MALİK ENES
ŞAFAK

PMY-WEB.GITHUB.IO

Mesleki Matematik

Sayılar ve Sayı Sistemleri 0.1

İçindekiler

PMY

MALİK ENES ŞAFAK

PMY-WEB.GITHUB.IO

Sayılar

Gerçek (Real) Sayılar

Tarih boyunca toplumlar farklı sembollerle farklı sayı sistemleri geliştirmişlerdir. Günümüzde kullandığımız sayı sistemi **10'luk sayı sistemi (decimal)** olarak isimlendirilir ve bu sayı sisteminde kullanılan semboller Arap rakamları (Arabic numerals, Hindu-Arabic numerals) olarak bilinir. Bu semboller 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9'dur ve soldan sağa doğru artarak ilerleyen değerlere sahiptirler. Bu semboller aynı zamanda **rakam** olarak da ifade edilir.

Hint-Arap sayı sisteminde bu sembolleri yan yana yazarak daha büyük değerleri ifade eden sayılar elde edebiliriz. Bu özelliğe **basamak gösterimi (positional notation)** denir ve rakamlara (sembollere) pozisyonlarına göre değer verir[1]. Basamak gösterimi sisteminde her rakamın değeri

$$rakam * taban^{basamak}$$

formulü ile belirlenir. Örneğin 1234 sayısı:

$$1 * 10^3 + 2 * 10^2 + 3 * 10^1 + 4 * 10^0$$

olarak ifade edilebilir. Bu örnekte 4 rakamı 0. basamakta, 3 rakamı 1. basamakta, 2 rakamı 2. basamakta ve 1 rakamı ise 3. basamaktadır. Bu örnekte kullanılan bütün sayılar **tam sayılar'dır (whole numbers, integer)** ve tam sayılar 1'in katları olan sayılar olarak tanımlanabilir. Tam sayılar $\mathbb{Z}$ sembolü ile gösterilir. Sadece 0'dan daha küçük değerleri ifade eden tam sayılar **negatif tam sayılar**, sadece 0'dan büyük değerleri ifade eden tam sayılar **pozitif tam sayılar** olarak isimlendirilir.

0'dan daha küçük bir değeri ifade etmeyen tam sayılara[2] **doğal sayılar (natural numbers)** denir ve $\mathbb{N}$ sembolü ile gösterilir. Bu sayılar **negatif olmayan tam sayılar** olarak da ifade edilebilir.

Tam sayılara ek olarak iki sayı arasındaki değerleri de gösterebilen sayılara **gerçek sayılar (real numbers)** denir ve $\mathbb{R}$ sembolü ile gösterilir. Basamak gösterimi kuralları gerçek sayılar için de geçerlidir. Örneğin 3.145 sayısı:

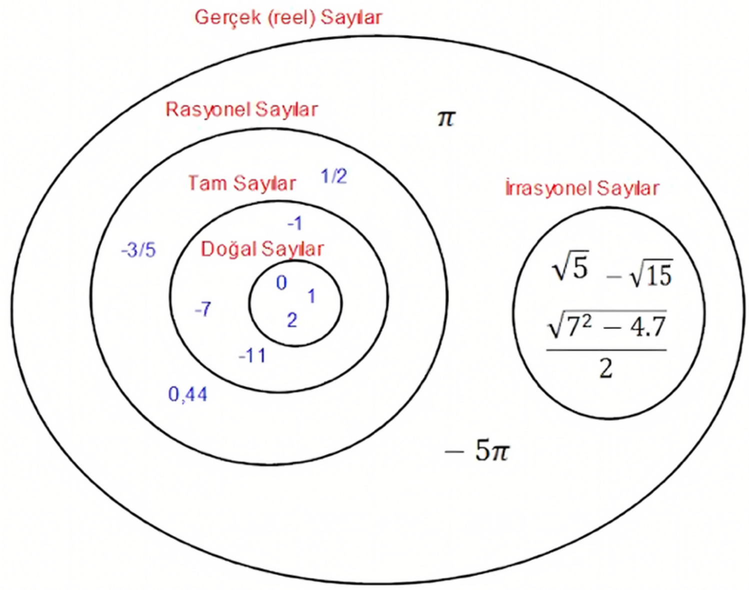
$$3 * 10^0 + 1 * 10^{-1} + 4 * 10^{-2} + 5 * 10^{-3}$$

---

[1] Bu durum size doğal geldiği için "başka nasıl olacaktı ki" diye düşünebilirsiniz. Basamak gösterimi kullanmayan ve günümüzde kullanılmaya devam eden sayı sistemlerinden biri Roma sayılarıdır. Örneğin bu sayı sisteminde 19 sayısı XIX olarak yazılır. XIX, "on artı on eksi bir" anlamına gelir.

