PMY

MALİK ENES
ŞAFAK

PMY-WEB.GITHUB.IO

Mesleki Matematik

Trigonometri 0.1

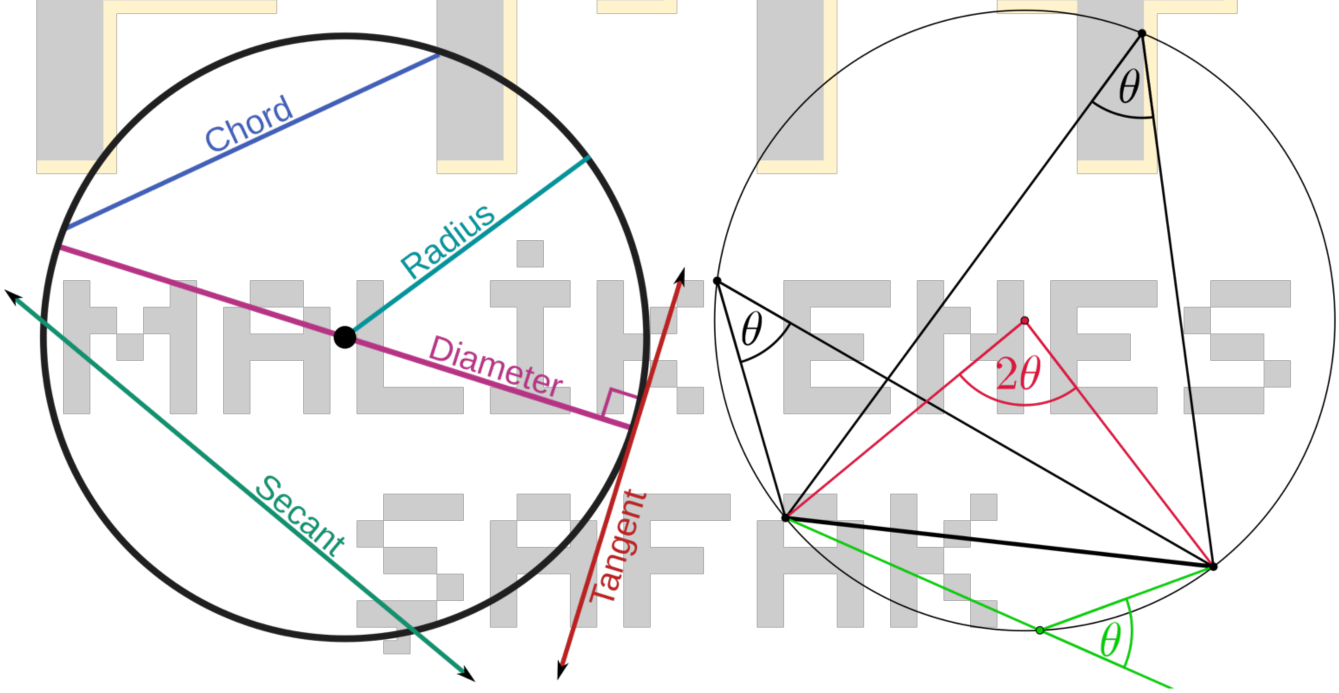
İçindekiler

Trigonometri

Tri-gono-metri

Trigonometri üçgenlerin kenarlarının uzunlukları ve köşelerinin açıları arasındaki ilişkiyi inceleyen bir matematik alanıdır. İsmi **tri-üç, gon-gen, metri-ölçüm** kelimelerinin birleşiminden meydana gelir. Milattan önce 3. yüzyılda Öklid ve Arşimet'in araştırmaları ile trigonometri ilk olarak geometri ve astronomi için kullanılmaya başlanmıştır. Gök cisimlerinin hareketlerinin dairesel olması sebebiyle çember ile ilişkilendirilmiştir. Sonraları navigasyon için de önemli bir alan haline gelmiştir.

İlk trigonometri araştırmaları bir çember içerisinde tanımlanabilen farklı çizgiler ve doğrularla bu çizgilerin yine çember içerisindeki açılarına odaklanmıştır.



Milattan önce 2. yüzyılda yaşamış olan Hipparkus (Hipparcus), güneş ve ayın hareketlerini incelemek için bir kirişin[1] (chord) uzunluğu ile iki kenarına olan açıyı ilişkilendiren bir tablo oluşturarak ilk defa trigonometriyi sistematikleştirmiştir. Bu sebeple Hipparkus trigonometriyi bulan kişi olarak anılır. Tablo 7.5° açılarla oluşturulmuştur. Bu fonksiyon günümüzdeki sinüs fonksiyonuyla

