Geometrie (?) .

(3)

C

Matricea de trecere de la o bază la alta

Fie V un K-spațiu vectorial de dimensiune n și $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots \vec{e}_n\}$, $B' = \{f_1, f_2 \ldots f_n\}$ două baze ale sale. Putem exprima vectorii din baza B' în baza B astfel:

Pentru orice vector $\vec{f}_j$, $j = \overline{1,n}$ există și sunt unici scalarii $\alpha_{ij} \in K$ a.î.

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{n1}\vec{e}_n \\ \vec{f}_2 = \alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{n2}\vec{e}_n \\ \ldots \\ \vec{f}_n = \alpha_{1n}\vec{e}_1 + \alpha_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{nn}\vec{e}_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{f}_1, \vec{f}_2 \ldots \vec{f}_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots \vec{e}_n) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}}_{C}$$

Matricea C se numește matricea de trecere de la baza B la baza B'. $(C = M_{BB'})$

Teoremă

Fie B, B' și B'' 3 baze în K-spațiul vectorial V de dimensiune n. Atunci:

a) $M_{BB''} = M_{BB'} \cdot M_{B'B''}$

b) $M_{BB'}$ este inversabilă și $M_{BB'} = M^{-1}_{B'B}$

Dacă notăm $\vec{x}_{[B]} = \underbrace{(x_1, x_2 \ldots x_n)}_{\substack{\text{coordonatele lui} \\ \vec{x} \text{ în baza } B}}$ și

$\vec{x}_{[B']} = \underbrace{(x'_1, x'_2 \ldots x'_n)}_{\substack{\text{coordonatele lui} \\ \vec{x} \text{ în baza } B'}}$, atunci

$$x_{[B]} = M_{BB'} \cdot x_{[B']} \text{ și } x_{[B']} = M_{BB'}^{-1} \cdot x_{[B]}.$$

Ex

Fie $B = \{\vec{e}_1 = (1,-1)^T, \ \vec{e}_2 = (2,3)^T\}$ și

$B' = \{\vec{f}_1 = (3,1), \ \vec{f}_2 = (8,3)\}$

două sisteme de vectori din $\mathbb{R}^2$.

a) Să se găsească matricea de trecere de la baza B la baza B' $(M_{BB'})$

b) Dacă $x_{[B']} = (2,1)$, să se găsească $x_{[B]}$

c) Dacă $x_{[B]} = (-1,0)$, să se găsească $x_{[B']}$.

Rezolvare

a) $M_{BB'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} \vec{f}_1 = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = \alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 \end{cases}$

Fie $A = \begin{array}{cc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{array}{cc} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A' = A \cdot M_{BB'} \Rightarrow M_{BB'} = A^{-1} \cdot A'$

$\det A = 3 + 2 = 5$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M_{BB'} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x}_{[B']} = (2, 1)^T$

$\vec{x}_{[B]} = M_{BB'} \cdot \vec{x}_{[B']}$

$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 32 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32/5 \\ 19/5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{x}_{[B]} = \left(\frac{32}{5}, \frac{19}{5} \right)^T$

c) $x_{[B]} = (-1, 0)^T$

$x_{[B']} = M_{B'B} \cdot x_{[B]} = M_{BB'}^{-1} \cdot x_{[B]}$.

$M_{BB'} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 18 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 & 18/5 \\ 4/5 & 11/5 \end{pmatrix}$

$\det M_{BB'} = \frac{77}{25} - \frac{72}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

$M_{BB'}^t = \begin{pmatrix} 7/5 & 4/5 \\ 18/5 & 11/5 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{BB'}^* = \begin{pmatrix} 11/5 & -18/5 \\ -4/5 & 7/5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M_{BB'}^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{5}}\begin{pmatrix} 11/5 & -18/5 \\ -4/5 & 7/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -18 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

$x_{[B']} = \begin{pmatrix} 11 & -18 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lema substituției

Fie $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\}$ o bază a unui spațiu vectorial $V_n | K$, $\vec{v} \in V_n$ cu $\vec{v} = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$ și $B^* = \{\vec{e}_1, \dots \vec{e}_{j-1}, \vec{v}, \vec{e}_{j+1}, \dots \vec{e}_n\}$. Atunci:

1) B^* este bază a lui $V_n \Leftrightarrow \alpha_j \neq 0$.

