# Curs 2

## Ecuaţii diferenţiale de ordinul I integrabile prin cvadraturi (continuare)

### 4. Ecuaţii diferenţiale liniare scalare

O ecuaţie diferenţială liniară scalară este de forma

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad A(\cdot) : I \to \mathbb{R} \text{ continuă },$$

deci este un caz particular de ecuaţie diferenţială cu variabile separabile, unde $B(x) = x$.

Separând variabilele obţinem:

$$\frac{dx}{x} = A(t)dt \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int A(t)dt \Leftrightarrow x(t) = ce^{\int A(t)dt},$$

sau

$$x(t) = x_0 e^{\int\limits_{t_0}^{t} A(t)dt}.$$

**Exemple**

a) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t^2-1}x,\ x > 0,\ t \in (-\infty, 1)\bigcup(1, \infty)$

**Rezolvare**

Avem o ecuaţie diferenţială liniară scalară, deci, în primul rând, vom separa variabilele. Vom obţine:

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1}{t^2-1}dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{t^2-1}dt \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+2}\right) + c \Leftrightarrow \ln x = \ln\sqrt{\frac{t-1}{t+2}} + \ln c,$$

de unde

$$x(t) = c\sqrt{\frac{t-1}{t+2}}.$$

b) $\dfrac{dx}{dt} = -2tx,\ x > 0,\ \ x(0) = 2.$

**Rezolvare**

Avem o problemă Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială liniară scalară, deci, în primul rând, vom separa variabilele. Vom obţine:

$$\frac{1}{x}dt = -2t\ dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{x}dt = -\int 2t\ dt \Leftrightarrow \ln x = -t^2 + c \Leftrightarrow x = e^{-t^2+c} \Leftrightarrow x(t) = ce^{-t^2}.$$

Pentru problema Cauchy avem $x(0) = c = 2$, deci soluţia este

$$x_{PC}(t) = 2e^{-t^2}.$$

## 5. Ecuaţii diferenţiale afine

O ecuaţie diferenţială afină este de forma

$$x'(t) + A(t)x = B(t), \text{ cu } A(\cdot),\ B(\cdot) : I \to \mathbb{R} \text{ continue.}$$

Metoda de rezolvare a acestei ecuaţii se numeşte metoda variaţiei constantei. Această metodă presupune parcurgerea a două etape.

În prima etapă se află soluţia ecuaţiei omogene, pe care o notăm cu $x_o$ (în care se consideră $B(t) = 0$), iar în a doua etapă se variază constanta (i.e. se consideră $c = c(t)$), se inlocuieşte în ecuţia iniţială şi se determină $c(t)$. Înlocuind pe $c(t)$ astfel obţinut în expresia lui $x_o$ se determină o soluţie particulară, notată $\varphi_0(t)$. Soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este $x(t) = x_o(t) + \varphi_0(t)$.

Matematic, rezolvarea ecuaţiei este:

**Etapa 1. Rezolvarea ecuaţiei omogene.**

$$x'(t) + A(t)x = 0 \Leftrightarrow x'(t) = \frac{dx}{dt} = -A(t)x \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -A(t)dt \Leftrightarrow \ln|x| = -\int A(t)dt + c,$$

de unde obţinem soluţia ecuaţiei omogene

$$x_o = ce^{-\int A(t)dt}.$$

**Etapa 2. Variaţia constantei.**

Variem constanta din expresia lui $x_o$ şi avem

$$x_o(t) = c(t)e^{-\int A(t)dt}.$$

Înlocuind această expresie în ecuaţia iniţială, obţinem:

$$c'(t)e^{-\int A(t)dt} - c(t)A(t)e^{-\int A(t)dt} + c(t)A(t)e^{-\int A(t)dt} = B(t)$$

$$\Leftrightarrow c'(t)e^{-\int A(t)dt} = B(t) \Leftrightarrow c'(t) = B(t)e^{\int A(t)dt},$$

deci

$$c(t) = \int B(t)e^{\int A(t)dt} + c_1.$$

Înlocuind expresia lui $c(t)$ în expresia lui $x_o$, obţinem

$$\varphi_0 = e^{-\int A(t)dt}\left[\int B(t)e^{\int A(t)dt} + c_1\right],$$

iar soluţia generală a ecuaţiei este $x(t) = x_o(t) + \varphi_0(t)$.

