gamma), \\ \beta^I(s) \to \gamma^I(s) & \text{dacă } \alpha = (\beta \to \gamma), \\ \beta^I(s) \leftrightarrow \gamma^I(s) & \text{dacă } \alpha = (\beta \leftrightarrow \gamma), \\ E_x\left(\beta^I\right)(s) & \text{dacă } \alpha = \exists x\beta, \\ A_x\left(\beta^I\right)(s) & \text{dacă } \alpha = \forall x\beta. \end{cases}$$

Spunem că asocierea s validează α, dacă $\alpha^I(s) = T$, respectiv s falsifică α, dacă $\alpha^I(s) = F$.

Convenim să reprezentăm prin $M \models \alpha[s]$ faptul că s validează α.

Exemplul 2.2.4 Fie $M = (D, I)$ interpretarea intenţionată pentru limbajul de primul ordin al aritmeticii. Evident,

$$\alpha = \forall x \forall y \left(< xy \to \exists z \overset{\circ}{=} +xzy\right) \in FORM,$$

unde $x, y, z \in V, x \neq y \neq z \neq x$.

Pentru $s \in [V \to D]$ arbitrară, rezultă

$$\begin{aligned} \alpha^I(s) &= A_x\left(\forall y\left(< xy \to \exists z \overset{\circ}{=} +xzy\right)\right)^I(s) = \\ &= A_x\left(A_y\left(\left(< xy \to \exists z \overset{\circ}{=} +xzy\right)\right)^I\right)^I(s) = \\ &= A_x\left(A_y\left((< xy)^I \to \left(\exists z \overset{\circ}{=} +xzy\right)^I\right)\right)(s) = \\ &= A\left({}_xA_y\left((< xy)^I \to E_z\left(\overset{\circ}{=} +xzy\right)^I\right)\right)(s) \end{aligned}$$

deci, $\alpha^I(s) = T$, dacă şi numai dacă pentru orice $a \in N$,

$$A_y\left((< xy)^I \to E_z\left(\overset{\circ}{=} +xzy\right)^I\right)(s[x := a]) = T,$$

dacă şi numai dacă pentru orice $a \in N$, $b \in N$,

$$\left((< xy)^I \to E_z\left(\overset{\circ}{=} +xzy\right)^I\right)(s[x := a][y := b]) = T.$$

Deoarece $x \neq y \neq z \neq x$, $s[x := a][y := b] = s[x := a,\ y := b]$, deci

$$\begin{gathered} \left((< xy)^I \to E_z\left(\overset{\circ}{=} +xzy\right)^I\right)(s[x := a][y := b]) = \\ (if\ \ s[x := a,\ y := b](x) < s[x := a,\ y := b](y)\ \ then\ T\ else\ F) \to \\ E_z\left(\overset{\circ}{=} +xzy\right)^I(s[x := a,\ y := b]) = \\ (if\ \ a < b\ then\ T\ else\ F) \to E_z\left(\overset{\circ}{=} +xzy\right)^I(s[x := a,\ y := b]) \end{gathered}$$

Pentru $a, b \in N$, astfel încât $a \geq b$, obţinem

$$\begin{gathered} \left((< xy)^I \to E_z\left(\overset{\circ}{=} +xzy\right)^I\right)(s[x := a][y := b]) = \\ F \to E_z\left(\overset{\circ}{=} +xzy\right)^I(s[x := a,\ y := b]) = T, \end{gathered}$$

respectiv pentru $a, b \in N$, astfel încât $a < b$,

$$\begin{gathered} \left((< xy)^I \to E_z\left(\overset{\circ}{=} +xzy\right)^I\right)(s[x := a][y := b]) = \\ T \to E_z\left(\overset{\circ}{=} +xzy\right)^I(s[x := a,\ y := b]). \end{gathered}$$

Analizăm cazul $a, b \in N$, $a < b$, deci există $n \in N$, astfel încât $a + n = b$.

Deoarece $E_z \left(\overset{\circ}{=} +xzy \right)^I (s [x := a,\ y := b]) = T$, dacă şi numai dacă există $c \in N$, astfel încât

$$\left(\overset{\circ}{=} +xzy \right)^I (s [x := a,\ y := b] [z := c]) = T,$$

adică

$$\begin{gathered} if\ \ s [x := a, y := b, z := c] (x) + s [x := a, y := b, z := c] (z) = \\ = s [x := a, y := b, z := c] (y)\ \ then\ T\ else\ F = \\ = if\ \ a + c = b\ then\ T\ else\ F = T, \end{gathered}$$

cum $a + n = b$, rezultă că există $c \in N$, astfel încât

$$\left(\overset{\circ}{=} +xzy \right)^I (s [x := a,\ y := b] [z := c]) = T,$$

deci $E_z \left(\overset{\circ}{=} +xzy \right)^I (s [x := a,\ y := b]) = T$.

Rezultă că dacă $a, b \in N$, $a < b$ atunci

$$\left((< xy)^I \rightarrow E_z \left(\overset{\circ}{=} +xzy \right)^I \right) (s [x := a] [y := b]) = T \rightarrow T = T.$$

În concluzie, pentru orice $a, b \in N$,

$$\left((< xy)^I \rightarrow E_z \left(\overset{\circ}{=} +xzy \right)^I \right) (s [x := a] [y := b]) = T,$$

deci pentru orice $a \in N$,

$$A_y \left((< xy)^I \rightarrow E_z \left(\overset{\circ}{=} +xzy \right)^I \right) (s [x := a]) = T,$$

adică $\alpha^I (s) = T$ pentru orice asociere $s \in [V \rightarrow D]$.

