FORM

forma normală prenex

$\{\forall, \exists\}$

$\alpha = Q_1x_1 Q_2x_2 \ldots Q_nx_n \beta$

$x_i \in V$, $FV(\alpha)$, $i = \overline{1..n}$

# 1 Sintaxa limbajului

Vocabularul limbajului este $V \cup L \cup S$, unde

$\boxed{\alpha} \to \boxed{\text{reguli}} \to FNP(Q x_1 \ldots Q x_n \beta)$ ($\alpha'$)

$\alpha' = \alpha$ (semantic echiv.) $(I(\alpha') = I(\alpha))$

# 2 Reprezentări normalizate

*Definiţia* 2.3.1 Formula închisă $\alpha$ este o formă normală prenex dacă $\alpha = Q_1x_1...Q_nx_n\beta$, unde $FV(\alpha) = \{x_1, ..., x_n\}$, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\beta \in FORM$, $\beta\rangle\exists\langle$, $\beta\rangle\forall\langle$.

Secvenţa $Q_1x_1...Q_nx_n$ este prefixul, respectiv $\beta$ este matricea formulei $\alpha$.

*Teorema* 2.3.1 Pentru orice $\alpha \in FORM_0$, există $\overline{\alpha}$ formă normală prenex şi $\alpha \equiv \overline{\alpha}$.

FNP

$\alpha \equiv \alpha' = Q_1x_1 \ldots Q_nx_n \beta$

*Demonstraţie* Determinarea unei forme normale prenex semantic echivalentă cu o formulă închisă dată $\alpha$ poate fi realizată prin aplicarea următoarelor transformări. Transformările sunt aplicate subformulelor formulei date $\alpha$ şi revin la substituirea unei subformule cu o subformulă semantic echivalentă cu ea, deci la fiecare etapă rezultă o formulă semantic echivalentă cu $\alpha$.

*R1*. Eliminarea conectivei ” $\leftrightarrow$ ” : Fiecare subformulă $(\beta \leftrightarrow \gamma)$ se substituie cu $((\beta \to \gamma) \wedge (\gamma \to \beta))$ .

$(\beta \leftrightarrow \gamma) \equiv (\beta \to \gamma) \wedge (\gamma \to \beta)$

*R2*. Eliminarea conectivei ” $\to$ ” : Fiecare subformulă $(\beta \to \gamma)$ se substituie cu $((\neg\beta) \vee \gamma)$ .

$(\beta \to \gamma) \equiv (\neg\beta \vee \gamma)$

*R3*. Se aduc negaţiile în faţa atomilor:

*a*) subformula $(\neg(\gamma \vee \beta))$ se substituie cu $((\neg\gamma) \wedge (\neg\beta))$ — $\neg(\gamma \vee \beta) \equiv (\neg\gamma \wedge \neg\beta)$

*b*) subformula $(\neg(\gamma \wedge \beta))$ se substituie cu $((\neg\gamma) \vee (\neg\beta))$ — $\neg(\gamma \wedge \beta) \equiv (\neg\gamma \vee \neg\beta)$

*c*) subformula $(\neg\exists x\beta)$ se substituie cu $\forall x(\neg\beta)$ — $\neg\exists x \beta \equiv \forall x \neg\beta$

*d*) subformula $(\neg\forall x\beta)$ se substituie cu $\exists x(\neg\beta)$ — $\neg\forall x \beta \equiv \exists x \neg\beta$

*R4*. Eliminarea negaţiilor multiple: Fiecare subformulă $(\neg(\neg\beta))$ se substituie cu $\beta$.

$\neg(\neg\beta) \equiv \beta$

*R5*. Se aduc cuantificările asupra variabilelor în prefixul formulei: pentru $x \in V$, $\vartheta \in \{\forall, \exists\}$ şi $\rho \in \{\vee, \wedge\}$ subformulele de tipul $(\vartheta x\beta\rho\gamma)$ unde $\gamma\rangle x\langle$ se substituie cu $\vartheta x(\beta\rho\gamma)$ .

$\vartheta x \beta \rho \gamma \equiv \vartheta x (\beta \rho \gamma)$ — $x \notin \gamma$, $\rho \in \{\wedge, \vee\}$

*Exemplul* 2.3.1 Fie $P, Q \in PS$, $r(P) = r(Q) = 1$, $x, y, z \in V$,

$\alpha = (\exists xPx \to \forall y(Py \to (\neg\forall zQz)))$ .

Prin aplicarea transformărilor $R1 - R5$ rezultă secvenţa de formule semantic echivalente cu $\alpha$:

$\boxed{\alpha} = \exists x Px \to \forall y (Py \to \neg\forall z Qz)$

$\equiv Q_1x\, Q_2y\, Q_3z$ (FS)

$$
\begin{aligned}
&(\exists xPx \to \forall y(Py \to (\neg\forall zQz))) \equiv && \text{R2} \\
&\equiv ((\neg\exists xPx) \vee \forall y((\neg Py) \vee (\neg\forall zQz))) \equiv \\
\text{R3}\quad &\equiv (\forall x(\neg Px) \vee \forall y((\neg Py) \vee \exists z(\neg Qz))) \equiv \\
\text{R5}\quad &\equiv \forall x((\neg Px) \vee \forall y\exists z((\neg Py) \vee (\neg Qz))) \equiv \\
\text{R5}\quad &\equiv \forall x\forall y\exists z((\neg Px) \vee ((\neg Py) \vee (\neg Qz)))
\end{aligned}
$$

$\forall x \forall y \exists z$

$\vartheta x \beta \rho \gamma$ R5

$\exists z \neg Qz \vee \neg Py$

$\exists z(\neg Qz \vee \neg Py)$



f3

Formula $\overline{\alpha} = \forall x \forall y \exists z\, ((\urcorner Px) \vee ((\urcorner Py) \vee (\urcorner Qz)))$ este o formă normală prenex şi $\alpha \equiv \overline{\alpha}$.

Se observă că aplicarea transformării $R5$ formulei

$$(\forall x\, (\urcorner Px) \vee \forall y\, ((\urcorner Py) \vee \exists z\, (\urcorner Qz)))$$

poate fi realizată în mai multe moduri, de exemplu,

$$\begin{aligned}
&(\forall x\, (\urcorner Px) \vee \forall y\, ((\urcorner Py) \vee \exists z\, (\urcorner Qz))) \equiv \\
&\quad \equiv \forall y\, (\forall x\, (\urcorner Px) \vee ((\urcorner Py) \vee \exists z\, (\urcorner Qz))) \equiv \\
&\quad \equiv \forall y\, (\forall x\, (\urcorner Px) \vee \exists z\, ((\urcorner Py) \vee (\urcorner Qz))) \equiv \\
&\quad \equiv \forall y \exists z\, (\forall x\, (\urcorner Px) \vee ((\urcorner Py) \vee (\urcorner Qz))) \equiv \\
&\quad \equiv \forall y \exists z \forall x\, ((\urcorner Px) \vee ((\urcorner Py) \vee (\urcorner Qz))) = \overline{\alpha}_1
\end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned}
&(\forall x\, (\urcorner Px) \vee \forall y\, ((\urcorner Py) \vee \exists z\, (\urcorner Qz))) \equiv \\
&\quad \equiv \forall x\, ((\urcorner Px) \vee \forall y\, ((\urcorner Py) \vee \exists z\, (\urcorner Qz))) \equiv \\
&\quad \equiv \forall x \forall y\, ((\urcorner Px) \vee ((\urcorner Py) \vee \exists z\, (\urcorner Qz))) \equiv \\
&\quad \equiv \forall x \forall y \exists z\, ((\urcorner Px) \vee ((\urcorner Py) \vee (\urcorner Qz))) = \overline{\alpha}_2
\end{aligned}$$

$\alpha \overset{\text{Reguli } R1-R5}{\rightsquigarrow}$ FNP

$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\, \beta$

prefixul

şi $\alpha \equiv \overline{\alpha} \equiv \overline{\alpha}_1 \equiv \overline{\alpha}_2$.

*Definiţia* 2.3.2 Se numeşte clauză orice disjuncţie de literali. Clauza vidă, notată $\boxed{\square}$, este clauza corespunzătoare mulţimii de literali vidă. Clauza vidă este prin definiţie invalidabilă.

Clauza

$$\boxed{k = \bigvee_{i=1}^{n_k} L_i}$$

$L_i \in ATOM \cup \urcorner ATOM$

$ATOM = \pi t_1 t_2 \ldots t_{r(\pi)}$

$\pi \in PS$

$t_i = f t_1 t_2 \ldots t_{r(f)}$, $i = 1..r(\pi)$

Cu alte cuvinte, dacă $L = \{L_1, ..., L_n\} \subset \boxed{ATOM} \cup \boxed{\urcorner ATOM}$ este o mulţime de literali atunci o disjuncţie a literalilor din mulţimea $L$ este $k = \beta_n$, unde $\beta_1 = L_1$, $\beta_j = (\beta_{j-1} \vee L_j)$, $2 \leqslant j \leqslant n$.

Literalii atomi se numesc literali pozitivi, respectiv literalii negaţii de atomi se numesc literali negativi.

Evident, $M(\beta_j) = \bigcup_{i=1}^{j} M(L_i)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, deci $M(k) = \bigcup_{i=1}^{n} M(L_i)$ şi pentru orice permutare $\sigma$ a mulţimii $\{1, 2, ...n\}$, $\beta_n \equiv \gamma_n$ unde $\gamma_1 = L_{\sigma(1)}$, $\gamma_j = \left(\gamma_{j-1} \vee L_{\sigma(j)}\right)$, $2 \leqslant j \leqslant n$, deci oricare două clauze asociate aceleiaşi mulţimi de literali au aceeaşi semnificaţie. În particular, putem presupune că ordinea în care sunt consideraţi literalii este astfel încât literalii pozitivi ai clauzei (dacă există !) au cei mai mici indici. Convenţional clauza $k$ este reprezentată $k = \bigvee_{i=1}^{n} L_i$ şi pentru simplificarea scrierii omitem parantezarea impusă de regulile de sintaxă considerate.

$a \vee \urcorner b \equiv \urcorner b \vee a \equiv b \to a$

Fie $k = \bigvee_{i=1}^{n} L_i$ clauză.

Presupunem că $\{L_1, ..., L_m\} = ATOM \cap \{L_1, ..., L_n\}$ şi $L_j = (\urcorner A_j)$, $m+1 \leq$

$$k = \bigvee_{i=1}^{n_k} L_i = \bigvee_{i=1}^{m} L_i \vee \bigvee_{j=m+1}^{n_k} L_j = \bigvee_{i=1}^{m} L_i \vee \left(\bigvee_{j=m+1}^{n_k} \urcorner A_j\right) = \underbrace{\bigvee_{i=1}^{m} L_i}_{a} \vee \underbrace{\left(\urcorner \bigwedge_{j=m+1}^{n_k} A_j\right)}_{\urcorner b} \equiv$$

$L_i \in ATOM \vee \urcorner ATOM$

$L_i \in ATOM$, $i = 1..m$, $m \leq n_k$

$\boxed{L_j \in \urcorner ATOM}$, $j = m+1..n_k$

$L_j = \urcorner A_j$, $A_j \in ATOM$

$$\boxed{\bigwedge_{j=m+1}^{n_k} A_j \to \bigvee_{i=1}^{m} L_i}$$

clauza $k$

prog. logic → $\vee L_i \leftarrow \wedge P_j$

":-"

FNP

$j \leq n$ sunt literalii negativi ai clauzei $k$. Rezultă

$$k \equiv \bigvee_{i=1}^{m} L_i \vee \bigvee_{i=m+1}^{n} (\urcorner A_i) \equiv \left( \urcorner \bigwedge_{i=m+1}^{n} A_i \right) \vee \bigvee_{i=1}^{m} L_i \equiv$$

$$\equiv \left( \bigwedge_{i=m+1}^{n} A_i \right) \rightarrow \left( \bigvee_{i=1}^{m} L_i \right)$$

*Definiţia* 2.3.3 Dacă $L = \{L_1, ..., L_n\} \subset \urcorner ATOM$, atunci $\boxed{k = \bigvee_{i=1}^{n} L_i}$ se numeşte clauză scop sau scop definit.

Fie $k = \bigvee_{i=1}^{n} (\urcorner A_i)$ clauză scop, $A_i \in ATOM$, $i = 2, ..., n$.

Evident, $k \equiv \urcorner \bigwedge_{i=1}^{n} A_i \equiv \square \vee \urcorner \bigwedge_{i=1}^{n} A_i \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} A_i \rightarrow \square$,

deci $L$-structura $M = (D, I)$ este model pentru $k$ dacă şi numai dacă pentru orice valuaţie $s \in [V \rightarrow D]$,

$\left( \bigwedge_{i=1}^{n} A_i \right)^I (s) = F$, deci dacă şi numai dacă pentru orice valuaţie $s \in [V \rightarrow D]$, există $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, astfel încât $A_i^I (s) = F$.

!

Clauza $k$ este clauză definită (sau clauză Horn), dacă $n = 1$ şi $L_1 \in ATOM$ sau $n \geqslant 2$, şi $L_1 \in ATOM$, $\{L_2, ..., L_n\} \subset \urcorner ATOM$. În primul caz, clauza $k$ se numeşte clauză fapt, respectiv în cel de al doilea caz $k$ se numeşte clauză regulă.

Clauze Horn

Fie $k = L_1 \vee \bigvee_{i=2}^{n} L_i$ o clauză regulă. Notând $L_i = (\urcorner A_i)$, $A_i \in ATOM$, $i = 2, ..., n$, obţinem

$$k = L_1 \vee \bigvee_{i=2}^{n} (\urcorner A_i) \equiv L_1 \vee \left( \urcorner \bigwedge_{i=2}^{n} A_i \right) \equiv \left( \bigwedge_{i=2}^{n} A_i \right) \rightarrow L_1.$$

$L_1 \leftarrow \bigwedge_{i=2} A_i$

$L_1 :- \bigwedge_{i=2} A_i$

Rezultă că o $L$-structură $M = (D, I)$ este model pentru $k$, dacă şi numai dacă pentru orice valuaţie $s \in [V \rightarrow D]$, $\left( \bigwedge_{i=2}^{n} A_i \right)^I (s) = F$ sau $L_1^I (s) = T$. Cu alte cuvinte, $M$ este model pentru $k$, dacă şi numai dacă pentru orice valuaţie $s \in [V \rightarrow D]$, dacă $A_i^I (s) = T$ pentru toţi $i = 2, ..., n$, atunci $L_1^I (s) = T$.

Mulţimea de clauze $S$ este un program definit, dacă toate clauzele din $S$ sunt clauze definite.

În concluzie, un program definit poate exprima numai cunoştinţe pozitive deoarece atât faptele, cât şi clauzele reguli precizează numai elementele care

Multime clauze $k_1, k_2, ..., k_n$ => program definit se află într-o anumită relaţie şi nu oferă indicii asupra elementelor care nu se află în relaţia considerată, ceea ce în particular implică faptul că orice program definit are cel puţin un model.

*Observaţie* Reprezentarea clauzelor în programarea logică este realizată pe baza unei sintaxe modificate şi anume: conjuncţia este reprezentată prin simbolul ",", disjuncţia este reprezentată prin simbolul ";", iar implicaţia este reprezentată prin " $\leftarrow$ ", simbolul fiind citit "*dacă*". $\rightarrow$ :- $A \wedge A$

Astfel, reprezentarea clauzei generale $k \equiv \bigvee_{i=1}^{m} L_i \vee \bigvee_{i=m+1}^{n} (\urcorner A_i)$ este

$L_1; ...; L_m \leftarrow A_{m+1}, ..., A_n$ respectiv clauza definită $k = L_1 \vee \bigvee_{i=2}^{n} (\urcorner A_i)$ $\quad L_1 \text{:-} \bigwedge_{i=2}^{n} A_i$

are reprezentarea $L_1 \leftarrow A_2, ..., A_n$. // clauza negativă

Reprezentarea corespunde din punct de vedere intuitiv faptului că dacă $A_2, ..., A_n$ sunt validaţi într-o anumită interpretare model pentru $k$, atunci şi $L_1$ este validat în acea interpretare, deci veracitatea atomului $L_1$ este condiţionată de $A_2, ..., A_n$.

Notând cu $\top$ o clauză tautologie, deoarece $L_1 \equiv L_1 \vee (\urcorner\top)$, clauza fapt $k = L_1$ este reprezentată $L_1 \leftarrow \top$, sau mai simplu, $L_1 \leftarrow$, ceea ce din punct de vedere intuitiv exprimă ideea că $L_1$ este necondiţionat adevărată.

Deoarece clauza scop $k = \bigvee_{i=1}^{n} (\urcorner A_i)$ este semantic echivalentă cu $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i \rightarrow \square$, conform sintaxei descrise rezultă pentru $k$ reprezentarea $\square \leftarrow A_1, ..., A_n$, sau mai simplu $\leftarrow A_1, ..., A_n$.

Se observă că în sintaxa curent utilizată de programarea logică, negaţia nu este explicit reprezentată, atât literalii din stânga, cât şi literalii din dreapta simbolului " $\leftarrow$ " fiind literali pozitivi. Structura clauzei este dată de dinsjuncţia literalilor din stânga simbolului " $\leftarrow$ " cu negaţiile literalilor din dreapta simbolului " $\leftarrow$ ".

forma normală $\quad k_1, k_2, ..., k_n$

*Definiţia* 2.3.4 Se numeşte formă normal conjunctivă (*CNF*) orice conjuncţie de clauze. FNC

Cu alte cuvinte, pentru mulţimea de clauze $\{k_1, ..., k_n\}$, $\alpha$ este o formă normal conjunctivă, dacă

$\alpha = \gamma_n$ unde $\gamma_1 = k_1$, $\gamma_j = (\gamma_{j-1} \wedge k_j)$, $2 \leqslant j \leqslant n$.

