Curs 8

Ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniare şi neomogene cu coeficienţi constanţi

Forma generală a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul n liniare şi neomogene cu coeficienţi constanţi este

$$x^n + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + ... + a_0 x = f(t). \tag{1}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (1) este egală cu suma dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene şi o soluţie particulară, care se poate găsi prin metoda variaţiei constantei.

În anumite cazuri se poate găsi o soluţie particulară prin calcul algebric.

În continuare vom prezenta metode de determinare soluţiei particulare prin calcul algebric, ţinând cont de forma funcţiei $f(t)$.

1. Funcţia f este un polinom de gradul m şi $a_0 \neq 0$

Dacă

$$f(t) = b_m t^m + b_{m-1}t^{m-1} + ... + b_0$$

şi $a_0 \neq 0$, atunci ecuaţia (1) are o soluţie particulară de forma

$$x_p = \lambda_m t^m + \lambda_{m-1}t^{m-1} + ... + \lambda_0.$$

Coeficienţii $\lambda_0,\ \lambda_1, ..., \lambda_m$ se determină prin identificare înlocuind soluţia x_p în ecuaţia (1).

Exemplu

Să se afle soluţia generală a ecuaţiei

$$x'' + x = t^2 + t.$$

Rezolvare

Rezolvăm întâi ecuaţia omogenă

$$x'' + x = 0.$$

Pentru aceasta căutăm soluţii de forma $x = e^{rt}$. Avem:

$$x' = re^{rt},\ x'' = r^2 e^{rt}.$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială şi împărţind prin e^{rt} obţinem ecuaţia caracteristică

$$r^2 + 1 = 0,$$

ale cărei soluţii sunt $r = \pm i$, deci $\alpha = 0$ şi $\beta = 1$. Rezultă că soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$x_o = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Căutăm acum soluţia particulară. Cum $f(t)$ este polinom de gradul al doilea, rezultă că soluţia particulară trebuie să fie de forma unui polinom de gradul al doilea, adică

$$x_p = \lambda_2 t^2 + \lambda_1 t + \lambda_0.$$

Derivând soluţia particulară obţinem

$$x_p' = 2\lambda_2 t + \lambda_1, \ x_p'' = 2\lambda_2.$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială, obţinem

$$2\lambda_2 + \lambda_2 t^2 + \lambda_1 t + \lambda_0 = t^2 + t.$$

Identificând coeficienţii, rezultă

$$\lambda_2 = 1, \ \lambda_1 = 1, \ \lambda_0 = -2,$$

deci soluţia particulară este

$$x_p = t^2 + t - 2.$$

În final obţinem soluţia generală a ecuaţiei

$$x = x_o + x_p = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t^2 + t - 2.$$

2. Funcţia f este un polinom de gradul m şi $a_0 = a_1 = ... = a_{p-1} = 0$, iar $a_p \neq 0$

Dacă

$$f(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + ... + b_0$$

şi

$$a_0 = a_1 = ... = a_{p-1} = 0, \quad a_p \neq 0,$$

atunci ecuaţia (1) are o soluţie particulară de forma

$$x_p = t^p \left(\lambda_m t^m + \lambda_{m-1} t^{m-1} + ... + \lambda_0 \right).$$

Coeficienţii $\lambda_0, \ \lambda_1, ..., \lambda_m$ se determină prin identificare înlocuind soluţia x_p în ecuaţia (1).

Exemplu

Să se afle soluţia generală a ecuaţiei

$$x'' + x' = t - 2.$$

Rezolvare

Avem o ecuaţie diferenţială de ordinul 2, cu $a_0 = 1, a_1 \neq 0$, deci $p = 1$ şi $f(t) = t - 2$ (polinom de gradul întâi).

