

ເຊົ້າ

ບທທີ່ 1

Discrete Mathematics for Computer Science



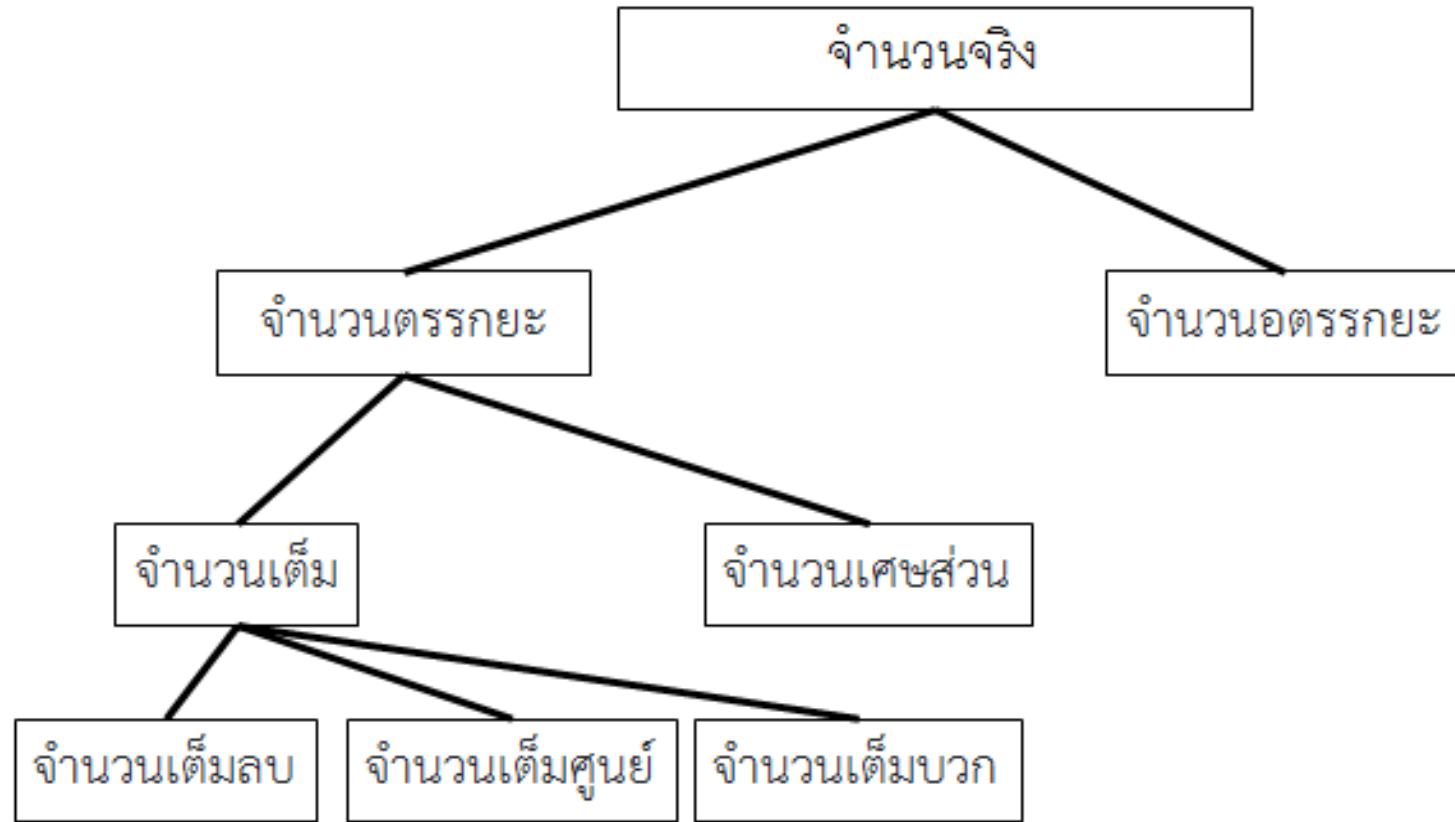
ດາວໂຫລດເອກສານໄດ້ທີ່

<https://bit.ly/Discrete-ENS>

ອ.ເອີງ ສຸຮິຍະຈາຍ (ENS)

ภาควิชาວิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ระบบจำนวนจริง



ระบบจำนวนจริง

ชื่อ	สัญลักษณ์	ตัวอย่าง	บรรยาย
จำนวนเต็มบวก	\mathbb{N}^+	1 2 3	จำนวนเต็มบวก คือ จำนวนที่นับสิ่งของต่างๆ ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ประเภทคือ จำนวนคู่ คือ จำนวนที่หารด้วย 2 ลงตัว เช่น 2, 4, ... จำนวนคี่ คือ จำนวนที่หารด้วย 2 ไม่ลงตัว เช่น 1, 3, 5, ...
จำนวนเต็มลบ	\mathbb{N}^-	-1 -2 -3	
จำนวนเต็มศูนย์	\mathbb{N}^0	0	
จำนวนเต็ม	\mathbb{Z}	-1 0 1	จำนวนเต็ม คือ จำนวนที่สามารถเขียนได้ โดยไม่ใช่เศษส่วนหรือทศนิยม เช่น 21, 4, -20 แต่จำนวนเหล่านี้ $9.75, \frac{5}{2}, \sqrt{3}$ ไม่ใช่จำนวนเต็ม เชตของจำนวนเต็มเป็นเซตย่อยของจำนวนจริง และประกอบด้วย จำนวนเต็มบวก ($1, 2, 3, \dots$) จำนวนเต็มศูนย์ (0) และจำนวนเต็มลบ ($-1, -2, -3, \dots$)

ระบบจำนวนจริง

ชื่อ	สัญลักษณ์	ตัวอย่าง	บรรยาย
จำนวนตรรกยะ	\mathbb{Q}	$\frac{0}{2}, \frac{1}{3}, \sqrt{49}, 5, 0.75$	จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่สามารถเขียนในรูปเศษส่วน จำนวนเต็ม ทศนิยมที่ซ้ำไม่รู้จบ เช่น $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{25}{10}, 0.5, -\frac{5}{1}$
จำนวนอตรรกยะ	\mathbb{Q}'	$\sqrt{3}, \sqrt{7}$	จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนได้ในรูปเศษส่วน หรือทศนิยมที่ไม่ซ้ำไม่รู้จบ เช่น $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$
จำนวนจริง	\mathbb{R}	จำนวนอตรรกยะ และ จำนวนตรรกยะ	จำนวนจริง คือ จำนวนที่สามารถจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งกับจุดบนเส้นจำนวนได้

ช่วงของจำนวนจริง

1) ช่วงเปิด

- $(-4, 5) = \{ x \mid -4 < x < 5 \}$



- โดยจุดที่เป็นวงกลมโปร่งใส เป็นจุดที่ไม่อยู่ในเซต ดังนั้น -4 และ 5 จึงไม่อยู่ในเซต และเทียบเท่ากับงเล็บเปิด “(”, “)”

ช่วงของจำนวนจริง

2) ช่วงปิด

- $[1, 10] = \{ x \mid 1 \leq x \leq 10 \}$



- โดยจุดที่เป็นวงกลมทีบ เป็นจุดที่อยู่ในเซต ดังนั้น 1 และ 10 จึงอยู่ในเซต และเทียบเท่ากับวงเล็บปิด “[”, “]”

ช่วงของจำนวนจริง

3) ช่วงกึ่งเปิดปิด

- $(-5, 10] = \{ x \mid -5 < x \leq 10 \}$

ช่วงของจำนวนจริง

4) ช่วงอนันต์

- $[1, \infty) = \{ x \mid x \geq 1 \}$

เซต

- **เซต** คือ กลุ่มของสิ่งต่างๆ ซึ่งต้องทราบแน่นอนว่ามีสิ่งใดอยู่ในกลุ่ม บ้าง โดยสิ่งที่อยู่ในกลุ่มเรียกว่า “สมาชิก”
 - $A = \{1,2,3,4,5\}$
 - $B = \{2,1,1,3\}$

เซต

- เซตว่าง คือ ไม่มีสมาชิก (\emptyset) หรือ {}
- **เซตจำกัด** (finite sets) คือ เซตที่บอกจำนวนสมาชิกได้
 - เช่น $A = \{ 1, 2, 3, 4, \dots, 100 \}$
- **เซตอนันต์** (infinite sets) คือ เซตที่ไม่สามารถบอกจำนวนสมาชิกได้
 - เช่น $A = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$

เซตที่เท่ากัน

- **เซตที่เท่ากัน** คือ เซตที่มีสมาชิกเหมือนกันหมด โดยไม่พิจารณาลำดับ และสมาชิกสามารถซ้ำกัน

$$\blacksquare A = \{1,2,3,4,5\} \qquad B = \{x \in I^+ \mid 1 \leq x \leq 5\}$$

$$\blacksquare A = \{1,2,3,4,5\} \qquad B = \{x \in I \mid 0 \leq x \leq 5\}$$

$$\blacksquare A = \{1,2,3,4,5\} \qquad B = \{1,2,3,4,5,5\}$$

เซตที่เท่ากัน

- $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{2, 1, 1, 3\}$
- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$
- $A = \{\text{แดง}, \text{เหลือง}, \text{ชมพู}, \text{เขียว}, \text{สีสด}\}$
- $B = \{\text{เงาะ}, \text{ลำไย}, \text{มะม่วง}, \text{ชมพู}, \text{แตงโม}\}$

เซตที่เทียบเท่ากัน

- **เซตที่เทียบเท่ากัน** คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน
 - $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 5\}$

- $A = \{\text{แดง}, \text{เหลือง}, \text{ชมพู}, \text{เขียว}, \text{สีฟ้า}\}$
- $B = \{\text{เงาะ}, \text{ลำไย}, \text{มะม่วง}, \text{ชมพู}, \text{แตงโม}\}$
- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{x \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq x \leq 5\}$

สมาชิก

- **สมาชิก** ถ้าเซต A คือ $\{1, 2, 3\}$ และ $1 \in A$

\in (epsilon) = เป็นสมาชิก, \notin = ไม่เป็นสมาชิก, $|$ = โดยที่

- $A = \{1, 2, 3\}$ แล้ว $2 \in A$
- $A = \{x \in I^+ \mid 0 \leq x \leq 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$ แล้ว $0 \in A$
- $A = \{1, 2, 3\}$ แล้ว $4 \notin A$ และ $\{1\} \notin A$

សំបុត្រ



- **สับเซต (SUBSET)** คือ ทั้งหมดของเซต A อยู่ใน B
 - หรือ A เป็นสับเซตของ B ($A \subset B$)
 - $B = \{1,2,3\}$ $A = \{1,2\}$ สรุป $A \subset B$
 - $B = \{1,2,3\}$ $C = \{1,4\}$ สรุป $C \not\subset B$

เพาเวอร์เซต

- **เพาเวอร์เซต (POWERSET)** $P(A)$ คือเซตเป็นไปได้ทั้งหมดที่เป็นสมาชิกของเซต A
 - $A = \{1, 2\}$ $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} =$ จำนวนคือ 2^n
 - $B = \{1,2,3\}$
 - $P(B) =$

Cartesian Product

- **ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)** ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$
- คือ เซตของคู่ลำดับ (a, b) ทั้งหมดที่ $a \in A$ และ $b \in B$
- โดย $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B \}$
 - $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{x, y\}$
 - $A \times B =$

เอกภาพสัมพันธ์

- **เอกภาพสัมพันธ์ (Universal)** หรือ U คือ ขอบเขตทั้งหมดที่พิจารณา
- เช่น $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
- เซต A คือ $\{1,2,3,4\}$

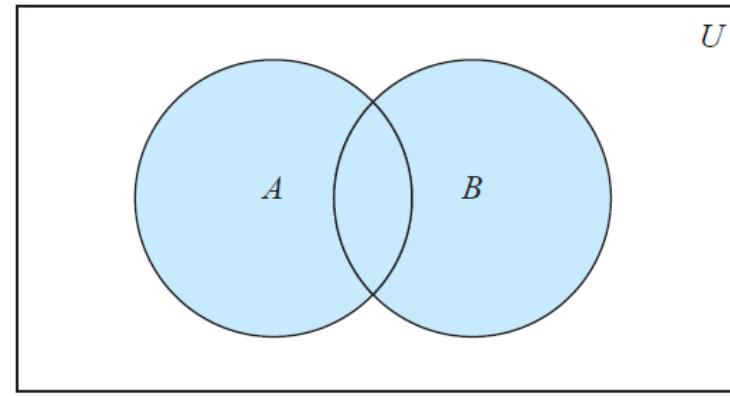
Quiz

- $A = [1, 2, 3, x]$ และ A เป็นเซต หรือไม่
- $A = \{-1, 0, \{1,2\}\}$ จะหา $P(A)$
- $A = \{\emptyset, 0, \{\emptyset\}\}$ จะหา $P(A)$

Union

- **Union** (\cup) สำหรับยูเนียนระหว่างเซตสองเซต คือ การเอาเซตทั้งสองเซตมารวมกันเป็นเซตเดียว นั่นคือ การเอาสมาชิกมารวมกัน
- สัญลักษณ์ที่ใช้แทนคำว่า "ยูเนียน" คือ \cup ตัวอย่างเช่น

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{2, 3\} \quad \rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3\}$$

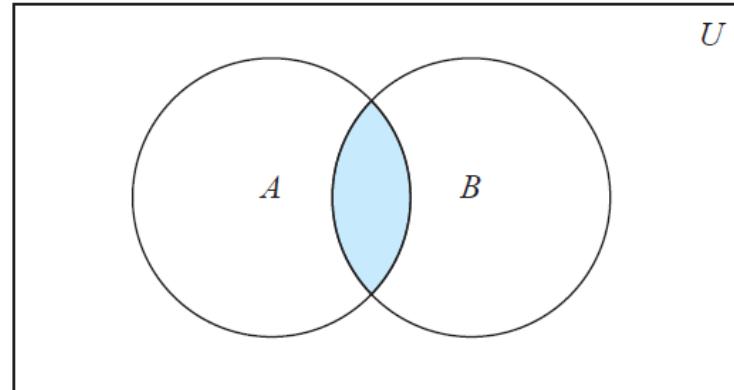


$A \cup B$ is shaded.

Intersection

- **Intersection** (\cap) สำหรับอินเตอร์เซกกันของเซตสองเซต คือ การหา สมาชิกส่วนที่ซ้ำกันจากสองเซตมาเขียนเป็นอีกเซตหนึ่ง
- สัญลักษณ์ที่ใช้แทนคำว่าอินเตอร์เซก คือ \cap ตัวอย่างเช่น

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{2, 3\} \quad \rightarrow A \cap B = \{2\}$$

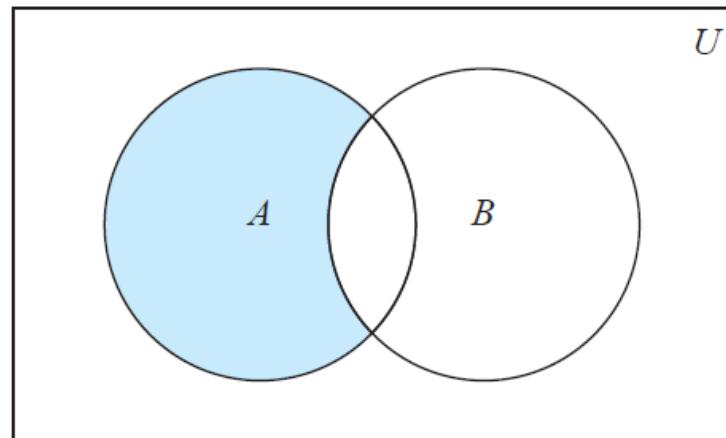


$A \cap B$ is shaded.

Difference

- **Difference** (-) สำหรับการหาผลต่างระหว่างเซตหรือจับเซตสองเซต มาลบกัน ให้คิดว่าเอาเซตข้างหน้าเป็นตัวตั้ง จากนั้นถ้าหากมีสมาชิก ตัวไหนซ้ำกับในเซตด้านหลังให้ตัดออก
- สัญลักษณ์แทนการลบ คือ เครื่องหมายลบ – ตัวอย่างเช่น

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{2, 3\} \quad \rightarrow A - B = \{1\}$$

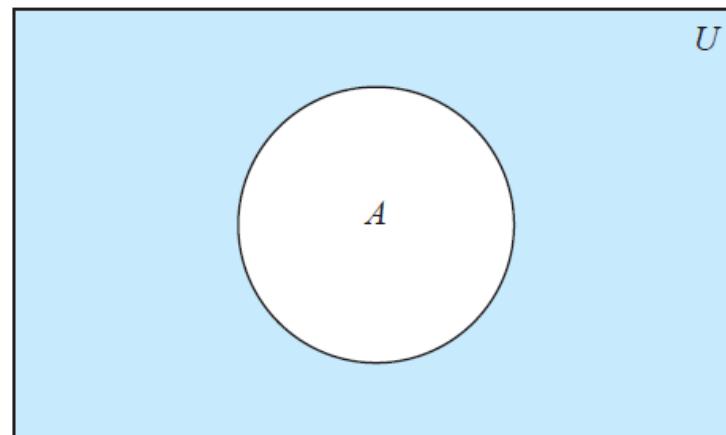


$A - B$ is shaded.

Complement

- Complement (') สำหรับคอมพลีเมนต์ของเซต เป็นการดำเนินการบันเซตเซตเดียว ทำได้โดยการเอา y นิเวอร์สหรือเอกภพสัมพัทธ์เป็นตัวตั้งแล้วลบออกด้วยเซตนั้นๆ หรือ การหาสมาชิกทั้งหมดที่ไม่อยู่ในเซตนั้น แต่อยู่ใน y นิเวอร์ส
- สัญลักษณ์ของคอมพลีเมนต์ คือ ' ตัวอย่างเช่น

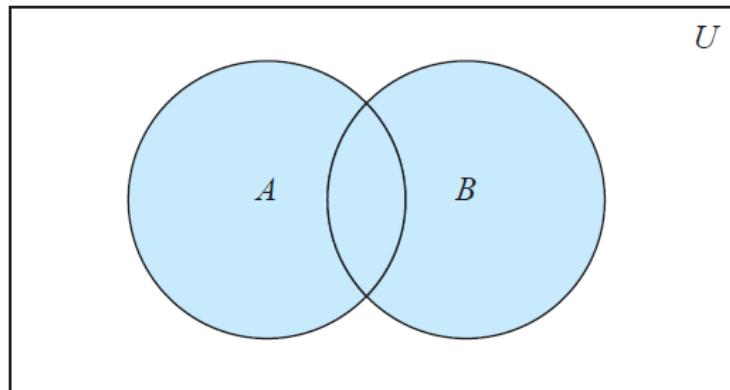
$$U = \{1,2,3,4\} \rightarrow A = \{1,2\} \text{ สำหรับ } A' = \{3,4\}$$



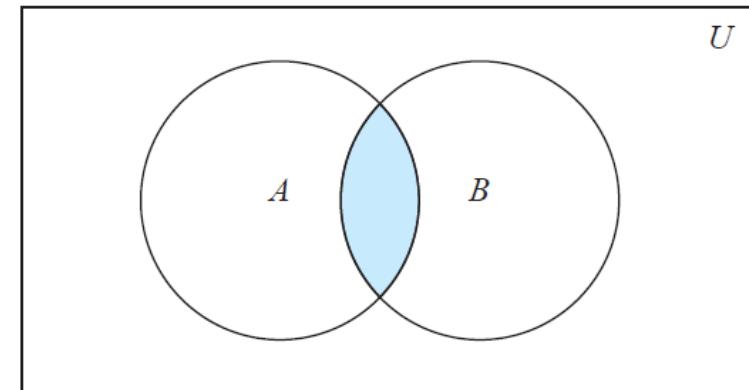
\bar{A} is shaded.

Euler diagram

- แผนภาพอยเลอร์ (Euler diagram) เป็นแผนภาพที่ใช้ในการอธิบายความสัมพันธ์ของเซตต่างๆ โดยให้วงกลมแต่ละวงแทนแต่ละเซต และแสดงความสัมพันธ์ของแต่ละเซตด้วย การครอบซึ่งแสดงความเป็นสับเซต การทับซ้อนกันหรือการไม่ทับซ้อนกัน ซึ่งแสดงว่าทั้งสองเซตไม่มีความสัมพันธ์กัน



$A \cup B$ is shaded.



$A \cap B$ is shaded.

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- 1. จงพิสูจน์ ถ้า $3x - 15 = 0$ และ $x = 5$
 - แก้สมการ $x = 15 / 3 = 5$ เป็นจริง
 - สรุปข้อความนี้ เป็นจริง

- 2. จงพิสูจน์ $23 \in A$ โดย
 $A = \{ x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } x = 3k+5 \text{ เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนเต็ม } \}$
 - กรณีนี้คือ $x = 23$ โดยเงื่อนไขคือ x และ k เป็นจำนวนเต็ม
 - แก้สมการ $23 = 3k + 5$ ได้ผลลัพธ์คือ $k = 6$ ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม
 - สรุป $23 \in A$

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- 3. จงพิสูจน์ว่า $A \subset B$ กำหนด

$$A = \{ 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots \} \quad B = \{ 2, 4, 6, 8, \dots \}$$

- $A = \{ 2^i \mid i \in \{1, 2, 3, \dots\} \}$ ดังนั้น $A = \{ 2, 4, 8, 16, 32, \dots \}$
- $B = \{ 2j \mid j \in \{1, 2, 3, \dots\} \}$ ดังนั้น $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10, \dots \}$
- วิเคราะห์ $A \subset B$ คือ ทุกอย่างใน A ต้องอยู่ใน B ถ้ามีเพียงกรณีเดียวที่ A 'ไม่อยู่' ใน B แสดงว่า $A \not\subset B$
- พิจารณาจากเซตแล้วพบว่า สมาชิกของเซต A เป็นจำนวนคู่เท่านั้น ซึ่ง เป็นสมาชิกของเซต B
- สรุป $A \subset B$

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- 4. จากข้อ 3 จงพิสูจน์ว่า $B \not\subset A$

$$A = \{ 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots \} \quad B = \{ 2, 4, 6, 8, \dots \}$$

- $B = \{ 2j \mid j \in \{1, 2, 3, \dots\} \}$ ดังนั้น $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10, \dots \}$
- $A = \{ 2^i \mid i \in \{1, 2, 3, \dots\} \}$ ดังนั้น $A = \{ 2, 4, 8, 16, 32, \dots \}$
- วิเคราะห์ $B \subset A$ คือ ทุกอย่างใน B ต้องอยู่ใน A ถ้ามีเพียงกรณีเดียวที่ B 'ไม่อยู่' ใน A แสดงว่า $B \not\subset A$
- พิจารณาจากเซตแล้วพบว่า สมาชิกของเซต B คือ 6 ซึ่งไม่เป็นสมาชิกของเซต A
- สรุป $B \not\subset A$

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- 5. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0\}$ $B = \{2, -3\}$
- จงพิสูจน์ว่า $A = B$

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- 6. $A = \{ x \mid x = 2j \text{ เมื่อ } j \in \mathbb{I}^+ \}$
 $B = \{ x \mid x = 2k+2 \text{ เมื่อ } k \in \mathbb{I} \text{ และ } k > -1 \}$
- จงพิสูจน์ว่า $A = B$ โดยที่ A จะเท่ากับ B ได้ก็ต้องเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$
 - พิสูจน์ $A \subset B$ โดยนำ A และ B จับเท่ากัน เพื่อแก้สมการดังนี้

$$B = A$$

$$2k+2 = 2j$$

$$2k+2 = 2j-2 + 2$$

$$2k+2 = 2(j-1) + 2$$

$k = j - 1$ j มีค่าต่ำสุดคือ 1 ดังนั้น k มีค่าเป็น 0 แต่ k สามารถมีค่าเป็น 0 ได้ $k > -1$

- สรุป $A \subset B$

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- (ต่อ) $A = \{ x \mid x = 2j \text{ เมื่อ } j \in \mathbb{I}^+ \}$
- $B = \{ x \mid x = 2k+2 \text{ เมื่อ } k \in \mathbb{I} \text{ และ } k > -1 \}$

- พิสูจน์ $B \subset A$ โดยนำ A และ B จับเท่ากัน เพื่อแก้สมการดังนี้

$$A = B$$

$$2j = 2(k+1)$$

$$j = k+1 \quad k \text{ มีค่าตั้งแต่ } 0 \text{ ดังนั้น } j \text{ มีค่าเป็น } 1 \text{ ซึ่ง } j \in \mathbb{I}^+$$

$$\text{สรุป } B \subset A$$

- ดังนั้น $A = B$

แบบฝึกหัด 1

	$ ^+$	$ ^-$	$ ^0$	Q	Q'
-555					
7.2121...					
$\frac{1}{2}$					
96					
$\sqrt{7}$					
0.51					
9					
$\sqrt{7} \times \sqrt{343}$					
$(\sqrt{6})^2$					
1.234852793.....					
$\sqrt{3} \times \sqrt{9}$					
0					