Evident, $M(\gamma_j) = \bigcap_{i=1}^{j} M(k_i)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, deci $M(\alpha) = \bigcap_{i=1}^{n} M(k_i)$ şi pentru orice permutare $\sigma$ a mulţimii $\{1, 2, ...n\}$, $\delta_n \equiv \gamma_n$, unde

$\delta_1 = k_{\sigma(1)}$, $\delta_j = \left(\delta_{j-1} \vee k_{\sigma(j)}\right)$, $2 \leqslant j \leqslant n$.

FNC(β) = $\bigwedge_{i=1}^{n} k_i$

Convenţional formula $\alpha$ este reprezentată $\alpha = \bigwedge_{i=1}^{n} k_i$ şi pentru simplificarea notaţiei eliminăm parantezarea dictată de sintaxă. Mulţimea de clauze $S = \{k_1, ..., k_n\}$ se numeşte reprezentare clauzală pentru orice formă normal

β ∈ FORM

$FNC(\beta) = \bigwedge_{i=1}^{n} k_i$, $\quad k_i = \bigvee L_i$, $i = 1..n$



1) $\mu \leftrightarrow \nu \equiv (\mu \rightarrow \nu) \wedge (\nu \rightarrow \mu)$

2) $\mu \rightarrow \nu \equiv \urcorner\mu \vee \nu$

3) $\urcorner\urcorner\mu \equiv \mu$

4) $\urcorner(\mu \vee \nu) \equiv \urcorner\mu \wedge \urcorner\nu$; $\urcorner(\mu \wedge \nu) \equiv \urcorner\mu \vee \urcorner\nu$

5) $\mu \wedge (\nu \vee \rho) \equiv (\mu \wedge \nu) \vee (\mu \wedge \rho)$; $\mu \vee (\nu \wedge \rho) \equiv (\mu \vee \nu) \wedge (\mu \vee \rho)$

FNC

conjunctivă asociată mulţimii de clauze.

Fie $\alpha$ formă normal conjunctivă având reprezentarea clauzală $S = \{k_1, ..., k_n\}$. Deoarece $M(\alpha) = \bigcap\limits_{k \in S} M(k)$, rezultă că toate formele normal conjunctive ataşate aceleiaşi mulţimi de clauze sunt semantic echivalente.

Forma normal conjunctivă ataşată mulţimii fară clauze se numeşte formula vidă şi este notată "$\emptyset$". Formula vidă este prin definiţie tautologie.

*Exemplul* 2.3.2 : Fie literalii $L_1 = (\rceil Pfaxgay)$, $L_2 = Pafxy$, $L_3 = (\rceil Qfaaa)$, $L_4 = Qafaa$, unde

$P, Q \in PS$, $r(P) = 2$, $r(Q) = 1$, $f, g \in FS$, $r(f) = 2 = r(g)$,

$x, y \in V$, $a \in CS$ şi fie $k_1, k_2, k_3, k_4$ clauzele corespunzătoare mulţimilor de literali

$\{L_2, L_1, L_3\}$, $\{L_4\}$, $\{L_1, L_3\}$, $\{L_2, L_4, L_1, L_3\}$.

$k_1 = (Pafxy \vee ((\rceil Pfaxgay) \vee (\rceil Qfaaa)))$ este clauză Horn (clauză regulă),

$k_2 = Qafaa$ este clauză Horn (clauză fapt),

$k_3 = ((\rceil Pfaxgay) \vee (\rceil Qfaaa))$ este clauză scop, // excluţie

$k_4 = (Pafxy \vee (Qafaa \vee ((\rceil Pfaxgay) \vee (\rceil Qfaaa))))$ este clauză generală.

Reprezentările simplificate prin eliminarea parantezelor sunt

$k_1 = Pafxy \vee \rceil Pfaxgay \vee \rceil Qfaaa$

$k_3 = \rceil Pfaxgay \vee \rceil Qfaaa$

$k_4 = Pafxy \vee Qafaa \vee \rceil Pfaxgay \vee \rceil Qfaaa$

Formulele $\alpha_1 = (k_1 \wedge (k_2 \wedge (k_3 \wedge k_4)))$, $\alpha_2 = (k_4 \wedge (k_1 \wedge (k_4 \wedge k_2)))$ sunt forme normal conjunctive ataşate mulţimii $S = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$.

*Definiţia* 2.3.4 Forma normală prenex $\alpha = Q_1x_1...Q_nx_n\beta$ este o formă normală Skolem, dacă $Q_i = \forall$, $1 \leqslant i \leqslant n$ şi $\beta$ este o formă normal conjunctivă.

*Exemplul* 2.3.3 : Fie $k_1 = Pafxy \vee \rceil Pfaxgay$,

$k_2 = Qtfaa \vee \rceil Qfzaz$, $S = \{k_1, k_2\}$

unde $P, Q \in PS$, $r(P) = 2$, $r(Q) = 1$, $f, g \in FS$, $r(f) = 2 = r(g)$, $x, y, z, t \in V$, $a \in CS$.

Formula

$$\alpha = \forall x \forall y \forall z \forall t\, ((Qtfaa \vee \rceil Qfzaz) \wedge (Pafxy \vee \rceil Pfaxgay))$$

este o formă normală Skolem.

Formula

$$\gamma = \forall x \exists y \forall z \forall t\, ((Qtfaa \vee \rceil Qfzaz) \wedge (Pafxy \vee \rceil Pfaxgay))$$

(!) $\gamma$ nu este FNSkolem

$L_1, L_2, L_3, L_4 \in ATOM$

$k_i = \bigvee_{j=1}^{n_i} L_j$

formă prenex

$Q_i = \forall$ ⇓ $\beta$ FNC

formă normală Skolem

$\beta = \bigwedge_{i=1}^{n} k_i$

$\beta = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n_i} L_j$

$L_j \in ATOM \vee \rceil ATOM$, $j = 1..n_i$

$n_i$ = nr. literali din clauza $k_i$, $i = 1..n$

este o formă normală prenex având matricea formă normal conjunctivă; $\gamma$ nu este o formă normale Skolem.

Evident, dacă, $\alpha_1 = \forall x_1 ... \forall x_n \beta_1$, $\alpha_2 = \forall x_1 ... \forall x_n \beta_2$ sunt forme normale Skolem şi $S(\beta_1) = S(\beta_2)$, atunci $\alpha_1 \equiv \alpha_2$. Pe baza acestei observaţii, rezultă că o formă normală Skolem poate fi reprezentată prin mulţimea clauzelor corespunzătoare matricei formulei.

*Lema* 2.3.1 (Transformările de normalizare Skolem) $\alpha \rightsquigarrow \alpha_1$

Fie $\alpha = \boxed{Q_1 x_1} ... Q_n x_n \beta$ formă normală prenex.

Formula $\alpha$ este validabilă, dacă şi numai dacă $\alpha_1$ este validabilă, unde

$$\alpha_1 = \begin{cases} Q_2 x_2 ... Q_n x_n \beta \{a \mid x_1\}, \text{ unde } a \in CS,\ \beta \rangle a \langle, \text{ dacă } Q_1 = \exists \\ \forall x_1 ... \forall x_i Q_{i+2} x_{i+2} .... Q_n x_n \beta \{f x_1 ... x_i \mid x_{i+1}\}, \\ \qquad \text{unde } f \in FS, r(F) = i,\ \beta \rangle f \langle, \\ \qquad \text{dacă } Q_j = \forall, 1 \leqslant j \leqslant i \text{ şi } Q_{i+1} = \exists \end{cases}$$

$\exists x_{i+1}$

*Demonstraţie* Presupunem că $\alpha$ este validabilă şi $M = (D, I)$ o $L$-structură model pentru $\alpha$, deci pentru orice valuaţie $s \in [V \to D]$, $\alpha^I(s) = T$.

$\iota$) Dacă $\alpha = \exists x_1 Q_2 x_2 ... Q_n x_n \beta$, atunci $\alpha_1 = Q_2 x_2 ... Q_n x_n \beta \{a \mid x_1\}$, unde $a \in CS$, $\beta \rangle a \langle$.

Din $\alpha^I(s) = T$ rezultă că există $c \in D$, astfel încât

$$(Q_2 x_2 ... Q_n x_n \beta)^I (s[x_1 := c]) = T.$$

Fie $L$-structura $M' = (D, I')$ unde $I'_{FS} = I_{FS}$, $I'_{PS} = I_{PS}$, şi
$I'_{CS}(b) = \begin{cases} I_{CS}(b), & b \neq a \\ c, & b = a \end{cases}$ ; $b \in CS$.
Deoarece $\beta \rangle a \langle$, rezultă

$$(Q_2 x_2 ... Q_n x_n \beta)^{I'} (s) = (Q_2 x_2 ... Q_n x_n \beta)^I (s)$$

pentru orice valuaţie $s \in [V \to D]$.

Utilizând rezultatul stabilit de *Lema* 2.2.1,

$$(Q_2 x_2 ... Q_n x_n \beta \{a \mid x_1\})^{I'} (s) = (Q_2 x_2 ... Q_n x_n \beta)^{I'} (s \cdot \{a \mid x_1\}).$$

Obţinem astfel,

$$\begin{aligned} (Q_2 x_2 ... Q_n x_n \beta \{a \mid x_1\})^{I'} (s) &= (Q_2 x_2 ... Q_n x_n \beta)^I \left(s\left[x_1 := a^{I'}\right]\right) = \\ &= (Q_2 x_2 ... Q_n x_n \beta)^I (s[x_1 := c]) = T, \end{aligned}$$

deci $\alpha_1$ este validabilă.

$\iota\iota$) Dacă $\alpha = \forall x_1 ... \forall x_i \exists x_{i+1} Q_{i+2} x_{i+2} .... Q_n x_n \beta$, atunci

$$\alpha_1 = \forall x_1 ... \forall x_i Q_{i+2} x_{i+2} .... Q_n x_n \beta \left\{ f x_1 ... x_i \mid x_{i+1} \right\},$$

unde $f \in FS, r(F) = i$, $\beta \rangle f \langle$ .

Din $\alpha^I(s) = T$ rezultă că pentru orice $a_1 \in D$,

$$(\forall x_2 ... \forall x_i \exists x_{i+1} Q_{i+2} x_{i+2} .... Q_n x_n \beta)^I (s[x_1 := a_1]) = T.$$

Iterând acest argument, rezultă că pentru orice $a_1, ..., a_i \in D$,

$$(\exists x_{i+1} Q_{i+2} x_{i+2} .... Q_n x_n \beta)^I (s[x_1 := a_1, ..., x_i := a_i]) = T$$

deci există $a_{i+1} \in D$, astfel încât

$$(Q_{i+2} x_{i+2} .... Q_n x_n \beta)^I (s[x_1 := a_1, ..., x_i := a_i, x_{i+1} := a_{i+1}]) = T.$$

Fie $L$-structura $M' = (D, I')$ unde $I'_{CS} = I_{CS}$, $I'_{PS} = I_{PS}$, şi
$I'_{FS}(g) = \begin{cases} I_{FS}(g), & g \neq f \\ f^{I'}, & g = f \end{cases}$ ;

funcţia $f^{I'} : D^{r(f)} \to D$ fiind definită pentru orice $a_1, ..., a_i \in D$, prin $f^{I'}(a_1, ..., a_i) = a_{i+1}$, unde

$$(Q_{i+2} x_{i+2} .... Q_n x_n \beta)^I (s[x_1 := a_1, ..., x_i := a_i, x_{i+1} := a_{i+1}]) = T.$$

Deoarece $\beta \rangle f \langle$, rezultă

$$(Q_{i+2} x_{i+2} ... Q_n x_n \beta)^{I'} (s) = (Q_{i+2} x_{i+2} ... Q_n x_n \beta)^I (s)$$

pentru orice valuaţie $s \in [V \to D]$.

Utilizând rezultatul stabilit de *Lema* 2.2.1,

$$\begin{aligned} &(Q_{i+2} x_{i+2} .... Q_n x_n \beta \{ f x_1 ... x_i \mid x_{i+1} \})^{I'} (s) = \\ &= (Q_{i+2} x_{i+2} .... Q_n x_n \beta)^{I'} \left( s \left[ x_{i+1} := (f x_1 ... x_i)^{I'} (s) \right] \right) = \\ &= (Q_{i+2} x_{i+2} ... Q_n x_n \beta)^I \left( s \left[ x_{i+1} := f^{I'} (s(x_1), ..., s(x_i)) \right] \right) \end{aligned}$$

Obţinem că pentru orice $a_1, ..., a_i \in D$ ,

$$\begin{aligned} &(Q_{i+2} x_{i+2} .... Q_n x_n \beta)^I \left( s \left[ \begin{array}{c} x_1 := a_1, ..., x_i := a_i, \\ x_{i+1} := f^{I'} (a_1, ..., a_i) \end{array} \right] \right) = \\ &= (Q_{i+2} x_{i+2} .... Q_n x_n \beta)^I (s[x_1 := a_1, ..., x_i := a_i, x_{i+1} := a_{i+1}]) = T. \end{aligned}$$

Evident,

$$\begin{aligned} & s\left[x_1 := a_1, ..., x_i := a_i, x_{i+1} := f^{I'}(a_1, ..., a_i)\right] = \\ & = s\left[x_{i+1} := f^{I'}(s(x_1), ..., s(x_i))\right][x_1 := a_1] ... [x_i := a_i], \end{aligned}$$

deci pentru orice $a_1, ..., a_i \in D$,

$$(Q_{i+2}x_{i+2}....Q_n x_n \beta)^I \left( s \left[ \begin{array}{c} x_1 := a_1, ..., x_i := a_i, \\ x_{i+1} := f^{I'}(a_1, ..., a_i) \end{array} \right] \right) =$$

$$= (Q_{i+2}x_{i+2}....Q_n x_n \beta)^{I'} \left( \begin{array}{c} s\left[x_{i+1} := f^{I'}(s(x_1), ..., s(x_i))\right] \\ [x_1 := a_1, ..., x_i := a_i] \end{array} \right) =$$

$$= (Q_{i+2}x_{i+2}....Q_n x_n \beta)^{I'} \left( \begin{array}{c} s\left[x_{i+1} := f^{I'}(s(x_1), ..., s(x_i))\right] \\ [x_1 := a_1] ... [x_i := a_i] \end{array} \right) =$$

$$= (Q_{i+2}x_{i+2}....Q_n x_n \beta)^{I'} \left( \begin{array}{c} s\left[x_{i+1} := (fx_1...x_i)^{I'}(s)\right] \\ [x_1 := a_1] ... [x_i := a_i] \end{array} \right)$$

rezultă,

$$(\forall x_i Q_{i+2}x_{i+2}....Q_n x_n \beta)^{I'} \left( \begin{array}{c} s\left[x_{i+1} := (fx_1...x_i)^{I'}(s)\right] \\ [x_1 := a_1] ... [x_{i-1} := a_{i-1}] \end{array} \right) = T.$$

Iterând acelaşi argument, obţinem în continuare

$$(\forall x_{i-1} \forall x_i Q_{i+2}x_{i+2}....Q_n x_n \beta)^{I'} \left( \begin{array}{c} s\left[x_{i+1} := (fx_1...x_i)^{I'}(s)\right] \\ [x_1 := a_1] ... [x_{i-2} := a_{i-2}] \end{array} \right) = T,$$

deci

$$(\forall x_1 ... \forall x_i Q_{i+2}x_{i+2}....Q_n x_n \beta)^{I'} \left( s\left[x_{i+1} := (fx_1...x_i)^{I'}(s)\right] \right) = T.$$

Deoarece,

$$\begin{aligned} & (\forall x_1 ... \forall x_i Q_{i+2}x_{i+2}....Q_n x_n \beta \{fx_1...x_i \mid x_{i+1}\})^{I'}(s) = \\ & = (\forall x_1 ... \forall x_i Q_{i+2}x_{i+2}....Q_n x_n \beta)^{I'} \left( s\left[x_{i+1} := (fx_1...x_i)^{I'}(s)\right] \right), \end{aligned}$$

obţinem în final $(\alpha_1)^{I'}(s) = T$, deci $\alpha_1$ este validabilă.

*Teorema* 2.3.2 Pentru orice $\alpha \in FORM_0$, există $\overline{\alpha}$ formă normală Skolem, astfel încât $\alpha$ este validabilă, dacă şi numai dacă $\overline{\alpha}$ este validabilă.

*Demonstraţie* Fie $\alpha_0 = Q_1x_1...Q_nx_n\beta$ formă normală prenex, astfel încât $\alpha \equiv \alpha_0$. Presupunem că $\{i_1, ..., i_k\}$ sunt indicii din $\{1, 2, ..., n\}$ pentru care

$Q_{i_j} = \forall$, $j = 1, ..., k$. Prin aplicarea transformărilor din *Lema* 2.3.1, se elimină secvenţial, în ordinea de la stânga la dreapta, cuantificările existenţiale.

