

1 Sintaxa limbajului

Vocabularul limbajului este $V \cup L \cup S$, unde

Limbajele de primul ordin au fost introduse de Frege în 1879. Comparativ cu limbajul calculului cu propoziții, structura unui limbaj de primul ordin este mult mai complexă și oferă un cadru suficient pentru reprezentarea unei clase relativ largi de propoziții dintr-un limbaj natural. În contextul sistemelor bazate pe cunoștințe, un limbaj de primul ordin este un sistem formal atașat unui astfel de sistem și permite proiectarea, analiza și controlul mecanismelor inferențiale în gestiunea cunoștințelor stocate în baza de cunoștințe a sistemului. Convențional, sistemul bazat pe cunoștințe modelat prin intermediul unui anume limbaj de primul ordin, este referit ca interpretare intenționată pentru acel limbaj. În cadrul acestui capitol sunt prezentate sintaxa și semantica unui limbaj de primul ordin, reprezentări normalizate pentru formulele limbajului, modele Herbrand și metode de demonstrare automată bazate pe principiul rezoluției.

2 Sintaxa limbajelor de primul ordin

Vocabularul \bar{V} al unui limbaj de primul ordin conține două tipuri de simboluri și anume simbolurile logice și simbolurile non-logice. Spre deosebire de simbolurile logice, care sunt comune tuturor limbajelor din această clasă, simbolurile non-logice sunt definite în funcție de interpretarea intenționată pentru limbajul respectiv. Definirea mulțimilor de simboluri non-logice pentru construirea unui limbaj de primul ordin aferent unui sistem de cunoștințe dat se numește conceptualizare a sistemului.

Simbolurile logice sunt elementele mulțimii $V \cup L \cup S \cup Q$, unde:

V este mulțimea variabilelor; $V \neq \emptyset$.

$L = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\}$ este mulțimea conectivelor logice: conjuncție, disjuncție, implicație, echivalență și negație.

$S = \{ (,) \}$ este mulțimea simbolurilor de punctuație.

$Q = \{\forall, \exists\}$ este mulțimea cuantificatorilor; simbolul \forall este cuantificatorul universal, respectiv simbolul \exists este cuantificatorul existențial.

Simbolurile non-logice sunt elementele mulțimii $CS \cup FS \cup PS$ unde:

CS este mulțimea constantelor.

FS este mulțimea simbolurilor functoriale. Fiecare functor $f \in FS$ este caracterizat de un număr natural $r(f) \geq 1$ numit aritatea functorului f .

PS este mulțimea simbolurilor predicative. Fiecare predicat

$\pi \in PS$ este caracterizat de un număr natural $r(\pi) \geq 0$ numit aritatea predicatului π .

Presupunem că mulțimile V, L, S, Q, CS, FS, PS sunt două câte două disjuncte.

Vocabularul limbajului este $\bar{V} = V \cup L \cup S \cup Q \cup CS \cup FS \cup PS$; elementele mulțimii $A = \bar{V}^*$ se numesc asamblaje.

Pentru $\alpha \in A$ și $x \in \bar{V}$, indicăm prin $\alpha \langle x \rangle$ faptul că simbolul x apare cel puțin o dată printre simbolurile asamblajului α , respectiv prin $\alpha \rangle x \langle$ situația contrară.

Într-un limbaj de prim ordin identificăm două mulțimi de structuri simbolice de interes și anume mulțimea termenilor $TERM$ și mulțimea formulelor $FORM$.

Definiția 2.1.1 Secvența de asamblaje t_1, \dots, t_n este o secvență generativă termeni (SGT), dacă pentru orice i , $1 \leq i \leq n$, t_i îndeplinește una din condițiile:

- ι) $t_i \in V \cup CS$
- ι) există $f \in FS$ și există indicii $j_1, \dots, j_{r(f)}$ cu $1 \leq j_p < i$,
 $p = 1, \dots, r(f)$ astfel încât $t_i = f t_{j_1} t_{j_2} \dots t_{j_{r(f)}}$

Definiția 2.1.2 Numim termen orice asamblaj t cu proprietatea că există $n \geq 1$ și $t_1, \dots, t_n - SGT$, astfel încât $t_n = t$. Mulțimea termenilor este notată $TERM$.

Observație Dacă t_1, \dots, t_n este SGT , atunci $t_1 \in V \cup CS$ și $t_i \in TERM$, $i = 1, \dots, n$. În particular rezultă $V \cup CS \subset TERM$.

Observație Gramatica BNF care generează limbajul termenilor este:

- $\langle argument \rangle \rightarrow x$ pentru orice $x \in V$
- $\langle argument \rangle \rightarrow c$ pentru orice $c \in CS$
- $\langle functor \rangle \rightarrow f$ pentru orice $f \in FS$
- $\langle lista_argumente \rangle \rightarrow \langle argument \rangle \langle lista_argumente \rangle$
- $\langle termen \rangle \rightarrow \langle argument \rangle \mid \langle functor \rangle \langle lista_argumente \rangle$

împreună cu regula suplimentară ca numărul de termeni din lista de argumente să fie egal cu aritatea simbolului functorial respectiv.

Reprezentarea convențională a structurilor simbolice termenii este prin intermediul arborilor de structură.

Definiția 2.1.3 Arborele T direcționat, cu rădăcină și vârfurile etichetate cu simboluri din mulțimea $V \cup CS \cup FS$ este un arbore de structură termen, dacă pentru orice vârf n al arborelui,

ι) dacă $od(n) = 0$, atunci $\varphi(n) \in V \cup CS$

ι) dacă $od(n) \geq 1$, atunci $\varphi(n) \in FS$ și $r(\varphi(n)) = od(n)$

unde $\varphi(n)$ este eticheta vârfului n .

Construcția unui arbore de structură $T(t)$ pentru reprezentarea termenului $t \in TERM$ poate fi realizată recursiv astfel:

a) dacă $t \in V \cup CS$, atunci $T(t) = (\{r\}, \emptyset)$ și $\varphi(r) = t$

b) dacă $t = ft_1 \dots t_{r(f)}$ pentru anume $f \in FS$ atunci

$$T(t) = \left(\{r\} \cup \bigcup_{i=1}^{r(f)} V(T_i), \bigcup_{i=1}^{r(f)} E(T_i) \cup \{rr_1, \dots, rr_{r(f)}\} \right),$$

unde $T(t_i) = (V(T_i), E(T_i))$, $i = 1, \dots, r(f)$, r este un vârf nou, $r \notin \bigcup_{i=1}^{r(f)} V(T_i)$ și $\varphi(r) = f$.

Exemplul 2.1.1 Simbolurile non-logice ale limbajului de primul ordin al aritmeticii sunt: $CS = \{0\}$, $FS = \{+, *, S\}$, $PS = \{<, \overset{\circ}{=}\}$, unde $r(+)$ = $r(*)$ = $r(<)$ = $r(\overset{\circ}{=})$ = 2, $r(S)$ = 1. Simbolul S desemnează functorul succesor; pentru orice număr natural n , $\underbrace{SS \dots S}_n 0 \triangleq n$.

Observație În acest limbaj, structurile simbolice din mulțimea $TERM$ sunt reprezentări ale expresiilor aritmetice în scriere prefixată.

Fie asamblajul $t = * + * SySSzSSx + xSS0$, unde $x, y, z \in V$.

Secvența de asamblaje $t_1=0$, $t_2 = x$, $t_3 = y$, $t_4 = z$, $t_5 = Sx = St_2$, $t_6 = Sy = St_3$, $t_7 = Sz = St_4$, $t_8 = SSz = St_7$, $t_9 = SSx = St_5$,

$t_{10} = *SySSz = *t_6t_8$, $t_{11} = + * SySSzSSx = +t_{10}t_9$, $t_{12} = S0$,

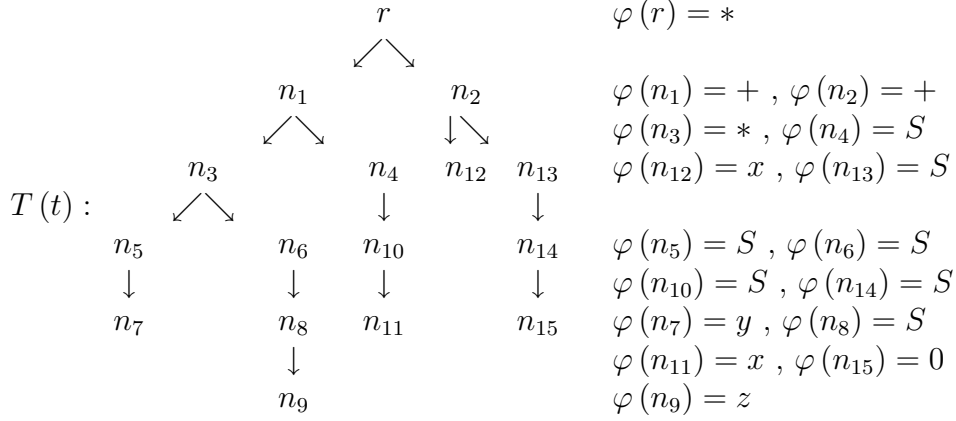
$t_{13} = SS0 = St_{12}$, $t_{14} = +xSS0 = +t_2t_{13}$,

$t_{15} = * + * SySSzSSx + xSS0 = *t_{11}t_{14} = t$

este SGT , deci $t \in TERM$.

Arborele de structură $T(t)$ construit prin aplicarea metodei prezentate

este:



Definiția 2.1.4 Mulțimea atomilor notată *ATOM* este

$$\begin{aligned}
 ATOM = & \{ \pi \mid \pi \in PS, r(\pi) = 0 \} \cup \\
 & \cup \{ \pi t_1 \dots t_{r(\pi)} \mid \pi \in PS, r(\pi) \geq 1, t_1, \dots, t_{r(\pi)} \in TERM \}.
 \end{aligned}$$

Observație Limbajul atomilor este generat de gramatica BNF,

$$\begin{aligned}
 \langle simbol_predicational \rangle & \rightarrow \pi \text{ pentru orice } \pi \\
 \langle lista_termeni \rangle & \rightarrow \langle termen \rangle \mid \langle lista_termeni \rangle \\
 \langle atom \rangle & \rightarrow \langle simbol_predicational \rangle \mid \\
 & \mid \langle simbol_predicational \rangle \langle lista_termeni \rangle
 \end{aligned}$$

împreună cu regula suplimentară ca numărul argumentelor din lista de termeni să fie egal cu aritatea simbolului predicational respectiv.

Reprezentarea convențională a atomilor este prin intermediul arborilor de structură. Pentru $\pi \in PS, r(\pi) = 0$ arborele de structură este $T(\pi) = (\{r\}, \emptyset)$, $\varphi(r) = \pi$. Pentru $\pi \in PS, r(\pi) \geq 1$ și $t_1, \dots, t_{r(\pi)} \in TERM$, arborele de structură corespunzător atomului $\alpha = \pi t_1 \dots t_{r(\pi)}$ este

$$T(\alpha) = \left(\{n\} \cup \bigcup_{i=1}^{r(\pi)} V(t_i), \bigcup_{i=1}^{r(\pi)} E(t_i) \cup \{nn_1, \dots, nn_{r(\pi)}\} \right),$$

unde $T(t_i) = (V(t_i), E(t_i))$ este arborele de structură corespunzător termenului t_i , $i = 1, \dots, r(\pi)$ și $n \notin \bigcup_{i=1}^{r(\pi)} V(t_i)$.

Definiția 2.1.5 Secvența de asamblaje $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ este o secvență generativă formule (*SGF*), dacă pentru orice i , $1 \leq i \leq n$, α_i îndeplinește una din condițiile:

$\iota) \alpha_i \in ATOM$
 $\iota\iota) \text{ există } 1 \leq j < i, \text{ astfel încât } \alpha_i = (\neg \alpha_j)$
 $\iota\iota\iota) \text{ există } 1 \leq j, k < i \text{ și există } \rho \in L \setminus \{\neg\}, \text{ astfel încât } \alpha_i = (\alpha_j \rho \alpha_k)$
 $\iota\nu) \text{ există } 1 \leq j < i \text{ și există } x \in V, \text{ astfel încât } \alpha_i = \forall x \alpha_j$
 $\nu) \text{ există } 1 \leq j < i \text{ și există } x \in V, \text{ astfel încât } \alpha_i = \exists x \alpha_j$
Definiția 2.1.6 Numim formulă orice asamblaj α cu proprietatea că există $n \geq 1$ și $\alpha_1, \dots, \alpha_n - SGF$ $\alpha_n = \alpha$. Mulțimea formulelor este notată $FORM$.
Observație Limbajul formulelor este generat de gramatica

$$\begin{aligned}
 \langle \text{conectiva} \rangle &\rightarrow \wedge | \vee | \rightarrow | \leftrightarrow \\
 \langle \text{cuantificator} \rangle &\rightarrow \forall | \exists \\
 \langle \text{formula} \rangle &\rightarrow \langle \text{atom} \rangle | (\neg \langle \text{formula} \rangle) | \\
 &\quad | ((\langle \text{formula} \rangle \langle \text{conectiva} \rangle \langle \text{formula} \rangle)) | \\
 &\quad | \langle \text{cuantificator} \rangle \langle \text{formula} \rangle .
 \end{aligned}$$

Observație Din *Definiția 2.1.5* rezultă $ATOM \subset FORM$ și dacă $\alpha \in ATOM$, atunci $(\neg \alpha) \in FORM$. Convenim să numim literal orice structură simbolică din mulțimea $ATOM \cup \neg ATOM$.

Exemplul 2.1.2 Reprezentarea simbolică în limbajul de prim ordin al aritmeticii a afirmației "Pentru orice x număr natural, are loc egalitatea $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$ " este,

$$\alpha = \forall x \stackrel{\circ}{=} * + xS0 + xSS0 + + * xx * SSS0xSS0$$

Într-adevăr, deoarece numerele naturale 1, 2, 3 sunt reprezentate respectiv prin $S0, SS0, SSS0$, rezultă că termenii $* + xS0 + xSS0, + + + * xx * SSS0xSS0$ reprezintă expresiile aritmetice $(x+1)(x+2)$, respectiv $x^2 + 3x + 2$.

Structura simbolică α este o formulă, deoarece secvența

$$\underbrace{\stackrel{\circ}{=} * + xS0 + xSS0 + + + * xx * SSS0xSS0}_{\pi}, \forall x \pi = \alpha$$

este SGF .

Exemplul 2.1.3 Reprezentarea simbolică în limbajul de primul ordin al aritmeticii a afirmației "Pentru orice numere naturale x, y , dacă $x < y$ atunci există z număr natural astfel încât $x+z = y$ ", este $\alpha = \forall x \forall y \left(< xy \rightarrow \exists z \stackrel{\circ}{=} + xzy \right)$.

Secvența de asamblaje

$$\begin{aligned}
 &< xy, \stackrel{\circ}{=} + xzy, \exists z \stackrel{\circ}{=} + xzy, & \left(< xy \rightarrow \exists z \stackrel{\circ}{=} + xzy \right), \\
 &\forall y \left(< xy \rightarrow \exists z \stackrel{\circ}{=} + xzy \right), & \forall x \forall y \left(< xy \rightarrow \exists z \stackrel{\circ}{=} + xzy \right) = \alpha
 \end{aligned}$$

este SGF , deci $\alpha \in FORM$.

Convenim să numim expresie orice structură simbolică din mulțimea $TERM \cup FORM$. Variabilele care apar în expresiile unui limbaj de prim ordin pot fi libere sau legate.

Pentru orice expresie α , notăm cu $FV(\alpha)$ mulțimea variabilelor libere din α , respectiv cu $BV(\alpha)$ mulțimea variabilelor legate. Mulțimile FV, BV se calculează recursiv în modul următor.

