PMY

MALİK ENES ŞAFAK

PMY-WEB.GITHUB.IO

Mesleki Matematik

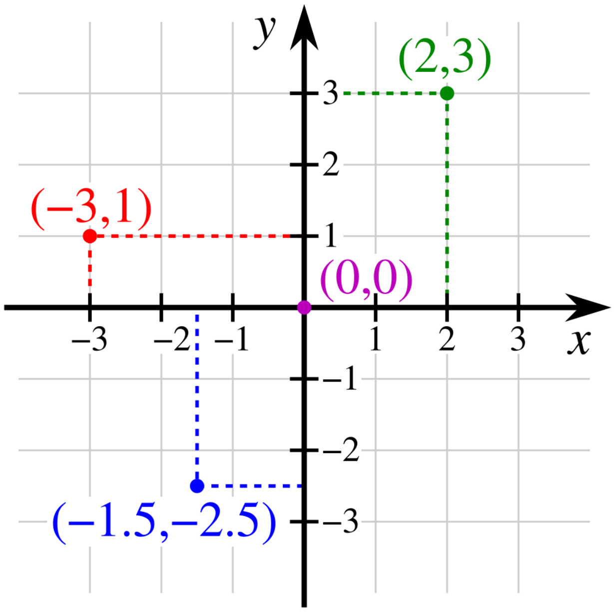
Koordinat Sistemleri

0.1

İçindekiler

Koordinat Sistemleri

Kartezyen Koordinat Sistemi



Kartezyen koordinat sistemi 0'dan büyük boyutlu, her boyutunun birbirini dik eksenlerle kestiği, eksen sayısı kadar gerçek sayı ile ifade edilebilen noktalara sahip koordinat sistemidir. 1 boyutlu kartezyen koordinat sistemi gerçek sayı çizgisi ile çok benzerdir. 2 boyutlu kartezyen koordinat sistemi yukarıda gösterilen şekildeki gibidir. 3 boyutlu kartezyen koordinat sistemini yaşadığımız dünyaya bakarak hayal edebilirsiniz.

2 boyutlu kartezyen koordinat sistemi genellikle **düzlem (plane)**, 3 boyutlu koordinat sistemi ise **uzay (space)** olarak isimlendirilir. Düzlem aynı zamanda 2 boyuttan daha büyük bir koordinat sistemindeki 2 boyutlu bir düzlemi ifade etmek için de kullanılabilir. Örneğin 3 boyutun sonsuz adet 2 boyutlu düzlemden oluştuğunu düşünebiliriz. Uzay ise 2 boyutlu uzay, 5 boyutlu uzay gibi farklı boyuttaki alanları ifade etmek için de kullanılmaktadır.

Kartezyen koordinat sistemi "Düşünüyorum, öyleyse varım" sözüyle ünlü filozof Renè Descartes tarafından geliştirilmiştir[1]. Kartezyen (Cartesian) ismi de Descartes'ın anısına verilmiştir. Kartezyen koordinat sistemi **analitik geometri (analytic geometry)** alanının doğuşuna sebep olmuştur[2]. Aynı