Rezultă $\alpha_1 = \forall x_{i_1} ... \forall x_{i_k} \beta_1$ şi $\alpha_0$ este validabilă dacă şi numai dacă $\alpha_1$ este validabilă. În continuare, subformulele matricei $\beta_1$ de tipul $(\beta \vee (\gamma \wedge \delta))$ se substituie prin $((\beta \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \delta))$, respectiv subformulele de tipul $((\gamma \wedge \delta) \vee \beta)$ se substituie prin $((\gamma \vee \beta) \wedge (\delta \vee \beta))$.

Deoarece pentru orice $\beta, \gamma, \delta \in FORM$,

$$(\beta \vee (\gamma \wedge \delta)) \equiv ((\beta \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \delta))$$

şi

$$((\gamma \wedge \delta) \vee \beta) \equiv ((\gamma \vee \beta) \wedge (\delta \vee \beta)),$$

rezultă că $\overline{\beta}$ este formă normal conjunctivă şi $\overline{\beta} \equiv \beta_1$.

Evident $\overline{\alpha} = \forall x_{i_1} ... \forall x_{i_k} \overline{\beta}$ este o formă normală Skolem şi $\alpha_1 \equiv \overline{\alpha}$, deci $\alpha$ este validabilă, dacă şi numai dacă $\overline{\alpha}$ este validabilă.

*Definiţia* 2.3.5 Fie $\alpha \in FORM_0$ şi $\overline{\alpha} = \forall x_1 ... \forall x_n \beta$ formă normală Skolem, astfel încât $\alpha$ este validabilă, dacă şi numai dacă $\overline{\alpha}$ este validabilă.

Dacă $\beta = \bigwedge_{i=1}^{n} k_i$ atunci $S(\alpha) = \{k_1, ..., k_n\}$ este o reprezentare clauzală pentru $\alpha$.

Clauzele unei reprezentări clauzale sunt subînţelese formule închise cu toate variabilele cuantificate universal, deci $M = (D, I)$ este model pentru $\overline{\alpha}$, dacă şi numai dacă pentru orice $a_1, ..., a_n \in D$,

$$\beta^I (s[x_1 := a_1, ..., x_n := a_n]) = T,$$

deci dacă şi numai dacă pentru orice $a_1, ..., a_n \in D$,

$$k_i^I (s[x_1 := a_1, ..., x_n := a_n]) = T, \qquad i = \overline{1, n},$$

unde $s$ este o valuaţie oarecare. În continuare, orice clauză va fi considerată ca formulă închisă cu toate variabilele cuantificate universal.

*Exemplul* 2.3.4 : Fie $P \in PS$, $r(P) = 2$, $a, b \in CS$,

$$\alpha = (\exists x \forall y Pxy \to \forall y \exists x (Pxy \wedge Pab)).$$

Evident $\alpha \in FORM_0$.

Utilizând rezultatele stabilite de *Teoremele* 2.3.1, 2.3.2, obţinem o formă normală Skolem $\overline{\alpha}$, astfel încât $\alpha$ este validabilă, dacă şi numai dacă $\overline{\alpha}$ este validabilă, în modul următor:

1. Renotăm variabilele, astfel încât să nu existe cuantificări multiple asupra aceleiaşi variabile:

$$\alpha_1 = (\exists x \forall y Pxy \to \forall w \exists z (Pzw \wedge Pab)).$$

2. Se elimină conectiva " $\rightarrow$ " :

$$\alpha_2 = ((\neg\exists x \forall y Pxy) \vee \forall w \exists z\,(Pzw \wedge Pab))\,;\ \alpha_1 \equiv \alpha_2.$$

3. Se aduc negaţiile în faţa literalilor:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= ((\forall x \neg \forall y Pxy) \vee \forall w \exists z\,(Pzw \wedge Pab))\,; \\ \alpha_4 &= ((\forall x \exists y \neg Pxy) \vee \forall w \exists z\,(Pzw \wedge Pab))\,; \\ \alpha_2 &\equiv \alpha_3 \equiv \alpha_4. \end{aligned}$$

4. Se aduc cuantificările în prefixul formulei:

$$\alpha_5 = \forall x \exists y \forall w \exists z\,((\neg Pxy) \vee (Pzw \wedge Pab))\,;\ \alpha_4 \equiv \alpha_5.$$

5. Se elimină cuantificarea universală $\exists y$ : fie $f \in FS$, $r(f) = 1$,

$$\begin{aligned} \alpha_6 &= \forall x \forall w \exists z\,((\neg Pxy) \vee Pzw)\,\{fx \mid y\} = \\ &= \forall x \forall w \exists z\,((\neg Pxfx) \vee (Pzw \wedge Pab))\,; \end{aligned}$$

$\alpha_6$ este validabilă dacă şi numai dacă $\alpha_5$ este validabilă.

6. Se elimină cuantificarea universală $\exists z$ : fie $g \in FS$, $r(g) = 2$,

$$\alpha_7 = \alpha_6\,\{gxw \mid z\} = \forall x \forall w\,((\neg Pxfx) \vee (Pgxww \wedge Pab))$$

este formă normală prenex; $\alpha_7$ este validabilă dacă şi numai dacă $\alpha_6$ este validabilă.

7. Normalizarea $CNF$ a matricei $\beta = ((\neg Pxfx) \vee (Pgxww \wedge Pab))\,;$ subformula $((\neg Pxfx) \vee (Pgxww \wedge Pab))$ se substituie cu

$$(((\neg Pxfx) \vee Pgxww) \wedge ((\neg Pxfx) \vee Pab)) = \overline{\beta};\ \beta \equiv \overline{\beta}.$$

Fie

$$\overline{\alpha} = \forall x \forall w \overline{\beta} = \forall x \forall w\,(((\neg Pxfx) \vee Pgxww) \wedge ((\neg Pxfx) \vee Pab))$$

deci $\overline{\alpha}$ este validabilă, dacă şi numai dacă $\alpha_7$ este validabilă.

Rezultă $\overline{\alpha}$ este validabilă dacă şi numai dacă $\alpha$ este validabilă. Mulţimea $S(\alpha) = \{((\neg Pxfx) \vee Pgxww)\,, ((\neg Pxfx) \vee Pab)\}$ este o reprezentare clauzală pentru $\alpha$.

*Exemplul* 2.3.5 : Fie aserţiunile:

$A_1$ : Ion este admirat de oricine care admiră pe cineva.

$A_2$ : Nu există persoană care să nu admire pe nimeni.

$A_3$ : Ion este admirat de toată lumea.

Vrem să decidem dacă aserţiunea $A_3$ este consecinţă logică a aserţiunilor $A_1$ şi $A_2$.

Considerăm limbajul de primul ordin : $CS = \{i\}$ , $FS = \emptyset$,

$PS = \{A\}$ , $r(A) = 2$.

Semnificaţia intenţionată pentru construcţia $Axy$ este "$x$ admiră pe $y$", respectiv constanta $i$ desemnează persoana "Ion".

Reprezentările aserţiunilor $A_1$, $A_2$, $A_3$ prin intermediul formalismului acestui limbaj sunt,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \forall x (\exists y Axy \rightarrow Axi)\\ \alpha_2 &= (\neg \exists x \forall y (\neg Axy))\\ \alpha_3 &= \forall x Axi\end{aligned}$$

deci problema revine la a verifica dacă $\{\alpha_1, \alpha_2\} \models \alpha_3$.

Fie $M = (D, I)$ o $L$-structură model pentru $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ deci pentru orice valuaţie $s \in [V \rightarrow D]$, $\alpha_i^I(s) = T$, $i = 1, 2$.

Din $\alpha_1^I(s) = T$ rezultă că pentru orice $a \in D$,

$$(\exists y Axy \rightarrow Axi)^I (s[x := a]) = T.$$

Deoarece

$$\begin{aligned}&(\exists y Axy \rightarrow Axi)^I (s[x := a]) =\\ &= (\exists y Axy)^I (s[x := a]) \rightarrow (Axi)^I (s[x := a])\end{aligned}$$

obţinem $(\exists y Axy)^I (s[x := a]) = F$ sau $(Axi)^I (s[x := a]) = T$ adică pentru orice $b \in D$,

$$(Axy)^I (s[x := a, y := b]) = F \quad \text{sau} \quad (Axi)^I (s[x := a]) = T.$$

În concluzie, pentru orice $a \in D$, sau $A^I(a, i^I) = T$ sau pentru orice $b \in D$, $A^I(a, b) = F$.

Din $\alpha_2^I(s) = T$ rezultă $(\exists x \forall y (\neg Axy))^I (s) = F$ deci pentru orice $a \in D$, $(\forall y (\neg Axy))^I (s[x := a]) = F$. Obţinem în continuare, că există $b \in D$, astfel încât $((\neg Axy))^I (s[x := a, y := b]) = F$ , deci $A^I(a, b) = T$.

În concluzie, din $\alpha_2^I(s) = T$ rezultă că pentru orice $a \in D$, există $c \in D$ astfel încât $A^I(a, c) = T$.

Fie $a \in D$ arbitrar.

Dacă $A^I(a, i^I) = F$ atunci se ajunge la o contradicţie deoarece ar rezulta pe de o parte că pentru orice $b \in D$, $A^I(a, b) = F$ şi de asemenea că există $c \in D$ astfel încât $A^I(a, c) = T$. Obtinem că pentru orice $a \in D$,

$A^I\left(a, i^I\right) = T$ adică pentru orice $a \in D$, $(Axi)^I(s[x := a]) = T$, ceea ce implică $(\forall x Axi)^I(s) = T$. În concluzie, $\{\alpha_1, \alpha_2\} \models \alpha_3$.

*Exemplul* 2.3.6 : Fie $P, C, L, T, M, V, R, S$ simboluri predicaţionale de aritate 1, $a \in CS$ ; $H = \{\alpha_1, ..., \alpha_7\}$, $\alpha = Ra$,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \forall x (Px \to Cx), \ \alpha_2 = (\neg \exists x (Lx \wedge (\neg Tx))), \ \alpha_3 = Mx, \\
\alpha_4 &= \forall x (Vx \to Rx), \ \alpha_5 = \forall x ((\neg Px) \to (\neg Tx)), \\
\alpha_6 &= \forall x ((\neg Vx) \to (\neg Cx)), \ \alpha_7 = \forall x ((\neg Lx) \to (\neg Mx))
\end{aligned}$$

Din *Lema* 2.2.4, $H \models \alpha$ dacă şi numai dacă $M(H \cup \{(\neg \alpha)\}) = \emptyset$. Evident, $H \cup \{\alpha\} \subset FORM_0$.

Deoarece $M(H \cup \{(\neg \alpha)\}) = M\left(\left(\bigwedge_{i=1}^{7} \alpha_i \wedge (\neg \alpha)\right)\right)$ obţinem că $H \models \alpha$ dacă şi numai dacă $\gamma$ este invalidabilă, unde

$$\gamma = \left(\bigwedge_{i=1}^{7} \alpha_i \wedge (\neg \alpha)\right) \in FORM_0.$$

Deoarece $\gamma = \left(\bigwedge_{i=1}^{7} \alpha_i \wedge (\neg \alpha)\right) \in FORM_0$, orice $L$-structură este sau model pentru $\gamma$ sau falsifică $\gamma$.

Demonstrăm că pentru orice $L$-structură $M = (D, I)$, $\gamma^I(s) = F$.

Fie $M = (D, I)$ o $L$-structură şi $s \in [V \to D]$ o asociere astfel încât $s(x) = a^I$.

Concluzia dorită rezultă dacă demonstrăm că există o $S\left(\gamma^I(s)\right)$-respingere rezolutivă, unde $S\left(\gamma^I(s)\right)$ este o reprezentare clauzală pentru $\gamma^I(s)$.

Calculul reprezentării clauzale $S\left(\gamma^I(s)\right)$ :

$$\beta_1 = \alpha_1^I(s) = P^I(s(x)) \to C^I((x)) \equiv \neg P^I(a) \vee C^I(a)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= (\neg \exists x (Lx \wedge (\neg Tx))) \equiv \forall x ((\neg Lx) \vee (\neg (\neg Tx))) \equiv \\
&\equiv \forall x ((\neg Lx) \vee Tx)
\end{aligned}$$

deci

$\beta_2 = \alpha_2^I(s) = \left(\left(\neg L^I(s(x))\right) \vee T^I(s(x))\right) = \neg L^I(a) \vee T^I(a)$
$\beta_3 = \alpha_3^I(s) = M^I(s(x)) = M^I(a)$
$\beta_4 = \alpha_4^I(s) = V^I(s(x)) \to R^I(s(x)) \equiv \neg V^I(a) \vee R^I(a)$
$\beta_5 = \alpha_5^I(s) = \neg P^I(s(x)) \to \neg T^I(s(x)) \equiv$
$\neg\neg P^I(a) \vee \neg T^I(a) \equiv P^I(a) \vee \neg T^I(a)$
$\beta_6 = \alpha_6^I(s) = \neg V^I(s(x)) \to \neg C^I(s(x)) \equiv \neg\neg V^I(a) \vee \neg C^I(a) \equiv$

$V^I(a) \vee \urcorner C^I(a)$
$\beta_7 = \alpha_7^I(s) = \urcorner L^I(s(x)) \to \urcorner M^I(s(x)) \equiv \urcorner\urcorner L^I(a) \vee \urcorner M^I(a) \equiv$
$L^I(a) \vee \urcorner M^I(a)$
$\beta_8 = \urcorner \alpha^I(s) = \urcorner R^I(s(x)) = \urcorner R^I(a)$
Rezultă reprezentarea clauzală

$$S\left(\gamma^I(s)\right) = \{k_1, k_2, k_3, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8\}$$

unde
$k_1 = \urcorner P^I(a) \vee C^I(a)$
$k_2 = \urcorner L^I(a) \vee T^I(a)$
$k_3 = M^I(a)$
$k_4 = \urcorner V^I(a) \vee R^I(a)$
$k_5 = P^I(a) \vee \urcorner T^I(a)$
$k_6 = V^I(a) \vee \urcorner C^I(a)$
$k_7 = L^I(a) \vee \urcorner M^I(a)$
$k_8 = \urcorner R^I(a)$
Evident, secvenţa de clauze $k_1, k_2, ..., k_{14}, k_{15}$ este o $S\left(\gamma^I(s)\right)$-respingere rezolutivă, deci $S\left(\gamma^I(s)\right)$este invalidabilă.
$k_9 = rez_{R^I(a)}(k_4, k_8) = \urcorner V^I(a)$
$k_{10} = rez_{V^I(a)}(k_6, k_9) = \urcorner C^I(a)$
$k_{11} = rez_{C^I(a)}(k_1, k_{10}) = \urcorner P^I(a)$
$k_{12} = rez_{P^I(a)}(k_{11}, k_5) = \urcorner T^I(a)$
$k_{13} = rez_{T^I(a)}(k_{12}, k_2) = \urcorner L^I(a)$
$k_{14} = rez_{L^I(a)}(k_{13}, k_7) = \urcorner M^I(a)$
$k_{15} = rez_{M^I(a)}(k_{14}, k_3) = \square$
Pe baza argumentelor precedente rezultă $\gamma$ invalidabilă, deci $H \models \alpha$ .

Generarea $S\left(\gamma^I(s)\right)$-respingerii rezolutive $k_1, k_2, ..., k_{14}, k_{15}$ s-a bazat pe aplicarea sistematică a următoarei reguli de alegere a perechilor de clauze rezolubile.

La fiecare moment, este menţinută o clauză activă şi se caută în mulţimea clauzelor deja generate o clauză rezolubilă cu clauza activă. Dacă rezolventa perechii de clauze selectate nu este clauza vidă, atunci procesul continuă şi rezolventa generată devine clauză activă la pasul următor. Dacă rezolventa perechii de clauze selectate la pasul curent este clauza vidă atunci secvenţa de clauze generate la momentele precedente este o respingere rezolutivă a mulţimii iniţiale de clauze şi calculul se încheie. La momentul iniţial clauza activă este una din clauzele provenind din reprezentarea clauzală corespunzătoare formulei $(\urcorner\alpha)$, clauzele deja generate fiind clauzele provenind din reprezentarea clauzală a formulei $\left(\bigwedge_{\gamma\in H} \gamma\right)$.

În exemplul considerat, clauza activă la momentul iniţial este $k_8$ deoarece reprezentarea clauzală corespunzătoare formulei $(\urcorner\alpha)$ este $\{k_8\}$.

Clauza $k_4$ din mulţimea $S\left(\gamma^I(s)\right)\setminus\{k_8\}$ şi $k_8$ sunt $R^I(a)$-rezolubile şi rezolventa

$k_9 = rez_{R^I(a)}(k_4, k_8) = \urcorner V^I(a)$

devine clauză activă la pasul următor.

Construcţia $S\left(\gamma^I(s)\right)$-respingerii rezolutive poate fi reprezentată grafic în modul următor:

$$\begin{array}{ccc}
k_8 & & k_4 \\
\downarrow & \swarrow & \\
k_9 & & k_6 \\
\downarrow & \swarrow & \\
k_{10} & & k_1 \\
\downarrow & \swarrow & \\
k_{11} & & k_5 \\
\downarrow & \swarrow & \\
k_{12} & & k_2 \\
\downarrow & \swarrow & \\
k_{13} & & k_7 \\
\downarrow & \swarrow & \\
k_{14} & & k_3 \\
\downarrow & \swarrow & \\
\square & &
\end{array}$$

# 3 Modele Herbrand pentru limbajele de primul ordin

Dată fiind complexitatea structurilor, termeni şi formule, într-un limbaj de primul ordin, problema verificării validabilităţii/invalidabilităţii unei formule sau a unei mulţimi de fomule devine extrem de complexă.

