Aplicații liniare

Fie V și W două K-spații vectoriale

Def

O funcție $T: V \to W$ se numește aplicație liniară (operator liniar) dacă:

a) $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$, $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in T$

b) $T(\alpha\vec{x}) = \alpha T(\vec{x})$, $\forall\ \alpha \in K$, $\vec{x} \in T$

Prop

$T: V \to W$ este o aplicație liniară (operator liniar) dacă și numai dacă $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in V$,

$$T(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \alpha T(\vec{x}) + \beta T(\vec{y})$$

Dem

"$\Rightarrow$" $T(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = T(\alpha\vec{x}) + T(\beta\vec{y}) = \alpha T(\vec{x}) + \beta T(\vec{y})$

"$\Leftarrow$" $\left.\begin{array}{l} \text{Dacă } \alpha=\beta=1 \Rightarrow T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x})+T(\vec{y}) \\ \alpha=1, \beta=0 \Rightarrow T(\alpha\vec{x}) = \alpha T(\vec{x}) \end{array}\right\} \Rightarrow T$ apl. liniară.

Prop. (Proprietățile operatorilor liniari)

Fie $T: V \to W$ un operator liniar

1) $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

2) $T(-\vec{x}) = -T(\vec{x})$ $\quad \forall\ \vec{x} \in V$

3) $T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(\vec{x}_i)$, $\forall\ \alpha_i \in K$, $\forall\ \vec{x}_i \in V$

4) Dacă T este aplicație liniară bijectivă, atunci $T^{-1}: W \to V$ este aplicație liniară.

Dem

1) $T(0_V) = T(0_V \cdot \vec{x}) = 0 \cdot T(\vec{x}) = 0_W$

2) $T(-\vec{x}) = T(-1 \cdot \vec{x}) = (-1) \cdot T(\vec{x}) = -T(\vec{x})$

3) $$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\right) = T(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n)$$
$$= T(\alpha_1 \vec{x}_1) + T(\alpha_2 \vec{x}_2) + \dots + T(\alpha_n \vec{x}_n)$$
$$= \alpha_1 T(\vec{x}_1) + \alpha_2 T(\vec{x}_2) + \dots + \alpha_n T(\vec{x}_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(\vec{x}_i)$$

4) T bij $\Rightarrow T(T^{-1}(\vec{x})) = \vec{x},\ T(T^{-1}(\vec{y})) = \vec{y}$

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \alpha \cdot T(T^{-1}(\vec{x})) + \beta T(T^{-1}(\vec{y}))$$
$$= T(\alpha T^{-1}(\vec{x}) + \beta T^{-1}(\vec{y}))$$

$T^{-1}(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha T^{-1}(\vec{x}) + \beta T^{-1}(\vec{y}) \Rightarrow T^{-1}$ - op. liniar

Def Orice aplicație liniară bijectivă $T: V \to W$ s.n. izomorfism de spații vectoriale

Def O aplicație liniară $T: V \to V$ s.n. endomorfism.

Se notează cu $L(V, W)$ mulțimea tuturor aplicațiilor liniare definite pe V cu valori în W și cu $L(V)$ mulțimea endomorfismelor pe V.

Obs $L(V, W)$ și $L(V)$ sunt K-spații vectoriale în raport cu adunarea funcțiilor și cu înmulțirea cu scalari.

Dem (exercițiu)

Teoremă Orice K-spațiu vectorial de dimensiune n este izomorf cu K^n.

Corolar Orice 2 sp. vect. peste corpul K, finit dim., care au aceeași dimensiune, sunt izomorfe.

Ex 1. Fie $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $T(x_1,x_2)=(x_1+2x_2,\ x_2,\ x_1-3x_2)$

Verificați dacă T este aplicație liniară.

Rezolvare

Fie $\vec{x}=(x_1,x_2)$, $\vec{y}\in(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, și $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
T(\vec{x}+\vec{y}) &= T((x_1,x_2)+(y_1,y_2)) \\
&= T(x_1+y_1,\ x_2+y_2) \\
&= ((x_1+y_1)+2(x_2+y_2),\ x_2+y_2,\ (x_1+y_1)-3(x_2+y_2)) \\
&= (x_1+y_1+2x_2+2y_2,\ x_2+y_2,\ x_1+y_1-3x_2-3y_2) \\
&= (x_1+2x_2,\ x_2,\ x_1-3x_2)+(y_1+2y_2,\ y_2,\ y_1-3y_2) \\
&= T(\vec{x})+T(\vec{y})
\end{aligned}$$

2. Verificați dacă $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2;\ 2x_2+x_3,\ x_1+x_2-x_3)$ este o aplicație liniară (Temă)

