**Rendre IMPERATIVEMENT une copie pour deux
au plus tard le 12 octobre 2018.**

Toutes les réponses doivent être justifiées !

Exercice 1

Compétences mobilisées :

- Manipulation des quantificateurs.
- Rédaction d'une preuve.

On considère les assertions suivantes :

A : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x(y+1) \geqslant 0)$.
B : $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x(y+1) > 0)$.
C : $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x(y+1) \geqslant 0)$.

1. Ecrire $NON\ A$, $NON\ B$ et $NON\ C$.
2. Les assertions A, B et C sont-elles vraies ou fausses ?

Exercice 2

Compétence mobilisée : Rédiger correctement un raisonnement par récurrence.

Soit $u_0 = -1$ et $v_0 = 2$. On considère les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + v_n \text{ et } v_{n+1} = u_n + v_n^2,$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$.

Exercice 3

Compétences mobilisées :

- Se repérer dans les " niveaux " d'ensemble (appartenance, inclusion, nombre d'accolades).
- Manipulation du produit cartésien

1. Soit $F = \{1, \{2\}, \emptyset\}$.
   (a) Compléter les $\cdots$ par $\in$ ou $\notin$: $1 \ \cdots \ F$ et $2 \ \cdots F$.
   (b) Déterminer <u>un ensemble</u> X tel que $X \subset F$.
   (c) Déterminer <u>un ensemble</u> Y tel que $Y \in F$.
   (d) Existe-t-il <u>un ensemble</u> Z tel que $Z \subset F$ et $Z \in F$?
   (e) Déterminer $\mathcal{P}(F)$, l'ensemble des parties de F.
   (f) Déterminer $F \cap \mathcal{P}(F)$.

2. On considère les intervalles de $\mathbb{R}$, $I = [0,2]$, $\quad J = [-1,1]$ et $K = [0,1]$.
   (a) Donner un élément de $I \times J \times K$.
   (b) Donner un élément de $I \times J$.
   (c) Donner un élément de $I \times J$ qui n'est pas dans $I \times K$.
   (d) Donner un sous ensemble non vide de $I \times J$.

Exercice 4

Compétences mobilisées :

- Manipulation des opérateurs $\cap$ et $\cup$ et leurs propriétés
- Manipulation de l'implication (réciproque, négation, contraposée).
- Raisonnement par l'absurde

1. On considère trois ensembles A, B et C tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que
$$A \subset B \subset C.$$
2. On considère A et B, deux ensembles <u>non vides</u>. On note $\not\subset$ la négation de $\subset$. Soit l'assertion
$$P : A \cap B = \emptyset \Longrightarrow A \not\subset B.$$
   (a) Montrer, par l'absurde, que l'assertion P est vraie.
   (b) Ecrire la contraposée de P. Est-elle vraie ?
   (c) Ecrire la négation de P. Est-elle vraie ?
   (d) Ecrire la réciproque de P. Est-elle vraie ?