2) Dacă $\lambda_1, \dots \lambda_n$ sunt coord. unui vector $\vec{x}$ în baza B
și $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots \lambda_n^*$ ——— în baza B^*

atunci $\begin{cases} \lambda_j^* = \lambda_j / \alpha_j \\ \lambda_i^* = \lambda_i - \alpha_i \dfrac{\lambda_j}{\alpha_j}, \quad i \neq j \end{cases}$

Demonstrație

1) "$\Leftarrow$" Știm $\alpha_j \neq 0$. Demonstrăm că B^* e bază.
Cum B^* este un sistem de n vectori și $\dim V_n = n$, este suficient să arătăm că B este liniar independent

Fie $\beta_1 \vec{e}_1 + \dots + \beta_{j-1} \vec{e}_{j-1} + \beta_j \vec{v} + \beta_{j+1} \vec{e}_{j+1} + \dots + \beta_n \vec{e}_n = 0$

Cum $\vec{v} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$

$\Rightarrow (\beta_1 + \alpha_1 \beta_j) \vec{e}_1 + \dots + (\beta_{j-1} + \alpha_{j-1} \beta_j) \vec{e}_{j-1} + \beta_j \alpha_j \vec{e}_j$
$+ (\beta_{j+1} + \alpha_{j+1} \beta_j) \vec{e}_{j+1} + \dots + (\beta_n + \alpha_n \beta_j) \vec{e}_n = 0$

Cum B – liniar indep. $\Rightarrow \begin{cases} \beta_1 + \alpha_1 \beta_j = 0 \\ \dots \\ \beta_{j-1} + \alpha_{j-1} \beta_j = 0 \\ \beta_j \alpha_j = 0 \\ \beta_{j+1} + \alpha_{j+1} \beta_j = 0 \\ \dots \\ \beta_n + \alpha_n \beta_j = 0. \end{cases}$

Am ~~ob~~ obținut un sistem liniar omogen în necunoscutele $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n$, cu determinantul

$$\Delta = \begin{array}{c} \\ \left| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & \alpha_j & 0 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & & & & 1 \end{matrix} \right| \end{array} = \alpha_j \neq 0$$

$\Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0 \Rightarrow \mathcal{B}^*$ – l.i. $\Rightarrow \mathcal{B}^*$ – bază

"$\Rightarrow$" Știm că $\mathcal{B}^*$ e bază și demonstrăm că $\alpha_j \neq 0$.

Cum $\mathcal{B}^*$ – bază $\Rightarrow \mathcal{B}^*$ – l.i.

$\Rightarrow$ din $\beta_1 \vec{l_1} + \beta_2 \vec{l_2} + \dots + \beta_{j-1} \vec{l_{j-1}} + \beta_j \vec{v} + \beta_{j+1} \vec{l_{j+1}} + \dots + \beta_n \vec{l_n} = 0 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$

și $v = \alpha_1 \vec{l_1} + \alpha_2 \vec{l_2} + \dots + \alpha_n \vec{l_n}$

$\Rightarrow (\beta_1 + \alpha_1 \beta_j) \vec{l_1} + \dots + (\beta_n + \alpha_n \beta_j) \vec{l_n} = 0$

Dar $\mathcal{B}$ – bază $\Rightarrow \begin{cases} \beta_1 + \alpha_1 \beta_j = 0 \\ \vdots \\ \beta_n + \alpha_n \beta_j = 0 \end{cases}$ (Sistem liniar omogen cu sol. $\beta_1 = \dots = \beta_n = 0$)

$\Rightarrow \Delta \neq 0$, Cum $\Delta = \alpha_j \Rightarrow \alpha_j \neq 0$.

2) Fie $\vec{x} \neq 0 \in V$.

