Spaţii vectoriale euclidiene

Def
Fie V un $\mathbb{R}$ spaţiu vectorial. Aplicaţia $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ se numeşte produs scalar real pe V dacă:

a) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0 \ \forall \vec{x} \in V$
şi $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$

b) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$

c) $\langle \vec{x} + \vec{x}', \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}', \vec{y} \rangle$, $\forall \vec{x}, \vec{x}' \in V, \vec{y}$

d) $\langle \alpha \vec{x}, \vec{y} \rangle = \alpha \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \vec{x}, \vec{y} \in V$.

Def Un $\mathbb{R}$ - spaţiu vectorial V pe care s-a definit un produs scalar real se numeşte spaţiu vectorial euclidian real.

Prop.
Dacă V este un spaţiu euclidian real, atunci are loc inegalitatea

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leq \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \quad , \forall \vec{x}, \vec{y} \in V,$$

numită inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz.

Dem - Temă (la seminar)

Obs 1. Ineg C-B-S se mai scrie şi sub forma

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}$$

2. Dacă $V=\mathbb{R}^n$, atunci $\vec{x}=(x_1, x_2, \dots x_n)$, $\vec{y}=(y_1, y_2, \dots y_n)$ atunci

$$<\vec{x}, \vec{y}> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \left(= x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \right)$$

iar inegalitatea C-B-S devine

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Ex : $\vec{x}=(1,2,3), \vec{y}=(2,-1,2) \Rightarrow <\vec{x},\vec{y}> = 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 2 = 6$

Def Dacă V este un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial, atunci o aplicație $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ cu proprietățile

1) $\|\vec{x}\| \geq 0 \ \forall \vec{x} \in V$, $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0_V$
2) $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\,\|\vec{x}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in V$
3) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ (inegalitatea triunghiului)

se numește normă pe V.

Def Spațiul V pe care s-a definit o normă se numește spațiu vectorial normat.

Prop Fie V un spațiu euclidian real. Atunci aplicația $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ definită prin $\|\vec{x}\| = \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>}$ este o normă pe V. Aceasta s.n. normă indusă de produsul scalar și s.n. normă euclidiană.

Dem - La seminar

Def Orice vector $\vec{v} \in V$ cu $\|\vec{v}\| = 1$ se numește vector unitar sau versor.

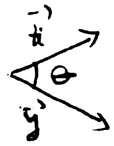
Versorul unui vector $\vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ este $\vec{v} = \frac{1}{\|\vec{x}\|} \cdot \vec{x}$

Obs $\|\vec{x}\|$ reprezintă lungimea vectorului $\vec{x}$.

Def
Fie V - un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial euclidian și $\vec{x},\vec{y} \in V\setminus\{\vec{0}\}$.
Numărul $\theta \in [0,\pi]$, definit de egalitatea

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{x},\vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}$$

se numește unghiul dintre vectorii $\vec{x}$ și $\vec{y}$.



Obs $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cos\theta$

Def
Vectorii $\vec{x},\vec{y}\in V$ se numesc ortogonali (perpendiculari) dacă $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=0$. În acest caz scriem $\vec{x}\perp\vec{y}$.

Def O submulțime $S\subset V$ se numește <u>ortogonală</u> dacă $\forall \vec{x},\vec{y}\in S \Rightarrow \langle\vec{x},\vec{y}\rangle=0$
O mulțime ortogonală $S\subset V\setminus\{\vec{0}\}$ se numește <u>ortonormată</u> dacă orice element al său este versor.

Teoremă
a) Orice mulțime ortogonală S a unui spațiu euclidian V ($S\subset V\setminus\{0\}$) este liniar independentă.
b) Dacă dim V = n, atunci orice submulțime ortogonală a lui $V\setminus\{\vec{0}\}$ cu n elemente este bază în V.

Prop În orice spațiu euclidian $V_n/\mathbb{R}$ există o bază ortogonală.

