13

Cuadrice

Definiţia 2.1. *Se numeşte* ***cuadrică*** *o suprafaţă în spaţiu definită în reperul cartezian ortonormat* $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *printr-o ecuaţie algebrică de gradul al doilea de forma*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, j \geq i$, *iar coeficienţii termenilor de gradul al doilea* $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ *nu sunt toţi nuli.*

Aşadar o cuadrică este o mulţime de puncte în spaţiu ale căror coordonate (x, y, z) verifică o ecuaţie de gradul al doilea de forma celei de mai sus.

- cuadricele se mai numesc şi *suprafeţe algebrice de ordinul al doilea*
- exemple de cuadrice: sferă, elipsoid, hiperboloizi, paraboloizi

Teorema : *Punctul* $C(x_0, y_0, z_0)$ *este centru al cuadricei* Σ *dacă şi numai dacă*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0 \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0. \end{cases}$$

Notăm

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

1. *Dacă* $\delta \neq 0$, *atunci cuadrica* $\Sigma : g(x, y, z) = 0$ *are* ***un unic centru*** $C(x_0, y_0, z_0)$ *ale cărui coordonate sunt determinate de sistemul Cramer anterior. Vom demonstra în acest capitol că cuadricele cu centru sunt:* ***sfera, elipsoidul, hiperboloidul cu o pânză sau două, conul, un punct şi mulţimea vidă.***

2. *Dacă* $\delta = 0$, *atunci cuadrica* $\Sigma : g(x, y, z) = 0$ *ori nu are* ***niciun centru*** *ori admite* ***o dreaptă de centre*** *ori admite* ***un plan de centre.*** *Vom demonstra în acest capitol că conicele* ***fără centru*** *sunt* ***paraboloidul eliptic, paraboloidul hiperbolic şi cilindrul parabolic,*** *cuadricele cu* ***o dreaptă de centre*** *sunt* ***cilindri circulari, cilindri eliptici, cilindri hiperbolici, dreapta şi reuniunea de plane secante*** *iar cuadricele cu* ***un plan de centre*** *sunt* ***reuniunea de plane paralele sau confundate şi mulţimea vidă.***

Cuadrice pe ecuaţii reduse

Sfera

Definiţia *Fie un punct fixat $C(a,b,c)$ şi $R > 0$ un număr real fixat.* ***Sfera*** *de centru C şi rază R este locul geometric al punctelor $M(x,y,z)$ care satisfac egalitatea*

$$|\overrightarrow{CM}| = R. \tag{2.1}$$

Avem $\overrightarrow{CM} = (x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j} + (z-c)\vec{k}$, deci (2.1) se rescrie

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$$

sau echivalent

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \tag{2.2}$$

care se numeşte **ecuaţia carteziană implicită** a sferei de centru $C(a,b,c)$ şi rază R.

Efectuând calculele în ecuaţia (2.2) obţinem:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, \tag{2.3}$$

unde $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$. Se pune problema dacă orice ecuaţie de forma (2.3) reprezintă ecuaţia unei sfere. Cum (2.3) este echivalentă cu

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d,$$

distingem următoarele cazuri:

1. dacă $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ atunci mulţimea punctelor care satisfac (2.3) reprezintă sfera cu centrul $C(a,b,c)$ şi rază $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$;

2. dacă $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$ atunci mulţimea punctelor care satisfac (2.3) se reduce la punctul de coordonate (a,b,c);

3. dacă $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$ atunci mulţimea punctelor care satisfac (2.3) este mulţimea vidă.

Ecuaţia (2.3) în care $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ se numeşte **ecuaţia generală a sferei**.

Fie $M(x,y,z)$ un punct din spaţiu şi $M'(x,y,0)$ proiecţia lui M pe planul xOy. Introducem notaţiile:

- $\rho = |\overrightarrow{OM}|$ - distanţa de la M la origine
- $\theta \in [0,\pi]$ - unghiul dintre Oz şi $\overrightarrow{OM}$
- $\varphi \in [0,2\pi)$ - unghiul dintre Ox şi $\overrightarrow{OM'}$

Numerele reale ρ, θ, φ se numesc **coordonatele sferice** ale lui M.
Relaţiile de legătură între coordonatele carteziene şi coordonatele sferice ale punctului M sunt:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}, \quad \rho \geq 0,\ \theta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi).$$

Considerând coordonatele sferice ale punctelor din sistemul de coordonate cu centrul în $C(a, b, c)$ şi axele paralele cu cele iniţiale, obţinem **ecuaţiile parametrice** ale sferei cu centrul în C şi rază R:

$$\begin{cases} x = a + R \sin\theta \cos\varphi \\ y = b + R \sin\theta \sin\varphi \\ z = c + R \cos\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi).$$

Considerăm un plan (p) şi notăm cu d distanţa de la C la acest plan. Avem următoarele situaţii posibile:

- $d > R \Rightarrow$ intersecţia dintre plan şi sferă este vidă, deci planul este *exterior* sferei;
- $d = R \Rightarrow$ intersecţia dintre plan şi sferă este un punct, deci planul este *tangent* la sferă;
- $d < R \Rightarrow$ intersecţia dintre plan şi sferă este un cerc, deci planul este *secant* la sferă.

Elipsoidul

Definiţia *Se numeşte **elipsoid** o cuadrică pentru care există un reper ortogonal în spaţiu în raport cu care suprafaţa are ecuaţia canonică*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