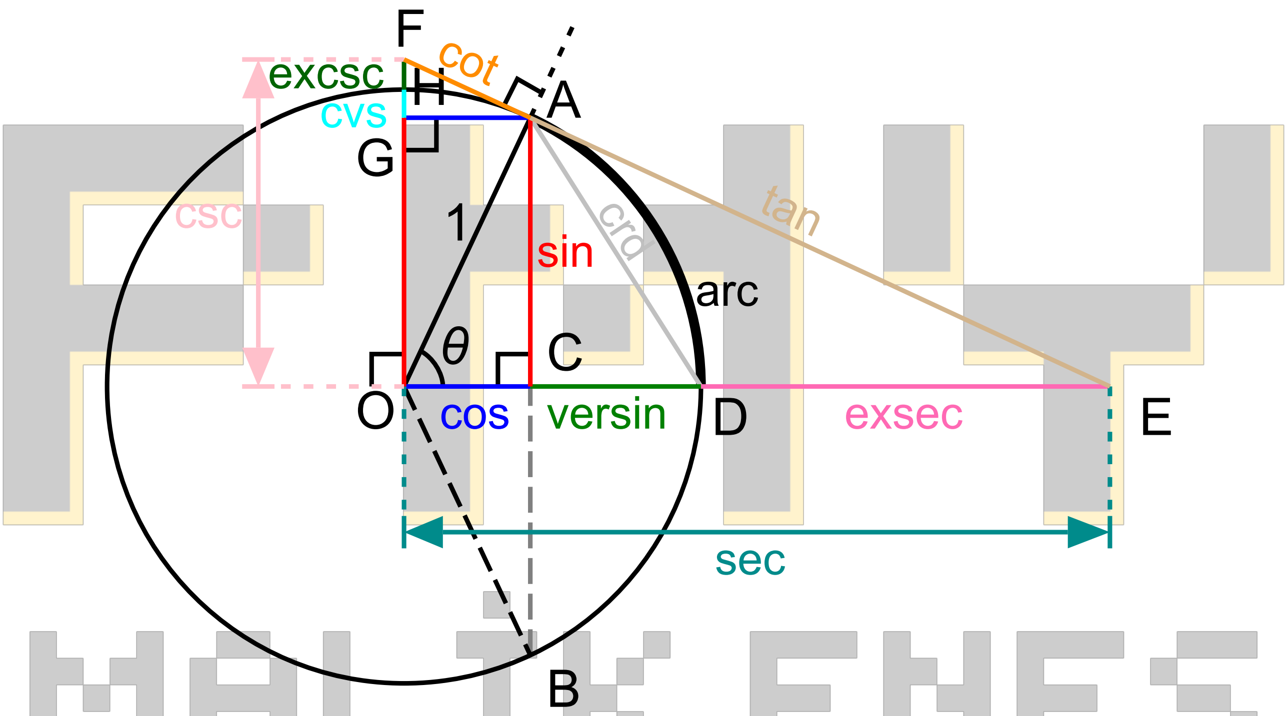
$$chord(\theta) = 2r * \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)$$ [2]

[1] Kirişle ilgili daha fazla bilgi için https://www.technologyuk.net/mathematics/trigonometry/chords.shtml

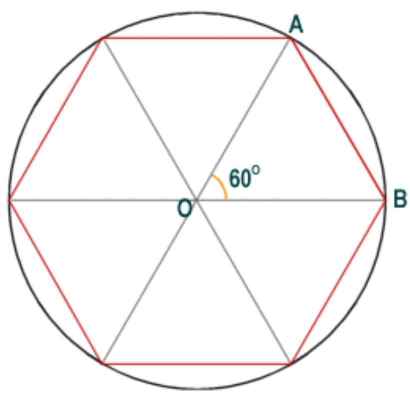
[2] https://www.desmos.com/calculator/2zynuzfcir

eşitliği ile ilişkilidir.

Milattan sonra 2. yüzyılda yaşamış olan Ptolemy[3] ise benzer bir tabloyu 0.5 derece açılarla tekrar hesaplamıştır. Ptolemy tarafından oluşturulan tablo yaklaşık 1200 yıl boyunca değişmeden kullanılmış, bu süre içerisinde kosinüs, tanjant (tangent), kosakant (cosecant), sekant (secant) ve kotanjant (cotangent) hesaplamak için de tablolar oluşturulmuştur.

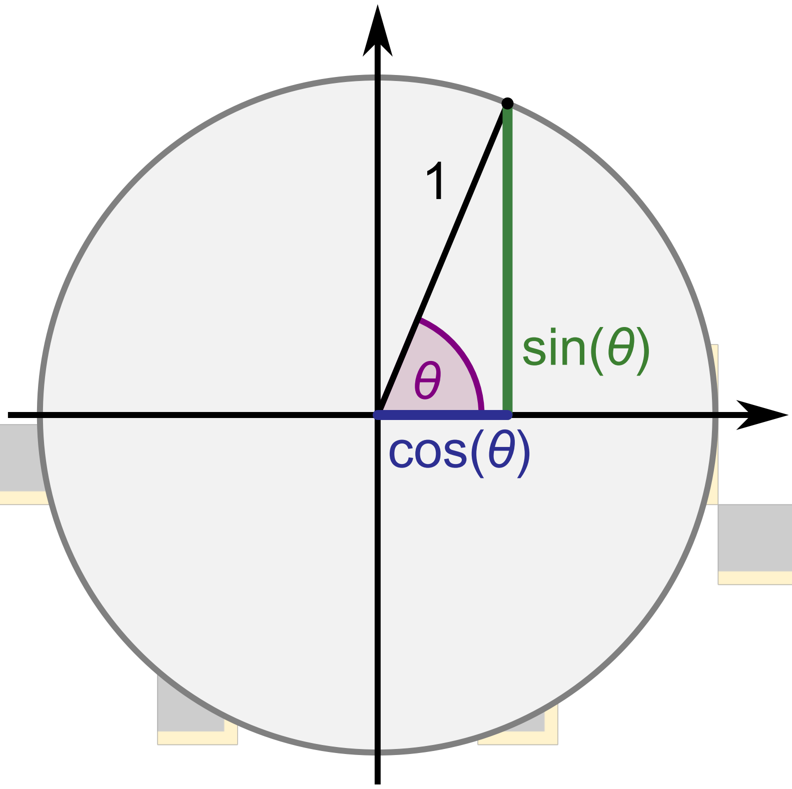


Bu tablolar genellikle bir çemberin birçok küçük üçgene bölünerek yapılan hesaplamalar ile oluşturulmuştur.