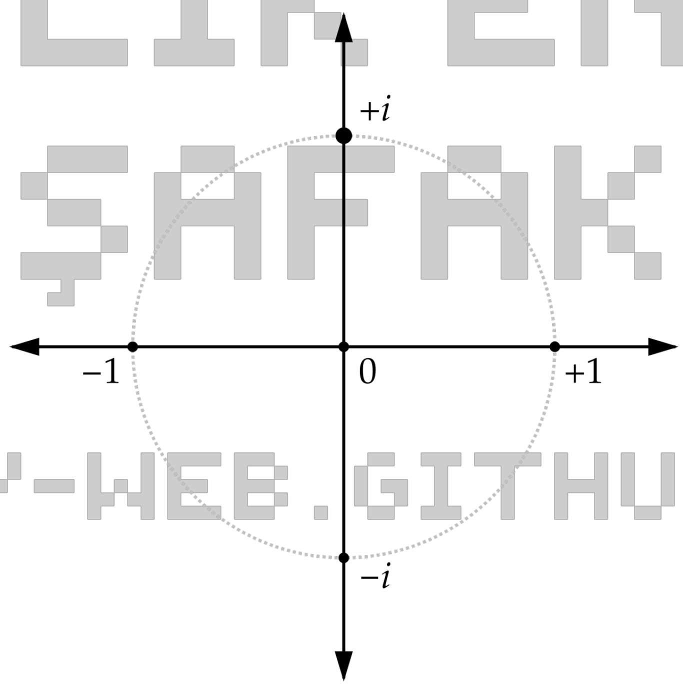
[2] Bazı kaynaklar 0 sayısını doğal sayılara dahil etmezler. 0 sayısını dahil etmeyen ve negatif olmayan tam sayılara sayma sayıları da denilebildiği için bu kaynakta doğal sayılara 0 dahil edilmiştir.

olarak ifade edilebilir. Bu örnekte 3 rakamı 0. basamakta, 1 rakamı -1. basamakta, 4 rakamı -2. basamakta, 5 rakamı ise -3. basamaktadır.



İki sayının birbirine bölümü olarak ifade edilebilen sayılara **rasyonel (rational)**, bu şekilde ifade edilemeyen sayılara ise **irrasyonel (irrational)** sayılar adı verilmektedir[3].