În cadrul acestei secţiuni vom demonstra că pentru mulţimi finite de clauze, această problemă se simplifică considerabil, în sensul că există o clasă de interpretări canon

ice cu structură simplă şi intrinsec determinate de mulţimea de clauze considerată, astfel încât mulţimea de clauze este validabilă dacă şi numai dacă are un model în această clasă. În particular va rezulta că orice program definit admite un cel mai mic model, din punct de vedere intuitiv modelul minimal reflectând în exclusivitate informaţia exprimată prin intermediul clauzelor programului. Reamintim că deşi în scrierea clauzelor cuantificările nu sunt explicit menţionate, clauzele sunt formule închise, toate variabilele cu ocurenţe în clauze fiind cuantificate universal.

*Definiţia* 2.4.1 Fie $L$ un limbaj de primul ordin.

Definim şirul de mulţimi $(H_n)_{n\in N}$ prin

$$\begin{aligned} H_0 &= CS, \\ H_n &= H_{n-1} \cup \left\{ ft_1...t_{r(f)} \,\middle|\, f \in FS,\ t_1,...,t_{r(f)} \in H_{n-1} \right\},\ n \geqslant 2 \end{aligned}$$

Evident, pentru orice $n \geqslant 0$, $H_n \subset TERM$ şi structurile simbolice din $H_n$ nu conţin simboluri din mulţimea $V$. Elementele mulţimii $H_n$ se numesc constante Herbrand de nivel $n$. În general atributul "de bază" este asociat structurilor simbolice în care nu există simboluri desemnând variabile.

Mulţimea $H_\infty = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H_n \subset TERM$ este universul Herbrand al limbajului $L$. Baza Herbrand a limbajului $L$ este submulţimea atomilor de bază

$$\mathcal{B}_H = \left\{ Pt_1...t_{r(P)} \,\middle|\, P \in P(S),\ t_1,...,t_{r(P)} \in H_{n-1} \right\}.$$

Elementele mulţimii $\mathcal{B}_H$ se numesc atomi Herbrand.

Evident, dacă $\alpha \in ATOM$ şi $FV(\alpha) = \{x_1,...,x_n\}$, atunci pentru orice $t_1,...,t_n \in H_\infty(S)$, $\alpha\{t_1 \mid x_1,...,t_n \mid x_n\}$ este un atom de bază.

Elementele mulţimii $\mathcal{B}_H \cup \urcorner\mathcal{B}_H$ se numesc literali Herbrand.

*Definiţia* 2.4.2 $L$-structura $M = (H_\infty(S), I^*)$ este $H$-interpretare (interpretare Herbrand), dacă îndeplineşte următoarele condiţii:

$\iota$) pentru orice $a \in CS$, $I^*_{CS}(a) = a^{I^*} = a$

$\iota\iota$) pentru orice $f \in FS$, $I^*_{FS}(f) = f^{I^*} : H_\infty^{r(f)} \to H_\infty(S)$,
astfel încât pentru orice $t_1,...,t_{r(f)} \in H_\infty$, $f^{I^*}\left(t_1,...,t_{r(f)}\right) = ft_1,...,t_{r(f)}$.

*Definiţia* 2.4.3 . $H$-interpretarea $M = (H_\infty, I^*)$ este model Herbrand ($H$-model) pentru mulţimea de formule inchise $S$ dacă pentru orice $\alpha \in S$, şi orice valuaţie $s \in [V \to H_\infty]$, $\alpha^{I^*}(s) = T$.

Mulţimea $H$-interpretărilor se corespunde cu mulţimea submulţimilor mulţimii $\mathcal{B}_H$ şi anume, $H$-interpretarea $(H_\infty, I^*)$ se identifică prin mulţimea literalilor Herbrand $\gamma \in \mathcal{B}_H(S)$ validaţi de $(H_\infty, I^*)$; $\gamma^{I^*} = T$.

Fie $M^* = (H_\infty, I^*)$ o $H$-interpretare oarecare. Deoarece $\mathcal{B}_H$ este o mulţime cel mult numărabilă, putem considera şirul elementelor din $\mathcal{B}_H$, fie acesta

$(A_n, n = 1, 2, ...)$.

Rezultă că $M^*$ se corespunde cu şirul $(B_n, n = 1, 2, ...)$, unde

$$B_n = \begin{cases} A_n, & \text{dacă } A_n^{I^*} = T \\ (\urcorner A_n), & \text{dacă } A_n^{I^*} = F \end{cases},\ n = 1, 2, ...$$

În mod frecvent, universul Herbrand şi baza Herbrand sunt definite relativ la o mulţime finită de formule. În aceste cazuri, în construcţiile mulţimilor

$H_\infty$ şi $\mathcal{B}_H$ intervin numai simbolurile non-logice, constante, simboluri functoriale şi simboluri predicaţionale, care au ocurenţe în formulele mulţimii considerate.

*Definiţia* 2.4.4 Fie $S$ mulţime finită de clauze;

$$\begin{aligned} C(S) &= \{a \,| a \in CS, \text{ există } k \in S, \; k\langle a \rangle\}, \\ F(S) &= \{f \,| f \in FS, \text{ există } k \in S, \; k\langle f \rangle\}, \\ P(S) &= \{P \,| P \in PS, \text{ există } k \in S, \; k\langle P \rangle\} \end{aligned}$$

Definim şirul de mulţimi $(H_n(S))_{n \in N}$ prin

$$\begin{aligned} &H_0(S) = \begin{cases} C(S), & \text{dacă } C(S) \neq \emptyset \\ \{a\}, & \text{dacă } C(S) = \emptyset, \; a \in CS \end{cases} \\ &H_n(S) = H_{n-1}(S) \cup \left\{ft_1...t_{r(f)} \,\middle|\, f \in F(S), \; t_1, ..., t_{r(f)} \in H_{n-1}\right\}, \\ &\hfill n \geqslant 2 \end{aligned}$$

Evident, pentru orice $n \geqslant 0$, $H_n(S) \subset TERM$ şi structurile simbolice din $H_n(S)$ nu conţin simboluri din mulţimea $V$. Elementele mulţimii $H_n(S)$ se numesc constante Herbrand de nivel $n$. În general atributul "de bază" este asociat structurilor simbolice în care nu există simboluri desemnând variabile.

Mulţimea $H_\infty(S) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H_n(S)$ este universul Herbrand al mulţimii de clauze $S$. Elementele mulţimii $H_\infty(S)$ se numesc constante Herbrand. Evident, orice constantă Herbrand este termen de bază dar nu şi reciproc.

De exemplu, dacă $t \in TERM$ şi $FV(t) = \{x_1, ..., x_n\}$, atunci pentru orice

$t_1, ..., t_n \in H_\infty(S)$, $t\{t_1 \mid x_1, ..., t_n \mid x_n\}$ este un termen de bază dar nu este în mod necesar constantă Herbrand.

De asemenea, dacă $k$ este o clauză/literal şi $FV(k) = \{x_1, ..., x_n\}$ atunci pentru orice $t_1, ..., t_n \in H_\infty(S)$,

$k\{t_1 \mid x_1, ..., t_n \mid x_n\}$ este o clauză / literal de bază.

*Definiţia* 2.4.5 Fie $S$ o mulţime finită de clauze;

$$P(S) = \{P \,| P \in PS, \text{ există } k \in S, \; k\langle P \rangle\}.$$

Baza Herbrand este

$$\mathcal{B}_H(S) = \left\{Pt_1...t_{r(P)} \,\middle|\, P \in P(S), \; t_1, ..., t_{r(P)} \in H_{n-1}\right\};$$

elementele mulţimii $\mathcal{B}_H(S)$ se numesc atomi Herbrand.

Evident, $\mathcal{B}_H(S) \subset ATOM$ şi orice atom Herbrand este un atom de bază. Dacă $\alpha \in ATOM$, $FV(\alpha) = \{x_1, ..., x_n\}$, atunci pentru orice

$t_1, ..., t_n \in H_\infty(S)$, $\alpha\{t_1 \mid x_1, ..., t_n \mid x_n\}$ este un atom de bază.

Elementele mulţimii $\mathcal{B}_H(S) \cup \neg\mathcal{B}_H(S)$ se numesc literali Herbrand.

*Exemplul* 2.4.1 Dacă $P \in PS$, $r(P) = 1$, $a \in CS$ şi $S = \{Px, Pa\}$, atunci $H_0(S) = C(S) = \{a\}$, $F(S) = \emptyset$, $P(S) = \{P\}$,

deci $H_\infty(S) = \{a\}$, $\mathcal{B}_H(S) = \{Pa\}$.

*Exemplul* 2.4.2 Fie $S = \{Px, Qfx\}$ unde $P, Q \in PS$,

$r(P) = r(Q) = 1$, $f \in FS$, $r(f) = 1$.

Deoarece $C(S) = \emptyset$, obţinem $H_0(S) = \{a\}$ unde $a$ este un simbol constantă, $H_1(S) = \{fa\}$.

Evident, $H_n(S) = \left\{f^k a \mid 0 \leqslant k \leqslant n\right\}$ unde $f^0 a \overset{not}{=} a$, $f^k a \overset{not}{=} ff^{k-1}a$, $k \geqslant 1$, deci

$H_\infty(S) = \left\{f^k a \mid k \geqslant 0\right\}$ şi $\mathcal{B}_H(S) = \left\{Pf^k a, Qf^k a \mid k \geqslant 1\right\} \cup \{Pa\}$.

*Definiţia* 2.4.6 Fie $S$ o mulţime finită de clauze.

$L$-structura $M = (H_\infty(S), I^*)$ este $H$-interpretare (interpretare Herbrand), dacă îndeplineşte următoarele condiţii:

$\iota$) pentru orice $a \in C(S)$, $I^*_{CS}(a) = a^{I^*} = a$

$\iota\iota$) pentru orice $f \in F(S)$, $I^*_{FS}(f) = f^{I^*} : H_\infty(S)^{r(f)} \to H_\infty(S)$, astfel încât pentru orice $t_1, ..., t_{r(f)} \in H_\infty(S)$,

$$f^{I^*}\left(t_1, ..., t_{r(f)}\right) = ft_1, ..., t_{r(f)}.$$

*Definiţia* 2.4.7 Fie $S$ mulţime finită de clauze. $H$-interpretarea

$M = (H_\infty(S), I^*)$ este model Herbrand ($H$-model) pentru $S$ dacă pentru orice $k \in S$, şi orice valuaţie $s \in [V \to H_\infty(S)]$, $k^{I^*}(s) = T$.

Mulţimea $H$-interpretărilor se corespunde cu mulţimea submulţimilor mulţimii $\mathcal{B}_H(S)$ şi anume, $H$-interpretarea $(H_\infty(S), I^*)$ se identifică prin mulţimea literalilor Herbrand $\gamma \in \mathcal{B}_H(S)$ validaţi de $(H_\infty(S), I^*)$; $\gamma^{I^*} = T$.

Fie $M^* = (H_\infty(S), I^*)$ o $H$-interpretare oarecare. Deoarece $\mathcal{B}_H(S)$ este o mulţime cel mult numărabilă, putem considera şirul elementelor din $\mathcal{B}_H(S)$, fie acesta $(A_n, n = 1, 2, ...)$.

Rezultă că $M^*$ se corespunde cu şirul $(B_n, n = 1, 2, ...)$, unde

$$B_n = \begin{cases} A_n, & \text{dacă } A_n^{I^*} = T \\ (\neg A_n), & \text{dacă } A_n^{I^*} = F \end{cases}, \ n = 1, 2, ...$$

*Definiţia* 2.4.8 Fie funcţia $\varphi : H_\infty(S) \to D$ definită prin,

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^I, & \text{dacă } t \in C(S) \\ f^I\left(\varphi(t_1), ..., \varphi\left(t_{r(f)}\right)\right) & \text{dacă } t = ft_1...t_{r(f)} \end{cases}$$

unde $M = (D, I)$ este o $L$-structură. Dacă $S$ este o mulţime finită de clauze, atunci clasa $H$-interpretărilor $M^* = (H_\infty(S), I^*)$ induse de $M$ este definită prin:

$I^*_{CS}(a) = a^{I^*} \in H_\infty(S)$ astfel încât pentru $a \in C(S)$, $a^{I^*} = a^I$;

$I^*_{FS}(f) = f^{I^*} : H_\infty^{r(f)}(S) \to H_\infty(S)$ cu restricţia ca dacă $f \in F(S)$ atunci pentru orice $t_1, ..., t_{r(f)} \in H_\infty(S)$,

$$f^{I^*}\left(t_1, ..., t_{r(f)}\right) = ft_1...t_{r(f)};$$

$I^*_{PS}(\pi) = \pi^{I^*} : H_\infty^{r(f)}(S) \to \{T, F\}$ cu condiţia ca dacă $\pi \in P(S)$ atunci pentru orice $t_1, ..., t_{r(\pi)} \in H_\infty(S)$,

$$\pi^{I^*}\left(t_1, ..., t_{r(f)}\right) = \pi^I\left(\varphi(t_1), ..., \varphi\left(t_{r(\pi)}\right)\right).$$

Evident, $H$-interpretările induse de $M$ coincid pe mulţimea $C(S) \cup F(S) \cup P(S)$ a simbolurilor non-logice care apar în clauzele din $S$.

*Lema* 2.4.1 Fie $L$-structură $M = (D, I)$, $S$ mulţime finită de clauze şi $M^* = (H_\infty(S), I^*)$ o $H$-interpretare indusă de $M$.

Pentru orice $t \in C(S) \cup V \cup TERM(F(S))$ şi pentru orice $s \in [V \to H_\infty(S)]$, $\varphi\left(t^{I^*}(s)\right) = t^I(\varphi(s))$, unde $\varphi : H_\infty(S) \to D$ este funcţia definită în *Definiţia* 2.4.5., $\varphi(s) \in [V \to D]$, astfel încât pentru orice $x \in V$, $\varphi(s)(x) = \varphi(s(x))$ şi $TERM(F(S))$ este mulţimea termenilor $t$ cu proprietatea că toate simbolurile functoriale care au ocurenţe în $t$ aparţin mulţimii $F(S)$.

*Demonstraţie* Fie $s \in [V \to H_\infty(S)]$ arbitrară.

$a$) Dacă $t \in C(S)$ atunci $\varphi\left(t^{I^*}(s)\right) = a^I = a^I(\varphi(s)) = t^I(\varphi(s))$.

$b$) Dacă $t \in V$ atunci $\varphi\left(t^{I^*}(s)\right) = \varphi(s(t)) = \varphi(s)(t) = t^I(\varphi(s))$.

$c$) Dacă $t = ft_1...t_{r(f)} \in TERM(F(S))$, unde $\varphi\left(t_i^{I^*}(s)\right) = t_i^I(\varphi(s))$, $i = \overline{1, r(f)}$ atunci

$$\begin{aligned}
\varphi\left(t^{I^*}(s)\right) &= \varphi\left(ft_1^{I^*}(s)...t_{r(f)}^{I^*}(s)\right) = \\
&= f^I\left(\varphi\left(t_1^{I^*}(s)\right), ..., \varphi\left(t_{r(f)}^{I^*}(s)\right)\right) = \\
&= f^I\left(t_1^I(\varphi(s)), ..., t_{r(f)}^I(\varphi(s))\right) = \\
&= \left(ft_1...t_{r(f)}\right)^I(\varphi(s)) = t^I(\varphi(s))
\end{aligned}$$

*Teorema* 2.4.1 O mulţime finită de clauze este validabilă dacă şi numai dacă admite un model Herbrand.

*Demonstraţie* Fie $S$ mulţime finită de clauze. Evident, dacă $S$ admite un model Herbrand atunci $S$ este validabilă. Presupunem că $S$ este validabilă şi fie $M = (D, I)$ model pentru $S$.

Fie $M^* = (H_\infty(S), I^*)$ o $H$-interpretare indusă de $M$. Demonstrăm că pentru orice $k \in S$ şi orice $s \in [V \to H_\infty(S)]$, $k^{I^*}(s) = k^I(\varphi(s))$. Fie $k \in S$, $k = \bigvee_{i=1}^{m} L_i$, $L_i \in ATOM \cup \urcorner ATOM$, deci $k^{I^*}(s) = \bigvee_{i=1}^{m} L_i^{I^*}(s)$.

Dacă $L_i \in ATOM$ atunci $L_i \in PS$ şi $r(L_i) = 0$ sau există $\pi \in PS$ şi $t_1, ..., t_{r(\pi)} \in TERM$ astfel încât $L_i = \pi t_1 ... t_{r(\pi)}$. Dacă $L_i \in PS$ şi $r(L_i) = 0$ atunci $L_i \in P(S)$ deci $L_i^{I^*}(s) = L_i^I = L_i^I(\varphi(s))$.