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Def Se numește nucleul aplicației liniare $T:\ \to W$, notat $\operatorname{Ker}T$ mulțimea

$$\operatorname{Ker}T=\{\vec{v}\in V \mid T(\vec{v})=\vec{0}_W\}$$

Def Se numește imaginea aplicației liniare $T:V\to W$ mulțimea

$$\operatorname{Im}T=\{\vec{w}\in W \mid \exists\, \vec{x}\in V \text{ a.î. } T(\vec{x})=\vec{w}\}$$

Prop Dacă $T:V\to W$ este o aplicație liniară, atunci $\operatorname{Ker}T\in S_{L}(V)$ și $\operatorname{Im}T\in S_{L}(W)$

Dem

Fie $\vec{x},\vec{y}\in\operatorname{Ker}T \Rightarrow T(\vec{x})=\vec{0}$, $T(\vec{y})=\vec{0}$

și $\alpha,\beta\in K$

$T(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \alpha T(\vec{x}) + \beta T(\vec{y}) = \alpha \cdot 0_W + \beta \cdot 0_W = \vec{0}_W$

$\Rightarrow \alpha\vec{x}+\beta\vec{y} \in \operatorname{Ker} T \Rightarrow \operatorname{Ker} T \in Sl(V)$

Fie $\vec{v}, \vec{w} \in \operatorname{Im} T \Rightarrow \exists\, \vec{x}, \vec{y} \in V$ a.î. $T(\vec{x}) = \vec{v}$, $T(\vec{y}) = \vec{w}$.

$\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} = \alpha \cdot T(\vec{x}) + \beta \cdot T(\vec{y}) = T(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) \Rightarrow$

$\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \in \operatorname{Im} T \Rightarrow \operatorname{Im} T \in Sl(W)$

Def Numărul $r = \dim(\operatorname{Im} T)$ s.n. rangul aplicației T.
Numărul $d = \dim(\operatorname{Ker} T)$ s.n. defectul aplicației T.

Prop Fie $T: V \to W$ o aplicație liniară. Dacă V este spațiu vectorial finit dimensional, atunci
$$\dim V = \dim(\operatorname{Ker} T) + \dim(\operatorname{Im} T) \quad (n = d + r)$$

Ex 1. Fie $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o aplicație liniară definită prin
$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2,\ x_2 - x_3,\ x_1 + 2x_2 - x_3)$$
Să se determine $\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Im} T$, rangul și defectul lui T.

Rezolvare

$\operatorname{Ker} T = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{x}) = \vec{0} \}$

Fie $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$T(\vec{x}) = T(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0) = (3x_1 + x_2,\ x_2 - x_3,\ x_1 + 2x_2 - x_3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 1 + 6 = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (0,0,0) \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}$

$d = \dim \operatorname{Ker} T = 0$.

$Im\, T = \{ \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ a.î. } T(\vec{x}) = \vec{w} \}$

Fie $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ și fie $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$T(\vec{x}) = \vec{w} \iff T(x_1, x_2, x_3) = (w_1, w_2, w_3) \iff$

$(3x_1 + x_2,\ x_2 - x_3,\ x_1 + 2x_2 - x_3) = (w_1, w_2, w_3) \iff$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = w_1 \\ x_2 - x_3 = w_2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = w_3 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Sistemul are sol. unică $\forall\, w_1, w_2, w_3$

$\Rightarrow \forall\, \vec{w} \in \mathbb{R}^3\ \exists\, \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ a.î. $T(\vec{x}) = \vec{w}$

$\Rightarrow Im\, T = \mathbb{R}^3$

$r = \text{rang}\, T = \dim(Im\, T) = 3.$

2. Fie $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o aplicație definită prin

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3,\ 2x_1 - x_2,\ 3x_1 + x_2 - x_3)$$

a) Să se verifice dacă T este apl. liniară

b) Să se determine $Ker\, T$, $Im\, T$, rangul și defectul.

Rez

a) Fie $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$$T(\vec{x} + \vec{y}) = T((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$= \big((x_1 + y_1) - 2(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3),\ 2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2),$$
$$3(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - (x_3 + y_3)\big)$$

$$= (x_1 + y_1 - 2x_2 - 2y_2 - x_3 - y_3,\ 2x_1 + 2y_1 - x_2 - y_2,\ 3x_1 + 3y_1 + x_2 + y_2 - x_3 - y_3)$$

$$= (x_1 - 2x_2 - x_3,\ 2x_1 - x_2,\ 3x_1 + x_2 - x_3) + (y_1 - 2y_2 - y_3,\ 2y_1 - y_2,\ 3y_1 + y_2 - y_3)$$

$$= T(x_1, x_2, x_3) + T(y_1, y_2, y_3)$$

$$= T(\vec{x}) + T(\vec{y})$$

$$T(\alpha \vec{x}) = T(\alpha(x_1, x_2, x_3)) = T(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$

$$= (\alpha x_1 + 2\alpha x_2 - \alpha x_3,\ 2\alpha x_1 - \alpha x_2,\ 3\alpha x_1 + \alpha x_2 - \alpha x_3) = \alpha T(\vec{x})$$