Definiţia 2.2.6 Fie $M = (D, I)$ o L-structură, $\sigma \in SUBST$. Compunerea valuaţiei $s \in [V \rightarrow D]$ cu substituţia σ este valuaţia $s \cdot \sigma$ definită prin

$$s \cdot \sigma = \begin{cases} s, & \text{dacă } \sigma = \varepsilon \\ s \left[x_1 := t_1^I (s), ..., x_n := t_n^I (s) \right], & \text{dacă } \sigma = \{ t_1 \mid x_1, ..., t_n \mid x_n \} \end{cases}.$$

Lema 2.2.1 Fie $M = (D, I)$ o L-structură, $s \in [V \rightarrow D]$,

$$\sigma = \{ t_1 \mid x_1, ..., t_n \mid x_n \} \in SUBST.$$

Pentru orice $\alpha \in TERM \cup FORM$, $(\alpha\sigma)^I(s) = \alpha^I(s \cdot \sigma)$.

Demonstraţie Demonstrăm proprietatea afirmată în enunţ prin inducţie structurală.

Fie $t \in TERM$,

$a)$ dacă $t \in CS$, atunci

$$(t\sigma)^I(s) = t^I(s) = I_{CS}(t) = t^I(s \cdot \sigma)$$

$b)$ dacă $t \in V \setminus \{x_1, ..., x_n\}$, atunci

$$(t\sigma)^I(s) = t^I(s) = s(t) = s \cdot \sigma(t) = t^I(s \cdot \sigma)$$

$c)$ dacă $t = x_i$, atunci

$$(t\sigma)^I(s) = (t_i)^I(s) = t^I(s \cdot \sigma)$$

$d)$ dacă $t = fp_1...p_{r(f)}$ pentru anume $f \in FS$,

$$\begin{aligned}(t\sigma)^I(s) &= \left(fp_1\sigma...p_{r(f)}\sigma\right)^I(s) = f^I\left((p_1\sigma)^I(s), ..., \left(p_{r(f)}\sigma\right)^I(s)\right) = \\ &= f^I\left(p_1^I(s \cdot \sigma), ..., p_{r(f)}^I(s \cdot \sigma)\right) = t^I(s \cdot \sigma).\end{aligned}$$

De asemenea, pentru $\alpha \in ATOM$,

$a)$ dacă $\alpha \in PS$ şi $r(\alpha) = 0$, atunci

$$(\alpha\sigma)^I(s) = \alpha^I(s) = I_{PS}(\alpha) = \alpha^I(s \cdot \sigma),$$

$b)$ dacă $\alpha = \pi p_1...p_{r(\pi)}$ pentru anume $\pi \in PS$ şi $r(\pi) \geqslant 1$, $p_i \in TERM$, $1 \leqslant i \leqslant r(\pi)$, atunci

$$\begin{aligned}(\alpha\sigma)^I(s) &= \pi^I\left((p_1\sigma)^I(s), ..., \left(p_{r(\pi)}\sigma\right)^I(s)\right) = \\ &= \pi^I\left(p_1^I(s \cdot \sigma), ..., p_{r(\pi)}^I(s \cdot \sigma)\right) = \alpha^I(s \cdot \sigma)\end{aligned}$$

Pentru $\alpha \in FORM \setminus ATOM$,

$a)$ dacă $\alpha = (\neg\beta)$, $FV(\alpha) = FV(\beta)$ deci

$$\begin{aligned}(\alpha\sigma)^I(s) &= (\neg\beta\sigma)^I(s) = \neg(\beta\sigma)^I(s) = \\ &= \neg\beta^I(s \cdot \sigma) = (\neg\beta)^I(s \cdot \sigma) = \alpha^I(s \cdot \sigma)\end{aligned}$$

$b)$ Un argument similar permite stabilirea aceleiaşi concluzii, dacă $\alpha = (\beta\rho\gamma)$ pentru $\rho \in L \setminus \{\neg\}$, deoarece $FV(\alpha) = FV(\beta) \cup FV(\gamma)$ şi $FV(\alpha) \cap BV(\alpha) = \emptyset$.

$c)$ dacă $\alpha = \forall x\beta$ şi $x = x_i \in \{x_1, ..., x_n\}$, atunci

$$\alpha\sigma = \forall x\beta\left(\sigma \setminus \{t_i \mid x_i\}\right).$$

Notăm $\sigma_1 = \sigma\setminus\{t_i \mid x_i\}$; evident $\alpha\sigma = \alpha\sigma_1$; $(\alpha\sigma_1)^I(s) = T$, dacă şi numai dacă pentru orice $a \in D$, $(\beta\sigma_1)^I(s[x_i := a]) = T$.

Utilizând ipoteza inductivă, obţinem că pentru orice $a \in D$,

$$(\beta\sigma_1)^I(s[x_i := a]) = \beta^I(s_1 \cdot \sigma_1),$$

unde $s_1 = s[x_i := a]$.

