



MALİK ENES
ŞAFAK

FMY-WEB.GITHUB.IO

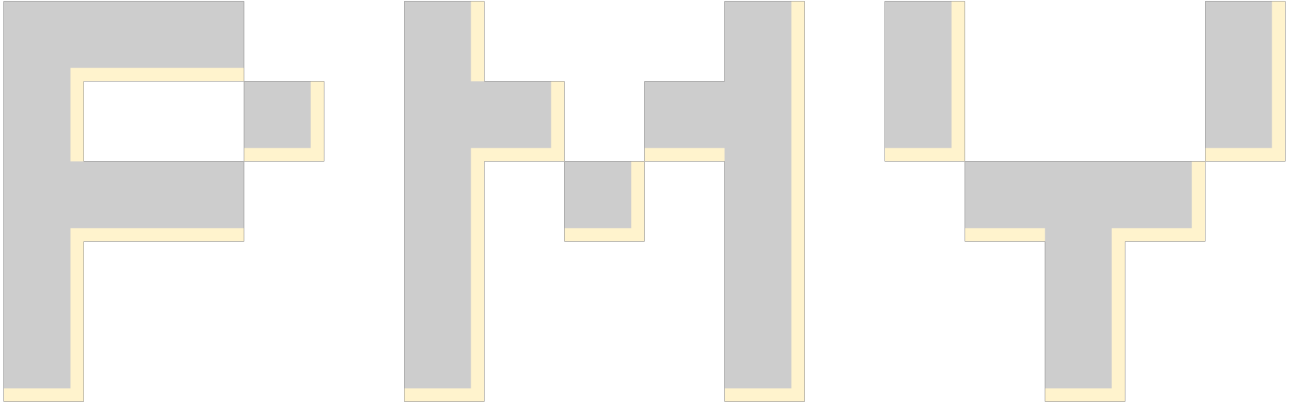
Mesleki Matematik

Sayılar ve Sayı

Sistemleri 0.1

İçindekiler

Sayılar	3
Gerçek (Real) Sayılar	3
Sanal (Imaginary) Sayılar	4
Taban Aritmetiği	5



MALİK ENEŞ
ŞAFAK

PMY-WEB.GITHUB.IO

Sayılar

Gerçek (Real) Sayılar

Tarih boyunca toplumlar farklı sembollerle farklı sayı sistemleri geliştirmişlerdir. Günümüzde kullandığımız sayı sistemi **10'luk sayı sistemi (decimal)** olarak isimlendirilir ve bu sayı sisteminde kullanılan semboller Arap rakamları (Arabic numerals, Hindu-Arabic numerals) olarak bilinir.

Hint-Arap sayı sistemi **basamak gösterimi (positional notation)** ile rakamlara pozisyonlarına göre değer verir (Ewing, 1991). Basamak gösterimi sisteminde her rakamın değeri:

