Geodu | C

(1)

Noțiuni de algebră liniară

Spații vectoriale

Def Fie $(K, \oplus, \odot)$ un corp comutativ, $(V, +)$ un grup comutativ și

„+" : $V \times V \to V$

„·" : $K \times V \to V$

V se numește spațiu vectorial (spațiu liniar) peste corpul K (sau K - spațiu vectorial) și se notează V|K dacă sunt verificate următoarele proprietăți

1) $(\alpha \oplus \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$, $\forall\ \alpha, \beta \in K$, $\forall\ \vec{x} \in V$

2) $\alpha\ (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$, $\forall\ \alpha \in K$, $\vec{x}, \vec{y} \in V$

3) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha \odot \beta) \cdot \vec{x}$, $\forall\ \alpha, \beta \in K$, $\vec{x} \in V$

4) $1_K \cdot \vec{x} = \vec{x}$, $\forall\ \vec{x} \in V$, unde 1_K este elementul neutru al corpului K relativ la $\odot$.

Elementele lui K se numesc <u>scalari</u>.
Elementele lui V se numesc <u>vectori</u> (de obicei se scriu cu săgeată ($\vec{x}$))
„+" se numește <u>adunarea vectorilor</u>
„·" se numește <u>înmulțirea cu scalari a vectorilor</u>.
Un spațiu vectorial peste corpul nr. reale se numește și <u>spațiu vectorial real</u>.

Obs Uzual, notăm $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta$, $\alpha \odot \beta = \alpha \cdot \beta = \alpha\beta$, $\alpha \cdot \vec{x} = \alpha\vec{x}$, $\forall\ \alpha, \beta \in K$, $\vec{x} \in V$.

Exemple

1. $\mathbb{R}$ este un spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$ (Notăm $\mathbb{R}/\mathbb{R}$)

Temă (de verificat proprietățile)

2. $\mathbb{R}^n$ este un spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$,

unde $\mathbb{R}^n = \{ \vec{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)^T \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1,n} \}$

Temă (de verificat proprietățile) (Notăm $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$)

3. $M_{m,n}(\mathbb{R})$ este un sp. vectorial peste $\mathbb{R}$,

unde $M_{m,n}(\mathbb{R}) = \{ A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, \substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}} \}$

$\downarrow$

mulțimea matricelor cu m linii și n coloane

Notăm $M_{m,n}/\mathbb{R}$

4. $\mathcal{F}(M)$ este un sp. vectorial peste $\mathbb{R}$,

unde $\mathcal{F}(M) = \{ f : M \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

$\downarrow$

mulțimea funcțiilor definite pe o submulțime a lui $\mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{R}$.

Notăm $\mathcal{F}(M)/\mathbb{R}$

5. $\mathbb{R}[X]$ este un sp. vectorial peste $\mathbb{R}$,

unde $\mathbb{R}[X] = \{ P(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0 \mid n \in \mathbb{N}, p_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{0,n} \}$

$\downarrow$

mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali

Notăm $\mathbb{R}[X]/\mathbb{R}$

Exerciții: 1. Să se demonstreze că urm. mulțimi sunt spații vectoriale.

a) $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, b) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, c) $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$, d) $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, e) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

2. Să se arate că următoarele mulțimi nu sunt spații vect.

a) $\mathbb{Q}/\mathbb{R}$; b) $\mathbb{Z}/\mathbb{R}$; c) $\mathbb{R}/\mathbb{C}$; d) $\mathbb{Q}/\mathbb{C}$, e) $\mathbb{Z}/\mathbb{Q}$

Reguli de calcul într-un spațiu vectorial (V/K)

1. $0_K \cdot \vec{x} = \vec{0}_V \quad, \forall x \in V$
2. $\alpha \cdot \vec{0}_V = \vec{0}_V \quad, \forall \alpha \in K$
3. $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x} \quad, \forall \vec{x} \in V$
4. $\alpha(-\vec{x}) = -\alpha\vec{x} \quad, \forall x \in V, \alpha \in K$
5. $\alpha(\vec{x} - \vec{y}) = \alpha\vec{x} - \alpha\vec{y} \quad, \forall \alpha \in K, \vec{x}, \vec{y} \in V$
6. $(\alpha - \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} - \beta\vec{x} \quad, \forall \alpha, \beta \in K, \vec{x} \in V$