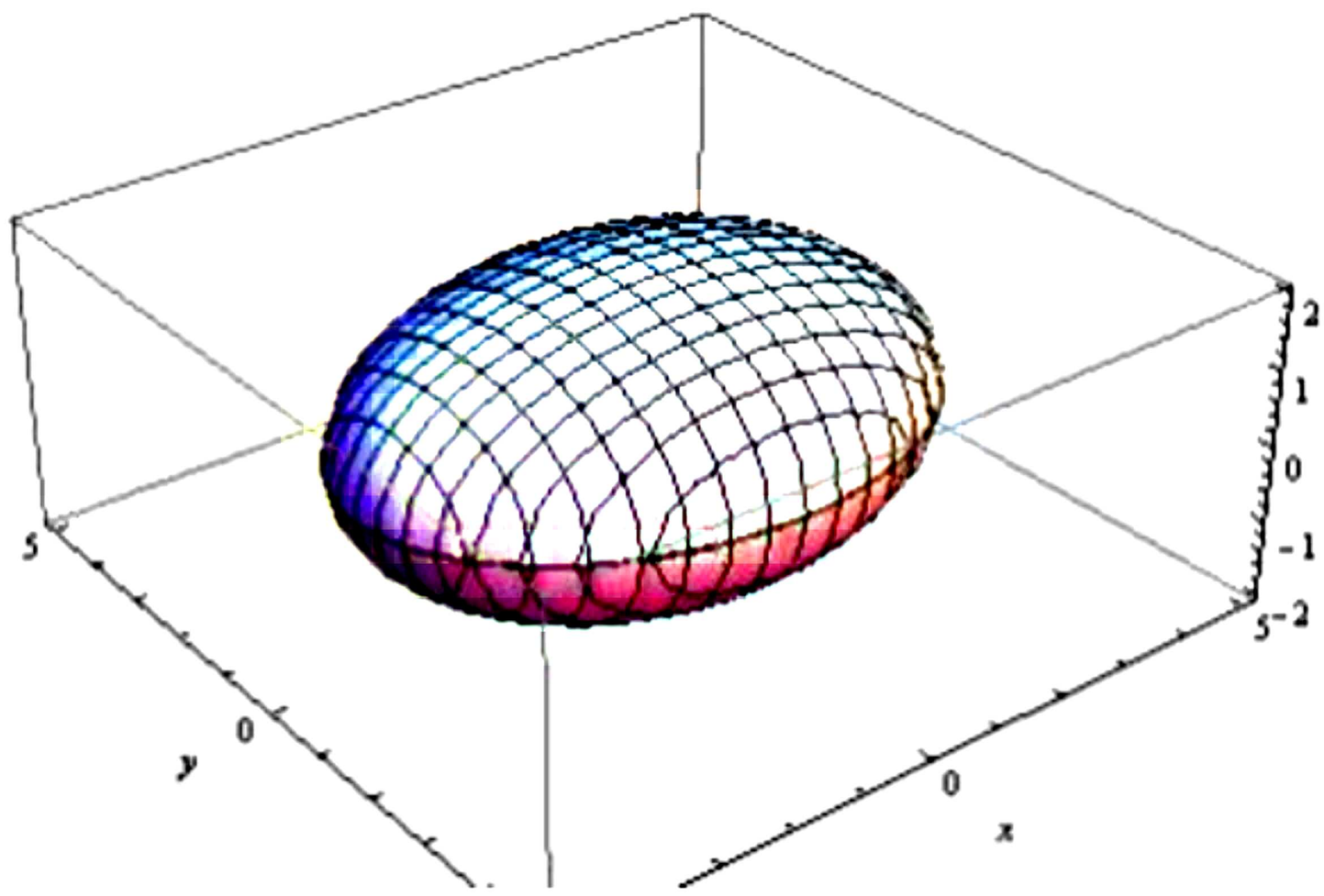
unde $a > 0, b > 0, c > 0$.

Fie $M(x_0, y_0, z_0)$ un punct pe elipsoid. Atunci:

- punctele de coordonate $(x_0, y_0, -z_0)$, $(x_0, -y_0, z_0)$, $(-x_0, y_0, z_0)$ aparţin elipsoidului, deci planele xOy, xOz, yOz sunt *plane de simetrie* ale elipsoidului;
- punctele de coordonate $(x_0, -y_0, -z_0)$, $(-x_0, y_0, -z_0)$, $(-x_0, -y_0, z_0)$ aparţin elipsoidului, deci axele Ox, Oy, Oz sunt *axe de simetrie* ale elipsoidului;
- punctul de coordonate $(-x_0, -y_0, -z_0)$ aparţine elipsoidului, deci O este *centru de simetrie* al elipsoidului.

Intersecţiile elipsoidului de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ cu planele şi axele de coordonate sunt:

- intersecţia cu $xOy(z=0)$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \Rightarrow$ elipsă
- intersecţia cu $xOz(y=0)$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \Rightarrow$ elipsă
- intersecţia cu $yOz(x=0)$: $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \Rightarrow$ elipsă
- intersecţia cu $Ox(y=z=0)$: $\dfrac{x^2}{a^2}-1=0 \Rightarrow A(a,0,0), A'(-a,0,0)$
- intersecţia cu $Oy(x=z=0)$: $\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \Rightarrow B(0,b,0), B'(0,-b,0)$
- intersecţia cu $Oz(x=y=0)$: $\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \Rightarrow C(0,0,c), C'(0,0,-c)$



Numerele a, b, c se numesc semiaxele elipsoidului. Dacă $a=b=c$, elipsoidul este o sferă. Ecuaţiile parametrice ale elipsoidului sunt:

$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = b\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\cos\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0,\pi], \ \varphi \in [0,2\pi).$$

Hiperboloidul cu o pânză

Definiţia *Se numeşte* ***hiperboloid cu o pânză*** *o cuadrică pentru care există un reper ortogonal în spaţiu în raport cu care suprafaţa are ecuaţia canonică*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

