

Seminar01

Seminar01

Enunțuri

Rezolvare

Exercițiu 1. și Exercițiu 2.

Exercițiu 3. și Exercițiu 4.

Exercițiu 5.

Enunțuri

Să se determine următoarele primitive, care îndeplinesc condițiile specificate:

$$1) \int \frac{\ln(x)}{x} dx; F(1) = 2$$

$$2) \int \ln^2 x \, dx; F(1) = 1$$

$$3) \int x e^{x+2} \, dx; F(0) = 2$$

$$4) \int (x + x^3) e^{x^2} \, dx; F(0) = 3$$

$$5) \int [x + \ln(1 + x^2)] \, dx; F(0) = 1$$

Rezolvare

Exercițiu 1. și Exercițiu 2.

$$1) \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$= \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int u' \cdot u \, dx = \frac{u^2}{2} = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

$$u(x) = \ln x$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$F(1) = 2$$

$$F(1) = \frac{\ln^2 1}{2} + C = \boxed{C=2} \Rightarrow F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + 2$$

$$2) \int \ln^2 x \, dx = x \ln^2 x - \int 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$f = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}, g = x$$

$$= x \ln^2 x - 2 \left(x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx \right) = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$$

$$F(1) = 1 \cdot \ln^2 1 - 2 \cdot 1 \cdot \ln 1 + 2 \cdot 1 + C = 2 + C = 1 \Rightarrow \boxed{C=-1} \Rightarrow F(x) = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x - 1$$

Exercițiu 3. și Exercițiu 4.

$$3) \int x e^{x+1} dx = x e^{x+1} - \int e^{x+1} dx = x e^{x+1} - e^{x+1} + C$$

$$f = 1, g = e^{x+1}$$

$$F(0) = 2$$

$$F(0) = 0 \cdot e - e + C = -e + C = 2 \Rightarrow \boxed{C = 2 + e} \Rightarrow F(x) = x e^{x+1} - e^{x+1} + 2 + e$$

$$4) \int (x+x^3) e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx + \int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int u' \cdot e^u dx + \int x^3 e^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2} \int \underbrace{x^2}_{u(x)=x^2} \cdot \underbrace{2x e^{x^2}}_{u'(x)=2x} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2} \left(x^2 e^{x^2} - \int 2x e^{x^2} dx \right)$$

$$f = 2x, g = e^{x^2} \Rightarrow \frac{1}{2} e^{x^2} + \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$F(0) = \boxed{C=3} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} + 3$$

Exercițiu 5.

$$5) \int \left[x + \ln(1+x^2) \right] dx = \int x dx + \int \ln(1+x^2) dx = \frac{x^2}{2} + \int \ln(1+x^2) dx$$

$$\int \underbrace{\ln(1+x^2)}_f dx = x \ln(1+x^2) - \int \frac{2x}{1+x^2} \cdot x dx = x \ln(1+x^2) - 2 \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$f = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x, g = x \Rightarrow x \ln(1+x^2) - 2 \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx$$

$$= x \ln(1+x^2) - 2 \left(\int 1 dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx \right)$$

$$= x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x$$

$$I = \frac{x^2}{2} + x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + C$$

$$F(0) = C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + 1$$