



MALİK ENES
ŞAFAK

FMY-WEB.GITHUB.IO

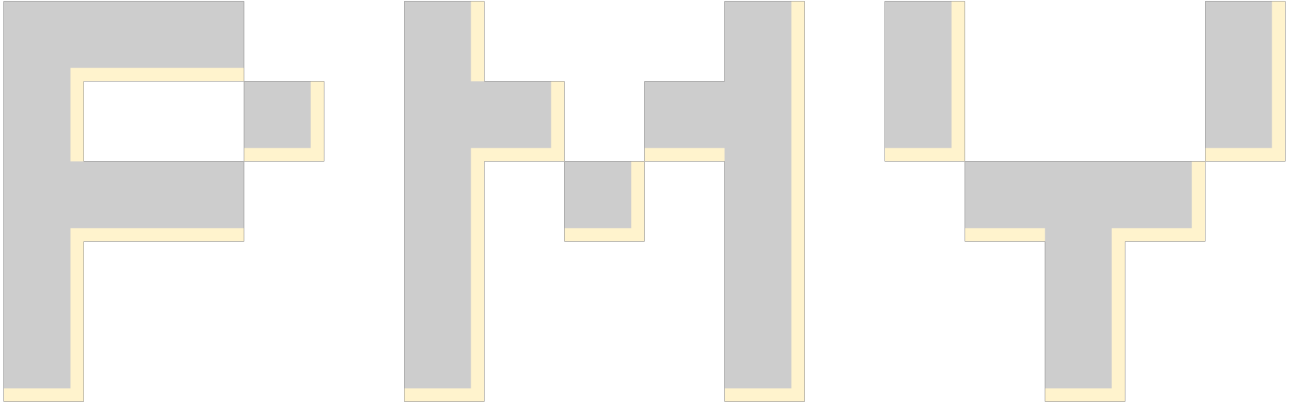
Mesleki Matematik

Koordinat Sistemleri

0.1

İçindekiler

Koordinat Sistemleri	3
Kartezyen Koordinat Sistemi	3
Vektörler	7
Polar Koordinat Sistemi	9