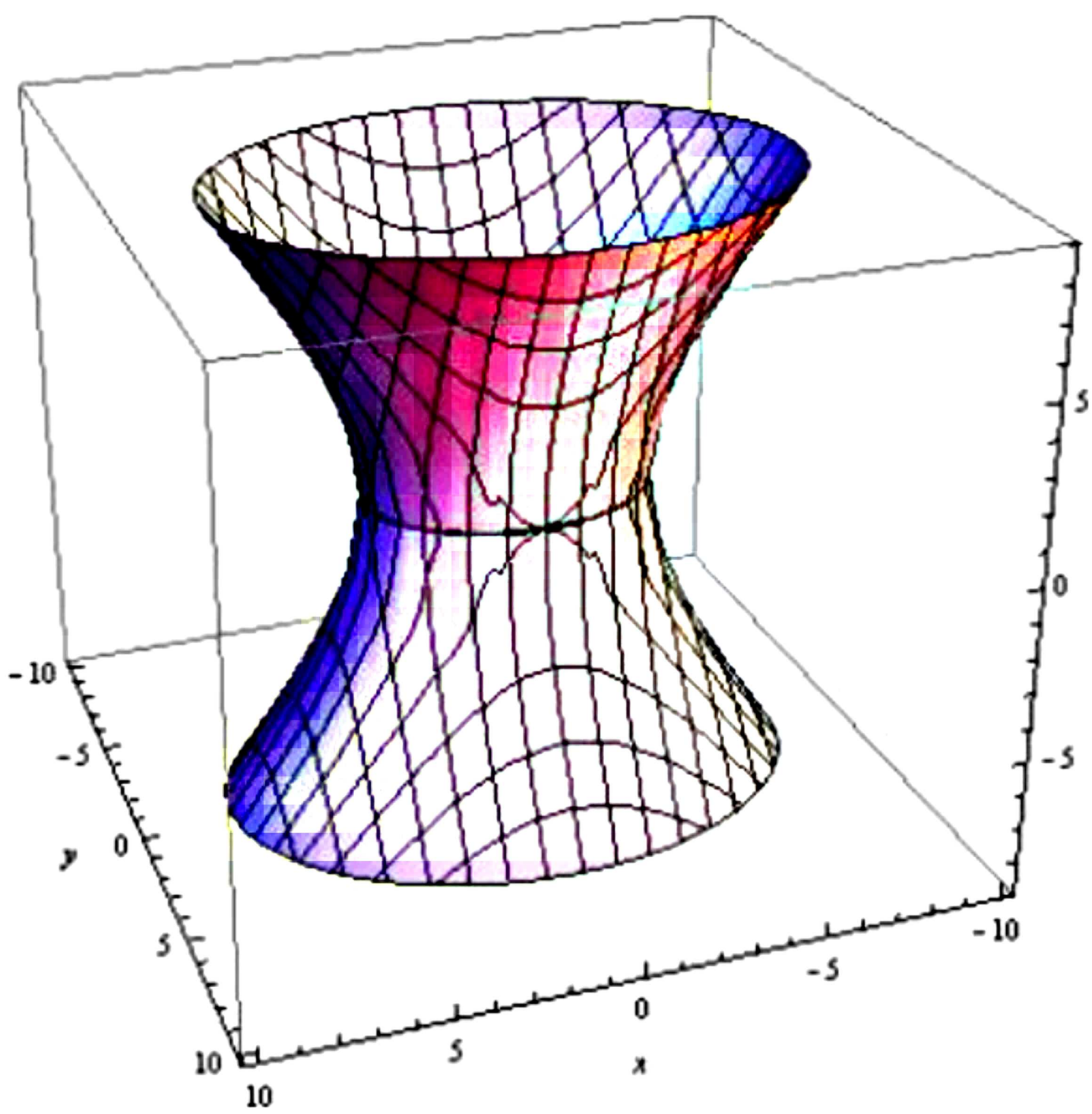
unde $a > 0, b > 0, c > 0$.

Ca şi în cazul elipsoidului, avem:

- planele de coordonate sunt plane de simetrie
- axele de coordonate sunt axe de simetrie
- originea este centru de simetrie

Tot hiperboloizi cu o pânză sunt şi cuadricele de ecuaţii

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \text{ sau } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$



Intersecţiile hiperboloidului cu o pânză de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ cu planele şi axele de coordonate sunt:

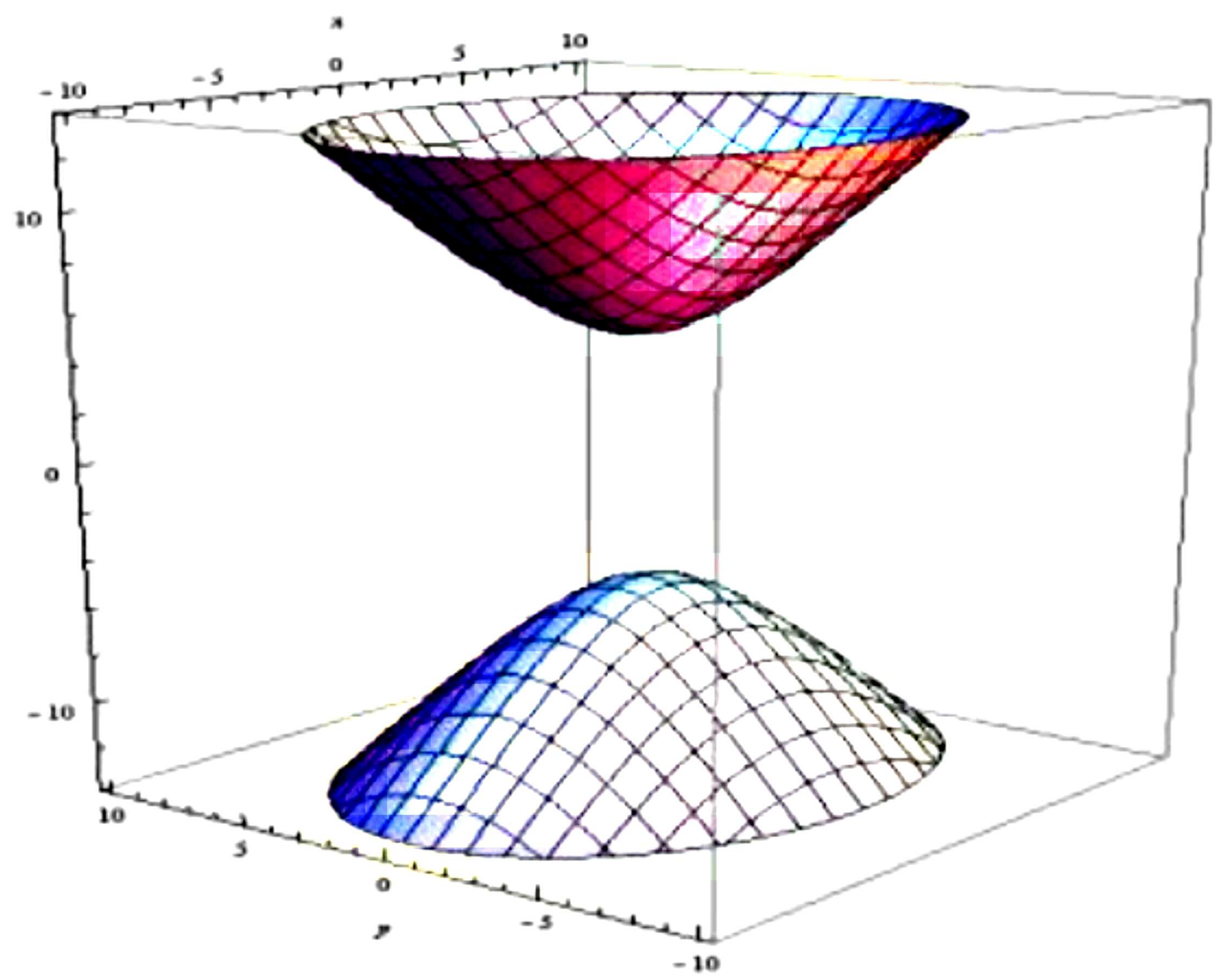
- intersecţia cu $xOy(z=0)$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \Rightarrow$ elipsă
- intersecţia cu $xOz(y=0)$: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \Rightarrow$ hiperbolă
- intersecţia cu $yOz(x=0)$: $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \Rightarrow$ hiperbolă
- intersecţia cu $Ox(y=z=0)$: $\dfrac{x^2}{a^2}-1=0 \Rightarrow A(a,0,0), A'(-a,0,0)$
- intersecţia cu $Oy(x=z=0)$: $\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \Rightarrow B(0,b,0), B'(0,-b,0)$
- intersecţia cu $Oz(x=y=0)$: $-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \Rightarrow \varnothing$
- intersecţia cu plane paralele cu $xOy(z=z_0)$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z_0^2}{c^2}+1=0 \Rightarrow$ elipsă