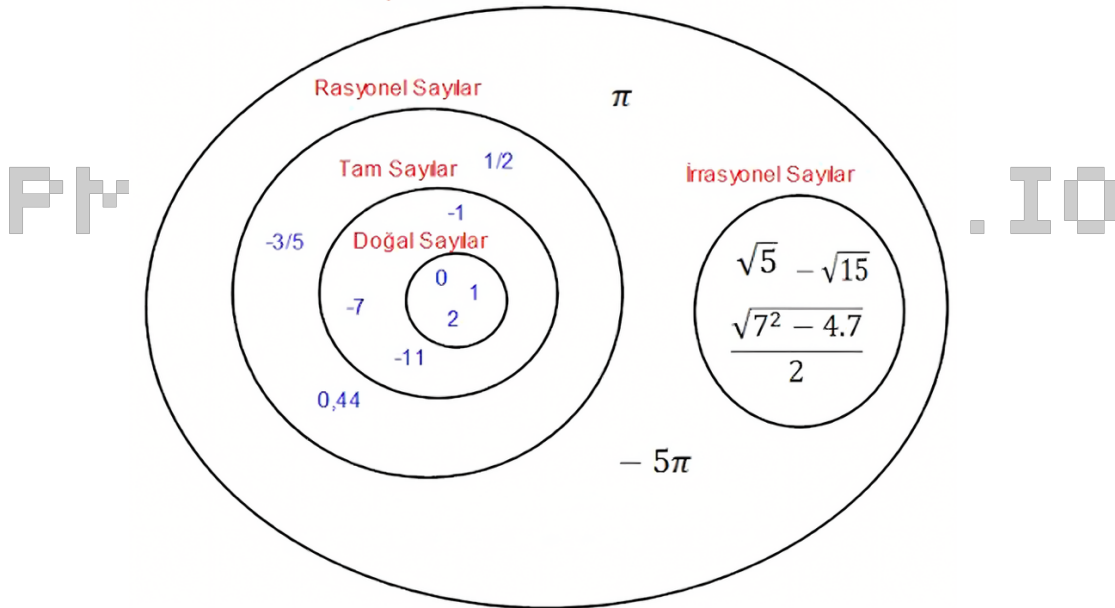
$$\text{rakam} * \text{taban}^{\text{basamak}}$$

formülü ile belirlenir. Örneğin 1234 sayısı:

$$1 * 10^3 + 2 * 10^2 + 3 * 10^1 + 4 * 10^0$$

olarak ifade edilebilir. Bu örnekte 4 rakamı 0. basamakta, 3 rakamı 1. basamakta, 2 rakamı 2. basamakta ve 1 rakamı ise 3. basamaktadır. Bu örnekte kullanılan bütün sayılar **tam sayılar'dır (whole numbers, integer)** ve tam sayılar 1'in katları olan sayılar olarak tanımlanabilir (Smedley, Rose ve Rose, 1845). Tam sayılar \mathbb{Z} sembolü ile gösterilir. Sadece 0'dan daha küçük değerleri ifade eden tam sayılar **negatif tam sayılar**, sadece 0'dan büyük değerleri ifade eden tam sayılar **pozitif tam sayılar** olarak isimlendirilir.

Gerçek (real) Sayılar



0'dan daha küçük bir değeri ifade etmeyen tam sayılara¹ **doğal sayılar (natural numbers)** denir ve \mathbb{N} sembolü ile gösterilir. Bu sayılar **negatif olmayan tam sayılar** olarak da ifade edilebilir.

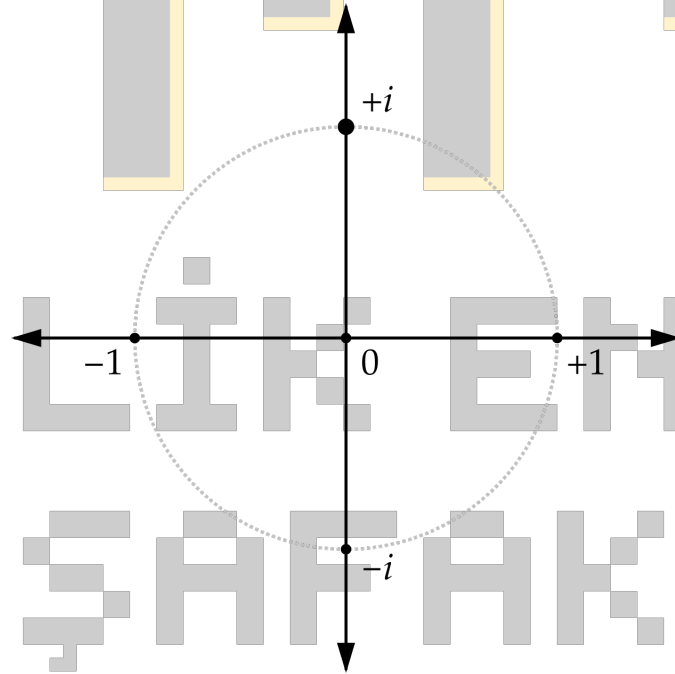
Tam sayılara ek olarak iki sayı arasındaki değerleri de gösterebilen sayılara **gerçek sayılar (real numbers)** denir ve \mathbb{R} sembolü ile gösterilir. Basamak gösterimi kuralları gerçek sayılar için de geçerlidir.