Sanal (Imaginary) Sayılar

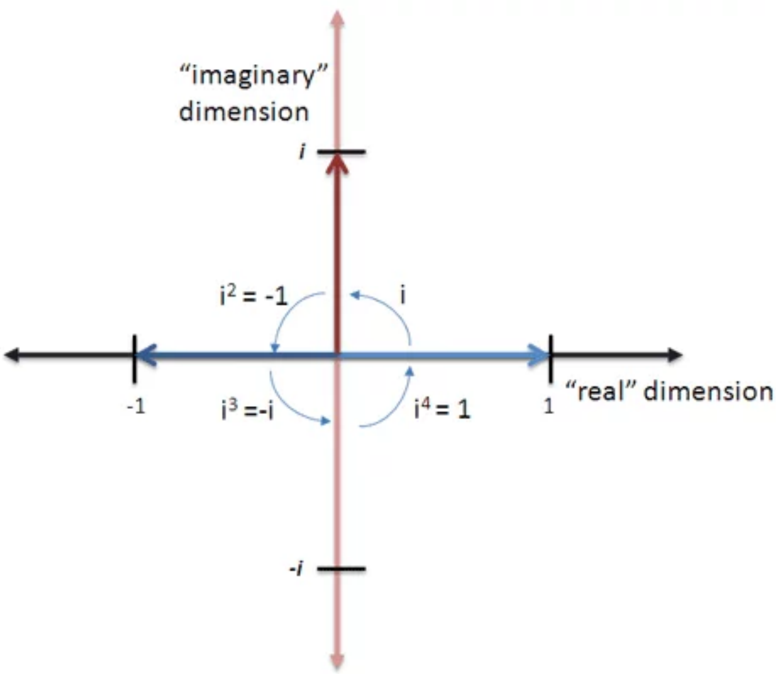


[3] Rasyonel kelimesi akla uygun, akılcı anlamına gelir. Tam sayılar Antik Yunan'da kutsal olarak görülüyordu ve tam sayı olmayan sayılar ise iki tam sayının birbirine bölümüyle ifade ediliyordu ($0.5 = \frac{1}{2}$ gibi). İki tam sayının birbirine bölümü olarak ifade edilemeyen sayıların kullanımı ise "sapkınlık" olarak görüldüğü için hoş karşılanmıyordu.

Gerçek sayılarda **birim uzunluk (unit length) 1** kabul edilirken sanal sayılarda birim uzunluk $\boldsymbol{i}$ olarak kabul edilir[4]. $\boldsymbol{i}$ sayısı $\sqrt{-1}$'e eşittir. Bu sayının gerçek sayılar için bir anlamı yoktur, çünkü negatif bir sayının karesi negatif olamaz[5]. Sanal sayıların rakamları için farklı semboller tanımlanmadığı için $\boldsymbol{i}$ sayısının katları şeklinde yazılırlar. Bir gerçek sayı ve bir sanal sayının birlikte oluşturdukları sayıya **karmaşık sayı (complex number)** adı verilir. Sanal sayılar genellikle tek başlarına kullanılmazlar, çoğunlukla karmaşık sayı şeklinde kullanılırlar.

$\boldsymbol{i}$ sayısının en önemli özelliği kendisiyle çarpılması sonucu karmaşık sayı düzleminde çeyrek tur (90 derece, $\frac{1}{2}\pi$ radyan) dönmesidir. Örneğin:

$$i = \sqrt{-1} = i$$
$$i^2 = i * i = \sqrt{-1} * \sqrt{-1} = -1$$
$$i^3 = i * i * i = -1 * \sqrt{-1} = -1i$$
$$i^4 = i * i * i * i = -1 * -1 = 1$$
$$i^5 = i * i * i * i * i = 1 * \sqrt{-1} = i$$



[4] Özellikle fizik disiplininde sanal sayı sembolü genellikle $\boldsymbol{j}$ ile gösterilir.

[5] Çarpma işlemi kurallarına göre aynı işarete (+ ya da -) sahip iki gerçek sayının çarpımının sonucu pozitif (+) olmalıdır. Karekök işlemi bir sayının karesinden sayının kendisini bulmak için kullanılır. Örneğin $x^2 = 4$ eşitliğinden yola çıkarak x sayısının değerini bulmak istiyorsak $x = \sqrt{4} = 2$ işlemini yapabiliriz. Bu durumda $x = \sqrt{-1}$'i elde etmek için $x^2 = -1$ eşitliğini yazabiliyor olmamız gerekir. Fakat negatif olan bir sayının kendisi ile çarpımı negatif olamayacağı için böyle bir eşitliği gerçek sayılarla yazabilmemiz mümkün değildir.

Taban Aritmetiği

Yukarıda bahsettiğimiz sayıların tamamı 10'luk tabanda gösterilmiştir. 10'luk taban, insanların saymak için en çok kullandıkları aracın (eller) 10 adet element içermesi (parmaklar) sebebiyle günlük hayatta yaygın olarak tercih edilen tabanlardan biridir.

Sayı sistemlerinde **taban** bir basamağın kaç farklı değer ifade edebildiğini temsil eder. Örneğin on tabanındaki bir basamağa yazılabilecek 10 farklı sembol vardır (0…9). Dolayısıyla bir basamaklı onluk tabandaki bir sayı 10 farklı değeri ifade edebilir. Onluk tabanda iki basamak yan yana geldiğinde 100 farklı değer (00…99), üç basamak yan yana geldiğinde 1000 farklı değer (000…999) ifade edilebilir. Dolayısıyla basamak sayısı arttıkça ifade edilebilecek değer miktarı da taban ile ilişkili olarak artar. Belli bir tabanda belli bir basamak sayısının kaç farklı değeri ifade edebileceği

$$taban^{basamak\ sayısı}$$

formülü ile hesaplanabilir. Bu durumda onluk tabanda beş basamaklı bir sayı

$$10^5 = 100000$$

farklı değeri ifade edebilir.