Hiperboloidul cu două pânze

Definiţia 2.5. *Se numeşte* ***hiperboloid cu două pânze*** *o cuadrică pentru care există un reper ortogonal în spaţiu în raport cu care suprafaţa are ecuaţia canonică*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0,$$

unde $a>0, b>0, c>0$.



Ca şi în cazurile anterioare, avem:

- planele de coordonate sunt plane de simetrie
- axele de coordonate sunt axe de simetrie
- originea este centru de simetrie

Tot hiperboloizi cu două pânze sunt şi cuadricele de ecuaţii

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \text{ sau } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Intersecţiile hiperboloidului cu două pânze de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ cu planele şi axele de coordonate sunt:

- intersecţia cu $xOy(z = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \Rightarrow \varnothing$
- intersecţia cu $xOz(y = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \Rightarrow$ hiperbolă
- intersecţia cu $yOz(x = 0)$: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \Rightarrow$ hiperbolă
- intersecţia cu $Ox(y = z = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0 \Rightarrow \varnothing$
- intersecţia cu $Oy(x = z = 0)$: $\frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \Rightarrow \varnothing$
- intersecţia cu $Oz(x = y = 0)$: $-\frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \Rightarrow C(0,0,c),\ C'(0,0,-c)$
- intersecţia cu plane paralele cu $xOy(z = z_0)$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} + 1 = 0 \Rightarrow$ elipsă sau punct sau $\varnothing$

Conul

Definiţia *Se numeşte* **con** *o cuadrică pentru care există un reper ortogonal în spaţiu în raport cu care suprafaţa are ecuaţia canonică*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

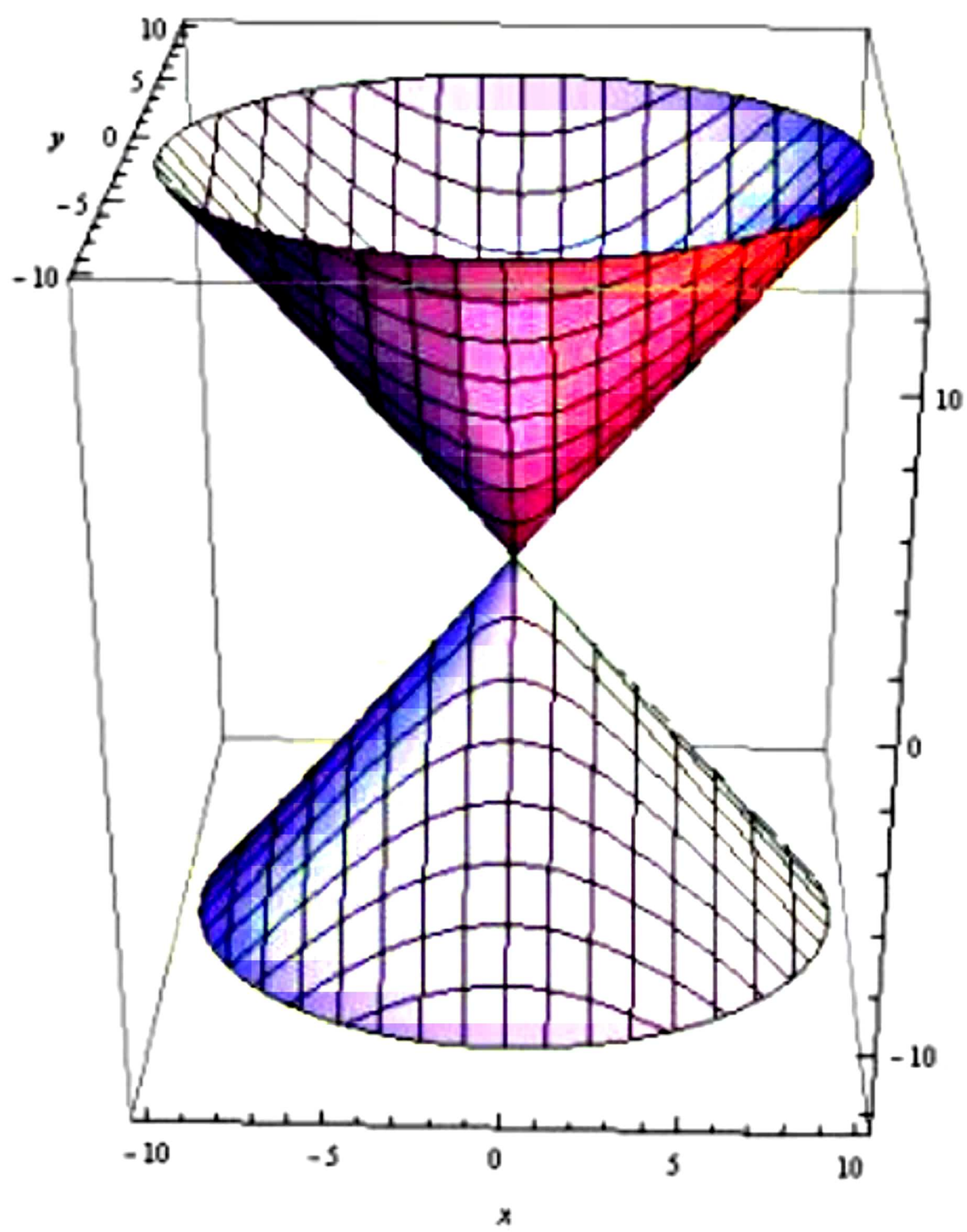
unde $a > 0, b > 0, c > 0$.