ແບບືກ້າດ 2

- $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 2 = 0\}$
- $B = \{0, 1, 2, \dots\}$

ຈະພິສູງນີ້ວ່າ $A \neq B$

แบบฝึกหัด 3

- จงแสดงว่า $30 \notin A$
- โดย $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } x = 3k+5 \text{ เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\}$

แบบฝึกหัด 4

- จงพิสูจน์ว่า $A \subset B$ กำหนด $A = \{ x \mid x = 2k+5 \text{ เมื่อ } k \in \mathbb{I}^+ \}$
- และ $B = \{ x \mid x = 2j+1 \text{ เมื่อ } j \in \mathbb{I}^+ \}$

แบบฝึกหัด 5

- จงพิสูจน์ว่า $B \not\subset A$ กำหนด $A = \{ x \mid x = 2k+5 \text{ เมื่อ } k \in \mathbb{I}^+ \}$
- และ $B = \{ x \mid x = 2j+1 \text{ เมื่อ } j \in \mathbb{I}^+ \}$

คุณสมบัติของเซต

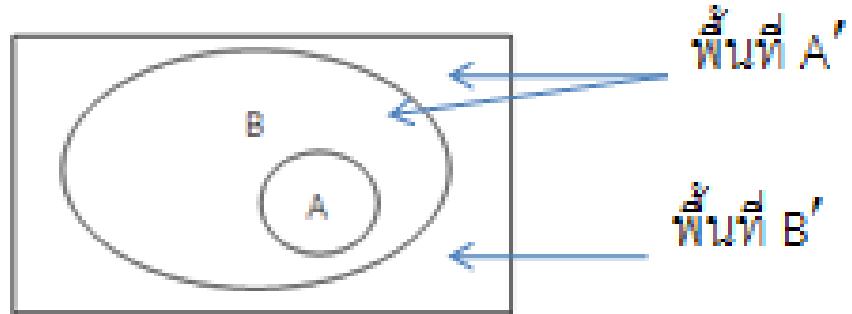
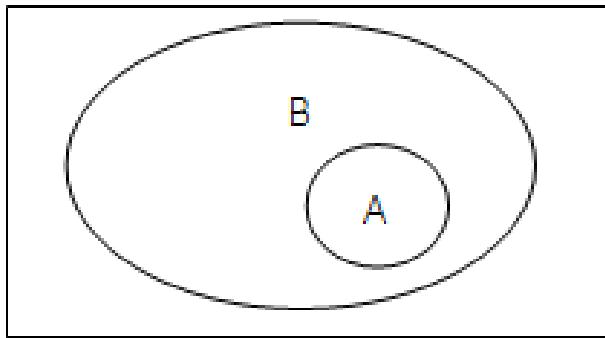
1) $A \subset A$ $\emptyset \subset A$	2) $A \in P(A)$ $\emptyset \in P(A)$ $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$	3) $U' = \emptyset$ $\emptyset' = U$ $A \cup A' = U$ $A \cap A' = \emptyset$
4) $A \cup A = A$ $A \cup \emptyset = A$	5) $A \subset A \cup B$ $B \subset A \cup B$	6) $A \cup B = B \cup A$ (กฎการสลับที่)
7) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (กฎการเปลี่ยนหมุน)	8) $A \cap A = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	9) $A \cap B \subset A$ $A \cap B \subset B$
10) $A \cap B = B \cap A$ (กฎการสลับที่)	11) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (กฎการเปลี่ยนหมุน)	12) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (กฎการกระจาย)

คุณสมบัติของเซต

13) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (กฎการกระจาย)	14) $(A')' = A$	15) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (กฎเดอมอร์แกน)
16) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (กฎเดอมอร์แกน)	17) $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$	18) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
19) $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$	20) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$	21) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$
22) $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ หรือ $(B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset$	23) $A - B = A \cap B' = B' - A'$	24) $A \cap B = A - B'$
25) $A \cup (A \cap B) = A$ (กฎการดูดกลืน)		

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพอยเลอร์

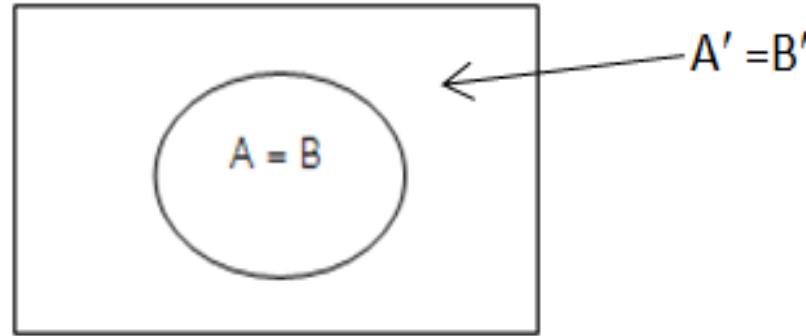
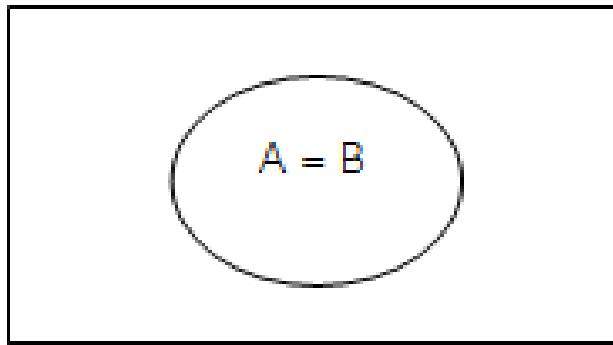
- 1. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$



- ดังนั้น $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$ เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพอยเลอร์

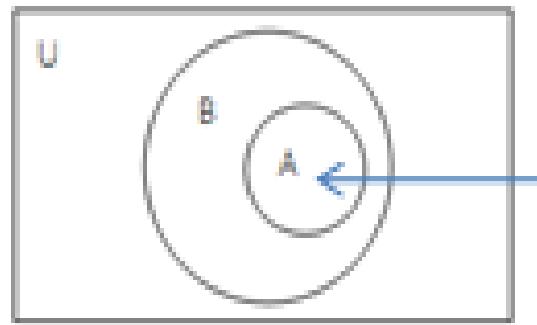
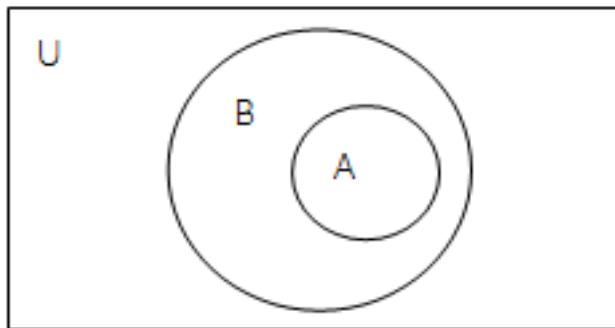
- 2. $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A' = B'$



- ดังนั้น $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A' = B'$ เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพอยเลอร์

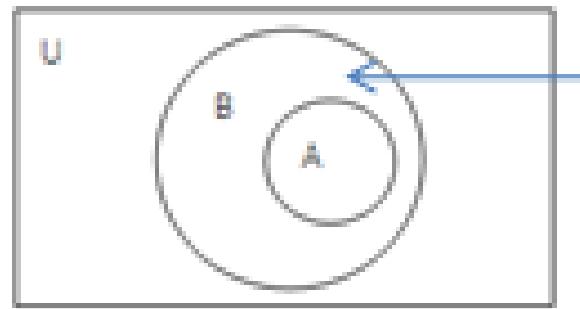
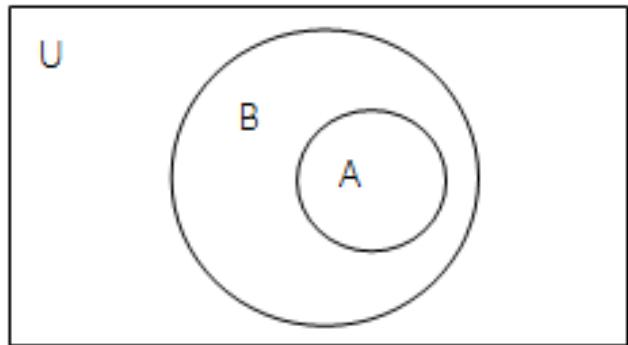
- 3. ถ้า $A \subset B$ และ $A \cap B = A$



- ดังนั้น ถ้า $A \subset B$ และ $A \cap B = A$ เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพอยเลอร์

- 4. ถ้า $A \subset B$ และ $A \cup B = B$

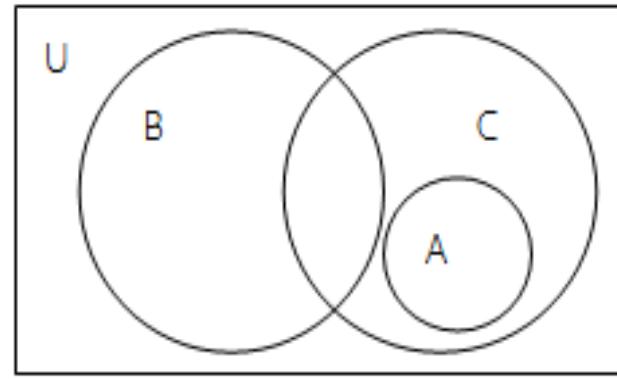
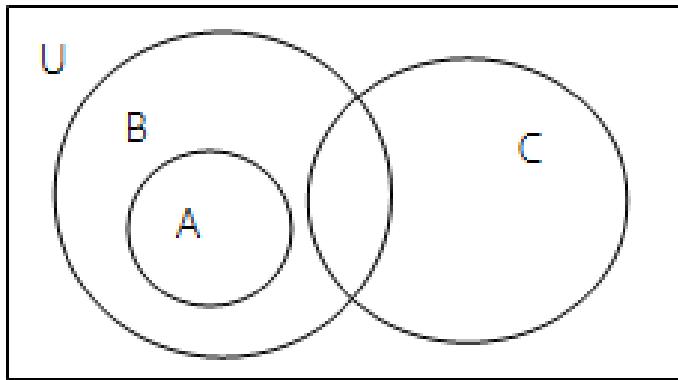


พื้นที่ $A \cup B$

- ดังนั้น ถ้า $A \subset B$ และ $A \cup B = B$ เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพอยเลอร์

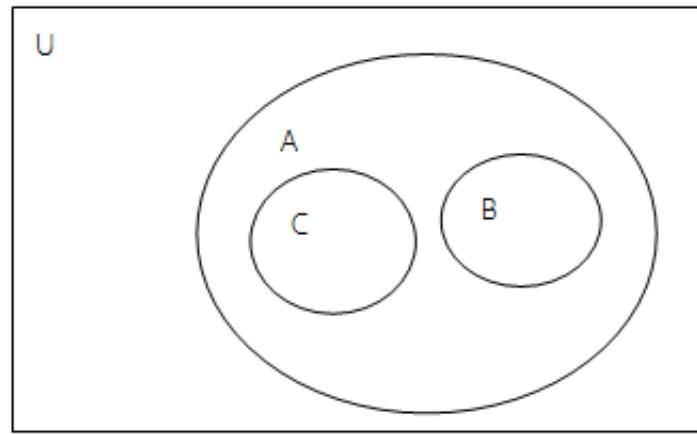
- ถ้า $A \subset B$ หรือ $A \subset C$ แล้ว $A \subset B \cup C$



- ดังนั้น ถ้า $A \subset B$ หรือ $A \subset C$ แล้ว $A \subset B \cup C$ เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพอยเลอร์

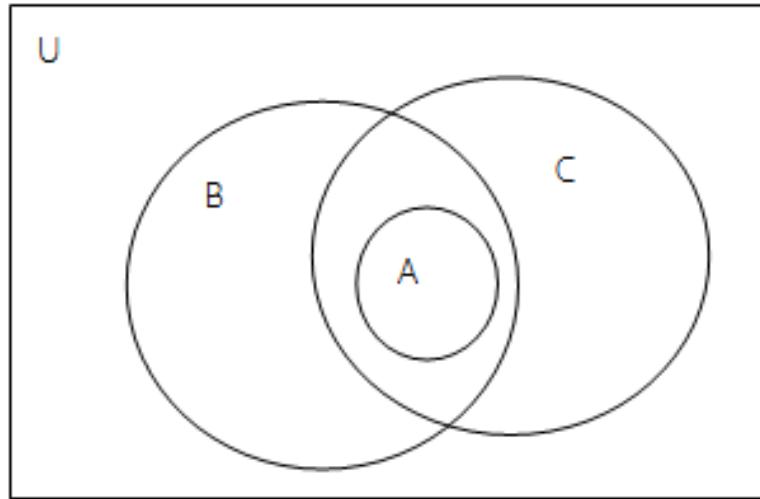
- ถ้า $B \subset A$ และ $C \subset A$ แล้ว $B \cup C \subset A$



- ดังนั้น ถ้า $B \subset A$ และ $C \subset A$ แล้ว $B \cup C \subset A$ เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพอยเลอร์

- 7. ถ้า $A \subset B$ และ $A \subset C$ แล้ว $A \subset B \cap C$



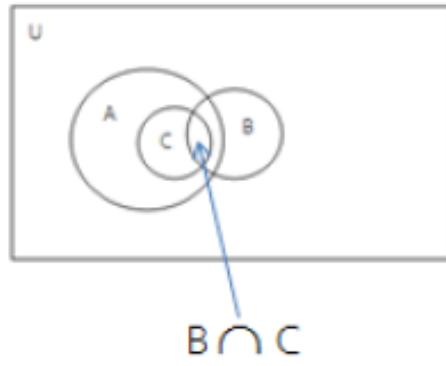
- ดังนั้น ถ้า $A \subset B$ และ $A \subset C$ แล้ว $A \subset B \cap C$ เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพอยเลอร์

- ถ้า $B \subset A$ หรือ $C \subset A$ และ $B \cap C \subset A$

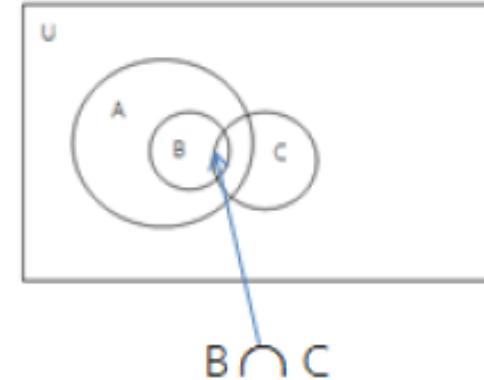
ถ้ากรณีทั้งหมดของ C อยู่ใน A โดย $B \cap C$ ก็จะเป็นพื้นที่อยู่

ใน A สามารถเขียนแผนภาพอยเลอร์ ได้ดังนี้



ถ้ากรณีทั้งหมดของ B อยู่ใน A โดย $B \cap C$ ก็จะเป็นพื้นที่อยู่

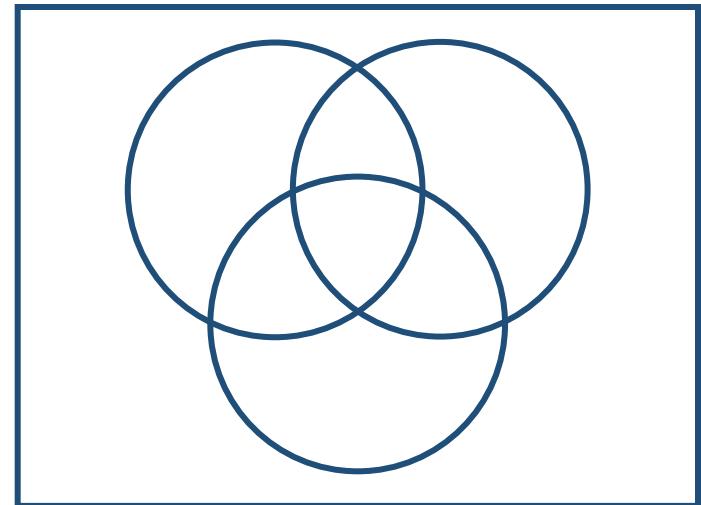
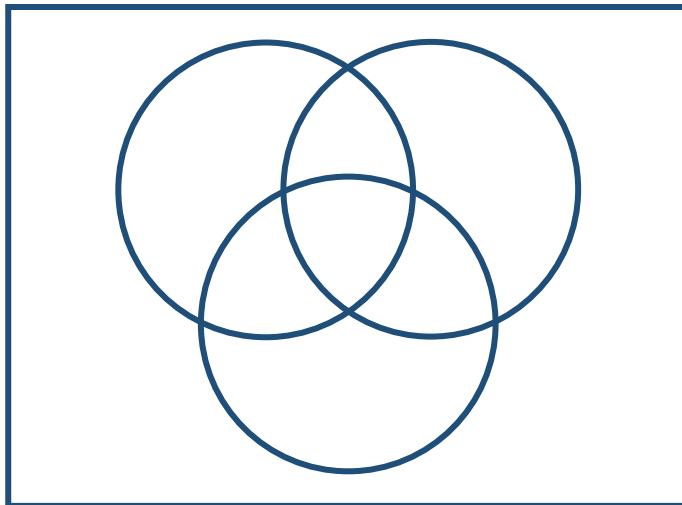
ใน A สามารถเขียนแผนภาพอยเลอร์ ได้ดังนี้



- ดังนั้น ถ้า $B \subset A$ หรือ $C \subset A$ และ $B \cap C \subset A$ เป็นจริง

แผนภาพอยเลอร์

- $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$



แบบฝึกหัด 6

- ให้ A, B, C เป็นเซต จงหา $n(A' \cap B \cap C)$ มีค่าเท่าไร

$$n(B) = 42$$

$$n(C) = 28$$

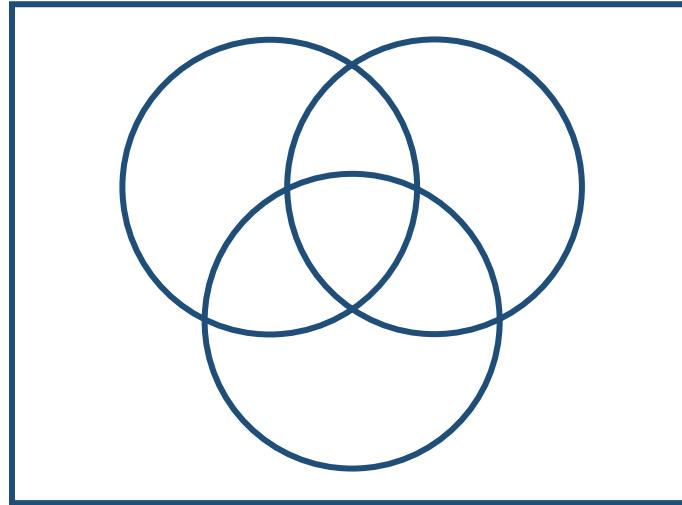
$$n(A \cap C) = 8$$

$$n(A \cap B \cap C) = 3$$

$$n(A \cap B \cap C') = 2$$

$$n(A \cap B' \cap C') = 20$$

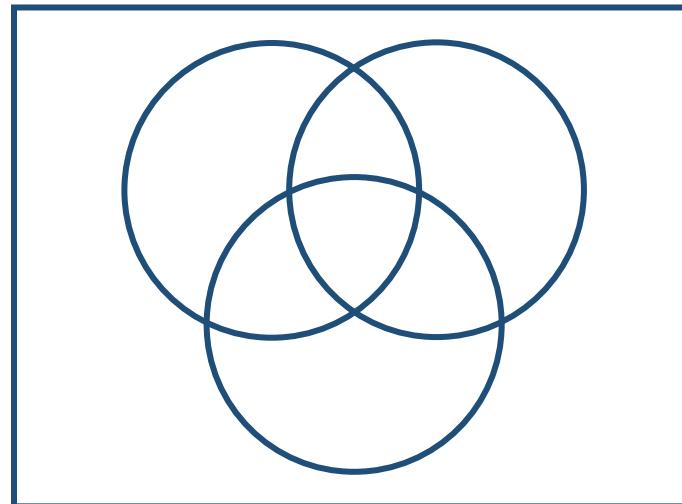
$$n(A \cup B \cup C) = 80$$



แบบฝึกหัด 7

- ข้อกำหนดว่า

- รับประทานเนื้อ 10 คน รับประทานหมู 14 คน รับประทานไก่ 16 คน
- รับประทานทั้งเนื้อและหมู 7 คน รับประทานทั้งเนื้อและไก่ 5 คน
- รับประทานทั้งหมูและไก่ 5 คน
- รับประทานทั้ง 3 อย่าง 3 คน
- ถ้าทุกคนต้องรับประทานอาหารอย่างน้อย 1 ชนิดจะハウว่าหอพักนี้มีผู้อาศัยอยู่กี่คน



การพิสูจน์

บทที่ 2

Discrete Mathematics for Computer Science

อ.เอัญ สุริยะฉาย (ENS)

ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

การให้เหตุผลแบบนิรนัย

- **การให้เหตุผลแบบนิรนัย** (Deductive Reasoning) คือ การนำความรู้พื้นฐาน หรือนิยามซึ่งเป็นสิ่งที่รู้มา ก่อน และยอมรับเป็นจริง นำไปสู่ข้อสรุป
 - เช่น จำนวนคู่ คือจำนวนที่หาร 2 ลงตัว ความรู้คือ 10 หาร 2 ลงตัว ดังนั้น 10 คือ จำนวนคู่ เป็นต้น
- การให้เหตุผลแบบนิรนัยเป็นการนำความรู้พื้นฐานซึ่งอาจเป็นความเชื่อ ข้อตกลง กฎ หรือบทนิยาม ซึ่งเป็น **สิ่งที่รู้มา ก่อน และยอมรับว่า เป็นความจริงเพื่อหาเหตุผลนำไปสู่ข้อสรุป**
- เป็นการอ้างเหตุผลที่มีข้อสรุปตามเนื้อหาสาระที่อยู่ภายในขอบเขตของข้ออ้างที่กำหนด

การให้เหตุผลแบบนิรนัย

ตัวอย่างที่ 1 เหตุ 1. สัตว์เลี้ยงทุกตัวเป็นสัตว์ไม่ดูร้าย

ผล 2. แมวทุกตัวเป็นสัตว์เลี้ยง

แมวทุกตัวเป็นสัตว์ไม่ดูร้าย

ตัวอย่างที่ 2 เหตุ 1. นักเรียน ม.4 ทุกคนแต่งกายถูกระเบียบ

2. สมชายเป็นนักเรียนชั้น ม.4

สมชายแต่งกายถูกระเบียบ

ตัวอย่างที่ 3 เหตุ 1. วันที่มีฝนตกทั้งวันจะมีท้องฟ้ามีดครึ่มทุกวัน

2. วันนี้ท้องฟ้ามีดครึ่ม

วันนี้ฝนตกทั้งวัน

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

- การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) คือ วิธีการสรุปเกิดจาก **ค้นคว้า สังเกต** หรือ **ทดลองหลายครั้ง** และนำมาสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไป
 - เช่น สังเกตพระอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออกทุกวัน จึงสรุปว่าพระอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก
- การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นวิธีการสรุปผลมาจากการค้นหาความจริงจากการสังเกตหรือการทดลองหลายครั้งจากการณีຍ່ອຍๆ และนำมาสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไป

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

- การหาข้อสรุปหรือความจริงโดยใช้วิธีการให้เหตุผลแบบอุปนัยนี้
ไม่จำเป็นต้องถูกต้องทุกครั้ง เนื่องจากการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นการสรุปผลเกิดจากหลักฐานข้อเท็จจริงที่มีอยู่ ดังนั้นข้อสรุปจะเชื่อถือได้มากน้อยเพียงใดนั้นขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูล หลักฐาน และข้อเท็จจริงที่นำมาอ้างชีงได้แก่
- 1. จำนวนข้อมูล
- 2. ข้อมูล

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

- 1. **จำนวนข้อมูล** หลักฐานหรือข้อเท็จจริงที่นำมาเป็นข้อสังเกตหรือข้ออ้างมีมากพอ กับ การสรุปความ หรือไม่
 - เช่น ถ้าไปทานส้มตำที่ร้านอาหารแห่งหนึ่งแล้วห้องเสีย แล้วสรุปว่า ส้มตำนั้นทำให้ห้องเสีย
 - การสรุปเหตุการณ์นั้นอาจเกิดขึ้นเพียงครั้งเดียว ย่อมเชื่อถือได้น้อยกว่า การที่ปรับปรุงฐานส้มตำบ่อยๆ แล้วห้องเสียเกือบทุกครั้ง

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

- 2. **ข้อมูล** หลักฐานหรือข้อเท็จจริง เป็นตัวแทนที่ดีในการให้ข้อสรุป หรือไม่
 - เช่น ถ้าอยากรู้ว่าคนไทยชอบกินข้าวเจ้าหรือข้าวเหนียวมากกว่ากัน ถ้า ถามจากคนที่อาศัยอยู่ในภาคเหนือหรือภาค-อีสาน คำตอบที่ตอบว่าชอบ กินข้าวเหนียวอาจจะมีมากกว่าชอบกินข้าวเจ้า
 - แต่ถ้าถามคนที่อาศัยอยู่ในภาคกลางหรือภาคใต้ คำตอบอาจเป็นใน ลักษณะตรงกันข้าม