Deoarece

$$\begin{aligned}
&s_1 \cdot \sigma_1 = \\
&= s[x_i := a][x_1 := t_1^I(s_1), ..., x_{i-1} := t_{i-1}^I(s_1), x_{i+1} := t_{i+1}^I(s_1), ...\\
&..., x_n := t_n^I(s_1)] = s\left[x_1 := t_1^I(s_1), ..., x_i := a, ..., x_n := t_n^I(s_1)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
s\left[x_1 := t_1^I(s), ..., x_i := a, ..., x_n := t_n^I(s)\right] = s[x_1 := t_1^I(s), ...\\
..., x_{i-1} := t_{i-1}^I(s), x_i := t_i^I(s), x_{i+1} := t_{i+1}^I(s) ...\\
..., x_n := t_n^I(s)][x_i := a] = s \cdot \sigma[x_i := a].
\end{gathered}$$

Obţinem astfel că pentru orice $a \in D$, $s_1 \cdot \sigma_1 = s \cdot \sigma[x_i := a]$, deci $(\alpha\sigma_1)^I(s) = T$, dacă şi numai dacă pentru orice $a \in D$,

$$\beta^I(s \cdot \sigma[x_i := a]) = T.$$

Rezultă $(\alpha\sigma_1)^I(s) = T$, dacă şi numai dacă $\alpha^I(s \cdot \sigma) = T$, deci

$$(\alpha\sigma)^I(s) = \alpha^I(s \cdot \sigma).$$

$d)$ dacă $\alpha = \forall x\beta$ şi $x \notin \{x_1, ..., x_n\}$, atunci $\alpha\sigma = \forall x\beta\sigma$
$(\alpha\sigma)^I(s) = T$, dacă şi numai dacă pentru orice

$$a \in D, (\beta\sigma)^I(s[x_i := a]) = T.$$

Utilizând ipoteza inductivă, obţinem că pentru orice $a \in D$,

$$(\beta\sigma)^I(s[x_i := a]) = \beta^I(s[x_i := a] \cdot \sigma).$$

Deoarece

$$\begin{aligned}
&s[x_i := a] \cdot \sigma = s\left[x_1 := t_1^I(s_1), ..., x_i := a, ..., x_n := t_n^I(s_1)\right] = \\
&= s\left[x_1 := t_1^I(s), ..., x_i := a, ..., x_n := t_n^I(s)\right] = \\
&= s[x_1 := t_1^I(s), ..., x_{i-1} := t_{i-1}^I(s), x_i := t_i^I(s),\\
&\qquad x_{i+1} := t_{i+1}^I(s) ..., x_n := t_n^I(s)][x_i := a] = s \cdot \sigma[x_i := a]
\end{aligned}$$

rezultă $(\alpha\sigma)^I(s) = T$, dacă şi numai dacă pentru orice $a \in D$,

$$\beta^I(s \cdot \sigma[x_i := a]),$$

deci dacă şi numai dacă $(\forall x\beta)^I(s \cdot \sigma) = T$ ceea ce evident implică

$$(\alpha\sigma)^I(s) = \alpha^I(s \cdot \sigma).$$

e) dacă $\alpha = \forall x\beta$, concluzia afirmată în enunţ poate fi stabilită pe baza unui argument analog justificărilor considerate în cazurile (*c*) respectiv (*d*).

Corolar Dacă $M = (D, I)$ este o L-structură, $\alpha \in FORM$,
$\sigma = \{t_1 \mid x_1, ..., t_n \mid x_n\} \in SUBST$, atunci α este de asemenea validabilă în M, dacă şi numai dacă $\alpha\sigma$ este validabilă în M.

Într-adevăr, deoarece pentru orice $\alpha \in FORM$, $(\alpha\sigma)^I(s) = \alpha^I(s \cdot \sigma)$ obţinem $M \models \alpha\sigma(s)$, dacă şi numai dacă $M \models \alpha(s \cdot \sigma)$.

Definiţia 2.2.7 Fie $M = (D, I)$ o L-structură şi $\alpha \in FORM$. Spunem că α este validabilă (satisfiabilă) în M dacă există $s \in [V \to D]$, astfel încât $M \models \alpha[s]$. Formula α este validabilă, dacă există o
L-structură M, astfel încât α este validabilă în M.

Definiţia 2.2.8 Formula α este validă în L-structura M, dacă $M \models \alpha[s]$ pentru orice asociere s. În acest caz spunem că M este model pentru α şi notăm $M \models \alpha$. Mulţimea modelelor formulei α este notată $M(\alpha)$.

Lema 2.2.2 Fie $M = (D, I)$ o L-structură.

Dacă $\alpha \in TERM \cup FORM$, astfel încât $FV(\alpha) = \emptyset$, atunci pentru orice $s_1, s_2 \in [V \to D]$, $\alpha^I(s_1) = \alpha^I(s_2)$.

Demonstraţie Demonstrăm prin inducţie structurală că dacă
$t \in TERM$, astfel încât $FV(t) = \emptyset$, atunci pentru orice
$s_1, s_2 \in [V \to D]$, $t^I(s_1) = t^I(s_2)$. Concluzia este evidentă în cazul $t \in CS$.

Dacă $t = ft_1...t_{r(f)}$ pentru anume $f \in FS$, cum $FV(t) = \bigcup_{i=1}^{r(f)} FV(t_i)$ rezultă $FV(t_i) = \emptyset$, $1 \leqslant i \leqslant r(f)$, deci pentru orice $s_1, s_2 \in [V \to D]$, $t_i^I(s_1) = t_i^I(s_2)$, $1 \leqslant i \leqslant r(f)$.

Obţinem

$$t^I(s_1) = f^I\left(t_1^I(s_1), ..., t_{r(f)}^I(s_1)\right) = f^I\left(t_1^I(s_2), ..., t_{r(f)}^I(s_2)\right) = t^I(s_2).$$

Demonstrăm prin inducţie structurală că dacă α este formulă închisă (*Definiţia* 2.1.8), atunci pentru orice $s_1, s_2 \in [V \to D]$,
$\alpha^I(s_1) = \alpha^I(s_2)$.

a) Dacă $\alpha \in ATOM$, atunci $\alpha \in PS$ şi $r(\alpha) = 0$ sau $\alpha = \pi t_1...t_{r(\pi)}$ pentru anume $\pi \in PS$ şi $r(\pi) \geqslant 1$. Proprietatea este imediată pentru $\alpha \in PS$ cu
$r(\alpha) = 0$, deoarece pentru orice valuaţie s, $\alpha^I(s) = I_{PS}(\alpha)$.