Ca şi în cazurile anterioare, avem:

- planele de coordonate sunt plane de simetrie
- axele de coordonate sunt axe de simetrie
- originea este centru de simetrie

Tot conuri sunt şi cuadricele de ecuaţii

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ sau } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$



Intersecţiile conului de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ cu planele şi axele de coordonate sunt:

- intersecţia cu $xOy(z = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$
- intersecţia cu $xOz(y = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow$ două drepte
- intersecţia cu $yOz(x = 0)$: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow$ două drepte
- intersecţia cu $Ox(y = z = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$
- intersecţia cu $Oy(x = z = 0)$: $\frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$

- intersecţia cu $Oz(x = y = 0)$: $-\frac{z^2}{c^2} = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$

- intersecţia cu plane paralele cu $xOy(z = z_0)$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0 \Rightarrow$ elipsă

Paraboloidul eliptic

Definiţia 2.7. *Se numeşte* ***paraboloid eliptic*** *o cuadrică pentru care există un reper ortogonal în spaţiu în raport cu care suprafaţa are ecuaţia canonică*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

unde $a > 0, b > 0$.

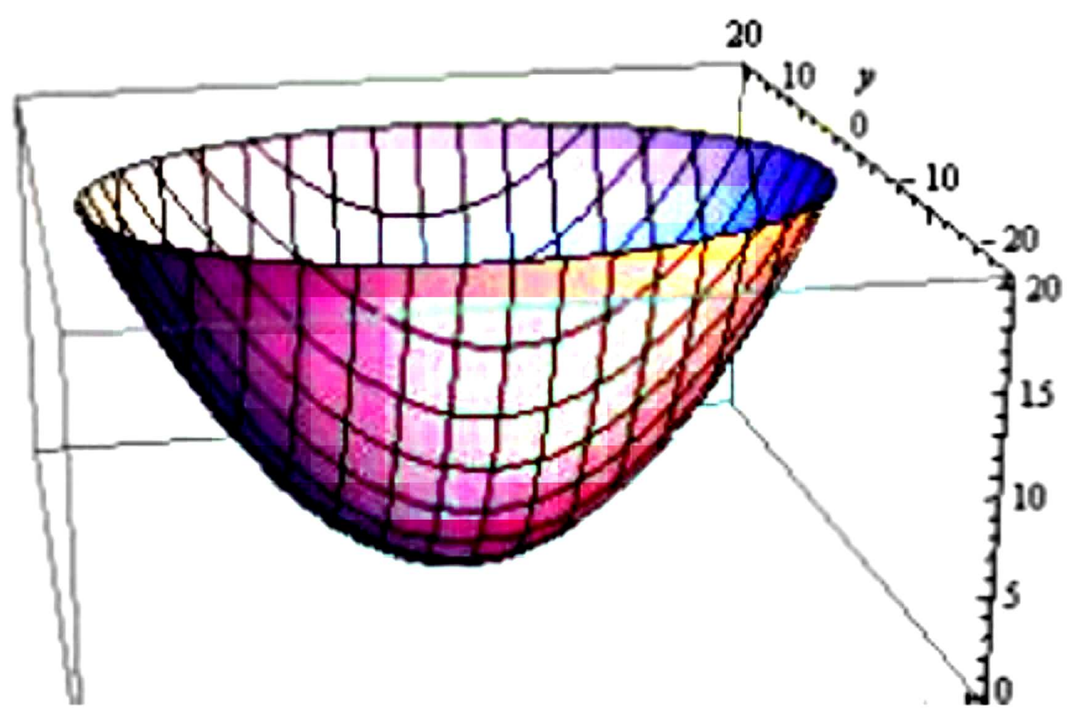
Avem:

- planele xOz şi yOz sunt plane de simetrie

- axa Oz este axă de simetrie

Tot paraboloizi eliptici sunt şi cuadricele de ecuaţii

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2y \text{ sau } \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2x.$$



Intersecţiile paraboloidului eliptic de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ cu planele şi axele de coordonate sunt:

- intersecţia cu $xOy(z = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$

- intersecţia cu $xOz(y = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} = 2z \Rightarrow$ parabolă

- intersecţia cu $yOz(x = 0)$: $\frac{y^2}{b^2} = 2z \Rightarrow$ parabolă

- intersecţia cu $Ox(y = z = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$

- intersecţia cu $Oy(x = z = 0)$: $\frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$

- intersecţia cu $Oz(x = y = 0)$: $2z = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$

- intersecţia cu plane paralele cu $xOy(z = z_0)$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z_0 \Rightarrow$ elipsă (pentru $z_0 > 0$)

Paraboloidul hiperbolic

Definiţia *Se numeşte* ***paraboloid hiperbolic*** *o cuadrică pentru care există un reper ortogonal în spaţiu în raport cu care suprafaţa are ecuaţia canonică*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

unde $a > 0, b > 0$.