În baza $\mathcal{B}$ $\vec{x}$ se scrie $\vec{x} = \lambda_1 \vec{l_1} + \dots + \lambda_j \vec{l_j} + \dots \lambda_n \vec{l_n}$

Dar $v = \alpha_1 \vec{l_1} + \dots + \alpha_j \vec{l_j} + \dots + \alpha_n l_n$

$$\Rightarrow \vec{l_j} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j} \vec{l_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_j} \vec{l_2} - \dots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} \vec{l_{j-1}} + \frac{1}{\alpha_j} \vec{v} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} \vec{l_{j+1}} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_j} \vec{l_n}$$

Înlocuind în expresia lui $\vec{x}$ pe $\vec{l}_j$ se obține

$$\vec{x} = \left(\lambda_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_j}\lambda_j\right)\vec{l}_1 + \left(\lambda_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_j}\lambda_j\right)\vec{l}_2 + \dots + \frac{\lambda_j}{\alpha_j}\vec{v} + \dots + \left(\lambda_n - \frac{\alpha_n}{\alpha_j}\lambda_j\right)\vec{l}_n$$

$\Rightarrow$ s-a obținut scrierea lui $\vec{x}$ în baza B^*,

deci $\lambda_i^* = \lambda_i - \alpha_i \dfrac{\lambda_j}{\alpha_j}$, $i = \overline{1,n}$, $i \neq j$

$$\lambda_j^* = \frac{\lambda_j}{\alpha_j}$$

Obs

Schematic, lema substituției se prezintă astfel:

Vectori în baza B	$\vec{v}_i$	X
e_1	α_1	λ_1
e_2	α_2	λ_2
⋮	⋮	⋮
e_i	$\boxed{\alpha_i}$	λ_i
⋮	⋮	⋮
e_j	α_j	λ_j
⋮	⋮	⋮
e_n	α_n	λ_n

$\xrightarrow[\text{cu vect. } l_i]{\text{vectorul } v_i \text{ se înlocuiește}}$

B^*	$\vec{v}_i$	$\vec{x}$
e_1	0	$\lambda_1^* = \dfrac{\alpha_i\lambda_1 - \alpha_1\lambda_i}{\alpha_i}$
e_2	0	⋮
⋮	⋮	⋮
$\vec{v}_i$	1	$\lambda_i^* = \dfrac{\lambda_i}{\alpha_i}$
⋮	⋮	⋮
$\vec{e}_j$	0	⋮
⋮	⋮	⋮
$\vec{e}_n$	0	$\lambda_n^* = \dfrac{\alpha_i\lambda_n - \alpha_n\lambda_i}{\alpha_i}$

α_i – se numește pivot

Al doilea tabel se obține din primul cu regula pivotului.

- linia pivotului se împarte la pivot
- coloana pivotului (în afară de pivot) se completează cu 0.
- celelalte elem. se calc. cu regula dreptunghiului

$$\begin{array}{ccc} \alpha_i & & el \\ p & & \lambda_j \end{array} \Rightarrow el^* = \frac{p \cdot el - \alpha_i \cdot \lambda_j}{p}$$

Aplicații ale lemei substituției

1. Testul bazei și calculul coordonatelor unui vector în ~~acea~~ bază

Fie $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$ un sistem de vectori dintr-un spațiu vectorial n-dimensional și un vector $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ scris în baza canonică.

Se completează tabelul inițial, ce conține scrierile vectorilor $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n$ și $\vec{x}$ în baza canonică $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_n\}$

	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\dots$	$\vec{v}_n$	$\vec{x}$
$\vec{e}_1$					α_1
$\vdots$					$\vdots$
$\vec{e}_n$					α_n

Se aplică regula pivotului.
Dacă în final se obține

	$\vec{v}_1$		$\dots$	$\vec{v}_n$	$\vec{x}$
$\vec{v}_1$	1	0	$\dots$	0	β_1
	0	1	$\dots$	0	β_2
$\vdots$	—	—		—	$\vdots$
$\vec{v}_n$	0	$\dots$		1	β_n

atunci B - bază, iar coordonatele lui $\vec{x}$ în baza B sunt: $\vec{x}_{[B]} = (\beta_1, \beta_2 \dots \beta_n)$

Ex

Fie $S = \{ (1,-2,2)^T, (-2,5,-3)^T, (3,0,2)^T \}$ și $\vec{x} = (0,-3,2)^T$.

Să se arate că S este o bază în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ și să se calculeze coordonatele lui $\vec{x}$ în această bază.