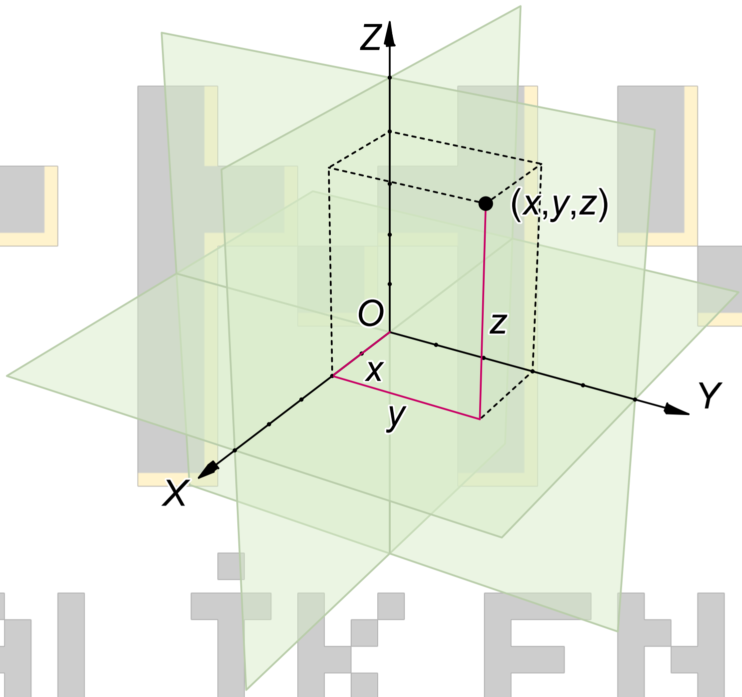
---

[1] Bu sistem Öklid'in (Euclid) "Öklid'in Elementleri" kitabında çeşitli geometrik şekillerin, uzunlukların ve açıların matematiksel kesinlikle tekrarlanabilmesini sağlamak için oluşturduğu Öklid düzlemi üzerine kurulmuştur. Öklid düzleminde koordinatlar yoktur. Sadece basit araçlar kullanılarak (cetvel, pergel gibi) çoğunlukla 2 boyutlu düzlem üzerinde çizilen şekillerle kurulan bir sistemdir. Öklid düzlemi **sentetik geometri (synthetic geometry)** alanının bir parçasıdır ve varsayımlar üzerine kuruludur. Bu isim kartezyen koordinat sistemi ortaya çıkmadan önce kullanılan yöntemleri ifade etmek için kullanılmaktadır. Daha fazla bilgi için [What was Euclid Really Doing?]

[2] Dönemin ünlü matematikçisi Pierre de Fermat da analitik geometri alanında önemli çalışmalar yapmıştır.

zamanda Newton’u en çok etkileyen matematikçilerden biridir ve kurduğu koordinat sistemi üzerinde yaptığı **üçüncü dereceden denklem (cubic equation)** çalışmaları modern kalkülüs’ün temellerini atmıştır.

Kartezyen koordinat sisteminde eksenler genellikle x, y, z ve w harfleriyle isimlendirilirler. Dört boyuttan daha büyük sistemler için standart bir notasyon yoktur.

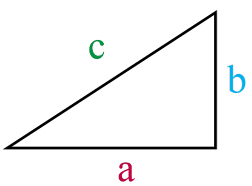


Herhangi bir boyuttaki kartezyen koordinat sisteminde bütün eksenlerin kesiştiği noktaya **orijin (origin)** adı verilir ve **O** harfi ile gösterilir. Bu nokta bütün eksenlerde 0 değerine sahip olan noktadır. Uzaydaki herhangi noktanın bu noktaya olan uzaklığı **Pisagor teoremi (Pythagorean theorem)** kullanılarak bulunabilir.

Pisagor teoremi, iki boyutlu uzayda bir noktanın orijine olan uzaklığının aşağıdaki formül kullanılarak hesaplanabileceğini söyler.