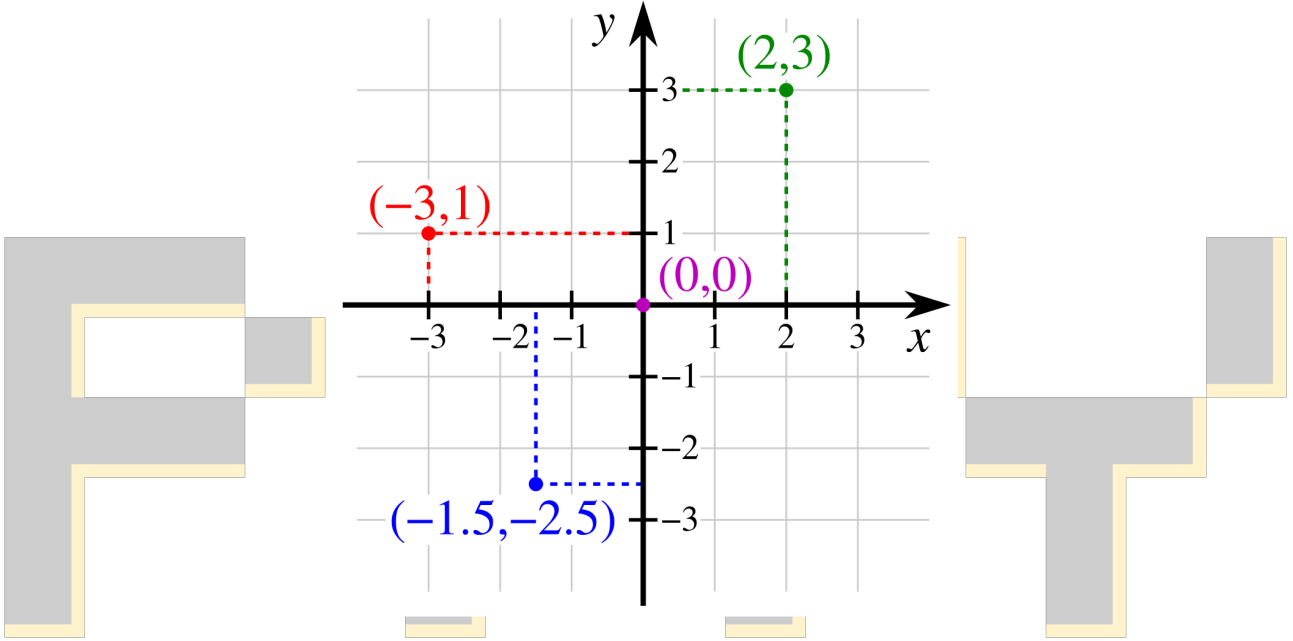


MALİK ENEŞ
ŞAFAK

PMY-WEB.GITHUB.IO

Koordinat Sistemleri

Kartezyen Koordinat Sistemi



Kartezyen koordinat sistemi 0'dan büyük boyutlu, her boyutunun birbirini dik eksenlerle kestiği, eksen sayısı kadar gerçek sayı ile ifade edilebilen noktalara sahip koordinat sistemidir. 1 boyutlu kartezyen koordinat sistemi gerçek sayı çizgisi ile çok benzerdir. 2 boyutlu kartezyen koordinat sistemi yukarıda gösterilen şekilde gibidir. 3 boyutlu kartezyen koordinat sistemini yaşadığımız dünyaya bakarak hayal edebilirsiniz.

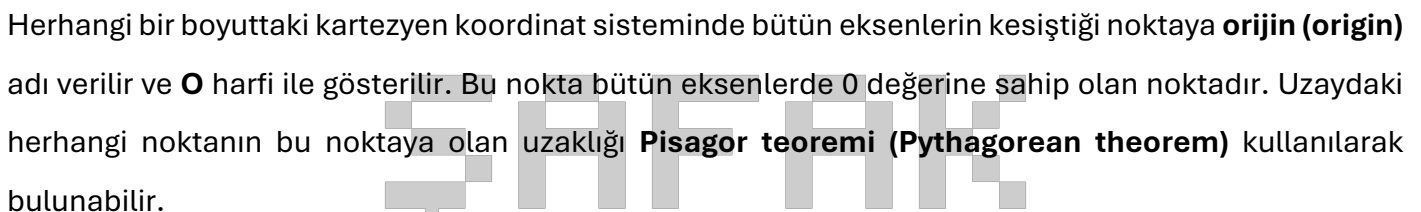
2 boyutlu kartezyen koordinat sistemi genellikle **düzlem (plane)**, 3 boyutlu koordinat sistemi ise **uzay (space)** olarak isimlendirilir. Düzlem aynı zamanda 2 boyuttan daha büyük bir koordinat sistemindeki 2 boyutlu bir düzlemi ifade etmek için de kullanılabilir. Örneğin 3 boyutun sonsuz adet 2 boyutlu düzleminden oluştuğunu düşünebiliriz. Uzay ise 2 boyutlu uzay, 5 boyutlu uzay gibi farklı boyuttaki alanları ifade etmek için de kullanılmaktadır.

Kartezyen koordinat sistemi “Düşünüyorum, öyleyse varım” sözüyle ünlü filozof René Descartes tarafından geliştirilmiştir¹. Kartezyen (Cartesian) ismi de Descartes'ın anısına verilmiştir. Kartezyen koordinat sistemi **analitik geometri (analytic geometry)** alanının doğuşuna sebep olmuştur². Aynı

¹ Bu sistem Öklid'in (Euclid) “Öklid'in Elementleri” kitabında çeşitli geometrik şekillerin, uzunlukların ve açıların matematiksel kesinlikle tekrarlanabilmesini sağlamak için oluşturduğu Öklid düzlemi üzerine kurulmuştur. Öklid düzleminde koordinatlar yoktur. Sadece basit araçlar kullanılarak (cetvel, pergel gibi) çoğunlukla 2 boyutlu düzlem üzerinde çizilen şekillerle kurulan bir sistemdir. Öklid düzlemi **sentetik geometri (synthetic geometry)** alanının bir parçasıdır ve varsayımlar üzerine kuruludur. Bu isim kartezyen koordinat sistemi ortaya çıkmadan önce kullanılan yöntemleri ifade etmek için kullanılmaktadır. Daha fazla bilgi için [What was Euclid Really Doing?](https://www.youtube.com/watch?v=Hh3D7Hh3D7H)

² Dönemin ünlü matematikçisi Pierre de Fermat da analitik geometri alanında önemli çalışmalar yapmıştır.