Deoarece $k \in S$, dacă $L_i = \pi t_1 ... t_{r(\pi)}$ atunci

$$t_1, ..., t_{r(\pi)} \in TERM(F(S))$$

şi $\pi \in P(S)$, utilizând rezultatul stabilit de *Lema* 2.4.1 rezultă

$$\varphi\left(t_i^{I^*}(s)\right) = t_i^I(\varphi(s)), i = \overline{1, r(\pi)}.$$

Obţinem astfel,

$$\begin{aligned} L_i^{I^*}(s) &= \left(\pi t_1 ... t_{r(\pi)}\right)^{I^*}(s) = \pi^{I^*}\left(t_1^{I^*}(s), ..., t_{r(\pi)}^{I^*}(s)\right) = \\ &= \pi^I\left(t_1^I(\varphi(s)), ..., t_{r(\pi)}^I(\varphi(s))\right) = (L_i)^I(\varphi(s)). \end{aligned}$$

Dacă $L_i \in \urcorner ATOM$ atunci $L_i = (\urcorner L)$, $L \in ATOM$. Evident,

$$\begin{aligned} L_i^{I^*}(s) &= (\urcorner L)^{I^*}(s) = \urcorner L^{I^*}(s) = \urcorner L^I(\varphi(s)) = \\ &= (\urcorner L)^I(\varphi(s)) = L_i^I(\varphi(s)). \end{aligned}$$

Deoarece $M = (D, I)$ este model pentru $S$, pentru orice $k \in S$, $k^I(\varphi(s)) = T$.

Din relaţiile $k^{I^*}(s) = \bigvee_{i=1}^{m} L_i^{I^*}(s) = \bigvee_{i=1}^{m} L_i^I(\varphi(s)) = k^I(\varphi(s))$ obţinem $k^{I^*}(s) = T$ deci $M^* = (H_\infty(S), I^*)$ este model Herbrand pentru $S$.

*Observaţie* Concluzia stabilită de *Teorema* 2.4.1 nu mai rămâne adevărată pentru mulţimi finite arbitrare de formule închise.

Într-adevăr, fie $A = \{(\pi a \wedge \exists x(\urcorner \pi x))\}$, $\pi \in PS$, $r(\pi) = 1$, $a \in CS$.

Fie $L$-structura $M = (D, I)$, $D = \{0, 1\}$, astfel încât $a^I = 0$, $\pi^I(0) = T$, $\pi^I(1) = F$.

Deoarece

$$(\urcorner \pi x)^I(s[x := 1]) = \urcorner(\pi x)^I(s[x := 1]) = \urcorner \pi^I(s[x := 1]) = T$$

rezultă $(\exists x(\urcorner \pi x))^I(s) = T$.

Obţinem astfel că pentru orice $s \in [V \to \{0, 1\}]$,

$$\begin{aligned} (\pi a \wedge \exists x(\urcorner \pi x))^I(s) &= \pi^I\left(a^I\right) \wedge (\exists x(\urcorner \pi x))^I(s) = \\ &= T \wedge (\exists x(\urcorner \pi x))^I(s) = (\exists x(\urcorner \pi x))^I(s) = T \end{aligned}$$

deci $M$ este model pentru $S$.

Pe de altă parte, $\alpha = (\pi a \wedge \exists x (\urcorner \pi x)) \equiv \exists x (\pi a \wedge (\urcorner \pi x))$ deci $\overline{\alpha} = (\pi a \wedge (\urcorner \pi b))$ este o formă normală Skolem pentru $\alpha$, ceea ce implică $S(\alpha) = \{\pi a, (\urcorner \pi b)\}$, unde $b \in CS$, $b \neq a$.

Deoarece $H_\infty (S) = \{a, b\}$ şi $\mathcal{B}_H (S) = \{\pi a, \pi b\}$, rezultă că nu există $H$-modele pentru $S$.

*Definiţia* 2.4.9 Fie $S$ mulţime finită de clauze, $\{x_1, ..., x_n\}$ variabilele care apar în clauzele din $S$. Substituţia $\theta = \{t_1 \mid x_1, ..., t_n \mid x_n\}$ este substituţie de bază pentru $S$ dacă $t_i \in H_\infty (S)$, $i = \overline{1, n}$.

Evident dacă $\theta = \{t_1 \mid x_1, ..., t_n \mid x_n\}$ este substituţie de bază pentru $S = \{k_1, ..., k_m\}$, atunci $k_i\theta$, $i = \overline{1, n}$ sunt clauze de bază.

Clauzele $k_i\theta$, $i = \overline{1, n}$ se numesc instanţieri de bază pentru clauzele din $S$.

Din *Teorema* 2.4.1, rezultă că mulţimea de clauze $S$ este invalidabilă dacă şi numai dacă orice $H$-interpretare falsifică cel puţin o clauză din $S$. Explorarea sistematică a spaţiului tuturor $H$-interpretărilor poate fi efectuată în mai multe moduri, unul dintre acestea este metoda bazată pe arbori semantici propusă de Robinson 1968, Kowalski 1969, şi Hayes 1969. Ideea se bazează pe observaţia că orice $H$-interpretare se corespunde cu submulţimea mulţimii $\mathcal{B}_H (S)$ a atomilor Herbrand validaţi de interpretarea respectivă, metoda revenind la extinderea incrementală a $H$-interpretărilor parţial generate. Deoarece clauzele din $S$ sunt formule închise cu toate variabilele cuantificate universal, extinderea unei $H$-interpretări parţial generate este evident inutilă dacă ea falsifică cel puţin o clauză din $S$.

*Definiţia* 2.4.10 Fie $S$ mulţime finită de clauze. Arborele $T$, binar, direcţionat, cu rădăcină şi muchiile etichetate cu literali din $\mathcal{B}_H (S) \cup \urcorner \mathcal{B}_H (S)$ este $H$-arbore semantic pentru $S$, dacă îndeplineşte următoarele condiţii:

$\iota$) muchiile divergente din orice vârf au etichete perechi de literali complementari,

$\iota\iota$) pentru orice vârf $n$, nu există duplicate ale literalilor şi nici literali complementari în $I(n)$, unde $I(n)$ este mulţimea etichetelor muchiilor componente ale drumului de la rădăcină la $n$.

*Observaţie* Dacă $H_\infty (S)$ este mulţime infinită, atunci un $H$-arbore semantic pentru $S$ poate eventual să conţină un număr infinit de vârfuri.

Pentru orice vârf $n$ al unui arbore semantic, $I(n)$ este o $H$-interpretare parţială. Dacă $I(n)$ falsifică o clauză $k \in S$, atunci pentru orice $H$-interpretare $(H_\infty (S), I^*)$ care corespunde unei mulţimi de literali $A$ cu $I(n) \subset A$ , obţinem $k^{I^*} = F$, deci $(H_\infty (S), I^*)$ nu este model Herbrand pentru $S$.

*Definiţia* 2.4.11 Fie $S$ mulţime finită de clauze, $T$ un $H$-arbore semantic pentru $S$ şi $n$ un vârf al arborelui. Fie $n_0 n_1 ... n_{k-1} n$ drumul de la rădăcină la $n$ în arborele $T$, $r = n_0$. Spunem că $n$ este vârf de eşec, dacă $I(n)$ falsifică cel puţin o clauză din $S$ şi pentru orice $j$, $0 \leqslant j \leqslant k-1$, nici o clauză din $S$ nu este falsificată de $I(n_j)$.

*Exemplul* 2.4.3 Fie mulţimea de clauze $S = \{Qfx, Px\}$ considerată în *Exemplul* 2.4.2,

$$H_\infty(S) = \left\{ f^k a \ \middle| k \geqslant 0 \right\}, \quad \mathcal{B}_H(S) = \left\{ Pf^k a, Qf^k a \ \middle| k \geqslant 1 \right\} \cup \{Pa\}.$$

Notăm cu $\varphi(e)$ literalul etichetă a muchiei $e$. Atunci arborele reprezentat in $Figura$ 2.4.1 este un $H$-arbore semantic pentru $S$, unde

$$\begin{aligned} \varphi(rn_1) &= Pa, \varphi(rn_2) = (\urcorner Pa), \varphi(n_1 n_3) = \\ &= Qfa, \varphi(n_1 n_4) = (\urcorner Qfa), \varphi(n_2 n_5) = (\urcorner Pffa), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(n_2 n_6) &= Pffa, \varphi(n_3 n_7) = Qffa, \varphi(n_3 n_8) = \\ &= (\urcorner Qffa), \varphi(n_4 n_9) = Qffa, \varphi(n_4 n_{10}) = \\ &= (\urcorner Qffa), \varphi(n_6 n_{11}) = Qfa, \varphi(n_6 n_{12}) = (\urcorner Qfa). \end{aligned}$$

Deoarece drumurile de la rădăcină la vârfurile $n_5$, $n_9$ sunt $rn_2 n_5$ şi respectiv $rn_1 n_4 n_9$, mulţimile $I(n)$ corespunzătoare acestor vârfuri sunt

$$I(n_5) = \{(\urcorner Pa), (\urcorner Pffa)\}, \quad I(n_9) = \{Pa, (\urcorner Qfa), Qffa\}.$$

$I(n_5)$ falsifică clauza $Px$, respectiv $I(n_9)$ falsifică clauza $Qfx$.

Deoarece clauza $Px$ este falsificată de $\{(\urcorner Pa)\}$ şi clauza $Qfx$ este falsificată de $\{Pa, (\urcorner Qfa)\ \}$, niciunul din vârfurile $n_5$, $n_9$ nu este vârf de eşec.

$$\begin{tikzcd}
 & & & r \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
 & & n_1 \arrow[dl] \arrow[d] & & n_2 \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
 & n_3 \arrow[dl] \arrow[d] & n_4 \arrow[d] \arrow[dr] & & n_5 & n_6 \arrow[d] \arrow[dr] & \\
n_7 & n_8 & n_9 & n_{10} & & n_{11} & n_{12}
\end{tikzcd}$$

$Figura$ 2.4.1

Deoarece $I(n_8) = \{Pa, Qfa, (\urcorner Qffa)\}$ falsifică clauza $Qfx$ şi niciuna din clauzele lui $S$ nu este falsificată de mulţimile $\{Pa\}$, $\{Pa, Qfa\}$, vârful $n_8$ este vârf de eşec.

*Definiţia* 2.4.12 Fie $S$ mulţime finită de clauze. Vârful $n$ al $H$-arborelui semantic $T$ pentru $S$ este un vârf de inferenţă, dacă $n_1, n_2$ sunt vârfuri de eşec, unde $n_1, n_2$ sunt succesorii lui $n$ în $T$.

*Definiţia* 2.4.13 $H$-arborele semantic $T$ este un arbore închis pentru $S$ dacă toate vârfurile terminale ale lui $T$ sunt vârfuri de eşec.

*Definiţia* 2.4.14 $H$-arborele semantic $T$ este un arbore complet pentru $S$, dacă pentru orice $\delta \in \mathcal{B}_H(S)$ şi pentru orice $n$ vârf al arborelui, sau

$\{\delta, (\urcorner\delta)\} \cap I(n) \neq \emptyset$, sau există $n^*$ succesor al lui $n$ astfel încât

$\{\delta, (\urcorner\delta)\} \cap I(n^*) \neq \emptyset$.

Din *Definiţia* 2.4.14 rezultă că un $H$-arbore semantic complet explică toate $H$-interpretările pentru mulţimea de clauze considerată. Deoarece prezenţa simbolurilor functoriale impun $H$-arbori semantici infiniţi, condiţia de completitudine determină ca arborii semantici compleţi să rezulte arbori infiniţi.

*Exemplul* 2.4.4 Pentru $S = \{Px, Pa\}$, $a \in CS$, $x \in V$, $H_\infty(S) = \{a\}$, $\mathcal{B}_H(S) = \{Pa\}$. Arborele

$$T: \quad \begin{array}{ccc} & r & \\ & \swarrow\searrow & \\ n_1 & & n_2 \end{array}$$

cu etichetarea $\varphi(rn_1) = Pa$, $\varphi(rn_2) = (\urcorner Pa)$ este un $H$-arbore semantic complet pentru $S$.

*Exemplul* 2.4.5 Pentru $S = \{P, \ (Q \vee R), \ ((\urcorner P) \vee (\urcorner Q)), ((\urcorner P) \vee (\urcorner R))\}$, $P, Q, R \in PS$, $r(P) = r(Q) = r(R) = 0$ rezultă

$H_\infty(S) = \{a\}$, $a \in CS$, $\mathcal{B}_H(S) = \{P, Q, R\}$.

$T_1$ este $H$-arbore semantic complet pentru $S$, $T_2$ este $H$-arbore semantic închis pentru $S$,

$$T_1: \quad \begin{array}{cccccccc} & & & & r & & & \\ & & & & \swarrow\searrow & & & \\ & & n_1 & & & n_2 & & \\ & & \swarrow\downarrow & & & \downarrow\searrow & & \\ & n_3 & n_4 & & & n_5 & n_6 & \\ & \swarrow\downarrow & \downarrow\searrow & & & \swarrow\downarrow & \downarrow\searrow & \\ n_7 & n_8 & n_9 & n_{10} & n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \end{array}$$

cu etichetarea

$\varphi(rn_1) = P$, $\varphi(rn_2) = (\urcorner P)$, $\varphi(n_1n_3) = Q$, $\varphi(n_1n_4) = (\urcorner Q)$,

$\varphi(n_2n_5) = Q$, $\varphi(n_2n_6) = (\urcorner Q)$, $\varphi(n_3n_7) = R$,

$\varphi(n_3n_8) = (\urcorner R)$, $\varphi(n_4n_9) = R$, $\varphi(n_4n_{10}) = (\urcorner R)$,

$\varphi(n_5n_{11}) = R$, $\varphi(n_5n_{12}) = (\urcorner R)$, $\varphi(n_6n_{13}) = R$,
$\varphi(n_6n_{14}) = (\urcorner R)$.

$$T_2 : \begin{tikzcd}[column sep=small] & & r \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ & n_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & n_2 \\ n_3 & & n_4 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ & n_5 & & n_6 \end{tikzcd}$$

cu etichetarea
$\varphi(rn_1) = P$, $\varphi(rn_2) = (\urcorner P)$, $\varphi(n_1n_3) = Q$, $\varphi(n_1n_4) = (\urcorner Q)$,
$\varphi(n_4n_5) = R$, $\varphi(n_4n_6) = (\urcorner R)$.

*Exemplul* 2.4.6 Pentru $S = \{Px, ((\urcorner Px) \vee Qfx), (\urcorner Qfa)\}$,
$P, Q \in PS$, $r(P) = r(Q) = 1$, $f \in FS$, $r(f) = 1$, $a \in CS$, $x \in V$,
$H_\infty(S) = \left\{f^k a \ |k \geqslant 0\right\}$, $\mathcal{B}_H(S) = \left\{Pf^k a, Qf^k a\,|k \geqslant 0\right\}$.

Arborele $T$ este $H$-arbore semantic închis pentru $S$, unde

$$T : \begin{tikzcd}[column sep=small] & & r \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ & n_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & n_2 \\ n_3 & & n_4 & \end{tikzcd}$$

cu etichetarea
$\varphi(rn_1) = Pa$, $\varphi(rn_2) = (\urcorner Pa)$, $\varphi(n_1n_3) = Qfa$, $\varphi(n_1n_4) = (\urcorner Qfa)$.

*Definiţia* 2.4.15 Fie $T$ arbore (finit sau infinit). Mulţimea de vârfuri $D$ este o secţiune a arborelui $T$, dacă îndeplineşte următoarele condiţii:

1) pentru orice $n$ vârf al arborelui $T$ există $n^* \in D$, astfel încât $n \in P_{r-n^*}$ sau $n^* \in P_{r-n}$,

2) orice $n_1^*, n_2^* \in D, n_1^* \neq n_2^*$, $n_1^* \notin P_{r-n_2^*}$ şi $n_2^* \notin P_{r-n_1^*}$

unde $P_{n_1-n_2}$ este mulţimea vârfurilor care compun drumul (dacă există) de la vârful $n_1$ la vârful $n_2$ în arborele $T$.

Din *Definiţia* 2.4.15, rezultă că o secţiune $D$ a unui arbore este o mulţime de varfuri cu proprietatea (2) şi care este maximală în sensul relaţiei de incluziune. De asemenea, este evident că pentru orice drum $P$ maximal de origine rădăcina arborelui, $|D \cap P| = 1$.

*Exemplul* 2.4.7 Fie mulţimile de vârfuri $D_1 = \{n_3, n_9, n_{10}, n_2\}$,
$D_2 = \{n_3, n_1, n_5, n_6\}$, $D_3 = \{n_3, n_4, n_{11}, n_{12}, n_{14}\}$

ale arborelui $T$ din *Exemplul* 2.4.5.

Se observă că numai mulţimea $D_1$ este o secţiune a arborelui $T$.

Într-adevăr, $n_1 \in P_{r-n_3}$, deci $D_2$ nu verifică condiţia (2). De asemenea, $n_{13} \notin P_{r-n_i}$, $i \in \{3, 4, 11, 12, 14\}$ deci $D_3$ nu verifică condiţia (1).

Caracterizarea invalidabilităţii unei mulţimi finite de clauze în termenii $H$-arborilor semantici este stabilită de teorema Herbrand.

*Teorema* 2.4.2 Mulţimea finită de clauze $S$ este invalidabilă dacă şi numai dacă orice $H$-arbore semantic complet $T$ pentru $S$ conţine un subarbore finit, semantic închis $T^*$ astfel încât,

$\iota$) $T, T^*$ au aceeaşi rădăcină,

$\iota\iota$) $\partial T^*$ este secţiune a arborelui $T$ unde $\partial T^*$ este frontiera arborelui $T^*$ (mulţimea vârfurilor terminale în $T^*$).