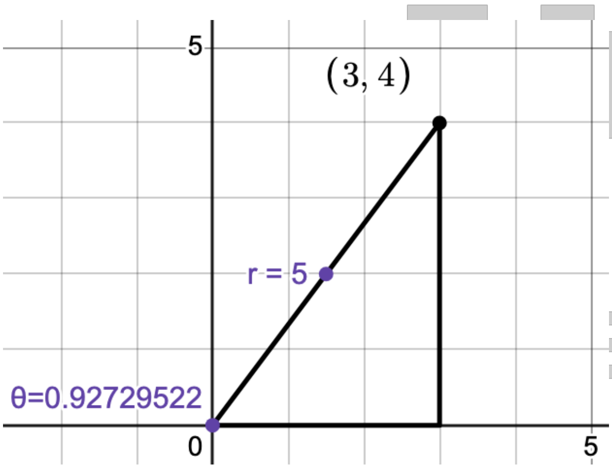


[3] Ptolemy aynı zamanda bir müzik teorisyenidir. İlk olarak Pisagor (ya da takipçileri) tarafından ortaya atılan kürelerin müziği (harmony of the spheres) ya da diğer adıyla evrensel müzik (musica universalis, universal music) teorisine katkıda bulunmuştur. Bu teori müziği gezegenlerin hareketleriyle ilişkilendirerek ilahi bir güce sahip olduğunu iddia eder. Gezegenlerin dairesel hareketleri esnasında insan kulağının duyamayacağı sesler ürettiğine inanılır. Bu teori insan vücudunun da benzer şekilde iç titreşimlere sahip olduğunu, gezegen hareketlerinin bu iç titreşimlerle harmoni (harmony, uyum) halinde olmasının ruh halini etkilediğini söyler. Üçüncü müzik kaynağı olan enstrümanlar ve insan sesinin de gezegenlerin hareketleri ve insanın iç titreşimi ile uyumlu olması gerektiği, uyumlu olmaması halinde insanı kötülüğe ve miskinliğe sürükleyeceğine inanılır. Günümüzde yaklaşık 2000 yıllık bu inancın takipçileri nedense gittikçe artmaktadır.

Trigonometrik Fonksiyonlar



Trigonometrik fonksiyonlar birim çember üzerinde çizilen dik üçgenlerin farklı özelliklerini hesaplamayı sağlayan fonksiyonlardır. Trigonometri alanının en önemli fonksiyonları olan **sinüs (sine), kosinüs (cosine)** gibi **trigonometrik fonksiyonlar** dik üçgen (bir köşesi 90 derece olan üçgen) temel alınarak tanımlanmıştır.



2 boyutlu uzaydaki bir nokta 2 farklı değer ile ifade edilebilir, noktanın x eksenindeki uzunluğu ve y eksenindeki uzunluğu[4]. Bu noktaya orijin noktasından bir çizgi, noktadan x eksenine dik bir çizgi ve x ekseninden orijin noktasına bir çizgi çekilir ise dik bir üçgen oluşturulabilir. 2 boyutlu uzaydaki herhangi bir nokta bu şekilde bir üçgen oluşturularak gösterilebilir.

Aynı nokta orijine olan uzaklığı (yarıçap) ve orijinden noktaya çizilen çizginin pozitif x eksenine olan açısı (θ) ile de gösterilebilir[5].[6]

---

[4] Kartezyen koordinat sistemi?

[5] Polar koordinat sistemi?

[6] https://www.desmos.com/calculator/zpovjr8neo

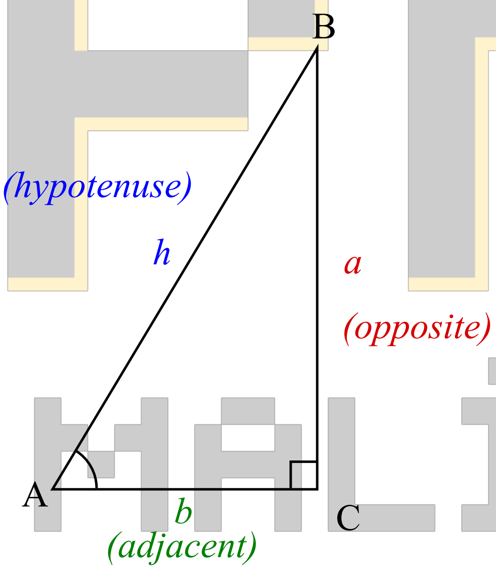
Böyle bir üçgen birim çember üzerinde tanımlandığında, yani yarıçapı 1 olduğunda, θ açısı kullanılarak, noktanın x eksenindeki uzunluğu **kosinüs fonksiyonu**, y eksenindeki uzunluğu ise **sinüs fonksiyonu** ile hesaplanabilir. Dolayısıyla trigonometri bağlamı içerisinde x eksenine kosinüs ekseni, y eksenine sinüs ekseni adı da verilebilmektedir.

Yani yarıçapı 1 olan ve θ açısına sahip bir nokta için

$$x = \cos(\theta)$$

$$y = \sin(\theta)$$

ile hesaplanabilir.



Yine trigonometri bağlamı içerisinde oluşturulan dik üçgenin kenarları genellikle **komşu (adjacent)**, **karşı (opposite)** ve **hipotenüs (hypotenuse)** olarak isimlendirilir. Bu durumda

$$komşu = \cos(\theta)$$

$$karşı = \sin(\theta)$$

$$hipotenüs = \sqrt{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2}$$

olarak da yazılabilir.

Komşu, trigonometrik fonksiyon içerisinde kullanılacak açıya yakın olan kısa kenardır. Karşı, trigonometrik fonksiyon içerisinde kullanılacak açının karşısındaki kenardır (dolayısıyla açının direkt olarak etki ettiği kenardır). Hipotenüs ise üçgenin dik açısı karşısındaki uzun kenarıdır.

Bazı kaynaklar kosinüs ve sinüs için aşağıdaki eşitlikleri de kullanmaktadır.

$$\cos(\theta) = \frac{komşu}{hipotenüs}$$

$$\sin(\theta) = \frac{karşı}{hipotenüs}$$

Trigonometrik fonksiyonların kullanılacağı bir nokta eğer birim çember üzerinde değil ise **normalizasyon** işlemi yapılmalı, yani nokta orijine olan uzaklığına bölünmelidir[7]. Yukarıdaki ifadede komşunun ve karşının hipotenüse bölünmesi normalizasyon işlemi olarak görülebilir.