ตัวอย่างการให้เหตุผลแบบอุปนัย

- ตัวอย่างที่ 1 จงหาว่า ผลคูณของจำนวนเต็มบวกสองจำนวนที่เป็นจำนวนคี่ จะเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่
- โดยการให้เหตุผลแบบอุปนัย วิธีทำ ลองหาผลคูณของจำนวนเต็มบวกที่เป็นจำนวนคี่หลาย ๆ จำนวนดังนี้

$$1 \times 3 = 3$$

$$3 \times 5 = 15$$

$$5 \times 7 = 35$$

$$7 \times 9 = 63$$

$$1 \times 5 = 5$$

$$3 \times 7 = 21$$

$$5 \times 9 = 45$$

$$7 \times 11 = 77$$

$$1 \times 7 = 7$$

$$3 \times 9 = 27$$

$$5 \times 11 = 55$$

$$7 \times 13 = 91$$

$$1 \times 9 = 9$$

$$3 \times 11 = 33$$

$$5 \times 13 = 65$$

$$7 \times 15 = 105$$

- จากการหาผลคูณดังกล่าว โดยการอุปนัย จะพบว่า ผลคูณที่ได้เป็นจำนวนคี่ สรุป ผลคูณของจำนวนเต็มบวกสองจำนวนที่เป็นจำนวนคี่ จะเป็นจำนวนคี่ โดยการให้เหตุผลแบบอุปนัย

ตัวอย่างการให้เหตุผลแบบอุปนัย

- ตัวอย่างที่ 2 จงหาพจน์ที่อยู่ถัดไปอีก 3 พจน์

1) **1, 3, 5, 7, 9, ...**

- วิธีทำ จากการสังเกตพบว่าแต่ละพจน์มีผลต่างอยู่ 2

($3 - 1 = 2$, $5 - 3 = 2$, $9 - 7 = 2$) ดังนั้น อีก 3 จำนวน คือ 11, 13, 15

2) **2, 4, 8, 16, 32, ...**

- วิธีทำ จากการสังเกตพบว่าแต่ละพจน์จะมีการไล่ลำดับขึ้นไป ถ้าลอง สังเกตดู จะอยู่ในรูปแบบ 2×2^n โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่เริ่มตั้งแต่ 0 ดังนั้น พจน์ที่ 6 คือ $2 \times 32 = 64$, พจน์ที่ 7 คือ 128 และพจน์ที่ 8 คือ 256 จำนวนแต่ละจำนวนจะเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ 2 เท่าก็ได้

การพิสูจน์อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

- การพิสูจน์อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction Proof) ใช้สำหรับการพิสูจน์ข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็ม โดยหลักการคือการแทนค่าแล้วพิจารณาว่าจริง
- โดยนิยามมีดังนี้

ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n

ถ้า $P(1)$ เป็นจริง : ขั้นพื้นฐาน (Base Step)

ถ้า $P(k)$ เป็นจริง

แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก k ใดๆ : ขั้นอุปนัย (Inductive step)

จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

วิธีพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

1. **Base case:** แสดงว่า $p(1)$ เป็นจริง
 - (แทนค่า $n = 1$ แล้วเป็นจริง)
2. **Inductive step 1:** แสดงว่า $P(k)$ เป็นจริง ทุกจำนวนเต็มบวก k ได้
 - (แทนค่า $n = k$ แล้วเป็นจริง)
3. **Inductive step 2:** แสดงว่า $p(k+1)$ เป็นจริง
 - (แทนค่า $n = k+1$ แล้วเป็นจริง)

ตัวอย่าง 1

- จงพิสูจน์ $1 + 2 + \dots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

1) กรณีแรกคือ $p(1)$ เมื่อแทนค่าผลลัพธ์ที่ได้คือ $\frac{1}{2}(1 + 1) = 1$ ซึ่งเป็นจริง

2) กำหนดให้ k คือจำนวนเต็มใด

$$\text{ถ้า} \text{กำหนดให้ } p(k) \text{ คือ } 1 + 2 + \dots + k = \frac{k}{2}(k + 1) \quad \text{ซึ่งเป็นจริง}$$

3) จากข้อ 2) ถ้าเป็นจริง $p(k+1)$ คือ $1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{k+1}{2}(k + 2)$

แทนค่าจากสมการข้อ 2) ลงไป

$$\begin{aligned} \text{ผลลัพธ์ที่ได้คือ } \frac{k}{2}(k + 1) + (k+1) &= \frac{k+1}{2}(k + 2) \\ &= \frac{k^2+3k+2}{2} \end{aligned} \quad \text{ซึ่งเป็นจริง}$$

ดังนั้น $1 + 2 + \dots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n เป็นจริง

ตัวอย่าง 1

- จงพิสูจน์ $1 + 2 + \dots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่าง 2

- จงพิสูจน์ว่า $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

1) กรณีแรกคือ $p(1)$ เมื่อแทนค่าผลลัพธ์ที่ได้คือ $1 = 1^2$ ซึ่งเป็นจริง

2) กำหนดให้ k คือจำนวนเต็มใด

ถ้ากำหนดให้ $p(k)$ คือ $1 + 3 + \dots + 2k-1 = k^2$ ซึ่งเป็นจริง

3) จากข้อ 2) ถ้าเป็นจริง $p(k+1)$ คือ $1 + 3 + \dots + 2k-1 + 2(k+1) - 1 = (k+1)^2$
แทนค่าจากสมการข้อ 2) ลงไป

$$\begin{aligned} \text{ผลลัพธ์ที่ได้คือ } k^2 + 2(k+1) - 1 &= (k+1)^2 \\ &= k^2 + 2k + 1 \end{aligned} \quad \text{ซึ่งเป็นจริง}$$

ดังนั้น $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n เป็นจริง

ตัวอย่าง 2

- จงพิสูจน์ว่า $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่าง 3

- จงพิสูจน์ว่า $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ เมื่อ $n \geq 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม

1) กรณีแรกคือ $p(0)$ เมื่อแทนค่าผลลัพธ์ที่ได้คือ $2^0 = 2^{0+1} - 1 = 1$ ซึ่งเป็นจริง

2) กำหนดให้ k คือจำนวนเต็มใด

ถ้ากำหนดให้ $p(k)$ คือ $2^0 + 2^1 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$ ซึ่งเป็นจริง

3) จากข้อ 2) ถ้าเป็นจริง $p(k+1)$ คือ $2^0 + 2^1 + 2^k + \dots + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$

แทนค่าจากสมการข้อ 2) ลงไป

ผลลัพธ์ที่ได้คือ $2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$ ซึ่งเป็นจริง

ดังนั้น $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ เมื่อ $n \geq 0$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 3

- จงพิสูจน์ว่า $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ เมื่อ $n \geq 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม

แบบฝึกหัด 1

- $n^3 + 2n$ หารด้วย 3 ลงตัว เมื่อ $n \geq 0$

แบบฝึกหัด 2

- $n^3 - n$ หารด้วย 6 ลงตัว เมื่อ $n \geq 0$

แบบฝึกหัด 3

- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ เมื่อ $n \geq 1$

แบบฝึกหัด 4

- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2$ เมื่อ $n \geq 1$

ແບບືກ້າດ 5

- $\frac{1}{1x2} + \frac{1}{2x3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ เมื่อ $n \geq 1$

แบบฝึกหัด 6

- $(1-x)(1+x^1+x^2+\dots+x^n) = 1 - x^{n+1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ≥ 0
- และ x เป็นจำนวนจริง

แบบฝึกหัด 7

- $3^n > n^3$ เมื่อ $n \geq 4$

ความสัมพันธ์

บทที่ 3

Discrete Mathematics for Computer Science

อ.เอัญ สุริยะฉาย (ENS)
ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ความสัมพันธ์

- ในสาขาวิชาทางด้านคอมพิวเตอร์ ข้อมูลต่างๆ นั้น มีความสัมพันธ์กัน ซึ่งผู้เรียนต้องมีความรู้เรื่องพื้นฐานของสัมพันธ์ จึงสามารถวิเคราะห์ และนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาต่างๆ ของคอมพิวเตอร์ได้
 - เช่น กรณีของการออกแบบฐานข้อมูล ต้องรู้จักความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่ง หรือแบบหนึ่งต่อหลายตัว เพื่อจะใช้ในการสร้างตารางฐานข้อมูล เป็นต้น
- ดังนั้นนักศึกษาจึงมีความจำเป็นต้อง เรียนเรื่องความสัมพันธ์ เพื่อเป็นพื้นฐานของการศึกษาในสาขาวิชาด้านคอมพิวเตอร์ต่อไป

ความหมายของความสัมพันธ์

- **คู่อันดับ** (Ordered Pairs) คือ สัญลักษณ์ที่แสดงการจับคู่กันระหว่างสิ่ง 2 สิ่ง
 - เช่น ระยะทางกับเวลา ถ้าเราจะแสดงการจับคู่ระยะทาง (กิโลเมตร) กับเวลา (ชั่วโมง) การเขียนระยะทางกับเวลาลงในวงเล็บ และคั่นด้วยเครื่องหมายจุลภาค เช่น $(200, 4)$ จะหมายถึง ระยะทาง 200 กิโลเมตร ต้องใช้เวลา 4 ชั่วโมง เป็นต้น
- **คู่อันดับประกอบด้วยสมาชิก 2 ตัว** คือ สมาชิกตัวหน้า และ สมาชิกตัวหลัง เขียนแทนในรูป (a, b)
 - โดยที่ a เป็นสมาชิกตัวหน้า และ b เป็นสมาชิกตัวหลัง **ลำดับของคู่อันดับ มีความสำคัญ** การสลับที่กันระหว่างสมาชิกทั้ง 2 ของคู่อันดับ ทำให้ความหมายเปลี่ยนไป

ตัวอย่างของคู่อันดับ

- **(a, b)** อ่านว่า คู่อันดับ เอบี
 - a เป็นสมาชิกตัวหน้าหรือสมาชิกตัวที่หนึ่งของคู่อันดับ (a, b)
 - b เป็นสมาชิกตัวหลังหรือสมาชิกตัวที่สองของคู่อันดับ (a, b)
- การเขียนคู่อันดับจะสลับที่สมาชิกไม่ได้ จะทำให้ความหมายเปลี่ยนไป เช่น (a, b) เป็น (b, a) โดยทั่วไป (a, b) ไม่เท่ากับ (b, a) ยกเว้น $a = b$

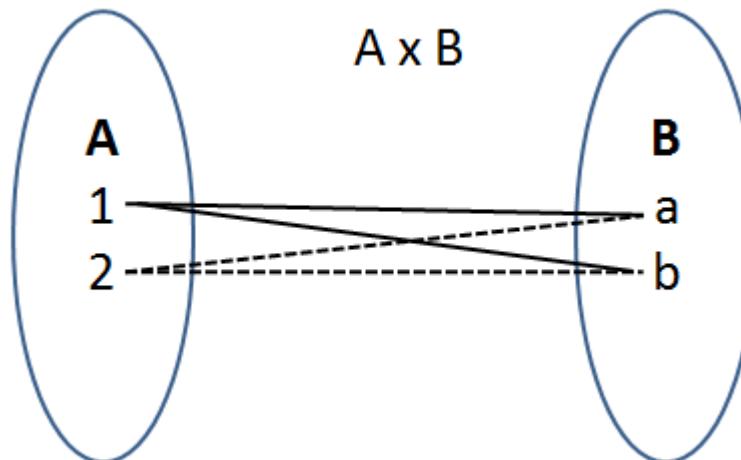
สมบัติของคู่อันดับ

- $(a, b) = (b, a)$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$
- ถ้า $(a, b) = (c, d)$ แล้วจะได้ว่า $a = c$ และ $b = d$
- ถ้า $(a, b) \neq (c, d)$ แล้วจะได้ว่า $a \neq c$ หรือ $b \neq d$

ผลคูณคาร์ทีเซียน

- **ผลคูณคาร์ทีเซียน** ของเซต A และ B แทนสัญลักษณ์ด้วย $A \times B$
- $A \times B =$ เซตของคู่อันดับทั้งหมดที่เป็นไปได้ เมื่อสมาชิกตัวหน้าอยู่ในเซต A และ สมาชิกตัวหลังอยู่ในเซต B
- ตัวอย่าง เช่น ถ้า $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{a, b\}$

$$A \times B = \{ (1,a), (1,b), (2,a), (2,b) \}$$
- สามารถเขียนแผนภาพการคูณคาร์ทีเซียนดังรูปข้างล่าง



สมบัติของผลคูณคาร์ทีเซียน

1)

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

2)

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

3)

$$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$

4)

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

5)

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

ความสัมพันธ์

- **ความสัมพันธ์** เป็นเซตซึ่งสมาชิกในเซตคู่อันดับหรือความสัมพันธ์ เป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างเซตสองเซต
- การเขียนแสดงความสัมพันธ์อาจเขียนในรูป แผนภาพ เซตสมการ ตาราง และกราฟก็ได้ โดยปกติจะเห็นความสัมพันธ์โดยทั่วไป
 - เช่น เป็นพ่อของ..., มากกว่า..., เป็นสมาชิกของ..., เป็นสับเซตของ...
- ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่าง **2 สิ่ง** เรียกว่า **ความสัมพันธ์ทวิภาค**

ความสัมพันธ์

- ถ้าให้ $A = \{3, 4\}$ และ $B = \{3, 4, 5\}$
- จะได้ว่า $A \times B = \{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5)\}$

- และถ้าให้ r เป็นเซตของคู่อันดับที่เกี่ยวข้องกันแบบน้อยกว่าจะได้
 - $r = \{(3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$
 - เราเรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์แบบน้อยกว่าจาก A ไป B

ความสัมพันธ์

- ลักษณะของความสัมพันธ์ r นั้น ต้องเป็นเซตของคู่อันดับที่ได้มาจากการสมาชิกใน $A \times B$ และมีความสัมพันธ์เงื่อนไขที่กำหนด ซึ่งสามารถนิยามความสัมพันธ์ได้ดังนี้
- บหนิยามให้ A และ B เป็นเซต r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

ตัวอย่าง 1

- กำหนด $A = \{2, 3\}$, $B = \{4, 6, 9\}$ และให้
 - r_1 แทนความสัมพันธ์ เป็น ส่องเท่า จาก A ไป B
 - r_2 แทนความสัมพันธ์ เป็น หารลงตัว จาก A ไป B
 - r_3 แทนความสัมพันธ์ เป็น รากที่สอง จาก A ไป B
- วิธีทำ $A \times B = \{(2, 4), (2, 6), (2, 9), (3, 4), (3, 6), (3, 9)\}$
 - $r_1 = \emptyset$
 - เพราะไม่มีสมาชิกของ A ที่มีค่าเท่าสมาชิก B คูณสอง
 - $r_2 = \{(2, 4), (2, 6), (3, 6), (3, 9)\}$
 - เพราะสมาชิก A สามารถนำไปหารสมาชิก B ลงตัว
 - $r_3 = \{(2, 4), (3, 9)\}$
 - เพราะสมาชิก A สามารถเป็นรากที่สองของสมาชิก B ได้

ความสัมพันธ์

- r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$ หรือ $r \subset A \times B$
 - ถ้า $(a, b) \in r$ จะกล่าวว่า a มีความสัมพันธ์ r กับ b
 - ถ้า $(a, b) \notin r$ จะกล่าวว่า a ไม่มีความสัมพันธ์ r กับ b
- ถ้า $A = B$ จะกล่าวว่า r เป็นความสัมพันธ์บน A หรือ $r \subset A \times A$

ตัวอย่าง 2

- จงหาจำนวนสับเซตทั้งหมดของ $A \times B$

$$A = \{1\}$$

$$B = \{2, 3\}$$

$$A \times B = \{(1,2), (1,3)\}$$

จำนวนสับเซตทั้งหมดของ $A \times B$ คือ $2^{1 \times 2} = 4$ เซต ได้แก่

$$r_1 = \emptyset$$

$$r_2 = \{(1,2)\}$$

$$r_3 = \{(1,3)\}$$

$$r_4 = \{(1,2), (1,3)\}$$

ตัวอย่าง 3

- จงพิจารณาว่า r_1, r_2, r_3 เป็นความสัมพันธ์ของ $A \times B$

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$B = \{ 2, 3, 4, 5 \}$$

โดยที่ $r_1 = \{ (1,2), (2,2), (1,4), (2,5) \}$

$$r_2 = \{ (x, y) \in A \times B \mid x+2 = y \} = \{ (1,3), (2,4), (3,5) \}$$

$$r_3 = \{ (x, y) \in A \times B \mid x \geq y \} = \{ (2,2), (3,2), (3,3) \}$$

ตัวอย่าง 4

- จงพิจารณาว่า r เป็นความสัมพันธ์ของ $A \times A$

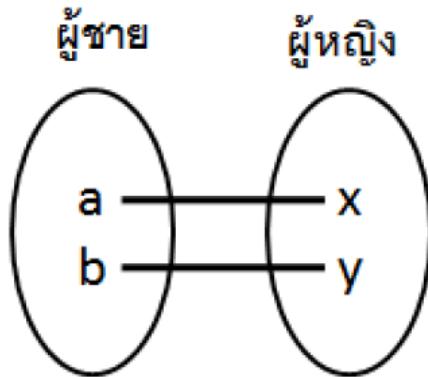
$$A = \{ a, b, c, d \}$$

โดยที่ $r = \{ (x, y) \in A \times A \mid x=y \}$

ลักษณะของความสัมพันธ์

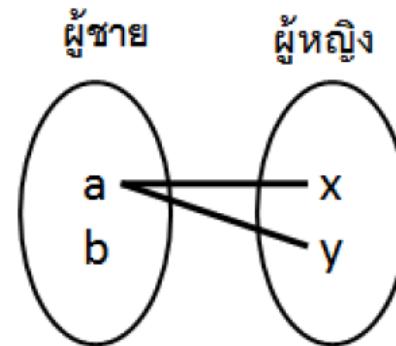
1) หนึ่งต่อหนึ่ง (One to one)

ความสัมพันธ์นี้คือ ผู้ชายหนึ่งคนต่อผู้หญิงหนึ่งคน
เช่น a เชื่อมต่อกับ x เท่านั้น
b เชื่อมต่อกับ y เท่านั้น



2) หนึ่งต่อหลาย (One to many)

ความสัมพันธ์นี้คือ ผู้ชายหนึ่งคนต่อผู้หญิงหลายคนได้
เช่น a เชื่อมต่อกับ x และ y
b ไม่ได้เชื่อมต่อกับใคร
ทั้ง x และ y เชื่อมต่อกับ a ตัวเดียว



ลักษณะของความสัมพันธ์

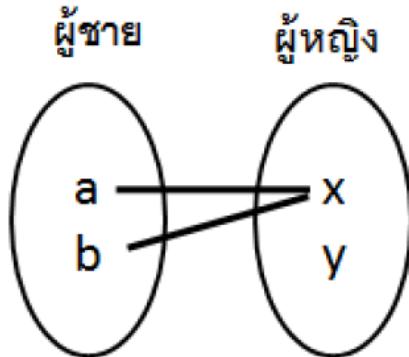
3) 關係รายต่อหนึ่ง (Many to one)

ความสัมพันธ์นี้คือ ผู้ชายรายคนต่อผู้หญิงหนึ่งคน

เช่น a เชื่อมต่อกับ x

b เชื่อมต่อกับ x

ทั้ง a และ b เชื่อมต่อกับ x ตัวเดียว

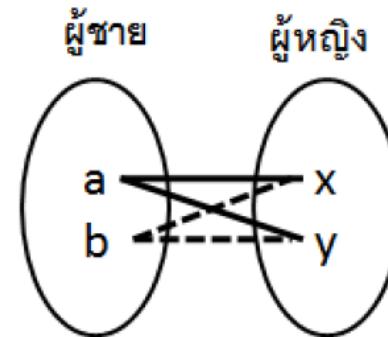


4) 關係รายต่อ關係ราย (Many to Many)

ความสัมพันธ์นี้คือ ผู้ชายรายคนต่อผู้หญิงรายคนได้

เช่น a เชื่อมต่อกับ x และ y

b เชื่อมต่อกับ x และ y



ความสัมพันธ์ผกผัน

ความสัมพันธ์ผกผัน หรือ อินเวอร์สของความสัมพันธ์ (Inverse of r)

- คือ ความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r

- ความผกผันของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

r^{-1} คือ ความสัมพันธ์จาก B ไป A

เขียนแทนด้วย $r^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in r \}$

r^{-1} จะมีสมาชิกเป็นคู่อันดับ (y, x)

ตัวอย่าง 1

- ตัวอย่างที่ 1 จงหาความสัมพันธ์ผกผันของความสัมพันธ์ r
- กำหนดให้ $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ และ $B = \{ a, b, c, d \}$
- สำหรับความพันธ์ r มีดังนี้

$$r = \{ (1,b), (1,d), (2,a), (4,a) \}$$

โดย r อยู่ในความสัมพันธ์ $A \times B$

- ดังนั้นความสัมพันธ์ผกผันของ r คือ

$$r^{-1} = \{ (b,1), (d,1), (a,2), (a,4) \}$$

ตัวอย่าง 2

- ตัวอย่างที่ 2 จงหาความสัมพันธ์ผกผันของความสัมพันธ์ r
- กำหนดให้ความสัมพันธ์ r มีดังนี้

$$r = \{ (1,2), (3,4), (5,6) \}$$

- ดังนั้นความสัมพันธ์ผกผันของ r คือ

$$r^{-1} = \{ (2,1), (4,3), (6,5) \}$$

โดเมนและพิสัย

- **โดเมน (Domain)** ของ r คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิก ตัวหน้าของคู่ลำดับใน r เขียนแทนด้วย D_r

$$D_r = \{x \mid (x, y) \in r\} \text{ สำหรับตัวอย่างนี้ } D_r \text{ คือ } x$$

- **พิสัย (Range)** ของ r คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก ตัวหลังของคู่ลำดับใน r เขียนแทนด้วย R_r

$$R_r = \{y \mid (x, y) \in r\} \text{ สำหรับตัวอย่างนี้ } R_r \text{ คือ } y$$

ตัวอย่าง 3

ตัวอย่าง จงหาโดเมนและพิสัยของความสัมพันธ์ r

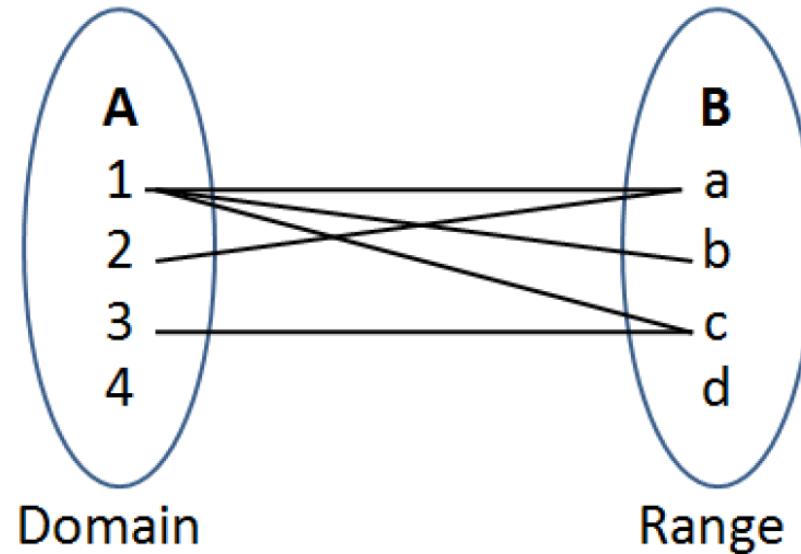
กำหนดให้ $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ และ $B = \{ a, b, c, d \}$

สำหรับความพันธ์ r มีดังนี้ $r = \{ (1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (3,c) \}$ โดย r อยู่ในความสัมพันธ์ $A \times B$

โดเมนของ r คือสมาชิกตัวหน้าของความสัมพันธ์ r คือ $D_r = \{ 1, 2, 3 \}$

พิสัยของ r คือสมาชิกตัวหลังของความสัมพันธ์ r คือ $R_r = \{ a, b, c \}$

สามารถเขียนแผนภาพได้ดังนี้



ตัวอย่างการหาความสัมพันธ์

- 1 หา y จัด x / หา x จัด y
 - หา Domain จัด y ในเทอมของ x
 - หา Range จัด x ในเทอมของ y
- 2 พิจารณาเงื่อนไข = root / เศษส่วน
 - $\text{root} \geq 0$
 - เศษส่วน ตัวส่วนต้องไม่เท่ากับ 0
- 3 เขียนเส้นจำนวน และตอบ
 - ใช้วิธีแก้ อสมการ

