1. Fiecare v.a. a selecției aleatoare $(X_1, \dots, X_5)$ are densitatea dată de $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $x \in [a, b]$.

Calculăm momentele teoretice de ordinul 1 și 2 și obținem: $E(X) = \frac{a+b}{2}$ și $E(X^2) = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$.

Pe de altă parte, momentele de selecție de ordin 1 și 2 sunt respectiv:

$$\mu_1' = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = 2,44 \quad \text{și} \quad \mu_2' = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{5} = 8,73.$$

Obținem deci sistemul:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 2,44 \\ \frac{a^2+ab+b^2}{3} = 8,73 \end{cases}$$

Deci, $a^2 + a(4,88 - a) + (4,88 - a)^2 = 26,19 \iff$

$\iff a^2 - 4,88a + (4,88)^2 - 26,19 = 0 \iff$

$\iff a^2 - 4,88a - 2,3756 = 0$ care are soluțiile

$a_1 = 5,3261$ și $a_2 = -0,4461$ și apoi $b_1 = -0,4661$

și $b_2 = 5,3261$.

Obținem estimatorii $a^* = -0,4461$ și $b^* = 5,3261$

2. a) Determinăm mai întâi punctele critice ale funcției, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

obținând punctele critice $M_1(0,0)$ și $M_2(1,1)$.

Deoarece $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$

$$\Rightarrow Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

Analizăm separat fiecare punct critic:

1) $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 9 > 0$ deci nu e punct de extrem

2) $Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = 36 - 9 = 27 > 0$ $\Rightarrow$ pct de minim local pt f

b) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ punct critic $M(0,0,0)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 8 > 0$, $\Delta_3 = 8 > 0$

$\Rightarrow M(0,0,0)$ pct de minim local pt f

3. Funcția de verosimilitate este:

$$L = \theta e^{-\theta x_1} \ldots \theta e^{-\theta x_n} = \theta^n e^{-\theta(x_1 + \ldots + x_n)}.$$

Derivata lui L ca funcție de θ este egală cu:

$$\theta^{n-1} e^{-\theta(x_1 + \ldots + x_n)} [n - (x_1 + \ldots + x_n)\theta].$$

Deducem imediat că L își atinge maximul pentru $\theta = \frac{n}{x_1 + \ldots + x_n}$.

Astfel, estimatorul de maximă verosimilitate al parametrului θ din legea exponențială este:

$$\frac{n}{x_1 + \ldots + x_n}$$