Dem
Fie $S=\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots \vec{x}_n\}\subset V/\mathbb{R}$ și fie $S^\perp=\{\vec{y}_1,\vec{y}_2,\dots\vec{y}_n\}$ baza ortogonală pe care urmează să o construim.
Considerăm $\vec{y}_1=\vec{x}_1$
$\vec{y}_2 = \vec{x}_1 + \alpha\vec{y}_1$

unde α se determină astfel încât $\vec{y}_1 \perp \vec{y}_2$

$$\vec{y}_3 = \vec{x}_2 + \beta_1 \vec{y}_1 + \beta_2 \vec{y}_2,$$

unde β_1, β_2 se determină astfel încât $\vec{y}_1 \perp \vec{y}_3$, $\vec{y}_2 \perp \vec{y}_3$

$\vdots$

$$\vec{y}_n = \vec{x}_{n-1} + \lambda_1 \vec{y}_1 + \lambda_2 \vec{y}_2 + \dots + \lambda_n \vec{y}_{n-1},$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ se determină a î. $\vec{y}_1 \perp \vec{y}_n$, $\vec{y}_2 \perp \vec{y}_n$, $\dots$ $\vec{y}_{n-1} \perp \vec{y}_n$

$\Rightarrow$ $S^{\perp} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2 \dots \vec{y}_n\}$ e o bază ortogonală

Obs

Orice sistem de vectori liniar independenți din V_n se poate ortogonaliza după procedeul anterior, numit procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt.

Ex

Să se ortogonalizeze următoarele sisteme de vectori

a) $S = \{\underbrace{(1, 1, -1)}_{\vec{x}_1}, \underbrace{(1, 0, -1)}_{\vec{x}_2}, \underbrace{(0, 1, 2)}_{\vec{x}_3}\} \subset \mathbb{R}^3 / \mathbb{R}$

b) $S = \{(1, 2, 2), (1, 1, -5), (3, 2, 0)\} \subset \mathbb{R}^3 / \mathbb{R}$.

c) $S = \{(-1, 2, 1), (1, -1, 2), (1, 2, 0)\} \subset \mathbb{R}^3 / \mathbb{R}$.

Rez

a) $A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A_S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 + 1 - 2 = -2 \neq 0$

$\Rightarrow$ S liniar independent, deci se poate ortogonaliza.

$\Rightarrow \exists\, S^{\perp} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$

$\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (1, 1, -1)$

$\vec{y}_2 = \vec{x}_2 + \alpha \vec{y}_1 \quad | \cdot \langle \cdot, \vec{y}_1 \rangle$

$\Rightarrow \langle \vec{y}_2, \vec{y}_1 \rangle = \langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle + \alpha \langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle$

Avem: $\langle \vec{y}_2, \vec{y}_1 \rangle = 0$ (deoarece y_1, y_2 sunt ortogonali)

$$\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1)\cdot(-1) = 2$$

$$\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1)\cdot(-1) = 3$$

$$\Rightarrow 0 = 2 + 3 \cdot \alpha \Rightarrow 3\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{3}$$

$$\vec{y}_2 = (1, 0, -1) - \frac{2}{3}(1, 1, -1) = (1, 0, -1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -1\right)$$

$$= \left(1 - \frac{2}{3}, 0 - \frac{2}{3}, -1 + 1\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right)$$

$$\vec{y}_3 = \vec{x}_3 + \beta_1 \vec{y}_1 + \beta_2 \vec{y}_2 \quad \Big| \cdot \langle \cdot, \vec{y}_1 \rangle$$

$$\langle \vec{y}_3, \vec{y}_1 \rangle = \langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle + \beta_1 \langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle + \beta_2 \langle \vec{y}_2, \vec{y}_1 \rangle$$

Avem $\langle \vec{y}_3, \vec{y}_1 \rangle = 0$

$\langle \vec{y}_2, \vec{y}_1 \rangle = 0$

$\langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -1$

$\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle = 3$

$$0 = -1 + 3\beta_1 \Rightarrow \beta_1 = \frac{1}{3}$$

$$\vec{y}_3 = \vec{x}_3 + \beta_1 \vec{y}_1 + \beta_2 \vec{y}_2 \quad \Big| \cdot \langle \cdot, \vec{y}_2 \rangle$$

$$\langle \vec{y}_3, \vec{y}_2 \rangle = \langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle + \beta_1 \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2 \rangle + \beta_2 \langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle$$

Avem $\langle \vec{y}_3, \vec{y}_2 \rangle = 0$

$\langle \vec{y}_1, \vec{y}_2 \rangle = 0$

$\langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 2 \cdot 0 = -\frac{2}{3}$