ตัวอย่าง 4

- กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริง
- โดยที่ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{5}{2-x^2}\}$ จงหา R_r

วิธีทำ หา R_r จัด x ในเทอมของ y

$$2 - x^2 = \frac{5}{y}$$

$$x^2 = 2 - \frac{5}{y}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2y-5}{y}} \text{ โดย } y \neq 0$$

พิจารณา $\frac{2y-5}{y} \geq 0$ คุณ y ทั้งสองข้าง

$$2y - 5 \geq 0$$



ดังนั้น $R_r = (-\infty, 0) \cup [\frac{5}{2}, \infty)$

แบบฝึกหัด 1

- กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริง
- โดยที่ $r = \{ (x, y) \mid y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \}$ จงหา D_r

แบบฝึกหัด 2

- กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริง
- โดยที่ $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2 - \frac{4}{(x-1)^2 - 4} \}$ จงหา R_r

ແບບືກ້າດ 3

- ກໍານົດໄ້ $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x - 3} \}$ ຈຶ່ງທາ r^{-1}

กฎของความสัมพันธ์

$$1. (r^{-1})^{-1} = r$$

ตัวอย่าง $(r^{-1})^{-1} \subset r$ และ $r \subset (r^{-1})^{-1}$

สมมุติ $r = \{ (1,2), (2,3) \}$ แล้ว $(x, y) \in r$

$r^{-1} = \{ (2,1), (3,2) \}$ แล้ว $(y, x) \in r^{-1}$

$(r^{-1})^{-1} = \{ (1,2), (2,3) \}$ แล้ว $(x, y) \in (r^{-1})^{-1}$

กฎของความสัมพันธ์

$$2. (r \cup s)^{-1} = r^{-1} \cup s^{-1}$$

ตัวอย่าง $(r \cup s)^{-1} \subset r^{-1} \cup s^{-1}$ และ $r^{-1} \cup s^{-1} \subset (r \cup s)^{-1}$

$$\text{สมมุติ } r = \{ (1,2), (2,3) \}$$

$$s = \{ (2,3), (4,5) \} \quad (x, y) \in r \text{ หรือ } (x, y) \in s$$

$$(r \cup s) = \{ (1,2), (2,3), (4,5) \} \quad (x, y) \in r \cup s$$

$$(r \cup s)^{-1} = \{ (2,1), (3,2), (5,4) \} \quad (y, x) \in (r \cup s)^{-1}$$

$$r^{-1} = \{ (2,1), (3,2) \}$$

$$s^{-1} = \{ (3,2), (5,4) \} \quad (y, x) \in r^{-1} \text{ หรือ } (y, x) \in s^{-1}$$

$$r^{-1} \cup s^{-1} = \{ (2,1), (3,2), (5,4) \} \quad (y, x) \in r^{-1} \cup s^{-1}$$

กฎของความสัมพันธ์

3. ถ้า $s \subset r$ และ $s^{-1} \subset r^{-1}$

$$\text{ตัวอย่าง } r = \{ (1,2), (2,3) \} \quad (x, y) \in r$$

$$s = \{ (2,3) \} \quad (x, y) \in s$$

$$s \subset r$$

$$r^{-1} = \{ (2,1), (3,2) \} \quad (y, x) \in r^{-1}$$

$$s^{-1} = \{ (3,2) \} \quad (y, x) \in s^{-1}$$

$$s^{-1} \subset r^{-1}$$

$$4. D_{r^{-1}} = R_r$$

$$R_{r^{-1}} = D_r$$

คุณสมบัติความสัมพันธ์

- สมบัติสะท้อน $r = \{ (x, x) \in A \times A \mid x \in A \}$ ดังนั้น r ไม่มีสมบัติสะท้อน เมื่อ มี $x \in A$ อย่างน้อย 1 ตัว ที่ $(x, x) \notin r$ โดยหลักการพิจารณาต้องมีตัวที่ซ้ำกัน ระหว่าง x, y **ครบถ้วน**

$$A = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$A \times A = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) \}$$

$$r_1 = \{ (x, y) \in A \times A \mid x \leq y \}$$

$$= \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3) \} \quad \text{มีสมบัติสะท้อน}$$

$$r_2 = \{ (x, y) \in A \times A \mid x < y \}$$

$$= \{ (1,2), (1,3), (2,3) \} \quad \text{ไม่มีสมบัติสะท้อน ไม่มี } (1,1) (2,2) (3,3)$$

$$r_3 = \{ (1,1), (2,2) \}$$

$$\quad \text{ไม่มีสมบัติสะท้อน ไม่มี } (3,3)$$

คุณสมบัติความสัมพันธ์

- **สมบัติสมมาตร (Symmetric)** สำหรับ $x, y \in A$ ถ้า $(x, y) \in r$ แล้ว $(y, x) \in r$ ดังนั้น r ไม่มีสมบัติสมมาตร เมื่อมี $(x, y) \in r$ แต่ $(y, x) \notin r$ โดยหลักการพิจารณาไม่จำเป็นต้องครบ แต่ถ้ามีต้องมีคู่ของมัน

$$A = \{ a, b, c, d \}$$

$$r_1 = \{ (a, a), (b, c), (c, b), (d, d) \}$$

มีสมบัติสมมาตร

$$r_2 = \{ (a, a), (b, c), (d, d) \}$$

ไม่มีสมบัติสมมาตร ไม่มี (c, b)

$$r_3 = \{ (x, y) \in I^+ \times I^+ \mid x+y = 4 \} = \{ \{1,3\}, \{2,2\}, \{3,1\} \}$$

มีสมบัติสมมาตร

คุณสมบัติความสัมพันธ์

- **สมบัติถ่ายทอด** (Transitive) สำหรับ $x, y, z \in A$

ถ้า $(x, y) \in r$ และ $(y, z) \in r$ แล้ว $(x, z) \in r$ ดังนั้น r ไม่มีสมบัติถ่ายทอด
เมื่อมี $(x, y) \in r$ และ $(y, z) \in r$ **แต่ $(x, z) \notin r$**

- โดยหลักการพิจารณาเมื่อไรมีคู่ลำดับที่มีความสัมพันธ์แบบเชื่อมกันเกิดขึ้น เช่น $(1,2)$ $(2,3)$ ต้องมีตัวที่ 3 ตามมา ถ้าไม่มีไม่เป็นไร แต่ถ้ามีต้องมีตัวที่สาม ตามมาเท่านั้น นั้นคือ $(1,3)$

$$r_1 = \{ (1,1), (2,4) \}$$

มีสมบัติถ่ายทอด

$$r_2 = \{ (1,2), (2,4), (1,4), (1,3) \}$$

มีสมบัติถ่ายทอด

$$r_3 = \{ (1,2), (2,4), (1,3) \}$$

ไม่มีสมบัติถ่ายทอด ไม่มี $(1,4)$

$$r_4 = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1) \}$$

มีสมบัติถ่ายทอด

$$r_5 = \{ (2,2), (3,3), (1,2), (2,1) \}$$

ไม่มีสมบัติถ่ายทอด ไม่มี $(1,1)$

$$r_6 = \{ (1,1), (3,3), (1,2), (1,3) \}$$

มีสมบัติถ่ายทอด

$$r_7 = \{ (1,1), (2,2), (1,2), (2,3) \}$$

ไม่มีสมบัติถ่ายทอด ไม่มี $(1,3)$

คุณสมบัติความสัมพันธ์

- **ความสัมพันธ์สมมูล** (Equivalence relation) จะมีสมบัตินี้เมื่อ r มีสมบัติ สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด

$$A = \{ 1, 2, 3 \} \text{ และ } r = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1) \}$$

จงพิสูจน์ว่า r มีความสัมพันธ์สมมูล

มีสมบัติสะท้อน r ต้องมี $(1,1), (2,2), (3,3)$

มีสมบัติสมมาตร ถ้า r มี $(1,2)$ ต้องมี $(2,1)$

มีสมบัติถ่ายทอด ถ้า r มี $(1,2)$ และ $(2,1)$ ต้องมี $(1,1)$

ดังนั้น r มีความสัมพันธ์สมมูล

ตัวอย่าง 1

- จงพิสูจน์ $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y \}$ มีสมบัติสะท้อน สมมาตร และ ถ่ายทอด

ตัวอย่าง 2

- จงพิสูจน์ $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y = 10 \}$ มีสมบัติสมมาตร

การพิสูจน์สมบัติสมมาตร

สมมุติ $(x, y) \in r$

$$x + y = 10$$

$$y + x = 10$$

$$(y, x) \in r$$

ดังนั้น r มีสมบัติสมมาตร

โดยอาศัยกฎสลับที่ $x + y = y + x$

โดยอาศัยกฎสลับที่ $x + y = y + x$

ตัวอย่าง 3

- จงพิสูจน์ $r = \{ (x, y) \in I \times I \mid x \leq y \}$ มีสมบัติถ่ายทอด

การพิสูจน์สมบัติถ่ายทอด

สมมุติ $(x, y) \in r$ และ $(y, z) \in r$

$$x \leq y \quad \text{และ} \quad y \leq z$$

$$x \leq z$$

$$(x, z) \in r$$

ดังนั้น r มีสมบัติถ่ายทอด

- โดยอาศัยสมบัติการถ่ายทอดของจำนวนเต็ม ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq z$ เลข $x \leq z$

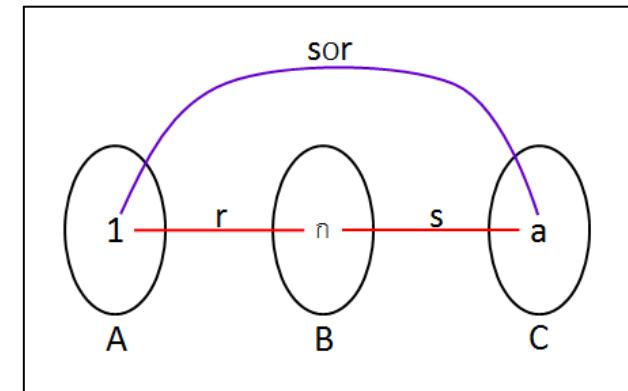
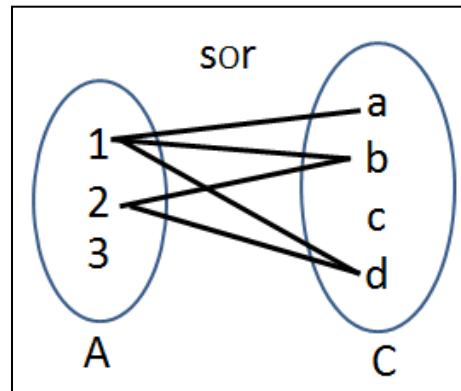
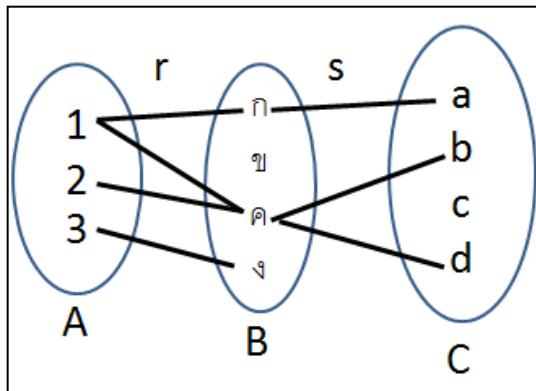
ตัวอย่าง 4

r เป็นความสัมพันธ์บนเซต I^+ และ $r = \{ (x, y) \mid x + y \text{ หารด้วย } 2 \text{ ลงตัว } \}$

จงพิสูจน์แสดงว่า r เป็นความสัมพันธ์สมมูล

ความสัมพันธ์ประกอบ

- นิยามความสัมพันธ์ประกอบ (Composite Relation) จากรูปข้างล่าง กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C ความสัมพันธ์ประกอบของ r และ s คือ ความสัมพันธ์ซึ่งประกอบด้วยคู่อันดับ (a, c) โดยที่ $(a, b) \in r$ และ $(b, c) \in s$
- เขียนแทนด้วย sor นั้นคือ
- $sor = \{ (a, c) \in A \times C \text{ มี } b \in B \text{ ซึ่ง } (a, b) \in r \text{ และ } (b, c) \in s \}$



ความสัมพันธ์ประกอบ

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{0, 1, 2\}$

แล้ว r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C

แล้ว กำหนดให้ $r = \{(1,1), (1,4), (2,3), (3,1), (3,4)\}$

$s = \{(1,0), (2,0), (3,1), (3,2), (4,1)\}$

จงหาเซตความสัมพันธ์ประกอบของ sor

จากโจทย์ ให้พิจารณาจากพิสัยของ r เชื่อมกับโดเมนของ s ถ้าโดเมนของ s และพิสัยของ r เป็นค่าเดียวกัน
ให้เขียน โดเมน r เป็นโดเมนของ sor และเขียนพิสัยของ s เป็นพิสัยของ sor

$r = (1, 1)$ ตรงกับ $s = (1, 0)$ ดังนั้น sor คือ $(1, 0)$

$r = (1, 4)$ ตรงกับ $s = (4, 1)$ ดังนั้น sor คือ $(1, 1)$

$r = (2, 3)$ ตรงกับ $s = (3, 1)$ ดังนั้น sor คือ $(2, 1)$

$r = (2, 3)$ ตรงกับ $s = (3, 2)$ ดังนั้น sor คือ $(2, 2)$

$r = (3, 1)$ ตรงกับ $s = (1, 0)$ ดังนั้น sor คือ $(3, 0)$

$r = (3, 4)$ ตรงกับ $s = (4, 1)$ ดังนั้น sor คือ $(3, 1)$

ดังนั้นเซตของ sor คือ $\{(1,0), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1)\}$

แบบฝึกหัด 1

- จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้มีสมบัติ สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด และความสัมพันธ์สมมูล $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq y \}$

แบบฝึกหัด 2

- จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้มีสมบัติ สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด และความสัมพันธ์สมมูล $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1 \}$

แบบฝึกหัด 3

- จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้มีสมบัติ สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด และความสัมพันธ์สมมูล

$$r = \{ (x, y) \in I \times I \mid x-y \text{ หารด้วย } 2 \text{ ลงตัว } \}$$

แบบฝึกหัด 4

- จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้มีสมบัติ สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด และความสัมพันธ์สมมูล
$$r = \{ (x, y) \in I \times I \mid x-y \text{ เป็นเลขคี่ } \}$$

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

บทที่ 4

Discrete Mathematics for Computer Science

อ.เอัญ สุริยะฉาย (ENS)

ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ลำดับและอนุกรม

- **ลำดับ** (Sequences) หมายถึง จำนวนหรือพจน์ที่เขียนเรียงกันภายใต้ กฎเกณฑ์อย่างโดยอย่างหนึ่ง สำหรับนิยามคือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตจำนวนเต็มบวก ($1, 2, 3, \dots$)
- เช่น มีฟังก์ชัน $f(n)=n^2+1$ เมื่อ $n=1, 2, 3, \dots$ จะได้ $f(1)=2, f(2)=5, f(3)=10, f(4)=17, \dots$
- ค่าฟังก์ชันเหล่านี้ที่เขียนต่อกันเป็น $2, 5, 10, 17, \dots$ เรียกว่า ลำดับ นิยมเขียนฟังก์ชันด้วย a_n คือ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$
- เขียนแทนด้วย $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)$ เพื่อให้ทราบว่าเป็นลำดับ โดยโดเมนต้องเป็นจำนวนนับเท่านั้น เรียก a_1 ว่า “พจน์ที่ 1” ของลำดับ เรียก a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของลำดับ, ไปเรื่อยๆ จนถึงพจน์ที่ n ใดๆ เขียนแทนด้วย a_n จะเรียกว่า พจน์ทั่วไปของลำดับ เช่น ลำดับ $2, 5, 10, 17, \dots$ มีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n = n^2+1$

ลำดับ

- การหาพจน์ทั่วไปนั้น โดยปกติมีได้มากกว่า 1 แบบ
- เช่น ลำดับ 2, 4, 8, ...
 - อาจมีพจน์ทั่วไปเป็นคือ $a_n = 2^n$ ทำให้ a_4 มีค่าเท่ากับ 16
 - หรือมีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n = (n+1)(n^2-n+6)/6$ ทำให้ a_4 มีค่าเท่ากับ 15
ซึ่งมีค่าไม่เท่ากัน แต่ 3 พจน์แรกมีค่าเท่ากัน ถ้ายเป็นลำดับที่ต่างกัน
- หรืออีกรูปนี้ ลำดับ 1, 2, 3, 4, ...
 - อาจมีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n = n$ ซึ่งทำให้พจน์ที่ 5 มีค่าเท่ากับ 5
 - หรือ $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+n$ ซึ่งทำให้พจน์ที่ 5 มีค่าเท่ากับ 29
ซึ่งมีค่าไม่เท่ากัน แต่ 4 พจน์แรกมีค่าเท่ากัน ถ้ายเป็นลำดับที่ต่างกัน

ลำดับ

ลำดับทั่วๆ ไปแบ่งเป็น 2 ชนิดคือ

- **ลำดับจำกัด** (finite sequence)

- คือลำดับที่มีจำนวนพจน์ที่แน่นอน เช่น 8 พจน์, 15 พจน์, หรือ n พจน์

- **ลำดับอนันต์** (infinite sequence)

- คือลำดับที่มีจำนวนพจน์มากจนนับไม่ได้ เช่น **1,2,3,4,...**

ลำดับเลขคณิต

- **ลำดับเลขคณิต** (Arithmetical Sequence) คือ ลำดับที่มีผลต่างของพจน์หลังลบด้วยพจน์หน้าที่ติดกันมีค่าคงตัวเท่ากันเสมอ นี้ จะเรียกว่า ลำดับเลขคณิต และเรียกผลต่างที่มีค่าคงตัวเท่ากันเสมอว่า ผลต่างร่วม
- สำหรับนิยามคือ ลำดับที่ผลต่างซึ่งได้จากพจน์ที่ $n+1$ ลบด้วยพจน์ที่ n มีค่าคงตัว ค่าคงตัวนี้เรียกว่า ผลต่างร่วม เขียนแทนผลต่างร่วมด้วย d

ลำดับเลขคณิต

- พิจารณาลำดับ $1, 4, 7, 10, 13, \dots$
- จะเห็นว่าเมื่อนำพจน์หลังลบด้วยพจน์หน้าที่อยู่ติดกันมีผลต่างเป็นค่าคงตัวเท่ากับ 3 เช่นอนนั่น
- คือ $4 - 1 = 3, \quad 7 - 4 = 3, \quad 10 - 7 = 3, \quad 13 - 10 = 3$
- ตัวอย่าง

$2, 5, 8, 11, \dots$ มี d เท่ากับ 3

$9, 7, 5, 3, \dots$ มี d เท่ากับ -2

$5, 5, 5, \dots$ มี d เท่ากับ 0

ลำดับเลขคณิต

- สูตรการหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต การหาพจน์ที่ n คือ $a_n = a_1 + (n-1)d$
- ตัวอย่าง จงหาค่าของ a_5 และ a_{10} จากลำดับเลขคณิตนี้ 2, 5, 8, 11, ...
- จากโจทย์มี ผลต่างร่วมเท่ากับ 3
- เมื่อแทนค่าลงในสูตร $a_n = a_1 + (n-1)d$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$a_5 = 2 + (5-1) * 3 = 14$$

$$a_{10} = 2 + (10-1) * 3 = 29$$

ลำดับเรขาคณิต

- **ลำดับเรขาคณิต** (Geometric Sequence) คือจับพจน์ที่อยู่ข้างหลังหารด้วย พจน์ที่อยู่ติดกันข้างหน้าจะแล้วได้ค่าเท่ากันตลอดลำดับนั้นจะเป็นลำดับเรขาคณิต
- สำหรับนิยามคือลำดับที่มีผลหารซึ่งเกิดจากพจน์ที่ $n+1$ หารด้วยพจน์ที่ n แล้วมีค่าคงตัว และค่าคงตัวนี้เรียกว่า อัตราส่วนร่วม เขียนแทนอัตราส่วนร่วมนี้ด้วย r
- พิจารณาลำดับ $4, 8, 16, 32, 64, \dots$ จะเห็นว่าเมื่อนำพจน์หลังหารด้วยพจน์หน้าที่อยู่ติดกันมีผลหารเป็นค่าคงตัวเท่ากับ 2 เสมอ
- นั่นคือ $8 / 4 = 2, \quad 16 / 8 = 2, \quad 32 / 16 = 2, \quad 64 / 32 = 2$
- ตัวอย่าง $3, 6, 12, 24, \dots$ มี r เท่ากับ 2
 $2, -4, 8, -16, \dots$ มี r เท่ากับ -2
 $5, 5, 5, \dots$ มี r เท่ากับ 1

ลำดับเรขาคณิต

- สูตรการหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต การหาพจน์ที่ n คือ
$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
- ตัวอย่างเช่น จงหาค่าของ a_5 และ a_{10} จากลำดับเรขาคณิตนี้ 3, 6, 12, 24, ...
- จากโจทย์มี r เท่ากับ 2 เมื่อแทนค่าลงในสูตร $a_n = a_1 r^{n-1}$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$a_5 = 3 * 2^4 = 48$$

$$a_{10} = 3 * 2^9 = 1536$$

ผลรวม

- **ผลรวม** (Summation) หมายถึงการบวกของเซตของจำนวน ซึ่งจะให้ผลลัพธ์เป็นผลบวกจำนวนที่กล่าวถึงเป็นจำนวนธรรมชาติ

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- ตัวอย่างการหาผลรวมพจน์ที่ 10 = $\frac{10(10+1)}{2} = 55$

อนุกรม

- **อนุกรม** (Series) คือ ผลจากการบวกสมาชิกทุกตัวของลำดับไม่จำกัด เข้าด้วยกัน
- หากกำหนดให้ลำดับของจำนวนเป็นอนุกรมของลำดับนี้ๆ ก็คือ อนุกรมสามารถเขียนแทนได้ด้วย $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
- สัญลักษณ์ของผลรวม \sum เช่นตัวอย่างนี้เป็น
- อนุกรมของลำดับ 2^n คือ $\sum_{i=1}^n i = 2 + 4 + 8 + \dots$

อนุกรมเลขคณิต

- **อนุกรมเลขคณิต (Arithmetic Series)** คือ อนุกรมที่ได้จากการลำดับเลขคณิต เรียกว่า อนุกรมเลขคณิต และผลต่างรวมของลำดับเลขคณิต เป็นผลต่างรวมของอนุกรมเลขคณิตด้วย หรืออาจกล่าวว่า เป็นผลบวก n พจน์แรก

เมื่อ $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n - 1)d$

เป็นลำดับเลขคณิต

จะได้ $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n - 1)d)$

เป็นอนุกรมเลขคณิต

- ซึ่งมี a_1 เป็นพจน์แรกของอนุกรม และ d เป็นผลต่างรวมของอนุกรมเลขคณิต จากบทนิยาม จะได้ว่า ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มี n พจน์ จะเรียกการเขียนแสดงผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ว่า อนุกรมเลขคณิต และผลต่างรวม (d) ของลำดับเลขคณิต เป็นผลต่างรวมของอนุกรมเลขคณิต

ตัวอย่างของอนุกรมเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 1 คือ $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99$

เพราะว่า $1, 3, 5, \dots, 99$

เป็น อนุกรมเลขคณิต

เป็น ลำดับเลขคณิต และมี d เท่ากับ 2

ตัวอย่างที่ 2 คือ $25 + 20 + 15 + 10 + \dots$

เพราะว่า $25, 20, 15, 10, \dots$

เป็น อนุกรมเลขคณิต

เป็น ลำดับเลขคณิต และมี d เท่ากับ -5

ตัวอย่างที่ 3 คือ $7 + 14 + 21 + 28 + \dots$

เพราะว่า $7, 14, 21, 28, \dots$

เป็น อนุกรมเลขคณิต

เป็น ลำดับเลขคณิต และมี d เท่ากับ 7

สูตรการหาผลบวก อนุกรมเลขคณิต

- สูตรการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

คือ

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

- ตัวอย่าง จงหาผลรวมพจน์ที่ 5 จากลำดับเลขคณิต 2, 5, 8, 11, 14, ...
- จากโจทย์เมื่อแทนค่าลงในสูตร $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$S_n = \frac{5}{2} (2 + 14) = 40$$

อนุกรมเรขาคณิต

- **อนุกรมเรขาคณิต** (Geometric Progression) อนุกรมที่ได้จากการ
ลำดับเรขาคณิตเรียกว่า อนุกรมเรขาคณิต และอัตราส่วนรวมของ
ลำดับเรขาคณิตจะเป็นอัตราส่วนรวมของอนุกรมเรขาคณิตด้วย

กำหนด $a_1, a_1r, a_1r^2, \dots, a_1r^{n-1}$

เป็นลำดับเรขาคณิต

จะได้ $a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-1}$

เป็นอนุกรมเรขาคณิต

- ซึ่งมี a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนรวมของอนุกรมเรขาคณิต

ตัวอย่างของอนุกรมเรขาคณิต

ตัวอย่างที่ 1 คือ $2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ เป็น อนุกรมเรขาคณิต
 เพราะ $2, 4, 8, 16, \dots$ เป็น ลำดับเรขาคณิต และมี r เท่ากับ 2

ตัวอย่างที่ 2 คือ $81 + 27 + 9 + 3 + \dots$ เป็น อนุกรมเรขาคณิต
 เพราะ $81, 27, 9, 3, \dots$ เป็น ลำดับเรขาคณิต และมี r เท่ากับ 3

ตัวอย่างที่ 3 คือ $3 + 3 + 3 + 3 + \dots$ เป็น อนุกรมเรขาคณิต
 เพราะ $3, 3, 3, 3, \dots$ เป็น ลำดับเรขาคณิต และมี r เท่ากับ 1

สูตรการหาผลบวก อนุกรมเรขาคณิต

- สูตรการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต

คือ

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad \text{โดยที่ } r \neq 1$$

- จงหาผลรวมพจน์ที่ 5 จากลำดับเรขาคณิต 3, 6, 12, 24, 48 ...
- จากโจทย์ มี $r = 2$ และเมื่อแทนค่าลงใน

สูตร $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$S_n = \frac{3(1 - 2^5)}{1 - 2} = 93$$

ความหมายการเวียนเกิด (Recursion)



- การเรียกซ้ำหรือการเรียกตัวเองหรือการเวียนเกิด (Recursion)
- คือ วิธีการที่ฟังก์ชันสามารถ **เรียกใช้ฟังก์ชันตัวเอง** โดยแต่ละครั้งที่ ฟังก์ชันถูกเรียก จะเกิดค่าตัวแปรหรือพารามิเตอร์เปลี่ยนแปลงไป อย่างอัตโนมัติ **แล้วกำหนดการทำงานขั้นสุดท้ายไว้** เมื่อทำงานถึงขั้น สุดท้ายก็จะสิ้นสุดการทำงานและส่งผลลัพธ์กลับไป

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

- **ความสัมพันธ์เวียนเกิด** (Recurrence Relations) สำหรับอันดับ a_0, a_1, \dots, a_n เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของพจน์ a_n กับพจน์ a_0, a_1, \dots, a_{n-1} ที่เกิดก่อน โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับพจน์ a_0, a_1, \dots, a_{n-1} ที่ชัดแจ้ง หรืออาจจะกล่าวได้ คือตัวเลขถัดไปนั้นมีความสัมพันธ์กับตัวเลขก่อนหน้า โดยสามารถนำมาเขียนสมการคณิตศาสตร์ได้

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

- ตัวอย่าง จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของอันดับ 5, 8, 11, 14, 17, ...

$$a_0 = 5$$

$$a_1 = 8 = 5+3 = a_0+3$$

$$a_2 = 11 = 8+3 = a_1+3$$

$$a_3 = 14 = 11+3 = a_2+3$$

$$a_4 = 17 = 14+3 = a_3+3$$

พิจารณาพบว่า พจน์ถัดไปมีค่า
ต่างจากพจน์ก่อนหน้าอยู่ 3

พิจารณาต่อไปจะได้

$$a_n = a_{n-1}+3 ; n \geq 1$$

เป็น ความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$\text{โดยมี } a_0 = 5$$

เป็น เงื่อนไขเริ่มต้น

ตัวอย่าง 1

- จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของอันดับ 1, 2, 4, 7, 11, 16 ...

