Curs 11

Sisteme de ecuaţii diferenţiale omogene, liniare, de ordinul întâi, cu coeficienţi constanţi (Continuare)

3. Ecuaţia caracteristică are şi rădăcini reale şi rădăcini complexe distincte

În această situaţie se aplică metoda corespunzătoare situaţiei în care rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt reale şi distincte pentru rădăcinile reale şi metoda corespunzătoare situaţiei în care rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt complexe şi distincte pentru rădăcinile complexe.

Exemplu

Să se rezolve sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} x_1' &= -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_2' &= -10x_1 + 6x_2 + 8x_3 \\ x_3' &= 3x_1 - x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

Rezolvare

Căutăm soluţii de forma

$$x_1 = \alpha_1 e^{rt},\ x_2 = \alpha_2 e^{rt},\ x_3 = \alpha_3 e^{rt}.$$

Atunci sistemul din care obţinem ecuaţia caracteristică devine

$$\begin{cases} (-2-r)\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ -10\alpha_1 + (6-r)\alpha_2 + 8\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 - (2+r)\alpha_3 &= 0 \end{cases} \tag{1}$$

Rezultă că ecuaţia caracteristică este

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2-r & 2 & 2 \\ -10 & 6-r & 8 \\ 3 & -1 & -2-r \end{vmatrix} = r(r^2 - 2r + 2) = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt

$$r_1 = 0,\ r_{2,3} = 1 \pm i.$$

Acum, pentru fiecare r calculăm α_i corespunzători.

Pentru $r_1 = 0$, sistemul (1) devine

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ -10\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0 \end{cases},$$

cu soluţia $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 = -\alpha_1$, $\alpha_3 = 2\alpha_1$. Considerând $\alpha_1 = 1$, obţinem $\alpha_{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, deci $X_{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \cdot e^{0\cdot t} \\ -1 \cdot e^{0\cdot t} \\ 2 \cdot e^{0\cdot t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Pentru $r_2 = 1 + i$, sistemul (1) devine

$$\begin{cases} (-3-i)\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 & = & 0 \\ -10\alpha_1 + (5-i)\alpha_2 + 8\alpha_3 & = & 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 - (3+i)\alpha_3 & = & 0 \end{cases},$$

de unde rezultă $\alpha_1 \in \mathbb{C}$, $\alpha_2 = (1+i)\alpha_1$, $\alpha_3 = \dfrac{1-i}{2}\alpha_1$.

Dacă luăm $\alpha_1 = 1 - i$, atunci $\alpha_2 = 2$ şi $\alpha_3 = -i$, deci

$$X_{r_2} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot e^t\left(\cos t + i \sin t\right) = \begin{pmatrix} (1-i)e^t\left(\cos t + i\sin t\right) \\ 2e^t\left(\cos t + i\sin t\right) \\ -ie^t\left(\cos t + i\sin t\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t(\cos t + \sin t) \\ 2e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^t(\sin t - \cos t) \\ 2e^t \sin t \\ -e^t \cos t \end{pmatrix},$$

de unde rezultă $\widetilde{X}_{r_2} = \begin{pmatrix} e^t(\cos t + \sin t) \\ 2e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$ şi $\widetilde{\widetilde{X}}_{r_2} = \begin{pmatrix} e^t(\sin t - \cos t) \\ 2e^t \sin t \\ -e^t \cos t \end{pmatrix}$, deci

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 X_{r_1} + c_2 \widetilde{X}_{r_2} + c_3 \widetilde{\widetilde{X}}_{r_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 \\ 2c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2e^t(\cos t + \sin t) \\ 2c_2e^t \cos t \\ c_2e^t \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_3e^t(\sin t - \cos t) \\ 2c_3e^t \sin t \\ -c_3e^t \cos t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 + c_2e^t(\cos t + \sin t) + c_3e^t(\sin t - \cos t) \\ -c_1 + 2c_2e^t\cos t + 2c_3e^t \sin t \\ 2c_1 + c_2e^t \sin t - c_3e^t \cos t \end{pmatrix}$$

deci soluţia sistemului este

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 + c_2e^t(\cos t + \sin t) + c_3e^t(\sin t - \cos t) \\ x_2 &= -c_1 + 2c_2e^t \cos t + 2c_3e^t \sin t \\ x_3 &= 2c_1 + c_2e^t \sin t - c_3e^t \cos t \end{aligned}$$