	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{x}$
$\leftarrow \vec{e}_1$	$\boxed{1}$	-2	3	0
$\vec{e}_2$	-2	5	0	-3
$\vec{e}_3$	2	-3	2	2
$\vec{v}_1$	1	-2	3	0
$\vec{e}_2$	0	$\boxed{1}$	6	-3
$\vec{e}_3$	0	1	-4	2
$\vec{v}_1$	1	0	15	-6
$\vec{v}_2$	0	1	6	-3
$\leftarrow \vec{e}_3$	0	0	$\boxed{-10}$	5
$\vec{v}_1$	1	0	0	3/2
$\vec{v}_2$	0	1	0	0
$\vec{v}_3$	0	0	1	-1/2

Deoarece s-a obținut matricea unitate $\Rightarrow$ S-bază, iar coordonatele lui $\vec{x}$ în baza S sunt

$$\vec{x}_{[S]} = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right)$$

Temă

Să se verifice dacă următoarele sisteme formează o bază, și, în caz afirmativ, să se calculeze coordonatele lui $\vec{x}$ în acea bază.

a) $B = \{ (1,3,5)^T, (2,1,2)^T, (1,0,2)^T \}$, $\vec{x} = (-1,3,1)^T$

b) $B = \{ (1,+2,-1)^T, (1,5,0)^T, (6,3,-3)^T \}$, $\vec{x} = (0,3,2)^T$

2. Determinarea matricei de trecere de la o bază la alta.

Fie $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$ și

$B_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2 \dots \vec{w}_n\}$

două baze dintr-un spațiu vectorial n-dim.

Notăm cu A_1 matricea atașată bazei B_1

și cu A_2 matricea atașată bazei B_2.

Atunci matricea de trecere de la B_1 la B_2

este $A_1^{-1} \cdot A_2$.

Cu ajutorul lemei substituției, matricea de trecere de la B_1 la B_2 se determină astfel:

- Se formează tabelul

	$\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$	$\vec{w}_1 \ \vec{w}_2 \dots \vec{w}_n$
$\vec{e}_1$ ⋮ $\vec{e}_n$	A_1	A_2

Se aplică regula pivotului și în final se va obține:

	$\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \dots \vec{v}_n$	$\vec{w}_1 \ \vec{w}_2 \dots \vec{w}_n$
$\vec{v}_1$ $\vec{v}_2$ ⋮ $\vec{v}_n$	I_n	$C^{-1} D$.

 Obs: Dacă în loc de A_2 avem I_n $\Rightarrow$ la final se obține C^{-1}

Ex

Fie $B_1 = \{(1,1,0)^T, (1,0,1)^T, (0,0,1)^T\}$

$B_2 = \{(1,2,3)^T, (1,1,1)^T, (1,0,1)^T\}$.

Să se determine matricea de trecere de la B_1 la B_2

Rez

	$\vec{v}_1$	$\vec{v}_2$	$\vec{v}_3$	$\vec{w}_1$	$\vec{w}_2$	$\vec{w}_3$
$\vec{e}_1$	$\boxed{1}$	1	0	1	1	1
$\vec{e}_2$	1	0	0	2	1	0
$\vec{e}_3$	0	1	1	3	1	1
	1	1	0	1	1	1
$\vec{e}_2$	0	$\boxed{-1}$	0	1	0	-1
$\vec{e}_3$	0	+1	1	3	1	1
$\vec{v}_1$	1	0	0	2	1	0
$\vec{v}_2$	0	1	0	-1	0	1
$\vec{e}_3$	0	0	1	4	1	0

$\underbrace{\qquad\qquad}_{I_3}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{C^{-1}D}$

Matricea de trecere de la B_1 la B_2 este $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Temă

Să se determine matricea de trecere de la B_1 la B_2 dacă

a) $B_1 = \{(1,1,1)^T, (1,1,2)^T, (1,2,1)^T\}$

$B_2 = \{(2,1,0)^T, (3,-1,2)^T, (1,0,2)^T\}$

b) $B_1 = \{(2,-1,0)^T, (1,1,1)^T, (0,2,3)^T\}$

$B_2 = \{(-1,0,1)^T, (0,1,1)^T, (3,1,-1)^T\}$