Rezolvăm întâi ecuaţia omogenă

$$x'' + x' = 0.$$

Pentru aceasta căutăm soluţii de forma $x = e^{rt}$. Avem:

$$x' = re^{rt},\ x'' = r^2 e^{rt}.$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială obţinem şi împărţind prin e^{rt} obţinem ecuaţia caracteristică

$$r^2 + r = 0,$$

ale cărei soluţii sunt $r_1 = 0$, şi $r_2 = -1$. Rezultă că soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$x_o = c_1 + c_2 e^{-t}.$$

Căutăm acum soluţia particulară. Cum $f(t)$ este polinom de gradul întâi, rezultă că soluţia particulară trebuie să fie de forma unui polinom de gradul întâi, adică

$$x_p = t(\lambda_1 t + \lambda_0) = \lambda_1 t^2 + \lambda_0 t.$$

Derivând soluţia particulară obţinem

$$x_p' = 2\lambda_1 t + \lambda_0,\ x_p'' = 2\lambda_1.$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială, obţinem

$$2\lambda_1 + 2\lambda_1 t + \lambda_0 = t - 2.$$

Identificând coeficienţii, rezultă

$$\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_0 = -3,$$

deci soluţia particulară este

$$x_p = t\left(\frac{1}{2}t - 3\right).$$

În final obţinem soluţia generală a ecuaţiei

$$x = x_o + x_p = c_1 + c_2 e^{-t} + t\left(\frac{1}{2}t - 3\right).$$

3. Funcţia f este de forma $f(t) = e^{\alpha t}\left(b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + ... + b_0\right)$

Dacă funcţia f este de forma

$$f(t) = e^{\alpha t}\left(b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + ... + b_0\right)$$

atunci, în funcţie de valorile lui α, avem următoarele cazuri posibile:

Dacă α nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţia (1) are o soluţie particulară de forma

$$x_p = e^{\alpha t}\left(\lambda_m t^m + \lambda_{m-1}t^{m-1} + ... + \lambda_0\right).$$

Coeficienţii $\lambda_0,\ \lambda_1, ..., \lambda_m$ se determină prin identificare înlocuind soluţia x_p în ecuaţia (1).

Dacă α este rădăcină multiplă de ordinul p a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţia (1) are o soluţie particulară de forma

$$x_p = t^p e^{\alpha t}\left(\lambda_m t^m + \lambda_{m-1}t^{m-1} + ... + \lambda_0\right).$$

Coeficienţii $\lambda_0,\ \lambda_1, ..., \lambda_m$ se determină prin identificare înlocuind soluţia x_p în ecuaţia (1).

Exemple

a) Să se afle soluţia generală a ecuaţiei

$$x'' - x = te^{2t}.$$

Rezolvare

Rezolvăm întâi ecuaţia omogenă

$$x'' - x = 0.$$

Pentru aceasta căutăm soluţii de forma $x = e^{rt}$. Avem:

$$x' = re^{rt},\ x'' = r^2 e^{rt}.$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială obţinem şi împărţind prin e^{rt} obţinem ecuaţia caracteristică

$$r^2 - 1 = 0,$$

ale cărei soluţii sunt $r_1 = 1$, şi $r_2 = -1$. Rezultă că soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$x_o = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Căutăm acum soluţia particulară. Cum $f(t) = e^{\alpha t}\left(b_m t^m + b_{m-1}t^{m-1} + ... + b_0\right)$, iar α nu este rădăcină a ecuaţiei caracterisrice, rezultă că soluţia particulară trebuie să fie de forma

$$x_p = e^{2t}(\lambda_1 t + \lambda_0).$$

Derivând soluţia particulară obţinem

$$x_p' = e^{2t}\left(2\lambda_1 t + 2\lambda_0 + \lambda_1\right),\ x_p'' = e^{2t}\left(4\lambda_1 t + 4\lambda_0 + 4\lambda_1\right).$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială, obţinem

$$e^{2t}\left(4\lambda_1 t + 4\lambda_0 + 4\lambda_1\right) - e^{2t}(\lambda_1 t + \lambda_0) = te^{2t},$$

iar, prin împărţire la e^{2t} obţinem

$$4\lambda_1 t + 4\lambda_0 + 4\lambda_1 - \lambda_1 t - \lambda_0 = t \Leftrightarrow 3\lambda_1 t + 3\lambda_0 + 4\lambda_1 = t.$$