Pentru $t \in TERM$,

$$FV(t) = \begin{cases} \{t\} & \text{dacă } t \in V \\ \emptyset & \text{dacă } t \in CS \\ \bigcup_{i=1}^{r(f)} FV(t_i) & \text{dacă } t = ft_1 \dots t_{r(f)}, f \in FS \end{cases}$$

$$BV(t) = \begin{cases} \emptyset & \text{dacă } t \in CS \cup V \\ \bigcup_{i=1}^{r(f)} BV(t_i) & \text{dacă } t = ft_1 \dots t_{r(f)}, f \in FS \end{cases}$$

Pentru $\alpha \in FORM$,

$$FV(\alpha) = \begin{cases} \emptyset & \text{dacă } \alpha \in PS, r(\alpha) = 0 \\ \bigcup_{i=1}^{r(\pi)} FV(t_i) & \text{dacă } \alpha = \pi t_1 \dots t_{r(f)}, \pi \in PS, r(\pi) \geq 1 \\ FV(\beta) & \text{dacă } \alpha = (\neg\beta) \\ FV(\beta) \cup FV(\gamma) & \text{dacă } \alpha = (\beta\rho\gamma), \rho \in L \setminus \{\neg\} \\ FV(\beta) \setminus \{x\} & \text{dacă } \alpha = \forall x\beta \text{ sau } \alpha = \exists x\beta, x \in V \end{cases}$$

$$BV(\alpha) = \begin{cases} \emptyset & \text{dacă } \alpha \in PS, r(\alpha) = 0 \\ \emptyset & \text{dacă } \alpha = \pi t_1 \dots t_{r(f)}, \pi \in PS, r(\pi) \geq 1 \\ BV(\beta) & \text{dacă } \alpha = (\neg\beta) \\ BV(\beta) \cup BV(\gamma) & \text{dacă } \alpha = (\beta\rho\gamma), \rho \in L \setminus \{\neg\} \\ BV(\beta) \cup \{x\} & \text{dacă } \alpha = \forall x\beta \text{ sau } \alpha = \exists x\beta, x \in V. \end{cases}$$

Observație Din construcție rezultă că pentru orice $t \in TERM \cup ATOM$, $BV(t) = \emptyset$. De asemenea, ‘legarea’ unei variabile revine la prezența în structura simbolică respectivă a unei cuantificări, existențiale sau universale, relativ la acea variabilă.

Exemplul 2.1.4 Pentru $t = *+*SySSzSSx+SS0$ considerat în *Exemplul*

2.1.1 rezultă

$$\begin{aligned}
BV(t) &= \emptyset, \\
FV(t) &= FV(+ * SySSzSSx) \cup FV(+xSS0) = \\
&= FV(*SySSz) \cup FV(SSx) \cup FV(x) \cup FV(SS0) = \\
&= FV(Sy) \cup FV(SSz) \cup FV(Sx) \cup \{x\} \cup FV(S0) = \\
&= \{y\} \cup FV(Sz) \cup \{x\} \cup \{x\} \cup FV(0) = \\
&= \{y\} \cup \{z\} \cup \{x\} \cup \emptyset = \{x, y, z\}.
\end{aligned}$$

Pentru formula $\alpha = \forall x \forall y \left(< xy \rightarrow \exists z \overset{\circ}{=} +xzy \right)$ din *Exemplul 2.1.3*, obținem

$$\begin{aligned}
FV(\alpha) &= FV\left(\forall y \left(< xy \rightarrow \exists z \overset{\circ}{=} +xzy\right)\right) \setminus \{x\} = \\
&= FV\left(\left(< xy \rightarrow \exists z \overset{\circ}{=} +xzy\right)\right) \setminus \{x, y\} = \\
&= \left(FV(< xy) \cup FV\left(\exists z \overset{\circ}{=} +xzy\right)\right) \setminus \{x, y\} = \\
&= \left(FV(x) \cup FV(y) \cup \left(FV\left(\overset{\circ}{=} +xzy\right) \setminus \{z\}\right)\right) \setminus \{x, y\} = \\
&= (\{x\} \cup \{y\} \cup ((FV(+xz) \cup FV(y)) \setminus \{z\})) \setminus \{x, y\} = \\
&= (\{x, y\} \cup ((FV(x) \cup FV(z) \cup FV(y)) \setminus \{z\})) \setminus \{x, y\} = \\
&= (\{x, y\} \cup ((\{x\} \cup \{z\} \cup \{y\}) \setminus \{z\})) \setminus \{x, y\} = \\
&= (\{x, y\} \cup \{x, y\}) \setminus \{x, y\} = \emptyset.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BV(\alpha) &= BV\left(\forall y \left(< xy \rightarrow \exists z \overset{\circ}{=} +xzy\right)\right) \cup \{x\} = \\
&= BV\left(\left(< xy \rightarrow \exists z \overset{\circ}{=} +xzy\right)\right) \cup \{x, y\} = \\
&= \left(BV(< xy) \cup BV\left(\exists z \overset{\circ}{=} +xzy\right)\right) \cup \{x, y\} = \\
&= \left(\emptyset \cup \left(BV\left(\overset{\circ}{=} +xzy\right) \cup \{z\}\right)\right) \cup \{x, y\} = \\
&= BV\left(\overset{\circ}{=} +xzy\right) \cup \{z\} \cup \{x, y\} = \\
&= \emptyset \cup \{x, y, z\} = \{x, y, z\}.
\end{aligned}$$

Observație În general se dorește ca pentru orice formulă α , să nu existe cuantificări multiple asupra aceleiași variabile și

$$FV(\alpha) \cap BV(\alpha) = \emptyset.$$

Regulile de bună formare pentru structurile simbolice din *FORM*

(Definiția 2.1.5) permit însă generarea de formule α , astfel încât $FV(\alpha) \cap BV(\alpha) \neq \emptyset$ respectiv formule cu cuantificări multiple asupra aceleiași variabile.

De exemplu, în limbajul de primul ordin al aritmeticii, secvența $< xy, < +xyz, \exists y < +xyz, \forall x \exists y < +xyz, (< xy \rightarrow \forall x \exists y < +xyz), \forall x (< xy \rightarrow \forall x \exists y < +xyz) = \alpha$ este *SGF*, deci $\alpha \in FORM$.

$$\begin{aligned} FV(\alpha) &= FV((< xy \rightarrow \forall x \exists y < +xyz) \setminus \{x\}) = \\ &= (FV(< xy) \cup FV(\forall x \exists y < +xyz)) \setminus \{x\} = \\ &= (\{x, y\} \cup (FV(\exists y < +xyz) \setminus \{x\})) \setminus \{x\} = \\ &= (\{x, y\} \cup (FV(< +xyz) \setminus \{x, y\})) \setminus \{x\} = \\ &= (\{x, y\} \cup (\{x, y, z\} \setminus \{x, y\})) \setminus \{x\} = \{y, z\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BV(\alpha) &= BV((< xy \rightarrow \forall x \exists y < +xyz) \cup \{x\}) = \\ &= (BV(< xy) \cup BV(\forall x \exists y < +xyz)) \cup \{x\} = \\ &= (BV(\exists y < +xyz) \cup \{x\}) \cup \{x\} = \\ &= ((BV(< +xyz) \cup \{x, y\})) \cup \{x\} = \{x, y\}, \end{aligned}$$

deci $FV(\alpha) \cap BV(\alpha) \neq \emptyset$.

Definiția 2.1.7 Dacă $\alpha = \forall x \beta \in FORM$, atunci formula β este domeniul variabilei x .

Analog, dacă $\alpha = \exists x \beta$, atunci domeniul variabilei x este β .

De exemplu, în formula $\alpha = \forall x (< xy \rightarrow \forall x \exists y < +xyz)$, domeniul primei cuantificări asupra variabilei x este $(< xy \rightarrow \forall x \exists y < +xyz)$ respectiv domeniul celei de a doua cuantificări asupra aceleiași variabile este formula $\exists y < +xyz$.

În scopul evitării cuantificărilor multiple asupra aceleiași variabile în formula α și pentru asigurarea condiției $FV(\alpha) \cap BV(\alpha) = \emptyset$, ocurențele în α ale fiecărui simbol $x \in BV(\alpha)$ sunt substituite printr-un simbol nou de variabilă (care nu apare în α) cu excepția subexpresiei domeniu al variabilei respective.

De exemplu, pentru $\alpha = \forall x (< xy \rightarrow \forall x \exists y < +xyz)$, domeniul celei de a doua cuantificări asupra variabilei x este $\exists y < +xyz$, deci ocurențele variabilei x în exteriorul domeniului ei vor fi substituite cu $u \in V$; rezultă $\forall u (< uy \rightarrow \forall x \exists y < +xyz)$.

De asemenea, ocurențele variabilei y în exteriorul domeniului ei vor fi substituite cu $p \in V$. Obținem $\alpha' = \forall u (< up \rightarrow \forall x \exists y < +xyz)$ și $FV(\alpha') = \{p, z\}$, $BV(\alpha') = \{x, y, u\}$. Cu toate că prin aplicarea acestei transformări

structura simbolică reprezentând o formulă se modifică, așa după cum va rezulta în secțiunea următoare, formula inițială și formula rezultată sunt echivalente din punct de vedere semantic.

Definiția 2.1.8 Spunem că formula α este închisă, dacă $FV(\alpha) = \emptyset$. Mulțimea formulelor închise este notată $FORM_0$.

Dacă $\alpha \in FORM \setminus FORM_0$ și $FV(\alpha) = \{x_1, \dots, x_n\}$, formulele închise $\bar{\alpha} = \forall x_1 \dots \forall x_n \alpha$, $\underline{\alpha} = \exists x_1 \dots \exists x_n \alpha$ se numesc închidere universală, respectiv existențială atașată formulei α .

Definiția 2.1.9 Se numește substituție o mulțime de perechi $\theta = \{t_1 \mid x_1, \dots, t_n \mid x_n\}$, unde $t_i \in TERM$, $x_i \in V$, $x_i \neq x_j$, $x_i \neq t_i$ pentru orice $1 \leq i \neq j \leq n$.

Termenii t_1, \dots, t_n se numesc termeni substituenți pentru variabilele substituite x_1, \dots, x_n . Substituția θ este o substituție de bază, dacă în structurile simbolice corespunzătoare termenilor substituenți nu apar simboluri de variabile.

Substituția vidă, notată ε , corespunde mulțimii vide. Spunem că θ este substituție proprie, dacă nici o variabilă substituită nu are ocurențe în termenul substituent pereche.

Mulțimea substituțiilor este notată $SUBST$.

Definiția 2.1.10 Fie $t \in TERM$, $\theta \in SUBST$. Rezultatul aplicării substituției θ termenului t , notat $t\theta$, este definit prin:

$$t\theta = \begin{cases} t, & \text{dacă } \theta = \varepsilon \text{ sau } t \in CS \text{ sau } t \in V \setminus \{x_1, \dots, x_n\}, \\ & \theta = \{t_1 \mid x_1, \dots, t_n \mid x_n\} \\ t_i, & \text{dacă } t = x_i \in \{x_1, \dots, x_n\} \\ ft_1\theta \dots t_{r(f)}\theta, & \text{dacă } t = ft_1 \dots t_{r(f)}. \end{cases}$$

Observație Din *Definiția 2.1.10* rezultă imediat că pentru orice $t \in TERM$, $\theta \in SUBST$, $t\theta \in TERM$.

Exemplul 2.1.5 Pentru termenul $t = + * SySSzSSx + xSS0$ în limbajul de primul ordin al aritmeticii și $\theta = \{S0 \mid x, +xy \mid y, *yz \mid z\}$, obținem,

$$\begin{aligned} t\theta &= *t_1\theta t_2\theta, & \text{unde } t_1 &= + * SySSzSSx, \ t_2 = +xSS0 \\ t_1\theta &= +t_3\theta t_4\theta, & \text{unde } t_3 &= *SySSz, \ t_4 = SSx \\ t_3\theta &= *t_5\theta t_6\theta, & \text{unde } t_5 &= Sy, \ t_6 = SSz. \end{aligned}$$

Deoarece $t_5\theta = Sy\theta = S + xy$ și $t_6\theta = SSz\theta = SS * yz$, $t_4\theta = SSx\theta = SSS0$, rezultă în continuare $t_1\theta = + * S + xySS * yzSSS0$.

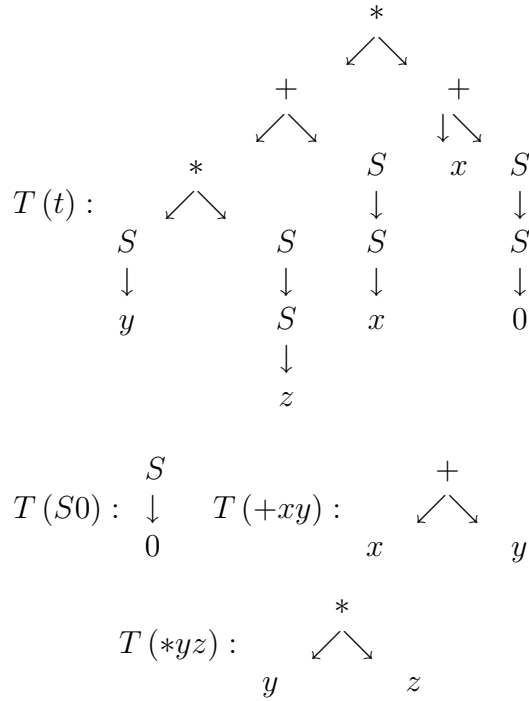
De asemenea, $t_2\theta = +x\theta SS0\theta = +S0SS0$, deci obținem în final

$$t\theta = + * S + xySS * yzSSS0 + S0SS0.$$

Observație Fie $t \in TERM$, $\theta \in SUBST$. Arborele de structură $T(t\theta)$ rezultă prin aplicarea arborelui de structură $T(t)$ a transformării constând în substituirea vârfurilor terminale ale căror etichete sunt variabile substituite de θ , prin arborii de structură corespunzători termenilor asociați în substituția θ . Cu alte cuvinte termenul $t\theta$ rezultă prin substituirea în structura simbolică t a fiecărei variabile substituite de θ prin termenul pereche corespunzător.

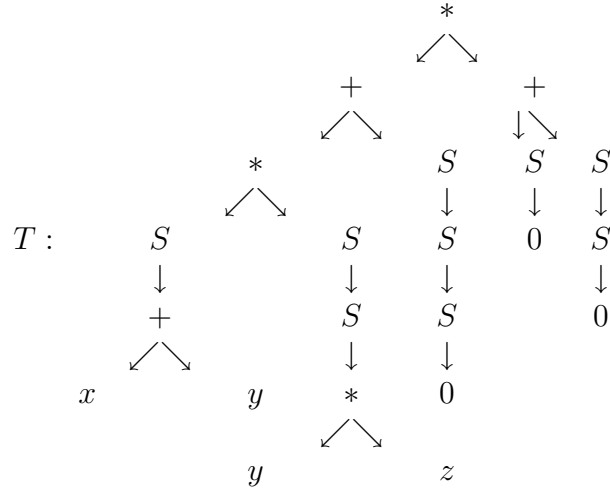
Fie $t = * + *SySSzSSx + xSS0$ și $\theta = \{S0 \mid x, +xy \mid y, *yz \mid z\}$
(*Exemplul 2.1.5*).

Arborii de structură corespunzători termenilor t , $S0$, $+xy$, $*yz$ sunt



Prin substituirea în $T(t)$ a vârfurilor terminale cu etichete simboluri de variabile substituite de θ , prin arborii de structură corespunzători termenilor

asociați, rezultă arborele



Evident, $T = T(t\theta)$.

