

BLACKJACK

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DU JEU OU
COMMENT OPTIMISER SES GAINS ?



Sommaire

I	Règles du Blackjack	2
II	Modélisation mathématique	3
III	Programmation	8
IV	Conclusion	14
A	Bibliographie	15
B	Annexe	16

I Règles du Blackjack

But du jeu Avoir un meilleur score que le croupier sans dépasser 21.

Valeur des cartes

- AS : 1 ou 11
- ROI, DAME, VALET : 10 (BUCHES)
- 2 à 9 : valeur nominative

Déroulement d'une partie



- **Tirer** : demander une carte supplémentaire.
- **Rester** : s'arrêter.
- **Doubler** : doubler sa mise et recevoir une unique carte supplémentaire.
(uniquement en début de tour).

Le croupier tire jusqu'à 17 (*stratégie du dealer*).

Fonctionnement des gains $\{-2; -1; 0; +1; +1.5; +2\}$

II Modélisation mathématique

a Etat du sabot

$$\Lambda = [n_2; n_3; n_4; n_5; n_6; n_7; n_8; n_9; n_{10}; n_{11}]$$

n_i = nombre de cartes valant i restantes dans le *sabot*.

Exemple : En France 6 jeux de 52 cartes : $\Lambda = [24; 24; 24; 24; 24; 24; 24; 24; 96; 24]$.

D'où :

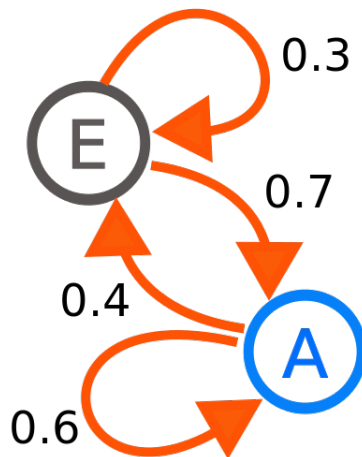
$$P_{\Lambda}(i) = \frac{n_i}{\sum_{k=2}^{11} n_k} \quad (1)$$

b Utilisation de chaînes de Markov

Définition : Une *chaînes de Markov* est une suite de variables aléatoires (la n -ème représentant l'état du système à l'instant n) qui possède la propriété de *Markov*. On a :

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad (2)$$

Un exemple élémentaire de graphe de *chaîne de Markov* :



c Modélisation du croupier

Stratégie imposée : 1 carte visible puis tire jusqu'à 17.

C = ensemble des états que le *croupier* peut atteindre pendant son tour.

- $\{I_i : i \in [2; 11]\}$: états initiaux
- $\{h_i : i \in [4; 16]\}$: états accessibles durs (*hard hand*) (pas d'As comptant pour 11)
- $\{s_i : i \in [12; 16]\}$: états accessibles souples (*soft hand*) (présence d'un As comptant pour 11)
- $\{F_i : i \in [17; 21]\}$: états finaux
- ***BJ*** : *blackjack* (21 en deux cartes)
- ***Busted*** : total strictement supérieur à 21

D'où

$$|C| = 35 \tag{3}$$

On modélise le tour du *croupier* par une *chaîne de Markov* avec :

Un vecteur d'états : $\Phi_C \in M_{1,35}(\mathbb{R})$

Une matrice de transition : $\mathcal{M}_C(\Lambda) \in M_{35}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{M}_C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & P_\Lambda(2) & P_\Lambda(3) & \dots & P_\Lambda(10) & 0 & \dots & 0 & P_\Lambda(11) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & P_\Lambda(2) & \dots & P_\Lambda(9) & P_\Lambda(10) & 0 & \dots & 0 & P_\Lambda(11) & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \ddots & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & 0 \\ 0 & \dots & & & & & & & & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Phi_C^* \mathcal{M}_C(\Lambda)$ donne les probabilités d'états du croupier après un tirage.

coefficient $(i,j) \in [29, 35]^2$ de $\Phi_C^*(\mathcal{M}_C(\Lambda))^{17}$ = probabilité que le croupier soit dans l'état $(F_j \cup BJ \cup Busted)$ sachant que sa première carte était un i .

II. MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

\mathcal{J} = ensemble des états que le joueur peut atteindre pendant son tour.