**Exemple**

a) $tx' - 2x = t^5$

**Rezolvare**

Pentru a aduce ecuaţia la o formă cunoscută, o împărţim la $t$ şi obţinem ecuaţia diferenţială afină

$$x' - \frac{2}{t}x = t^4.$$

Vom folosi acum metoda variaţiei constantei.

**Etapa 1.** Rezolvăm întâi ecuaţia omogenă $x' - \frac{2}{t}x = 0$ şi obţinem

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{t}x \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2}{t}dt \Leftrightarrow \ln x = 2\ln t + c \Leftrightarrow \ln x = \ln t^2 + \ln c \Leftrightarrow \ln x = \ln ct^2,$$

de unde rezultă soluţia ecuaţiei omogene

$$x_o = ct^2. \tag{1}$$

**Etapa 2.** Variem constanta în (1) şi astfel obţinem $x_o(t) = c(t)t^2$. Înlocuind această soluţie în ecuaţia iniţială oţinem

$$c'(t)t^2 + 2tc(t) - \frac{2}{t}c(t)t^2 = t^4 \Leftrightarrow c'(t)t^2 + 2tc(t) - 2tc(t)t = t^4 \Leftrightarrow c'(t)t^2 = t^4 \Leftrightarrow c'(t) = t^2,$$

de unde obţinem

$$c(t) = \frac{t^3}{3} + c_1,$$

deci soluţia particulară $\varphi_0$, obţinută prin înlocuirea lui $c(t)$ în (1) este

$$\varphi_0 = \left(\frac{t^3}{3} + c_1\right)t^2 = \frac{t^5}{3} + c_1 t^2.$$

Astfel, soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este

$$x(t) = x_0 + \varphi_0 = ct^2 + \frac{t^5}{3} + c_1 t^2 = \frac{t^5}{3} + ct^2.$$

b) $\dfrac{dx}{dt} + 2tx = 2te^{-t^2},\ x(0) = 1.$

**Rezolvare.** Avem o problemă Cauchy pentru o ecuaţie diferenţială afină, pe care o vom rezolva cu ajutorul metodei variaţiei constantei.

**Etapa 1.** Rezolvăm întâi ecuaţia omogenă $\dfrac{dx}{dt} + 2tx = 0$ şi obţinem

$$\frac{dx}{dt} = -2tx \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -2tdt \Leftrightarrow \ln|x| = -t^2 + c \Leftrightarrow |x| = e^{-t^2+c} \Leftrightarrow x = ce^{-t^2},$$

de unde rezultă soluţia ecuaţiei omogene

$$x_o = ce^{-t^2}. \tag{2}$$

**Etapa 2.** Variem constanta în (2) şi astfel obţinem $x_o(t) = ce^{-t^2}$. Înlocuind această soluţie în ecuaţia iniţială oţinem

$$c'(t)e^{-t^2} - 2tc(t)e^{-t^2} - \frac{2}{t}2te^{-t^2} = 2te^{-t^2} \Leftrightarrow c'(t)e^{-t^2} = 2te^{-t^2} \Leftrightarrow c'(t) = 2t,$$

de unde obţinem

$$c(t) = \int 2t\ dt = t^2 + c_1,$$

deci soluţia particulară $\varphi_0$, obţinută prin înlocuirea lui $c(t)$ în (2) este

$$\varphi_0 = \left(t^2 + c_1\right) e^{-t^2}.$$

Astfel, soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este

$$x(t) = x_0 + \varphi_0 = ce^{-t^2} + t^2e^{-t^2} + c_1e^{-t^2} = \left(t^2 + c\right) e^{-t^2}.$$

Pentru problema Cauchy avem $x(0) = c = 1$, deci soluţia este

$$x_{PC}(t) = \left(t^2 + 1\right) e^{-t^2}.$$

## 6. Ecuaţii diferenţiale omogene

O ecuaţie diferenţială omogenă este de forma

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right), \quad f(\cdot) : I \to \mathbb{R} \text{ continuă}$$

În general se face schimbarea de variabilă $u = \frac{x}{t}$ şi se obţine $x = ut$, de unde $x' = u't + u$. Înlocuim acum în ecuaţia iniţială şi obţinem

$$u't + u = f(u) \Leftrightarrow u't = f(u) - u \Leftrightarrow u' = \frac{1}{t}\left[f(u) - u\right].$$