Örneğin 3.145 sayısı:

$$3 * 10^0 + 1 * 10^{-1} + 4 * 10^{-2} + 5 * 10^{-3}$$

olarak ifade edilebilir. Bu örnekte 3 rakamı 0. basamakta, 1 rakamı -1. basamakta, 4 rakamı -2. basamakta, 5 rakamı ise -3. basamaktadır.

Sanal (Imaginary) Sayılar



Gerçek sayılarda birim uzunluğu **1** kabul edilirken sanal sayılarda birim uzunluğu **i^2** olarak kabul edilir.

i sayısı $\sqrt{-1}$ 'e eşittir. Bu sayının gerçek sayılar için bir anlamı yoktur, çünkü negatif bir sayının karesi negatif olamaz. Sanal sayıların rakamları için farklı semboller tanımlanmadığı için **i** sayısının katları şeklinde yazılırlar. Bir gerçek sayı ve bir sanal sayının birlikte oluşturdukları sayıya **karmaşık sayı (complex number)** adı verilir. Sanal sayılar genellikle tek başlarına kullanılmazlar. Çoğunlukla karmaşık sayı şeklinde kullanılırlar.

¹ Bazı kaynaklar 0 sayısını doğal sayılara dahil etmezler (Enderton, 1977). 0 sayısını dahil etmeyen ve negatif olmayan tam sayılara sayma sayıları da denilebildiği için bu kaynakta doğal sayılara 0 dahil edilmiştir.

² Özellikle fizik disiplninde sanal sayı sembolü genellikle **j** ile gösterilir.

i sayısının en önemli özelliği kendisiyle çarpılması sonucu karmaşık sayı düzleminde çeyrek tur (90 derece, $\frac{1}{2}\pi$ radyan) dönmesidir. Örneğin:

$$i = \sqrt{-1} = i$$

$$i^2 = i * i = \sqrt{-1} * \sqrt{-1} = -1$$

$$i^3 = i * i * i = -1 * \sqrt{-1} = -1i$$

$$i^4 = i * i * i * i = -1 * -1 = 1$$

$$i^5 = i * i * i * i * i = 1 * \sqrt{-1} = i$$

Taban Aritmetiği

Yukarıda bahsettiğimiz sayıların tamamı 10'luk tabanda gösterilmiştir. 10'luk taban, insanların saymak için en çok kullandıkları aracın (eller) 10 adet element içermesi (parmaklar) sebebiyle günlük hayatta yaygın olarak tercih edilen tabanlardan biridir.

Sayı sistemlerinde **taban** bir basamağın kaç farklı değer ifade edebildiğini temsil eder. Örneğin on tabanındaki bir basamağa yazılabilecek 10 farklı sembol vardır (0...9). Dolayısıyla bir basamaklı onluk tabandaki bir sayı 10 farklı değeri ifade edebilir. Onluk tabanda iki basamak yan yana geldiğinde 100 farklı değer (00...99), üç basamak yan yana geldiğinde 1000 farklı değer (000...999) ifade edilebilir. Dolayısıyla basamak sayısı arttıkça ifade edilebilecek değer miktarı da taban ile ilişkili olarak artar. Belli bir tabanda belli bir basamak sayısının kaç farklı değeri ifade edebileceği

$$\text{taban}^{\text{basamak sayısı}}$$

formülü ile hesaplanabilir. Bu durumda onluk tabanda beş basamaklı bir sayı

$$10^5 = 100000$$

farklı değeri ifade edebilir.