ลักษณะของความสัมพันธ์เวียนเกิด



1. เป็นฟังก์ชันที่ต้องมีพารามิเตอร์
2. แต่ละครั้งที่เรียกใช้ฟังก์ชันนั้น พารามิเตอร์ของฟังก์ชันต้องค่าเปลี่ยนแปลง
3. ฟังก์ชันการเรียกซ้ำ **ต้องมีกรณีหยุดอย่างน้อย 1 กรณี** หรือ กรณีจำกัด (Stopping Case)
 - โดยเมื่อพารามิเตอร์ของฟังก์ชันมีค่าถึงขอบเขตที่กำหนดให้หยุดนี้ ฟังก์ชันจะสามารถให้คำตอบและจะไม่ต้องเรียกตัวเองซ้ำอีก

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

```
function A()
{
    if()
    {
        function A()
    }
    return or print
}
```

เงื่อนไขในการหยุดอย่างน้อย 1 กรณี (หยุด)

เปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ และเรียก
ฟังก์ชันตัวเอง (เรียกตัวเอง หรือ วนซ้ำ)

ส่งหรือแสดงผลลัพธ์ย้อนกลับไป (คำตอบ)

ข้อดีและข้อเสียการเวียนเกิด

- ข้อดีของวิธีการเวียนเกิด คือ ทำให้สามารถเขียนโปรแกรมได้สั้น และสามารถเขียนฟังก์ชันบางรูปแบบได้ง่าย
- ข้อเสียของวิธีการเวียนเกิด คือ ทำให้ใช้เนื้อที่ในหน่วยความจำมาก และการรันโปรแกรมทำได้ช้า
- การเขียนโปรแกรมเข้าใจยาก อาจเกิดการเรียกซ้ำไม่รู้จบทากรากหนาดเงื่อนไขเพื่อยุติทำงานไม่รัดกุม

แบบฝึกหัด 1

- จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของอันดับ 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...

แบบฝึกหัด 2

- จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของอันดับ 1, 3, 7, 13, 21, 31, ...

แฟกทอรี얼

- **แฟกทอรี얼** ของจำนวนเต็มไม่ติดลบ n คือ ผลคูณของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ n เขียนแทนด้วย $n!$
- คำตอบเกิดจากการคูณของจำนวนเต็มบวกชุดหนึ่ง ซึ่งถ้าคำตอบเกิดจากการคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n เช่น $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ จำนวนเหล่านี้เรายสามารถใช้สัญลักษณ์ แฟกทอรี얼 เขียนแทนได้คือ $5!$

$$N! = N \times (N-1)!$$

$$= N \times (N-1) \times (N-2)!$$

$$= N \times (N-1) \times (N-2) \times (N-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

โดย $0!$ มีค่า เป็น 1

โดย $1!$ มีค่า เป็น 1

แฟกทอรี얼

- จากนิยามสามารถสรุปการหาคำตอบของ $N!$ ได้เป็น 2 กรณี คือ
 - ถ้า N มีค่าเท่ากับ 0 คำตอบที่ได้คือ $N! = 1$
 - ถ้า N มีค่ามากกว่า 0 คำตอบที่ได้คือ $N! = N \times (N-1)!$
- สำหรับ $5!$ การคำนวณหาค่าแฟกทอรี얼

$$\begin{aligned}
 5! &= 5 \times 4! \\
 &= 5 \times 4 \times 3! \\
 &= 5 \times 4 \times 3 \times 2! \\
 &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1! \\
 &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120
 \end{aligned}$$

1	<code>ft = 5 * fact(4);</code>	
2	<code>ft = 5 * 4 * fact(3);</code>	
3	<code>ft = 5 * 4 * 3 * fact(2);</code>	
4	<code>ft = 5 * 4 * 3 * 2 * fact(1);</code>	
5	<code>ft = 5 * 4 * 3 * 2 * 1;</code>	หยุดการทำงาน

แฟกทอเรียล

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \dots \times (n-1) \times n = (n-1)! \times n$$

$$a_n = (n-1)! \times n$$

$$= a_{n-1} \times n$$

- ดังนั้น ความสัมพันธ์เวียนเกิดของ a_n
- คือ $a_n = n a_{n-1}$; $n \geq 1$
- เนื่องไขเริ่มต้น $a_0 = 1$ และ $a_1 = 1$

ฟีโบนัคชี

- **ลำดับฟีโบนัคชี (Fibonacci Sequence)** มีนิยามของความสัมพันธ์ว่า จำนวนถัดไปเท่ากับผลบวกของจำนวนสองจำนวนก่อนหน้า และสองจำนวนแรกคือ 0 และ 1 ตามลำดับ หากเขียนให้อยู่ในรูปของ สัญลักษณ์ ลำดับ F_n ของฟีโบนัคชี
- สามารถเขียนความสัมพันธ์เวียนเกิดได้ดังนี้

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

โดยกำหนดค่าเริ่มแรกให้

$$F_0 = 0 \text{ และ } F_1 = 1$$

ฟีโบนัคชี

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ,... จากตัวเลขอนุกรมดังกล่าว
สามารถแสดงวิธีการหาค่าเทอมต่างๆ ได้ดังนี้

- 1) $F_0 = 0$
- 2) $F_1 = 1$
- 3) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

พจน์ที่ 3 มาจาก พจน์ที่ 1 + พจน์ที่ 2 = 0 + 1 = 1 โดยเริ่มจากพจน์ที่ 3 เป็นต้นไป
พจน์ที่ 4 มาจาก พจน์ที่ 2 + พจน์ที่ 3 = 1 + 1 = 2
พจน์ที่ 5 มาจาก พจน์ที่ 3 + พจน์ที่ 4 = 1 + 2 = 3

ดังนั้น ความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}; n \geq 2$

และเงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$

จากนิยามสามารถสรุปการหาคำตอบออกเป็น 2 ทางคือ

ถ้า n มีค่าเป็น 0 หรือ 1 คำตอบที่ได้คือ $F_n = n$

ถ้า n มีค่ามากกว่า 1 คำตอบที่ได้คือ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

ฟีโบนัคชี

- จงคำนวณหาค่าอนุกรมไฟโบเนซชีที่ 4
- วิธีคิดแบบต้นไม้มีแตกกิ่งก้านสาขา

- วิธีคิดแบบปกติ

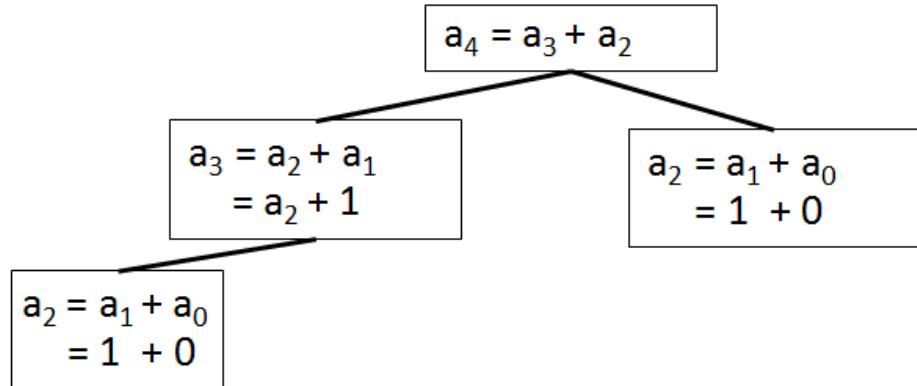
$$F(4) = F(3) + F(2)$$

$$= (F(2) + F(1)) + (F(1) + F(0))$$

$$= ((F(1) + F(0)) + F(1)) + (F(1) + F(0))$$

$$= ((1+0) + 1) + (1 + 0)$$

$$= 3$$



ตัวอย่าง 2

- มีเงินฝาก 1,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี ถ้าฝากแบบดอกเบี้ยทบต้นสิ้นปีที่ n จะมีเงินรวมทั้งหมดเท่าไร

สิ้นปีที่ 1 มีเงิน $1000.00 + (0.12) (1000.00) = 1120.00$

สิ้นปีที่ 2 มีเงิน $1120.00 + (0.12) (1120.00) = 1254.40$

สิ้นปีที่ 3 มีเงิน $1254.40 + (0.12) (1254.40) = 1404.92$

...

สิ้นปีที่ n มีเงิน เงินรวมสิ้นปีที่ $n-1$ + ดอกเบี้ย

ให้ a_n เป็นเงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ n

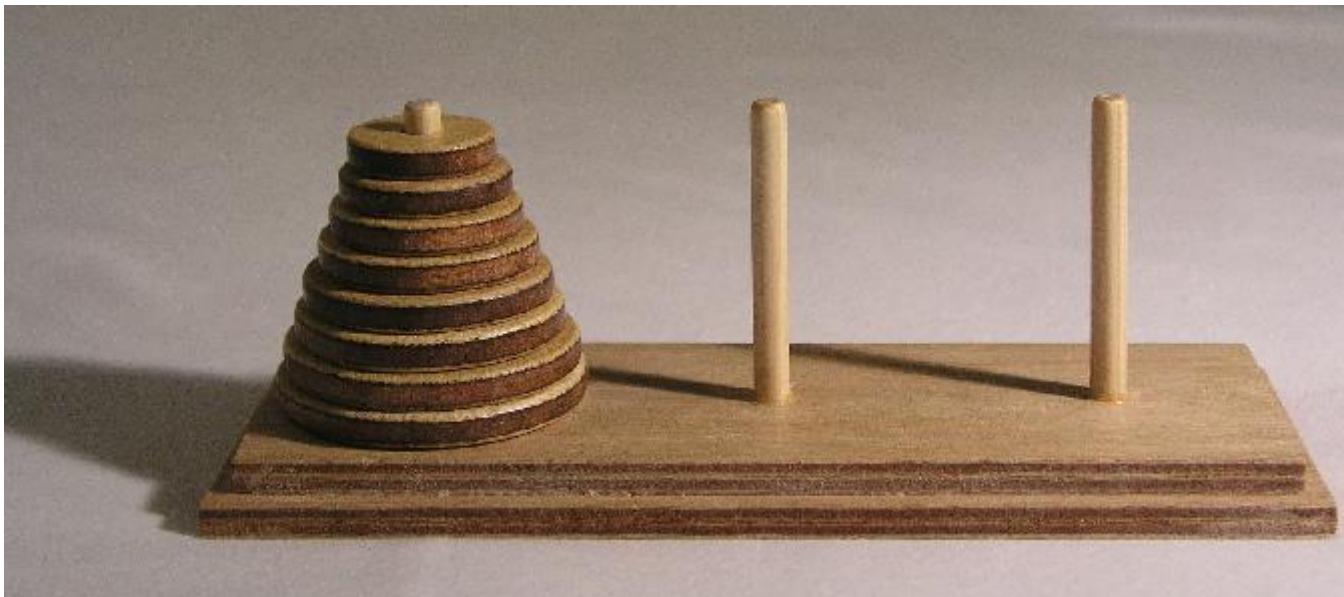
$$a_n = (1) (a_{n-1}) + (0.12) (a_{n-1})$$

$$a_n = (1.12) (a_{n-1})$$

- ดังนั้น ความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ $a_n = (1.12) (a_{n-1}) ; n \geq 1$
และเงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 1000$

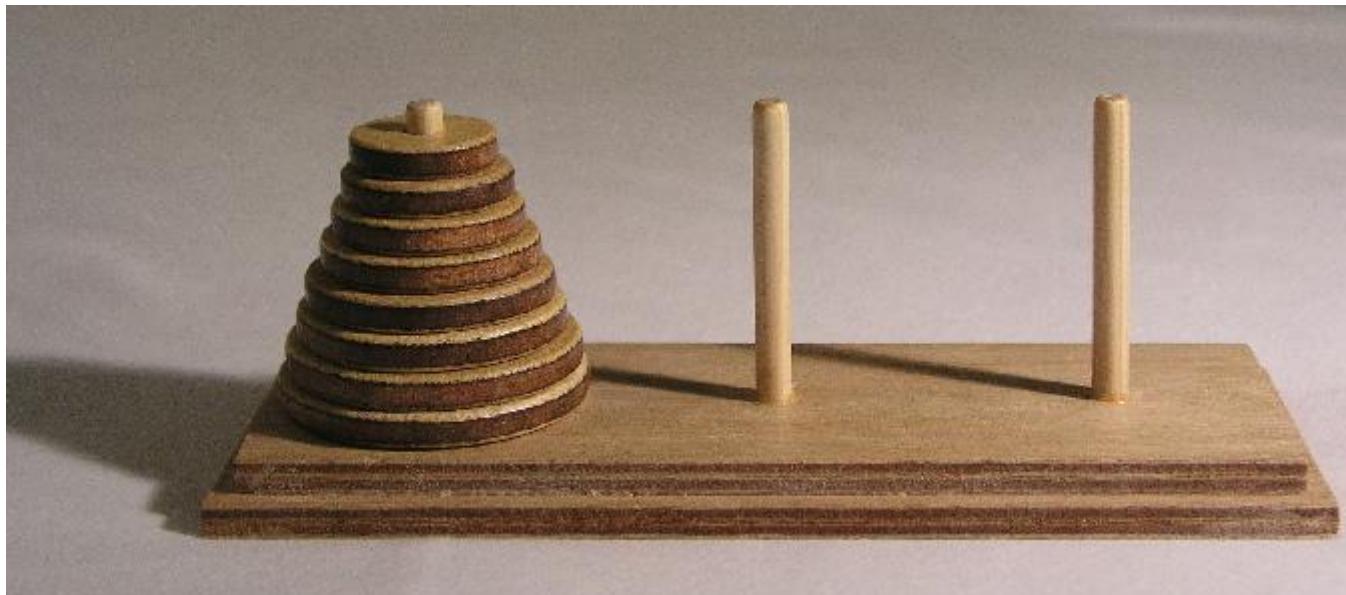
ปริศนาหอคอยฮานอย

- EDOUARD LUCAS คือ นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส เป็นผู้คิดค้น ปริศนาหอคอยฮานอย (The Tower of Hanoi) โดยปริศนาหอคอย ฮานอย นั้นจะมีแผ่นจานไม้ 8 แผ่น รัศมีแตกต่างกัน แต่ละแผ่นมีรูตรัง กลาง นำมาใส่ไว้ในหลักเป็นกองซ้อน โดยให้แผ่นที่เล็กกว่าทับแผ่นที่ใหญ่กว่า และมีหลักเปลล่าสองหลัก ดังรูป



ปริศนาหอคอยนานอย

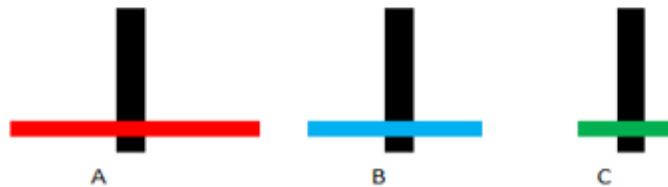
- **ปริศนาหอคอยนานอย** คือ ให้ย้ายแผ่นจานทั้งหมดไปกองไว้ที่หลัก เปลา่หลักหนึ่ง โดยมีเงื่อนไขว่า เคลื่อนย้ายได้คราวละแผ่น และต้อง นำไปไว้ที่หลักใดหลักหนึ่ง และห้ามแผ่นที่มีขนาดใหญ่กว่าวางทับ แผ่นที่มีขนาดเล็กกว่า ต่อไปนี้แสดงขั้นตอนการเคลื่อนย้ายแผ่นจาน จำนวน 3 แผ่นจากแผ่น A ไปแผ่น C



ตัวอย่างการเคลื่อนย้าย



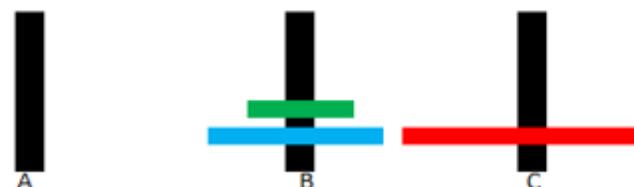
ขั้นตอนที่ 1 เคลื่อนย้ายจากแท่น A ไป C



ขั้นตอนที่ 2 เคลื่อนย้ายจากแท่น A ไป C



ขั้นตอนที่ 3 เคลื่อนย้ายจากแท่น C ไป B



ขั้นตอนที่ 4 เคลื่อนย้ายจากแท่น A ไป C



ขั้นตอนที่ 5 เคลื่อนย้ายจากแท่น B ไป A



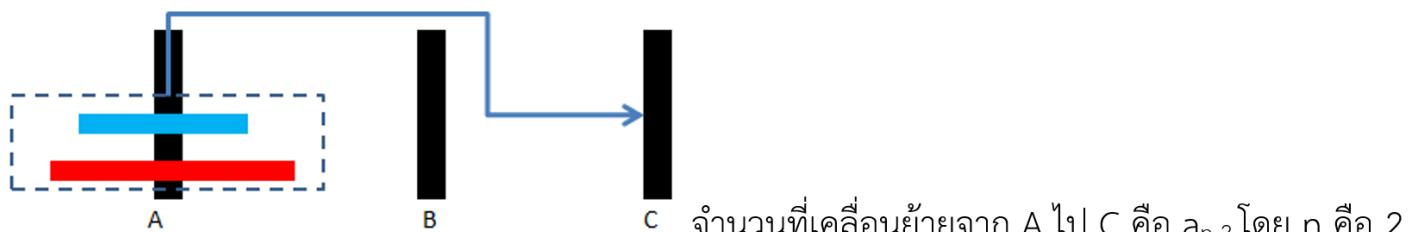
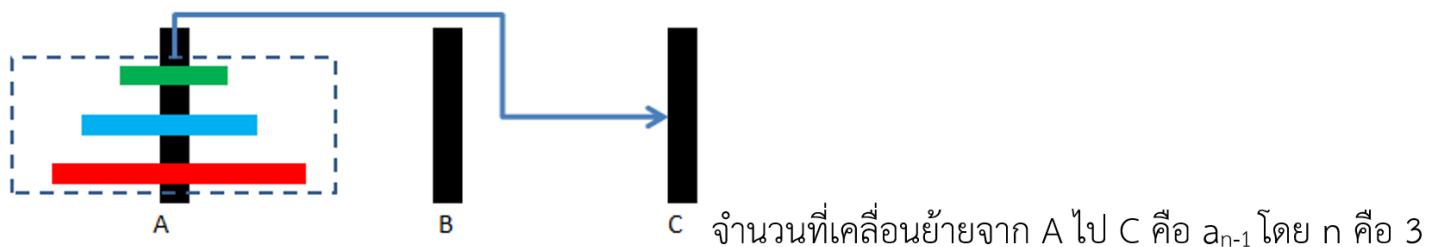
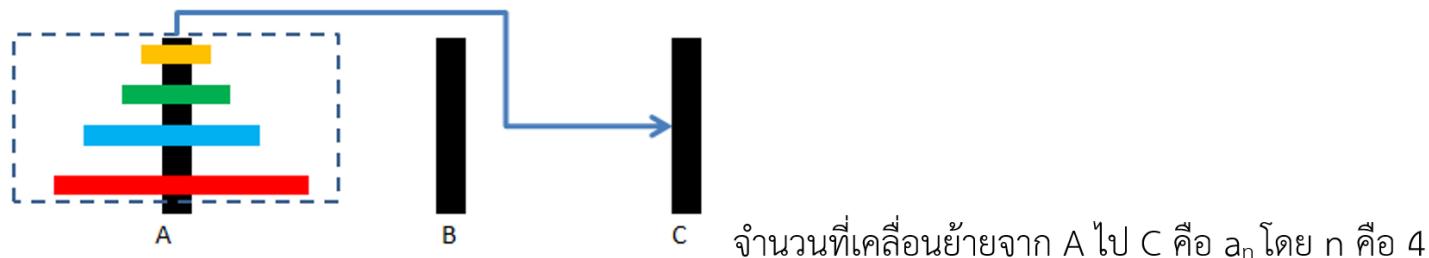
ขั้นตอนที่ 6 เคลื่อนย้ายจากแท่น B ไป C

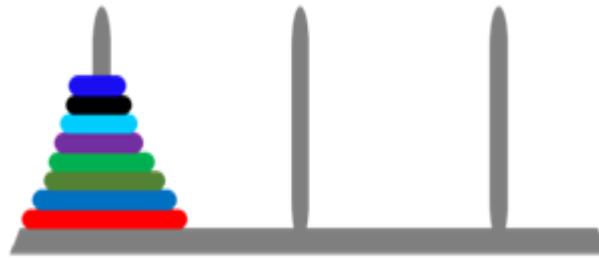


ขั้นตอนที่ 7 เคลื่อนย้ายจากแท่น A ไป C

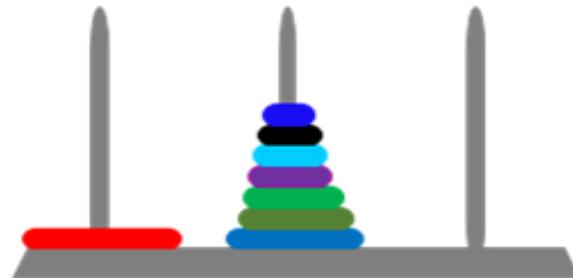
จำนวนการเคลื่อนย้ายแผ่น

- ให้ a_n เป็นจำนวนครั้งน้อยสุดในการเคลื่อนย้ายแผ่นงาน n แผ่นจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักหนึ่ง