*Demonstraţie* Presupunem că $S$ este mulţime finită de clauze cu proprietatea că orice $H$-arbore semantic complet $T$ pentru $S$ conţine un subarbore finit, semantic închis $T^*$ astfel încât condiţiile ($\iota$) şi ($\iota\iota$) din enunţ sunt îndeplinite. Deoarece $\mathcal{B}_H(S)$ este o mulţime cel mult numărabilă, putem considera un şir $(A_n, n = 1, 2, ...)$ cu elementele din $\mathcal{B}_H(S)$.

Fie $T$ arborele (posibil infinit) având mulţimea vârfurilor,

$$V(T) = \{r\} \cup \{n_{i_1 \dots i_n} | n = 1, 2, ...,\ i_j \in \{0, 1\}, j = 1, ..., n\},$$

mulţimea muchiilor

$$E(T) = \{rn_0, rn_1\} \cup \left\{ n_{i_1 \dots i_n} n_{i_1 \dots i_n 0},\ n_{i_1 \dots i_n} n_{i_1 \dots i_n 1} \;\middle|\; \begin{array}{l} n = 1, 2, ..., \\ i_j \in \{0, 1\}, \\ j = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

şi sistemul de etichete,

$$\begin{array}{l} \varphi(rn_0) = (\urcorner A_1), \quad \varphi(rn_1) = A_1, \\ \varphi(n_{i_1 \dots i_n} n_{i_1 \dots i_n 0}) = (\urcorner A_{n+1}), \\ \varphi(n_{i_1 \dots i_n} n_{i_1 \dots i_n 1}) = A_{n+1}. \end{array}$$

Evident $T$ este un $H$-arbore semantic complet pentru $S$, toate $H$-interpretările fiind gradual explicate prin interpretările parţiale $I(n)$, $n \in V(T)$.

Fie $T^*$ subarborele lui $T$, $T^*$ finit, semantic închis verificând cerinţele ($\iota$) şi ($\iota\iota$) din enunţ.

Dacă $M^* = (H_\infty(S), I^*)$ este o $H$-interpretare arbitrară şi $B_k$, $k = 1, 2, ...$ şirul care o reprezintă,

$$B_k = \begin{cases} A_k, & \text{dacă } A_k^{I^*} = T \\ (\urcorner A_k), & \text{dacă } A_k^{I^*} = F \end{cases}, \quad k = 1, 2, ...,$$

unde $\mathcal{B}_H(S) = \{A_k, k = 1, 2, ...\}$, atunci $(B_k, k = 1, 2, ...)$ corespunde mulţimii de etichete asociate muchiilor unui drum maximal $P(M^*)$ de origine rădăcina arborelui $T$. Din $(\iota\iota)$, fie $n^* \in V(T)$, unicul vârf din $\partial T^* \cap P(M^*)$ deci $I(n^*)$ falsifică cel puţin o instanţiere de bază a unei clauze din $S$.

Deoarece $I(n^*) \subset \bigcup\limits_{k \geqslant 1} \{B_k\}$, obţinem că $M^*$ falsifică $S$.

În concluzie, $S$ nu admite $H$-modele, deci din *Teorema* 2.4.1, $S$ rezultă invalidabilă.

Fie $S$ mulţime de clauze, finită şi invalidabilă şi fie $T$ arbore semantic complet pentru $S$.

Dacă $\wp = \{P_{r-n} | n \in V(T)\}$ este mulţimea tuturor drumurilor de lungime finită din $T$ şi de origine rădăcina arborelui, atunci $\wp$ rezultă mulţime numărabila. Evident, pentru orice vârfuri distincte $n_1, n_2$, există drum $P_{n_1 - n_2}$ de la $n_1$ la $n_2$ în $T$ dacă şi numai dacă $P_{r-n_1} \subset P_{r-n_2}$, adică dacă şi numai dacă $I(n_1) \subset I(n_2)$. Cu alte cuvinte, drumurile din $\wp$ extind gradual toate $H$-interpretările posibile. Deoarece $S$ este mulţime finită de clauze şi fiecare clauză are câte un număr finit de literali, pentru fiecare $P_{r-n_1} \in \wp$, dacă $I(n_1)$ nu falsifică nici o clauză din $S$ atunci există $n_2$ astfel încât există $P_{n_1-n_2}$ în $T$, $P_{r-n_2} \in \wp$ şi $I(n_2)$ falsifică cel puţin o clauză din $S$.

Pe baza acestei observaţii, fiecărui drum $P_{r-n} \in \wp$, putem asocia $n^*(P_{r-n}) \in V(T)$, astfel încât $P_{r-n^*(P_{r-n})} \in \wp$ şi $I(n^*(P_{r-n}))$ falsifică cel puţin o clauză din $S$,

*a*) dacă $I(n)$ falsifică cel puţin o clauză din $S$, atunci $n^*(P_{r-n})$ este vârful din drumul $P_{r-n}$ aflat la distanţă minimă de rădăcină şi $I(n^*(P_{r-n}))$ falsifică cel puţin o clauză din $S$,

*b*) dacă $I(n)$ nu falsifică nici o clauză din $S$ atunci $n^*(P_{r-n})$ este vârful aflat la distanţă minimă de rădăcină astfel încât există drum $P_{n-n^*(P_{r-n})}$ în $T$ şi $I(n^*(P_{r-n}))$ falsifică cel puţin o clauză din $S$.

Doarece pentru fiecare $P_{r-n} \in \wp$, drumul $P_{r-n^*(P_{r-n})}$ este de lungime finită, mulţimea $D = \{n^*(P_{r-n}) | P_{r-n} \in \wp\}$ este finită şi cum pentru orice $P_{r-n} \in \wp$ există drum $P_{n-n^*(P_{r-n})}$ sau există drum $P_{n^*(P_{r-n})-n}$ în $T$, rezultă că $D$ este secţiune a arborelui $T$.

Fie $V(T^*)$ mulţimea vârfurilor şi respectiv $E(T^*)$ mulţimea muchiilor componente ale drumurilor $\{P_{r-n^*} | n^* \in D\}$. Evident, $T^* = (V(T^*), E(T^*))$ este subarbore finit al lui $T$ cu aceeaşi rădăcină şi $\partial T^* = D$. Observăm că din construcţia mulţimii $D$, orice $n^* \in D$ este vârf de esec, deci $T^*$ este arbore semantic închis pentru $S$.

*Corolar* (Teorema Skolem-Herbrand-Gödel) Mulţimea finită de clauze $S$ este invalidabilă dacă şi numai dacă există o mulţime $\overline{S}$ invalidabilă de instanţieri de bază ale clauzelor din $S$.

*Demonstraţie* Evident, dacă există o mulţime $\overline{S}$ de instanţieri de bază ale clauzelor din $S$ astfel încât $\overline{S}$ este invalidabilă, atunci $S$ nu admite model Herbrand deci, din *Teorema* 2.4.1 rezultă $S$ invalidabilă. Dacă $S$ este invalidabilă, fie $T$ arbore semantic complet pentru $S$ (de exemplu arborele construit în cadrul demonstraţiei *Teoremei* 2.4.2) şi fie $T^*$ subarborele semantic închis finit cu proprietăţile $(\iota)$ şi $(\iota\iota)$ din enunţul *Teoremei* 2.4.2. Pentru fiecare $n \in \partial T^*$ fie $k(n) \in S$, astfel încât instanţierea de bază $\overline{k(n)}$ a clauzei $k(n)$ este falsificată de $I(n)$ şi fie $\widetilde{S} = \left\{\overline{k(n)}, n \in \partial T^*\right\}$. Pentru fiecare clauză din mulţimea $S \setminus \{k(n), n \in \partial T^*\}$ considerăm o instanţiere de bază $\overline{k(n)}$ arbitrară. Deoarece $\widetilde{S}$ este invalidabilă, rezultă că $\overline{S} = \left\{\overline{k(n)}, k(n) \in S\right\}$ este o mulţime invalidabilă de instanţieri de bază ale clauzelor din $S$.

*Exemplul* 2.4.8 Fie $S = \{k_1 = (Pfxa \vee Pyga), k_2 = (\urcorner Pffaz)\}$, $P \in PS$, $r(P) = 2$, $f, g \in FS$, $r(f) = r(g) = 1$, $x, y, z \in V$.

Instanţierile clauzelor din $S$ rezultate prin aplicarea substituţiei

$\{fa|x,\ ffa|y,\ a|z\}$ sunt $\overline{k_1} = (Pffaa \vee Pffaga)$, $\overline{k_2} = (\urcorner Pffaa)$, respectiv prin aplicarea substituţiei

$\{fa|x,\ ffa|y,\ ga|z\}$ obţinem,

$\overline{k_1'} = \overline{k_1} = (Pffaa \vee Pffaga), \overline{k_2'} = (\urcorner Pffaga)$.

Pentru mulţimea de clauze de bază

$$\overline{S} = \left\{\overline{k_1}, \overline{k_2}, \overline{k_2'}\right\} = \{(Pffaa \vee Pffaga), (\urcorner Pffaa), (\urcorner Pffaga)\}$$

obţinem $\overline{S}$-respingerea rezolutivă,

$$(Pffaa \vee Pffaga),\ (\urcorner Pffaa),\ Pffaga,\ (\urcorner Pffaga),\ \square,$$

deci $\overline{S}$ este invalidabilă. Rezultă $S$ invalidabilă.

Stabilirea invalidabilităţii unei mulţimi de clauze $S$ pe baza teoremei Skolem-Herbrand-Gödel presupune generarea substituţiilor de bază, aplicarea lor clauzelor din $S$ şi testarea validabilităţii/invalidabilităţii mulţimii clauzelor astfel generate. Dacă $S$ este invalidabilă, atunci există garanţia că după un număr finit de iteraţii va rezulta o mulţime invalidabilă de instanţieri de bază, dar, dacă $S$ este validabilă, atunci acest proces continuă indefinit. Deoarece clauzele sunt formule închise cu toate variabilele cuantificate universal, căutarea unei mulţimi invalidabile de instanţieri de bază revine în esenţă la căutarea unui contraexemplu (termeni Herbrand) într-un spaţiu (universul Herbrand) definit de structura clauzelor mulţimii $S$.

# 4 Demonstrarea automată bazată pe principiul rezoluţiei

Comparativ cu structurile de tip formulă din limbajul calculului cu propoziţii, formulele unui limbaj de primul ordin sunt structuri mult mai complexe, complexitatea rezultând în primul rând din prezenţa substructurilor de tip termeni şi a variabilelor. În cadrul acestei secţiuni va fi definit principiul rezoluţiei ca unică regulă de inferenţă a unui sistem de demonstrare automată pentru limbaje de primul ordin. Ca şi în cazul limbajului calculului cu propoziţii, verificarea pe baza metodei rezolutive a validabilităţii/invalidabilităţii unei formule se realizează prin prelucrări efectuate asupra unei reprezentări clauzale a formulei respective.

În particular, pentru $H = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset FORM_0$, $\alpha \in FORM_0$, deoarece $H \models \alpha$, dacă şi numai dacă $M(H) \subseteq M(\alpha)$ şi $M(\neg\alpha) = M \setminus M(\alpha)$, rezultă că $H \models \alpha$, dacă şi numai dacă $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} M(\alpha_i)\right) \cap M(\neg\alpha) = \emptyset$, deci dacă şi numai dacă formula $\gamma = \left(\left(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \wedge (\neg\alpha)\right)$ este invalidabilă.

Cu alte cuvinte, verificarea proprietăţii $H \models \alpha$ revine la verificarea invalidabilităţii unei reprezentări clauzale corespunzătoare formulei $\gamma$.

Pentru simplificarea notaţiei, în continuare vom omite parantezarea conformă sintaxei limbajului în scrierea literalilor şi a clauzelor. De exemplu, scrierea simplificată a clauzei $((Px \vee Pfy) \vee (\neg Qx))$ este $Px \vee Pfy \vee \neg Qx$.

*Definiţia* 2.5.1 Clauza $k\sigma$ este factor al clauzei $k$, dacă $\sigma$ este un este un cel mai general unificator (mgu) ce unifică cel puţin doi literali din $k$.

*Lema* 2.5.1 Pentru orice clauză $k$ şi $\theta \in SUBST$, $\{k\} \vDash k\theta$.

*Demonstraţie* Fie $L-$structura $M = (D, I)$ şi $\theta$ substituţie arbitrară. Din *Lema* 2.2.1 rezultă că pentru orice valuaţie $s \in [V \to D]$, $(k\theta)^I(s) = k^I(s \cdot \theta)$. Deoarece clauzele sunt formule închise cu toate variabilele cuantificate universal, dacă $M$ este model pentru $k$ atunci pentru orice valuaţie $\overline{s} \in [V \to D]$,

$k^I(\overline{s}) = T$. Obţinem, $k^I(s \cdot \theta) = T$ deci $\{k\} \vDash k\theta$.

În particular, dacă $k\sigma$ este factor al clauzei $k$ atunci $\{k\} \vDash k\sigma$.

*Exemplul* 2.5.1 Fie $k = Px \vee Pfy \vee \neg Qx$, $P, Q \in PS$, $f \in FS$, $x, y \in X$. Substituţia $\sigma = \{fy|x\}$ este un mgu pentru mulţimea de literali $\{Px, Pfy\}$ deci $k\sigma = Pfy \vee \neg Qfy$ este un factor al clauzei $k$.

*Definiţia* 2.5.2 Fie $k_1, k_2$ clauze care nu au variabile comune. Clauzele $k_1, k_2$ sunt rezolubile în raport cu perechea de literali $(L_1, L_2)$, dacă $k_1 \langle L_1 \rangle$, $k_2 \langle L_2 \rangle$ şi mulţimea $\{L_1, \neg L_2\}$ este unificabilă. Dacă $\sigma$ este un cel mai general unificator (mgu) pentru $\{L_1, \neg L_2\}$, atunci clauza

$$rezbin\,(k_1, k_2) = (k_1\sigma \setminus L_1\sigma) \vee (k_2\sigma \setminus L_2\sigma)$$

este rezolventă binară a perechii de clauze $(k_1, k_2)$.

Clauzele $k_1, k_2$ sunt clauze parentale pentru $rezbin\,(k_1, k_2)$.

*Exemplul* 2.5.2 Fie $k_1 = Px \vee Qx$, $k_2 = \neg Pa \vee Ry$ , $P, Q, R \in PS$, $a \in CS$, $x, y \in V$.

Pentru $L_1 = Px$, $L_2 = \neg Pa$ , $\sigma = \{a|x\}$ este un mgu pentru $\{L_2, \neg L_1\}$ deci $rezbin\,(k_1, k_2) = (k_1\sigma \setminus L_1\sigma) \vee (k_2\sigma \setminus L_2\sigma) = Qa \vee Ry$ este o rezolventă binară a perechii de clauze $(k_1, k_2)$.

*Definiţia* 2.5.3 Fie $k_1, k_2$ clauze care nu au variabile comune. Orice rezolventă binară de unul din tipurile $rezbin\,(k_1, k_2)$, $rezbin\,(k_1\sigma_1, k_2)$, $rezbin\,(k_1, k_2\sigma_2)$, $rezbin\,(k_1\sigma_1, k_2\sigma_2)$, unde $k_1\sigma_1, k_2\sigma_2$ sunt factori ai clauzelor $k_1$ respectiv $k_2$ este o rezolventă a perechii de clauze $(k_1, k_2)$. Notăm cu $rez\,(k_1, k_2)$ o rezolventă a clauzelor $k_1, k_2$.

*Lema* 2.5.2 (Lema de liftare) Fie $\overline{k_i}$, $i = 1, 2$ instanţieri ale clauzelor $k_i$, $i = 1, 2$. Pentru orice $\overline{k} = rez\left(\overline{k}_1, \overline{k}_2\right)$ rezolventă a perechii de clauze $\overline{k_i}$, $i = 1, 2$ există $k = rez\,(k_1, k_2)$, astfel încât $\overline{k}$ este instanţiere a clauzei $k$.

*Demonstraţie* Se poate presupune fără restrângerea generalităţii că nu există simboluri de variabile comune clauzelor $k_i$, $i = 1, 2$. Fie $\theta_i \in SUBST$, astfel încât $\overline{k_i} = k_i\theta_i$, $i = 1, 2$; deoarece $k_i$, $i = 1, 2$ nu au variabile comune, putem defini $\theta = \theta_1 \cup \theta_2$ şi rezultă $\overline{k_i} = k_i\theta$, $i = 1, 2$.

Fie $\gamma$ mgu pentru $\left\{\overline{L_1}, \neg\overline{L_2}\right\}$, unde $\overline{L_1}, \overline{L_2}$ sunt literalii rezolvaţi în generarea rezolventei $\overline{k}$, $\overline{k} = \left(\overline{k}_1\gamma \setminus \overline{L_1}\gamma\right) \vee \left(\overline{k}_2\gamma \setminus \overline{L_2}\gamma\right)$. Eventual $\theta$ poate să unifice anumiţi literali ai clauzelor $k_i$, $i = 1, 2$ cu literalii $\overline{L_i}$, $i = 1, 2$; fie $L_j^{(i)}$, $j = 1, ..., r_i$ literalii clauzei $k_i$ unificaţi de $\theta_i$ în $\overline{L_i}$, $i = 1, 2$, $L_j^{(i)}\theta_i = \overline{L_i} = L_i^{(j)}\theta$, $j = 1, ..., r_i$, $i = 1, 2$.