İnsan tarafından tasarlanan farklı sistemler için başka sayı tabanları da tercih edilmiştir. Günümüzde yaygın olarak kullanılan tabanlardan bazıları 2'lik (binary), 16'lık (hexadecimal), 60'lık (sexagesimal) tabandır. Günümüzde onluk taban dışındaki tabanlar için çoğunlukla özel semboller atanmamıştır, bu sebeple onluk taban için geliştirilen semboller bu tabanlardaki sayıları göstermek için de kullanılmaktadır. Bazı tabanlar için 9 rakamından sonra harflerin kullanımı da yaygındır. Aynı sembollerin kullanılması sebebiyle farklı tabanlardaki sayıları birbirinden ayırmak için alt indister (subscript) kullanılır. Örneğin

$$1001_2, 3241_5, 1AB2_{16}$$

İkilik taban çoğunlukla dijital devrelerde saklanan ve işlenen değerlerin temsil edilmesi için kullanılmaktadır. Çünkü dijital devreler en basit haliyle elektriğin varlığı ya da yokluğu yani 1 ve 0 değerlerini saklayabilmektedir. Bu sebeple bilgisayar parçaları çoğunlukla ikilik taban kullanacak şekilde tasarlanır³. Bilgisayar biliminde yaygın olarak kullanılması sebebiyle ikilik tabandaki basamaklar “bit (**b**inary dig**i**t, ikilik basamak)” olarak kısaltılmaktadır.

İkilik tabandaki rakamlar tek başlarına bir işlemi yerine getiremeyecek kadar az miktarda değer saklayabilirler (sadece 0 ve 1). Bu sebeple gruplar halinde (belli miktarda basamağı içerecek şekilde) kullanılır⁴. Bilgisayar biliminin gelişimi içerisinde farklı basamak sayıları kullanılmış olsa da sonunda 8 basamak standart hale gelmiştir. Günümüzde bilgisayar bilimi içerisinde kullanılan “Byte (bayt)” terimi genellikle 8 basamaklı 2’lik tabandaki sayıyı ifade etmek için kullanılır. Aynı zamanda 8-bit (8 binary digit, 8 ikilik basamak) olarak da ifade edilir. Bir 8-bitlik sayı $2^8 = 256$ farklı değeri ifade edebilir. Örneğin

01101100₂

sayısı 8-bitlik bir sayıdır. Bu kadar fazla miktarda basamağı yazmak fazla yer kapladığı için 8-bitlik sayılar genellikle on altılık tabanda gösterilir. Çünkü 8-bitlik bir sayının ifade edebileceği 256 farklı değer 16×16 farklı değer olarak da ifade edilebilir. Yani iki basamaklı on altı tabanındaki bir sayı da aynı miktarda değeri ifade eder ($2^8 = 16^2$). Örneğin

10101100₂ = A9₁₆

sayıları birbirine eşittir.

60 sayısı çok fazla sayıya bölünebilmesi sebebiyle (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60) birçok medeniyet tarafından kullanılmış bir tabandır. Günümüzde saat, dakika, saniye gibi zaman birimlerinin ve derece, açısal dakika ve açısal saniye gibi açıların ifade edilmesi için hala kullanılmaktadır.

PMY-WEB.GITHUB.IO

³ Bu devreler başka sayı tabanlarında çalışacak şekilde tasarlanabilseler de hem tasarlanan makinenin karmaşıklığını arttıracığı hem de gürültüye karşı daha hassas olacağı için genellikle tercih edilmezler.

⁴ Belli bir miktarda basamağı içerecek şekilde gruplamak işlem yapmayı kolaylaştırmak ve standartlaştırmak içindir. Bunu kareli bir deftere benzetebilirsiniz. Kareli defterin her satırında belli miktarda kare bulunur. Her satırdaki kare miktarı birbirinden farklı olsaydı alt alta yazdığınız sayılarla işlem yapmak oldukça güç olurdu. Ya da her sayı için farklı miktarda satır kullansaydınız yine işlem yapmanız zorlaşırdı.