Dacă $\alpha = \pi t_1 ... t_{r(\pi)}$ pentru anume $\pi \in PS$ şi $r(\pi) \geqslant 1$, atunci $FV(t_i) = \emptyset$, $1 \leqslant i \leqslant r(\pi)$.

Rezultă $t_i^I(s_1) = t_i^I(s_2)$, $1 \leqslant i \leqslant r(\pi)$, deci

$$\alpha^I(s_1) = \pi^I\left(t_1^I(s_1), ..., t_{r(\pi)}^I(s_1)\right) = \pi^I\left(t_1^I(s_2), ..., t_{r(\pi)}^I(s_2)\right) = \alpha^I(s_2).$$

b) Dacă $\alpha = (\neg\beta)$ rezultă $FV(\beta) = \emptyset$. Conform ipotezei inductive, pentru orice $s_1, s_2 \in [V \to D]$, $\beta^I(s_1) = \beta^I(s_2)$, ceea ce evident implică $\alpha^I(s_1) = \alpha^I(s_2)$.

c) Un argument similar permite stabilirea aceleiaşi concluzii, dacă $\alpha = (\beta\rho\gamma)$ pentru anume $\rho \in L \setminus \{\neg\}$.

d) Presupunem $\alpha = \forall x\beta$. Deoarece $FV(\alpha) = FV(\beta) \setminus \{x\}$ rezultă $FV(\beta) \in \{\{x\}, \emptyset\}$. Evident în ambele cazuri, pentru orice $a \in D$, $\beta^I(s_1[x := a]) = \beta^I(s_2[x := a])$, deci $\alpha^I(s_1) = \alpha^I(s_2)$.

e) Dacă $\alpha = \exists x\beta$, atunci pe baza unui argument analog obţinem concluzia afirmată în enunţul lemei.

Corolar Fie $\alpha \in FORM_0$. Dacă $M = (D, I)$ este o L-structură atunci α este validabilă în M, dacă şi numai dacă α este validă în M.

Definiţia 2.2.9 Formula α este validă (tautologie), dacă α este validă în orice L-structură M.

Reprezentăm formulele α valide prin $\models \alpha$.

Observaţie Pentru $\alpha \in FORM$, $FV(\alpha) = \{x_1, ..., x_n\}$ fie $\overline{\alpha} = \forall x_1 ... \forall x_n \alpha$, $\underline{\alpha} = \exists x_1 ... \exists x_n \alpha$ închiderile universală şi respectiv existenţială ale formulei α. Evident $\overline{\alpha}, \overline{\alpha} \in FORM_0$. Pentru orice L-structură $M = (D, I)$, α este validabilă în M, dacă şi numai dacă $\underline{\alpha}$ este validabilă în M, deci dacă şi numai dacă $\underline{\alpha}$ este validă în M. De asemenea, α este validă în M, dacă şi numai dacă $\overline{\alpha}$ este validă în M.

Lema 2.2.3 Formulele $(\forall x\alpha \to \exists x\alpha)$, $(\exists x\forall y\alpha \to \forall y\exists x\alpha)$ sunt valide pentru orice $\alpha \in FORM$, $x, y \in V$, $x \neq y$.

Demonstraţie Pentru $M = (D, I)$ o L-structură arbitrară, şi $s \in [V \to D]$:

Dacă $(\forall x\alpha)^I(s) = F$, atunci

$$(\forall x\alpha \to \exists x\alpha)^I(s) = F \to (\exists x\alpha)^I(s) = T.$$

Dacă $(\forall x\alpha)^I(s) = T$, atunci pentru orice $a \in D$,

$$\alpha^I(s[x := a]) = T.$$

Deoarece $D \neq \emptyset$, rezultă că există $a \in D$, astfel încât $\alpha^I(s[x := a]) = T$, deci $(\exists x\alpha)^I(s) = T$.

Obţinem şi în acest caz, $(\forall x\alpha \to \exists x\alpha)^I(s) = T \to T = T$, deci $\models (\forall x\alpha \rightarrow \exists x\alpha)$.

Analog, dacă $(\exists x\forall y\alpha)^I(s) = F$, atunci $(\exists x\forall y\alpha \rightarrow \forall y\exists x\alpha)^I(s) = T$.

Dacă $(\exists x\forall y\alpha)^I(s) = T$, atunci există $a_0 \in D$, astfel încât

$$(\forall y\alpha)^I(s)^I(s[x := a]) = T,$$

deci există $a_0 \in D$, astfel încât pentru orice $b \in D$,

$$\alpha^I(s)^I(s[x := a_0, y := b]) = \alpha^I(s)^I(s[y := b][x := a_0]) = T.$$

Deoarece $D \neq \emptyset$, rezultă că $(\exists x\alpha)^I(s[y := b]) = T$ pentru orice $b \in D$, deci $(\forall y\exists x\alpha)^I(s) = T$, ceea ce implică

$$(\exists x\forall y\alpha \rightarrow \forall y\exists x\alpha)^I(s) = T \rightarrow T = T.$$

Obţinem în final $\models (\exists x\forall y\alpha \rightarrow \forall y\exists x\alpha)$.