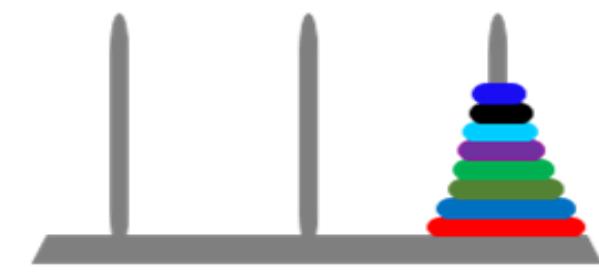


1. ต้องย้ายแผ่นที่เล็กกว่าทั้งหมด $n-1$ แผ่น ไปยังหลักที่ว่างก่อน จำนวนการเคลื่อนย้าย คือ a_{n-1} ครั้ง



2. ย้ายแผ่นใหญ่ที่สุดไปยังหลักเป้าหมาย จำนวนการเคลื่อนย้ายคือ 1 ครั้ง

3. ย้ายแผ่นงานทั้งหมดในข้อ 1. ไปยังหลักเป้าหมาย จำนวนการเคลื่อนย้าย คือ a_{n-1} ครั้ง



$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a_n &= a_{n-1} + 1 + a_{n-1} \\ &= 2a_{n-1} + 1 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = -3a_{n-1}$ และ $a_0=7$

ขั้นตอนที่ 1 จากสูตรการแปลง $a_n = ra_{n-1}$ เป็นรูปแบบนี้ $a_n = Ar^n$

$$a_n = -3a_{n-1}$$

$$a_n = -3a_{n-1}$$

$$a_n = A(-3)^n$$

ขั้นตอนที่ 2 หาค่า A โดยการแก้สมการ

$$n=0; \quad a_0 = (-3)^0 \times A \quad - (1)$$

$$A = 7$$

แก้สมการ (1) จะได้ $A = 7$

ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 7 \times (-3)^n$

ตัวอย่าง 4

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 3a_{n-1} - 5$; $n \geq 1$ และ $a_0 = 6$

ตัวอย่าง 5

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}; n \geq 2$ และเงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$

ตัวอย่าง 6

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$; $n \geq 2$
โดยที่ $a_0 = 1$ และ $a_1 = 3$

ตัวอย่าง 7

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดปริศนาหอค้อย้านอย
- ถ้า $n = 1$ คือมีแผ่นajanเพียง 1 แผ่น จำนวนการเคลื่อนย้ายเป็น 1 ครั้ง และ $n = 0$ ไม่มีแผ่นajan จำนวนการเคลื่อนย้ายเป็น 0 ครั้ง ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดของปริศนาหอค้อย้านอย คือ $a_n = 2a_{n-1} + 1 ; n \geq 2$
- เงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$
- จากปริศนาหอค้อย้านอย ทำแปลงรูปจากสูตรการแปลง $a_n = ra_{n-1} + d$ เป็นรูปแบบนี้ $a_n = Ar^n + B$

ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$a_n = Ax2^n + B \quad \text{เมื่อ } r = 2$$

จะได้

$$a_0 = Ax2^0 + B \quad \text{แล้ว } 0 = A+B$$

แก้สมการ

$$a_1 = Ax2^1 + B \quad \text{แล้ว } 1 = 2A+B$$

ผลเฉลยคือ

$$A = 1, \quad B = -1$$

$$a_n = 2^n - 1 ; n \geq 2$$

ตัวอย่าง 7

- ถ้าจำนวนมีจำนวน 3 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 7
- ถ้าจำนวนมีจำนวน 4 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 15
- ถ้าจำนวนมีจำนวน 5 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 31
- ถ้าจำนวนมีจำนวน 6 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 63
- ถ้าจำนวนมีจำนวน 7 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 127
- ถ้าจำนวนมีจำนวน 8 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 255
- **หมายเหตุ** รูปแบบของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด คือ จะนำพจน์ก่อนหน้ามาคำนวณ ซึ่งถ้าต้องการทราบพจน์ที่ n ต้องทราบพจน์ที่ $n-1$ ก่อน จากตัวอย่างปริศนาหอคอย ษานอย คือ $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ถ้าต้องการทราบพจน์ที่ 8 ต้องหาพจน์ที่ 7 ก่อนแล้ว นำมาเข้าสูตร คือ $a_8 = 2(127) + 1 = 255$ จึงจะสามารถหาพจน์ที่ 8 แต่ถ้ารูปแบบ ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดนั้นไม่มีความจำเป็นต้องรู้ค่าพจน์ก่อนหน้า จาก ตัวอย่างปริศนาหอคอยษานอย คือ $a_n = 2^n - 1$ ถ้าต้องการทราบพจน์ที่ 8 สามารถ แทนค่า n ด้วย 8 เข้าไปได้ ตัวอย่างเช่น $a_8 = 2^8 - 1 = 255$ จึงไม่มีความจำเป็นต้อง หาพจน์ก่อนหน้าจึงสะดวกในการใช้งานมากกว่า

ฟังก์ชัน

บทที่ 4 (ต่อ)

Discrete Mathematics for Computer Science

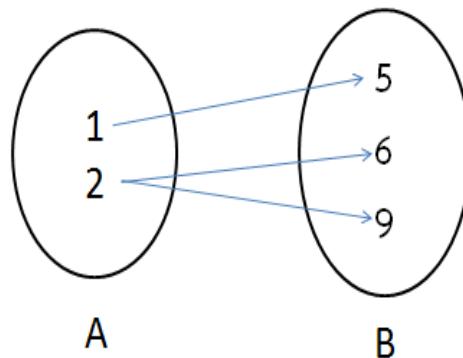
อ.เอัญ สุริยะฉาย (ENS)
ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ฟังก์ชัน

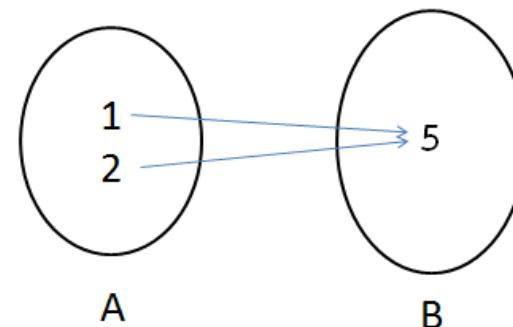
- ในการเขียนโปรแกรม สิ่งสำคัญคือฟังก์ชัน ซึ่งฟังก์ชันนั้น เกิดจากการสร้างของผู้เขียนโปรแกรม โดยจุดประสงค์ของการสร้างฟังก์ชัน เพื่อให้การโปรแกรมนั้นสั้นและสะดวกขึ้น
- แต่ถ้าสิ่งที่สำคัญคือ หลักการสร้างฟังก์ชันนั้นและหลักการใช้งาน ฟังก์ชัน สิ่งเหล่านี้เป็นสิ่งจำเป็นสำหรับผู้เขียนโปรแกรม
- นอกจากนี้ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน ยังสามารถถูกนำไปใช้กับการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของตารางในวิชาฐานข้อมูล ดังนั้นฟังก์ชันเป็นพื้นฐานของการศึกษาในสาขาวิชาด้านคอมพิวเตอร์ต่อไป

ความหมาย

- จากนิยามในทางคณิตศาสตร์ **ฟังก์ชัน** คือ ความสัมพันธ์จากเซตหนึ่งที่เรียกว่า **โดเมน (Domain)** ไปยังอีกเซตหนึ่งที่เรียกว่า **พิสัย (Range)** **โดยที่สมาชิกตัวหน้าไม่ซ้ำกัน** ซึ่งฟังก์ชันนี้เป็นพื้นฐานของทุกสาขาของคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ เชิงปริมาณ หรืออาจจะกล่าวได้ว่าฟังก์ชันคือความสัมพันธ์ที่ไม่มีโดเมนตัวใดจับคู่ กับพิสัยมากกว่า 1 ตัว f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B โดยสรุปคือ ใส่หนึ่งส่งเข้าไป ในฟังก์ชัน และได้ผลลัพธ์ออกมาเป็นหนึ่งสิ่งและเหมือนเดิมทุกครั้ง

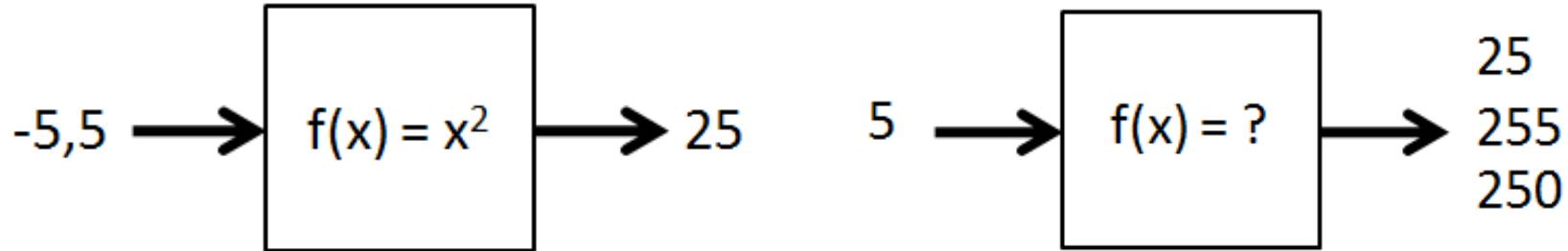


$r1 = \{ (1,5), (2,6), (2,9) \}$ **ไม่เป็นฟังก์ชัน**
เพราะมีโดเมนจับคู่พิสัยมากกว่า 1 ตัว



$r1 = \{ (1,5), (2,6), (2,9) \}$ **เป็นฟังก์ชัน**
เพราะมีโดเมนจับคู่พิสัยมากกว่า 1 ตัว

ความหมาย



จากรูปนี้ ถ้าเป็นสมการคณิตศาสตร์สามารถเกิดขึ้นได้
ใส่เลข 5 เข้าไปแล้วคำตอบที่ได้กลับมาเหมือนเดิมทุกครั้ง ใน
กรณีถ้าหากใส่เลข 5 เข้าไปคำตอบที่ได้จะเป็น 25 เสมอ หรือ
จะใส่ -5 เข้าไปคำตอบที่ได้จะเป็น 25 เสมอ

จากรูปนี้ไม่สามารถเกิดขึ้นกับสมการคณิตศาสตร์ คือ^ๆ
ใส่เลข 5 เข้าไปแล้วคำตอบที่ได้กลับมามากกว่าเดิม เช่น
ใส่แต่ละครั้งได้คำตอบออกมาไม่เหมือนกัน ตัวอย่างเช่น
ใส่ 5 เข้าไปแล้วคำตอบที่ได้ครั้งแรกเป็น 25 ครั้งที่สอง
เป็น 255 ครั้งที่สามเป็น 250 แบบนี้ไม่เป็นฟังก์ชัน

f เป็นฟังก์ชัน และ $(x, y) \in f$ จะเรียก y เป็นตัวแปรตามที่ขึ้นอยู่กับค่า^ๆ
ของ x กล่าวคือ y เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ x เขียนแทนด้วย $f(x)$ โดยที่ $(1, 2) \in f$ ก็ต่อเมื่อ $f(1) = 2$ การกำหนดฟังก์ชันสามารถเขียนในรูป $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ หรือ $f(\mathbf{x}) = \text{นิพจน์ใดๆ}$

พิสูจน์การเป็นฟังก์ชัน

หลักการพิสูจน์เราจะใช้นิยามของฟังก์ชัน “โดเมน (Domain) ไปยังอีกเซตหนึ่งที่เรียกว่า พิสัย (Range) โดยที่สมาชิกตัวหน้าไม่ซ้ำกัน”

- ตัวอย่าง 1 จงพิสูจน์ว่า $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 1 \}$ เป็นฟังก์ชัน

สมมติ $(x, y_1) \in f$ และ $(x, y_2) \in f$

$$y_1 = x^2 + 1 \text{ และ } y_2 = x^2 + 1$$

$$x^2 + 1 = x^2 + 1$$

$x = x$ เมื่อแก้สมการแล้ว x เท่ากับ x แสดงว่า x ค่า 1 จะได้ y ออกมา 1 ค่า

$$y_1 = y_2$$

เพรากะนั้น f เป็นฟังก์ชัน

พิสูจน์การเป็นฟังก์ชัน

- ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่า $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

สมมติ $(x, y_1) \in f$ และ $(x, y_2) \in f$

$$x^2 + y_1^2 = 1 \text{ และ } x^2 + y_2^2 = 1$$

$x^2 + y_1^2 = x^2 + y_2^2$ เมื่อแก้สมการแล้ว x สามารถตัดกับ x แต่ y ไม่สามารถตัดกันได้

$y_1^2 = y_2^2$ ในกรณีนี้ y_1 สามารถเท่ากับ y_2 หรือ $-y_2$ ดังนั้น มีโอกาสที่ $y_1 \neq y_2$

$y_1 = \pm y_2$ คือ $x = 0$ แต่ y จะจะได้ค่าตอบเป็น -1 หรือ 1 ก็ได้ ซึ่ง x มี 1 ค่าสามารถ

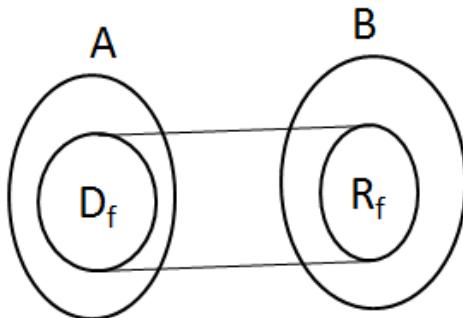
$y_1 \neq y_2$ ทำให้เกิด y ได้หลายค่า จึงไม่เป็นฟังก์ชัน

เพราะฉะนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชัน

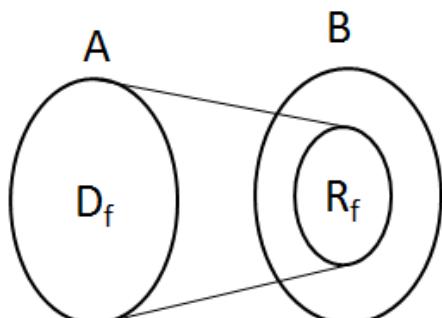
ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

■ ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไป

A และ B เป็นเซต f เป็นฟังก์ชันที่ $D_f = A$ และ $R_f \subset B$ โดย f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไปนี้ โดเมน D_f ต้องใช้หมด แต่พิสัย R_f ไม่ต้องใช้หมด เขียนแทนด้วย $f: A \rightarrow B$



ไม่ใช่ $f: A \rightarrow B$
 เพราะ โดเมนของฟังก์ชันใช้ไม่หมด ดังนั้น
 จึง **ไม่เป็น** ความสัมพันธ์ของ **ฟังก์ชันไป**



เป็น $f: A \rightarrow B$
 เพราะ โดเมนของฟังก์ชันใช้หมด ดังนั้น
 จึงเป็นความสัมพันธ์ของ **ฟังก์ชันไป**

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

- ตัวอย่าง $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{a, b, c\}$ จงพิจารณา f_1 และ f_2 เป็นความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไป

$$f_1 = \{(1,a), (2,a), (3,b)\}$$

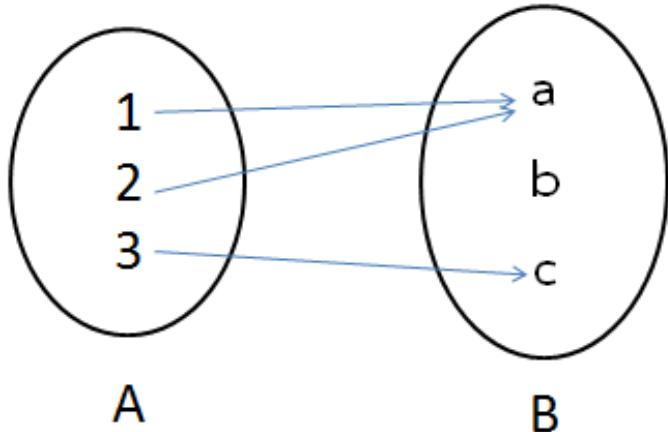
เป็น $f_1 : A \rightarrow B$

A ใช้หมด f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

$$f_2 = \{(1,a), (3,b)\}$$

ไม่ใช่ $f_2 : A \rightarrow B$

A ใช้ไม่หมด f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

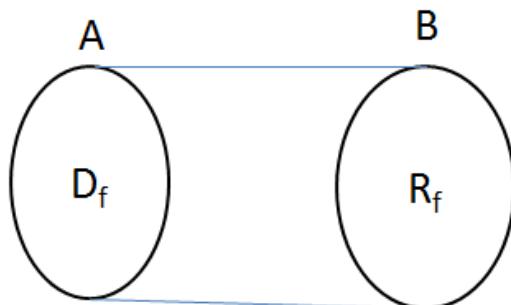


จากรูป
 f_1 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B (A into B)
 เพราะ A ใช้หมด แต่ B ใช้ไม่หมด

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

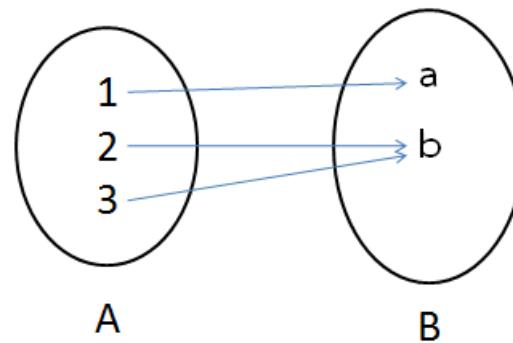
- ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไปทั่วถึง

A และ B เป็นเซตที่ $f : A \rightarrow B$ ถ้า $R_f = B$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ทั่วถึง B ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไปทั่วถึงนี้น์ โดยmen D_f ต้องใช้หมด และพิสัย R_f ต้องใช้หมดทั้งสองตัวเช่นกัน เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{\text{onto}} B$



$$f: A \xrightarrow{\text{onto}} B$$

เพราะ โดยmen ของฟังก์ชันใช้หมด และ พิสัยของฟังก์ชันใช้หมด ดังนั้นจึงเป็น ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไปทั่วถึง



$$f: A \xrightarrow{\text{onto}} B$$

จากรูปเป็นฟังก์ชัน A ไปทั่วถึง B (A onto B) เพราะ A ใช้หมดและ B ใช้หมด

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

- ตัวอย่าง $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{a, b, c\}$ จะพิจารณา f_3 และ f_4 เป็นความสัมพันธ์ของฟังก์ชันไปทั่วถึง

$f_3 = \{(1,b), (2,c), (3,a)\}$ เป็น $f_3 : A \xrightarrow{\text{onto}} B$ A และ B ใช้หมด f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

$f_4 = \{(1,a), (2,a), (3,c)\}$ ไม่ใช่ $f_4 : A \xrightarrow{\text{onto}} B$ A ใช้ไม่หมด f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

การพิสูจน์ฟังก์ชันไปทั่วถึง

- จัด X เทอมใน Y
- พิจารณา Y ทำให้ X อยู่ในเงื่อนไข

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดย $f(x) = 3x+4$ เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึง กำหนดให้ $y \in \mathbb{R}$ โดย $y = f(x)$

วิธีทำ

$$y = 3x + 4$$

$$x = (y-4)/3$$

ถ้าสุ่มมาแล้วทำให้ x ไม่อยู่ใน \mathbb{R} ได้

$$x \in \mathbb{R}$$

ในกรณีนี้คือ ไม่ว่าจะสุ่มเลขอะไรมา x อยู่ใน \mathbb{R} เสมอ ไม่สามารถทำให้เกิด y เป็นจำนวนจริง哪怕

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึง

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่า $f : I^+ \rightarrow I^+$ โดย $f(x) = 3x+4$ ไม่เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึง กำหนดให้ $y \in I^+$ โดย $y = f(x)$

วิธีทำ

$$y = 3x+4$$

$$x = (y-4)/3$$

ถ้าสุ่มมาแล้วทำให้ x ไม่อยู่ใน I^+ ได้ คือ x ใน I^+ ไม่สามารถทำให้เกิด y ตัวนั้นได้ เมื่อแทน 3 เข้าไปใน y ทำให้ $x = -1/3$ ไม่เป็น I^+

$$x \notin I^+$$

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึง

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึง

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ว่า $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดย $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึงหรือไม่
กำหนดให้ $y \in \mathbb{R}$ ที่ $y = f(x)$

วิธีทำ

$$y = x^2$$

$$x = \sqrt{y}$$

ถ้าสุ่มมาแล้วทำให้ x ไม่อยู่ใน \mathbb{R} ได้ คือ x ใน \mathbb{R} ไม่สามารถทำให้เกิด y ตัวนั้นได้ เมื่อแทน -1 เข้าไปใน y ทำให้ $x = \sqrt{-1}$ ไม่เป็นจำนวนจริง ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึง

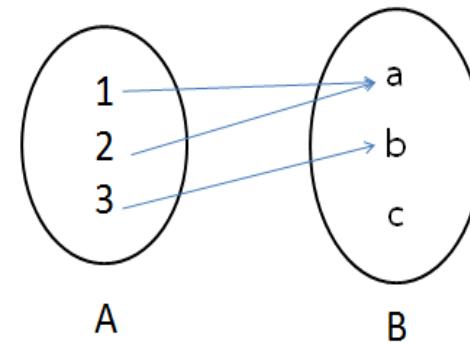
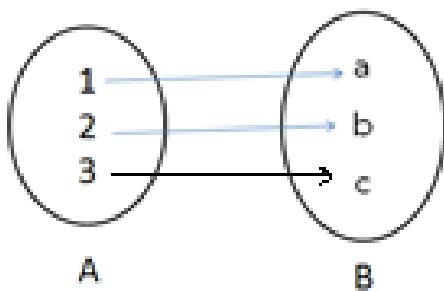
$$x \notin \mathbb{R}$$

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันไปทั่วถึง

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

■ ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จากฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ $(x_1, y) \in f$ และ $(x_2, y) \in f$ และ $x_1 = x_2$ ทำให้ $f(x_1) = f(x_2)$ เท่านั้น
เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{1-1} B$



$f: A \xrightarrow{1-1} B$
A และ B เป็นฟังก์ชัน 1-1 เพราะ
พิสัย 1 ตัวต่อ โดเมน 1 ตัวเท่านั้น

$f: A \xrightarrow{1-1} B$
A และ B **ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1** เพราะ
พิสัย 1 ตัว หรือตัวอักษร a ต่อโดเมน
2 ตัวคือ 1 กับ 2

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

- การพิสูจน์การเป็นฟังก์ชัน 1 – 1
 - ใช้定义ของการเป็นฟังก์ชัน 1-1
 - เขียนหัวเขียนท้าย
 - ลอกโจทย์
 - **จับค่า X ให้เท่ากัน**

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า $f(x) = 2x+1$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

วิธีทำ

สมมติ $f(x_1) = f(x_2)$ สมมุติว่า y เท่ากัน แต่ไม่รู้ว่า x เท่ากันไหม

$$2x_1+1 = 2x_2+1 \text{ แต่สุดท้ายตัดสมการออกมาต้องได้เท่ากัน}$$

$$2x_1 = 2x_2$$

$x_1 = x_2$ แก้สมการ แล้วได้ $x_1 = x_2$ เท่านั้น ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่า $f(x) = x^2$ ไม่เป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

วิธีทำ

สมมติ	$f(x_1) = f(x_2)$	สมมุติว่า y เท่ากัน แต่ไม่รู้ว่า x เท่ากันใหม่
	$(x_1)^2 = (x_2)^2$	แต่สุดท้ายตัดสมการออกมาต้องได้เท่ากัน
	$x_1 = \pm x_2$	แก้สมการได้ $x_1 \neq x_2$ เท่านั้น ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตรวจค่าตอบ $x_1 \neq x_2$ โดยการสมมุติตัวเลขให้ $x_1 = 2$ และ $x_2 = -2$

$$f(x_1) = f(2) = 4$$

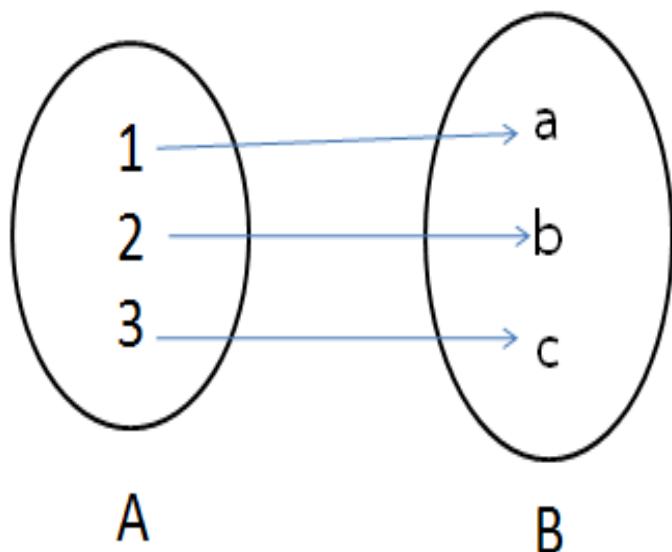
$$f(x_2) = f(-2) = 4$$

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ แต่ } x_1 \neq x_2$$

ความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน

- ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทวีถึง

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทวีถึง คือฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และฟังก์ชันทวีถึงด้วย คือ **โดเมนหนึ่งตัวต่อพิสัยหนึ่งตัว** และ **ทั้งโดเมนและพิสัยต้องใช้หมุด เขียนแทนด้วย $f: A \xrightarrow{1-1 \text{ onto}} B$**