Deci

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}\left[f(u) - u\right] \Leftrightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dt}{t} \Leftrightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dt}{t} \Leftrightarrow F(u) = \ln|t| + c,$$

de unde obţinem soluţia generală sub formă implicită

$$F(u) - \ln|t| - c = 0 \Leftrightarrow H(t, u, c) = 0.$$

Înlocuind pe $u$ cu $\frac{x}{t}$ obţinem soluţia generală sub formă implicită pentru ecuaţia iniţială

$$H\left(t, \frac{x}{t}, c\right) = 0.$$

**Exemplu**

$$t\frac{dx}{dt} = x - te^{\frac{x}{t}},\ t > 0$$

**Rezolvare**

Împărţind ecuaţia prin $t$ obţinem:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} - e^{\frac{x}{t}},$$

adică o ecuaţie diferenţială omogenă. Aplicăm schimbarea de variabilă $u = \dfrac{x}{t}$, de unde rezultă $x = ut$, deci $x' = u't + u$. Înlocuind în ecuaţia iniţială obţinem

$$u't + u = u - e^u \Leftrightarrow u't = -e^u \Leftrightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{e^u}{t} \text{ (ecuaţie cu variabile separabile).}$$

Deci

$$\frac{du}{e^u} = -\frac{1}{t}dt \Leftrightarrow \int \frac{du}{e^u} = -\int \frac{1}{t}dt \Leftrightarrow -e^{-u} = -\ln|t| + c \Leftrightarrow e^{-u} = \ln|t|c \Leftrightarrow -u = \ln(\ln|t|c).$$

Înlocuind pe $u$ cu $\dfrac{x}{t}$ obţinem

$$x = -t\ln(\ln|t|c).$$

## 7. Ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii de tip omogen

Ecuaţiile diferenţiale reductibile la ecuaţii de tip omogen sunt de forma

$$x' = f\left(\frac{a_1t + b_1x + c_1}{a_2t + b_2x + c_2}\right), \quad f(\cdot) : I \to \mathbb{R} \text{ continuă.}$$

Formăm determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

şi considerăm cele două cazuri posibile: $\Delta \neq 0$ şi $\Delta = 0$.

**Dacă $\boldsymbol{\Delta \neq 0}$,** atunci, considerând ecuaţiile $a_1t + b_1x + c_1 = 0$ şi $a_2t + b_2x + c_2 = 0$ ca fiind ecuaţiile a două drepte, rezultă că aceste drepte se intersectează. Fie $(t_0, x_0)$ punctul de intersecţie al celor două drepte.

Se face schimbarea de variabilă şi de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} t & = & \tau + t_0 \\ x & = & u + x_0 \end{cases},$$

de unde rezultă

$$\begin{cases} dt & = & d\tau \\ dx & = & du \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{du}{d\tau} = f\left(\frac{a_1(\tau + t_0) + b_1(u + x_0) + c_1)}{a_2(\tau + t_0) + b_2(u + x_0) + c_2}\right) =$$

$$= f\left(\frac{a_1\tau + a_1t_0 + b_1u + b_1x_0 + c_1}{a_2\tau + a_2t_0 + b_2u + b_2x_0 + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1\tau + b_1u}{a_2\tau + b_2u}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\dfrac{u}{\tau}}{a_2 + b_2\dfrac{u}{\tau}}\right) = g\left(\frac{u}{\tau}\right).$$

S-a obţinut o ecuaţie omogenă care se rezolvă după algoritmul specific ecuaţiilor diferenţiale omogene.

**Exemplu**

$(2t + 3x - 5) + (3t + 2x - 5)x' = 0$

**Rezolvare**

Separăm pe $x'$ şi obţinem

$$x' = \frac{-2t - 3x + 5}{3t + 2x - 5},$$

deci o ecuaţie diferenţială reductibilă la o ecuaţie de tip omogen.

Avem $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, deci cele două drepte de ecuaţii $-2t - 3x + 5 = 0$ şi $3t + 2x - 5 = 0$ se intersectează într-un punct. Pentru a găsi punctul de intersecţie rezolvăm sistemul format de cele două ecuaţii şi găsim $t_0 = 1$, $x_0 = 1$, deci vom face schimbarea de variabilă şi de funcţie necunoscută

$$\begin{cases} t &= \tau + t_0 \\ x &= u + x_0 \end{cases},$$

de unde rezultă

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{d\tau} = \frac{-2(\tau+1) - 3(u+1) + 5}{3(\tau+1) + 2(u+1) - 5} = \frac{-2\tau - 2 - 3u - 3 + 5}{3\tau + 3 + 2u + 2 - 5} = \frac{-2\tau - 3u}{3\tau + 2u} = \frac{-2 - 3\frac{u}{\tau}}{3 + 2\frac{u}{\tau}},$$

deci o ecuaţie diferenţială omogenă.