Kartezyen koordinat sisteminde eksenler genellikle x, y, z ve w harfleriyle isimlendirilirler ve parantez içerisinde gösterilirler. Dört boyuttan daha büyük sistemler için standart bir notasyon yoktur.

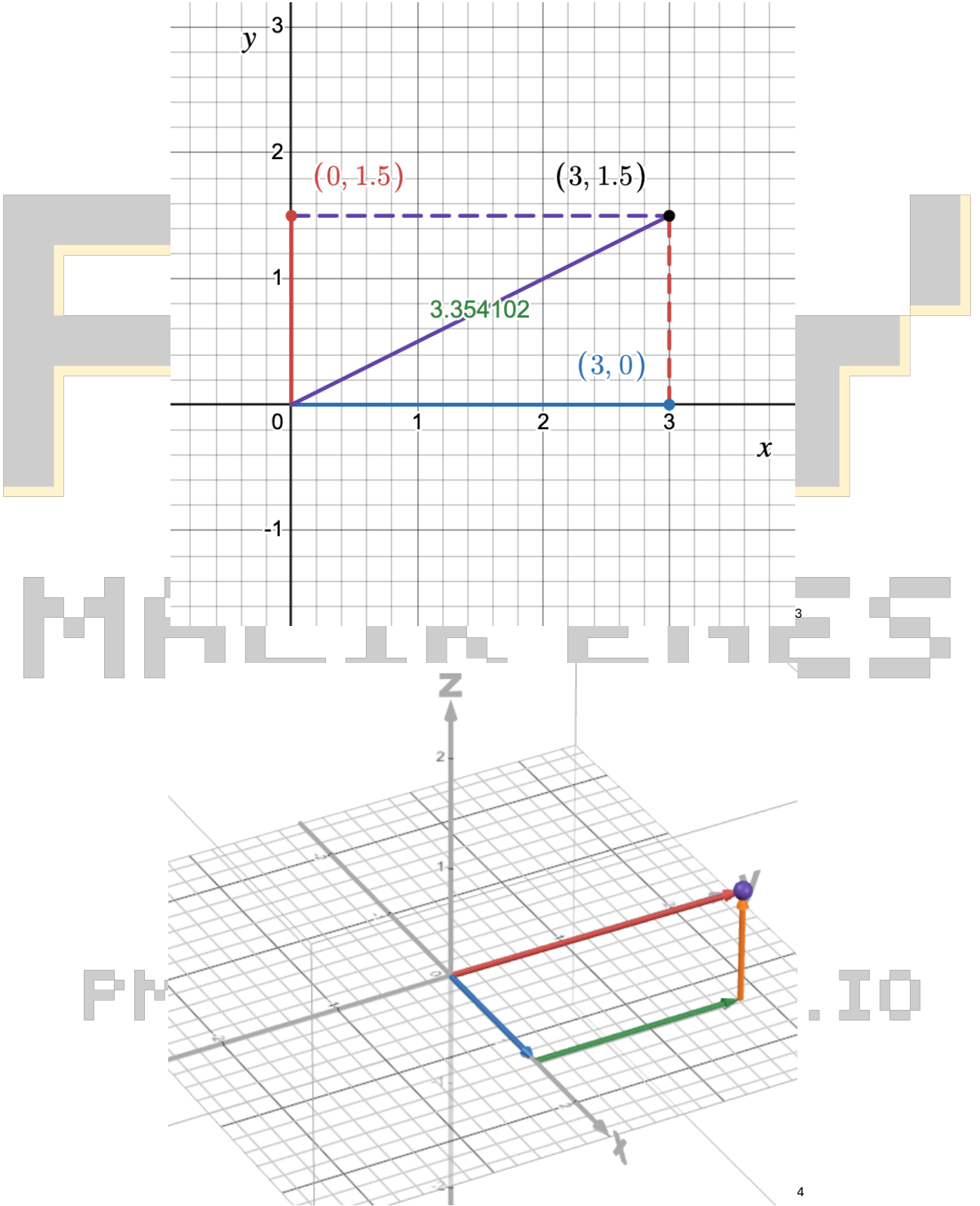


$l^2 = x^2 + y^2$, dolayısıyla

A right-angled triangle is shown. The horizontal base is labeled 'a' in red. The vertical side on the right is labeled 'b' in blue. The hypotenuse, connecting the top of side 'b' to the left end of side 'a', is labeled 'c' in green.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Bu formül aslen kısa kenarları bilinen bir dik üçgenin uzun kenarını bulmak için kullanılmaktadır. Fakat uzaydaki herhangi bir nokta üçgenlerin birleşiminden oluştuğu varsayılabilir. Bu sebeple kartezyen koordinat sisteminde bir noktanın orijine olan uzaklığını bulmak için de kullanılabilir.



³ Bu görselin oluşturulduğu siteye erişmek için <https://www.desmos.com/calculator/increbrklr>

⁴ Bu görselin oluşturulduğu siteye erişmek için <https://www.desmos.com/3d/w8qqi9n26>

Pisagor teoremi bütün boyutlardaki kartezyen noktaların orijine olan uzaklığını bulmak için kullanılabilir. Örneğin 3 boyutlu bir noktanın orijine olan uzaklığı

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ dolayısıyla}$$