Identificând coeficienţii, rezultă

$$\lambda_1 = \frac{1}{3},\ \lambda_0 = -\frac{4}{9},$$

deci soluţia particulară este

$$x_p = e^{2t}\left(\frac{1}{3}t - \frac{4}{9}\right).$$

În final obţinem soluţia generală a ecuaţiei

$$x = x_o + x_p = c_1e^t + c_2e^{-t} + e^{2t}\left(\frac{1}{3}t - \frac{4}{9}\right).$$

b) Să se afle soluţia generală a ecuaţiei

$$x'' - x = te^t.$$

Rezolvare

Rezolvăm întâi ecuaţia omogenă

$$x'' - x = 0.$$

Cum este aceeaşi ecuaţie ca la punctul a), rezultă că soluţiile ecuaţiei caracteristice sunt $r_1 = 1$, şi $r_2 = -1$, deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$x_o = c_1e^t + c_2e^{-t}.$$

Căutăm acum soluţia particulară. Cum $f(t) = e^{\alpha t}\left(b_mt^m + b_{m-1}t^{m-1} + ... + b_0\right)$, iar α este rădăcină a ecuaţiei caracterisrice cu ordinul de multiplicitata 1, rezultă că soluţia particulară trebuie să fie de forma

$$x_p = te^t(\lambda_1t + \lambda_0).$$

Derivând soluţia particulară obţinem

$$x_p' = e^t\left(\lambda_1t^2 + \lambda_0t + 2\lambda_1t + \lambda_0\right),\ x_p'' = e^t\left(\lambda_1t^2 + 4\lambda_1t + \lambda_0t + 2\lambda_0 + 2\lambda_1\right).$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială, obţinem

$$e^t\left(\lambda_1t^2 + 4\lambda_1t + \lambda_0t + 2\lambda_0 + 2\lambda_1\right) - te^t(\lambda_1t + \lambda_0) = te^{2t},$$

iar, prin împărţire la e^{2t} obţinem

$$4\lambda_1t + 2\lambda_0 + 2\lambda_1 = t.$$

Identificând coeficienţii, rezultă

$$\lambda_1 = \frac{1}{4},\ \lambda_0 = -\frac{1}{4},$$

deci soluţia particulară este

$$x_p = te^t\left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\right).$$

În final obţinem soluţia generală a ecuaţiei

$$x = x_o + x_p = c_1e^t + c_2e^{-t} + te^t\left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}\right).$$

4. Funcţia f are una din următoarele două forme

$$f(t) = e^{\alpha t}\left(b_m t^m + b_{m-1}t^{m-1} + ... + b_0\right)\cos\beta t$$

sau

$$f(t) = e^{\alpha t}\left(b_m t^m + b_{m-1}t^{m-1} + ... + b_0\right)\sin\beta t$$

În această situaţie, în funcţie de valorile lui α şi β, avem următoarele cazuri posibile:

Dacă $\alpha + i\beta$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţia (1) are o soluţie particulară de forma

$$x_p = e^{\alpha t}\left(Q_1(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin\beta t\right),$$

unde $Q_1(t)$ şi $Q_2(t)$ sunt polinoame de gradul m ai căror coeficienţi se determină prin identificare înlocuind soluţia x_p în ecuaţia (1).

Dacă $\alpha + i\beta$ este rădăcină multiplă de ordinul p a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţia (1) are o soluţie particulară de forma

$$x_p = t^p e^{\alpha t}\left(Q_1(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin\beta t\right),$$

unde $Q_1(t)$ şi $Q_2(t)$ sunt polinoame de gradul m ai căror coeficienţi se determină prin identificare înlocuind soluţia x_p în ecuaţia (1).

Exemple

a) Să se afle soluţia generală a ecuaţiei

$$x'' - 7x' + 6x = \sin t.$$

Rezolvare

Rezolvăm întâi ecuaţia omogenă

$$x'' - 7x' + 6x = 0.$$

Pentru aceasta căutăm soluţii de forma $x = e^{rt}$. Avem:

$$x' = re^{rt},\ x'' = r^2 e^{rt}.$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială obţinem şi împărţind prin e^{rt} obţinem ecuaţia caracteristică

$$r^2 - 7r + 6 = 0,$$

ale cărei soluţii sunt $r_1 = 1$, şi $r_2 = 6$. Rezultă că soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$x_o = c_1 e^t + c_2 e^{6t}.$$