Pentru fiecare $i = 1, 2$ distingem următoarele cazuri:

$a$) Dacă $r_i > 1$, atunci fie $\lambda_i = mgu\left(L_i^{(j)}, j = 1, ..., r_i\right)$ şi notând $L_i = L_i^{(j)}\lambda_i$, $j = 1, ..., r_i$ rezultă $k_i\lambda_i$ este factor al clauzei $k_i$ şi $k_i\,\langle L_i\rangle$.

$b$) Dacă $r_i = 1$, atunci fie $\lambda_i = \varepsilon$ şi $L_i = L_i^{(1)} = L_i^{(1)}\lambda_i$. Analog, deoarece $k_i, i = 1, 2$ nu au variabile comune, putem defini $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$ şi rezultă

$L_i = L_i^{(1)}\lambda_i = L_i^{(1)}\lambda$, deci $k_i\lambda$ este factor al clauzei $k_i$, $i = 1, 2$.

Deoarece $\theta$ este substituţie unificator pentru $L_i^{(j)}$, $j = 1, ..., r_i$, $i = 1, 2$, există $\eta_i \in SUBST$, astfel încât $\theta = \lambda_i \cdot \eta_i$, $i = 1, 2$.

Evident, putem defini $\eta = \eta_1 \cup \eta_2$ şi obţinem $\theta = \lambda \cdot \eta$.

Rezultă,

$$\overline{L_i} = L_i^{(1)}\theta = L_i^{(1)}\left(\lambda_i \cdot \eta_i\right) = \left(L_i^{(1)}\lambda_i\right)\eta_i = L_i\eta_i = L_i\eta,$$

deci $\overline{L_i}$ este instanţiere a literalului $L_i, i = 1, 2$.

Demonstrăm în continuare că literalii $\{L_1, \urcorner L_2\}$ sunt unificaţi de $\eta \cdot \gamma$.

Într-adevăr, din $\overline{L_1}\gamma = \urcorner\overline{L_2}\gamma$ şi $\overline{L_i} = L_i\eta$, $i = 1, 2$ rezultă

$(L_1\eta)\gamma = (\urcorner L_2\eta)\gamma$, deci $L_1(\eta \cdot \gamma) = \urcorner L_2(\eta \cdot \gamma)$.

Dacă $\sigma$ este mgu pentru $\{L_1, \urcorner L_2\}$, atunci există $\delta \in SUBST$, astfel încât $\eta \cdot \gamma = \sigma \cdot \delta$.

Rezultă

$$\begin{aligned}
k &= (k_1(\lambda \cdot \sigma) \setminus L_1\sigma) \vee (k_2(\lambda \cdot \sigma) \setminus L_2\sigma) = \\
&= \left((k_1\lambda)\sigma \setminus \left(\left\{L_1^{(1)}, ..., L_1^{(r_1)}\right\}\lambda\right)\sigma\right) \vee \\
&\quad \vee \left((k_2\lambda)\sigma \setminus \left(\left\{L_2^{(1)}, ..., L_2^{(r_2)}\right\}\lambda\right)\sigma\right),
\end{aligned}$$

deci factorii $k_i\lambda$, $i = 1, 2$ sunt rezolubili şi $k$ este o rezolventă a clauzelor $k_1, k_2$. De asemenea,

$$\begin{aligned}
\overline{k} &= \left(\overline{k}_1\gamma \setminus \overline{L_1}\gamma\right) \vee \left(\overline{k}_2\gamma \setminus \overline{L_2}\gamma\right) = \\
&= \left((k_1\theta)\gamma \setminus \left(\left\{L_1^{(1)}, ..., L_1^{(r_1)}\right\}\theta\right)\gamma\right) \vee \\
&\quad \vee \left((k_2\theta)\gamma \setminus \left(\left\{L_2^{(1)}, ..., L_2^{(r_2)}\right\}\theta\right)\gamma\right) \\
&= \left(k_1(\theta \cdot \gamma) \setminus \left\{L_1^{(1)}, ..., L_1^{(r_1)}\right\}(\theta \cdot \gamma)\right) \vee \\
&\quad \vee \left(k_2(\theta \cdot \gamma) \setminus \left\{L_2^{(1)}, ..., L_2^{(r_2)}\right\}(\theta \cdot \gamma)\right).
\end{aligned}$$

Deoarece $\theta \cdot \gamma = \lambda \cdot (\eta \cdot \gamma) = \lambda \cdot (\sigma \cdot \delta)$, obţinem în continuare

$$\begin{aligned}
\overline{k} &= \left(k_1(\lambda \cdot (\sigma \cdot \delta)) \setminus \left\{L_1^{(1)}, ..., L_1^{(r_1)}\right\}(\lambda \cdot (\sigma \cdot \delta))\right) \vee \\
&\quad \vee \left(k_2(\lambda \cdot (\sigma \cdot \delta)) \setminus \left\{L_2^{(1)}, ..., L_2^{(r_2)}\right\}(\lambda \cdot (\sigma \cdot \delta))\right) \\
&= \left((k_1(\lambda \cdot \sigma))\delta \setminus \left(\left\{L_1^{(1)}, ..., L_1^{(r_1)}\right\}(\lambda \cdot \sigma)\right)\delta\right) \vee \\
&\quad \vee \left((k_2(\lambda \cdot \sigma))\delta \setminus \left(\left\{L_2^{(1)}, ..., L_2^{(r_2)}\right\}(\lambda \cdot \sigma)\right)\delta\right) \\
&= k\delta,
\end{aligned}$$

deci $\overline{k}$ este o instanţiere a clauzei $k$.

Rezumând construcţia efectuată în demonstraţia lemei, clauza $k$ a cărei existenţă este afirmată în enunţ rezultă pe baza compunerii substituţiilor $\lambda, \sigma$, unde $\sigma$ este mgu pentru $\{L_1, \urcorner L_2\}$ şi $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$, pentru $\lambda_i$ mgu al mulţimii de literali $\left\{L_i^{(1)}, ..., L_i^{(r_i)}\right\}$, $i = 1, 2$.

Rezultatul stabilit de *Lema* 2.5.2 este ilustrat prin diagrama următoare:

$$\begin{array}{ccc} k_1, k_2 & \overset{rezolutie}{\longrightarrow} & k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{k}_1, \overline{k}_2 & \overset{rezolutie}{\longrightarrow} & \overline{k} \end{array}$$

*Exemplul* 2.5.3 Fie $k_1 = Px \vee Pfy \vee Pfz \vee Qx$,
$k_2 = \urcorner Pfu \vee \urcorner Pw \vee Ru$, unde $P, Q, R \in PS$,
$r(P) = r(Q) = r(R) = 1$, $f \in FS, r(f) = 1$, $a \in CS$,
$x, y, z, u, w \in V$ şi instanţierile de bază,

$$\begin{aligned} \overline{k_1} &= k_1\theta_1 = Pfa \vee Qfa, \quad \text{unde} \quad \theta_1 = \{fa|x,\ a|y,\ a|z\} \\ \overline{k_2} &= k_2\theta_2 = \urcorner Pfa \vee Ra, \quad \text{unde} \quad \theta_2 = \{a|u, \quad fa|w\} \end{aligned}$$

Clauzele $\overline{k} = rez_{Pfa}\left\{\overline{k_1}, \overline{k_2}\right\} = Qfa \vee Ra$.
Deoarece $\lambda_1 = \{fy|x, y|z\} = mgu\{Px, Pfy, Pfz\}$, clauza
$k_1\lambda_1 = Pfy \vee Qfy$ este factor al clauzei $k_1$ şi $L_1 = Px\lambda_1 = Pfy$.
De asemenea, mulţimea de literali $\{\urcorner Pfu, \urcorner Pw\}$ este unificabilă şi
$\lambda_2 = \{fu|w\} = mgu\{\urcorner Pfu, \urcorner Pw\}$, deci
$L_2 = \urcorner Pw\lambda_2 = \urcorner Pfu$ , deci $k_2\ \lambda_2 = \urcorner Pfu \vee Ru$ este factor al clauzei $k_2$.
Rezultă $\lambda = \{fy|x, y|z, fu|w\}$ şi $L_1\lambda = Pfy$, $L_2\lambda = \urcorner Pfu$.
Perechea de literali $\{\urcorner L_1, \urcorner L_2\}$ este unificabilă şi
$\sigma = \{y|u\} = mgu\ \{L_1, \urcorner L_2\}$;
$\lambda \cdot \sigma = \{fy|x, y|z,\ fy|w,\ y|u\}$.
Deoarece $k_1\lambda_1 = Pfy \vee Qfy$ şi $k_2\ \lambda_2 = \urcorner Pfu \vee Ru$, obţinem,
$k = Qfy \vee Ry$ şi $\overline{k} = k\theta$, unde $\theta = \{a|y\}$.

*Lema* 2.5.3 Orice rezolventă este consecinţă semantică a mulţimii clauzelor parentale.

*Demonstraţie*

*a*) Presupunem $k$ rezolventă binară a perechii de clauze $(k_1, k_2)$ şi fie $L_1, L_2$ literalii rezolvaţi, $k = (k_1\sigma \setminus L_1\sigma) \vee (k_2\sigma \setminus L_2\sigma)$, unde $\sigma$ este mgu pentru $(L_1, L_2)$.

Dacă mulţimea $\{k_1, k_2\}$ este invalidabilă, atunci concluzia este imediată.

Dacă mulţimea $\{k_1, k_2\}$ este validabilă, fie $M = (D, I)$ model pentru $\{k_1, k_2\}$.

Din *Lema* 2.5.1, $\{k_i\} \vDash k_i\sigma$, $i = 1, 2$, deci pentru orice valuaţie $s \in [V \to D]$, $(k_1\sigma)^I(s) = T$.

Deoarece $L_2\sigma = \urcorner L_1\sigma$, rezultă $(L_2\sigma)^I(s) = \urcorner(L_1\sigma)^I(s)$.

Dacă $(L_2\sigma)^I(s) = T$, atunci $(L_1\sigma)^I(s) = F$, deci obţinem în continuare

$(k_1\sigma)^I(s) = T = (k_1\sigma\backslash L_1\sigma)^I(s) \vee (L_1\sigma)^I(s) = (k_1\sigma\backslash L_1\sigma)^I(s)$,
ceea ce evident implică $(k)^I(s) = T$.

Dacă $(L_2\sigma)^I(s) = F$, atunci $(L_1\sigma)^I(s) = F$ şi obţinem $(k_2\sigma\backslash L_2\sigma)^I(s) = T$, deci rezultă aceeaşi concluzie, $(k)^I(s) = T$.

*b*) Presupunem $k = rezbin(k_1\sigma_1, k_2)$, ceea ce evident implică $\{k_1\sigma_1, k_2\} \vDash k$. Din *Lema* 2.5.1, $\{k_1\} \vDash k_1\sigma_1$, deci $\{k_1, k_2\} \vDash k$.

*c*) Cazul $k = rezbin(k_1, k_2\sigma_2)$ este similar cazului $(b)$.

*d*) Concluzia rezultă şi pentru $k = rezbin(k_1\sigma_1, k_2\sigma_2)$, deoarece din $\{k_i\} \vDash k_i\sigma_i$, $i = 1, 2$, $\{k_1\sigma_1, k_2\sigma_2\} \vDash k$ obţinem evident $\{k_1, k_2\} \vDash k$.

*Definiţia* 2.5.4 Fie $S$ mulţime finită de clauze. Secvenţa de clauze $k_1, ..., k_n$ este o $S$-derivare rezolutivă, dacă pentru fiecare $i = 1, ..., n$ este îndeplinită una din condiţiile:

$\iota$) $k_i \in S$,

$\iota\iota$) $k_i$ este factor al unei clauze din $S$,

$\iota\iota\iota$) există $j, l < i$, astfel încât $k_i$ este rezolventă a perechii de clauze $(k_j, k_l)$.

$S$-derivarea rezolutivă $k_1, ..., k_n$ este o $S$-respingere rezolutivă dacă $k_n = \Box$.

*Teorema* 2.5.2 (Teorema de consistenţă-completitudine a rezoluţiei pentru limbaje de primul ordin) Mulţimea finită de clauze $S$ este invalidabilă, dacă şi numai dacă există o $S$-respingere rezolutivă.

*Demonstraţie*

Teorema de consistenţă: Din *Lema* 2.5.3 rezultă $S \vDash k_i$, $i = 1, ..., n$ pentru orice $S$-derivare rezolutivă $k_1, ..., k_n$.

În particular, dacă $k_n = \Box$, rezultă că $S$ este invalidabilă.

Teorema de completitudine: Presupunem că $S$ este invalidabilă.

Fie $T = (V(T), E(T))$ arborele semantic complet pentru $S$ definit în demonstraţia *Teoremei* 2.4.2,

$$\begin{aligned} V(T) &= \{r\} \cup \{n_{i_1...i_n} | n = 1, 2, ..., \ i_j \in \{0, 1\}, j = 1, ..., n\}, \\ E(T) &= \{rn_0, rn_1\} \cup \left\{ n_{i_1...i_n}n_{i_1...i_n0}, \ n_{i_1...i_n}n_{i_1...i_n1} \;\middle|\; \begin{array}{l} n = 1, 2, ..., \\ i_j \in \{0, 1\}, \\ j = 1, ..., n \end{array} \right\} \end{aligned}$$

şi etichetele

$$\begin{array}{l} \varphi(rn_0) = (\neg A_1), \varphi(rn_1) = A_1, \\ \varphi(n_{i_1...i_n}n_{i_1...i_n0}) = (\neg A_{n+1}), \varphi(n_{i_1...i_n}n_{i_1...i_n1}) = A_{n+1}, \end{array}$$

unde $\mathcal{B}_H(S) = \{A_k, k = 1, 2, ...\}$.

Fie $T^* = (V(T^*), E(T^*))$ subarbore al lui $T$, finit, semantic închis verificând cerinţele $(\iota)$ şi $(\iota\iota)$ din enunţul *Teoremei* 2.4.2.

Deoarece singura clauză ce poate fi falsificată de $I(r)$ este clauza vidă, în cazul în care $V(T^*) = \{r\}$ rezultă $\Box \in S$, deci secvenţa constând numai din clauza vidă este o $S$-derivare rezolutivă şi deci există $S$-respingere rezolutivă.

Dacă $|V(T^*)| \geqslant 2$, atunci există cel puţin un vârf de inferenţă în $V(T^*)$. Fie $n_\alpha$ pentru anume $\alpha \in \{0,1\}^p$ vârf de inferenţă, deci $\varphi(n_\alpha n_{\alpha 0}) = (\urcorner A_{p+1})$, $\varphi(n_\alpha n_{\alpha 1}) = A_{p+1}$. Deoarece $n_{\alpha 0}$, $n_{\alpha 1}$ sunt vârfuri de eşec, există $k_1, k_2 \in S$, astfel încât $H$-interpretarea parţială $I(n_{\alpha i-1})$ falsifică o anume instanţiere de bază $\overline{k_i}$ a clauzei $k_i$, $i = 1,2$ şi nici una dintre clauzele $\overline{k_i}$, $i = 1,2$ nu este falsificată în $I(n_\alpha)$.

În cazul în care $\overline{k_1}\rangle A_{p+1}\langle$ şi $\overline{k_1}\rangle \urcorner A_{p+1}\langle$, evaluările pentru $\overline{k_1}$ în interpretările parţiale $I(n_\alpha)$, $I(n_{\alpha 0})$ coincid, deci se ajunge la concluzia $I(n_\alpha)$ falsifică $\overline{k_1}$, ceea ce este o contradicţie. De asemenea, dacă $\overline{k_1}\langle \urcorner A_{p+1}\rangle$, atunci evaluarea clauzei $\overline{k_1}$ în $I(n_\alpha)$ coincide cu evaluarea ei în $I(n_{\alpha 0})$, deci din nou rezultă o contradicţie.

Un argument similar poate fi considerat pentru clauza $\overline{k_2}$.
Rezultă astfel $\overline{k_1}\langle A_{p+1}\rangle$ şi $\overline{k_2}\langle \urcorner A_{p+1}\rangle$, deci $\overline{k_1}$, $\overline{k_2}$ sunt $A_{p+1}$-rezolubile.

Fie $\overline{k} = rez_{A_{p+1}}\left(\overline{k_1}, \overline{k_2}\right) = \left(\overline{k_1} \setminus A_{p+1}\right) \vee \left(\overline{k_2} \setminus \urcorner A_{p+1}\right)$.

Dacă $\overline{k_1} \setminus A_{p+1}$ ar fi validată de $I(n_\alpha)$, atunci $\overline{k_1} \setminus A_{p+1}$ rezultă validată şi de $I(n_{\alpha 0})$, deci clauza $\overline{k_1} = A_{p+1} \vee \left(\overline{k_1} \setminus A_{p+1}\right)$ rezultă validată de $I(n_{\alpha 0})$. În concluzie, $I(n_\alpha)$ falsifică $\left(\overline{k_1} \setminus A_{p+1}\right)$.

Un argument similar permite stabilirea concluziei că $I(n_\alpha)$ falsifică şi clauza $\left(\overline{k_2} \setminus \urcorner A_{p+1}\right)$, deci clauza $\overline{k}$ este falsificată de $I(n_\alpha)$.

Conform rezultatului stabilit de *Lema* 2.5.2, există o rezolventă $\widehat{k_1}$ a clauzelor $k_1$, $k_2$, astfel încât $\overline{k}$ să fie instanţiere a clauzei $\widehat{k_1}$.