În particular rezultă că există formule valide. Se demonstrează cu uşurinţă că un alt exemplu de formulă validă este $(\alpha \vee (\urcorner\alpha))$. Convenim să notăm cu $\top$ o formulă validă arbitrară.

Definiţia 2.2.10 Formula α este invalidabilă dacă pentru orice L-structură M şi orice valuaţie $s, \alpha^I(s) = F$.

Observaţie Există formule invalidabile. Într-adevăr, pentru orice $\alpha \in FORM$, $(\alpha \wedge (\urcorner\alpha))$ este formulă invalidabilă. Convenim să notăm cu $\perp$ o formulă invalidabilă oarecare.

Definiţia 2.2.11 Mulţimea de formule H este validabilă, dacă există o L-structură M şi există $s \in [V \rightarrow D]$, astfel încât $M \models \alpha[s]$ pentru orice $\alpha \in H$.

Definiţia 2.2.12 L-structura M este model pentru mulţimea de formule H dacă M este model pentru toate formulele din H. Convenim să notăm în acest caz, $M \models H$.

Dacă $M(H)$ este familia modelelor mulţimii H, atunci

$$M(H) = \bigcap_{\alpha \in H} M(\alpha).$$

Definiţia 2.2.13 Mulţimea de formule H este validă, dacă orice L-structură M este model pentru H. Proprietatea de validitate a unei mulţimi de formule H este reprezentată $\models H$.

Definiţia 2.2.14 Fie $H \subset FORM$. Formula α este consecinţă logică a mulţimii H, dacă pentru orice L-structură M şi orice $s \in [V \rightarrow D]$, astfel încât $\beta^I(s) = T$ pentru toate formulele $\beta \in H$, rezultă

$\alpha^I(s) = T$. Dacă α este consecinţă logică a mulţimii H, notăm $H \models \alpha$.

Exemplul 2.2.5 Fie $P, Q \in PS$, $a \in CS$.
Dacă $H = \{Pa,\ \forall x\,(Px \to Qx)\}$, $\alpha = Qa$, atunci $H \models \alpha$.

Într-adevăr, fie $(D.I)$ model pentru H, deci $P^I\left(a^I\right) = T$ şi pentru orice $s \in [V \to D]$ şi orice $c \in D$, $(Px \to Qx)^I\,(s\,[x := c]) = T$. În particular rezultă $P^I\left(a^I\right) \to Q^I\left(a^I\right) = T$, deci $Q^I\left(a^I\right) = T$, adică $(Qa)^I = T$.

Scopul urmărit prin introducerea limbajului formulelor este obţinerea unei modalităţi pentru descrierea "lumilor posibile", adică a structurilor algebrice. Din acest punct de vedere este naturală concentrarea pe mulţimea formulelor închise. În continuare, consideraţiile vor fi efectuate în exclusivitate pentru mulţimea formulelor închise. În plus, vom presupune că formulele nu conţin cuantificări multiple asupra variabilelor. Pentru o mulţime de formule închise H şi o
L-structură M întrebarea dacă H este consistentă cu această "lume" (validată sau confirmată de M) este exprimată prin proprietatea $M \models H$, respectiv consistenţa universală a mulţimii H revine la proprietatea de validitate a mulţimii H.

De asemenea, pentru $H \subset FORM_0$, $\alpha \in FORM_0$, formula α este consecinţă logică a mulţimii H, dacă şi numai dacă orice lume consistentă pentru H este o lume consistentă şi pentru α, adică orice L-structură model pentru H este model şi pentru α. În general este dificilă verificarea proprietăţii $H \models \alpha$. O modalitate alternativă este stabilită de *Lema* 2.2.4.

Lema 2.2.4 Dacă $H \subset FORM_0$, $\alpha \in FORM_0$, atunci $H \models \alpha$, dacă şi numai dacă $H \cup \{(\neg\alpha)\}$ este invalidabilă.

Demonstraţie Presupunem $H \models \alpha$. Fie $M = (D, I)$ o L-structură arbitrară. Evident, dacă M nu este model pentru H, atunci M nu este model nici pentru $H \cup \{(\neg\alpha)\}$. Dacă M este model pentru H, atunci M este model şi pentru α, deci pentru orice valuaţie $s \in [V \to D]$, $(\neg\alpha)^I\,(s) = \neg\alpha^I\,(s) = F$, ceea ce implică M falsifică $H \cup \{(\neg\alpha)\}$. Reciproc, presupunem că $H \cup \{(\neg\alpha)\}$ este invalidabilă. Dacă H este invalidabilă, atunci din *Definiţia* 2.2.14 rezultă $H \models \alpha$. Presupunem H validabilă. Fie $M = (D, I)$ model arbitrar pentru H. Rezultă că pentru orice valuaţie $s \in [V \to D]$, $(\neg\alpha)^I\,(s) = F$, deci $\alpha^I\,(s) = T$, adică $H \models \alpha$.

Lema 2.2.5 Dacă $H = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset FORM_0$, $\alpha \in FORM_0$, atunci $H \models \alpha$, dacă şi numai dacă $\models (\beta_n \to \alpha)$ unde

$\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_i = (\alpha_i \wedge \beta_{i-1})$, $i = 2, ..., n$.

Demonstraţie Convenim să notăm $\beta_i = \bigwedge\limits_{j=1}^{i} \alpha_j$, $i = 1, ..., n$. Evident pentru orice $i = 1, ..., n$, $M\,(\beta_i) = \bigcap\limits_{j=1}^{i} M\,(\alpha_j)$, deci $M\,(\beta_n) = M\,(H)$.