Demonstrație

1. $\vec{x} + 0_K \cdot \vec{x} = (1 + 0_K) \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \Rightarrow 0_K \cdot \vec{x} = \vec{0}_V$
2. $\alpha \cdot \vec{0}_V = \alpha(\vec{0}_V + \vec{0}_V) = \alpha \cdot \vec{0}_V + \alpha \cdot \vec{0}_V \Rightarrow \alpha \cdot \vec{0}_V = \vec{0}_V$
3. $\vec{0}_V = 0_K \cdot \vec{x} = (-1 + 1)\vec{x} = (-1) \cdot \vec{x} + \vec{x} \Rightarrow (-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$
4. $\alpha \cdot (-\vec{x}) = \alpha \cdot [(-1) \cdot \vec{x}] = \alpha \cdot (-1) \cdot \vec{x} = -\alpha\vec{x}$
5. $\alpha(\vec{x} - \vec{y}) = \alpha[\vec{x} + (-\vec{y})] = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot (-\vec{y}) = \alpha\vec{x} - \alpha\vec{y}$
6. $(\alpha - \beta)\vec{x} = [\alpha + (-\beta)]\vec{x} = \alpha\vec{x} + (-\beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} - \beta\vec{x}$

Subspații vectoriale

Def Fie V/K un spațiu vectorial. O submulțime nevidă W a lui V $(W \subseteq V)$ se numește subspațiu vectorial al lui V ~~și se~~ notează $W \in S_K(V)$, dacă:

a) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in W \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in W$

b) $\forall \alpha \in K, \forall \vec{x} \in W \Rightarrow \alpha\vec{x} \in W$.

Prop O condiție necesară și suficientă ca submulțimea W a lui V să fie K-subspațiu vectorial este
$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in W, \forall \alpha, \beta \in K$ și $\vec{x}, \vec{y} \in W$.

Dem.

"$\Rightarrow$" Fie $W \subset V$ un K-subspațiu vectorial

$\Rightarrow \forall \vec{x}, \vec{y} \in W \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in W$

și $\forall \alpha \in K$ și $\vec{x} \in W \Rightarrow \alpha \vec{x} \in W$

Analog $\forall \beta \in K$ și $y \in W \Rightarrow \beta \vec{y} \in W$

$\Rightarrow \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in W$

"$\Leftarrow$" Pp. $\forall \alpha, \beta \in K$ și $\vec{x}, \vec{y} \in W$ avem $\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in W$

Fie $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in W$

Fie $\alpha = 1, \beta = 0 \Rightarrow \alpha \vec{x} \in W$

$\Rightarrow W \in Sb(V)$

Prop. Fie V/K un K spațiu vectorial și $W_1, W_2 \in Sb(V)$.

Atunci:

a) $W_1 + W_2 \in Sb(V)$ $\quad (W_1 + W_2 = \{u + v \mid u \in W_1, v \in W_2\})$

b) $W_1 \cap W_2 \in Sb(V)$

Dem

a) Fie $\alpha, \beta \in K$ și $\vec{x}, \vec{y} \in W_1 + W_2$.

Atunci $\exists \vec{x}_1 \in W_1, \vec{x}_2 \in W_2$ a.î. $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$

și $\exists \vec{y}_1 \in W_1, \vec{y}_2 \in W_2$ a.î. $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$

Avem:

$$\begin{aligned}
\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} &= \alpha(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) + \beta(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) \\
&= \alpha \vec{x}_1 + \alpha \vec{x}_2 + \beta \vec{y}_1 + \beta \vec{y}_2 \\
&= (\alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{y}_1) + (\alpha \vec{x}_2 + \beta \vec{y}_2)
\end{aligned}$$

Dar W_1 și W_2 sunt subspații vectoriale ale lui V,

deci, $\forall \alpha, \beta \in K$ și $\vec{x}_1, \vec{y}_1 \in W_1$, $\vec{x}_2, \vec{y}_2 \in W_2$,

$\Rightarrow \alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{y}_1 \in W_1$ și $\alpha \vec{x}_2 + \beta \vec{y}_2 \in W_2$

$\Rightarrow \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in W_1 + W_2 \Rightarrow W_1 + W_2 \in Sb(V)$

ii) Fie $\alpha, \beta \in K$ și $\vec{x}, \vec{y} \in W_1 \cap W_2$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \vec{x}, \vec{y} \in W_1 \Rightarrow \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in W_1 \\ \vec{x}, \vec{y} \in W_2 \Rightarrow \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in W_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in W_1 \cap W_2$$

$\Rightarrow W_1 \cap W_2 \in Sk(V)$

Def

Dacă $W_1, W_2 \in Sk(V)$ cu $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$, atunci $W_1 + W_2$ se numește suma directă a subspațiilor W_1 și W_2 și se notează $W_1 \oplus W_2$.