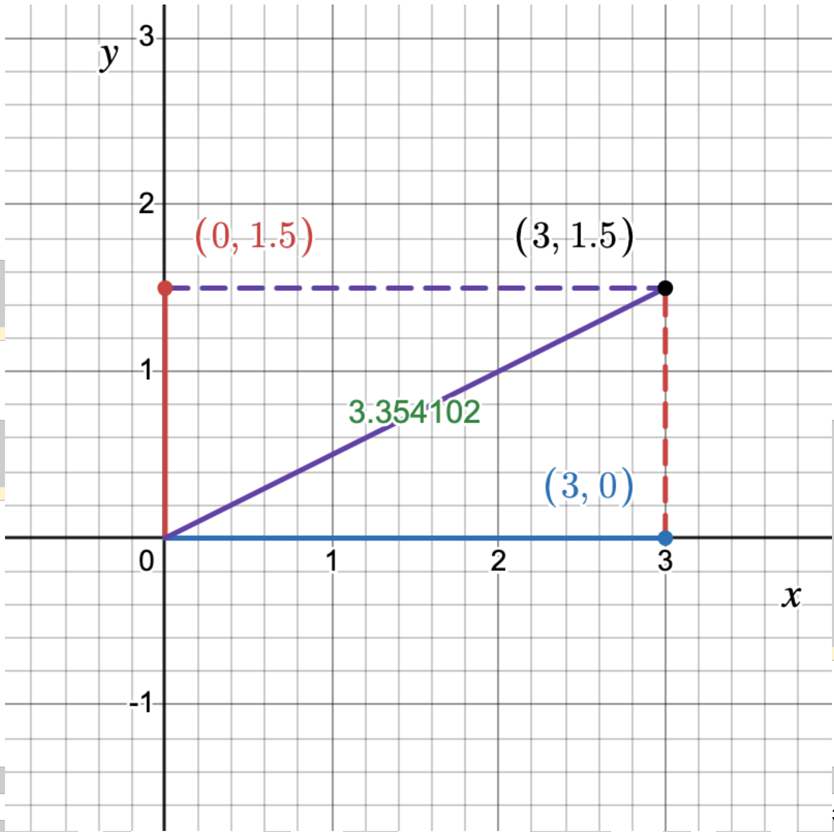
$$l^2 = x^2 + y^2, \text{ dolayısıyla}$$

$$l = \sqrt{x^2 + y^2}$$

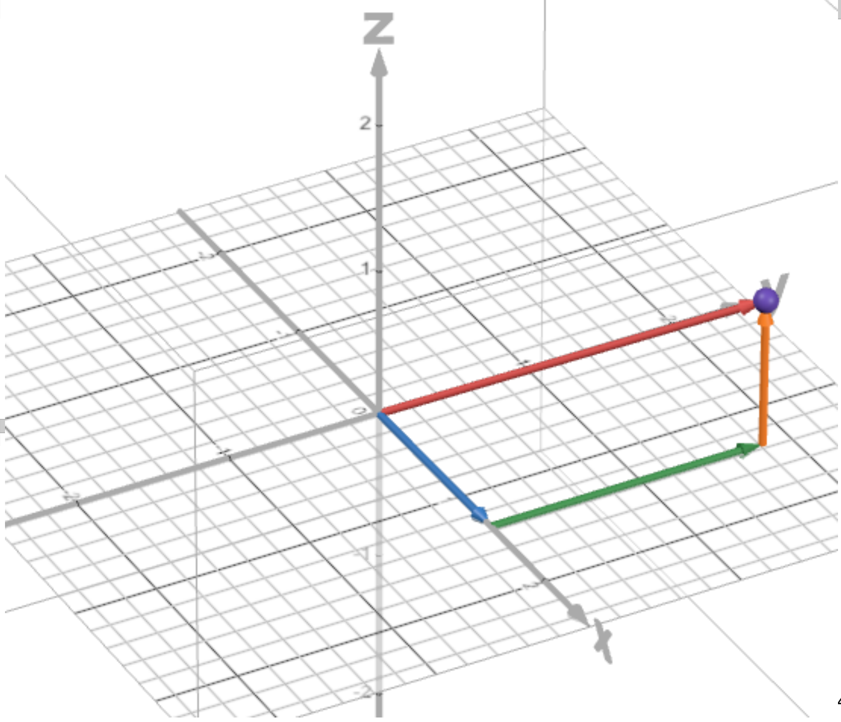


$$a^2 + b^2 = c^2$$

Bu formül aslen kısa kenarları bilinen bir dik üçgenin uzun kenarını bulmak için kullanılmaktadır. Fakat uzaydaki herhangi bir nokta üçgenlerin birleşiminden oluştuğu varsayılabilir. Bu sebeple kartezyen koordinat sisteminde bir noktanın orijine olan uzaklığını bulmak için de kullanılabilir.