Definiția 2.1.11 Fie $\alpha \in ATOM$, $\theta \in SUBST$. Rezultatul aplicării substituției θ atomului α , notat $\alpha\theta$, este definit prin:

$$\alpha\theta = \begin{cases} \alpha, & \text{dacă } \alpha \in PS \text{ și } r(\alpha) = 0, \\ \pi t_1 \theta \dots t_{r(f)} \theta, & \text{dacă } \alpha = \pi t_1 \dots t_{r(\pi)}. \end{cases}$$

Evident, $\alpha\theta \in ATOM$.

Definiția 2.1.12 Fie $\alpha \in FORM \setminus ATOM$, $\theta \in SUBST$. Rezultatul aplicării substituției θ atomului α , notat $\alpha\theta$, este definit prin:

- ι) dacă $\theta = \varepsilon$, atunci $\alpha\theta = \alpha$
- ι) dacă $\theta = \{t_1 \mid x_1, \dots, t_n \mid x_n\}$, atunci

$$\alpha\theta = \begin{cases} (\neg\beta\theta), & \text{dacă } \alpha = (\neg\beta), \\ (\beta\theta\rho\gamma\theta), & \text{dacă } \alpha = (\beta\theta\rho\gamma\theta), \rho \in L \setminus \{\neg\}, \\ \forall x\beta\theta, & \text{dacă } \alpha = \forall x\beta \text{ și } x \notin \{x_1, \dots, x_n\}, \\ \exists x\beta\theta, & \text{dacă } \alpha = \exists x\beta \text{ și } x \notin \{x_1, \dots, x_n\}, \\ \alpha\theta', & \text{dacă } \alpha = \exists x\beta \text{ sau } \alpha = \forall x\beta \text{ și} \\ & x = x_i \in \{x_1, \dots, x_n\}, \theta' = \theta \setminus \{t_i \mid x_i\}. \end{cases}$$

Evident, pentru orice $\alpha \in FORM$ și $\theta \in SUBST$, $\alpha\theta \in FORM$.

Observație Din Definițiile 2.1.10, 2.1.11, 2.1.12 rezultă că dacă $\alpha \in FORM \cup TERM$, $\theta \in SUBST$, atunci $\alpha\theta$ rezultă prin substituirea variabilelor libere din α prin termenii pereche corespunzători în substituția θ . În particular, dacă $\alpha \in FORM_0$, atunci $\alpha\theta = \alpha$ pentru orice $\theta \in SUBST$.

Exemplul 2.1.6 Fie formulele

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (\exists y \stackrel{\circ}{=} +xyz \rightarrow < xz), & \alpha_2 &= \exists y (\stackrel{\circ}{=} +xyz \rightarrow < xz), \\ \alpha_3 &= (\stackrel{\circ}{=} +xyz \rightarrow < xz), & \alpha_4 &= \forall x \forall z (\stackrel{\circ}{=} +xyz \rightarrow \exists y < xz)\end{aligned}$$

în limbajul de primul ordin al aritmeticii și

$$\theta = \{+S0z \mid x, *zz \mid y, SS0 \mid z\}.$$

Rezultă

$$\begin{aligned}FV(\alpha_1) &= FV(\alpha_2) = \{x, z\}, \\ FV(\alpha_3) &= \{x, y, z\}, & FV(\alpha_4) &= \emptyset, \\ \alpha_1\theta &= (\exists y \stackrel{\circ}{=} ++S0zySS0 \rightarrow < +S0zSS0), \\ \alpha_2\theta &= \exists y (\stackrel{\circ}{=} ++S0zySS0 \rightarrow < +S0zSS0), \\ \alpha_3\theta &= (\stackrel{\circ}{=} ++S0z * zzSS0 \rightarrow < +S0zSS0), \\ \alpha_4\theta &= \alpha_4.\end{aligned}$$

Definiția 2.1.13 Fie $\lambda, \theta \in SUBST$. Compunerea substituțiilor λ, θ , notată $\lambda \cdot \theta$ este definită prin

- ι) dacă $\theta = \varepsilon$, atunci $\lambda \cdot \theta = \lambda$,
- ι) dacă $\lambda = \varepsilon$, atunci $\lambda \cdot \theta = \theta$,
- $\iota\iota$) dacă $\theta \neq \varepsilon$ și $\lambda \neq \varepsilon$, atunci $\lambda \cdot \theta$ rezultă din mulțimea

$$\{t_1\theta \mid x_1, \dots, t_n\theta \mid x_n, s_1 \mid y_1, \dots, s_m \mid y_m\}$$

prin eliminarea perechilor $t_i\theta \mid x_i$ pentru care $t_i\theta = x_i$ și a perechilor $s_j \mid y_j$ pentru care $y_j \in \{x_1, \dots, x_n\}$, unde $\lambda = \{t_1 \mid x_1, \dots, t_n \mid x_n\}$, $\theta = \{s_1 \mid y_1, \dots, s_m \mid y_m\}$.

Exemplul 2.1.7 Fie $\lambda = \{+SySz \mid x, x \mid y\}$, $\theta = \{y \mid x, x \mid z\}$.

Din mulțimea

$$\{+Sy\theta Sz\theta \mid x, x\theta \mid y, y \mid x, x \mid z\} = \{+SySx \mid x, y \mid y, y \mid x, x \mid z\}$$

prin eliminarea perechilor $y \mid y, y \mid x$ rezultă

$$\lambda \cdot \theta = \{+SySx \mid x, x \mid z\}.$$

Din mulțimea

$$\begin{aligned}\{y\lambda \mid x, x\lambda \mid z, +SySz \mid x, x \mid y\} &= \\ &= \{x \mid x, +SySz \mid z, +SySz \mid x, x \mid y\}\end{aligned}$$

prin eliminarea perechilor $x \mid x$ și $+SySz \mid x$, rezultă

$$\theta \cdot \lambda = \{+SySz \mid z, x \mid y\}.$$

Observație Operația de compunere a substituțiilor nu este comutativă. Pentru orice λ, θ, η substituții proprii $\lambda \cdot (\theta \cdot \eta) = (\lambda \cdot \theta) \cdot \eta$.

Dacă $E \in TERM \cup ATOM$, atunci $E(\lambda \cdot \theta) = (E\lambda)\theta$.

Definiția 2.1.14 Fie $E = \{E_1, \dots, E_n\} \subset TERM \cup ATOM$.

Substituția θ este substituție unificator pentru E dacă, $E_i\theta = E_j\theta$, $1 \leq i, j \leq n$. Mulțimea E este unificabilă, dacă există substituție unificator pentru E . Dacă θ este substituție unificator pentru E , spunem că $E\theta = \{E_1\theta\}$ este singleton.

Exemplul 2.1.8 Fie $E = \{fgxhfab, fyhz\}$ unde $f, g, h \in FS$, $r(f) = 2$, $r(g) = r(h) = 1$, $x, y, z \in V$, $a, b \in CS$. Pentru $\theta = \{gx \mid y, fab \mid z\}$ obținem $fgxhfab\theta = fyhz\theta = fgxhfab$ deci θ este substituție unificator pentru E .

Definiția 2.1.15 Fie E mulțime unificabilă. Substituția unificator σ este un cel mai general unificator pentru E , dacă pentru orice substituție unificator θ există $\lambda \in SUBST$, astfel încât $\theta = \sigma \cdot \lambda$. Substituția cel mai general unificator este referită prin termenul de mgu (**m**ost **g**eneral **u**nifier) pentru mulțimea dată.

Definiția 2.1.16 Dezacordul $D(E)$ al mulțimii

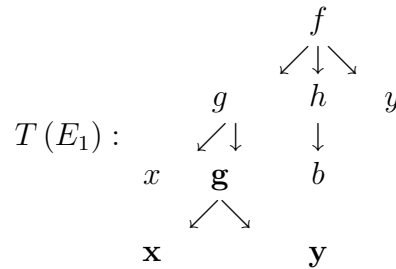
$E = \{E_1, \dots, E_n\} \subset TERM \cup ATOM$ este mulțimea rezultată prin reținerea câte unei subexpresii din fiecare expresie din E începând cu prima poziție în ordinea de la stânga la dreapta în care cel puțin două expresii diferă.

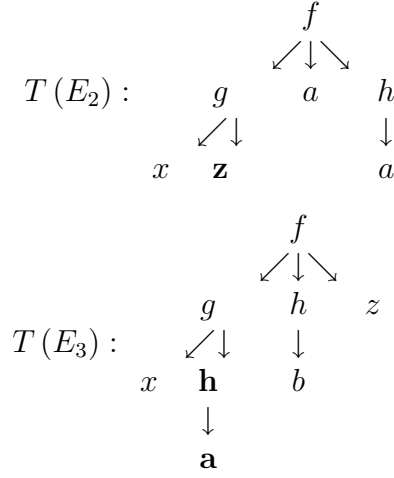
Observație Arborii de structură corespunzători elementelor din $D(E)$ sunt subarborii arborilor de structură ai expresiilor din E având rădăcinile primele vârfuri (în traversarea top-down și left-to-right) cu etichete distincte.

Exemplul 2.1.9 Fie $E_1 = fgxgxyhby$, $E_2 = fgxzaha$, $E_3 = fgxhabz$, unde $f, g, h \in FS$, $r(f) = 3$, $r(g) = 2$, $r(h) = 1$, $x, y, z \in V$, $a, b \in CS$. Dezacordul mulțimii $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ este

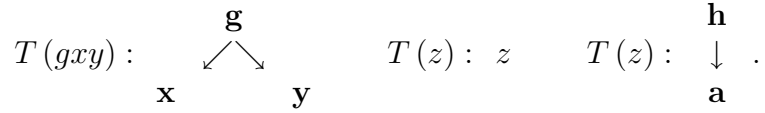
$$D(E) = \{gxy, z, ha\}.$$

Arborii de structură corespunzători termenilor E_1, E_2, E_3 sunt:





Arborii de structură corespunzători termenilor din mulțimea $D(E)$ sunt



Verificarea proprietății că o mulțime $E \subset TERM \cup ATOM$ este unificabilă/neunificabilă și calculul unui mgu în cazul în care E este unificabilă pot fi realizate pe baza procedurii de unificare Robinson.

procedure UnificareRobinson($E : MultimeExpresii$);

$W_0 \leftarrow E$; $\sigma_0 \leftarrow \varepsilon$; $k \leftarrow 0$; $gata \leftarrow false$;

repeat

if (W_k este singleton) *then*

write (' E este unificabilă', σ_k , 'mgu pentru E' ');

$gata \leftarrow true$

else

calculează (W_k, D_k);

if există (x, t, D_k) *then*

alege (x_k, t_k, D_k);

$W_{k+1} \leftarrow W_k \setminus \{t_k \mid x_k\}$;

$\sigma_{k+1} \leftarrow \sigma_k \cdot \{t_k \mid x_k\}$;

$k \leftarrow k + 1$

else

write (' E nu este unificabilă');

$gata \leftarrow true$

endif

endif

until gata

end;

Apelurile de proceduri inițiate de procedura *UnificareRobinson* determină următoarele acțiuni:

calculează (W, D): calculează D dezacordul mulțimii W ,

există (x, t, D) : returnează *true*, dacă și numai dacă există $x \in V \cap D$ și există $t \in TERM \cap D$, astfel încât $t \rangle x \langle$

alege (x, t, D) : selectează $x \in V \cap D$ și $t \in TERM \cap D$ astfel încât $t \rangle x \langle$

Teorema 2.1.1 (Teorema de unificare Robinson) Procedura *UnificareRobinson* este un algoritm care decide corect asupra proprietății de a fi unificabilă, respectiv neunificabilă a mulțimii E . Dacă E este unificabilă și calculul se termină cu W_k singleton, atunci σ_k este un mgu pentru E .

Demonstrație Deoarece σ_k , $k = 0, 1, \dots$ sunt substituții proprii și

$W_{k+1} = W_k \{t_k \mid x_k\}$ rezultă $W_k \langle x_k \rangle$ și $W_{k+1} \rangle x_k \langle$. Evident, pentru orice $k \geq 0$, și orice $p \geq k + 1$, $W_p \rangle x_k \langle$. În consecință numărul de variabile cu ocurențe în expresiile din mulțimea curentă W_k descrește la fiecare pas al buclei *repeat – until*, deci după un număr finit de etape expresiile mulțimii curente W_k nu vor mai conține simboluri din V , stare în care, evident, una din cele două condiții care determină terminarea calculului este îndeplinită.

Demonstrăm prin inducție că pentru orice $k \geq 0$, $W_k = E\sigma_k$. Proprietatea este evidentă pentru $k = 0$. Deoarece substituțiile calculate de algoritm sunt substituții proprii, dacă nici una din condițiile terminale nu este îndeplinită la pasul k și presupunând că $W_k = E\sigma_k$, rezultă

$$W_{k+1} = W_k \{t_k \mid x_k\} = (E\sigma_k) \{t_k \mid x_k\} = E(\sigma_k \cdot \{t_k \mid x_k\}) = E\sigma_{k+1}.$$

Presupunem că mulțimea E este unificabilă. Fie θ substituție unificator pentru E . Demonstrăm că pentru orice $k \geq 0$ există

$\lambda_k \in SUBST$, astfel încât $\theta = \sigma_k \cdot \lambda_k$. Deoarece $\sigma_0 = \varepsilon$ pentru $\lambda_0 = \theta$, obținem $\sigma_0 \cdot \lambda_0 = \theta$. Presupunem că există $\lambda_p \in SUBST$, astfel încât $\theta = \sigma_p \cdot \lambda_p$, pentru $p = 0, 1, \dots, k$.

a) Dacă W_k este singleton, atunci calculul se termină cu decizia '*E este unificabilă*' și σ_k este '*mgu pentru E*'. Deoarece $W_k = E\sigma_k$, rezultă σ_k este substituție unificator pentru E . În plus, cum substituția unificator θ pentru E este arbitrară și există $\lambda_k \in SUBST$, astfel încât $\theta = \sigma_k \cdot \lambda_k$, rezultă că substituția σ_k calculată de algoritm este într-adevăr mgu pentru E .

b) Dacă W_k nu este singleton, atunci apelul *calculează* (W_k, D_k) determină evaluarea mulțimii dezacord $D_k = D(W_k)$. Deoarece W_k nu este singleton, mulțimea D_k conține cel puțin două elemente. Mulțimea $E\theta$ este singleton și $E\theta = E(\sigma_k \cdot \lambda_k) = (E\sigma_k) \lambda_k = W_k \lambda_k$ deci λ_k este substituție unificator pentru D_k , ceea ce implică $t_1 \lambda_k = t_2 \lambda_k$ pentru orice $t_1, t_2 \in D_k$.

Fie $t_1, t_2 \in D_k$, $t_1 \neq t_2$ arbitrare. Evident, dacă $t_1 = f_1 s_1 \dots s_{p_1}$ și $t_2 = f_2 d_1 \dots d_{p_2}$, unde $f_i \in FS \cup PS$, $i = 1, 2$, cum $t_1 \lambda_k = t_2 \lambda_k$, rezultă $f_1 = f_2$. În concluzie, toate structurile $t \in (TERM \cup ATOM) \cap D_k$ și care nu sunt simboluri din V au același prim simbol.

Dacă $\{t_1, t_2\} \subset CS \cap D_k$, atunci $t_i = t_i \lambda_k$, $i = 1, 2$, ceea ce implică $t_1 \lambda_k \neq t_2 \lambda_k$. În consecință, mulțimea $CS \cap D_k$ are cel mult un element. Pe baza argumentelor considerate rezultă că există $x \in V \cap D_k$ și $t \in TERM \cap D_k$, $t \neq x$. Evident x, t nu pot fi unificate de λ_k , dacă $t \langle x \rangle$, deci $t \rangle x \langle$. Rezultă că apelul *există* (x, t, D_k) returnează *true* deci calculul continuă cel puțin încă o etapă. În particular, rezultă $t \rangle x \langle$ pentru orice $x \in V \cap D_k$ și $t \in TERM \cap D_k$, astfel încât $t \neq x$. Fie $x_k \in V \cap D_k$, $t_k \in TERM \cap D_k$ selectate prin apelul *alege* (x_k, t_k, D_k), deci $W_{k+1} = W_k \{t_k \mid x_k\}$ și $\sigma_{k+1} = \sigma_k \cdot \{t_k \mid x_k\}$.