- $\{I_{hi} : i \in [4;20]\}$: états initiaux *hard*
- $\{I_{si} : i \in [12;20]\}$: états initiaux *soft*
- $\{h_i : i \in [5;20]\}$: états accessibles *hard*
- $\{s_i : i \in [13;20]\}$: états accessibles *soft*
- $\{F_i : i \in [4;21]\}$: états finaux
- $\{2F_i : i \in [6;21]\}$: états finaux après avoir doublé
- ***busted*** : total strictement supérieur à 21
- ***2busted*** : total strictement supérieur à 21 après avoir doublé.
- ***BJ*** : blackjack (21 en deux cartes)

D'où

$$|\mathcal{J}| = 87 \tag{4}$$

On modélise le tour du joueur par une *chaîne de Markov* avec :

Un vecteur d'états : $\Phi_J \in M_{1,87}(\mathbb{R})$

Une matrice de transition : $\mathcal{M}_J(s, \Lambda) \in M_{87}(\mathbb{R})$

NB : $\mathcal{M}_J(s, \Lambda)$ dépend de la stratégie s du joueur.

e Calcul de l'espérance de gain

Conditions initiales : $\Lambda, \Phi_C, \Phi_J, \mathcal{S}$

NB : \mathcal{S} est une liste de la forme $[D]$ ou $[T, T, \dots, T, R]$

L'application σ associe à une situation finale les gains du joueur (gains appartenant à $G = \{-2; -1; 0; 1; 1.5; 2\}$).

$$\sigma = \begin{cases} F_J \times F_C & \longrightarrow G \\ (j, c) & \longmapsto \sigma(j, c) \end{cases} \quad (5)$$

Etats possibles du joueur (noté F_J) et du croupier (noté F_C) à la fin du tour sont :

- $F_C \in \{F_i : i \in [17; 21]\} \cup \{busted\} \cup \{BJ\}$
- $F_J \in \{F_i : i \in [4; 21]\} \cup \{2F_i : i \in [6; 21]\} \cup \{busted\} \cup \{2busted\} \cup \{BJ\}$

Avec X la variable aléatoire associée à l'état final du tour, le théorème de Transfert donne l'espérance de gain (notée E) pour une main et une stratégie fixée :

$$E = E(\sigma(X)) = \sum_{\mathcal{F} \in F_J \times F_C} P(X = \mathcal{F}) \sigma(\mathcal{F}) \quad (6)$$

Avec :

- Si $\mathcal{F} \in \{(busted, _) \cup (2busted, _)\}$:

$$P(\mathcal{F}) = (\Phi_J \mathcal{M}_J(\mathcal{S}[1], \Lambda) \cdots \mathcal{M}_J(\mathcal{S}[n], \Lambda)).e_i$$

- Sinon :

$$P(\mathcal{F}) = [(\Phi_J \mathcal{M}_J(\mathcal{S}[1], \Lambda) \cdots \mathcal{M}_J(\mathcal{S}[n], \Lambda)).e_i] \times [(\Phi_C(\mathcal{M}_C(\Lambda))^{17}).u_j]$$

III Programmation

a Problème rencontrés

Difficultés rencontrées	Solution trouvées
Très lourde complexité	Programmation dynamique
Rendre le tout plus ludique	Programmation orienté objet (interface graphique)
Aucunes connaissances	Tutoriel sur Tkinter
Multiplication matrices	Utilisation module Numpy avec fonction dot
Exponentiation matrice $(89 * 89)^{21}$	Stockage des matrices et s'arrêter à puissance 6

o Création d'une simulation

- nouveau_sabot()
- modification_etat_sabot(n)
- mains_initiales()
- valeur_main(main)
- tirer(main)
- doubler(main)
- strategie_dealer(main)
- comparaison_mains(moi,dealer)
- tour()
- jeu()

o Programmation dynamique

- Implémentation des matrices croupier et joueur.
- Exponentiation rapide des matrices.
- Codage de la fonction sigma.
- Calcul des probabilités pour arriver dans un état final donné. (stockage des matrices pour ne pas tout remultiplier à chaque fois.
- Calcul de l'espérance.
- Renvoyer la meilleure stratégie (tri-fusion)