[3]



[4]

[3] Bu görselin oluşturulduğu siteye erişmek için https://www.desmos.com/calculator/increbrklt

[4] Bu görselin oluşturulduğu siteye erişmek için https://www.desmos.com/3d/w8qeqi9n26

Pisagor teoremi bütün boyutlardaki kartezyen noktaların orijine olan uzaklığını bulmak için kullanılabilir. Örneğin 3 boyutlu bir noktanın orijine olan uzaklığı

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ dolayısıyla}$$

$$l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ile hesaplanabilir. Bu uzaklığa aynı zamanda noktanın **ağırlığı (magnitude)** ya da **uzunluğu (length)** da denilmektedir.

İki boyutlu bir uzayda (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) olarak iki nokta tanımlarsak bu noktalar için

$$Toplamı \rightarrow (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$ [5]

$$Farkı \rightarrow (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$ [6]

$$İki\ nokta\ arasındaki\ uzaklık \rightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - x_1)^2}$$ [7]

işlemleri tanımlanabilir.

Bir kartezyen nokta başka bir kartezyen nokta ile çarpılamaz ya da bölünemez[8] fakat gerçek bir sayıyla çarpılabilir ya da bölünebilir. Bu durumda (x, y) noktası ve a gerçek sayısı tanımlarsak

$$Çarpım \rightarrow (x, y) * a = (x * a, y * a)$$ [9]

$$Bölüm \rightarrow \frac{(x, y)}{a} = (\frac{x}{a}, \frac{y}{a})$$ [10]

işlemleri tanımlanabilir.

[5] https://www.desmos.com/calculator/joqkb8pyx6

[6] https://www.desmos.com/calculator/ag5mlimf7n

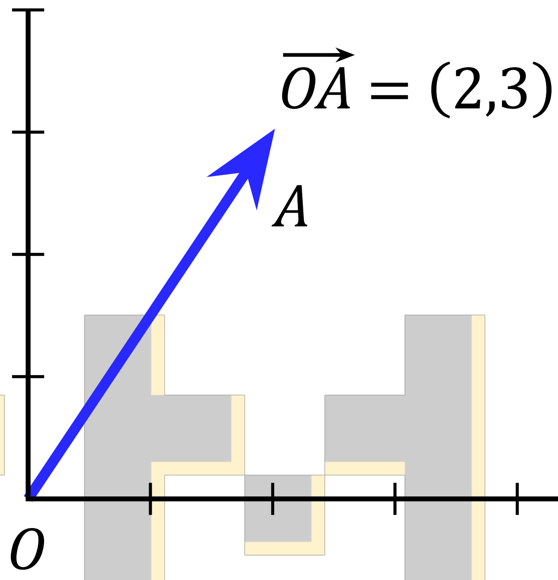
[7] https://www.desmos.com/calculator/ag5mlimf7n

[8] Daha fazla bilgi için https://www.youtube.com/watch?v=htYh-Tq7ZBI

[9] https://www.desmos.com/calculator/tt97oaj29z

[10] https://www.desmos.com/calculator/klplhgeiug

Vektörler



Uzaydaki bir nokta aynı zamanda **vektör (vector)** olarak gösterilebilir. Vektörlerde eksenler birbirine dik doğrularla tanımlanır. Vektörlerin bir başlangıç ve bitiş noktaları, dolayısıyla yönü ve uzunluğu vardır. Aksi belirtilmediği sürece vektörler orijin noktasından başlar. Vektör, uzaydaki herhangi bir noktayı temsil eden gerçek sayıların **baz vektörlerle (basis vector)** çarpılması ile elde edilir. Örneğin üç boyutlu bir uzayda (x, y, z) noktası tanımlarsak baz vektörler