Definim $\lambda_{k+1} = \lambda_k \setminus \{t_k \lambda_k \mid x_k\}$. Deoarece $t_k \rangle x_k \langle$ și $W_{k+1} \rangle x_k \langle$, obținem $t_k \lambda_{k+1} = t_k \lambda_k$,

$$\begin{aligned} W_{k+1} \lambda_{k+1} &= (W_k \{t_k \mid x_k\}) (\lambda_k \setminus \{t_k \lambda_k \mid x_k\}) = \\ &= W_k (\{t_k \mid x_k\} \cdot (\lambda_k \setminus \{t_k \lambda_k \mid x_k\})) = \\ &= W_k (\{t_k \lambda_k \mid x_k\} \cup (\lambda_k \setminus \{t_k \lambda_k \mid x_k\})) = W_k \lambda_k = E\theta \end{aligned}$$

deci λ_{k+1} este substituție unificator pentru $D(W_{k+1})$.

De asemenea,

$$\begin{aligned} \sigma_{k+1} \cdot \lambda_{k+1} &= (\sigma_k \cdot \{t_k \mid x_k\}) \cdot \lambda_{k+1} = \\ &= \sigma_k \cdot (\{t_k \mid x_k\} \cdot \lambda_{k+1}) = \sigma_k \cdot \lambda_k = \theta. \end{aligned}$$

În concluzie, dacă E este unificabilă, atunci există $k \geq 0$, astfel încât W_k este singleton, deci algoritmul decide corect și calculează σ_k mgu pentru E .

Presupunem că mulțimea E nu este unificabilă. Deoarece pentru orice $k \geq 0$, $W_k = E\sigma_k$ rezultă că pentru orice $k \geq 0$, W_k nu este singleton. În consecință, terminarea calculului rezultă prin returnarea valorii *false* de apelul *există* (x, t, D_k) pentru anume $k \geq 0$, deci și în acest caz decizia algoritmului este corectă.

Observație Mecanismul de unificare descris de procedura *UnificareRobinson* revine la tentativa de 'reparare' a dezacordurilor existente în structurile simbolice din mulțimea E , prin aplicarea, atunci când este

posibil, de substituții cu efect de unificare local. Din argumentele stabilite în demonstrația *Teoremei* 2.1.1 obținem că dezacordurile 'nereparabile' sunt de două categorii:

a) $t_1 \notin V, t_2 \notin V$ și $frontchar(t_1) \neq frontchar(t_2)$, unde $frontchar(t)$ reprezintă primul simbol al structurii t ,

b) $t_1 \in V, t_2 \notin V$ și $t_2 \langle t_1 \rangle$

Exemplul 2.1.10 Fie

$$E = \{\pi x f x a s, \pi y f g t a g z, \pi x f u w g v, \pi z f u a g v\},$$

$\pi \in PS, r(\pi) = 3, f, g \in FS, r(f) = 2, r(g) = 1, a \in CS, u, v, t, s, x, y, z \in V$.

Aplicarea procedurii *UnificareRobinson* mulțimii E determină următoarea evoluție:

$k = 0, \sigma_0 = \varepsilon, W_0 = \{\pi x f x a s, \pi y f g t a g z, \pi x f u w g v, \pi z f u a g v\}$

calculează $(W_0, D_0) \Rightarrow D_0 = \{x, y, z\}$

există $(x, t, D_0) \Rightarrow true$

alege $(x_0, t_0, D_0) \Rightarrow x_0 = y, t_0 = x$

$W_1 \leftarrow W_0 \{x \mid y\} = \{\pi x f x a s, \pi x f g t a g z, \pi x f u w g v, \pi z f u a g v\}$

$\sigma_1 \leftarrow \sigma_0 \cdot \{x \mid y\} = \{x \mid y\}$

$k \leftarrow 1$

k = 1, $\sigma_1 = \{x \mid y\}$,

$W_1 = \{\pi x f x a s, \pi x f g t a g z, \pi x f u w g v, \pi z f u a g v\}$

calculează $(W_1, D_1) \Rightarrow D_1 = \{x, z\}$

există $(x, t, D_1) \Rightarrow true$

alege $(x_1, t_1, D_1) \Rightarrow x_1 = z, t_1 = x$

$W_2 \leftarrow W_1 \{x \mid z\} = \{\pi x f x a s, \pi x f g t a g x, \pi x f u w g v, \pi x f u a g v\}$

$\sigma_2 \leftarrow \sigma_1 \cdot \{x \mid z\} = \{x \mid y, x \mid z\}$

$k \leftarrow 2$

k = 2, $\sigma_2 = \{x \mid y, x \mid z\}$,

$W_2 = \{\pi x f x a s, \pi x f g t a g x, \pi x f u w g v, \pi x f u a g v\}$

calculează $(W_2, D_2) \Rightarrow D_2 = \{x, g t, u\}$

există $(x, t, D_2) \Rightarrow true$

alege $(x_2, t_2, D_2) \Rightarrow x_2 = x, t_2 = g t$

$W_3 \leftarrow W_2 \{g t \mid x\} = \{\pi g t f g t a s, \pi g t f g t a g g t, \pi g t f u w g v, \pi g t f u a g v\}$

$\sigma_3 \leftarrow \sigma_2 \cdot \{g t \mid x\} = \{g t \mid y, g t \mid z, g t \mid x\}$

$k \leftarrow 3$

k = 3, $\sigma_3 = \{g t \mid y, g t \mid z, g t \mid x\}$,

$W_3 = \{\pi g t f g t a s, \pi g t f g t a g g t, \pi g t f u w g v, \pi g t f u a g v\}$

calculează $(W_3, D_3) \Rightarrow D_3 = \{g t, u\}$

există $(x, t, D_3) \Rightarrow true$

$alege(x_3, t_3, D_3) \Rightarrow x_3 = u, t_3 = gt$
 $W_4 \leftarrow W_3 \{gt \mid u\} = \{\pi gt fgtas, \pi gt fgtagg, \pi gt fgtwgv, \pi gt fgtagv\}$
 $\sigma_4 \leftarrow \sigma_3 \cdot \{gt \mid u\} = \{gt \mid y, gt \mid z, gt \mid x, gt \mid u\}$
 $k \leftarrow 4$
 $\mathbf{k} = 4, \sigma_4 = \{gt \mid y, gt \mid z, gt \mid x, gt \mid u\},$
 $W_4 = \{\pi gt fgtas, \pi gt fgtagg, \pi gt fgtwgv, \pi gt fgtagv\}$
 $calculează(W_4, D_4) \Rightarrow D_4 = \{a, w\}$
 $există(x, t, D_4) \Rightarrow true$
 $alege(x_4, t_4, D_4) \Rightarrow x_4 = w, t_4 = a$
 $W_5 \leftarrow W_4 \{a \mid w\} = \{\pi gt fgtas, \pi gt fgtagg, \pi gt fgtagv\}$
 $\sigma_5 \leftarrow \sigma_4 \cdot \{a \mid w\} = \{gt \mid y, gt \mid z, gt \mid x, gt \mid u, a \mid w\}$
 $k \leftarrow 5$
 $\mathbf{k} = 5, \sigma_5 = \{gt \mid y, gt \mid z, gt \mid x, gt \mid u, a \mid w\},$
 $W_5 = \{\pi gt fgtas, \pi gt fgtagg, \pi gt fgtagv\}$
 $calculează(W_5, D_5) \Rightarrow D_5 = \{s, ggt, gv\}$
 $există(x, t, D_5) \Rightarrow true$
 $alege(x_5, t_5, D_5) \Rightarrow x_5 = s, t_5 = gv$
 $W_6 \leftarrow W_5 \{gv \mid s\} = \{\pi gt fgtagv, \pi gt fgtagg\}$
 $\sigma_6 \leftarrow \sigma_5 \cdot \{gv \mid s\} = \{gt \mid y, gt \mid z, gt \mid x, gt \mid u, a \mid w, gv \mid s\}$
 $k \leftarrow 6$
 $\mathbf{k} = 6, \sigma_6 = \{gt \mid y, gt \mid z, gt \mid x, gt \mid u, a \mid w, gv \mid s\},$
 $W_6 = \{\pi gt fgtagv, \pi gt fgtagg\}$
 $calculează(W_6, D_6) \Rightarrow D_6 = \{v, gt\}$
 $există(x, t, D_6) \Rightarrow true$
 $alege(x_6, t_6, D_6) \Rightarrow x_6 = v, t_6 = gt$
 $W_7 \leftarrow W_6 \{gt \mid v\} = \{\pi gt fgtagg\}$
 $\sigma_7 \leftarrow \sigma_6 \cdot \{gt \mid v\} = \{gt \mid y, gt \mid z, gt \mid x, gt \mid u, a \mid w, gv \mid s, gt \mid v\}$
 $k \leftarrow 6$
 $\mathbf{k} = 7; W_7 \text{ este singleton} \Rightarrow$
 $E \text{ este unificabilă},$
 $\{gt \mid y, gt \mid z, gt \mid x, gt \mid u, a \mid w, gv \mid s, gt \mid v\} \text{ mgu pentru } E.$

Exemplul 2.1.11 Fie $E = \{fgxyhzhgahx, fghazhhygaha\}$ unde $f, g, h \in FS, r(f) = 3, r(g) = 2, r(h) = 1, a \in CS, x, y, z \in V.$

Aplicarea procedurii *UnificareRobinson* mulțimii E determină următoarea evoluție:

$k = 0, \sigma_0 = \varepsilon, W_0 = \{fgxyhzhgahx, fghazhhygaha\}$
 $calculează(W_0, D_0) \Rightarrow D_0 = \{x, ha\}$
 $există(x, t, D_0) \Rightarrow true$
 $alege(x_0, t_0, D_0) \Rightarrow x_0 = x, t_0 = ha$
 $W_1 \leftarrow W_0 \{ha \mid x\} = \{fghayhzhgahha, fghazhhygaha\}$

$\sigma_1 \leftarrow \sigma_0 \cdot \{ha \mid x\} = \{ha \mid x\}$
 $k \leftarrow 1$
 $\mathbf{k} = \mathbf{1}, \sigma_1 = \{ha \mid x\}, W_1 = \{fghayhzgahha, fghazhhygaha\}$
calculează $(W_1, D_1) \Rightarrow D_1 = \{y, z\}$
există $(x, t, D_1) \Rightarrow true$
alege $(x_1, t_1, D_1) \Rightarrow x_1 = z, t_1 = y$
 $W_2 \leftarrow W_1 \{y \mid z\} = \{fghayhygahha, fghayhhygaha\}$
 $\sigma_2 \leftarrow \sigma_1 \cdot \{y \mid z\} = \{ha \mid x, y \mid z\}$
 $k \leftarrow 2$
 $\mathbf{k} = \mathbf{2}, \sigma_2 = \{ha \mid x, y \mid z\},$
 $W_2 = \{fghayhygahha, fghayhhygaha\}$
calculează $(W_2, D_2) \Rightarrow D_2 = \{y, hy\}$
există $(x, t, D_2) \Rightarrow false$
 $\Rightarrow E$ nu este unificabilă.
Exemplul 2.1.12 Fie $E = \{fxfxy, fgyfguz\}$, unde $f, g \in FS, r(f) = 2,$
 $r(g) = 1, x, y, z \in V.$

Pentru

$$\theta = \{gga \mid x, ga \mid u, ga \mid y, ga \mid z\}$$

obținem $E\theta = \{fggafggaga\}$ deci E este unificabilă și θ este substituție unificator pentru E .

Calculul substituțiilor λ_k , astfel încât pentru orice $k \geq 0$,

$\theta = \sigma_k \cdot \lambda_k$, unde σ_k rezultă prin aplicarea procedurii

UnificareRobinson mulțimii E :

$k = 0, \sigma_0 = \varepsilon, W_0 = \{fxfxy, fgyfguz\}, \lambda_0 = \theta$
calculează $(W_0, D_0) \Rightarrow D_0 = \{x, gy\}$
există $(x, t, D_0) \Rightarrow true$
alege $(x_0, t_0, D_0) \Rightarrow x_0 = x, t_0 = gy$
 $W_1 \leftarrow W_0 \{gy \mid x\} = \{fgyfgyy, fgyfguz\}$
 $\sigma_1 \leftarrow \sigma_0 \cdot \{gy \mid x\} = \{gy \mid x\}$
 $\lambda_1 \leftarrow \lambda_0 \setminus \{gy\lambda_0 \mid x\} = \{ga \mid u, ga \mid y, ga \mid z\}$
 $k \leftarrow 1$
 $\mathbf{k} = \mathbf{1}, \sigma_1 = \{gy \mid x\}, W_1 = \{fgyfgyy, fgyfguz\}$
calculează $(W_1, D_1) \Rightarrow D_1 = \{u, y\}$
există $(x, t, D_1) \Rightarrow true$
alege $(x_1, t_1, D_1) \Rightarrow x_1 = u, t_1 = y$
 $W_2 \leftarrow W_1 \{y \mid u\} = \{fgyfgyy, fgyfgyz\}$
 $\sigma_2 \leftarrow \sigma_1 \cdot \{y \mid u\} = \{gy \mid x, y \mid u\}$
 $\lambda_2 \leftarrow \lambda_1 \setminus \{y\lambda_1 \mid u\} = \{ga \mid y, ga \mid z\}$
 $k \leftarrow 2$
 $\mathbf{k} = \mathbf{2}, \sigma_2 = \{gy \mid x, y \mid u\}, W_2 = \{fgyfgyy, fgyfgyz\}$

$calculează (W_2, D_2) \Rightarrow D_2 = \{y, z\}$
 $există (x, t, D_2) \Rightarrow true$
 $alege (x_2, t_2, D_2) \Rightarrow x_2 = y, t_2 = z$
 $W_3 \leftarrow W_2 \{z \mid y\} = \{fgzfgzz\}$
 $\sigma_3 \leftarrow \sigma_2 \cdot \{z \mid y\} = \{z \mid y, gy \mid x, y \mid u\}$
 $\lambda_3 \leftarrow \lambda_2 \setminus \{z\lambda_2 \mid y\} = \{ga \mid z\}$
 $k \leftarrow 3$
 $\mathbf{k} = \mathbf{3}, W_3 \text{ este singleton} \Rightarrow$
 $E \text{ este unificabilă, } \{z \mid y, gy \mid x, y \mid u\} \text{ mgu pentru } E.$

3 Semantici pentru limbajele de primul ordin

Prezența variabilelor în structurile simbolice termeni și formule ale limbajelor de primul ordin necesită o manieră nouă în definirea semanticilor pentru limbajele din această clasă. Definirea unei semantici presupune în primul rând acordarea fiecărui simbol non-logic a unei anumite semnificații și anume: semnificația fiecărui functor să fie aceea de funcție cu număr de argumente egal cu aritatea functorului, semnificația fiecărui simbol predicțional să fie aceea de predicat care exprimă o relație între un număr de obiecte egal cu aritatea simbolului, respectiv semnificația fiecărei constante să fie aceea de individ particular din domeniul suport. Semnificațiile acordate simbolurilor non-logice induc în continuare semnificații pentru structurile din mulțimea $TERM \cup FORM$ și anume: expresie funcțională pentru structurile simbolice de tipul termen, predicate desemnând relații între expresii funcționale pentru atomi și respectiv expresii logice rezultate prin utilizarea mai multor predicate și a cuantificatorilor pentru formulele limbajului.

Mulțimea funcțiilor definite pe mulțimea A cu valori în mulțimea B este notată $[A \rightarrow B]$.