Fie $T_1^* = (V(T_1^*), E(T_1^*))$ subarbore al arborelui $T^*$,

$V(T_1^*) = V(T^*) \setminus \{n_{\alpha 0}, n_{\alpha 1}\}$, $E(T_1^*) = E(T^*) \setminus \{n_\alpha n_{\alpha 0}, n_\alpha n_{\alpha 1}\}$.

Deoarece $\partial T_1^* = (\partial T^* \setminus \{n_{\alpha 0}, n_{\alpha 1}\}) \cup \{n_\alpha\}$, $T_1^*$ este arbore semantic închis pentru $S_1 = S \cup \left\{\widehat{k_1}\right\}$.

Iterând acest argument, rezultă că există $T_q^* = \left(V\left(T_q^*\right), E\left(T_q^*\right)\right)$ arbore semantic închis pentru $S_q = S_{q-1} \cup \left\{\widehat{k_q}\right\}$ şi $\left|V\left(T_q^*\right)\right| = 1$, deci $\Box \in S_q \setminus S_{q-1}$, adică $\widehat{k_q} = \Box$.

Deoarece $\widehat{k_1}, ..., \widehat{k_q}$ este $S$-derivare rezolutivă şi $\widehat{k_q} = \Box$, rezultă că secvenţa de clauze $\widehat{k_1}, ..., \widehat{k_q}$ este $S$-respingere rezolutivă.

Rezultatul stabilit de *Teorema* 2.5.2 constituie justificarea metodei rezolutive pentru verificarea validabilităţii/invalidabilităţii unei mulţimi finite de clauze. În principiu, metoda revine la căutarea unei $S$-respingeri rezolutive în spaţiul extrem de complex al tuturor rezolventelor ce pot fi generate plecând de la clauzele mulţimii $S$. În funcţie de modul particular în care este organizat procesul de generare a rezolventelor rezultă o clasă de metode de demonstrare automată referită generic prin denumirea de metode rezolutive.

*Exemplul* 2.5.4 Fie reprezentarea clauzală $S = \{k_1, ..., k_7\}$,

$k_1 = \neg Px \vee Qx \vee Rxfx$
$k_2 = \neg Px \vee Qx \vee Sfx$
$k_3 = Ta$
$k_4 = Pa$
$k_5 = \neg Ray \vee Ty$
$k_6 = \neg Tx \vee \neg Qx$
$k_7 = \neg Tx \vee \neg Sx$,

unde $P, Q, R, S, T \in PS$, $r(P) = r(Q) = r(S) = r(T) = 1$, $r(R) = 2$, $f \in FS$, $r(f) = 1$, $a \in CS$, $x, y, z, u, w \in V$.

Deoarece clauzele trebuie să nu aibă simboluri de variabile comune, este necesară renotarea variabilelor, astfel încât această condiţie să fie îndeplinită.

Fie $S$-derivarea rezolutivă,

$k_1 = \neg Px \vee Qx \vee Rxfx$
$k_2 = \neg Pz \vee Qz \vee Sfz$
$k_3 = Ta$
$k_4 = Pa$
$k_5 = \neg Ray \vee Ty$
$k_6 = \neg Tu \vee \neg Qu$
$k_7 = \neg Tw \vee \neg Sw$
$k_8 = \neg Qa$, $k_8 = rez(k_3, k_6)$, $\{a|u\} = mgu\ \{\neg Ta, \neg Tu\}$
$k_9 = Qa \vee Sfa$, $k_9 = rez(k_2, k_4)$, $\{a|z\} = mgu\{\neg Pz, \neg Pa\}$
$k_{10} = Sfa$, $k_{10} = rez(k_8, k_9)$, $\{a|u\} = mgu\ \{\neg Qu, \neg Qa\}$
$k_{11} = Qa \vee Rafa$, $k_{11} = rez(k_1, k_4)$, $\{a|x\} = mgu\ \{\neg Px, \neg Pa\}$
$k_{12} = Rafa$, $k_{12} = rez(k_8, k_{11})$,
$k_{13} = Tfa$, $k_{13} = rez(k_5, k_{12})$, $\{a|y\} = mgu\ \{\neg Ray, \neg Rafa\}$
$k_{14} = \neg Sfa$, $k_{14} = rez(k_7, k_{13})$, $\{fa|w\} = mgu\ \{\neg Ray, \neg Rafa\}$
$k_{15} = \square$, $k_{15} = rez(k_{10}, k_{14})$,

deci $S$ este invalidabilă.

*Exemplul* 2.5.5 O teorie este mulţimea tuturor consecinţelor logice ale unei mulţimi de formule numite convenţional axiome sau ipoteze. De exemplu, o teorie a secvenţelor de simboluri poate fi definită pe baza operaţiei de concatenare şi a proprietăţii unei secvenţe de a fi subsecvenţă a unei alte secvenţe de simboluri, în modul următor:

Fie $A$ o mulţime finită de simboluri şi

$$A^* = \{\lambda\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_1...a_n | a_1, ..., a_n \in A\}$$

mulţimea tuturor secvenţelor de lungime finită de componente simboluri din $A$ , unde $\lambda$ este secvenţa vidă. Notăm cu " $\|$ " operaţia de concatenare, cu " $\sqsubseteq$ " predicatul binar ce exprimă proprietatea că primul argument este subsecvenţă a celui de al doilea argument, respectiv cu " $=$ " predicatul ce exprimă proprietatea că argumentele reprezintă aceeaşi secvenţă de simboluri.

Mulţimile de simboluri non-logice ale limbajului secvenţelor sunt:

$$CS = A^*,\ FS = \{\|\},\ r(\|) = 2,\ PS = \{\sqsubseteq, =\},\ r(\sqsubseteq) = r(=) = 2.$$

Pentru ca semnificaţia diferitelor construcţii să devină transparentă, vom utiliza o sintaxă diferită de sintaxa anterior definită şi anume vom utiliza scrierea infixată atât în cazul operaţiei de concatenare, cât şi pentru relaţiile " $\sqsubseteq$ ", " $=$ " şi, în plus, vom utiliza paranteze în scrierea atomilor. De exemplu, termenul $\| ab$ va fi scris $a \| b$, respectiv $(a \sqsubseteq b)$ reprezintă atomul $\sqsubseteq ab$. De asemenea, în scopul simplificării notaţiei, atunci când contextul permite înţelegerea neambiguă a structurii respective, simbolul functorial $\|$ nu va fi explicit precizat. De exemplu, pentru $a, b, c \in A^*$, vom scrie $abc$ în loc de $((a \| b) \| c)$.

Considerăm următoarele axiome:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \forall x (x = \lambda \| x) \\
\alpha_2 &= \forall x \forall y \forall z ((x = y) \to (z \| x = z \| y)) \equiv \\
&\equiv \forall x \forall y \forall z (\urcorner (x = y) \vee (z \| x = z \| y)) \\
\alpha_3 &= \forall y \forall z ((x = y) \to (x \| z = y \| z)) \equiv \\
&\equiv \forall y \forall z (\urcorner (x = y) \vee (x \| z = y \| z)) \\
\alpha_4 &= \forall x (x \sqsubseteq x) \\
\alpha_5 &= \forall x \forall y \forall z_1 \forall z_2 (((y = z_1 \| z_2) \wedge (x \sqsubseteq z_1)) \to (x \sqsubseteq y)) \equiv \\
&\equiv \forall x \forall y \forall z_1 \forall z_2 (\urcorner (y = z_1 \| z_2) \vee \urcorner (x \sqsubseteq z_1) \vee (x \sqsubseteq y)) \\
\alpha_6 &= \forall x \forall y \forall z_1 \forall z_2 (((y = z_1 \| z_2) \wedge (x \sqsubseteq z_2)) \to (x \sqsubseteq y)) \equiv \\
&\equiv \forall x \forall y \forall z_1 \forall z_2 (\urcorner (y = z_1 \| z_2) \vee \urcorner (x \sqsubseteq z_2) \vee (x \sqsubseteq y))
\end{aligned}$$

Formula $\beta = \forall x \forall y \forall z (xyz \sqsubseteq xxyzz)$ este o teoremă în teoria secvenţelor, dacă şi numai dacă $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\} \models \beta$, deci dacă şi numai dacă

$\delta = \bigwedge_{i=1}^{6} \alpha_i \to \beta$ este tautologie, ceea ce este echivalent cu

$\gamma = \bigwedge_{i=1}^{6} \alpha_i \wedge \urcorner \beta$ invalidabilă.

Pentru respectarea cerinţei să nu existe cuantificări multiple este necesară renotarea variabilelor în formula $\gamma$. Obţinem reprezentarea clauzală

$S(\gamma) = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7\}$ unde

$k_1 = (x_1 = \lambda \| x_1)$

$k_2 = \urcorner(x_2 = y_2) \vee (z_3 \parallel x_2 = z_3 \parallel y_2)$
$k_3 = \urcorner(x_3 = y_3) \vee (x_3 \parallel z_4 = y_3 \parallel z_4)$
$k_4 = (x_4 \sqsubseteq x_4)$
$k_5 = \urcorner(y_4 = z_1 \parallel z_2) \vee \urcorner(x_5 \sqsubseteq z_1) \vee (x_5 \sqsubseteq y_4)$
$k_6 = \urcorner(y_5 = z_1 \parallel z_2) \vee \urcorner(x_6 \sqsubseteq z_2) \vee (x_6 \sqsubseteq y_5)$
$k_7 = \urcorner(xyz \sqsubseteq xxyzz)$
Pentru $L_1^{(1)} = (x_6 \sqsubseteq y_5)$, $L_2^{(1)} = \urcorner(xyz \sqsubseteq xxyzz)$,

$$\sigma^{(1)} = \{xyz|x_6,\ xxyzz|y_5\} = mgu\left\{\urcorner L_1^{(1)}, L_2^{(1)}\right\},$$

deci obţinem rezolventa

$$\begin{aligned} k_8 &= rez\,(k_6, k_7) = \left(k_6\sigma^{(1)} \setminus L_1\sigma^{(1)}\right) \vee \left(k_7\sigma^{(1)} \setminus L_2\sigma^{(1)}\right) = \\ &= \urcorner(\ xxyzz = z_1 \parallel z_2) \vee \urcorner(xyz \sqsubseteq z_2)\,. \end{aligned}$$

Deoarece clauzele nu trebuie să aibă variabile comune, rescriem clauza nou generată $k_8$, variabilele $x, y, z, z_1, z_2$ fiind renotate respectiv
$x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}$,

$$k_8 = \urcorner\left(x^{(1)}x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}z^{(1)} = z_1^{(1)} \parallel z_2^{(1)}\right) \vee \urcorner\left(x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)} \sqsubseteq z_2^{(1)}\right).$$

Pentru

$$\begin{aligned} L_1^{(2)} &= (z_3 \parallel x_2 = z_3 \parallel y_2)\,, \\ L_2^{(2)} &= \urcorner\left(x^{(1)}x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}z^{(1)} = z_1^{(1)} \parallel z_2^{(1)}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(2)} &= \left\{x^{(1)}|z_3,\ x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}z^{(1)}|x_2,\ x^{(1)}\ |z_1^{(1)}, y_2|z_2^{(1)}\right\} = \\ &= mgu\left\{\urcorner L_1^{(2)}, L_2^{(2)}\right\}, \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} k_9 &= rez\,(k_2, k_8) = \left(k_8\sigma^{(2)} \setminus L_1^{(2)}\sigma^{(2)}\right) \vee \left(k_2\sigma^{(2)} \setminus L_2^{(2)}\sigma^{(2)}\right) = \\ &= \urcorner\left(x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)} \sqsubseteq y_2\right) \vee \urcorner\left(x^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}z^{(1)} = y_2\right). \end{aligned}$$

Prin renotarea variabilelor comune clauzei $k_9$ şi cel puţin unei clauze anterior generate rezultă

$$k_9 = \urcorner\left(x^{(2)}y^{(2)}z^{(2)} \sqsubseteq y_2^{(1)}\right) \vee \urcorner\left(x^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}z^{(2)} = y_2^{(1)}\right).$$

Pentru

$$L_1^{(3)} = (x_1 = \lambda \parallel x_1), \quad L_2^{(3)} = \urcorner \left( x^{(2)} y^{(2)} z^{(2)} z^{(2)} = y_2^{(1)} \right),$$

$$\sigma^{(3)} = \left\{ x^{(2)} y^{(2)} z^{(2)} z^{(2)} | x_1, \ x^{(2)} y^{(2)} z^{(2)} z^{(2)} | y_2^{(1)} \right\}$$

obţinem $\sigma^{(3)} = mgu \left\{ \urcorner L_1^{(3)}, L_2^{(3)} \right\}$ şi rezolventa

$$k_{10} = rez\,(k_1, k_9) = \urcorner \left( x^{(2)} y^{(2)} z^{(2)} \sqsubseteq x^{(2)} y^{(2)} z^{(2)} z^{(2)} \right),$$

deci prin renotarea variabilelor comune clauzei $k_{10}$ şi unei clauze anterior generate obţinem

$$k_{10} = \urcorner \left( x^{(3)} y^{(3)} z^{(3)} \sqsubseteq x^{(3)} y^{(3)} z^{(3)} z^{(3)} \right).$$

Pentru

$$L_1^{(4)} = (x_5 \sqsubseteq y_4), \quad L_2^{(4)} = \urcorner \left( x^{(3)} y^{(3)} z^{(3)} \sqsubseteq x^{(3)} y^{(3)} z^{(3)} z^{(3)} \right)$$

obţinem

$$\sigma^{(4)} = \left\{ x^{(3)} y^{(3)} z^{(3)} | x_5, \ x^{(3)} y^{(3)} z^{(3)} z^{(3)} | y_4 \right\} = mgu \left\{ \urcorner L_1^{(4)}, L_2^{(4)} \right\},$$

deci rezultă rezolventa,

$$\begin{array}{rcl} k_{11} & = & rez\,(k_{10}, k_5) = \\ & = & \urcorner \left( x^{(3)} y^{(3)} z^{(3)} z^{(3)} = z_1 \parallel z_2 \right) \vee \urcorner \left( x^{(3)} y^{(3)} z^{(3)} \sqsubseteq z_1 \right) \end{array}$$

care poate fi scrisă prin renotarea variabilelor

$$k_{11} = \urcorner \left( x^{(4)} y^{(4)} z^{(4)} z^{(4)} = z_1^{(1)} \parallel z_2^{(1)} \right) \vee \urcorner \left( x^{(4)} y^{(4)} z^{(4)} \sqsubseteq z_1^{(1)} \right).$$

Pentru

$$L_1^{(5)} = (x_3 \parallel z_4 = y_3 \parallel z_4), \quad L_2^{(5)} = \urcorner \left( x^{(4)} y^{(4)} z^{(4)} z^{(4)} = z_1^{(1)} \parallel z_2^{(1)} \right)$$

obţinem

$$\sigma^{(5)} = \left\{ x^{(4)} y^{(4)} z^{(4)} | x_3, \ z^{(4)} | z_4, \ z_1^{(1)} | y_3, \ z^{(4)} | z_2^{(1)} \right\} = mgu \left\{ \urcorner L_1^{(5)}, L_2^{(5)} \right\}$$

şi rezultă rezolventa

$$k_{12} = rez\,(k_{11}, k_3) = \urcorner \left( x^{(4)} y^{(4)} z^{(4)} = z_1^{(1)} \right) \vee \urcorner \left( x^{(4)} y^{(4)} z^{(4)} \sqsubseteq z_1^{(1)} \right)$$

care prin renotarea variabilelor devine

$$k_{12} = \urcorner \left( x^{(5)}y^{(5)}z^{(5)} = z_1^{(2)} \right) \vee \urcorner \left( x^{(5)}y^{(5)}z^{(5)} \sqsubseteq z_1^{(2)} \right).$$

Pentru

$$L_1^{(6)} = (x_4 \sqsubseteq x_4), \quad L_2^{(6)} = \urcorner \left( x^{(5)}y^{(5)}z^{(5)} \sqsubseteq z_1^{(2)} \right)$$

obţinem

$$\sigma^{(6)} = \left\{ x^{(5)}y^{(5)}z^{(5)}|x_4,\ x^{(5)}y^{(5)}z^{(5)}|z_1^{(2)} \right\} = mgu \left\{ \urcorner L_1^{(6)}, L_2^{(6)} \right\}$$

şi prin renotarea variabilelor rezolventei

$$k_{13} = rez\,(k_{12}, k_4) = \urcorner \left( x^{(5)}y^{(5)}z^{(5)} = x^{(5)}y^{(5)}z^{(5)} \right)$$

rezultă,

$$k_{13} = \urcorner \left( x^{(5)}y^{(5)}z^{(5)} = x^{(5)}y^{(5)}z^{(5)} \right).$$

Pentru

$$L_1^{(7)} = (x = \lambda \parallel x), \quad L_2^{(7)} = \urcorner \left( x^{(5)}y^{(5)}z^{(5)} = x^{(5)}y^{(5)}z^{(5)} \right)$$

obţinem

$$\sigma^{(7)} = \left\{ x^{(5)}y^{(5)}z^{(5)}|x \right\} = mgu \left\{ \urcorner L_1^{(7)}, L_2^{(7)} \right\},$$

deci,

$$k_{14} = rez\,(k_{13}, k_1) = \square.$$

Deoarece $k_1, ..., k_{13}, k_{14} = \square$ este o $S(\gamma)$-respingere rezolutivă, rezultă $S(\gamma)$ este invalidabilă, deci $\gamma$ este invalidabilă, ceea ce demonstrează că $\beta$ este o teoremă în teoria secvenţelor.