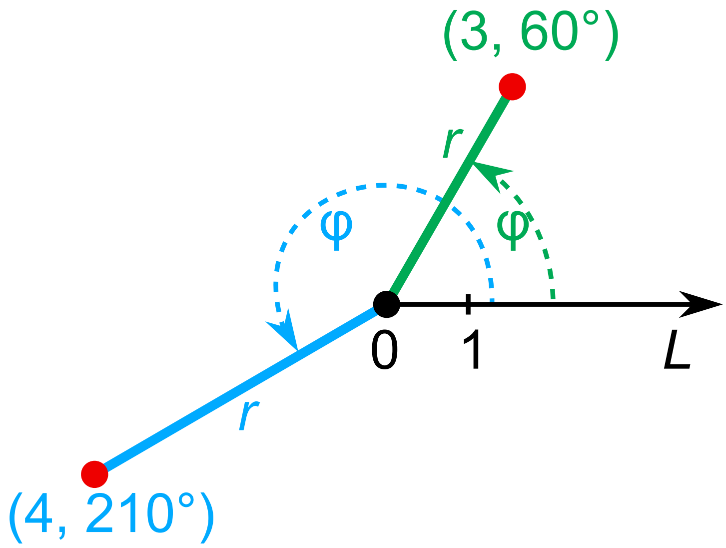
$$x \text{ için baz vektör} = \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y \text{ için baz vektör} = \hat{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z \text{ için baz vektör} = \hat{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak gösterilebilir. Vektörler matematiksel olarak kartezyen koordinat sistemindeki noktalarla aynı şekilde toplanır, çıkarılır, çarpılır veya bölünür. Vektörün uzunluğu yine Pisagor teoremi kullanılarak hesaplanabilir. Vektörler kendi uzunluklarına bölünerek **birim vektör (unit vector)** elde edilebilir. Bu işleme **normalizasyon (normalization)** adı verilir. Normalizasyon vektörün sadece uzunluğunu değiştirir, yönünü değiştirmez.

Polar Koordinat Sistemi



Uzaydaki bir noktayı göstermek için kullanılan bir diğer sistem polar koordinat sistemidir. Bu sistemde bir nokta **yarıçapı (radius)** ve **açısı (angle)** ile tanımlanır. Yarıçap genellikle $\boldsymbol{r}$ harfi ile, açı ise $\theta(theta)$ ile gösterilir. Uzaydaki bir nokta kartezyen koordinat sistemi ile polar koordinat sistemi arasında dönüştürülebilir. Örneğin kartezyen koordinat sistemindeki (x, y) noktasını polar koordinat sistemine çevirmek için

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

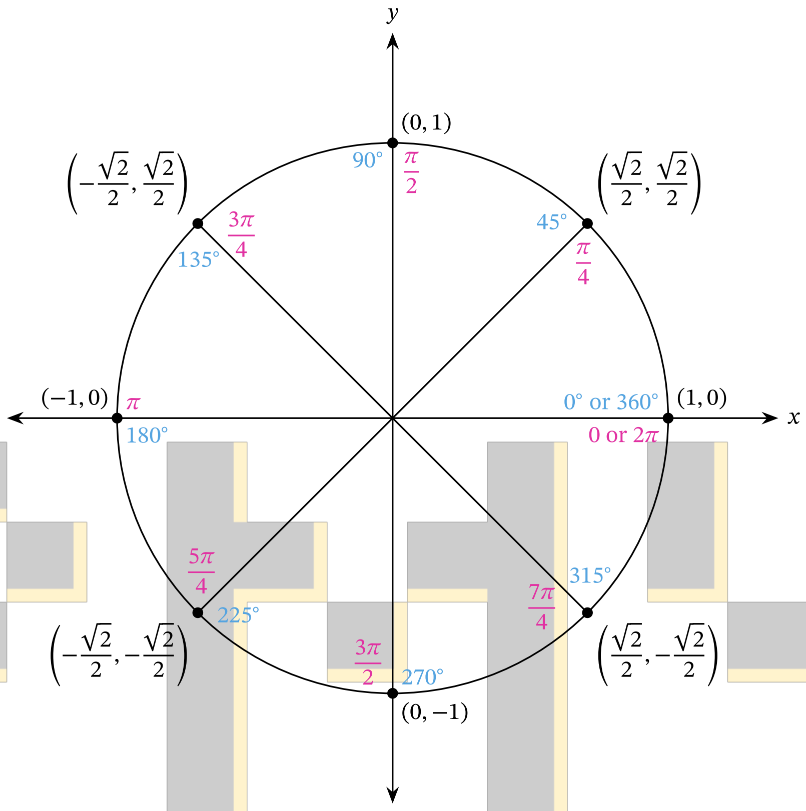
$$\theta = arctan2(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right), & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \ ve \ y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0 \ ve \ y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \ ve \ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \ ve \ y < 0 \\ tanımsız, & x = 0 \ ve \ y = 0 \end{cases}$$