$$l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ile hesaplanabilir. Bu uzaklığa aynı zamanda noktanın **ağırlığı (magnitude)** ya da **uzunluğu (length)** da denilmektedir.

İki boyutlu bir uzayda (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) olarak iki nokta tanımlarsak bu noktalar için

$$\text{Toplamı} \rightarrow (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)^5$$

$$\text{Farkı} \rightarrow (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)^6$$

$$\text{İki nokta arasındaki uzaklık} \rightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}^7$$

işlemleri tanımlanabilir.

Bir kartezyen nokta başka bir kartezyen nokta ile çarpılamaz ya da bölünemez⁸ fakat gerçek bir sayıyla çarpılabilir ya da bölünebilir. Bu durumda (x, y) noktası ve a gerçek sayısı tanımlarsak

$$\text{Çarpım} \rightarrow (x, y) * a = (x * a, y * a)^9$$

$$\text{Bölüm} \rightarrow \frac{(x, y)}{a} = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)^{10}$$

işlemleri tanımlanabilir.

Bir noktanın bir gerçek sayı ile çarpılması ya da bölünmesi durumunda çarpana **skaler (scaler)** adı verilir. İngilizcedeki **ölçekleme (scaling)** kelimesinden gelir. Skaler bazen tek bir gerçek sayıyı tanımlamak için de kullanılır.

PMY-WEB.GITHUB.IO

⁵ <https://www.desmos.com/calculator/joqkb8pyx6>

⁶ <https://www.desmos.com/calculator/ag5mlimf7n>

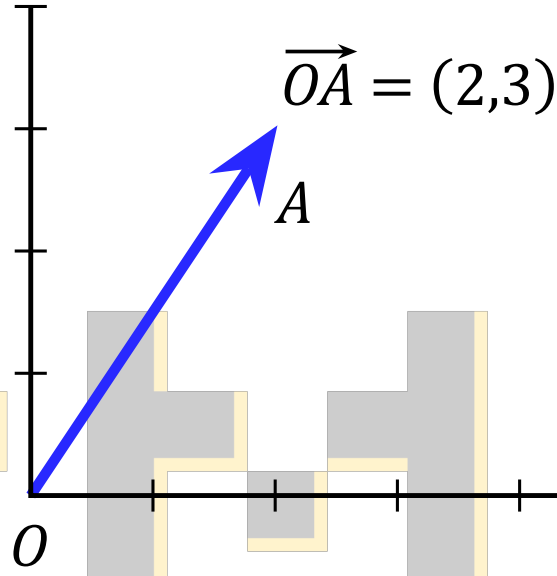
⁷ <https://www.desmos.com/calculator/ag5mlimf7n>