Schimbăm variabila $u$ în $v = \frac{u}{\tau}$, ceea ce este echivalent cu $u = v\tau$, de unde rezultă $u' = v'\tau + v$, deci

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{dv}{d\tau} \cdot \tau + v = \frac{-2 - 3v}{3 + 2v} \Leftrightarrow \frac{dv}{d\tau} \cdot \tau = \frac{-2 - 3v}{3 + 2v} - v \Leftrightarrow \frac{dv}{d\tau} \cdot \tau = \frac{-2 - 3v - 3v - 2v^2}{2v + 3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{d\tau} \cdot \tau = \frac{-2v^2 - 6v - 2}{2v + 3} \Leftrightarrow \frac{dv}{d\tau} \cdot \tau = \frac{-2(v^2 + 3v + 1)}{2v + 3}, \text{(ecuaţie cu variabile separabile)}$$

Separăm variabilele şi obţinem

$$\frac{2v + 3}{v^2 + 3v + 1} dv = -\frac{2}{\tau} d\tau \Leftrightarrow \int \frac{2v + 3}{v^2 + 3v + 1} dv = -\int \frac{2}{\tau} d\tau$$

$$\Leftrightarrow \ln|v^2 + 3v + 1| = -2\ln|\tau| + c \Leftrightarrow v^2 + 3v + 1 = c\tau^{-2}.$$

Înlocuind pe $v$ cu $\frac{u}{\tau}$ obţinem

$$\frac{u^2}{\tau^2} + 3\frac{u}{\tau} + 1 = \frac{c}{\tau^2},$$

iar, în final, ţinând cont de expresiile lui $u$ şi $\tau$, rezultă soluţia generală a ecuaţiei scrisă sub formă implicită

$$\frac{(x-1)^2}{(t-1)^2} + 3\frac{x-1}{t-1} + 1 = \frac{c}{(t-1)^2}.$$

**Dacă** $\Delta = 0$ atunci rezultă că dreptele de ecuaţii $a_1t + b_1x + c_1 = 0$ şi $a_2t + b_2x + c_2 = 0$ sunt paralele, deci

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k.$$

Rezultă că $a_1 = a_2k$ şi $b_1 = b_2k$. Înlocuind pe $a_1$ şi $b_1$ în ecuaţia iniţială obţinem:

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{a_2kt + b_2kx + c_1}{a_2t + b_2x + c_2}\right) = f\left(\frac{k(a_2t + b_2x) + c_1}{a_2t + b_2x + c_2}\right).$$

Cu schimbarea de variabilă $a_2t + b_2x = u$, deci $a_2 + b_2x' = u'$, ecuaţia devine:

$$\frac{du}{dt} = a_2 + b_2 f\left(\frac{ku + c_1}{u + c_2}\right),$$

care este o ecuaţie diferenţială de un anumit tip, ce va fi rezolvată după algoritmul specific.

**Exemplu**

$$(2t + x + 1)dt + \left(2t + x - \frac{1}{2}\right)dx = 0$$

**Rezolvare**

Mai întâi scriem ecuaţia sub forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-2t - x - 1}{2t + x - \frac{1}{2}}.$$

Avem $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Atunci

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-(2t + x) - 1}{2t + x - \frac{1}{2}}$$

şi cu schimbarea de variabilă $u = 2t + x$ deci $u' = 2 + x'$ , obţinem

$$\frac{du}{dt} = \frac{-u - 1}{u - \frac{1}{2}} + 2 = \frac{-u - 1 + 2u - 1}{u - \frac{1}{2}} = \frac{u - 2}{u - \frac{1}{2}},$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile.

Separând variabilele obţinem

$$\frac{u - \frac{1}{2}}{u - 2}du = dt \Leftrightarrow \frac{u - 2 + \frac{3}{2}}{u - 2}du = dt \Leftrightarrow \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{u - 2}\right)du = dt$$

$$\Leftrightarrow \int \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{u - 2}\right)du = \int dt.$$

Rezultă

$$u + \frac{3}{2}\ln|u - 2| = t + c.$$

Înlocuind acum pe $u$ cu $2t + x$ obţinem soluţia generală sub formă implicită

$$2t + x + \frac{3}{2}\ln|2t + x - 2| = t + c.$$