Presupunem $H \models \alpha$, deci $M\,(H) \subset M\,(\alpha)$. Fie $M = (D, I)$ o L-structură arbitrară.

Evident, dacă $M \in M(H)$, atunci $M \in M((\beta_n \to \alpha))$.

Dacă $M \notin M(H)$, atunci pentru orice valuaţie s,

$$(\beta_n \to \alpha)^I(s) = \beta_n^I(s) \to \alpha^I(s) = F \to \alpha^I(s) = T.$$

Rezultă $\models (\beta_n \to \alpha)$.

Presupunem $\models (\beta_n \to \alpha)$. Dacă $M(H) = \emptyset$, atunci $M(H) \subset M(\alpha)$, deci $H \models \alpha$.

Dacă $M(H) \neq \emptyset$ atunci pentru orice $M = (D, I)$ o L-structură model pentru H rezultă $M \in M(\beta_n)$. Pentru orice valuaţie s obţinem $T = (\beta_n \to \alpha)^I(s) = T \to \alpha^I(s)$, deci $\alpha^I(s) = T$.

Rezultă $M(H) \subset M(\alpha)$, deci $H \models \alpha$.

Definiţia 2.2.15 Formulele α, β sunt logic (semantic) echivalente, notat $\alpha \equiv \beta$, dacă pentru orice L-structură $M = (D, I)$ şi pentru orice valuaţie $s \in [V \to D]$, $\alpha^I(s) = \beta^I(s)$.

În particular, dacă α, β sunt formule închise, atunci $\alpha \equiv \beta$, dacă şi numai dacă au aceeaşi familie de modele, $M(\alpha) = M(\beta)$.

Observaţie Relaţia de echivalenţă semantică este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea formulelor.

Lema 2.2.6 Pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$, $x \in V$,

ι) $(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$

$\iota\iota$) $(\neg\alpha) \equiv (\alpha \to \perp)$

$\iota\iota\iota$) $(\alpha \to \beta) \equiv ((\neg\alpha) \vee \beta)$

$\iota\nu$) $\alpha \equiv \beta$ dacă şi numai dacă $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$

ν) $(\neg\forall x\alpha) \equiv \exists x(\neg\alpha)$

$\nu\iota$) $(\neg\exists x\alpha) \equiv \forall x(\neg\alpha)$

Demonstraţie Proprietăţile $(\iota) - (\iota\nu)$ rezultă imediat pe baza *Definiţiei* 2.2.14.

ν) Fie $M = (D, I)$ o L-structură şi fie $s \in [V \to D]$ o asociere arbitrară.

Deoarece $(\neg\forall x\alpha)^I(s) = T$, dacă şi numai dacă $(\forall x\alpha)^I(s) = F$, deci dacă şi numai dacă există $a \in D$, astfel încât

$\alpha^I(s[x := a]) = F$ şi respectiv $(\exists x(\neg\alpha))^I(s) = T$, dacă şi numai dacă există $b \in D$ astfel încât $((\neg\alpha))^I(s[x := b]) = T$, adică $\alpha^I(s[x := b]) = F$, rezultă $(\neg\forall x\alpha)^I(s) = T$, dacă şi numai dacă $(\exists x(\neg\alpha))^I(s) = T$, deci

$$(\neg\forall x\alpha)^I(s) = (\exists x(\neg\alpha))^I(s).$$

$\nu\iota$) Fie $M = (D, I)$ o L-structură şi fie $s \in [V \to D]$ o asociere arbitrară.

$(\neg\exists x\alpha)^I(s) = T$, dacă şi numai dacă $(\exists x\alpha)^I(s) = F$, deci dacă şi numai dacă pentru orice $a \in D$, $\alpha^I(s[x := a]) = F$.

De asemenea, $(\forall x (\neg\alpha))^I (s) = T$, dacă şi numai dacă pentru orice $a \in D$, $(\neg\alpha)^I (s [x := a]) = T$, deci $\alpha^I (s [x := a]) = F$. Rezultă

$$(\neg\exists x\alpha)^I (s) = (\forall x (\neg\alpha))^I (s) .$$

Lema 2.2.7 Pentru orice $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in FORM$, $x \in V$, astfel încât $\alpha \equiv \alpha'$ şi $\beta \equiv \beta'$,

ι) $(\neg\alpha) \equiv (\neg\alpha')$

$\iota\iota$) $(\alpha\rho\beta) \equiv (\alpha'\rho\beta')$ pentru $\rho \in L \setminus \{\neg\}$

$\iota\iota\iota$) $(\forall x\alpha) \equiv (\forall x\alpha')$

$\iota\upsilon$) $(\exists x\alpha) \equiv (\exists x\alpha')$

Demonstraţie Justificarea proprietăţilor (ι) şi $(\iota\iota)$ este evidentă.

$\iota\iota\iota$) Fie $M = (D, I)$ o L-structură şi fie $s \in [V \to D]$ o asociere arbitrară. $(\forall x\alpha)^I (s) = T$, dacă şi numai dacă pentru orice $a \in D$, $\alpha^I (s [x := a]) = T$.

Deoarece $\alpha \equiv \alpha'$,pentru orice $a \in D$, $\alpha^I (s [x := a]) = \alpha'^I (s [x := a])$, deci pentru orice $a \in D$, $\alpha^I (s [x := a]) = T$, dacă şi numai dacă $\alpha'^I (s [x := a]) = T$, ceea ce implică $(\forall x\alpha)^I (s) = (\forall x\alpha')^I (s)$.

$\iota\upsilon$) Fie $M = (D, I)$ o L-structură şi fie $s \in [V \to D]$ o asociere arbitrară.