Avem:

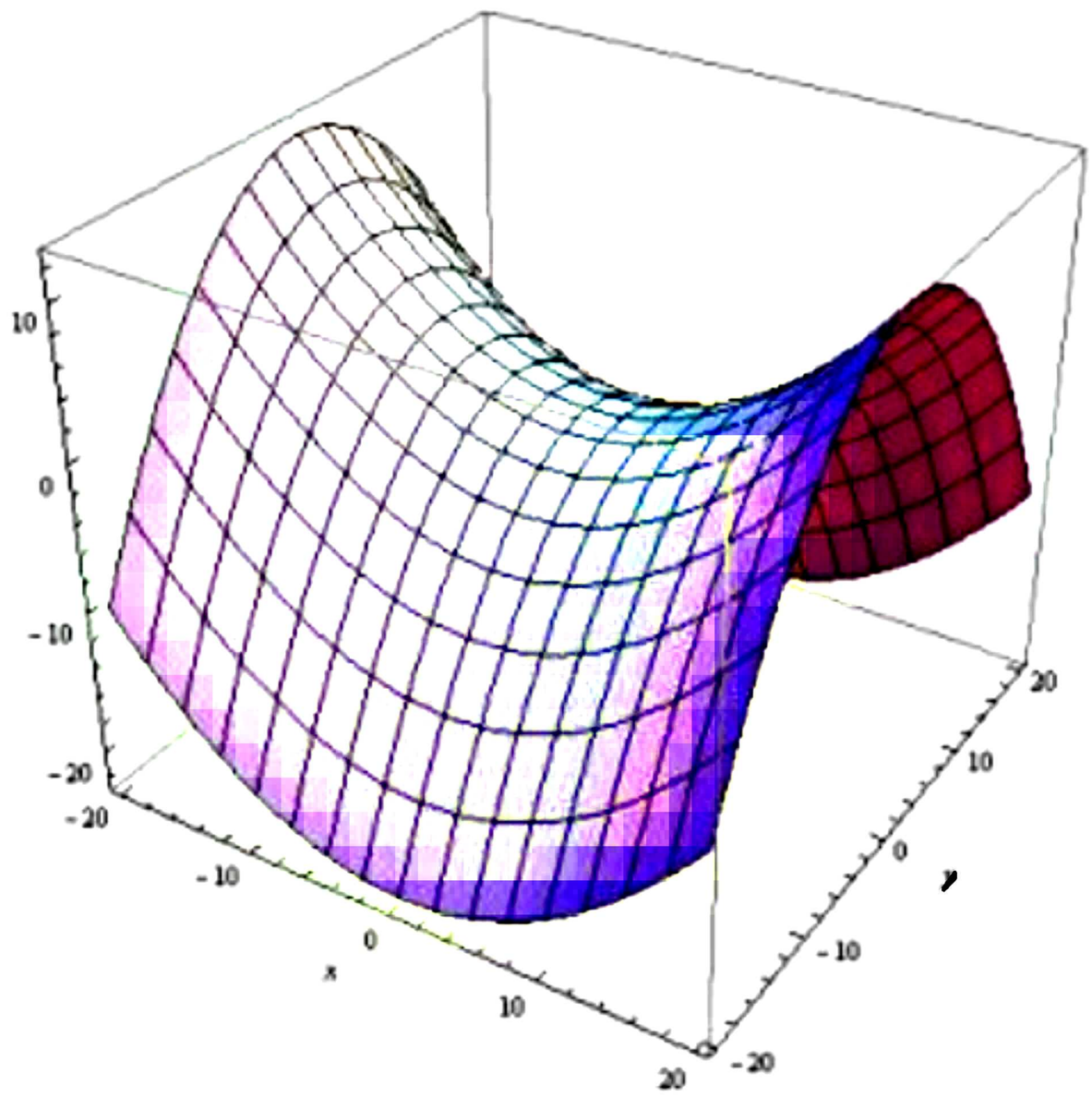
- planele xOz şi yOz sunt plane de simetrie
- axa Oz este axă de simetrie

Tot paraboloizi eliptici sunt şi cuadricele de ecuaţii

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2y \text{ sau } \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2x.$$

Intersecţiile paraboloidului hiperbolic de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ cu planele şi axele de coordonate sunt:

- intersecţia cu $xOy(z = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow$ două drepte
- intersecţia cu $xOz(y = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} = 2z \Rightarrow$ parabolă
- intersecţia cu $yOz(x = 0)$: $-\frac{y^2}{b^2} = 2z \Rightarrow$ parabolă
- intersecţia cu $Ox(y = z = 0)$: $\frac{x^2}{a^2} = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$
- intersecţia cu $Oy(x = z = 0)$: $\frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$
- intersecţia cu $Oz(x = y = 0)$: $2z = 0 \Rightarrow O(0,0,0)$
- intersecţia cu plane paralele cu $xOy(z = z_0)$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z_0 \Rightarrow$ hiperbolă



Cilindri

Definiţia *1. Se numeşte* ***cilindru eliptic*** *o cuadrică pentru care există un reper ortogonal în spaţiu în raport cu care suprafaţa are ecuaţia canonică*