[7] Normalizasyon işlemi için koordinat sistemleri ders notuna bakabilirsiniz.

Bir dik üçgendeki kısa kenarları arasındaki ilişkiyi tanımlayan fonksiyonlar **tanjant (tangent)** ve **kotanjant (cotangent)** fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{karşı}{komşu}$$

$$\cot(\theta) = \frac{\cos\,(\theta)}{\sin\,(\theta)} = \frac{komşu}{karşı}$$

olarak tanımlanabilir. Tanjantı bilinen bir noktanın (diğer bir ifadeyle $\sin(\theta)\, ve \cos(\theta)$ yani x ve y değerleri bilinen bir noktanın) θ açısı tanjant grafiği altında kalan alan ile bulunabilir[8].

$$\theta(x) = \int_0^{\tan\,(x)} \frac{dx}{1+x^2}$$

Bu işlemin farklı kaynaklarda $\tan^{-1}\left(\frac{\sin\,(\theta)}{\cos\,(\theta)}\right)$, $\arctan\left(\frac{\sin\,(\theta)}{\cos\,(\theta)}\right)$ *ya da* $\operatorname{atan}\left(\frac{\sin\,(\theta)}{\cos\,(\theta)}\right)$ fonksiyonları olarak tanımlandığı da görülebilir. Elde edilen θ açısı $\sin(\theta)$ değerinin pozitif olduğu noktalar için geçerlidir. Diğer noktalar için açı düzeltmesi yapılması gereklidir[9].

Dalgalar

Trigonometrik fonksiyonlar kosinüs ve sinüs dalgası üretmek için kullanılabilir. Bu dalgalar en temel dalga formları olarak görülür. Sinyal üretme ve analiz etme yöntemlerinin yapı taşlarıdır.

Sinüs fonksiyonu radyan cinsinden bir açı değeri alır[10] ve karşılığında birim çember üzerinde o açıdaki noktanın y eksenindeki konumunu verir. Eğer sinüs fonksiyonuna açı değeri olarak saniye cinsinden zamanı verecek olursak birim çemberin çevresi 2π uzunlukta olduğu için tam 2π saniye sonra bir çevrimini tamamlayacaktır[11].

$$y(t) = \sin\,(\mathrm{t})$$

Böyle bir dalganın periyodu 2π saniye olduğuna göre frekansı

$$frekans\ (f) = \frac{1}{periyot\ (T)}$$

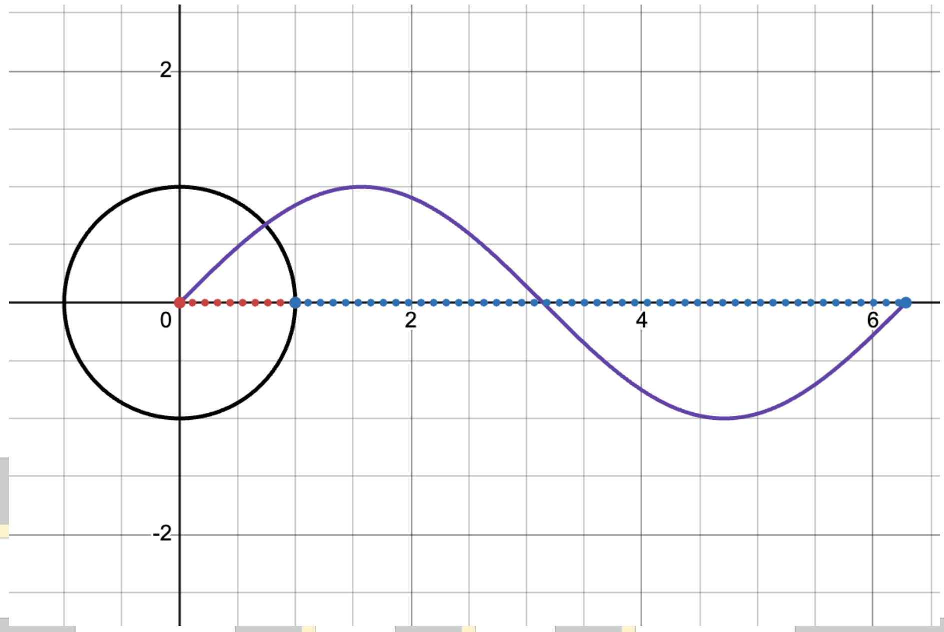
$$f = \frac{1}{2\pi} = 0.159\ Hz$$

[8] https://www.desmos.com/calculator/pzgflk4xhy

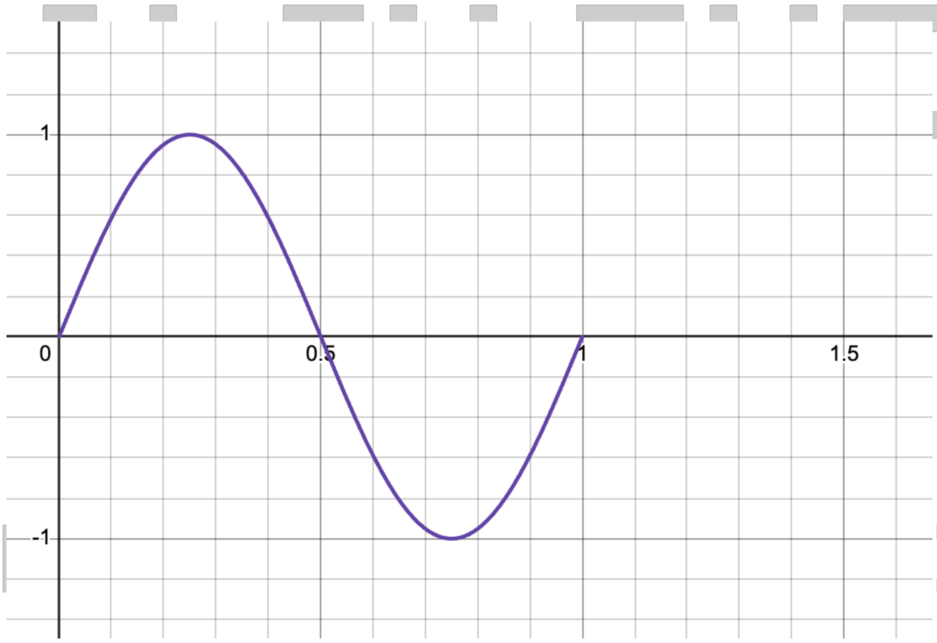
[9] Düzeltmenin nasıl yapılacağını öğrenmek için koordinat sistemleri ders notuna bakabilirsiniz.