4. Ecuaţia caracteristică are rădăcini reale şi multiple

4a) Rădăcinile reale multiple determină soluţii liniar independente

Exemplu

Să se rezolve sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} x_1' & = & x_2 + x_3 \\ x_2' & = & x_1 + x_3 \\ x_3' & = & x_1 + x_2 \end{cases}$$

Rezolvare

Căutăm soluţii de forma

$$x_1 = \alpha_1 e^{rt},\ x_2 = \alpha_2 e^{rt},\ x_3 = \alpha_3 e^{rt}.$$

Atunci sistemul din care obţinem ecuaţia caracteristică devine

$$\left\{\begin{array}{rcl} -r\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 - r\alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - r\alpha_3 & = & 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

Rezultă că ecuaţia caracteristică este

$$\Delta = \begin{vmatrix} -r & 1 & 1 \\ 1 & -r & 1 \\ 1 & 1 & -r \end{vmatrix} = (2-r)(-r-1)^2 = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt

$$r_1 = 2,\ r_{2,3} = -1.$$

Acum, pentru fiecare r calculăm α_i corespunzători.

Pentru $r_1 = 2$, sistemul (2) devine

$$\left\{\begin{array}{lcl} -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 & = & 0 \end{array}\right.,$$

cu soluţia $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Considerând $\alpha_1 = 1$, obţinem $\alpha_{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, deci $X_{r_1} = \begin{pmatrix} 1\cdot e^{2t} \\ 1\cdot e^{2t} \\ 1\cdot e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$.

Pentru $r_2 = -1$, sistemul (2) devine

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \end{array}\right.,$$

cu soluţia $\alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3$, unde $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Considerând $\alpha_2 = a$ şi $\alpha_3 = b$, soluţia sistemului este

$$(-a-b, a, b) = (-a, a, 0) + (-b, 0, b) = a(-1, 1, 0) + b(-1, 0, 1),$$

de unde rezultă că vectorii $(-1, 1, 0)$ şi $(-1, 0, 1)$ sunt liniari independenţi, şi astfel $\alpha_{r_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $\alpha_{r_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Obţinem $X_{r_2} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $X_{r_3} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$. Atunci soluţia generală a sistemului este

$$X = c_1 X_{r_1} + c_2 X_{r_2} + c_3 X_{r_3} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_1 e^{2t} \\ c_1 e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_2 e^{-t} \\ c_2 e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_3 e^{-t} \\ 0 \\ c_3 e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1e^{2t} - c_2e^{-t} - c_3e^{-t} \\ c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \\ c_1e^{2t} + c_3e^{-t} \end{pmatrix}$$

deci soluţia sistemului este

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1e^{2t} - c_2e^{-t} - c_3e^{-t} \\ x_2 &= c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \\ x_3 &= c_1e^{2t} + c_3e^{-t} \end{aligned}$$

4b) Rădăcinile reale multiple nu determină soluţii liniar independente

Exemplu

Să se rezolve sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} x_1' &= & -x_1 + x_2 \\ x_2' &= & -x_2 + 4x_3 \\ x_3' &= & x_1 - 4x_3 \end{cases} \tag{3}$$

Rezolvare

Căutăm soluţii de forma

$$x_1 = \alpha_1 e^{rt},\ x_2 = \alpha_2 e^{rt},\ x_3 = \alpha_3 e^{rt}.$$

Atunci sistemul din care obţinem ecuaţia caracteristică devine

$$\begin{cases} (-1-r)\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ (-1-r)\alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - (4+r)\alpha_3 &= 0 \end{cases} \tag{4}$$

Rezultă că ecuaţia caracteristică este

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1-r & 1 & 0 \\ 0 & -1-r & 4 \\ 1 & 0 & -4-r \end{vmatrix} = r(r+3)^2 = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt

$$r_1 = 0,\ r_{2,3} = -3.$$

Acum, pentru fiecare r calculăm α_i corespunzători.