Căutăm acum soluţia particulară. Cum $f(t) = e^{\alpha t}\left(b_m t^m + b_{m-1}t^{m-1} + ... + b_0\right)\sin\beta t$, cu $\alpha = 0,\ \beta = 1$, deci $\alpha + i\beta$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracterisrice, rezultă că soluţia particulară trebuie să fie de forma

$$x_p = A\cos t + B\sin t.$$

Derivând soluţia particulară obţinem

$$x_p' = -A\sin t + B\cos t,\ x_p'' = -A\cos t - B\sin t.$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială, obţinem

$$-A\cos t - B\sin t - 7(-A\sin t + B\cos t) + 6(A\cos t + B\sin t) = \sin t$$

$$\Leftrightarrow (5A - 7B)\cos t + (7A + 5B)\sin t = \sin t.$$

Identificând coeficienţii, rezultă sistemul

$$5A - 7B = 0, \quad 7A + 5B = 1,$$

de unde obţinem

$$A = \frac{7}{74},\ B = \frac{5}{74},$$

deci soluţia particulară este

$$x_p = \frac{7}{74}\cos t + \frac{5}{74}\sin t.$$

În final obţinem soluţia generală a ecuaţiei

$$x = x_o + x_p = c_1 e^t + c_2 e^{6t} + \frac{7}{74}\cos t + \frac{5}{74}\sin t.$$

b) Să se afle soluţia generală a ecuaţiei

$$x'' + 4x = t\sin 2t.$$

Rezolvare

Rezolvăm întâi ecuaţia omogenă

$$x'' + 4x = 0.$$

Ecuaţia caracteristică este

$$r^2 + 4r = 0,$$

ale cărei soluţii sunt $r_{1,2} = \pm 2i$, deci ecuaţia caracteristică are o soluţie complexă de forma $\alpha + i\beta$, cu $\alpha = 0$ şi $\beta = 2$. Rezultă că soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$x_o = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t.$$

Căutăm acum soluţia particulară. Cum $f(t) = e^{\alpha t}\left(b_m t^m + b_{m-1}t^{m-1} + ... + b_0\right)\sin\beta t$, cu $\alpha = 0$, $\beta = 2$, deci $\alpha + i\beta$ este rădăcină simplă a ecuaţiei caracteristice, rezultă că soluţia particulară trebuie să fie de forma

$$x_p = t\left[(\lambda_1 t + \lambda_0)\cos 2t + (\beta_1 t + \beta_0)\sin 2t\right].$$

Derivând soluţia particulară obţinem

$$x_p' = \left(2\beta_1 t^2 + 2\lambda_1 t + 2\beta_0 t + \lambda_0\right)\cos 2t + \left(-2\lambda_1 t^2 + 2\beta_1 t - 2\lambda_0 t + \beta_0\right)\sin 2t,$$

$$x_p'' = (-4\lambda_1 t^2 + 8\beta_1 t - 4\lambda_0 t + 2\lambda_1 + 4\beta_0)\cos 2t - (4\beta_1 t^2 + 8\lambda_1 t + 4\beta_0 t + 4\lambda_0 - 2\beta_1)\sin 2t.$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială şi grupând după puterile lui t, obţinem

$$t(8\beta_1 \cos 2t - 8\lambda_1 \sin 2t) + 2\lambda_1 \cos 2t + 4\beta_0 \cos 2t + 2\beta_1 \sin 2t - 4\lambda_0 \sin 2t = t \sin 2t.$$

Identificând coeficienţii, rezultă sistemul

$$8\beta_1 = 0, \quad -8\lambda_1 = 1, \quad 2\lambda_1 + 4\beta_0 = 0, \quad 2\beta_1 - 4\lambda_0 = 0,$$

de unde obţinem

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{8}, \quad \beta_0 = \frac{1}{16}, \quad \beta_1 = 0,$$

deci soluţia particulară este

$$x_p = t\left[\left(-\frac{1}{8}t\right)\cos 2t + \frac{1}{16}\sin 2t\right].$$

În final obţinem soluţia generală a ecuaţiei

$$x = x_o + x_p = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t - \frac{t^2}{8}\cos 2t + \frac{t}{16}\sin 2t.$$