$(\exists x\alpha)^I (s) = T$, dacă şi numai dacă există $a \in D$ astfel încât

$\alpha^I (s [x := a]) = T$. Deoarece $\alpha \equiv \alpha'$, pentru orice $a \in D$, $\alpha^I (s [x := a]) = \alpha'^I (s [x := a])$, deci $(\exists x\alpha)^I (s) = (\exists x\alpha')^I (s)$.

Lema 2.2.8 Pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in FORM$,

ι) $\alpha \vee \bot \equiv \alpha$; $\alpha \wedge \bot \equiv \bot$

$\iota\iota$) $\alpha \vee \top \equiv \top$; $\alpha \wedge \top \equiv \alpha$

$\iota\iota\iota$) $(\neg (\neg\alpha)) \equiv \alpha$

$\iota\upsilon$) $(\neg (\alpha \wedge \beta)) \equiv ((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))$

υ) $(\neg (\alpha \vee \beta)) \equiv ((\neg\alpha) \wedge (\neg\beta))$

$\upsilon\iota$) $(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha)$; $(\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha)$

$\upsilon\iota\iota$) $(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$;

$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$

$\upsilon\iota\iota\iota$) $(\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)) \equiv \alpha$; $(\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)) \equiv \alpha$

$\iota\varkappa$) $(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$;

$(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$

Demonstraţie Justificarea proprietăţilor $(\iota) - (\iota\varkappa)$ este imediată şi este propusă ca exerciţiu cititorului.

Observaţie Pe baza proprietăţilor stabilite de lemele precedente, rezultă că pe mulţimea claselor de echivalenţă $\widehat{FORM} = FORM \mid_{\equiv}$ poate fi identificată o structură de algebră Boole (algebra Lindenbaum asociată limbajului), cu primul element $\mathbf{0} = \widehat{\bot}$ şi $\mathbf{1} = \widehat{\top}$ ultimul element, unde $\widehat{\alpha} = \{\beta \,|\beta \in FORM, \ \beta \equiv \alpha\}$.

Lema 2.2.9 Fie $\alpha, \beta \in FORM$, $x \in V$, astfel încât $\beta \rangle x \langle$

ι) $(\forall x\alpha \wedge \beta) \equiv \forall x (\alpha \wedge \beta)$

$\iota\iota$) $(\exists x\alpha \wedge \beta) \equiv \exists x (\alpha \wedge \beta)$
$\iota\iota\iota$) $(\forall x\alpha \vee \beta) \equiv \forall x (\alpha \vee \beta)$
$\iota\upsilon$) $(\exists x\alpha \vee \beta) \equiv \exists x (\alpha \vee \beta)$
υ) $(\forall x\alpha \vee \forall x\beta) \equiv \forall x (\alpha \vee \beta)$
$\upsilon\iota$) $(\exists x\alpha \wedge \exists x\beta) \equiv \exists x (\alpha \wedge \beta)$

Demonstraţie

ι)Pentru $M = (D, I)$ o L-structură şi $s \in [V \to D]$ o asociere arbitrară, obţinem $(\forall x\alpha \wedge \beta)^I (s) = T$, dacă şi numai dacă

$(\forall x\alpha)^I (s) = \beta^I (s) = T$, deci dacă şi numai dacă $\beta^I (s) = T$ şi pentru orice $a \in D$, $\alpha^I (s [x := a]) = T$.

Deoarece $\beta \rangle x \langle$ rezultă $\beta^I (s) = \beta^I (s [x := a])$ deci,

$(\forall x\alpha \wedge \beta)^I (s) = T$ dacă şi numai dacă pentru orice $a \in D$,

$$\alpha^I (s [x := a]) = \beta^I (s [x := a]) = T$$

ceea ce este echivalent cu $(\forall x (\alpha \wedge \beta))^I (s) = T$.
Rezultă $(\forall x\alpha \wedge \beta)^I (s) = (\forall x (\alpha \wedge \beta))^I (s)$, deci $(\forall x\alpha \wedge \beta) \equiv \forall x (\alpha \wedge \beta)$.

$\iota\iota$) Proprietatea poate fi stabilită printr-un argument analog argumentului precedent.

$\iota\iota\iota$) $(\forall x\alpha \vee \beta)^I (s) = F$ dacă şi numai dacă $(\forall x\alpha)^I (s) = \beta^I (s) = F$, deci dacă şi numai dacă $\beta^I (s) = T$ şi există $a \in D$, astfel încât $\alpha^I (s [x := a]) = F$. Deoarece $\beta \rangle x \langle$ rezultă $\beta^I (s) = \beta^I (s [x := a])$ deci, $(\forall x\alpha \vee \beta)^I (s) = F$, dacă şi numai dacă există $a \in D$, astfel încât $\alpha^I (s [x := a]) = \beta^I (s [x := a]) = F$, ceea ce este echivalent cu $(\forall x (\alpha \vee \beta))^I (s) = F$.
Rezultă $(\forall x\alpha \vee \beta)^I (s) = (\forall x (\alpha \vee \beta))^I (s)$, deci $(\forall x\alpha \vee \beta) \equiv \forall x (\alpha \vee \beta)$.

$\iota\upsilon$) Proprietatea poate fi stabilită printr-un argument analog argumentului precedent.