Pentru $r_1 = 0$, sistemul (4) devine

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - 4\alpha_3 &= 0 \end{cases},$$

cu soluţia $\alpha_1 = \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_3 = \dfrac{\alpha_1}{4}$. Considerând $\alpha_1 = 4$, obţinem $\alpha_{r_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, deci $y_{r_1} = \begin{pmatrix} 4 \cdot e^{0 \cdot t} \\ 4 \cdot e^{0 \cdot t} \\ 1 \cdot e^{0 \cdot t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pentru $r_2 = -3$, sistemul (4) devine

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 & = & 0 \\ 2\alpha_2 + 4\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 & = & 0 \end{cases},$$

cu soluţia $\alpha_1 = \alpha_3 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 = -2\alpha_1$. Considerând $\alpha_1 = 1$ obţinem $\alpha_{r_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, deci $X_{r_2} = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -2e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$.

Pentru $r_3 = -3$ nu putem găsi o soluţie liniar independentă cu α_{r_2}, şi atunci pentru $r_2 = r_3 = -3$, vom căuta soluţii ale sistemului (3) de forma

$$x_1 = (A_1 + A_2 t)e^{-3t},\ x_2 = (B_1 + B_2 t)e^{-3t},\ x_3 = (C_1 + C_2 t)e^{-3t},$$

deci

$$x_1' = A_2 e^{-3t} - 3(A_1 + A_2 t)e^{-3t},\ x_2 = B_2 e^{-3t} - 3(B_1 + B_2 t)e^{-3t},\ x_3 = C_2 e^{-3t} - 3(C_1 + C_2 t)e^{-3t}.$$

Înlocuind în sistemul (3) şi împărţind fiecare ecuaţie prin e^{-3t} obţinem

$$\begin{cases} A_2 - 3A_1 - 3A_2 t & = & -A_1 + B_1 - A_2 t + B_2 t \\ B_2 - 3B_1 - 3B_2 t & = & -B_1 + 4C_1 - B_2 t + 4C_2 t \\ C_2 - 3C_1 - 3C_2 t & = & A_1 - 4C_1 + A_2 t - 4C_2 t \end{cases}$$

Identificând coeficienţii obţinem

$$\begin{cases} -3A_2 & = & -A_2 + B_2 \\ -3B_2 & = & -B_2 + 4C_2 \\ -3C_2 & = & A_2 - C_2 \\ A_2 - 3A_1 & = & -A_1 + B_1 \\ B_2 - 3B_1 & = & -B_1 + 4C_1 \\ C_2 - 3C_1 & = & A_1 - 4C_1 \end{cases}$$

Din primele trei ecuaţii obţinem

$$A_2 \in \mathbb{R},\ B_2 = -2A_2,\ C_2 = A_2,$$

iar din ultimele trei ecuaţii

$$A_1 \in \mathbb{R},\ B_1 = A_2 - 2A_1,\ C_1 = A_1 - C_2.$$

Pentru $A_1 = 0$ şi $A_2 = 1$, obţinem $B_2 = -2,\ C_2 = 1,\ B_1 = 1,\ C_1 = -1$, deci

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & te^{-3t} \\ x_2 & = & e^{-3t} - 2te^{-3t} \\ x_3 & = & -e^{-3t} + te^{-3t} \end{array}.$$

Obţinem

$$X_{r_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix},\quad X_{r_3} = \begin{pmatrix} te^{-3t} \\ -2te^{-3t} \\ te^{-3t} \end{pmatrix}$$

Atunci soluţia generală a sistemului este

$$X = c_1 X_{r_1} + c_2 X_{r_2} + c_3 X_{r_3} = \begin{pmatrix} 4c_1 \\ 4c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 e^{-3t} \\ -c_2 e^{-3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_3 t e^{-3t} \\ -2c_3 t e^{-3t} \\ c_3 t e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4c_1 + c_3 t e^{-3t} \\ 4c_1 + c_2 e^{-3t} - 2c_3 t e^{-3t} \\ c_1 - c_2 e^{-3t} + c_3 t e^{-3t} \end{pmatrix}$$

deci soluţia sistemului este

$$\begin{aligned} x_1 &= 4c_1 + c_3 t e^{-3t} \\ x_2 &= 4c_1 + c_2 e^{-3t} - 2c_3 t e^{-3t} \\ x_3 &= c_1 - c_2 e^{-3t} + c_3 t e^{-3t} \end{aligned}$$