Definiția 2.2.1 Fie \mathcal{L} un limbaj de primul ordin. Perechea (D, I) se numește L -structură, unde D este o mulțime nevidă numită domeniu de interpretare și $I = (I_{CS}, I_{FS}, I_{PS})$,

$$I_{CS} : CS \rightarrow D,$$

$$I_{FS} : FS \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} [D^n \rightarrow D], \text{ astfel încât pentru orice } f \in FS,$$

$$I_{FS}(f) : D^{r(f)} \rightarrow D,$$

$$I_{PS} : PS \rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} [D^n \rightarrow D] \cup \{T, F\}, \text{ astfel încât pentru orice } \pi \in PS,$$

$I_{PS}(\pi) : D^{r(\pi)} \rightarrow \{T, F\}$ dacă $r(\pi) \geq 1$, respectiv

$I_{PS}(\pi) \in \{T, F\}$, dacă $r(\pi) = 0$.

Convenim să notăm: $I_{CS}(a) \triangleq a^I$, $I_{FS}(f) \triangleq f^I$, $I_{PS}(\pi) \triangleq \pi^I$; a^I , f^I , π^I sunt respectiv interpretările constantei a , a simbolului functorial f și a simbolului predicțional π în L -structura $M = (D, I)$.

Fie $M = (D, I)$ o L -structură. Semnificația fiecărui termen $t \in TERM$, notată t^I , este aceea de rezultat al evaluării arborelui de structură $T(t)$ conform regulilor de calcul asociate de L -structura M simbolurilor functoriale cu ocurențe în structura simbolică t și a interpretărilor considerate pentru simbolurile din mulțimea CS . Evaluarea arborilor de structură necesită însă ca și variabilele din structurile simbolice din mulțimea $TERM$ să aibă "atribuite valori" din domeniul de interpretare D . Cu alte cuvinte, simbolurile din V etichete ale unor vârfuri din $T(t)$ corespund unor locații de memorie cărora M nu le alocă informație. Evident, într-un arbore de structură numai vârfurile terminale pot avea etichete simboluri din V .

Numim asociere (valuație) orice funcție $s : V \rightarrow D$.

Definiția 2.2.2 Fie $s \in [V \rightarrow D]$, $x \in V$, $a \in D$.

Notăm cu $s[x := a] \in [V \rightarrow D]$ asocierea definită prin

$$y \in V, \quad s[x := a](y) = \begin{cases} s(y), & \text{dacă } y \neq x \\ a, & \text{dacă } y = x \end{cases}$$

Pentru $n \geq 1$, dacă $x_1, \dots, x_n \in V$, $a_1, \dots, a_n \in D$, asocierea $s[x_1 := a_1, \dots, x_n := a_n]$ este definită recursiv de relația

$$s[x_1 := a_1, \dots, x_n := a_n] = s[x_1 := a_1, \dots, x_{n-1} := a_{n-1}][x_n := a_n]$$

Observație Dacă $x_1, \dots, x_n \in V$ sunt astfel încât pentru orice

$1 \leq i \neq j \leq n$, $x_i \neq x_j$, atunci pentru orice permutare σ a mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$ rezultă

$$s[x_1 := a_1, \dots, x_n := a_n] = s[x_{\sigma(1)} := a_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)} := a_{\sigma(n)}].$$

Dacă $x \in V$, $a, b \in D$, atunci $s[x := a, x := b] = s[x := b]$, deci în cazul în care variabilele x_1, \dots, x_n nu sunt distincte două câte două,

$$s[x_1 := a_1, \dots, x_n := a_n] \neq s[x_{\sigma(1)} := a_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)} := a_{\sigma(n)}]$$

Definiția 2.2.3 Fie $M = (D, I)$ o L -structură. Semnificația t^I indusă de M pentru termenul $t \in TERM$ este $t^I \in [[V \rightarrow D] \rightarrow D]$ definită prin,

$s \in [V \rightarrow D]$,

$$t^I(s) = \begin{cases} t^I, & \text{dacă } t \in CS \\ s(t), & \text{dacă } t \in V \\ f^I(t_1^I(s), \dots, t_{r(f)}^I(s)), & \text{dacă } t = ft_1 \dots t_{r(f)} \end{cases}$$

Exemplul 2.2.1 Considerăm $M = (D, I)$ interpretarea intenționată pentru limbajul de primul ordin al aritmeticii. În această L -structură, domeniul de interpretare este mulțimea numerelor naturale N , interpretarea simbolului constantă 0 este numărul natural 0, regulile de calcul asociate simbolurilor functoriale $+$, $*$ fiind suma și respectiv produsul numerelor naturale argumente. Interpretarea functorului succesor este funcția care calculează succesorul argumentului în mulțimea N .

$$D = N, I_{cs}(0) = 0,$$

$$I_{FS}(+) = +^I : N \times N \rightarrow N, \text{ pentru orice } n, m \in N,$$

$$+^I(n, m) = n + m$$

$$I_{FS}(*) = *^I : N \times N \rightarrow N, \text{ pentru orice } n, m \in N, *^I(n, m) = n \cdot m$$

$$I_{FS}(S) = S^I : N \rightarrow N, \text{ pentru orice } n \in N, S^I(n) = n + 1$$

Interpretările simbolurilor predicative sunt

$$I_{PS}(<) = <^I : N \times N \rightarrow \{T, F\}, \text{ pentru orice } n, m \in N,$$

$$<^I(n, m) = \begin{cases} T, & \text{dacă } n < m \\ F, & \text{dacă } n \geq m \end{cases}$$

$$I_{PS}(=) = =^I : N \times N \rightarrow \{T, F\}, \text{ pentru orice } n, m \in N,$$

$$=^I(n, m) = \begin{cases} T, & \text{dacă } n = m \\ F, & \text{dacă } n \neq m \end{cases}$$

Observație Definițiile interpretărilor simbolurilor predicative pot fi exprimate prin

$$\begin{aligned} <^I(n, m) &= \text{if } n < m \text{ then } T \text{ else } F \\ =^I(n, m) &= \text{if } n = m \text{ then } T \text{ else } F. \end{aligned}$$

Fie termenul $t = * + * SySSzSSx + xSS0$, considerat în *Exemplul 2.1.1.*, $x, y, z \in V$ și fie $s \in [V \rightarrow N]$ arbitrar.

$$\text{Deoarece } t = \underbrace{* + * SySSzSSx}_{t_1} \underbrace{+ xSS0}_{t_2},$$

$$t^I(s) = *^I(t_1^I(s), t_2^I(s)) = t_1^I(s) \cdot t_2^I(s).$$

$$\text{Deoarece, } t_1 = \underbrace{* + * SySSz}_{t_{11}} \underbrace{SSx}_{t_{12}} \text{ și } t_2 = \underbrace{+ x}_{t_{21}} \underbrace{SS0}_{t_{22}}, \text{ rezultă}$$

$$\begin{aligned} t_1^I(s) &= +^I(t_{11}^I(s), t_{12}^I(s)) = t_{11}^I(s) + t_{12}^I(s), \\ t_2^I(s) &= +^I(t_{21}^I(s), t_{22}^I(s)) = t_{21}^I(s) + t_{22}^I(s) = \\ &= s(x) + S^I(S^I(0^I)) = s(x) + S^I(S^I(0)) = \\ &= s(x) + S^I(0 + 1) = s(x) + 0 + 1 + 1 = s(x) + 2 \end{aligned}$$

Iterând, obținem în continuare

$$\begin{aligned}
t_{11}^I(s) &= *^I \left((Sy)^I(s), (SSz)^I(s) \right) = S^I(s(y)) \cdot S^I(S^I(s(z))) = \\
&= (s(y) + 1) \cdot (s(z) + 1 + 1) = (s(y) + 1) \cdot (s(z) + 2) \\
t_{12}^I(s) &= (SSx)^I(s) = S^I(S^I(s(x))) = (s(x) + 2)
\end{aligned}$$

Rezultă

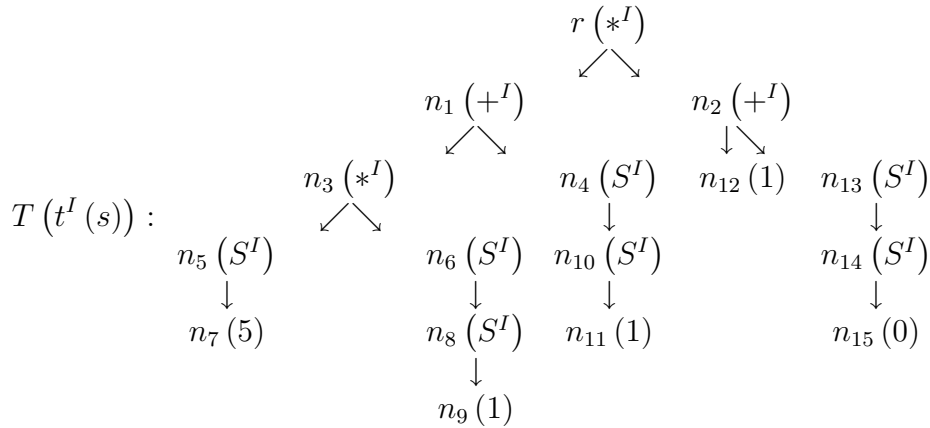
$$t_1^I(s) = (s(y) + 1) \cdot (s(z) + 2) + (s(x) + 2)$$

deci,

$$t^I(s) = ((s(y) + 1) \cdot (s(z) + 2) + s(x) + 2) \cdot (s(x) + 2).$$

În particular pentru $s \in [V \rightarrow N]$, $s(x) = 1$, $s(y) = 5$, $s(z) = 1$, $t^I(s) = 63$.

Observație Procedul descris revine la traversarea cu evaluare top-down a arborelui rezultat prin transformarea arborelui de structură al termenului conform L -structurii și a asocierii s considerate. Arborele transformat rezultă prin substituirea etichetelor simboluri functoriale și constante prin valorile funcțiilor I_{FS} , respectiv I_{CS} și substituirea fiecărei etichete $x \in V$ prin $s(x)$. Pentru termenul considerat în *Exemplul* 2.1.1. dacă $s(x) = 1$, $s(y) = 5$, $s(z) = 1$, atunci arborele transformat este



etichetele vârfurilor fiind indicate în paranteze.

Calculul valorii $t^I(s)$ poate fi realizat prin traversarea cu evaluare bottom-up a arborelui de structură transformat.

Valoarea $t^I(s) \in D$ este informația asociată vârfului rădăcină rezultată la terminarea traversării.

De exemplu, notând cu $\text{inf}(n)$ informația la nivelul vârfului n rezultată prin traversarea cu evaluare botom-up a arborelui, pentru arborele $T(t^I(s))$ de mai sus obținem

$$\begin{aligned}
inf(n_7) &= s(y) = 5, \quad inf(n_5) = 5 + 1 = 6, \quad inf(n_9) = s(z) = 1, \\
inf(n_8) &= 1 + 1 = 2, \quad inf(n_6) = 2 + 1 = 3, \\
inf(n_3) &= inf(n_5) \cdot inf(n_6) = 18, \\
inf(n_{11}) &= s(x) = 1, \quad inf(n_{10}) = 1 + 1 = 2, \quad inf(n_4) = 2 + 1 = 3, \\
inf(n_1) &= inf(n_3) + inf(n_4) = 21, \quad inf(n_{15}) = 0^I = 0, \\
inf(n_{14}) &= 0 + 1 = 1, \quad inf(n_{13}) = 1 + 1 = 2, \quad inf(n_{12}) = s(x) = 1, \\
inf(n_2) &= inf(n_{12}) + inf(n_{13}) = 3, \\
inf(r) &= inf(n_1) \cdot inf(n_2) = 63, \\
\text{deci } t^I(s) &= 63.
\end{aligned}$$

Semnificația indusă de o L -structură $M = (D, I)$ structurilor simbolice din mulțimea $ATOM$ este de predicat ce exprimă o relație între termenii argumente.

Definiția 2.2.4 Fie $M = (D, I)$ o L -structură și $\alpha \in ATOM$. Interpretarea atomului α în L -structura $M = (D, I)$, este $\alpha^I: [V \rightarrow D] \rightarrow \{T, F\}$ definită prin, $s \in [V \rightarrow D]$,

$$\alpha^I(s) = \begin{cases} I_{PS}(\alpha), & \text{dacă } \alpha \in PS, r(\alpha) = 0 \\ \pi^I(t_1^I(s), \dots, t_{r(\pi)}^I(s)), & \text{dacă } \alpha = \pi t_1 \dots t_{r(\pi)}, \\ & \pi \in PS, r(\pi) \geq 1 \end{cases}$$

Exemplul 2.2.2 Fie $M = (D, I)$ interpretarea intenționată pentru limbajul de primul ordin al aritmeticii (*Exemplul 2.2.1*). Structura simbolică

$$\begin{aligned}
\alpha &\stackrel{\circ}{=} * + xS0 + xSS0 + + + *xx * SSS0xSS0 \text{ este} \\
\alpha &\stackrel{\circ}{=} \underbrace{* + xS0 + xSS0}_{t_1} + \underbrace{+ + *xx * SSS0xSS0}_{t_2}, \text{ unde } t_1, t_2 \in TERM,
\end{aligned}$$

deci $\alpha \in ATOM$.

Pentru $s \in [V \rightarrow D]$ asociere oarecare, obținem

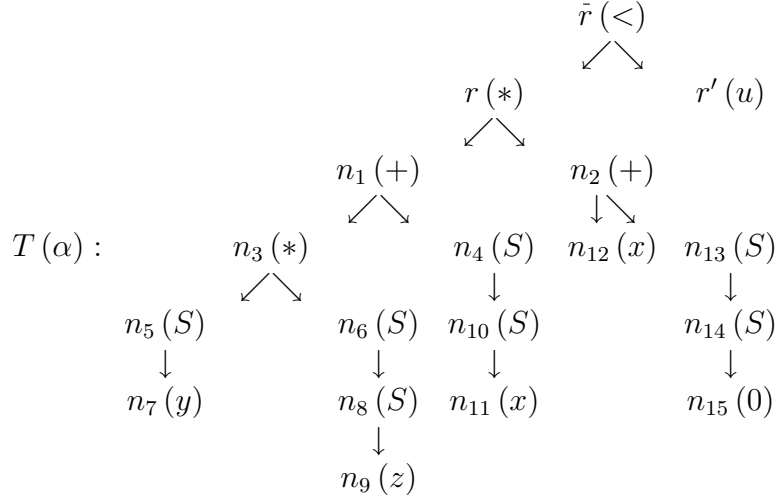
$$\begin{aligned}
\alpha^I(s) &\stackrel{\circ}{=}^I (t_1^I(s), t_2^I(s)) = \text{if } t_1^I(s) = t_2^I(s) \text{ then } T \text{ else } F \\
t_1^I(s) &= *^I \left((+xS0)^I(s), (+xSS0)^I(s) \right) = (s(x) + 1) \cdot (s(x) + 2) \\
t_2^I(s) &= +^I \left((+ *xx * SSS0x)^I(s), (SS0)^I(s) \right) = \\
&+^I \left((*xx)^I(s), (*SS0x)^I(s) \right) + 2 = s(x) \cdot s(x) + 3 \cdot s(x) + 2.
\end{aligned}$$

Evident, pentru orice asociere s , $t_1^I(s) = t_2^I(s)$ deci $\alpha^I(s) = T$.

Observație Similar structurilor simbolice de tipul $TERM$, dacă $\alpha \in ATOM$, atunci valoarea $\alpha^I(s) \in \{T, F\}$ rezultă ca informație asociată vârfului rădăcină prin traversarea cu evaluare bottom-up a arborelui de structură corespunzător atomului α .