$\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle = \left|\frac{1}{3}\right|^2 + \left|-\frac{2}{3}\right|^2 + 0^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{2}{3} + \frac{5}{9}\beta_2 \Rightarrow \frac{5}{9}\beta_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \beta_2 = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow \vec{y}_3 = (0, 1, 2) + \frac{1}{3}(1, 1, -1) + \frac{6}{5}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right)$$

$$= (0, 1, 2) + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}, 1 + \frac{1}{3} - \frac{4}{5}, 2 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{11}{15}, \frac{8}{15}, \frac{5}{3}\right)$$

$\Rightarrow S^{\perp} = \left\{ (1,1,-1),\ \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right), \left(\frac{11}{15}, \frac{8}{15}, \frac{5}{3}\right) \right\}$

b), c) – Temă.

<u>Prop</u> În orice spațiu euclidian $V_n / \mathbb{R}$ există o bază ortonormată.

<u>Dem</u> Se determină baza ortogonală $S^{\perp} = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots \vec{y}_n\}$

Atunci baza ortonormată este

$$S_m^{\perp} = \left\{ \frac{1}{\|\vec{y}_1\|} \cdot \vec{y}_1,\ \frac{1}{\|\vec{y}_2\|} \vec{y}_2, \dots \frac{1}{\|\vec{y}_n\|} \cdot \vec{y}_n \right\}$$

<u>Ex</u> Să se ortonormeze sistemele din exemplul anterior.

<u>Rez</u> a) $\|\vec{y}_1\| = \sqrt{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle} = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$

$$\|\vec{y}_2\| = \sqrt{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

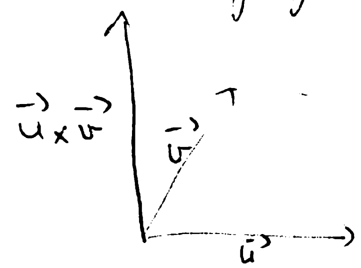
$$\|\vec{y}_3\| = \sqrt{\langle \vec{y}_3, \vec{y}_3 \rangle} = \sqrt{\left(\frac{11}{15}\right)^2 + \left(\frac{8}{15}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{121}{225} + \frac{64}{225} + \frac{25}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{121 + 64 + 625}{225}} = \sqrt{\frac{810}{225}} = \frac{9\sqrt{10}}{15} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$\Rightarrow S_m^{\perp} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1),\ \frac{3}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right),\ \frac{5}{3\sqrt{10}}\left(\frac{11}{15}, \frac{8}{15}, \frac{5}{3}\right) \right\}$$

b), c) – Temă

Def Fie $\vec{u}, \vec{v}$ doi vectori dintr-un spațiu euclidian. Produsul $\vec{u} \times \vec{v}$ are ca rezultat un vector perpendicular pe $\vec{u}$ și $\vec{v}$



$\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ reprezintă aria paralelogramului construit cu vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$.

Dacă $\vec{u} \times \vec{v} = 0$, atunci spunem că vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari

Prop Coordonatele lui $\vec{u} \times \vec{v}$ în reperul canonic sunt date de

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \vec{e}_1 \\ u_2 & v_2 & \vec{e}_2 \\ u_3 & v_3 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

unde $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, iar $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sunt vectorii bazei canonice.

Ex Produsul vectorial al vectorilor $\vec{u} = (3, 1, 2)$, $\vec{v} = (1, 0, 2$ este

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & \vec{e}_1 \\ 1 & 0 & \vec{e}_2 \\ 2 & 2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

$$= 2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

$$= (2, -4, -1)$$

Def Se numește produs mixt a trei vectori liberi $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, numărul real $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ definit prin

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$$

Obs

Produsul mixt se calculează după regula.

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}, \text{ unde } \begin{aligned} \vec{u} &= (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v} &= (v_1, v_2, v_3) \\ \vec{w} &= (w_1, w_2, w_3) \end{aligned}$$

Dacă $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$, atunci spunem că vectorii $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sunt coplanari

$|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ – reprezintă volumul paralelipipedului construit pe vectorii necoplanari $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Ex

Să se determine produsul mixt al vectorilor $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (-1, 0, 2)$, $\vec{w} = (0, 2, 5)$

Rez

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 - 4 + 10 = 8$$

Volumul tetraedrului construit pe vectorii $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ este

$$\frac{|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|}{6}$$