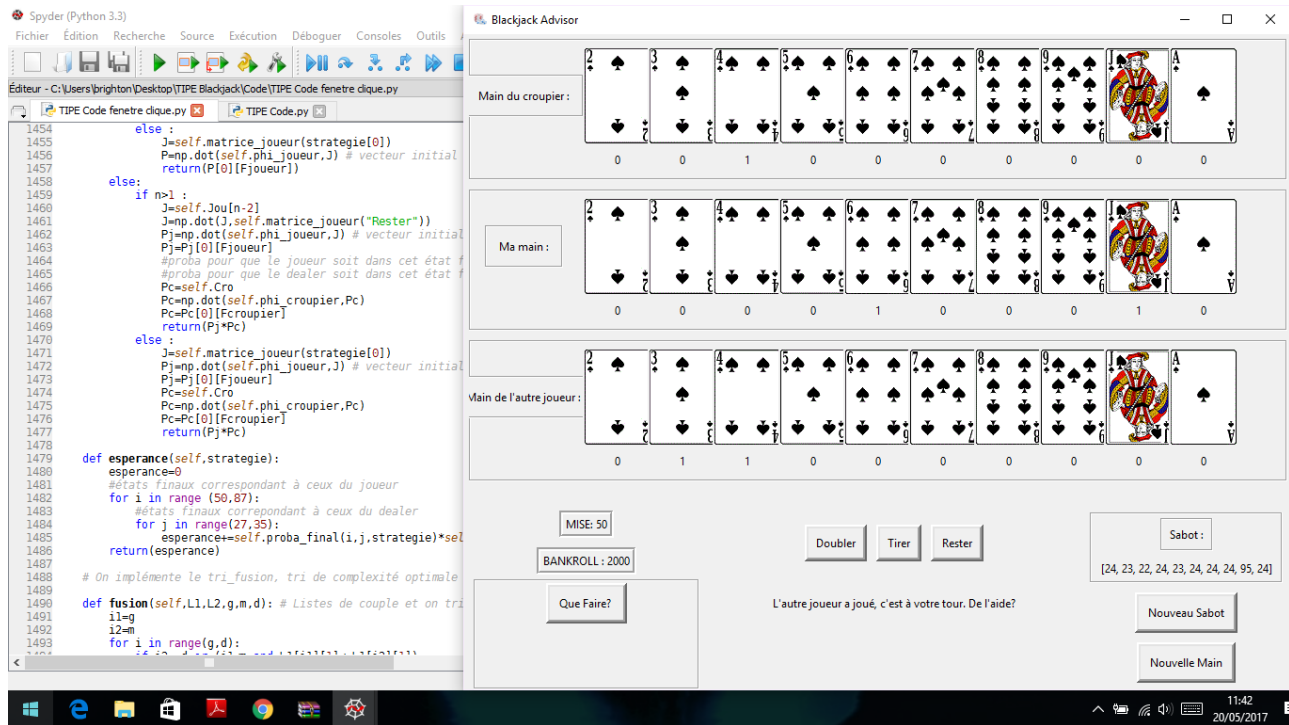
o Programmation orienté objet

- Interface graphique interactive
- Module Tkinter (Python)

III. PROGRAMMATION

b Programme d'aide à la décision

But : donner au joueur la stratégie ayant la plus grande espérance de gain.



III. PROGRAMMATION

Blackjack Advisor

Ma main :

2

3

4

5

6

7

8

9

J

A

000000000

Ma main :

2

3

4

5

6

7

8

9

J

A

100000000

10

Ma main de l'autre joueur :

2

3

4

5

6

7

8

9

J

A

000000001

MISE: 50

BANKROLL : 10000

Que Faire?

Doubler

Tirer

Rester

Sabot :

[23, 23, 24, 24, 23, 23, 24, 24, 95, 24]

Nouveau Sabot

Nouvelle Main

L'autre joueur a joué, c'est à votre tour. De l'aide?