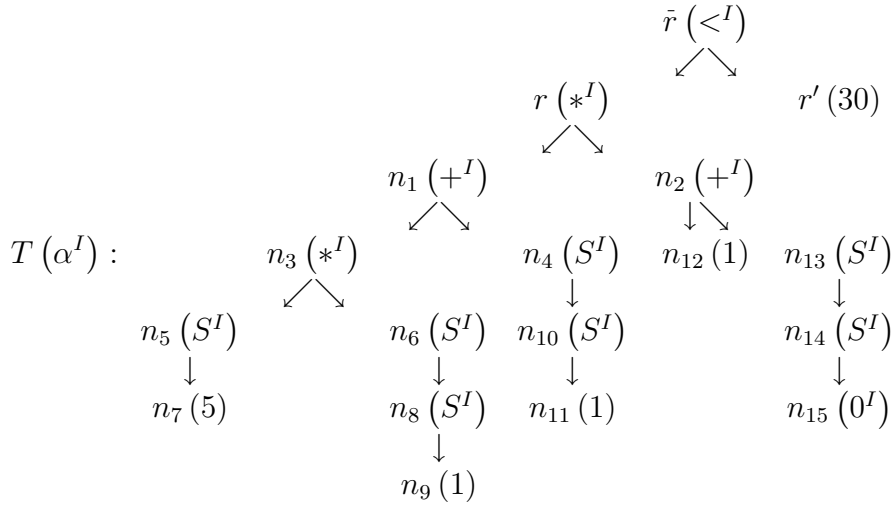
Exemplul 2.2.3 Fie $M = (D, I)$ interpretarea intenționată pentru limbajul de primul ordin al aritmeticii. Arborele de structură corespunzător

atomului $\alpha = < * + *SySSzSSx + xSS0u$, unde
 $x, y, z, u \in V$ este



etichetele vârfurilor fiind indicate în paranteze.

Pentru $s \in [V \rightarrow D]$, $s(x) = 1$, $s(y) = 5$, $s(z) = 1$, $s(u) = 30$, arborele transformat este



prin traversarea cu evaluare bottom-up a arborelui $T(\alpha)$, informația asociată vârfului r este 63 (*Exemplul 2.2.1*) respectiv informația asociată vârfului r' este 30, ceea ce determină pentru vârful rădăcină informația F , deci $\alpha^I(s) = F$.

Pentru construirea semanticii induse de o L -structură formulelor limbajului, introducem operatorii $(A_x)_{x \in V}$, $(E_x)_{x \in V}$,

$$\begin{aligned}
 A_x & : \quad [[V \rightarrow D] \rightarrow \{T, F\}] \rightarrow [[V \rightarrow D] \rightarrow \{T, F\}], \\
 E_x & : \quad [[V \rightarrow D] \rightarrow \{T, F\}] \rightarrow [[V \rightarrow D] \rightarrow \{T, F\}],
 \end{aligned}$$

definiți în modul următor: pentru orice $\varphi \in [[V \rightarrow D] \rightarrow \{T, F\}]$ și orice $s \in [V \rightarrow D]$

$$(A_x(\varphi))(s) = T, \text{ dacă și numai dacă pentru orice } a \in D, \\ \varphi(s[x := a]) = T,$$

$$(E_x(\varphi))(s) = T, \text{ dacă și numai dacă există } a \in D, \\ \text{astfel încât } \varphi(s[x := a]) = T.$$

Semantica indusă de o L -structură $M = (D, I)$ fiecărei formule α a limbajului, notată α^I , este similară semanticii induse pentru atomii limbajului și anume α^I este funcție definită pe mulțimea asocierilor cu valori în mulțimea $\{T, F\}$, $\alpha^I : [V \rightarrow D] \rightarrow \{T, F\}$.

Este suficient să definim α^I pentru $\alpha \in FORM \setminus ATOM$.

Definiția 2.2.5 Fie $M = (D, I)$ o L -structură și $\alpha \in FORM \setminus ATOM$.

Pentru orice $s \in [V \rightarrow D]$, interpretarea $\alpha^I : [V \rightarrow D] \rightarrow \{T, F\}$ a formulei α în M este definită prin

$$\alpha^I(s) = \begin{cases} \neg \beta^I(s) & \text{dacă } \alpha = (\neg \beta), \\ \beta^I(s) \wedge \gamma^I(s) & \text{dacă } \alpha = (\beta \wedge \gamma), \\ \beta^I(s) \vee \gamma^I(s) & \text{dacă } \alpha = (\beta \vee \gamma), \\ \beta^I(s) \rightarrow \gamma^I(s) & \text{dacă } \alpha = (\beta \rightarrow \gamma), \\ \beta^I(s) \leftrightarrow \gamma^I(s) & \text{dacă } \alpha = (\beta \leftrightarrow \gamma), \\ E_x(\beta^I)(s) & \text{dacă } \alpha = \exists x \beta, \\ A_x(\beta^I)(s) & \text{dacă } \alpha = \forall x \beta. \end{cases}$$

Spunem că asocierea s validează α , dacă $\alpha^I(s) = T$, respectiv s falsifică α , dacă $\alpha^I(s) = F$.

Convenim să reprezentăm prin $M \models \alpha[s]$ faptul că s validează α .

Exemplul 2.2.4 Fie $M = (D, I)$ interpretarea intenționată pentru limbajul de primul ordin al aritmeticii. Evident,

$$\alpha = \forall x \forall y \left(< xy \rightarrow \exists z \overset{\circ}{=} + xzy \right) \in FORM,$$

unde $x, y, z \in V, x \neq y \neq z \neq x$.

Pentru $s \in [V \rightarrow D]$ arbitrară, rezultă

$$\begin{aligned}
\alpha^I(s) &= A_x \left(\forall y \left(< xy \rightarrow \exists z \stackrel{\circ}{=} +xzy \right) \right)^I(s) = \\
&= A_x \left(A_y \left(\left(< xy \rightarrow \exists z \stackrel{\circ}{=} +xzy \right) \right)^I \right)^I(s) = \\
&= A_x \left(A_y \left((< xy)^I \rightarrow \left(\exists z \stackrel{\circ}{=} +xzy \right)^I \right) \right)(s) = \\
&= A \left({}_x A_y \left((< xy)^I \rightarrow E_z \left(\stackrel{\circ}{=} +xzy \right)^I \right) \right)(s)
\end{aligned}$$

deci, $\alpha^I(s) = T$, dacă și numai dacă pentru orice $a \in N$,

$$A_y \left((< xy)^I \rightarrow E_z \left(\stackrel{\circ}{=} +xzy \right)^I \right)(s[x := a]) = T,$$

dacă și numai dacă pentru orice $a \in N$, $b \in N$,

$$\left((< xy)^I \rightarrow E_z \left(\stackrel{\circ}{=} +xzy \right)^I \right)(s[x := a][y := b]) = T.$$

Deoarece $x \neq y \neq z \neq x$, $s[x := a][y := b] = s[x := a, y := b]$, deci

$$\begin{aligned}
&\left((< xy)^I \rightarrow E_z \left(\stackrel{\circ}{=} +xzy \right)^I \right)(s[x := a][y := b]) = \\
&(if \ s[x := a, y := b](x) < s[x := a, y := b](y) \ then \ T \ else \ F) \rightarrow \\
&\quad E_z \left(\stackrel{\circ}{=} +xzy \right)^I(s[x := a, y := b]) = \\
&(if \ a < b \ then \ T \ else \ F) \rightarrow E_z \left(\stackrel{\circ}{=} +xzy \right)^I(s[x := a, y := b])
\end{aligned}$$

Pentru $a, b \in N$, astfel încât $a \geq b$, obținem

$$\begin{aligned}
&\left((< xy)^I \rightarrow E_z \left(\stackrel{\circ}{=} +xzy \right)^I \right)(s[x := a][y := b]) = \\
&\quad F \rightarrow E_z \left(\stackrel{\circ}{=} +xzy \right)^I(s[x := a, y := b]) = T,
\end{aligned}$$

respectiv pentru $a, b \in N$, astfel încât $a < b$,

$$\begin{aligned}
&\left((< xy)^I \rightarrow E_z \left(\stackrel{\circ}{=} +xzy \right)^I \right)(s[x := a][y := b]) = \\
&\quad T \rightarrow E_z \left(\stackrel{\circ}{=} +xzy \right)^I(s[x := a, y := b]).
\end{aligned}$$

Analizăm cazul $a, b \in N$, $a < b$, deci există $n \in N$, astfel încât $a + n = b$.

Deoarece $E_z \left(\overset{\circ}{=} + xzy \right)^I (s[x := a, y := b]) = T$, dacă și numai dacă există $c \in N$, astfel încât

$$\left(\overset{\circ}{=} + xzy \right)^I (s[x := a, y := b][z := c]) = T,$$

adică

$$\begin{aligned} & \text{if } s[x := a, y := b, z := c](x) + s[x := a, y := b, z := c](z) = \\ & = s[x := a, y := b, z := c](y) \text{ then } T \text{ else } F = \\ & = \text{if } a + c = b \text{ then } T \text{ else } F = T, \end{aligned}$$

cum $a + n = b$, rezultă că există $c \in N$, astfel încât

$$\left(\overset{\circ}{=} + xzy \right)^I (s[x := a, y := b][z := c]) = T,$$

deci $E_z \left(\overset{\circ}{=} + xzy \right)^I (s[x := a, y := b]) = T$.

Rezultă că dacă $a, b \in N$, $a < b$ atunci

$$\left((< xy)^I \rightarrow E_z \left(\overset{\circ}{=} + xzy \right)^I \right) (s[x := a][y := b]) = T \rightarrow T = T.$$

În concluzie, pentru orice $a, b \in N$,

$$\left((< xy)^I \rightarrow E_z \left(\overset{\circ}{=} + xzy \right)^I \right) (s[x := a][y := b]) = T,$$

deci pentru orice $a \in N$,

$$A_y \left((< xy)^I \rightarrow E_z \left(\overset{\circ}{=} + xzy \right)^I \right) (s[x := a]) = T,$$

adică $\alpha^I(s) = T$ pentru orice asociere $s \in [V \rightarrow D]$.

Definiția 2.2.6 Fie $M = (D, I)$ o L -structură, $\sigma \in SUBST$. Compunerea valuației $s \in [V \rightarrow D]$ cu substituția σ este valuația $s \cdot \sigma$ definită prin

$$s \cdot \sigma = \begin{cases} s, & \text{dacă } \sigma = \varepsilon \\ s[x_1 := t_1^I(s), \dots, x_n := t_n^I(s)], & \text{dacă } \sigma = \{t_1 \mid x_1, \dots, t_n \mid x_n\} \end{cases}.$$

Lema 2.2.1 Fie $M = (D, I)$ o L -structură, $s \in [V \rightarrow D]$,

$$\sigma = \{t_1 \mid x_1, \dots, t_n \mid x_n\} \in SUBST.$$

Pentru orice $\alpha \in TERM \cup FORM$, $(\alpha\sigma)^I(s) = \alpha^I(s \cdot \sigma)$.

Demonstrație Demonstrăm proprietatea afirmată în enunț prin inducție structurală.

Fie $t \in TERM$,

a) dacă $t \in CS$, atunci

$$(t\sigma)^I(s) = t^I(s) = I_{CS}(t) = t^I(s \cdot \sigma)$$

b) dacă $t \in V \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$, atunci

$$(t\sigma)^I(s) = t^I(s) = s(t) = s \cdot \sigma(t) = t^I(s \cdot \sigma)$$

c) dacă $t = x_i$, atunci

$$(t\sigma)^I(s) = (t_i)^I(s) = t^I(s \cdot \sigma)$$

d) dacă $t = fp_1 \dots p_{r(f)}$ pentru anume $f \in FS$,

$$\begin{aligned} (t\sigma)^I(s) &= (fp_1 \sigma \dots p_{r(f)} \sigma)^I(s) = f^I\left((p_1 \sigma)^I(s), \dots, (p_{r(f)} \sigma)^I(s)\right) = \\ &= f^I(p_1^I(s \cdot \sigma), \dots, p_{r(f)}^I(s \cdot \sigma)) = t^I(s \cdot \sigma). \end{aligned}$$

De asemenea, pentru $\alpha \in ATOM$,

a) dacă $\alpha \in PS$ și $r(\alpha) = 0$, atunci

$$(\alpha\sigma)^I(s) = \alpha^I(s) = I_{PS}(\alpha) = \alpha^I(s \cdot \sigma),$$

b) dacă $\alpha = \pi p_1 \dots p_{r(\pi)}$ pentru anume $\pi \in PS$ și $r(\pi) \geq 1$, $p_i \in TERM$, $1 \leq i \leq r(\pi)$, atunci

$$\begin{aligned} (\alpha\sigma)^I(s) &= \pi^I\left((p_1 \sigma)^I(s), \dots, (p_{r(\pi)} \sigma)^I(s)\right) = \\ &= \pi^I(p_1^I(s \cdot \sigma), \dots, p_{r(\pi)}^I(s \cdot \sigma)) = \alpha^I(s \cdot \sigma) \end{aligned}$$

Pentru $\alpha \in FORM \setminus ATOM$,

a) dacă $\alpha = (\neg\beta)$, $FV(\alpha) = FV(\beta)$ deci

$$\begin{aligned} (\alpha\sigma)^I(s) &= (\neg\beta\sigma)^I(s) = \neg(\beta\sigma)^I(s) = \\ &= \neg\beta^I(s \cdot \sigma) = (\neg\beta)^I(s \cdot \sigma) = \alpha^I(s \cdot \sigma) \end{aligned}$$

b) Un argument similar permite stabilirea aceleiași concluzii, dacă $\alpha = (\beta\rho\gamma)$ pentru $\rho \in L \setminus \{\neg\}$, deoarece $FV(\alpha) = FV(\beta) \cup FV(\gamma)$ și $FV(\alpha) \cap BV(\alpha) = \emptyset$.

c) dacă $\alpha = \forall x\beta$ și $x = x_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$, atunci

$$\alpha\sigma = \forall x\beta(\sigma \setminus \{t_i \mid x_i\}).$$

Notăm $\sigma_1 = \sigma \setminus \{t_i \mid x_i\}$; evident $\alpha\sigma = \alpha\sigma_1$; $(\alpha\sigma_1)^I(s) = T$, dacă și numai dacă pentru orice $a \in D$, $(\beta\sigma_1)^I(s[x_i := a]) = T$.

Utilizând ipoteza inductivă, obținem că pentru orice $a \in D$,

$$(\beta\sigma_1)^I(s[x_i := a]) = \beta^I(s_1 \cdot \sigma_1),$$

unde $s_1 = s[x_i := a]$.