[10] Sinyal bağlamında sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının aldığı radyan cinsinden açı değerine **faz** adı da verilmektedir.

[11] https://www.desmos.com/calculator/a4wd4cdccx



olacaktır. Frekansı bir saniye içerisindeki titreşim sayısı olarak tanımladığımıza göre sinüs fonksiyonunu kullanarak bir saniye sonunda çevrimini tamamlayacak bir dalga üretmek daha çok işimize yarayacaktır. Öyleyse saniye cinsinden olan zamanı 2π ile çarparsak bir saniyenin sonunda verdiğimiz açı değeri 2π olacaktır. Bu durumda 1 saniye sonunda çevrimini tamamlayan yani 1 Hz frekansında bir sinüs dalgası üretebiliriz[12].

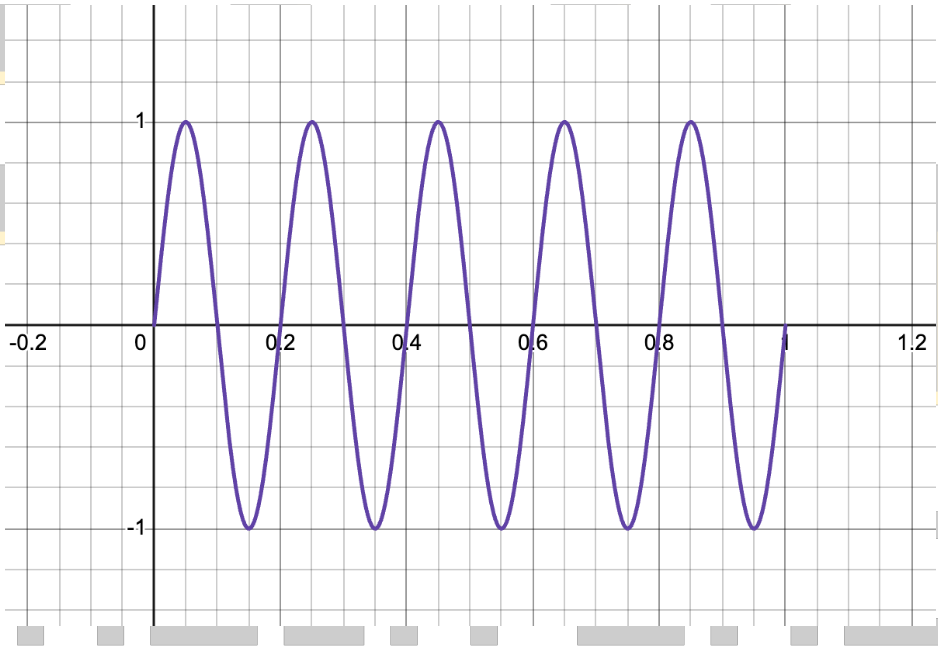


$$y(t) = \sin{(2\pi t)}$$

[12] https://www.desmos.com/calculator/gskkyclgg8

Bu işlem fizikte **dairesel hareket için açısal frekans (angular frequency of circular motion)** ya da uygun bağlamda sadece **açısal frekans (circular motion)** olarak isimlendirilir[13]. Açısal frekans $\boldsymbol{\omega}$ $(omega)$ harfi ile gösterilir ve $2\pi f$'ye eşittir. Açısal frekans birim zamana (saniye) göre tanımlandığı için zaman eşitliğin içerisinde gösterilmez. Yani $2\pi f$ bize bir saniye sonunda dairesel hareketin kaç kere açısal döngüsünü tamamlayacağını söyler.

Eğer sinüs fonksiyonu içerisinde açısal frekans ve zamanı birlikte kullanırsak istediğimiz herhangi bir frekansta sinüs dalgası üretebiliriz[14].