formülleri kullanılabilir. Benzer şekilde polar koordinat sistemindeki bir (r, θ) noktasını kartezyen koordinat sistemine çevirmek için

$$x = r * \cos(\theta)$$

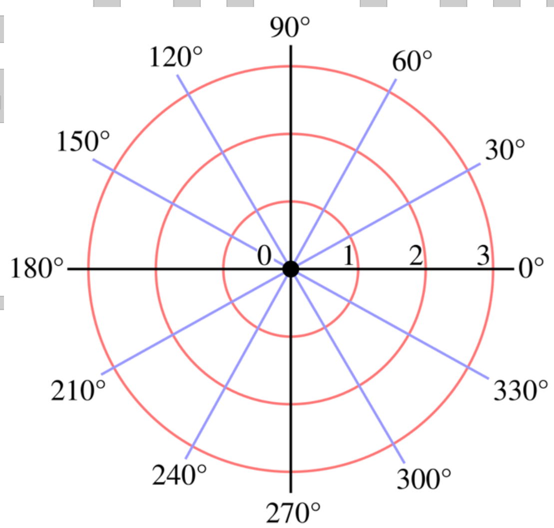
$$y = r * \sin(\theta)$$

formülleri kullanılabilir. Bu formüllerde açı radyan cinsinden olmalıdır.



Radyan, **birim çemberin (unit circle)** çevresinin yarısı kadar olan ***π* sayısı** ile ifade edilir. π sayısı bir çemberin **çevresinin çapına oranıdır**[11]. Dolayısıyla 180 derece π radyana eşittir.

Polar koordinat sistemi herhangi bir boyuttaki uzayda **dönme (rotation)** işleminin yapılmasını kolaylaştırır. Genellikle kartezyen koordinat sistemindeki bir nokta döndürülmesi gerekiyorsa polar koordinat sistemine çevrilir, döndürülür ve tekrar kartezyen koordinat sistemine çevrilir.



[11] Bu durumda en kafa karıştırıcı durum π sayısının neden **çemberin çevresinin yarısına** eşit olduğudur. Birim çember dediğimizde çemberin **yarıçapının** 1 olduğunu kabul ederiz. Dolayısıyla çemberin **çapı** 2 olacaktır. Genellikle hesaplamayı yarıçapı kullanarak yaptığımız için bu durumda $\pi = \frac{çevre}{çap}, \pi = \frac{çevre}{2*yarıçap}, 2\pi = \frac{çevre}{yarıçap}$ olacaktır. Bu sebeple 180 derece π radyana eşittir.

Polar koordinat sisteminde 0 derece kartezyen koordinat sistemindeki x ekseninin pozitif kısmına doğrudur ve y ekseninin pozitif kısmına, saat yönünün tersine, doğru artar. Başka bir ifadeyle x ekseni üzerindeki baz vektöre doğrudur ve y ekseni üzerindeki baz vektöre doğru artar. Başka bir ifadeyle gerçek sayı doğrusunun birim uzunluğuna (1) doğrudur ve sanal sayı çizgisinin birim uzunluğuna (i) doğru artar.

Diğer boyutlardaki polar koordinat sistemleri için de aynı durum geçerlidir. Polar koordinat sistemlerinde eklenen her yeni boyut için bir polar açı eklenir, yeni bir yarıçap eklenmez.