Deoarece

$$\begin{aligned} s_1 \cdot \sigma_1 &= \\ &= s[x_i := a][x_1 := t_1^I(s_1), \dots, x_{i-1} := t_{i-1}^I(s_1), x_{i+1} := t_{i+1}^I(s_1), \dots \\ &\dots, x_n := t_n^I(s_1)] = s[x_1 := t_1^I(s_1), \dots, x_i := a, \dots, x_n := t_n^I(s_1)] \\ &= s[x_1 := t_1^I(s), \dots, x_i := a, \dots, x_n := t_n^I(s)] = s[x_1 := t_1^I(s), \dots \\ &\dots, x_{i-1} := t_{i-1}^I(s), x_i := t_i^I(s), x_{i+1} := t_{i+1}^I(s) \dots \\ &\dots, x_n := t_n^I(s)][x_i := a] = s \cdot \sigma[x_i := a]. \end{aligned}$$

Obținem astfel că pentru orice $a \in D$, $s_1 \cdot \sigma_1 = s \cdot \sigma[x_i := a]$, deci $(\alpha\sigma_1)^I(s) = T$, dacă și numai dacă pentru orice $a \in D$,

$$\beta^I(s \cdot \sigma[x_i := a]) = T.$$

Rezultă $(\alpha\sigma_1)^I(s) = T$, dacă și numai dacă $\alpha^I(s \cdot \sigma) = T$, deci

$$(\alpha\sigma)^I(s) = \alpha^I(s \cdot \sigma).$$

d) dacă $\alpha = \forall x\beta$ și $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$, atunci $\alpha\sigma = \forall x\beta\sigma$
 $(\alpha\sigma)^I(s) = T$, dacă și numai dacă pentru orice

$$a \in D, (\beta\sigma)^I(s[x_i := a]) = T.$$

Utilizând ipoteza inductivă, obținem că pentru orice $a \in D$,

$$(\beta\sigma)^I(s[x_i := a]) = \beta^I(s[x_i := a] \cdot \sigma).$$

Deoarece

$$\begin{aligned} s[x_i := a] \cdot \sigma &= s[x_1 := t_1^I(s_1), \dots, x_i := a, \dots, x_n := t_n^I(s_1)] = \\ &= s[x_1 := t_1^I(s), \dots, x_i := a, \dots, x_n := t_n^I(s)] = \\ &= s[x_1 := t_1^I(s), \dots, x_{i-1} := t_{i-1}^I(s), x_i := t_i^I(s), \\ &\quad x_{i+1} := t_{i+1}^I(s) \dots, x_n := t_n^I(s)][x_i := a] = s \cdot \sigma[x_i := a] \end{aligned}$$

rezultă $(\alpha\sigma)^I(s) = T$, dacă și numai dacă pentru orice $a \in D$,

$$\beta^I(s \cdot \sigma[x_i := a]),$$

deci dacă și numai dacă $(\forall x\beta)^I(s \cdot \sigma) = T$ ceea ce evident implică

$$(\alpha\sigma)^I(s) = \alpha^I(s \cdot \sigma).$$

e) dacă $\alpha = \forall x\beta$, concluzia afirmată în enunț poate fi stabilită pe baza unui argument analog justificărilor considerate în cazurile (c) respectiv (d).

Corolar Dacă $M = (D, I)$ este o L -structură, $\alpha \in FORM$, $\sigma = \{t_1 \mid x_1, \dots, t_n \mid x_n\} \in SUBST$, atunci α este de asemenea validabilă în M , dacă și numai dacă $\alpha\sigma$ este validabilă în M .

Într-adevăr, deoarece pentru orice $\alpha \in FORM$, $(\alpha\sigma)^I(s) = \alpha^I(s \cdot \sigma)$ obținem $M \models \alpha\sigma(s)$, dacă și numai dacă $M \models \alpha(s \cdot \sigma)$.

Definiția 2.2.7 Fie $M = (D, I)$ o L -structură și $\alpha \in FORM$. Spunem că α este validabilă (satisfiabilă) în M dacă există $s \in [V \rightarrow D]$, astfel încât $M \models \alpha[s]$. Formula α este validabilă, dacă există o L -structură M , astfel încât α este validabilă în M .

Definiția 2.2.8 Formula α este validă în L -structura M , dacă $M \models \alpha[s]$ pentru orice asociere s . În acest caz spunem că M este model pentru α și notăm $M \models \alpha$. Mulțimea modelelor formulei α este notată $M(\alpha)$.

Lema 2.2.2 Fie $M = (D, I)$ o L -structură.

Dacă $\alpha \in TERM \cup FORM$, astfel încât $FV(\alpha) = \emptyset$, atunci pentru orice $s_1, s_2 \in [V \rightarrow D]$, $\alpha^I(s_1) = \alpha^I(s_2)$.

Demonstrație Demonstrăm prin inducție structurală că dacă $t \in TERM$, astfel încât $FV(t) = \emptyset$, atunci pentru orice $s_1, s_2 \in [V \rightarrow D]$, $t^I(s_1) = t^I(s_2)$. Concluzia este evidentă în cazul $t \in CS$.

Dacă $t = ft_1 \dots t_{r(f)}$ pentru anume $f \in FS$, cum $FV(t) = \bigcup_{i=1}^{r(f)} FV(t_i)$ rezultă $FV(t_i) = \emptyset$, $1 \leq i \leq r(f)$, deci pentru orice $s_1, s_2 \in [V \rightarrow D]$, $t_i^I(s_1) = t_i^I(s_2)$, $1 \leq i \leq r(f)$.

Obținem

$$t^I(s_1) = f^I(t_1^I(s_1), \dots, t_{r(f)}^I(s_1)) = f^I(t_1^I(s_2), \dots, t_{r(f)}^I(s_2)) = t^I(s_2).$$

Demonstrăm prin inducție structurală că dacă α este formulă închisă (*Definiția 2.1.8*), atunci pentru orice $s_1, s_2 \in [V \rightarrow D]$,

$$\alpha^I(s_1) = \alpha^I(s_2).$$

a) Dacă $\alpha \in ATOM$, atunci $\alpha \in PS$ și $r(\alpha) = 0$ sau $\alpha = \pi t_1 \dots t_{r(\pi)}$ pentru anume $\pi \in PS$ și $r(\pi) \geq 1$. Proprietatea este imediată pentru $\alpha \in PS$ cu $r(\alpha) = 0$, deoarece pentru orice valuație s , $\alpha^I(s) = I_{PS}(\alpha)$.

Dacă $\alpha = \pi t_1 \dots t_{r(\pi)}$ pentru anume $\pi \in PS$ și $r(\pi) \geq 1$, atunci $FV(t_i) = \emptyset$, $1 \leq i \leq r(\pi)$.

Rezultă $t_i^I(s_1) = t_i^I(s_2)$, $1 \leq i \leq r(\pi)$, deci

$$\alpha^I(s_1) = \pi^I(t_1^I(s_1), \dots, t_{r(\pi)}^I(s_1)) = \pi^I(t_1^I(s_2), \dots, t_{r(\pi)}^I(s_2)) = \alpha^I(s_2).$$

b) Dacă $\alpha = (\neg\beta)$ rezultă $FV(\beta) = \emptyset$. Conform ipotezei inductive, pentru orice $s_1, s_2 \in [V \rightarrow D]$, $\beta^I(s_1) = \beta^I(s_2)$, ceea ce evident implică

$$\alpha^I(s_1) = \alpha^I(s_2).$$

c) Un argument similar permite stabilirea aceleiași concluzii, dacă $\alpha = (\beta\rho\gamma)$ pentru anume $\rho \in L \setminus \{\neg\}$.

d) Presupunem $\alpha = \forall x\beta$. Deoarece $FV(\alpha) = FV(\beta) \setminus \{x\}$ rezultă $FV(\beta) \in \{\{x\}, \emptyset\}$. Evident în ambele cazuri, pentru orice $a \in D$, $\beta^I(s_1[x := a]) = \beta^I(s_2[x := a])$, deci $\alpha^I(s_1) = \alpha^I(s_2)$.

e) Dacă $\alpha = \exists x\beta$, atunci pe baza unui argument analog obținem concluzia afirmată în enunțul lemei.

Corolar Fie $\alpha \in FORM_0$. Dacă $M = (D, I)$ este o L -structură atunci α este validabilă în M , dacă și numai dacă α este validă în M .

Definiția 2.2.9 Formula α este validă (tautologie), dacă α este validă în orice L -structură M .

Reprezentăm formulele α valide prin $\models \alpha$.

Observație Pentru $\alpha \in FORM$, $FV(\alpha) = \{x_1, \dots, x_n\}$ fie

$\bar{\alpha} = \forall x_1 \dots \forall x_n \alpha$, $\underline{\alpha} = \exists x_1 \dots \exists x_n \alpha$ închiderile universală și respectiv existențială ale formulei α . Evident $\bar{\alpha}, \underline{\alpha} \in FORM_0$. Pentru orice

L -structură $M = (D, I)$, α este validabilă în M , dacă și numai dacă $\underline{\alpha}$ este validabilă în M , deci dacă și numai dacă $\underline{\alpha}$ este validă în M . De asemenea, α este validă în M , dacă și numai dacă $\bar{\alpha}$ este validă în M .

Lema 2.2.3 Formulele $(\forall x\alpha \rightarrow \exists x\alpha)$, $(\exists x\forall y\alpha \rightarrow \forall y\exists x\alpha)$ sunt valide pentru orice $\alpha \in FORM$, $x, y \in V$, $x \neq y$.

Demonstrație Pentru $M = (D, I)$ o L -structură arbitrară, și $s \in [V \rightarrow D]$:

Dacă $(\forall x\alpha)^I(s) = F$, atunci

$$(\forall x\alpha \rightarrow \exists x\alpha)^I(s) = F \rightarrow (\exists x\alpha)^I(s) = T.$$

Dacă $(\forall x\alpha)^I(s) = T$, atunci pentru orice $a \in D$,

$$\alpha^I(s[x := a]) = T.$$

Deoarece $D \neq \emptyset$, rezultă că există $a \in D$, astfel încât

$$\alpha^I(s[x := a]) = T, \text{ deci } (\exists x\alpha)^I(s) = T.$$

Obținem și în acest caz, $(\forall x\alpha \rightarrow \exists x\alpha)^I(s) = T \rightarrow T = T$,

deci $\models (\forall x\alpha \rightarrow \exists x\alpha)$.

Analog, dacă $(\exists x\forall y\alpha)^I(s) = F$, atunci $(\exists x\forall y\alpha \rightarrow \forall y\exists x\alpha)^I(s) = T$.

Dacă $(\exists x\forall y\alpha)^I(s) = T$, atunci există $a_0 \in D$, astfel încât

$$(\forall y\alpha)^I(s)^I(s[x := a]) = T,$$

deci există $a_0 \in D$, astfel încât pentru orice $b \in D$,

$$\alpha^I(s)^I(s[x := a_0, y := b]) = \alpha^I(s)^I(s[y := b][x := a_0]) = T.$$

Deoarece $D \neq \emptyset$, rezultă că $(\exists x\alpha)^I(s[y := b]) = T$ pentru orice $b \in D$, deci $(\forall y\exists x\alpha)^I(s) = T$, ceea ce implică

$$(\exists x\forall y\alpha \rightarrow \forall y\exists x\alpha)^I(s) = T \rightarrow T = T.$$

Obținem în final $\models (\exists x\forall y\alpha \rightarrow \forall y\exists x\alpha)$.

În particular rezultă că există formule valide. Se demonstrează cu ușurință că un alt exemplu de formulă validă este $(\alpha \vee (\neg\alpha))$. Convenim să notăm cu \top o formulă validă arbitrară.

Definiția 2.2.10 Formula α este invalidabilă dacă pentru orice L -structură M și orice valuație s , $\alpha^I(s) = F$.

Observație Există formule invalidabile. Într-adevăr, pentru orice $\alpha \in FORM$, $(\alpha \wedge (\neg\alpha))$ este formulă invalidabilă. Convenim să notăm cu \perp o formulă invalidabilă oarecare.

Definiția 2.2.11 Mulțimea de formule H este validabilă, dacă există o L -structură M și există $s \in [V \rightarrow D]$, astfel încât $M \models \alpha[s]$ pentru orice $\alpha \in H$.

Definiția 2.2.12 L -structura M este model pentru mulțimea de formule H dacă M este model pentru toate formulele din H . Convenim să notăm în acest caz, $M \models H$.

Dacă $M(H)$ este familia modelelor mulțimii H , atunci

$$M(H) = \bigcap_{\alpha \in H} M(\alpha).$$

Definiția 2.2.13 Mulțimea de formule H este validă, dacă orice L -structură M este model pentru H . Proprietatea de validitate a unei mulțimi de formule H este reprezentată $\models H$.

Definiția 2.2.14 Fie $H \subset FORM$. Formula α este consecință logică a mulțimii H , dacă pentru orice L -structură M și orice $s \in [V \rightarrow D]$, astfel încât $\beta^I(s) = T$ pentru toate formulele $\beta \in H$, rezultă

$\alpha^I(s) = T$. Dacă α este consecință logică a mulțimii H , notăm $H \models \alpha$.

Exemplul 2.2.5 Fie $P, Q \in PS$, $a \in CS$.

Dacă $H = \{Pa, \forall x (Px \rightarrow Qx)\}$, $\alpha = Qa$, atunci $H \models \alpha$.

Într-adevăr, fie (D, I) model pentru H , deci $P^I(a^I) = T$ și pentru orice $s \in [V \rightarrow D]$ și orice $c \in D$, $(Px \rightarrow Qx)^I(s[x := c]) = T$. În particular rezultă $P^I(a^I) \rightarrow Q^I(a^I) = T$, deci $Q^I(a^I) = T$, adică $(Qa)^I = T$.

Scopul urmărit prin introducerea limbajului formulelor este obținerea unei modalități pentru descrierea "lunilor posibile", adică a structurilor algebrice. Din acest punct de vedere este naturală concentrarea pe mulțimea formulelor închise. În continuare, considerațiile vor fi efectuate în exclusivitate pentru mulțimea formulelor închise. În plus, vom presupune că formulele nu conțin cuantificări multiple asupra variabilelor. Pentru o mulțime de formule închise H și o

L -structură M întrebarea dacă H este consistentă cu această "lume" (validată sau confirmată de M) este exprimată prin proprietatea $M \models H$, respectiv consistența universală a mulțimii H revine la proprietatea de validitate a mulțimii H .

De asemenea, pentru $H \subset FORM_0$, $\alpha \in FORM_0$, formula α este consecință logică a mulțimii H , dacă și numai dacă orice lume consistentă pentru H este o lume consistentă și pentru α , adică orice L -structură model pentru H este model și pentru α . În general este dificilă verificarea proprietății $H \models \alpha$. O modalitate alternativă este stabilită de *Lema 2.2.4*.

Lema 2.2.4 Dacă $H \subset FORM_0$, $\alpha \in FORM_0$, atunci $H \models \alpha$, dacă și numai dacă $H \cup \{(\neg\alpha)\}$ este invalidabilă.

Demonstrație Presupunem $H \models \alpha$. Fie $M = (D, I)$ o L -structură arbitrară. Evident, dacă M nu este model pentru H , atunci M nu este model nici pentru $H \cup \{(\neg\alpha)\}$. Dacă M este model pentru H , atunci M este model și pentru α , deci pentru orice valuație $s \in [V \rightarrow D]$, $(\neg\alpha)^I(s) = \neg\alpha^I(s) = F$, ceea ce implică M falsifică $H \cup \{(\neg\alpha)\}$. Reciproc, presupunem că $H \cup \{(\neg\alpha)\}$ este invalidabilă. Dacă H este invalidabilă, atunci din *Definiția 2.2.14* rezultă $H \models \alpha$. Presupunem H validabilă. Fie $M = (D, I)$ model arbitrar pentru H . Rezultă că pentru orice valuație $s \in [V \rightarrow D]$, $(\neg\alpha)^I(s) = F$, deci $\alpha^I(s) = T$, adică $H \models \alpha$.

Lema 2.2.5 Dacă $H = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset FORM_0$, $\alpha \in FORM_0$, atunci $H \models \alpha$, dacă și numai dacă $\models (\beta_n \rightarrow \alpha)$ unde $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_i = (\alpha_i \wedge \beta_{i-1})$, $i = 2, \dots, n$.

Demonstrație Convenim să notăm $\beta_i = \bigwedge_{j=1}^i \alpha_j$, $i = 1, \dots, n$. Evident pentru orice $i = 1, \dots, n$, $M(\beta_i) = \bigcap_{j=1}^i M(\alpha_j)$, deci $M(\beta_n) = M(H)$.

Presupunem $H \models \alpha$, deci $M(H) \subset M(\alpha)$. Fie $M = (D, I)$ o L -structură

arbitrară.

Evident, dacă $M \in M(H)$, atunci $M \in M((\beta_n \rightarrow \alpha))$.

Dacă $M \notin M(H)$, atunci pentru orice valuație s ,

$$(\beta_n \rightarrow \alpha)^I(s) = \beta_n^I(s) \rightarrow \alpha^I(s) = F \rightarrow \alpha^I(s) = T.$$

Rezultă $\models (\beta_n \rightarrow \alpha)$.