$$y(t) = \sin{(2\pi 5t)}$$

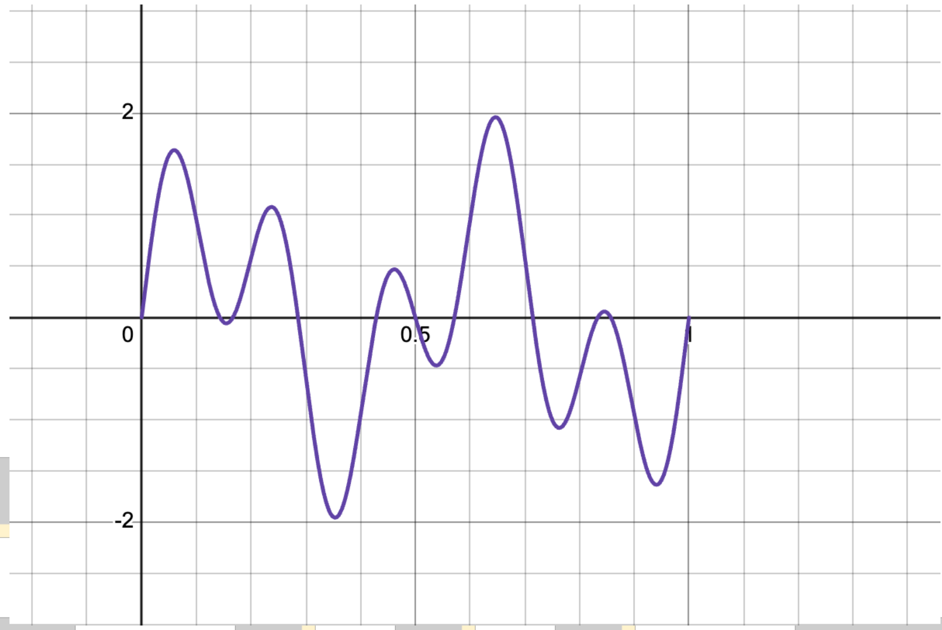
Eğer iki sinüs dalgasını birbiriyle toplarsak daha karmaşık bir dalga elde edebiliriz. Bu işlem matematiksel olarak toplamak olsa da sinyaller için **karıştırmak (mixing)**[15] olarak da isimlendirilir[16].

[13] Farklı hareket tipleri için farklı açısal frekans formülleri vardır. Örneğin bir yayın hareketinin açısal frekansı $\sqrt{\frac{yay\ sabiti}{ağırlık}}$, elektronik olarak sinüs dalgası üretmek için kullanılan LC (indüktör-kapasitör) devresinin açısal frekansı $\sqrt{\frac{1}{LC}}$'dir.

[14] https://www.desmos.com/calculator/sj3ljd4smb

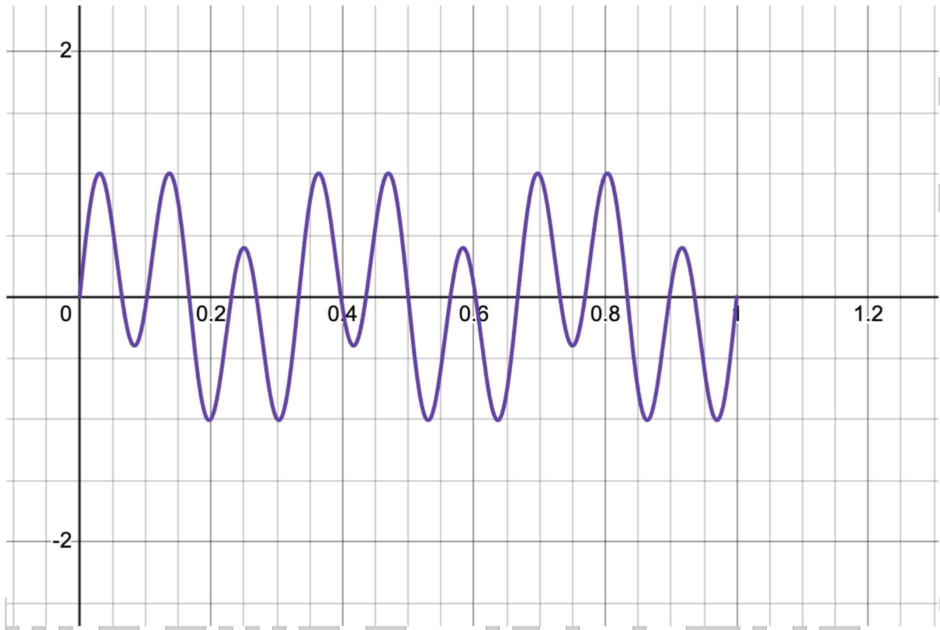
[15] DAW içerisinde iki farklı kanaldan ses dosyası çaldığınızda bu kanalların karıştırılarak ana çıkışa gönderilmesi için yapılan işlem toplama işlemidir.

[16] https://www.desmos.com/calculator/jp1staclfl



$$y(t) = \sin(2\pi 5t) + \sin(2\pi 2t)$$

Eğer oluşturduğumuz sinüs dalgasının **genliğini (amplitude)**[17] değiştirmek istersek sinüs dalgasını herhangi bir skaler ile çarpabiliriz. Genliği düşürmek istiyorsak 0 ile 1 arasında, yükseltmek istiyorsak 1'in üzerinde bir skaler kullanabiliriz[18].

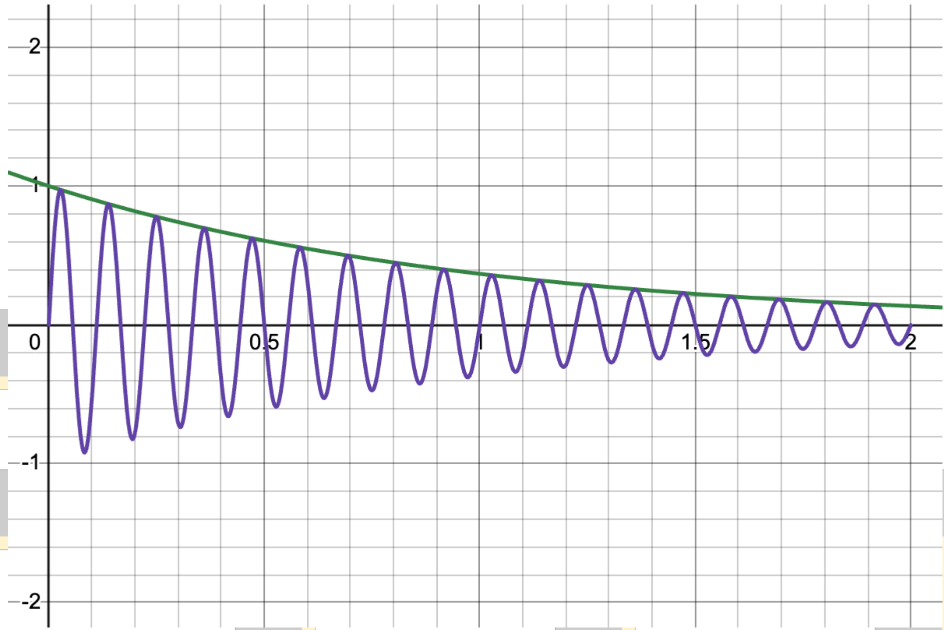


$$y(t) = 0.8 * \sin(2\pi 9t) + 0.4 * \sin(2\pi 3t)$$

[17] DAW içerisinde bir kanalın fader'ını hareket ettirdiğinizde yapılan işlem çarpma işlemidir.