1503

16/05/2017

III. PROGRAMMATION

Blackjack Advisor

Ma main du croupier :

2

3

4

5

6

7

8

9

10

A

0

Ma main :

2

3

4

5

6

7

8

9

10

A

0

11

Ma main de l'autre joueur :

2

3

4

5

6

7

8

9

10

A

0

MISE : 20

BANKROLL : 2000

Que Faire? :
La meilleure stratégie est : Tirer puis Rester
Son espérance est : -0,128

Doubler

Tirer

Rester

Sabot :

24 24 24 24 24 24 24 96 24

Nouveau Sabot

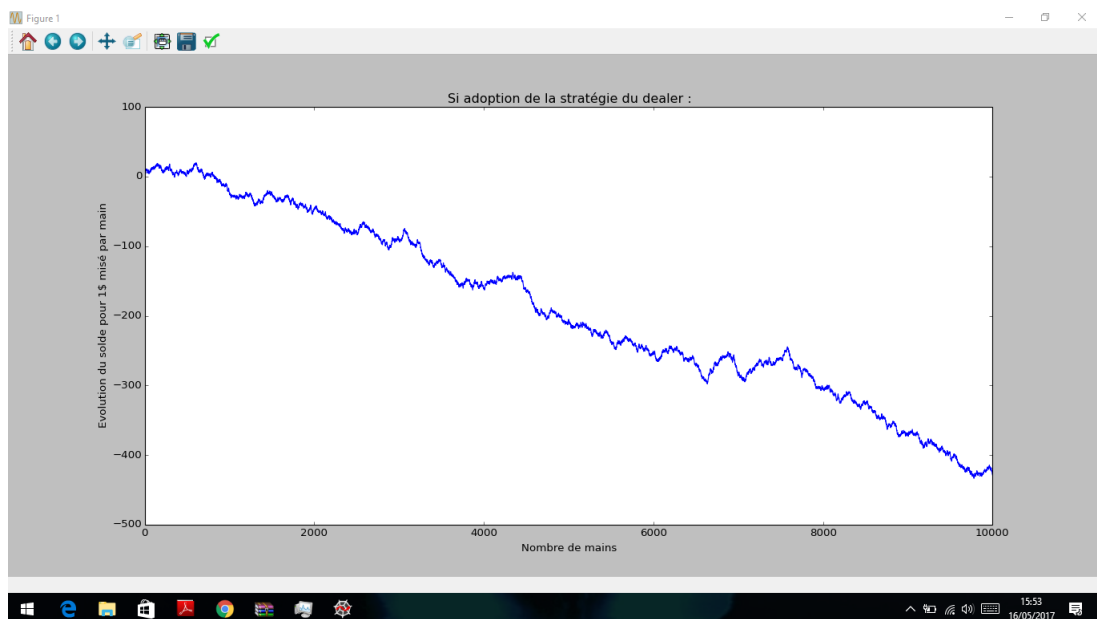
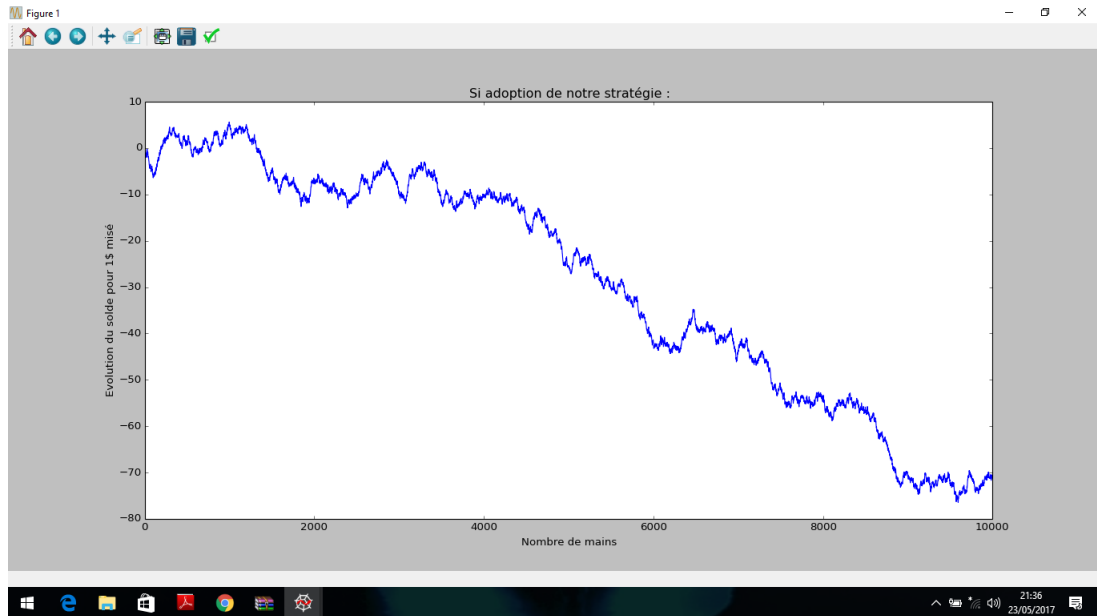
Nouvelle Main

Vous avez gagné la main!