จากรูปเป็น $f: A \rightarrow B$

เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทวีถึง เพราะ A ใช้หมุดและ B ใช้หมุด และโดเมนหนึ่งตัวต่อพิสัยหนึ่งตัว

แบบฝึกหัด

1) จากข้อความข้างล่างนี้ให้ทำเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่ถูก และทำเครื่องหมาย ✗ หน้าข้อความที่ผิด

1.1) ถ้า $f(x+3) = 2x - 1$ และ $f(x) = 2x-5$

1.2) ถ้า $f(1-3x) = 5x^3$ และ $f(4)$ คือ 5

1.3) ถ้า $f(x) = x^2+x+1$ และ $f(x) = g(x-1)$ ดังนั้น $g(x) = x^2+3x+3$

1.4) ถ้า $f(x+2) = x^2-x-3$ และ $f(-x+1)$ คือ x^2+3x-1

1.5) ถ้า $g(x^2+4)=|x|-1$ และ $g(x) = \sqrt{x-4} - 1$

1.6) ถ้า $f(x+1) = x^2+7x+4$ และ $f(x) = x^2+x-8$

แบบฝึกหัด 1.1

- **1.1)** ถ้า $f(x+3) = 2x - 1$ และ $f(x) = 2x-5$

แบบฝึกหัด 1.2

- 1.2) ถ้า $f(1-3x) = 5x^3$ และ $f(4)$ คือ 5

แบบฝึกหัด 1.3

- 1.3) ถ้า $f(x) = x^2+x+1$ และ $f(x) = g(x-1)$ ดังนั้น $g(x) = x^2+3x+3$

แบบฝึกหัด 1.4

- 1.4) ถ้า $f(x+2) = x^2-x-3$ และ $f(-x+1)$ คือ x^2+3x-1

แบบฝึกหัด 2.1

2) กำหนด $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

2.1) $f(x) = 6x - 9$

แบบฝึกหัด 2.2

2) กำหนด $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

$$2.2) f(x) = 3x^2 - 3x + 1$$

แบบฝึกหัด 2.3

2) กำหนด $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

2.3) $f(x) = \sin x$

แบบฝึกหัด 3.1

3) จงพิสูจน์ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง หรือไม่

$$3.1) \ f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I} \text{ ที่ } f(n) = \begin{cases} n^2; n \geq 0 \\ -n^2; n < 0 \end{cases}$$

แบบฝึกหัด 3.2

3) จงพิสูจน์ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง หรือไม่

$$3.2) f : I \rightarrow I \text{ ที่ } f(n) = \begin{cases} n + 1; & n \text{ เป็นเลขคี่} \\ n^3; & n \text{ เป็นเลขคู่} \end{cases}$$

แบบฝึกหัด 3.3

3) จงพิสูจน์ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง หรือไม่

$$3.3) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ที่ } f(x) = \frac{x+1}{x}; x \neq 0$$

ฟังก์ชันผกผัน

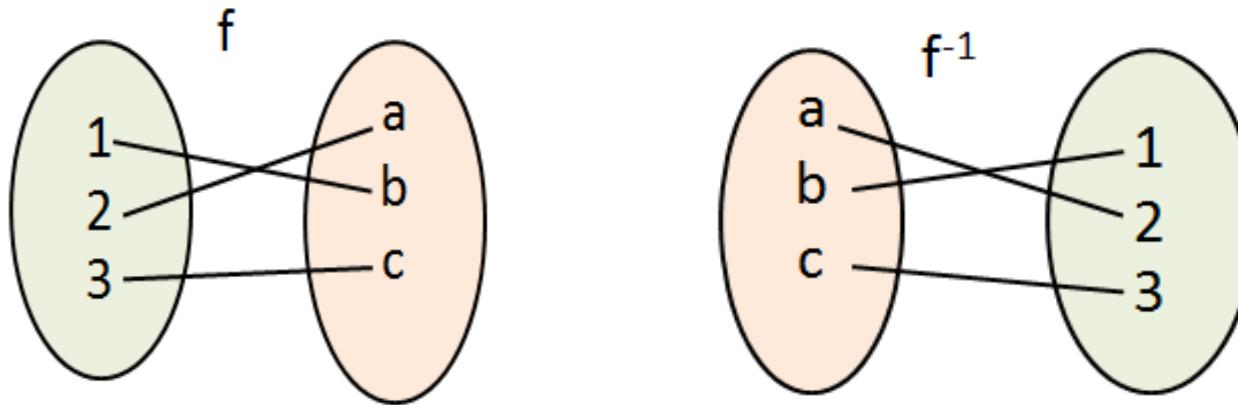
นิยาม

“ กำหนด $f : A \rightarrow B$ ถ้า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน จะเรียก f^{-1} ว่า **ฟังก์ชันผกผัน** ของ f และ $f^{-1} : B \rightarrow A$ ”

- ตัวผกผันของความสัมพันธ์ คือ การสลับตำแหน่งสมาชิกตัวหน้าและตัวหลังของความสัมพันธ์ ซึ่งตัวผกผันของฟังก์ชัน ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันเสมอไป หรืออาจจะกล่าวได้ว่าถ้าสลับสมาชิกตัวหน้าและตัวหลังของความสัมพันธ์ แล้วผลลัพธ์ที่ได้ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชัน
- แต่ถ้าตัวผกผันของฟังก์ชันเป็นฟังก์ชัน จะเรียกตัวผกผันของความสัมพันธ์นั้นว่า **ฟังก์ชันผกผัน (Inverse Function)** ซึ่งฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันผกผันได้นั้น ตัวฟังก์ชันต้องมีความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่งเท่านั้น

ฟังก์ชันผกผัน

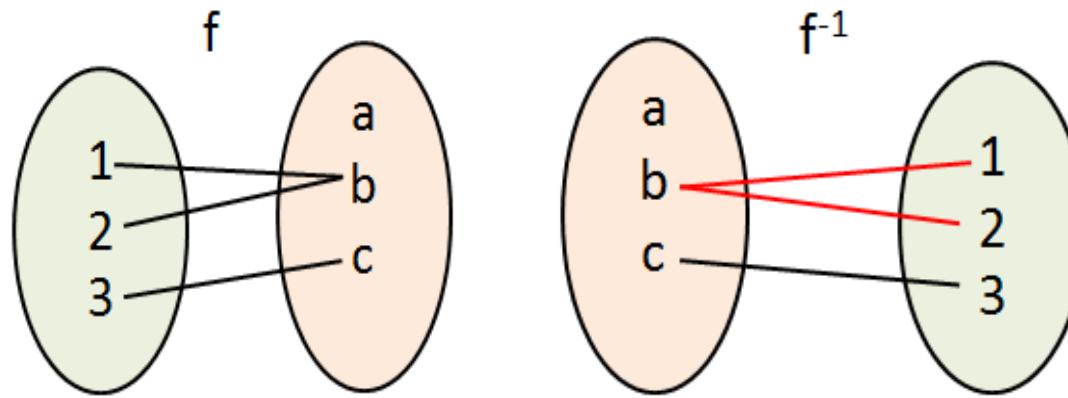
ตัวอย่าง กำหนดให้เซต $A = \{1, 2, 3\}$ และ เซต $B = \{a, b, c\}$



จากรูปข้างบน ฟังก์ชัน f มีสมาชิกดังนี้ $f = \{(1, b), (2, a), (3, c)\}$ ซึ่งเป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จึงสามารถทำฟังก์ชันผกผันได้ โดยฟังก์ชันผกผัน f^{-1} มี สมาชิกดังนี้ $f^{-1} = \{(a, 2), (b, 1), (c, 3)\}$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ f เพราะ ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ฟังก์ชันผกผัน

ตัวอย่าง กำหนดให้เซต $A = \{1, 2, 3\}$ และ เซต $B = \{a, b, c\}$

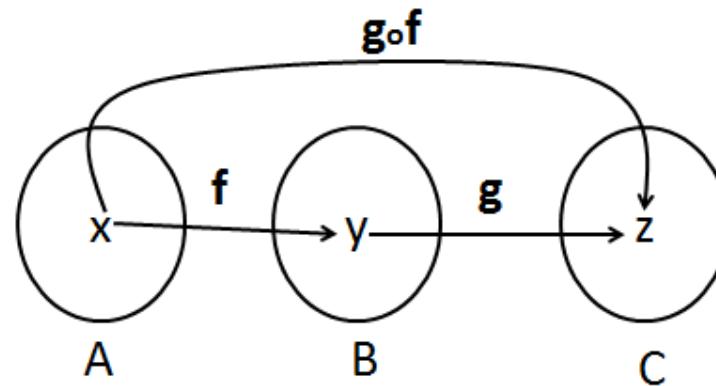


จากรูปข้างบน ฟังก์ชัน f มีสมาชิกดังนี้ $f = \{(1,b), (2,b), (3,c)\}$ ไม่สามารถเป็นฟังก์ชันผกผัน เพราะ ฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง กรณีนี้ฟังก์ชันผกผัน f^{-1} มีสมาชิกดังนี้ $f^{-1} = \{(b,1), (b,2), (c,3)\}$ ซึ่งไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะโดยเมื่อนหนึ่งตัวสามารถเกิดพิสัยได้มากกว่าหนึ่งตัว สำหรับ f ในกรณีนี้ไม่มีฟังก์ชันผกผัน ดังนั้น $f : A \rightarrow B$ โดย f มีฟังก์ชันผกผัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ฟังก์ชันประกอบ

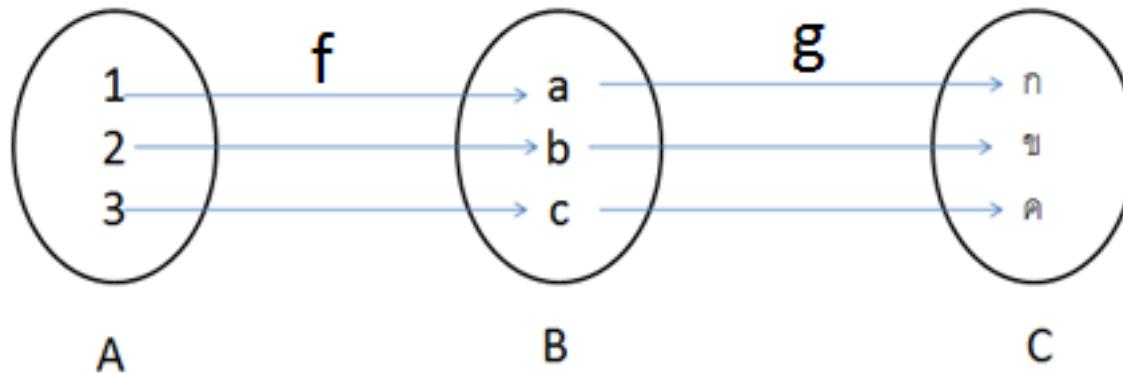
ฟังก์ชันประกอบ (Composite Function) ฟังก์ชันใหม่ที่สร้างขึ้นจาก 2 ฟังก์ชันเดิมคือ f และ g เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $gof(x)$ และ $g(f(x))$ โดย $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย gof เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C กำหนดโดย $gof(x)$ หรือ $g(f(x))$ สำหรับ $x \in A$

นิยาม ถ้า $f: A \xrightarrow{1-1} B$ และ $g: B \xrightarrow{1-1} C$ และ $gof: A \xrightarrow{1-1} C$



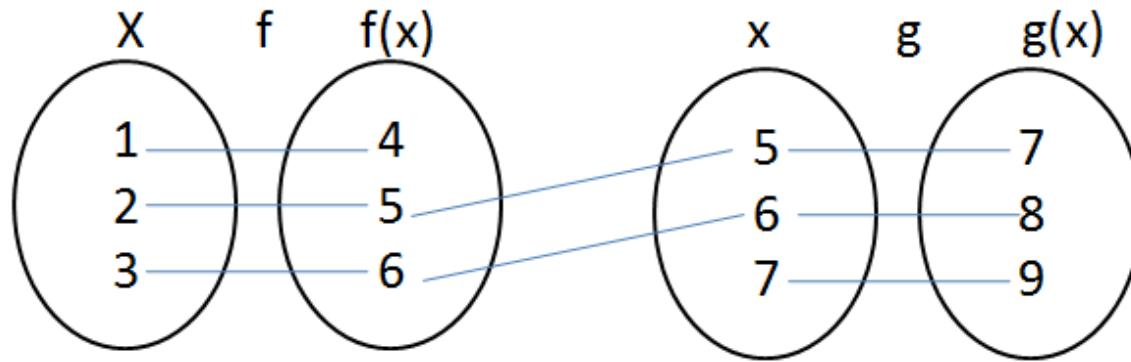
จากรูปข้างบน $gof = \{ (x, z) \mid \text{มี } y \in B \text{ ที่ } (x, y) \in f \text{ และ } (y, z) \in g \}$

ฟังก์ชันประกอบ



- จากรูปข้างบนเซต $A = \{1, 2, 3\}$ และเซต $B = \{a, b, c\}$ และเซต $C = \{\text{ก}, \text{ข}, \text{ค}\}$
- ฟังก์ชัน f มีสมาชิกดังนี้ $f = \{(1,a), (2,b), (3,c)\}$ และฟังก์ชัน g มีสมาชิกดังนี้ $g = \{(a,\text{ก}), (b,\text{ข}), (c,\text{ค})\}$
- สำหรับฟังก์ชันประกอบ gof มีสมาชิกดังนี้ $gof = \{(1,\text{ก}), (2,\text{ข}), (3,\text{ค})\}$
- สำหรับฟังก์ชันประกอบ逆 gof^{-1} มีสมาชิกดังนี้ $gof^{-1} = \{(\text{ก},1), (\text{ข},2), (\text{ค},3)\}$
- ดังนั้นสามารถสรุปนิยามอุปกรณ์ได้ดังนี้ โดยmenของฟังก์ชันประกอบเป็นสับเซตของ โดยmenของฟังก์ชัน f ($D_{gof} \subset D_f$) และพิสัยของฟังก์ชันประกอบเป็นสับเซตของพิสัย ของฟังก์ชัน g ($R_{gof} \subset R_g$)

ฟังก์ชันประกอบ



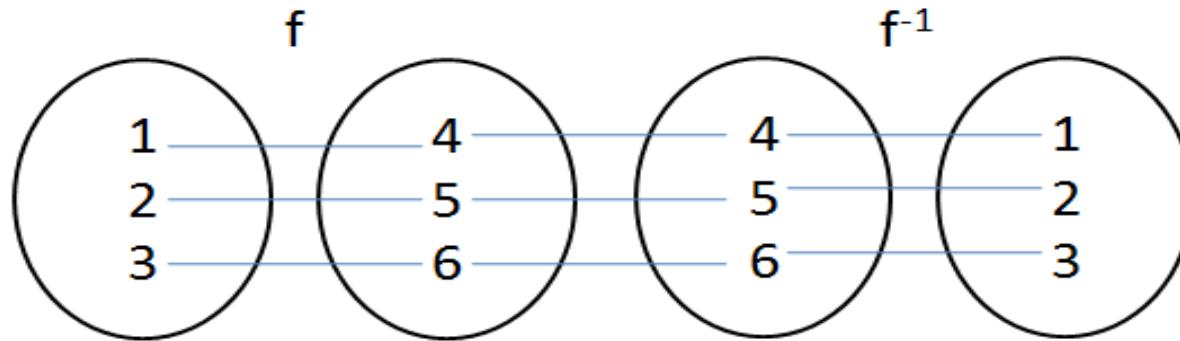
จากรูปข้างบน

$$f = \{ (1,4), (2,5), (3,6) \}$$

$$g = \{ (5,7), (6,8), (7,9) \}$$

สำหรับฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$ มีสมาชิกดังนี้ $g \circ f = \{ (2,7), (3,8) \}$ โดย $g \circ f$ จะมีจุดที่เชื่อมกัน ระหว่างพิสัยของ f ที่ซ้ำกับโดเมนของ g นั้นหมายเลข 5, 6 ที่เป็นจุดเชื่อม โดย $g \circ f$ จะนำโดเมนของ f และ พิสัยของ g มาเป็นสมาชิกของฟังก์ชัน $g \circ f$ และเลือกเฉพาะสมาชิกที่สามารถเชื่อมกันได้เท่านั้น

ฟังก์ชันประกอบ



จากรูปข้างบน ฟังก์ชัน $f \circ f^{-1}$ มีสมาชิกดังนี้ $f \circ f^{-1} = \{ (1,1), (2,2), (3,3) \}$

$$f \circ f^{-1} (1) = 1$$

$$f \circ f^{-1} (2) = 2$$

$$f \circ f^{-1} (3) = 3$$

จากตัวอย่างนี้ ถ้าฟังก์ชันประกอบเป็นฟังก์ชันพกผนของตัวเอง เช่น $f \circ f^{-1} (x) = x$ และ โดยมีกับพิสัยจะมีค่าเดียวกัน

ฟังก์ชันประกอบ

หมายเหตุ การประยุกต์ใช้ฟังก์ชันประกอบ $g(x) = x^2$ และ $f(x) = x + 2$

สำหรับฟังก์ชัน $g(f(x))$ สามารถคิดได้ 2 แบบ แบบแรกคือการนำผลลัพธ์ของอีกฟังก์ชันเป็นโดเมนของอีกฟังก์ชันแบบที่สองคือการนำฟังก์ชันทั้งสองมาบูร่วมกันเป็นฟังก์ชันเดียวแล้วนำโดเมนใส่เข้าไปแล้วให้ผลลัพธ์ออกมาก

แบบแรก เมื่อใส่ค่า x เข้าไปในฟังก์ชัน $g(f(x))$ เช่น $x = 1$ คำตอบที่ได้คือ $f(x) = 1 + 2 = 3$ และ 3 จะเป็นค่าที่ใส่เข้าไปในฟังก์ชัน $g(x)$ อีกที คือ $g(x) = (3)^2 = 9$ ผลลัพธ์ที่ได้คือ 9

แบบสอง สำหรับฟังก์ชัน $g(f(x))$ คือ $(x + 2)^2$ ใส่ค่า 1 เข้าไปได้ผลลัพธ์คือ $(1 + 2)^2 = 9$ ซึ่งมีค่าเท่ากัน

จะเห็นว่าฟังก์ชันประกอบ คือการนำผลลัพธ์ของอีกฟังก์ชัน เป็นโดเมนของอีกฟังก์ชัน แล้วนำคำตอบท้ายเป็นคำตอบของฟังก์ชันประกอบ หรือการนำฟังก์ชันมาร่วมกันเป็นฟังก์ชันใหม่

การคำนวณฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันผกผัน



- ตัวอย่างที่ 1 $fog(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ โดย $f(x) = x^3 + 1$
จงหา $g(x)$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$$

การคำนวณฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันผกผัน



- ตัวอย่างที่ 1 $fog(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ โดย $f(x) = x^3 + 1$
จงหา $g(x)$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$$

$$f^{-1} f(g(x)) = f^{-1} (x^3 + 3x^2 + 3x + 2)$$

$$f^{-1} (f(g(x))) = \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) - 1}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) - 1}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{(x + 1)^3}$$

$$g(x) = x + 1$$

การคำนวณฟังก์ชันประกอบและฟังก์ชันผกผัน



- ตัวอย่างที่ 2 $fog(x) = 3x-14$ และ $f(x) = 3x-8$ จงหา $g(x)$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+8}{3}$$

$$f^{-1} f(g(x)) = f^{-1} (3x-14)$$

$$f^{-1} (f(g(x))) = \frac{3x-14 + 8}{3}$$

$$g(x) = x-2$$

แบบฝึกหัด 1

1) ถ้า $f(x-1) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$ และ $f^{-1}(5) - f^{-1}(-2)$ มีค่าเท่าใด

แบบฝึกหัด 2

2) ถ้า $f(x) = x - 1$ และ $(gof^{-1})(x) = 4x^2 - 1$ ถ้า $g(x) = 0$ แล้ว x มีค่าเท่าใด

ແບບືກ້າດ 3

3) $fog(x+2) = 3x+6$ ຈະຫາຄ່າ $fog(2)$

แบบฝึกหัด 4

4) $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$ และ $fog(x+2) = 3x+6$ แล้ว $g(2)$

แบบฝึกหัด

6) กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันจาก I^+ ไป I^+ จงหา $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$, $g \circ f$
จาก $f(n) = 2n+1$, $g(n) = 3n-1$

7) กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันจาก I^+ ไป I^+ จงหา $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$, $g \circ f$
จาก $f(n) = n^2$, $g(n) = 2^n$

Note

ตรรกศาสตร์

บทที่ 5

Discrete Mathematics for Computer Science

อ.เอัญ สุริยะฉาย (ENS)

ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ตรรกศาสตร์

การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ สิ่งที่สำคัญคือผู้เขียนโปรแกรมต้องมีความคิดเชิงลօจิคหรือตรรกศาสตร์ เช่น ต้องการสร้างโปรแกรมคำนวณเกรดของนักศึกษา โดยถ้าใส่คะแนนมากกว่า 80 ให้แสดงผลลัพธ์เป็นเกรด A ถ้าใส่คะแนนมากกว่า 70 ให้แสดงผลลัพธ์เป็นเกรด B เป็นต้น โดยตรรกศาสตร์จะเป็นการฝึกให้ผู้เรียนคิดอย่างมีเหตุผลให้เป็นที่ยอมรับกับการแก้ปัญหาทางคอมพิวเตอร์ เพื่อให้ผู้เขียนโปรแกรมสามารถเข้าใจหลักการคิดของคอมพิวเตอร์มากขึ้น และสามารถส่งการให้คอมพิวเตอร์ทำงานได้ตามที่ผู้เขียนโปรแกรมต้องการ ดังนั้น ตรรกศาสตร์ จึงเป็นวิชาที่สำคัญมาก เป็นพื้นฐานของการศึกษาในสาขาด้านคอมพิวเตอร์ต่อไป

ความหมายตรรกศาสตร์และประพจน์



▪ ตรรกศาสตร์ (logic)

- เป็นการศึกษาเชิงปรัชญาว่าด้วย **การให้เหตุผล** หรือ **การตรวจสอบข้อโต้แย้งที่สมเหตุสมผล** โดยมักจะเป็นส่วนสำคัญของวิชาปรัชญา คณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ รวมถึงภาษาศาสตร์ ตรรกศาสตร์เป็นการศึกษาที่มีมานานโดยมนุษยชาติที่เจริญแล้ว เช่น กรีก จีน หรืออินเดีย และถูกยกขึ้นเป็นสาขาวิชานึงโดย อริสโตรเติล

ความหมายตรรกศาสตร์และประพจน์



▪ ประพจน์ (proposition)

- คือ ประโยคที่มีค่าความจริงเป็น จริง (True หรือสัญลักษณ์ตัว T) หรือ เห็จ (False หรือสัญลักษณ์ตัว F) อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น โดยประโยคเหล่านี้จะอยู่ในรูป **ประโยคบอกเล่า**
- ส่วนข้อความรูปแบบ **คำสั่ง คำขอร้อง คำอุทาน คำปฏิเสธ** ข้อความเหล่านี้ **ไม่เป็นประพจน์**
- สำหรับข้อความบอกเล่าแต่ **มีตัวแพรอยู่ด้วย** ไม่สามารถบอกว่าเป็นจริง หรือเท็จถึงว่า **ไม่เป็นประพจน์**
- ประโยคที่มีค่าความจริงไม่แน่นอน หรือไม่อาจระบุได้ว่ามีค่าความจริง เป็นจริงหรือเป็นเท็จได้ **ไม่เป็นประพจน์** เช่น **อารมณ์ ความรู้สึก** เป็นต้น

ความหมายตรรกศาสตร์และประพจน์



▪ ตัวอย่าง

ธงชาติไทยมี 3 สี (จริง)

$1 \in \{1,2,3,4\}$ (จริง)

กรุงเทพมหานครเป็นจังหวัดหนึ่งในประเทศไทย (เท็จ)

$5 > 6$ (เท็จ)

ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น **จริง (T)** เรียกว่า **ประพจน์จริง**

ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น **เท็จ (F)** เรียกว่า **ประพจน์เท็จ**

กำหนดตัวแปร p, q, r, \dots แทนประพจน์ใดๆ เรียกตัวแปรว่า **ตัวแปรประพจน์**

ค่าความจริงของตัวแปรประพจน์ ขึ้นอยู่กับตัวแปรนั้นใช้แทนประพจน์ใด

p แทน $1 \in \{1,2,3,4\}$ p เป็นประพจน์จริง

q แทน $5 > 6$ q เป็นประพจน์เท็จ

การเชื่อมต่อประพจน์

- การนำประพจน์มาเชื่อมกัน จะได้ประพจน์ใหม่ ซึ่งสามารถบอกได้ว่า ค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ สำหรับตัวเชื่อมประพจน์ (Propositional Connective) นั้น มีอยู่ 5 ตัว และตัวเชื่อมที่ใช้กันมาก ในตรรกศาสตร์คือ และ, หรือ, ถ้า...แล้ว, ก็ต่อเมื่อ, ไม่
- ตัวเชื่อมประพจน์ “**และ**” (conjunction) ใช้สัญลักษณ์ “ **\wedge** ”
 - การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “**และ**” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \wedge q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นจริงทั้งคู่ นอกจากนั้นมีค่าความจริงเป็นเท็จ