4) $\operatorname{Ker} T = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{x}) = \vec{0} \}$

Fie $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$T(x_1, x_2, x_3) = \vec{0} \iff (x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 - x_2, 3x_1 + x_2 - x_3) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = +1 - 2 - 3 + 4 = 0.$

$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0.$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = x_3 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \mid 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = x_3 \\ 4x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$

$5x_1 = x_3 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{x_3}{5}} \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{2x_3}{5}}$ Notăm $x_3 = \alpha$

$\Rightarrow \vec{x} = \left(\frac{\alpha}{5}, \frac{2\alpha}{5}, \alpha \right) = \alpha \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1 \right)$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} T = \{ \alpha (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$. O bază a lui $\operatorname{Ker} T$ este $\{ (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1) \}$

$\Rightarrow d = \dim(\operatorname{Ker} T) = 1$

$\operatorname{Im} T = \{ \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ a.î. } T(\vec{x}) = \vec{w} \}$

Fie $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, $T(\vec{x}) = \vec{w} \iff$

$\Rightarrow (x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 - x_2, 3x_1 + x_2 - x_3) = (w_1, w_2, w_3)$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = w_1 \\ 2x_1 - x_2 = w_2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = w_3 \end{cases}$ $\Delta = 0. \to \begin{cases} x_1 + 2x_2 = w_1 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 = w_2 \end{cases}$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & w_1 \\ 2 & -1 & w_2 \\ 3 & 1 & w_3 \end{vmatrix} = 5w_1 + 5w_2 - 5w_3 = 0$

$\Rightarrow w_1 + w_2 - w_3 = 0 \Rightarrow w_3 = w_1 + w_2$

Not. $w_1 = \alpha$, $w_2 = \beta \Rightarrow w_3 = \alpha + \beta \Rightarrow \vec{w} = (\alpha, \beta, \alpha + \beta)$

$\operatorname{Im} T = \{ (\alpha, \beta, \alpha + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

Avem:

$$(\alpha, \beta, \alpha+\beta) = (\alpha, 0, \alpha) + (0, \beta, \beta)$$
$$= \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1)$$

$\Rightarrow$ O bază a lui $\mathrm{Im}\, T$ este $\{(1,0,1)^T, (0,1,1)^T\}$

$\Rightarrow r = \dim(\mathrm{Im}\, T) = 2$.

Prop O aplicație liniară $T: V \to W$ este injectivă dacă și numai dacă $\mathrm{Ker}\, T = \{\vec{0}\}$

Dem Pp. T inj.

"$\Rightarrow$" Fie $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\, T \Rightarrow T(\vec{x}) = 0$. Dar $T(\vec{0}) = \vec{0}$.

Cum T inj. $\Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \in \{\vec{0}\} \Rightarrow \mathrm{Ker}\, T \subset \{\vec{0}\}$.

Dar $\{\vec{0}\} \subseteq \mathrm{Ker}\, T \Rightarrow \mathrm{Ker}\, T = \{\vec{0}\}$

"$\Leftarrow$" Știm $\mathrm{Ker}\, T = \{\vec{0}\}$

Fie $\vec{x}, \vec{y} \in V$ cu $T(\vec{x}) = T(\vec{y}) \Rightarrow T(\vec{x}) - T(\vec{y}) = T(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{x} - \vec{y} \in \mathrm{Ker}\, T \Rightarrow \vec{x} - \vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y} \Rightarrow T$ - inj.

Prop O aplicație liniară $T: V \to W$ este surjectivă dacă și numai dacă $\mathrm{Im}\, T = W$

Rez $\mathrm{Im}\, T = \{\vec{y} \in W \mid \exists\, \vec{x} \in V \text{ a.î. } T(\vec{x}) = \vec{y}\}$

O funcție (aplicație) T e surjectivă $\Leftrightarrow \forall\, \vec{y} \in W\ \exists\, \vec{x} \in V$ a.î. $f(\vec{x}) = \vec{y}$

Ex Aplicația $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2,\ x_2 - x_3,\ x_1 + 2x_2 - x_3)$

este injectivă deoarece $\mathrm{Ker}\, T = \{\vec{0}\}$ și este surjectivă deoarece $\mathrm{Im}\, T = \mathbb{R}^3$

Temă

Să se verifice dacă următoarele aplicații liniare sunt injective și/sau surjective.

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\ x_1 - 2x_2,\ 2x_1 + 3x_2)$

b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2,\ 3x_1 + x_2)$

c) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2,\ x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_3)$

d) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3,\ x_2,\ 2x_1 + x_2 - x_3)$