⁸ Daha fazla bilgi için <https://www.youtube.com/watch?v=htYh-Tq7ZBI>

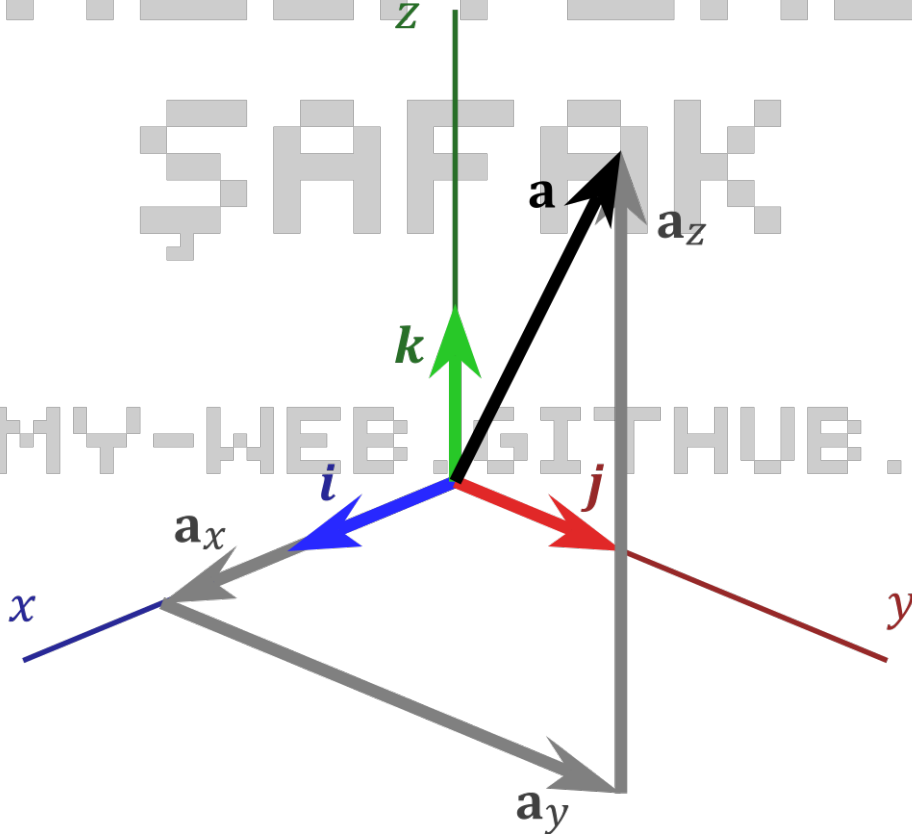
⁹ <https://www.desmos.com/calculator/tt97oaj29z>

¹⁰ <https://www.desmos.com/calculator/klplhgeiug>

Vektörler



Uzaydaki bir nokta aynı zamanda **vektör (vector)** olarak gösterilebilir. Vektörlerde eksenler birbirine dik doğrularla tanımlanır. Vektörlerin bir başlangıç ve bitiş noktaları, dolayısıyla yönü ve uzunluğu vardır. Aksi belirtilmediği sürece vektörler orijin noktasından başlar. Vektör, uzaydaki herhangi bir noktayı temsil eden gerçekte sayıların **baz vektörlerle (basis vector)** çarpılması ile elde edilir.



Örneğin üç boyutlu bir uzayda (x, y, z) noktası tanımlarsak baz vektörler

$$x \text{ için baz vektör} = \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y \text{ için baz vektör} = \hat{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z \text{ için baz vektör} = \hat{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