[18] https://www.desmos.com/calculator/nuqs3pjfjn

Sinüs dalgasının genliğini değiştirmek için skaler kullanmak yerine başka bir fonksiyonu da kullanabiliriz. Bu durumda yaptığımız işleme **genlik modülasyonu (AM, amplitude modulation)**[19] adı verilir[20].

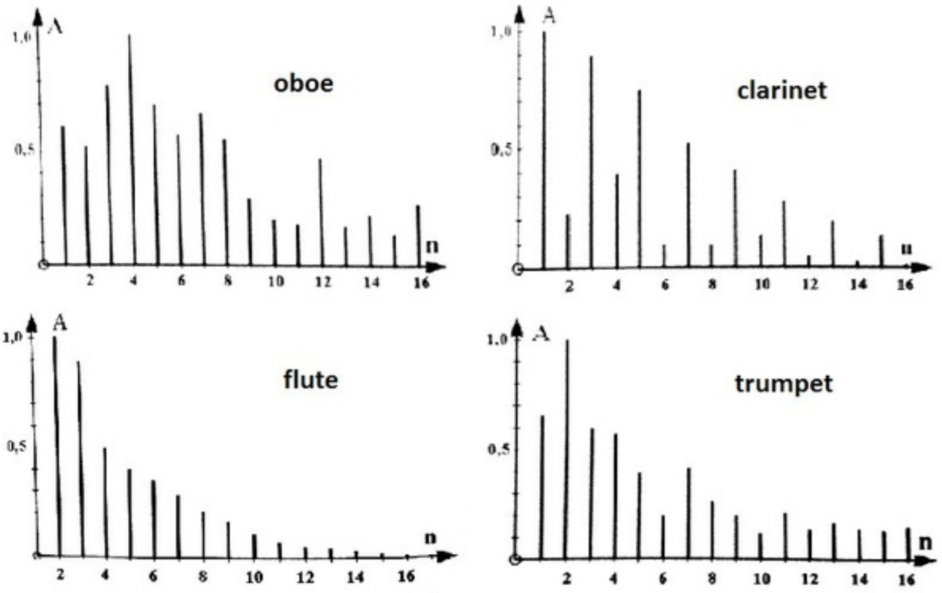


$$m(t) = e^{-t}$$

$$y(t) = m(t) * \sin{(2\pi 9t)}$$

Harmonikler

Doğada duyduğumuz ses dalgaları genellikle karmaşık dalgalardır.



[19] AM radyo vericileri sinyali bu şekilde modüle ederek elektromanyetik olarak iletir, AM radyo alıcıları ise bu sinyali demodüle ederek teybinizden çalar. FM (frekans modülasyonu, frequency modulation) radyo da benzer şekilde çalışır. Modülasyonlar hem müzik için hem de iletişim (Wi-Fi (DSSS, OFDM), Bluetooth (PSK), ADSL (DMT), 5G (OFDM üzerine QPSK ya da QAM) vb.) için çok önemlidir.

[20] https://www.desmos.com/calculator/k6rl7bsxyj

Fakat **çoğu doğal ses kaynağı**, kaynağın yaydığı temel frekansın **harmonik serisinde (harmonic series)** oluşturulmuş sinüs dalgaları üretir [21].

Harmonik seri, kaynağın oluşturduğu temel frekansın tam katlarında oluşan diğer frekanslarla toplamına verilen isimdir. Bu frekansların her birine **harmonik (harmonic) veya doğuşkan** adı verilir. Genellikle derecesine göre isimlendirilir, dolayısıyla temel frekansa 1. harmonik adı verilir. Harmonik serinin genlikleriyle birlikte oluşturdukları bütüne **harmonik yapı (harmonic structure)** adı da verilmektedir.

Karmaşık bir dalganın harmonik serisi bir enstrümanın sesini tanımlamak için yeterli değildir. Çünkü harmoniklerin genlikleri enstrümandan çıkan sesin zaman içerisinde uğradığı değişimlerle birlikte değişir[22]. Ayrıca bir enstrüman sadece temel frekansın katı olan frekansları değil, temel frekansın katı olmayan **enharmonik (inharmonic)** frekansları da barındırır. Enharmonik frekansların genlikleri genellikle çok daha düşük ve sesin genel karakteri üzerinde daha az etkiye sahiptir, yine de karmaşık bir dalga üreten kaynaktan yayılırlar, dolayısıyla sesin **tınısı (timbre)** üzerinde etki sahibidirler.

[21] Yukarıdaki obua'nın harmonik serisinin il 10 derecesini duymak için https://patchies.app/?id=vjq0jdtgah3ihcf

[22] Örneğin bir piyano tuşuna bastığınızı varsayalım. Tuşa bastığınız anda ilgili çekiç hareket edecek ve tellere vuracaktır. Hiç titreşmeyen tellerin titreşmeye başlayarak maksimum titreşime ulaştığı süreye atak süresi denir. Atak süresinin 100ms olduğunu varsayarsak 10. ms sonundaki harmonik yapı ile 20. ms sonundaki harmonik yapı birbirinden oldukça farklı olacaktır. Bir enstrümanın tınısını oluşturan en önemli etkenlerden biri atak süresi içerisindeki harmonik yapı değişimidir. Görselde gösterilen enstrümanların harmonik yapıları sesin uzadığı, harmonik yapının stabil hale geldiği anda ölçülmüş değerlerdir. Bu sebeple bir önceki dipnotta verilen linkteki sesi obua'ya benzetemediyseniz bu çok normal bir durumdur.