Dacă $W_1 \oplus W_2 = V$, atunci W_1 și W_2 se numesc subspații suplimentare. (W_1 este suplimentul lui W_2 și invers)

Prop

Fie $W_1, W_2 \in Sk(V)$. Atunci $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$ dacă și numai dacă orice $\vec{x} \in W_1 + W_2$ admite o descompunere unică (i.e. $\forall \vec{x} \in W_1 + W_2, \exists! \vec{x}_1 \in W_1$ și $\exists! \vec{x}_2 \in W_2$ a.î. $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$)

Dem

"$\Rightarrow$" $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$

Pp. că $\vec{x} \in W_1 + W_2$ admite două scrieri, adică

$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, $\vec{x}_1 \in W_1$, $\vec{x}_2 \in W_2$ și

$\vec{x} = \vec{x}_1' + \vec{x}_2'$, $\vec{x}_1' \in W_1$, $\vec{x}_2' \in W_2$

Atunci $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{x}_1' + \vec{x}_2' \Leftrightarrow \vec{x}_1 - \vec{x}_1' = -(\vec{x}_2 - \vec{x}_2')$

Dar $\vec{x}_1 - \vec{x}_1' \in W_1$, $-(\vec{x}_2 - \vec{x}_2') \in W_2$, deci

$\vec{x}_1 - \vec{x}_1', \vec{x}_2 - \vec{x}_2' \in W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\} \Rightarrow \vec{x}_1 - \vec{x}_1' = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_1'$

și $\vec{x}_2 - \vec{x}_2' = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_2 = \vec{x}_2'$

$\Rightarrow$ Scrierea lui $\vec{x}$ este unică.

$\Leftarrow$ Se știe că $\vec{x} \in W_1 + W_2$ are o scriere unică, $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, cu $\vec{x}_1 \in W_1$, $\vec{x}_2 \in W_2$.

Trebuie să demonstrăm că $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$

Presupunem că $\exists \vec{y} \neq \vec{0} \in W_1 \cap W_2$

$\Rightarrow \vec{y} \in W_1$ și $\vec{y} \in W_2$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{x}_1 - \vec{y} \in W_1 \\ \vec{x}_2 + \vec{y} \in W_2 \end{array}\right\} \Rightarrow (\vec{x}_1 - \vec{y}) + (\vec{x}_2 + \vec{y}) \in W_1 + W_2$$

$$\Leftrightarrow \vec{x}_1 \cancel{- \vec{y}} + \vec{x}_2 \cancel{+ \vec{y}} \in W_1 + W_2$$

$$\Leftrightarrow \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in W_1 + W_2$$

$$\Leftrightarrow \vec{x} \in W_1 + W_2$$

Dar $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ și $\vec{x} = (\vec{x}_1 - \vec{y}) + (\vec{x}_2 + \vec{y})$, ceea ce contrazice unicitatea scrierii lui $\vec{x}$

$\Rightarrow W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\} \Rightarrow W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$.

<u>Exemple de subspații vectoriale.</u>

1. $\{\vec{0}\}$, $V \in Sb(V)$ (s.n. subspații improprii sau triviale)

2. $S_1 = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

   $S_2 = \{(a, 0, c) \mid a, c \in \mathbb{R}\}$

   $S_3 = \{(0, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$

   $S_4 = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$

   $S_5 = \{(0, b, 0) \mid b \in \mathbb{R}\}$

   $S_6 = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$

3. $W = \{(\alpha, \beta, \alpha + \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

4. $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$

Tema (de demonstrat exemplele).

Def Fie $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$ un sistem de vectori dintr-un K-spațiu vectorial.

a) O expresie de forma $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$, cu $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ se numește combinație liniară de elementele lui S ($\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ se numesc coeficienții combinației liniare)

b) $\vec{v} \in V$ este o combinație liniară de elementele lui S dacă există $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ a.î.

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$$

c) Mulțimea

$$L(S) = \{\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \mid \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,p}\}$$

s.n. acoperirea liniară a lui S.

Obs $L(S) \in Sh(V)$

Dem

Fie $\vec{x}, \vec{y} \in L(S)$ și $\alpha, \beta \in K$. Atunci $\exists\, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ a.î.

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$$

$$\vec{y} = \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 + \dots + \beta_n \vec{v}_n$$

$$\Rightarrow \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \alpha(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n) + \beta(\beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_n \vec{v}_n)$$

$$= \alpha\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha\alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha\alpha_n \vec{v}_n + \beta\beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta\beta_n \vec{v}_n$$

$$= \underbrace{(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)}_{\in K} \vec{v}_1 + \underbrace{(\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)}_{\in K} \vec{v}_2 + \dots \underbrace{(\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)}_{\in K} \vec{v}_n$$

$$\Rightarrow \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in L(S) \Rightarrow L(S) \in Sh(V)$$