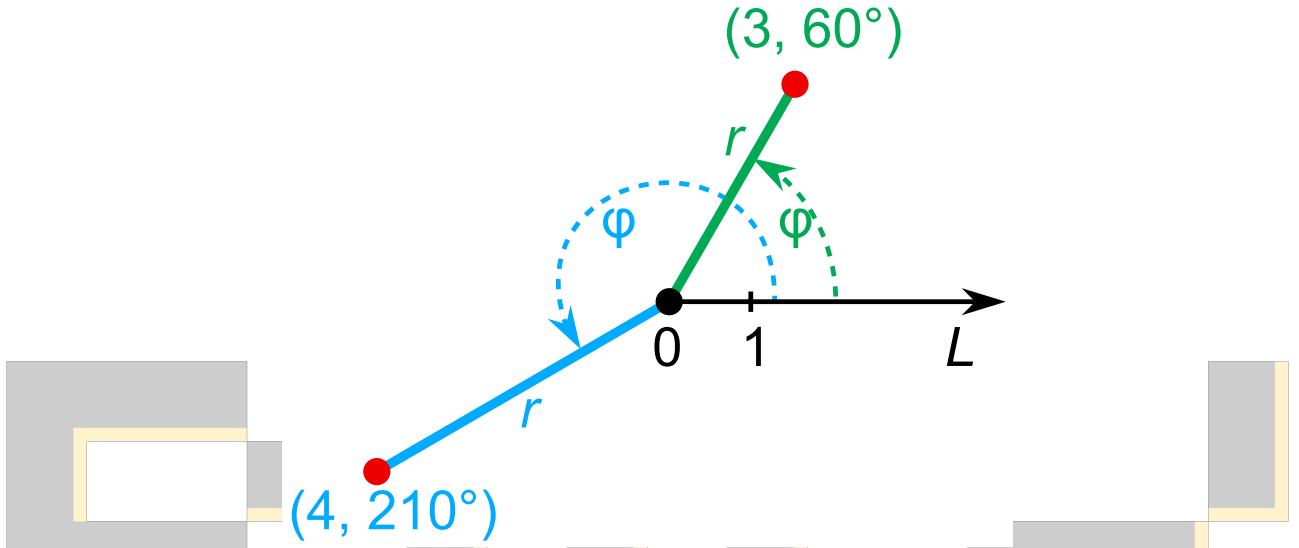
olarak gösterilebilir. Vektörler matematiksel olarak kartezyen koordinat sistemindeki noktalarla aynı şekilde toplanır, çıkarılır, çarpılır veya bölünür. Vektörün uzunluğu yine Pisagor teoremi kullanılarak hesaplanabilir. Vektörler kendi uzunluklarına bölünerek **birim vektör (unit vector)** elde edilebilir. Bu işleme **normalizasyon (normalization)** adı verilir. Normalizasyon vektörün sadece uzunluğunu değiştirir, yönünü değiştirmez.

Bir vektörün değerleri genellikle köşeli parantez içerisinde alt alta yazılarak, bir vektörü tanımlayan değişken ise genellikle üzerinde ^ ya da \rightarrow işareti ile gösterilir.

MALİK ENES
ŞAFAK

PMY-WEB.GITHUB.IO

Polar Koordinat Sistemi



Uzaydaki bir noktayı göstermek için kullanılan bir diğer sistem polar koordinat sistemidir. Bu sistemde bir nokta **yarıçapı (radius)** ve **açısı (angle)** ile tanımlanır. Yarıçap genellikle r harfi ile, açı ise θ (*theta*) ile gösterilir. Uzaydaki bir nokta kartezyen koordinat sistemi ile polar koordinat sistemi arasında dönüştürülebilir. Örneğin kartezyen koordinat sistemindeki (x, y) noktasını polar koordinat sistemine çevirmek için