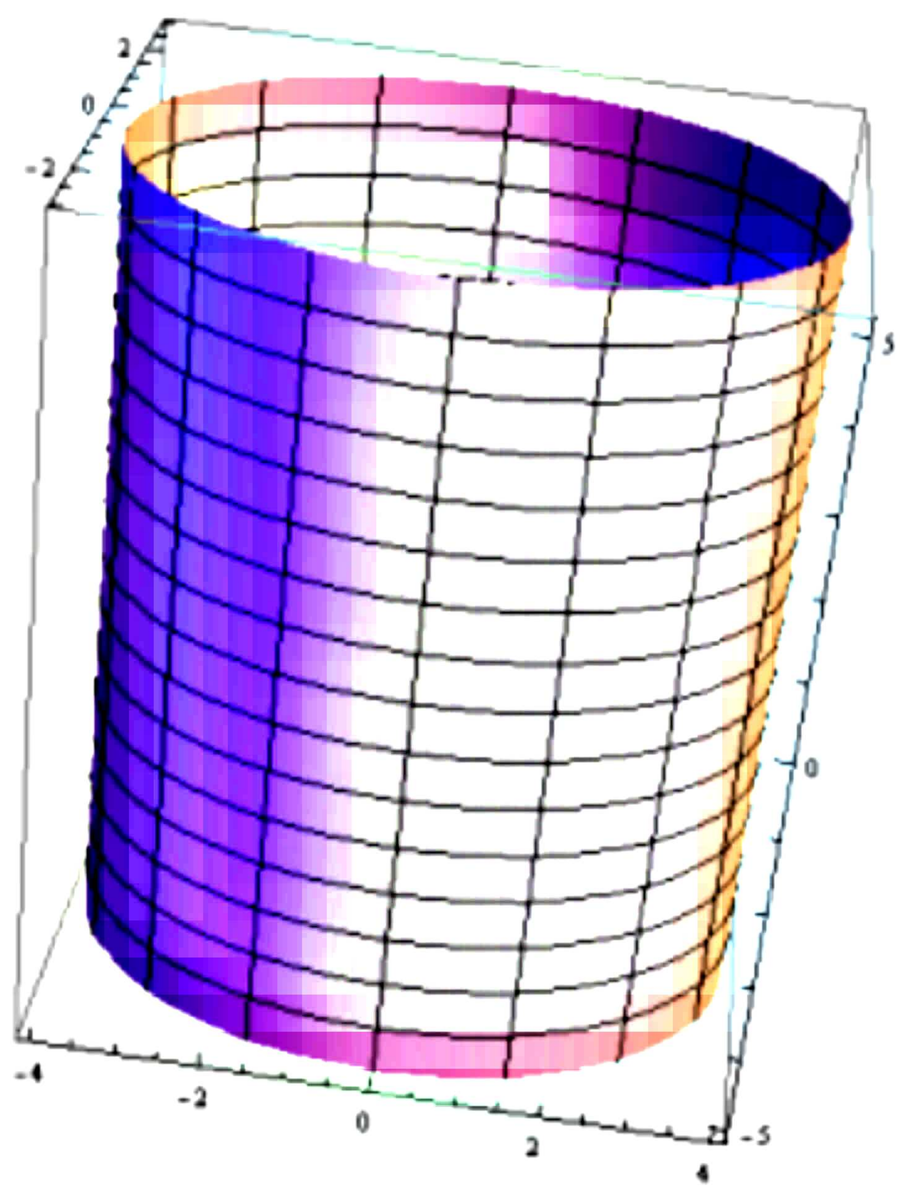
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \text{unde } a > 0, b > 0.$$

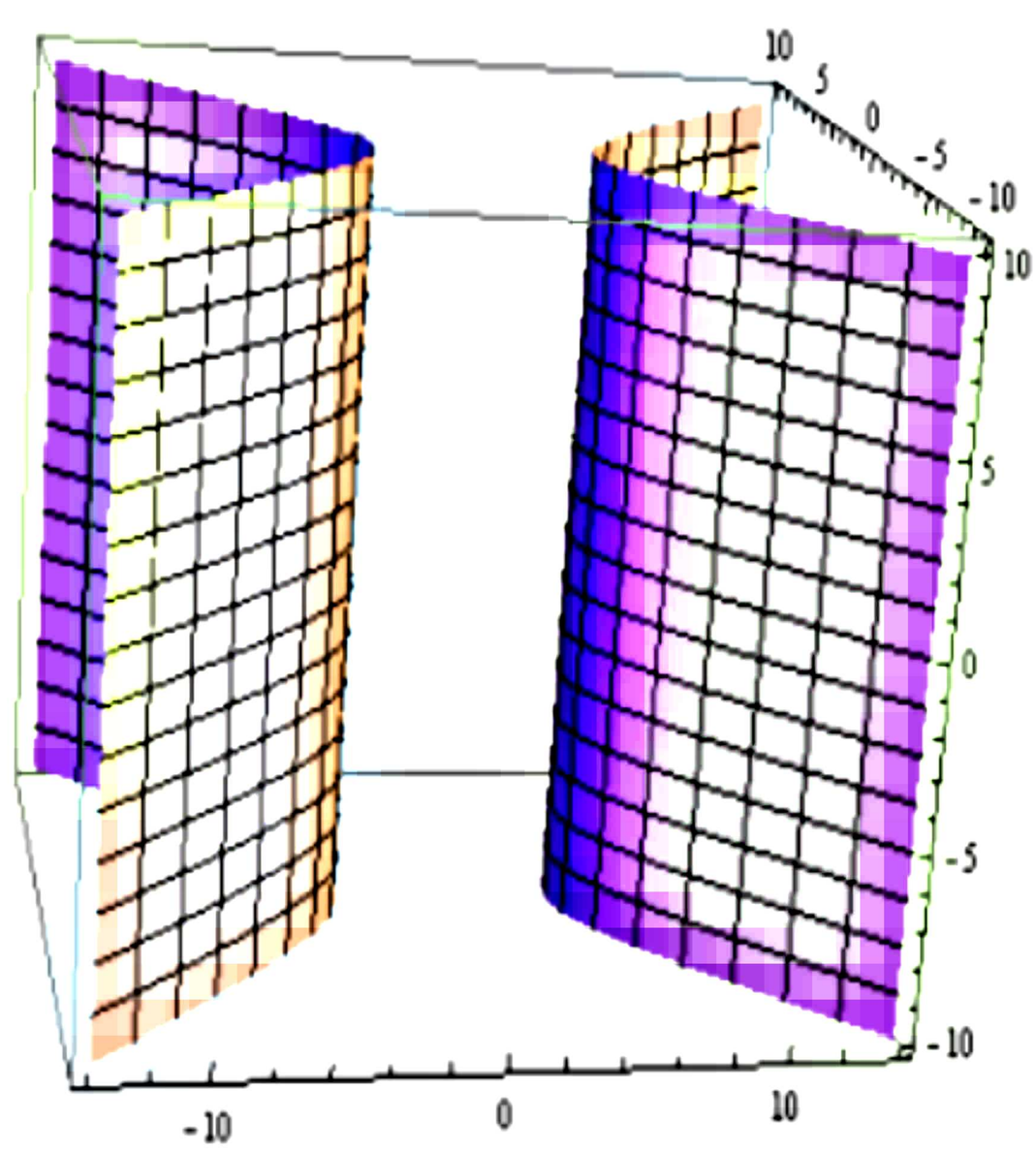
2. Se numeşte ***cilindru hiperbolic*** *o cuadrică pentru care există un reper ortogonal în spaţiu în raport cu care suprafaţa are ecuaţia canonică*