İnsan tarafından tasarlanan farklı sistemler için başka sayı tabanları da tercih edilmiştir. Günümüzde yaygın olarak kullanılan tabanlardan bazıları 2'lik (binary), 16'lık (hexadecimal), 60'lık (sexagesimal) tabandır. Günümüzde onluk taban dışındaki tabanlar için çoğunlukla özel semboller atanmamıştır, bu sebeple onluk taban için geliştirilen semboller bu tabanlardaki sayıları göstermek için de kullanılmaktadır. Bazı tabanlar için 9 rakamından sonra harflerin kullanımı da yaygındır. Aynı sembollerin kullanılması sebebiyle farklı tabanlardaki sayıları birbirinden ayırmak için alt indisler (subscript) kullanılır. Örneğin

$$1001_2, 3241_5, 1AB2_{16}$$

İkilik taban çoğunlukla dijital devrelerde saklanan ve işlenen değerlerin temsil edilmesi için kullanılmaktadır. Çünkü dijital devreler en basit haliyle elektriğin varlığı ya da yokluğu yani 1 ve 0 değerlerini saklayabilmektedir. Bu sebeple bilgisayar parçaları çoğunlukla ikilik taban kullanacak şekilde tasarlanır[6]. Bilgisayar biliminde yaygın olarak kullanılması sebebiyle ikilik tabandaki basamaklar "bit (**bi**nary digi**t**, ikilik basamak)" olarak kısaltılmaktadır.

[6] Bu devreler başka sayı tabanlarında çalışacak şekilde tasarlanabilseler de hem tasarlanan makinenin karmaşıklığını arttıracağı hem de gürültüye karşı daha hassas olacağı için genellikle tercih edilmezler.

İkilik tabandaki rakamlar tek başlarına bir işlemi yerine getiremeyecek kadar az miktarda değer saklayabilirler (sadece 0 ve 1). Bu sebeple gruplar halinde (belli miktarda basamağı içerecek şekilde) kullanılır[7]. Bilgisayar biliminin gelişimi içerisinde farklı basamak sayıları kullanılmış olsa da sonunda 8 basamak standart hale gelmiştir. Günümüzde bilgisayar bilimi içerisinde kullanılan "Byte (bayt)" terimi genellikle 8 basamaklı 2'lik tabandaki sayıyı ifade etmek için kullanılır. Aynı zamanda 8-bit (8 binary digit, 8 ikilik basamak) olarak da ifade edilir. Bir 8-bitlik sayı $2^8 = 256$ farklı değeri ifade edebilir. Örneğin

$$01101100_2$$

sayısı 8-bitlik bir sayıdır. Bu kadar fazla miktarda basamağı yazmak fazla yer kapladığı için 8-bitlik sayılar genellikle on altılık tabanda gösterilir. Çünkü 8-bitlik bir sayının ifade edebileceği 256 farklı değer 16*16 farklı değer olarak da ifade edilebilir. Yani iki basamaklı on altı tabanındaki bir sayı da aynı miktarda değeri ifade eder ($2^8 = 16^2$). Örneğin

$$10101100_2 = A9_{16}$$

sayıları birbirine eşittir.

60 sayısı çok fazla sayıya bölünebilmesi sebebiyle (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60) birçok medeniyet tarafından kullanılmış bir tabandır. Günümüzde saat, dakika, saniye gibi zaman birimlerinin ve derece, açısal dakika ve açısal saniye gibi açıların ifade edilmesi için hala kullanılmaktadır.

[7] Belli bir miktarda basamağı içerecek şekilde gruplamak işlem yapmayı kolaylaştırmak ve standartlaştırmak içindir. Bunu kareli bir deftere benzetebilirsiniz. Kareli defterin her satırında belli miktarda kare bulunur. Her satırdaki kare miktarı birbirinden farklı olsaydı alt alta yazdığınız sayılarla işlem yapmak oldukça güç olurdu. Ya da her sayı için farklı miktarda satır kullansaydınız yine işlem yapmanız zorlaşırdı.