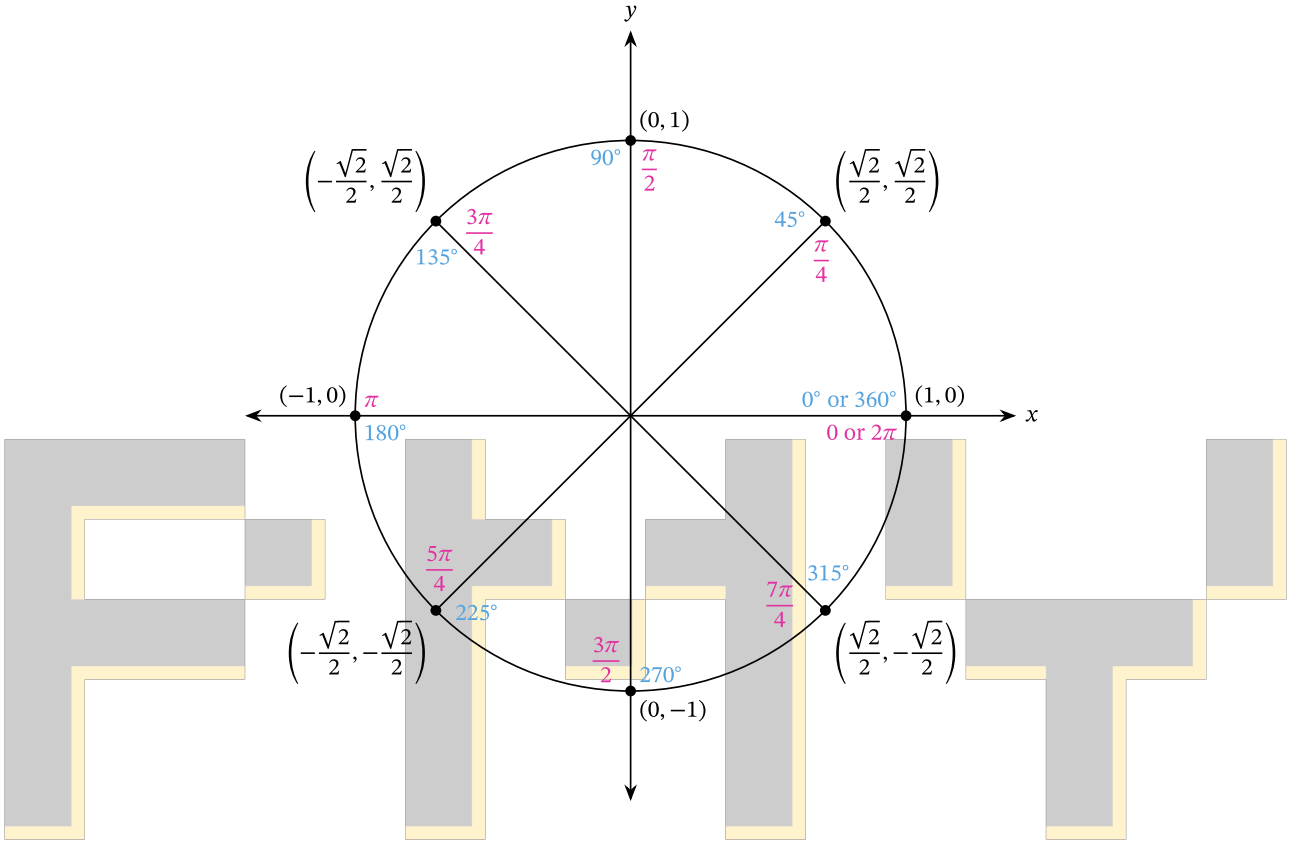
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan2(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \text{ ve } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0 \text{ ve } y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ ve } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ ve } y < 0 \\ \text{tanımsız}, & x = 0 \text{ ve } y = 0 \end{cases}$$

formülleri kullanılabilir. Benzer şekilde polar koordinat sistemindeki bir (r, θ) noktasını kartezyen koordinat sistemine çevirmek için