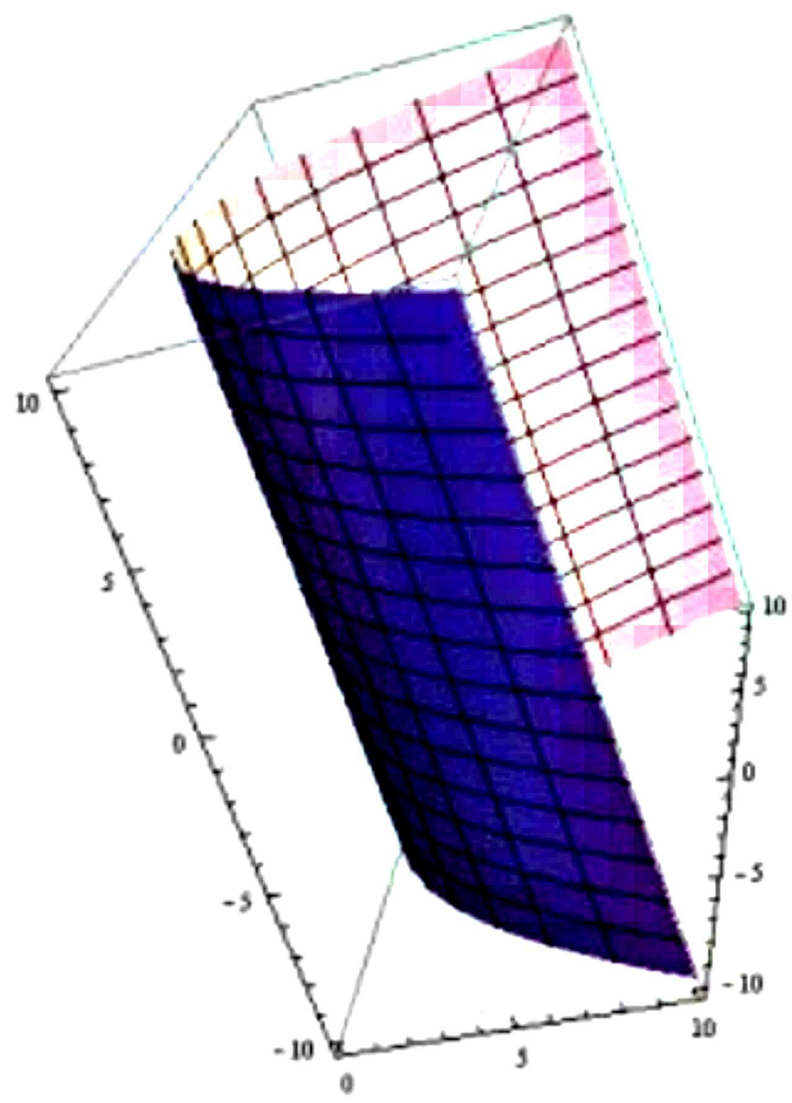
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \text{unde } a > 0, b > 0.$$

3. Se numeşte ***cilindru parabolic*** *o cuadrică pentru care există un reper ortogonal în spaţiu în raport cu care suprafaţa are ecuaţia canonică*

$$y^2 = 2px, \quad \text{unde } p \in \mathbb{R}.$$







Reducerea cuadricelor la forma canonică

Fie cuadrica definită prin ecuaţia generală

$$\underbrace{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}}_{f(x,y,z)} = 0,$$

Ca şi în cazul conicelor, pentru orice cuadrică se poate determina un reper cartezian ortogonal convenabil în raport cu care ecuaţia cuadricei are forma cea mai simplă, numită **formă canonică** sau **redusă**. La această formă se poate ajunge printr-o translaţie şi o rotaţie adecvată a reperului iniţial $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Un punct C se numeşte *centru de simetrie* al cuadricei dacă simetricul oricărui punct M al cuadricei în raport cu C aparţine de asemenea cuadricei.

Elipsoidul, hiperboloizii şi conul sunt *cuadrice cu centru*, iar paraboloizii sunt *cuadrice fără centru*.

Căutăm o translaţie a sistemului $Oxyz$ astfel încât originea noului sistem de coordonate $C(x_0, y_0, z_0)$ să fie centru de simetrie al cuadricei. Relaţiile dintre coordonatele x, y, z din reperul iniţial $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ şi coordonatele x', y', z' din sistemul translatat $\{C; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sunt:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \\ z = z_0 + z' \end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială a cuadricei obţinem

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0.$$

unde $\begin{cases} a'_{14} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} \\ a'_{24} = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} \\ a'_{34} = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} \end{cases}$, iar $a'_{44} = f(x_0, y_0, z_0)$.

Pentru ca $C(x_0, y_0, z_0)$ să fie centru de simetrie, trebuie ca ecuaţia în noile coordonate să nu conţină termeni de gradul 1, aşadar $a'_{14} = a'_{24} = a'_{34} = 0$, deci (x_0, y_0, z_0) sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0 \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0 \end{cases}$$

Dacă $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, sistemul anterior are soluţie unică, iar ecuaţia cuadricei este

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Dacă $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, atunci cuadrica este în formă canonică.

Dacă cel puţin unul din coeficienţii a_{12}, a_{13}, a_{23} este nenul, atunci efectuăm o rotaţie a reperului cartezian, folosind metoda valorilor şi vectorilor proprii. Considerăm forma pătratică $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x', y', z') = a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z'$$

Se determină valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ale matricei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

precum şi vectorii proprii ortonormaţi corespunzători $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$.

În reperul cartezian $\{C; \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$, cuadrica are ecuaţia canonică

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

iar relaţiile dintre coordonatele x', y', z' şi X, Y, Z sunt

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = S_{BB'} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

unde $S_{BB'}$ este matricea de trecere de la baza $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ la baza $B' = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$.

Dacă $\delta = 0$, atunci cuadrica este fără centru. În acest caz se efectuează mai întâi o rotaţie folosind metoda valorilor şi vectorilor proprii, urmată de o translaţie adecvată.