Ekler

Sinüs fonksiyonunun Taylor serisi

Taylor serisi bir fonksiyonun tek bir noktadaki türevlerinin toplamı olarak ifade edilebilmesini sağlayan sonsuz bir seridir. Taylor serisi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!}(x-a)^0 + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Yukarıdaki formülde $\boldsymbol{a}$ fonksiyondan seçilen noktayı, $\boldsymbol{f^{(n)}(a)}$ fonksiyonun **a** noktasındaki **n**'inci türevini, $\boldsymbol{x}$ ise hesaplanmak istenen noktayı belirtir. Bir fonksiyonun Taylor serisi ile tanımlanabilmesi için ani değişime sahip olmaması ve **a** noktasında sürekli türevi alınabilir olması gerekir. Sinüs fonksiyonunun 0 (sıfır) noktasındaki türevleri

$$\sin(0) = 0$$

$$\sin^{(1)}(0) = \cos(0) = 1$$

$$sin^{(2)}(0) = -\sin(0) = 0$$

$$sin^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$$

$$\sin^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$$

olarak yazılabilir. Sinüs fonksiyonu 4. türevinden itibaren aynı döngüyü devam ettirir. Bu durumda sinüs fonksiyonunun Taylor serisi

$$\sin(x) = \frac{\sin(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{\cos(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{-\sin(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{-\cos(0)}{3!}(x-0)^3 + \cdots$$

olarak yazılabilir. $\sin(0)\ ve -\sin(0)$ işlemleri 0'a eşit olduğu ve herhangi bir sayıya bölümü de sıfıra eşit olacağı için seriye bir etkisi olmayacaktır. Ayrıca **a** noktası da 0 noktası olarak seçildiği için çıkarma işleminde bir etkisi yoktur. Bu sebeple

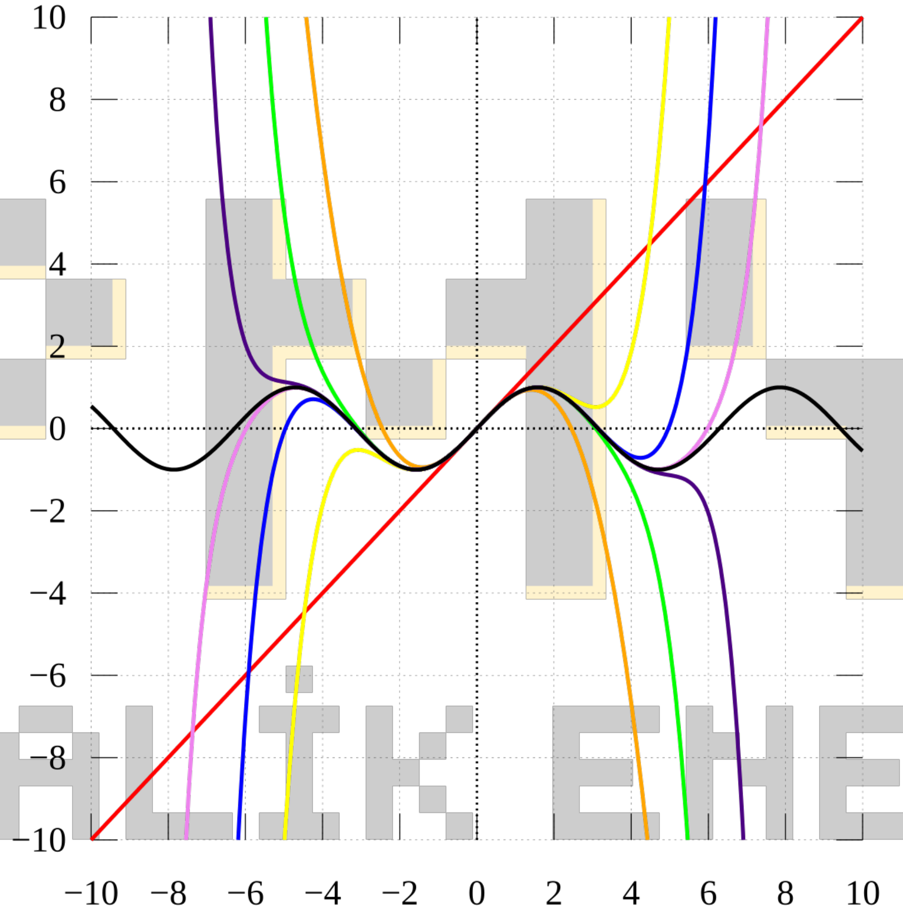
$$\sin(x) = \frac{\cos(0)}{1!}x^1 + \frac{-\cos(0)}{3!}x^3 + \frac{\cos(0)}{5!}x^5 + \cdots$$

olarak yazılabilir. $\cos(0) = 1\ ve -\cos(0) = -1$ olduğuna göre

$$\sin(x) = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

şeklinde sadeleştirilerek hesaplanabilir.

Sinüs fonksiyonunun Taylor serisi, serinin sonsuz olmasına rağmen, ilk 7 derecesi bile çok küçük bir hata oranıyla sinüsü hesaplamamızı sağlayacaktır.



sin(x) fonksiyonu ve **1.**, **3.**, **5.**, **7.**, **9.**, **11.** ve **13.** dereceden Taylor serisi grafiği.

Taylor serisinin pratik uygulamaları ile ilgili daha fazla bilgi için https://www.youtube.com/watch?v=eX1hvWxmJVE