13:41

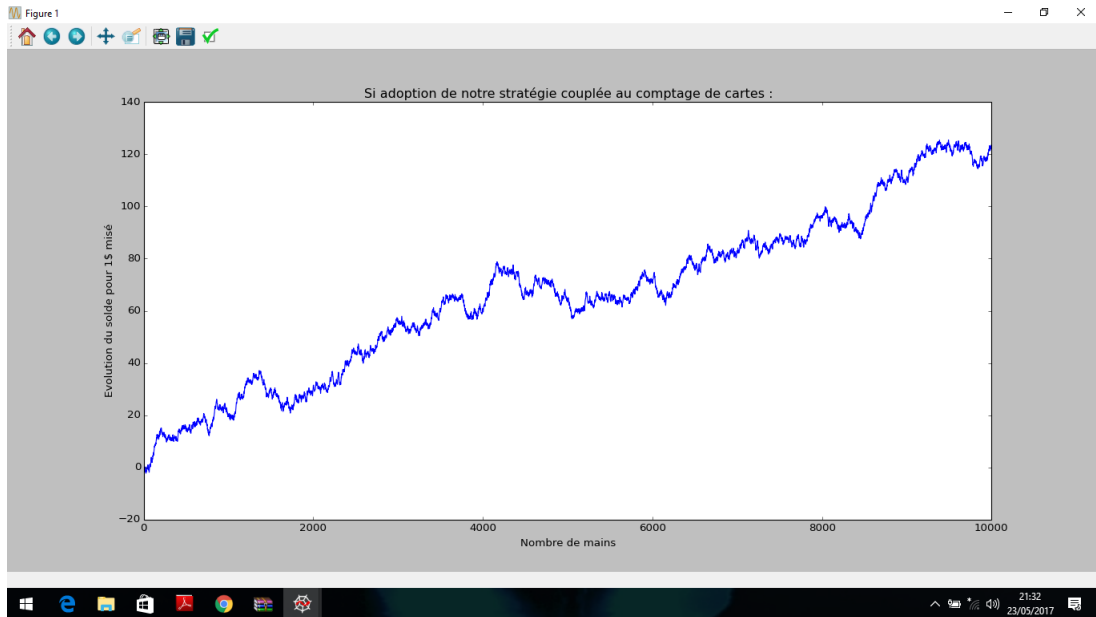
20/12/2016

c Efficacité de l'algorithme



d Amélioration

- Utilisation du comptage de cartes (un excédent de buches est favorable au joueur)
- Adaptation de la mise en fonction de l'état du sabot



e Limites

Complexité en temps (tests effectués sur un ordinateur équipé d'un : Intel Core i3-3217U CPU@1.80GHz) :

Nombre de stratégies comparées	Temps
23	3min 30s
7	43s
4	17s

IV Conclusion

- Une modélisation mathématique permet de créer un programme permettant de battre le casino
- Difficilement applicable dans la réalité

A Bibliographie

- R. Baldwin, W. Cantey, H. Maisel, J. McDermott. Journal of the american statistical association, 51 (1956), p.275, *The optimum strategy in blackjack*.
- R. Baldwin, W. Cantey, H. Maisel, J. McDermott. *Playing Blackjack to Win : A New Strategy for the Game of 21*, Cardoza, 2008 (réimpression).
- E. O. Thorp. *Beat the Dealer : A Winning Strategy for the Game of Twenty-One*, Vintage, 1962.
- F. Montmirel. *Le Blackjack : Apprenez l'excellence*, Bornemann, 2004.
- Guide Blackjack : la référence du 21, <http://www.guide-blackjack.com>, consulté régulièrement tout au long de l'année.

B Annexe

Matrice du croupier

										i2i3i4i5i6i7i8i9i10i11										h2h3h4h5h6h7h8h9h10h11h12h13h14h15h16										s12s13s14s15s16										f17f18f19f20f21										BJ										bust																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
										01																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									

