Probabilități și Statistică Matematică

Seminar 08.04.2021

Variabile aleatoare multidimensionale

1. Se consideră vectorul aleator discret (X,Y) cu repartiția dată în tabelul:

X\Y	2	6
1	0.20	0.10
3	0.05	0.15
4	0.45	0.05

a) Să se det. rep. var $X, Y, X+Y$

b) Să se stabilească dacă X și Y sunt indep.

c) Să se calc. $F\left(\frac{7}{2}, 5\right)$.

Rezolvare.

a) $X: \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ unde $\begin{cases} p_1 = 0,2 + 0,1 = 0,3 \\ p_2 = 0,05 + 0,15 = 0,2 \\ p_3 = 0,45 + 0,05 = 0,5 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$

$Y: \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$ unde $\begin{cases} q_1 = 0,2 + 0,05 + 0,45 = 0,7 \\ q_2 = 0,1 + 0,15 + 0,05 = 0,3 \end{cases} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$

$X+Y: \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 & 9 & 10 \\ 0,2 & 0,05 & 0,45 & 0,10 & 0,15 & 0,05 \end{pmatrix}$

b) Pt verif. indep. var X, Y efectuăm:

$P(x=1) \cdot P(y=2) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21$
$P((x=1) \cap (y=2)) = 0,20$
$\Rightarrow 0,21 \neq 0,20 \Rightarrow x, y$ dependente

c) $F\left(\frac{7}{2}, 5\right) = P\left(x \leq \frac{7}{2}, y \leq 5\right) = P(x=1, y=2) \cup P(x=2, y=2) =$
$= 0,2 + 0,05 = 0,25.$

2. Fie vectorul aleator (X,Y) cu densitatea de probabilitate $f(x,y) =$
$= \begin{cases} k(x+y+1), & x \in [0,1], y \in [0,2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

a) Să se det const. k

b) Să se det dens. marginale

c) Să se calc. dacă X și Y sunt indep. sau nu.

Rezolvare

a) $\begin{cases} f(x,y) \geq 0 \Rightarrow k \geq 0 \\ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy}_{\|} = 1 \end{cases}$

$$k \int_0^1 dx \int_0^2 (x+y+1)\, dy = k \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} + y\right)\Big|_0^2 dx = k \int_0^1 (2x+4)\, dx =$$

$$= k\,(x^2+4x)\Big|_0^1 = k \cdot 5 = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{5}$$

b) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx = \frac{1}{5} \int_0^1 (x+y+1)\, dx = \frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2} + yx + x\right)\Big|_0^1 =$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} + y + 1\right) = \frac{2y+3}{2} \cdot \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2y+3}{10}, & y \in [0,2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

c) X, Y nu sunt indep deoarece $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f(x,y)$

3. Fie vect. aleator (X,Y) cu densitatea de probabilitate $f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

Să se calculeze:

a) $P(X<1, Y<1)$, $P(X+Y<1)$, $P(X+Y \geq 2)$, $P(X \geq 1 / Y \geq 1)$, $P(X<2Y)$, $P(X=Y)$;

b) fct. de repartiție $F(x,y)$ și fct de marginale $F_X(x)$, $F_Y(y)$.

c) densitatea de repartiții marginale $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

Rezolvare

a) $P(X<1, Y<1) = \int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^1 f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 e^{-x-y}\, dx\, dy = (-e^{-x})\Big|_0^1 (-e^{-y})\Big|_0^1 =$

$$= (1-e^{-1})^2 = \left(1 - \frac{1}{e}\right)^2$$

$P(x+y < 1) = \iint_{x+y<1} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{-x-y}\, dx\, dy =$

$$= \int_0^1 e^{-x} (e^{-y})\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 (e^{-x} - e^{-1})\, dx = (-e^{-x})\Big|_0^1 - e^{-1} = 1 - 2e^{-1}$$

$P(X+Y \geq 2) = 1 - P(x+y<2) = 1 - \iint_{x+y<2} f(x,y)\, dx\, dy = 1 - \int_0^2 \int_0^{2-x} e^{-x-y} dx\, dy =$

$$= 3e^{-2}$$

• $P(X \geq 1 \mid Y \geq 1) = \dfrac{P(X \geq 1, Y \geq 1)}{P(Y \geq 1)} = n$

• $P(X \geq 1, Y \geq 1) = \int_1^\infty \int_1^\infty e^{-x-y}\, dx\, dy = \left(\int_1^\infty e^{-x}\, dx\right)^2 = \left((-e^{-x})\Big|_1^\infty\right)^2 = e^{-2}$

• $P(Y \geq 1) = \int_0^\infty \int_1^\infty e^{-x-y}\, dx\, dy = -e^{-x}\Big|_0^\infty \left(-e^{-y}\right)\Big|_1^\infty = e^{-1} \Rightarrow n = e^{-1}$

b) $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, du\, dv$

- $x < 0$ sau $y < 0 \Rightarrow f(x,y) = 0 \Rightarrow F(x,y) = 0$
- $x \geq 0$ şi $y \geq 0 \Rightarrow F(x,y) = \int_0^x \int_0^y e^{-v-u}\, du\, dv =$

$$= \int_0^x \int_0^y e^{-v} \cdot e^{-u}\, du\, dv = \int_0^x e^{-u} \left(-e^{-u}\right)\Big|_0^y$$

$$= \int_0^x e^{-u}\left(-e^{-y} + e^0\right) du = \left(-e^{-y} + 1\right)\left(-e^{-u}\right)\Big|_0^x$$

$$= \left(1 - e^{-y}\right)\left(1 - e^{-x}\right)$$

c) Fn. de rep. marg. sunt:

$F_X(x) = F(x, \infty) = 1 - e^{-x}$

$F_Y(y) = F(\infty, y) = 1 - e^{-y}$