Presupunem $\models (\beta_n \rightarrow \alpha)$. Dacă $M(H) = \emptyset$, atunci

$M(H) \subset M(\alpha)$, deci $H \models \alpha$.

Dacă $M(H) \neq \emptyset$ atunci pentru orice $M = (D, I)$ o L -structură model pentru H rezultă $M \in M(\beta_n)$. Pentru orice valuație s obținem $T = (\beta_n \rightarrow \alpha)^I(s) = T \rightarrow \alpha^I(s)$, deci $\alpha^I(s) = T$.

Rezultă $M(H) \subset M(\alpha)$, deci $H \models \alpha$.

Definiția 2.2.15 Formulele α, β sunt logic (semantic) echivalente, notat $\alpha \equiv \beta$, dacă pentru orice L -structură $M = (D, I)$ și pentru orice valuație $s \in [V \rightarrow D]$, $\alpha^I(s) = \beta^I(s)$.

În particular, dacă α, β sunt formule închise, atunci $\alpha \equiv \beta$, dacă și numai dacă au aceeași familie de modele, $M(\alpha) = M(\beta)$.

Observație Relația de echivalență semantică este o relație de echivalență pe mulțimea formulelor.

Lema 2.2.6 Pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$, $x \in V$,

ι) $(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

$\iota\iota$) $(\neg \alpha) \equiv (\alpha \rightarrow \perp)$

$\iota\iota\iota$) $(\alpha \rightarrow \beta) \equiv ((\neg \alpha) \vee \beta)$

$\iota\nu$) $\alpha \equiv \beta$ dacă și numai dacă $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$

ν) $(\neg \forall x \alpha) \equiv \exists x (\neg \alpha)$

$\nu\iota$) $(\neg \exists x \alpha) \equiv \forall x (\neg \alpha)$

Demonstrație Proprietățile $(\iota) - (\iota\nu)$ rezultă imediat pe baza *Definiției 2.2.14*.

ν) Fie $M = (D, I)$ o L -structură și fie $s \in [V \rightarrow D]$ o asociere arbitrară.

Deoarece $(\neg \forall x \alpha)^I(s) = T$, dacă și numai dacă $(\forall x \alpha)^I(s) = F$, deci dacă și numai dacă există $a \in D$, astfel încât

$\alpha^I(s[x := a]) = F$ și respectiv $(\exists x (\neg \alpha))^I(s) = T$, dacă și numai dacă există $b \in D$ astfel încât $((\neg \alpha))^I(s[x := b]) = T$, adică $\alpha^I(s[x := b]) = F$, rezultă $(\neg \forall x \alpha)^I(s) = T$, dacă și numai dacă $(\exists x (\neg \alpha))^I(s) = T$, deci

$$(\neg \forall x \alpha)^I(s) = (\exists x (\neg \alpha))^I(s).$$

$\nu\iota$) Fie $M = (D, I)$ o L -structură și fie $s \in [V \rightarrow D]$ o asociere arbitrară.

$(\neg \exists x \alpha)^I(s) = T$, dacă și numai dacă $(\exists x \alpha)^I(s) = F$, deci dacă și numai dacă pentru orice $a \in D$, $\alpha^I(s[x := a]) = F$.

De asemenea, $(\forall x (\neg \alpha))^I(s) = T$, dacă și numai dacă pentru orice $a \in D$, $(\neg \alpha)^I(s[x := a]) = T$, deci $\alpha^I(s[x := a]) = F$. Rezultă

$$(\neg \exists x \alpha)^I(s) = (\forall x (\neg \alpha))^I(s).$$

Lema 2.2.7 Pentru orice $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in FORM$, $x \in V$, astfel încât $\alpha \equiv \alpha'$ și $\beta \equiv \beta'$,

$$\iota) (\neg \alpha) \equiv (\neg \alpha')$$

$$\iota\iota) (\alpha \rho \beta) \equiv (\alpha' \rho \beta') \text{ pentru } \rho \in L \setminus \{\neg\}$$

$$\iota\iota\iota) (\forall x \alpha) \equiv (\forall x \alpha')$$

$$\iota\nu) (\exists x \alpha) \equiv (\exists x \alpha')$$

Demonstrație Justificarea proprietăților (ι) și $(\iota\iota)$ este evidentă.

$\iota\iota\iota)$ Fie $M = (D, I)$ o L -structură și fie $s \in [V \rightarrow D]$ o asociere arbitrară. $(\forall x \alpha)^I(s) = T$, dacă și numai dacă pentru orice $a \in D$, $\alpha^I(s[x := a]) = T$.

Deoarece $\alpha \equiv \alpha'$, pentru orice $a \in D$, $\alpha^I(s[x := a]) = \alpha'^I(s[x := a])$, deci pentru orice $a \in D$, $\alpha^I(s[x := a]) = T$, dacă și numai dacă $\alpha'^I(s[x := a]) = T$, ceea ce implică $(\forall x \alpha)^I(s) = (\forall x \alpha')^I(s)$.

$\iota\nu)$ Fie $M = (D, I)$ o L -structură și fie $s \in [V \rightarrow D]$ o asociere arbitrară.

$(\exists x \alpha)^I(s) = T$, dacă și numai dacă există $a \in D$ astfel încât

$\alpha^I(s[x := a]) = T$. Deoarece $\alpha \equiv \alpha'$, pentru orice $a \in D$, $\alpha^I(s[x := a]) = \alpha'^I(s[x := a])$, deci $(\exists x \alpha)^I(s) = (\exists x \alpha')^I(s)$.

Lema 2.2.8 Pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in FORM$,

$$\iota) \alpha \vee \perp \equiv \alpha; \alpha \wedge \perp \equiv \perp$$

$$\iota\iota) \alpha \vee \top \equiv \top; \alpha \wedge \top \equiv \alpha$$

$$\iota\iota\iota) (\neg(\neg \alpha)) \equiv \alpha$$

$$\iota\nu) (\neg(\alpha \wedge \beta)) \equiv ((\neg \alpha) \vee (\neg \beta))$$

$$\nu) (\neg(\alpha \vee \beta)) \equiv ((\neg \alpha) \wedge (\neg \beta))$$

$$\nu\iota) (\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha); (\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha)$$

$$\nu\iota\iota) (\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma));$$

$$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$$

$$\nu\iota\iota\iota) (\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)) \equiv \alpha; (\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)) \equiv \alpha$$

$$\iota\kappa) (\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma);$$

$$(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$$

Demonstrație Justificarea proprietăților $(\iota) - (\iota\kappa)$ este imediată și este propusă ca exercițiu cititorului.

Observație Pe baza proprietăților stabilite de lemele precedente, rezultă că pe mulțimea claselor de echivalență $\widehat{FORM} = FORM / \equiv$ poate fi identificată o structură de algebră Boole (algebra Lindenbaum asociată limbajului), cu primul element $\mathbf{0} = \widehat{\perp}$ și $\mathbf{1} = \widehat{\top}$ ultimul element, unde $\widehat{\alpha} = \{\beta \mid \beta \in FORM, \beta \equiv \alpha\}$.

Lema 2.2.9 Fie $\alpha, \beta \in FORM$, $x \in V$, astfel încât $\beta \rangle x \langle$

$$\iota) (\forall x \alpha \wedge \beta) \equiv \forall x (\alpha \wedge \beta)$$

- ι) $(\exists x \alpha \wedge \beta) \equiv \exists x (\alpha \wedge \beta)$
- $\iota\iota$) $(\forall x \alpha \vee \beta) \equiv \forall x (\alpha \vee \beta)$
- $\iota\nu$) $(\exists x \alpha \vee \beta) \equiv \exists x (\alpha \vee \beta)$
- ν) $(\forall x \alpha \vee \forall x \beta) \equiv \forall x (\alpha \vee \beta)$
- $\nu\iota$) $(\exists x \alpha \wedge \exists x \beta) \equiv \exists x (\alpha \wedge \beta)$

Demonstrație

ι) Pentru $M = (D, I)$ o L -structură și $s \in [V \rightarrow D]$ o asociere arbitrară, obținem $(\forall x \alpha \wedge \beta)^I(s) = T$, dacă și numai dacă

$(\forall x \alpha)^I(s) = \beta^I(s) = T$, deci dacă și numai dacă $\beta^I(s) = T$ și pentru orice $a \in D$, $\alpha^I(s[x := a]) = T$.

Deoarece $\beta \rangle x \langle$ rezultă $\beta^I(s) = \beta^I(s[x := a])$ deci,

$(\forall x \alpha \wedge \beta)^I(s) = T$ dacă și numai dacă pentru orice $a \in D$,

$$\alpha^I(s[x := a]) = \beta^I(s[x := a]) = T$$

ceea ce este echivalent cu $(\forall x (\alpha \wedge \beta))^I(s) = T$.

Rezultă $(\forall x \alpha \wedge \beta)^I(s) = (\forall x (\alpha \wedge \beta))^I(s)$, deci $(\forall x \alpha \wedge \beta) \equiv \forall x (\alpha \wedge \beta)$.

$\iota\iota$) Proprietatea poate fi stabilită printr-un argument analog argumentului precedent.

$\iota\nu$) $(\forall x \alpha \vee \beta)^I(s) = F$ dacă și numai dacă $(\forall x \alpha)^I(s) = \beta^I(s) = F$, deci dacă și numai dacă $\beta^I(s) = T$ și există $a \in D$, astfel încât $\alpha^I(s[x := a]) = F$. Deoarece $\beta \rangle x \langle$ rezultă $\beta^I(s) = \beta^I(s[x := a])$ deci, $(\forall x \alpha \vee \beta)^I(s) = F$, dacă și numai dacă există $a \in D$, astfel încât $\alpha^I(s[x := a]) = \beta^I(s[x := a]) = F$, ceea ce este echivalent cu $(\forall x (\alpha \vee \beta))^I(s) = F$.

Rezultă $(\forall x \alpha \vee \beta)^I(s) = (\forall x (\alpha \vee \beta))^I(s)$, deci $(\forall x \alpha \vee \beta) \equiv \forall x (\alpha \vee \beta)$.

$\iota\nu$) Proprietatea poate fi stabilită printr-un argument analog argumentului precedent.

ν) $(\forall x \alpha \vee \forall x \beta)^I(s) = F$, dacă și numai dacă

$$(\forall x \alpha)^I(s) = (\forall x \beta)^I(s) = F,$$

dacă și numai dacă există $a \in D$ și există $b \in D$, astfel încât

$$\alpha^I(s[x := a]) = \beta^I(s[x := b]) = F.$$

Deoarece $\beta \rangle x \langle$, pentru orice $c \in D$, $\beta^I(s[x := c]) = \beta^I(s)$, deci

$$\beta^I(s[x := b]) = \beta^I(s[x := a]) = F.$$

Obținem astfel, $(\forall x \alpha \vee \forall x \beta)^I(s) = F$, dacă și numai dacă există $a \in D$, astfel încât $\alpha^I(s[x := a]) = \beta^I(s[x := a]) = F$, deci dacă și numai dacă $(\forall x (\alpha \vee \beta))^I(s) = F$.

Rezultă

$$(\forall x \alpha \vee \forall x \beta)^I(s) = (\forall x (\alpha \vee \beta))^I(s),$$

deci $(\forall x \alpha \vee \forall x \beta) \equiv \forall x (\alpha \vee \beta)$.

$\nu \iota$ $(\exists x \alpha \wedge \exists x \beta)^I(s) = T$, dacă și numai dacă

$$(\exists x \alpha)^I(s) = (\exists x \beta)^I(s) = T,$$

deci dacă și numai dacă există $a \in D$ și există $b \in D$, astfel încât,

$$\alpha^I(s[x := a]) = \beta^I(s[x := b]) = T.$$

Dar $\beta^I(s[x := b]) = \beta^I(s[x := a])$, deci $(\exists x \alpha \wedge \exists x \beta)^I(s) = T$, dacă și numai dacă există $a \in D$, astfel încât

$$\alpha^I(s[x := a]) = \beta^I(s[x := a]) = T.$$

În concluzie $(\exists x \alpha \wedge \exists x \beta)^I(s) = T$, dacă și numai dacă

$\exists x (\alpha \wedge \beta)^I(s) = T$, ceea ce evident implică $(\exists x \alpha \wedge \exists x \beta) \equiv \exists x (\alpha \wedge \beta)$.

Observație Dacă $\beta \langle x \rangle$, relațiile (ν) , $(\nu \iota)$ nu sunt în general verificate.

Lema 2.2.10 Pentru orice $\alpha \in FORM$, $x \in V$,

ι $\forall x \alpha \equiv (\neg \exists x (\neg \alpha))$,

ν $\exists x \alpha \equiv (\neg \forall x (\neg \alpha))$.

Demonstrație Utilizând proprietățile stabilite de *Lema 2.2.5* și *Lema 2.2.7* obținem

$$(\neg \exists x (\neg \alpha)) \equiv \forall x (\neg (\neg \alpha)) \equiv \forall x \alpha$$

$$(\neg \forall x (\neg \alpha)) \equiv \exists x (\neg (\neg \alpha)) \equiv \exists x \alpha$$

Cu alte cuvinte, cuantificarea universală poate fi "definită" în funcție de cuantificarea existențială (ι) și reciproc (ν), concluzie care permite simplificarea unor argumentații teoretice prin reducerea numărului de cazuri care trebuie analizate.

Lema 2.2.11 Pentru orice $\alpha, \beta \in FORM$, $x, y \in V$, $t \in TERM$,

1) $\exists x \exists y \alpha \equiv \exists y \exists x \alpha$

2) $\forall x \forall y \alpha \equiv \forall y \forall x \alpha$

3) $(\forall x \alpha \rightarrow \alpha \{t \mid x\}) \equiv \top$

4) $(\alpha \{t \mid x\} \rightarrow \exists x \alpha) \equiv \top$

Demonstrație Proprietățile (1) și (2) pot fi stabilite fără dificultate utilizând argumente similare argumentelor considerate în demonstrațiile precedente.

3) Fie $M = (D, I)$ o L -structură și $s \in [V \rightarrow D]$ o asociere arbitrară.

Dacă $(\forall x \alpha)^I(s) = F$, atunci $(\forall x \alpha \rightarrow \alpha \{t \mid x\})^I(s) = T$.

Dacă $(\forall x\alpha)^I(s) = T$, atunci pentru orice $a \in D$, $\alpha^I(s[x := a]) = T$. În particular, pentru $a = t^I(s)$, obținem $\alpha^I(s[x := t^I(s)]) = T$.

Deoarece

$$(\alpha\{t \mid x\})^I(s) = \alpha^I(s[x := t^I(s)]),$$

rezultă $(\alpha\{t \mid x\})^I(s) = T$, deci

$$(\forall x\alpha \rightarrow \alpha\{t \mid x\})^I(s) = T \rightarrow T = T.$$

4) Analog, dacă $(\alpha\{t \mid x\})^I(s) = F$, atunci

$$(\alpha\{t \mid x\} \rightarrow \exists x\alpha)^I(s) = T.$$

Dacă $(\alpha\{t \mid x\})^I(s) = F$, atunci $\alpha^I(s[x := t^I(s)]) = F$. Deoarece pentru $a = t^I(s)$, $\alpha^I(s[x := t^I(s)]) = F$, rezultă $(\exists x\alpha)^I(s) = F$, deci

$$(\alpha\{t \mid x\} \rightarrow \exists x\alpha)^I(s) = T.$$

În consecință, pentru orice L -structură $M = (D, I)$ și pentru orice valuație $s \in [V \rightarrow D]$, $(\alpha\{t \mid x\} \rightarrow \exists x\alpha)^I(s) = T$, deci

$$(\alpha\{t \mid x\} \rightarrow \exists x\alpha) \equiv \top.$$