Laborator8 - Temă

Petculescu Mihai-Silviu

Exerciţiul 1.0.1

Folosind regula silogismului, să se verifice relaţia:

$$((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

Folosind $RS(\theta_1, \theta_2)$, unde $\theta_1 = (\alpha \rightarrow \beta), \theta_2 = (\beta \rightarrow \gamma) \Rightarrow \theta_3 = (\alpha \rightarrow \gamma)$ şi relaţia este verificată.

Exerciţiul 1.0.2

Folosind axiomelele, să se identifice demonstraţiile formale pentru:

a) $(\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\gamma \vee \theta) \rightarrow ((\alpha \wedge \neg\beta) \vee \beta)))$

Folosind $\overline{\alpha}_1 \ = (a \rightarrow (b \rightarrow a))$, substituția $\theta = \{((\alpha \wedge \neg\beta) \vee \beta))|a,\ (\neg\gamma \vee \theta)|b\}$ și axioma $(\neg(\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \beta) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \neg\beta) \vee \beta)))$ rezultă cerința a)

b) $(\neg((\beta \wedge \alpha) \vee \gamma) \rightarrow \neg(\theta \vee \alpha)) \rightarrow ((\neg\theta \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\beta \wedge \alpha) \vee \gamma))$

Pentru cerinţa b) vom folosi $\overline{\alpha}_7 = (((\neg a) \rightarrow (\neg b)) \rightarrow (b \rightarrow a))$, substituția $\theta = \{((\beta \wedge \alpha) \vee \gamma)|a,\ (\theta \vee \alpha)|b\}$ și axioma $(\theta \vee \alpha) \leftrightarrow (\neg\theta \rightarrow \alpha)$ de unde rezultă cerinţa.

c) $\neg((\beta \vee \neg\alpha) \vee ((\gamma \vee \neg\theta) \wedge \neg\theta)) \leftrightarrow ((\neg\beta \wedge \alpha) \wedge (\neg(\gamma \vee \neg\theta) \vee \theta))$

În cazul cerinței c) folosind relațiile $\neg(a \vee b) \leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b), \neg(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$ cu substituția $\theta = \{(\beta \vee \neg\alpha) \wedge \gamma)|a,\ ((\gamma \vee \neg\theta) \wedge \neg\theta))|b\}$ se va rezolva.

Exerciţiul 1.0.3

Să se demonstreze că pentru orice $a, b \in FORM$, următoarele formule sunt teoreme.

$$\begin{aligned}
&1)\ (a \wedge b) \rightarrow a \\
&2)\ (a \wedge b) \rightarrow b \\
&3)\ (a \wedge b) \leftrightarrow (b \wedge a) \\
&4)\ ((a \rightarrow b) \rightarrow a) \rightarrow a \\
&5)\ (a \wedge b) \leftrightarrow (\neg(a \rightarrow \neg b)) \\
&6)\ \neg(a \rightarrow b) \leftrightarrow (a \wedge \neg b)
\end{aligned}$$

1)
$\beta_1 = (a \to ((a \wedge b) \to a) \to a) = \overline{\alpha}_1\{a|a, ((a \wedge b) \to a)|b\}$
$\beta_2 = ((a \wedge b) \to a) \to (a \to a), PP$
$\beta_3 = (a \to a), \ \vdash \beta_3$
$\beta_4 = (a \wedge b) \to a$

2)
$\beta_1 = (b \to ((a \wedge b) \to b) \to b) = \overline{\alpha}_1\{b|a, ((a \wedge b) \to b)|b\}$
$\beta_2 = ((a \wedge b) \to b) \to (b \to b), PP$
$\beta_3 = (b \to b), \ \vdash \beta_3$
$\beta_4 = (a \wedge b) \to b$

3)
$\beta_1 = (a \wedge b) \leftrightarrow (\neg((\neg a) \vee (\neg b))) = \overline{\alpha}_9$
$Dar\ (\neg((\neg a) \vee (\neg b))) \leftrightarrow (b \wedge a), axioma\ , deci\ 3)\ teorema$

5)
$\beta_1 = ((a \wedge b) \leftrightarrow (\neg((\neg a) \vee (\neg b)))) = \overline{\alpha}_9$
$Cu\ axioma\ (\neg((\neg a) \vee (\neg b))) \leftrightarrow (\neg(a \leftarrow \neg b))\ teorema\ se\ demostreaza\ usor$

6)
$Folosind\ relatiile\ (\neg(a \leftarrow b)) \leftrightarrow (\neg((\neg a) \vee b)\ si(\neg((\neg a) \vee b)) \leftrightarrow (a \wedge (\neg b))\ teorema\ este\ usor\ de\ demonstrat$

Exerciţiul 1.0.4

Să se stabilească demonstraţii formale pentru următoarele formule:

$$1)\ \alpha_1 = (a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c))$$
$$2)\ \alpha_2 = (\neg b \wedge a) \to ((\neg a \vee b) \to c)$$
$$3)\ \alpha_3 = (a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$$
$$4)\ \alpha_4 = (a \to \neg a) \to \neg a$$
$$5)\ \alpha_5 = (\neg a \to a) \to a$$
$$6)\ \alpha_6 = \neg(\neg a \vee b) \to ((a \to \neg b) \to (\neg b \wedge a))$$

1)
$Fie\ H = \{a, b, (a \to (b \to c))\}, secventa\ a, , a \to (b \to c), b \to c, b, c\ este\ H - deductiva$
$decia, b, (a \to (b \to c)) \vdash c, din\ teorema\ deductiei\ rezulta$
$\vdash (a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c)), PP$

2)
$\gamma_1 = ((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \to (\alpha \to \beta) = \overline{\alpha}_7\{\beta|a, \alpha|b\}$
$\gamma_2 = (\neg\alpha) \to ((\neg\beta) \to (\neg\alpha))$
$\gamma_3 = (\neg\alpha) \to (a \to \beta), RS(\gamma_2, \gamma_1) cu\ substitutia\ \omega = \{\neg a \vee b|\alpha, c|\beta\}$

3)
$Folosind\ a\ doua\ schema\ a\ negatiei\ de\ unde\ rezulta\ usor\ \alpha_3 = (a \to b) \to (\neg b \to \neg a)$

4)
$\beta_1 = (((a \to \neg a) \leftrightarrow \neg a)(\neg a \to (a \to \neg a))) = \overline{\alpha}_5\{a \to \neg a|a, \neg a|b\}$
$\beta_2 = (\neg a \to (a \to \neg a)) = \overline{\alpha}_1\{\neg a|a, a|b\}$
$\beta_3 = ((a \to \neg a) \leftrightarrow \neg a), MP(\beta_1, \beta_2)$
$\beta_4 = ((a \to \neg a) \to \neg a), EI(\beta_3, \beta_4)$

5)
$Daca$ 4) $teorema\ pentru\ a, b \in FORM, atunci\ folosind\ substitutia\ \theta = \{\neg a|a\}\ rezulta\ cerinta$ 5)

6)
$\beta_1 = ((a \wedge \neg b) \to ((a \to \neg b) \to (\neg b \wedge a))) = \overline{\alpha}_1 a \wedge \neg b|a, a \to \neg b|b$
$Folosind\ axiomele\ \neg(\neg a \vee b) \leftrightarrow (a \wedge \neg b)\ si\ (a \wedge \neg b) \leftrightarrow (\neg b \wedge a)\ rezulta\ teorema\ ceruta$