$$x = r * \cos(\theta)$$

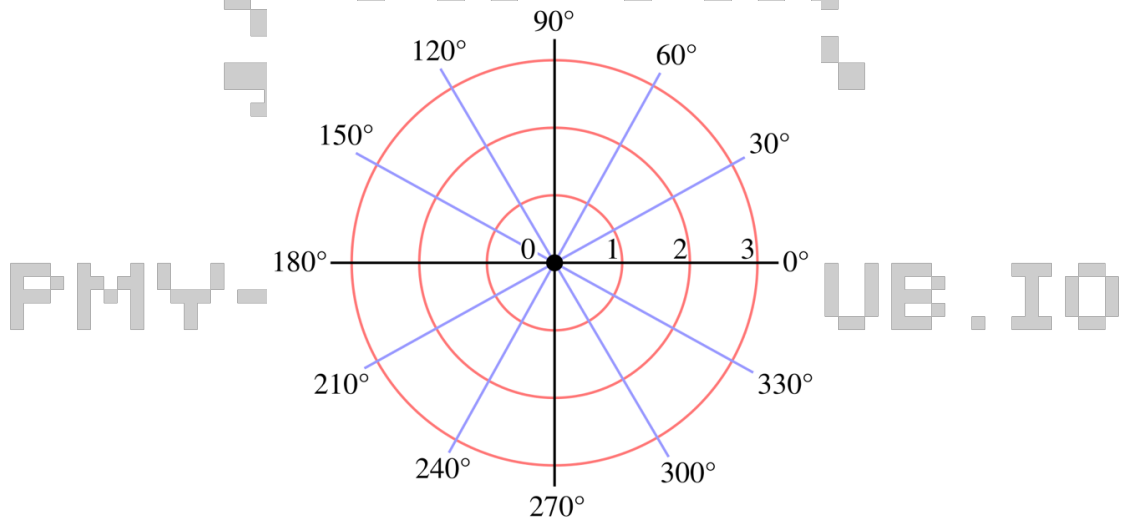
$$y = r * \sin(\theta)$$

formülleri kullanılabilir. Bu formüllerde açı radyan cinsinden olmalıdır.



Radyan, **birim çemberin (unit circle)** çevresinin yarısı kadar olan **π sayısı** ile ifade edilir. π sayısı bir çemberin **çevresinin çapına oranıdır**¹¹. Dolayısıyla 180 derece π radyana eşittir.

Polar koordinat sistemi herhangi bir boyuttaki uzayda **dönme (rotation)** işleminin yapılmasını kolaylaştırır. Genellikle kartezyen koordinat sistemindeki bir nokta döndürülmesi gerekiyorsa polar koordinat sistemine çevrilir, döndürülür ve tekrar kartezyen koordinat sistemine çevrilir.



¹¹ Burada en kafa karıştırıcı durum **çemberin çevresinin yarısının** neden π sayısına eşit olduğudur. Birim çember dediğimizde çemberin **yarıçapının 1** olduğunu kabul ederiz. Dolayısıyla çemberin **çapı 2** olacaktır. Çapı 1 olan çemberin çevresi π ise çapı 2 olan çemberin çevresi 2π olacağından böyle bir çemberin çevresinin yarısı π uzunluğunda olacaktır. Bu sebeple 180 derece π radyana eşittir.

Polar koordinat sisteminde 0 derece kartezyen koordinat sistemindeki x ekseninin pozitif kısmına doğrudur ve y ekseninin pozitif kısmına, saat yönünün tersine, doğru artar. Başka bir ifadeyle x eksenindeki baz vektöre doğrudur ve y eksenindeki baz vektöre doğru artar. Başka bir ifadeyle gerçek sayı doğrusunun birim uzunluğuna (1) doğrudur ve sanal sayı çizgisinin birim uzunluğuna (i) doğru artar.

Diğer boyutlardaki polar koordinat sistemleri için de aynı durum geçerlidir. Polar koordinat sistemlerinde eklenen her yeni boyut için bir polar açı eklenir, yeni bir yarıçap eklenmez.

Sonuç

Sonuç olarak yukarıda bahsedilen sistemlerin birbirinden farkı:

- Kartezyen koordinat sisteminde uzaydaki bir nokta **uzayın boyutu ile aynı miktarda gerçek sayı** ile gösterilir. Bu yazıyı gördüğünüz ekranın her bir pikseli kartezyen koordinat sistemindeki bir nokta olarak tanımlanabilir.
- Vektörler uzayın boyutu ile aynı miktarda, tanımlanan eksenler ile aynı yönde ve birim uzunluğa sahip doğrular ile gerçek sayıların (skalerlerin) çarpılması ile bir **yön ve uzunluk** belirten **doğrulardır**. Buraya geldiğiniz aracın hangi yöne doğru ne kadar hızla gittiğini göstermek için kullanılabilir.
- Polar koordinat sisteminde uzaydaki bir nokta **1 adet yarıçap** ve **uzayın toplam boyutundan 1 eksik miktarda açı** ile gösterilir. Özellikle dönüşüm için önemlidir. Oynadığınız herhangi bir oyunda karakterinizin bulunduğu noktada başka bir yöne bakmasını sağlamak için kullanılabilir.

PMY-WEB.GITHUB.IO