υ) $(\forall x\alpha \vee \forall x\beta)^I (s) = F$, dacă şi numai dacă

$$(\forall x\alpha)^I (s) = (\forall x\beta)^I (s) = F,$$

dacă şi numai dacă există $a \in D$ si exista $b \in D$, astfel încât

$$\alpha^I (s [x := a]) = \beta^I (s [x := b]) = F.$$

Deoarece $\beta \rangle x \langle$, pentru orice $c \in D$, $\beta^I (s [x := c]) = \beta^I (s)$, deci

$$\beta^I (s [x := b]) = \beta^I (s [x := a]) = F.$$

Obţinem astfel, $(\forall x\alpha \vee \forall x\beta)^I (s) = F$, dacă şi numai dacă există $a \in D$, astfel încât $\alpha^I (s [x := a]) = \beta^I (s [x := a]) = F$, deci dacă şi numai dacă $(\forall x (\alpha \vee \beta))^I (s) = F$.

Rezultă
$$(\forall x\alpha \vee \forall x\beta)^I(s) = (\forall x(\alpha \vee \beta))^I(s),$$
deci $(\forall x\alpha \vee \forall x\beta) \equiv \forall x(\alpha \vee \beta)$.

$\upsilon\iota$) $(\exists x\alpha \wedge \exists x\beta)^I(s) = T$, dacă şi numai dacă
$$(\exists x\alpha)^I(s) = (\exists x\beta)^I(s) = T,$$
deci dacă şi numai dacă există $a \in D$ şi există $b \in D$, astfel încât,
$$\alpha^I(s[x := a]) = \beta^I(s[x := b]) = T.$$
Dar $\beta^I(s[x := b]) = \beta^I(s[x := a])$, deci $(\exists x\alpha \wedge \exists x\beta)^I(s) = T$, dacă şi numai dacă există $a \in D$, astfel încât
$$\alpha^I(s[x := a]) = \beta^I(s[x := a]) = T.$$
În concluzie $(\exists x\alpha \wedge \exists x\beta)^I(s) = T$, dacă şi numai dacă

$\exists x(\alpha \wedge \beta)^I(s) = T$, ceea ce evident implică $(\exists x\alpha \wedge \exists x\beta) \equiv \exists x(\alpha \wedge \beta)$.

Observaţie Dacă $\beta\langle x\rangle$, relaţiile (υ), $(\upsilon\iota)$ nu sunt în general verificate.

Lema 2.2.10 Pentru orice $\alpha \in FORM$, $x \in V$,

ι) $\forall x\alpha \equiv (\urcorner\exists x(\urcorner\alpha))$,

$\iota\iota$) $\exists x\alpha \equiv (\urcorner\forall x(\urcorner\alpha))$.

Demonstraţie Utilizând proprietăţile stabilite de *Lema* 2.2.5 şi *Lema* 2.2.7 obţinem
$$\begin{aligned}(\urcorner\exists x(\urcorner\alpha)) &\equiv \forall x(\urcorner(\urcorner\alpha)) \equiv \forall x\alpha \\ (\urcorner\forall x(\urcorner\alpha)) &\equiv \exists x(\urcorner(\urcorner\alpha)) \equiv \exists x\alpha\end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, cuantificarea universală poate fi "definită" în funcţie de cuantificarea existenţială (ι) şi reciproc $(\iota\iota)$, concluzie care permite simplificarea unor argumentaţii teoretice prin reducerea numărului de cazuri care trebuie analizate .

Lema 2.2.11 Pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$, $x, y \in V$, $t \in TERM$,

1) $\exists x\exists y\alpha \equiv \exists y\exists x\alpha$

2) $\forall x\forall y\alpha \equiv \forall y\forall x\alpha$

3) $(\forall x\alpha \rightarrow \alpha\{t \mid x\}) \equiv \top$

4) $(\alpha\{t \mid x\} \rightarrow \exists x\alpha) \equiv \top$

Demonstraţie Proprietăţile (1) şi (2) pot fi stabilite fără dificultate utilizând argumente similare argumentelor considerate în demonstraţiile precedente.

3) Fie $M = (D, I)$ o L-structură şi $s \in [V \rightarrow D]$ o asociere arbitrară.

Dacă $(\forall x\alpha)^I(s) = F$, atunci $(\forall x\alpha \rightarrow \alpha\{t \mid x\})^I(s) = T$.

Dacă $(\forall x\alpha)^I(s) = T$, atunci pentru orice $a \in D$, $\alpha^I(s[x := a]) = T$. În particular, pentru $a = t^I(s)$, obţinem $\alpha^I\left(s\left[x := t^I(s)\right]\right) = T$.

Deoarece

$$(\alpha\{t \mid x\})^I(s) = \alpha^I\left(s\left[x := t^I(s)\right]\right),$$

rezultă $(\alpha\{t \mid x\})^I(s) = T$, deci

$$(\forall x\alpha \to \alpha\{t \mid x\})^I(s) = T \to T = T.$$

4) Analog, dacă $(\alpha\{t \mid x\})^I(s) = F$, atunci

$$(\alpha\{t \mid x\} \to \exists x\alpha)^I(s) = T.$$

Dacă $(\alpha\{t \mid x\})^I(s) = F$, atunci $\alpha^I\left(s\left[x := t^I(s)\right]\right) = T$. Deoarece pentru $a = t^I(s)$, $\alpha^I\left(s\left[x := t^I(s)\right]\right) = T$, rezultă $(\exists x\alpha)^I(s) = T$, deci $(\alpha\{t \mid x\} \to \exists x\alpha)^I(s) = T$.

În consecinţă, pentru orice L-structură $M = (D, I)$ şi pentru orice valuaţie $s \in [V \to D]$, $(\alpha\{t \mid x\} \to \exists x\alpha)^I(s) = T$, deci

$$(\alpha\{t \mid x\} \to \exists x\alpha) \equiv \mathsf{T}.$$