การเชื่อมต่อประพจน์

- ตัวเชื่อมประพจน์ “หรือ” (disjunction) ใช้สัญลักษณ์ “ \vee ”
 - การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “หรือ” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \vee q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จทั้งคู่ นอกนั้นมีค่าความจริงเป็นจริง

- ตัวเชื่อมประพจน์ “ถ้า...แล้ว” (if...then...) ใช้สัญลักษณ์ “ \rightarrow ”
 - การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “ถ้า...แล้ว” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \rightarrow q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ นอกนั้นมีค่าความจริงเป็นจริง

การเชื่อมต่อประพจน์

- ตัวเชื่อมประพจน์ “**ก็ต่อเมื่อ**” (if and only if) ใช้สัญลักษณ์ “ \leftrightarrow ”
 - การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “**ก็ต่อเมื่อ**” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \leftrightarrow q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ p และ q มีค่าความจริงตรงกัน และจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p และ q มีค่าความจริงตรงข้ามกัน
- นิเสธของประพจน์ “**นิเสธ**” (negation) ใช้สัญลักษณ์ “ \sim ”
 - นิเสธของประพจน์ใดๆ คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงกันข้ามกับประพจน์นั้นๆ และสามารถเขียนแทนนิเสธของ p ได้ด้วย $\sim p$

การเชื่อมต่อประพจน์

ค่าความจริงของประพจน์ที่เชื่อมต่อกัน ตารางค่าความจริง (Truth Table) ของประพจน์ที่เชื่อมต่อกัน โดย T แทนค่าความจริงเป็นจริง และ F แทนค่าความจริงเป็นเท็จ มีรายละเอียดดังนี้

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

การเชื่อมต่อประพจน์

ตัวอย่างการประยุกต์ใช้ประพจน์กับข้อความ
สมมติให้

p ฝนตก

q น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

เครื่องหมายของประพจน์และข้อความ

$\sim p$ ฝนไม่ตก

$p \wedge q$ ฝนตก และ น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

$p \vee q$ ฝนตก หรือ น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

$p \rightarrow q$ ถ้า ฝนตก แล้ว น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

$p \leftrightarrow q$ ฝนตก ก็ต่อเมื่อ น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

การเชื่อมต่อประพจน์

- ตัวอย่างที่ 1 ประเทศไทยเป็นเมืองร้อน และประเทศไทยอยู่ในทวีปแอฟริกา

p ประเทศไทยเป็นเมืองร้อน T

q ประเทศไทยอยู่ในทวีปแอฟริกา F

$$T \wedge F = F$$

- ตัวอย่างที่ 2 $(10 + 10 > 8) \wedge (1 \times 0 = 0)$

p $10 + 10 > 8$ T

q $1 \times 0 = 0$ T

$$T \wedge T = T$$

การเชื่อมต่อประพจน์

- ตัวอย่างที่ 3 -3 เป็นเลขจำนวนจริง หรือ สกุลเงินไทยคือปอนด์

p -3 เป็นเลขจำนวนจริง T

q สกุลเงินไทยคือปอนด์ F

$$T \vee F = T$$

- ตัวอย่างที่ 4 π เป็นเลขจำนวนเต็ม หรือ -2 เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

p π เป็นเลขจำนวนเต็ม F

q -2 เป็นเลขจำนวนเต็มบวก F

$$F \vee F = F$$

การเชื่อมต่อประพจน์

- ตัวอย่างที่ 5 ถ้า p และ q

p ฝนตก T (กำหนดให้ฝนตกเป็น T)

q รถติด T (กำหนดให้รถติดเป็น T)

$$T \rightarrow T = T$$

- ตัวอย่างที่ 6 จงแสดงตารางค่าความจริงของประพจน์ $S \vee \sim S$

S	$\sim S$	$S \vee \sim S$
T	F	T
F	T	T

การเชื่อมต่อประพจน์

- ตัวอย่างที่ 7 จงแสดงตารางค่าความจริงของประพจน์

$$p \vee q, \quad (p \vee q) \rightarrow p, \quad (p \vee q) \rightarrow q$$

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow p$	$(p \vee q) \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	T	T	F
F	T	T	F	T
F	F	F	T	T

การเชื่อมต่อประพจน์

- ตัวอย่างที่ 8 จงแสดงตารางค่าความจริงของประพจน์ $p \wedge q$ และ $(p \wedge q) \rightarrow r$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

ประพจน์ที่มีค่าความจริง

สักจะ แปลว่า จริง และสำหรับนิรันดร์ แปลว่า ตลอดกาล
ประพจน์ที่เป็นสัจنيรันดร์ (**tautology**) คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริง^๑
เป็นจริงตลอดกาล ทุกกรณีของประพจน์ย่ออย หรือประพจน์ที่มีค่าความ
จริงเป็นจริงทุกกรณี

สำหรับการตรวจสอบสัจنيรันดร์ สามารถทำได้ 2 กรณีดังนี้

■ กรณีที่ 1

สร้างตารางค่าความจริงของประพจน์นั้นๆ ขึ้นมาเพื่อตรวจสอบ
ว่าเป็นสัจنيรันดร์หรือไม่ โดยถ้าเป็นต้องได้ผลลัพธ์ทุกกรณีเป็นจริงหมด
แสดงว่าประพจน์นั้นเป็นสัจنيรันดร์

ประพจน์ที่มีค่าความจริง

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ประพจน์เหล่านี้ $p \wedge \sim p$, $p \vee \sim p$, $(p \wedge q) \rightarrow p$, $(p \wedge q) \rightarrow q$, $p \wedge q \wedge \sim q$ เป็นสัจنيรันดร์หรือไม่

วิธีทำ ให้สร้างตารางค่าความจริงแล้วพิจารณาว่าประพจน์ใดที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกรูปนี่ หากมีกรณีที่ค่าความจริงเป็นเท็จเพียงกรณีเดียวเท่านั้นก็ถึงว่า ไม่เป็นสัจنيรันดร์

P	$p \wedge \sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	F	T
	ไม่เป็นสัจنيรันดร์	สัจنيรันดร์

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	$(p \wedge q) \rightarrow q$	$p \wedge q \wedge \sim q$
T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	T	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	T	T	F
			สัจنيรันดร์	สัจنيรันดร์	ไม่เป็นสัจنيรันดร์

ดังนั้น $p \vee \sim p$, $(p \wedge q) \rightarrow p$, $(p \wedge q) \rightarrow q$ เป็นสัจنيรันดร์ เพราะตารางค่าความจริงเป็นจริงทุกรูปนี่

ประพจน์ที่มีค่าความจริง

▪ กรณีที่ 2

กำหนดให้ประพจน์ทั้งหมดเป็นเท็จ แล้วพยายามพิสูจน์ว่า ประพจน์นี้สามารถเป็นเท็จได้ ถ้าสามารถเป็นเท็จได้ แสดงว่าประพจน์นี้ไม่เป็นสัจニรันดร์

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่าประพจน์ $p \wedge q \wedge \sim q$ เป็นสัจニรันดร์หรือไม่

$p \wedge q \wedge \sim q$ กรณีนี้ถ้ากำหนด $p = T$ และ $q = T$ ได้ผลลัพธ์ของประพจน์เป็น F

$T \wedge T \wedge F$

ผลลัพธ์ของประพจน์นี้คือ F ถ้าเป็นเท็จได้ถึงว่าไม่เป็นสัจニรันดร์ ดังนั้นจึงไม่เป็นสัจニรันดร์

ประพจน์ที่มีค่าความจริง

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่าประพจน์ $(p \wedge q) \rightarrow p$ เป็นสัจ妮รันดร์หรือไม่

$(p \wedge q) \rightarrow p$	กำหนดให้เป็น F ถ้าจะเป็นเท็จได้ p ต้องเป็น F และ $p \wedge q$ ต้องเป็น T
------------------------------	--

$T \rightarrow F$

$p \wedge q = T$	ดังนั้น $p \wedge q$ ต้องเป็น T ทั้งหมด ซึ่งขัดแย้งกับ p ที่ต้องแรกกำหนดเป็น F
------------------	--

ดังนั้นประพจน์นี้จึงเป็นสัจ妮รันดร์ เนื่องจาก $(p \wedge q) \rightarrow p$ ไม่สามารถเป็น F ได้

แบบฝึกหัด

1). จากข้อความข้างล่างนี้ ให้ทำเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่เป็นประพจน์

- _____ 1) คุณวนรุษ
- _____ 2) สุนัขเห่าเหมียวๆ
- _____ 3) มนุษย์มีสองขา
- _____ 4) $8 \times 8 > 10$
- _____ 5) โลกเป็นบริวารของดวงอาทิตย์
- _____ 6) ฉันคิดถึงเรอมากร
- _____ 7) โปรดเห็นใจฉันบ้าง
- _____ 8) ผู้หญิงที่เดินมาเรอเป็นใครหรือ
- _____ 9) จงเงียบสงบ
- _____ 10) กากรเกรียนกะໂหลກกะລາກືກ້ອກ

แบบฝึกหัด

- _____ 11) รบกวนช่วยเปิดหน้าต่างหน่อย
- _____ 12) ผูกสายเป็นโปรแกรมเมอร์
- _____ 13) ผูกเป็นนักศึกษา
- _____ 14) ผูกเป็นเมียเข้า
- _____ 15) โวยเจ็บ
- _____ 16) เรายรื้อแม่ลัวเพื่อนเออย
- _____ 17) รักลูกให้ผูก รักวัวให้ตี
- _____ 18) $x + 5 = 15$
- _____ 19) $x + y = z$
- _____ 20) ไก่ขัน “เหมียวๆ”

แบบฝึกหัด

- _____ 21) แม่คิดถึงลูกมาก
- _____ 22) อาจารย์ทิพย์เป็นผู้ชาย
- _____ 23) กรุงเทพเป็นเมืองหลวงของประเทศไทย
- _____ 24) นกไม่มีปีก
- _____ 25) ธนาคารมีการบันทึกและจัดเก็บข้อมูลลูกค้าไว้ในคอมพิวเตอร์
- _____ 26) $4+5$ มีค่าเท่ากับ 9
- _____ 27) จังหวัดอุดรธานีไม่ได้อยู่ในภาคอีสาน
- _____ 28) $2 + 3 = 3 - 1$
- _____ 29) โลกเป็นดาวเคราะห์
- _____ 30) เลขคู่ทุกจำนวนหารด้วยสองลงตัว

แบบฝึกหัด

_____ 31) $17 + 8 = 30$

_____ 32) เชตว่างไม่เป็นสับเซตของทุกเซต

_____ 33) ปลาและนกเป็นสัตว์บก

_____ 34) 50 คูณด้วย 40 มีค่าเท่ากับเท่าไร

_____ 35) หยุดเดียวนี่นะ

_____ 36) อย่าส่งเสียงดังในเวลาทำงาน

_____ 37) กรุณาปิดไฟทุกครั้งก่อนออกจากห้อง

_____ 38) ได้โปรดເຕອະນະຄືວ່າສັງສາຣັນໝ່ອຍ

_____ 39) ว້າຍ! ຕະເຮົດກຣະໂຄນ

_____ 40) บรรยายกาศสำหรับเราสองคนอย่างให้เป็นเช่นนี้จังเลย

แบบฝึกหัด

- _____ 41) อายุคุณเวลาทำงาน
- _____ 42) อยากดูหนังมากเลย
- _____ 43) ว้าย! น่ากลัวจัง
- _____ 44) สมการของ $x+y = 1$ เป็นสมการอะไร

แบบฝึกหัด

2) จงเติมตารางค่าความจริงของประพจน์ $(P \wedge Q) \rightarrow Q$

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow Q$

3) จงเติมตารางค่าความจริงของประพจน์ $\sim P \rightarrow (P \vee Q)$

P	Q	$\sim P$	$P \vee Q$	$\sim P \rightarrow (P \vee Q)$

แบบฝึกหัด

4) จงเติมตารางค่าความจริงของประพจน์ $(\sim P \vee R) \rightarrow Q$

P	R	Q	$\sim P \vee R$	$(\sim P \vee R) \rightarrow Q$

แบบฝึกหัด

5) จงเติมตารางค่าความจริงของประพจน์ $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \vee \sim R)$

แบบฝึกหัด

6) จงหาค่าความจริงของประพจน์ $(10 > 5) \wedge (\frac{4}{8} + 5 > 6)$

7) จงหาค่าความจริงของประพจน์ $((P \vee Q) \wedge (\sim P)) \rightarrow (R \rightarrow P)$ โดยที่ $P = F, Q = T, R = T$

8) จงหาค่าความจริงของประพจน์ $5 + 5 = 10$ และ $-3 + 3 = 3$

9) จงหาค่าความจริงของ $(\sim Q \wedge (P \vee Q)) \rightarrow ((Q \wedge R) \vee (P \vee R))$ โดยที่ P, Q, R โดยมีค่าความจริง T, F, F

แบบฝึกหัด

10) จงหาค่าความจริงของประพจน์ ถ้า 6 มากกว่า 5 และ -6 มากกว่า -5

11) จงหาค่าความจริงของประพจน์ ถ้า 5 มากกว่า 6 และ -5 มากกว่า -6

12) จงหาค่าความจริงของประพจน์ ถ้า 2 คือเลขคี่ และ 3 เป็นเลขคู่

13) จงหาค่าความจริงของประพจน์ 33 คือเลขจำนวนเต็มบวก ก็ต่อเมื่อ 33 เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

แบบฝึกหัด

14) จงหาค่าความจริงของประพจน์ 10 คือเลขคู่ ก็ต่อเมื่อ π เป็นเลขจำนวนเต็ม

15) $p \rightarrow p \vee q$ ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสংজ尼รันดร์ หรือไม่

16) $(R \rightarrow (S \vee T)) \vee (S \leftrightarrow (R \wedge T))$ ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสংজ尼รันดร์ หรือไม่

แบบฝึกหัด

17) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$ ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสংজ尼รันดร์ หรือไม่

18) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสংজনিরันดร์ หรือไม่

แบบฝึกหัด

19) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสংজনิรันดร์ หรือไม่

20) $(p \rightarrow (r \vee q)) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (p \rightarrow q))$ ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสংজনิรันดร์ หรือไม่

ประพจน์สมมูลกัน

ประพจน์สมมูลกัน (Logically equivalent) คือ ประพจน์สองประพจน์จะสมมูลกันก็ต่อเมื่อประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงเหมือนกันทุกรูปนิของค่าความจริงของประพจน์ย่อย หรือประพจน์ทั้งสองต้องมีค่าความจริงแบบเดียวกันทุกรูปนิ เขียนแทนด้วย $p \equiv q$

การทดสอบว่าประพจน์ 2 ประพจน์ สมมูลกันนั้นสามารถทำได้โดยการสร้างตารางแจกแจงค่าความจริง ถ้าค่าความจริงของตารางตรงกันทุกรูปนิ แสดงว่าประพจน์ 2 ประพจน์สมมูลกัน

ประพจน์สมมูลกัน

ตัวอย่างประพจน์ที่สมมูลกันที่ควรทราบ มีดังนี้

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

ประพจน์สมมูลกัน

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ เป็นประพจน์ที่สมมูลกันหรือไม่

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

ข้อสังเกต ประพจน์ที่สมมูลกัน เมื่อเชื่อมกันด้วย \leftrightarrow จะเป็นประพจน์สัจニรันดร์ แต่โดยส่วนมากแล้ว **นิยมเขียนตาราง** เพราะตัวเชื่อมกันเป็น \leftrightarrow ทำให้กรณีที่เกิดขึ้นมีโอกาสเป็น T และ F หรือ F และ T เมื่อพิสูจน์ทำให้มีหลายกรณี จึงทำให้การพิจารณากรุณ์ให้ครบเป็นเรื่องที่ยุ่งยาก ถ้าพบว่าไม่เป็นสัจニรันดร์ เพียงกรณีเดียว ก็สามารถสรุปได้ว่า ประพจน์ทั้งสองไม่สมมูลกัน แต่ถ้าໄล่กรณีไม่ครบก็มีโอกาสที่จะไม่พบกรณีที่ไม่เป็นสัจニรันดร์ ทำให้พิจารณาว่าประพจน์ทั้งสองนี้สมมูลกัน ซึ่งทำให้ได้คำตอบที่ผิด

ประพจน์สมมูลกัน

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า $p \rightarrow q \equiv (p \wedge q) \wedge (q \rightarrow p)$ เป็นประพจน์ที่สมมูลกันหรือไม่

ถ้าคิดกรณีแรกเป็นกรณีที่สมมูลกัน ดังนั้นจึงตอบว่าประพจน์ทั้งสองสมมูลกัน แต่ความจริงแล้วพลาดไม่ได้คิดกรณีที่สอง ซึ่งเป็นกรณีที่ไม่สมมูลกัน ทำให้นักศึกษาตอบคำถามผิด

$p \rightarrow q$	\leftrightarrow	$(p \wedge q)$	\wedge	$(q \rightarrow p)$	
F			T		
T	T	$T \wedge T$		$T \rightarrow T$	
q ต้องเป็น F แต่ q ถูกกำหนดเป็น T แล้วจึงขัดแย้งกัน แสดงว่าประพจน์ไม่สามารถเป็น "เท็จ"		T		T	สัจنيรันดร์

ประพจน์สมมูลกัน

แต่ในความจริงแล้วถ้าคิดกรณีที่สอง กรณีนี้ไม่เป็นสัจニรันดร์ เพราะสามารถเป็นเท็จได้ ดังนั้นประพจน์ทั้งสองไม่สมมูลกัน

$p \rightarrow q$	\leftrightarrow	$(p \wedge q)$	\wedge	$(q \rightarrow p)$	
T			F		ไม่เป็นสัจニรันดร์
$F \rightarrow T$		$F \wedge T$		$T \rightarrow F$	
ไม่ขัดแย้ง T แสดงว่าประพจน์ สามารถเป็น "เท็จ" ได้		F		F	

สำหรับการค้นหาคำตอบ ถ้าหากพบคำตอบที่ไม่เป็นสัจニรันดร์ เพียงคำตอบเดียวถึงว่าให้ยุติการค้นหาคำตอบ เพราะประพจน์ทั้งสองอันนั้นไม่สมมูลกันแน่นอน แต่ถ้าเกิดพบว่า คำตอบเป็นสัจニรันดร์ ต้องหากรณีอื่นๆ อีกจนครบทุกกรณีที่เป็นไปได้ จึงจะสรุปได้ว่า ประพจน์ทั้งสองสมมูลกัน ถ้าหากขาดเพียงกรณีเดียว อาจจะสรุปคำตอบที่ผิด

ประพจน์สมมูลกัน

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงให้เห็นว่าประพจน์ $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ สมมูลกันหรือไม่

p	$\sim p$	q	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T

จากตารางนี้สรุปได้ว่า $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ ประพจน์สมมูลกัน

ประพจน์สมมูลกัน

ตัวอย่างที่ 2 จงแสดงให้เห็นว่า ถ้า 4^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว 4 เป็นจำนวนคู่ และถ้า 4^2 ไม่เป็นจำนวนคู่แล้ว 4 ไม่เป็นจำนวนคู่ สมมูลกันหรือไม่
วิธีทำ

สามารถเขียนแทนในรูปแบบ p และ q ได้ดังนี้

$$p = 4^2 \text{ เป็นจำนวนคู่} \quad \neg p = 4^2 \text{ ไม่เป็นจำนวนคู่}$$

$$q = 4 \text{ เป็นจำนวนคู่} \quad \neg q = 4 \text{ ไม่เป็นจำนวนคู่}$$

และสามารถเขียนสรุปได้ดังนี้ $p \rightarrow q \equiv \neg p \rightarrow \neg q$

ประพจน์สมมูลกัน

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

จากตารางทั้งสองนี้สรุปได้ว่า $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ ประพจน์ **ไม่สมมูลกัน**

ประพจน์สมมูลกัน

ตัวอย่างที่ 4 จงแสดงให้เห็นว่าประพจน์ $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q) \rightarrow r$ สมมูลกันหรือไม่

p	q	r	$p \rightarrow (q \vee r)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	T

p	q	r	$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	T

จากตารางสองตารางนี้สรุปได้ว่า $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q) \rightarrow r$ ประพจน์สมมูลกัน

ประพจน์สมมูลกัน

ประพจน์ที่สมมูลกัน เพื่อใช้ในการลดรูปประพจน์ และพิสูจน์ประพจน์

$p \equiv \sim(\sim p)$	นิเศษช้อน		
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	กระจาย	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	กระจาย
$(q \vee r) \wedge p \equiv (q \wedge p) \vee (r \wedge p)$	กระจาย	$(q \wedge r) \vee p \equiv (q \vee p) \wedge (r \vee p)$	กระจาย
$p \vee q \equiv q \vee p$	สลับที่	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	สลับที่
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	จัดกลุ่ม	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	จัดกลุ่ม
$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	เดอมอร์แกน	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	เดอมอร์แกน
$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$		$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$	
$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$	ประพจน์แย้งสลับที่	$\sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$	
$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$		$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

นิยาม : ลำดับของประพจน์ เขียนแทนด้วย $p_1 p_2 \dots p_n$ และ q จะเรียก p_1, p_2, \dots, p_n ว่า สมมุติฐาน (hypothesis) และเรียก q ว่า ข้อยุติ (conclusion) ซึ่งสมเหตุสมผล ถ้า p_1 และ p_2 และ ... และ p_n เป็นจริง ทั้งหมด แล้ว q ต้องเป็นจริงเท่านั้น มิฉะนั้น จะถือว่า ไม่สมเหตุสมผล

- นิยามนี้คือ $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$ จะสมเหตุสมผล เมื่อประพจน์เป็น **สัจ妮รันดร์** ต้องเอาประพจน์มาเชื่อมต่อกัน ถ้าตารางความจริงเป็นสัจ妮รันดร์ถึงว่า ข้อความนี้สมเหตุสมผล

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดประพจน์ทั้ง 2 ข้อเป็นจริง จงแสดงว่าการได้ข้อยุตินี้สมเหตุผล

1. ถ้า ฝนตก แล้ว น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

2. ฝนตก

สรุป น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

สามารถแทนข้อความ ออกมาในรูปแบบประพจน์ได้ดังนี้

p แทน ฝนตก

q แทน น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

$p \rightarrow q$ คือ ถ้าฝนตก แล้วน้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

โดยสรุป สามารถเขียนรูปแบบประพจน์ได้ดังนี้

$p \rightarrow q$

p

—

q

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

วิธีการคือพยายามสมมุติให้มันเป็น F ให้ได้ จากข้อนี้สามารถเขียนออกมาเป็นรูปแบบนี้ $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$

p	$\rightarrow q$	$\wedge p$	$\rightarrow q$	
T			F	สัจニรันดร์
T	T เดิมกำหนด q ต้องเป็น F แต่เมื่อแทนค่า F เข้าไปแล้ว ขัดแย้งกับเงื่อนไขใหม่ ที่กำหนดให้ q เป็น T ดังนั้น ประพจน์ไม่สามารถเป็น F ได้	T		

เมื่อประพจน์เป็นสัจニรันดร์ ประพจน์นี้จึงสมเหตุสมผล

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด ประพจน์ทั้ง 2 ข้อ เป็นจริง จงแสดงว่าการได้ข้อยุตินี้สมเหตุผล

1. ถ้า ฝนตก และ น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ
2. น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

สรุป ฝนตก

โดยสรุป สามารถเขียนรูปแบบประพจน์ได้ดังนี้

$$p \rightarrow q$$

$$\neg q$$

—

$$\neg p$$

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

วิธีการคือพยายามสมมุติให้มันเป็น F ให้ได้ จากข้อนี้สามารถเขียนออกมาเป็นรูปแบบนี้ $((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$

p	$\rightarrow q$	$\wedge q$	$\rightarrow p$	
T	F			ไม่เป็นสัจニรันดร์
F เดิมกำหนด p ต้องเป็น F เมื่อแทนค่า F เข้าไปแล้ว ประพจน์นี้สามารถเกิดขึ้นได้ แสดงว่าสอดคล้องกัน ดังนั้นประพจน์สามารถเป็น F ได้	T	T		

เมื่อประพจน์ไม่เป็นสัจニรันดร์ จึงไม่สมเหตุสมผล

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดประพจน์ข้อ 1-4 เป็นจริง จงแสดงว่าการได้ข้อยุตินี้สมเหตุผล
วิธีทำ

$$1. p \wedge q \rightarrow \sim r$$

$$2. \sim s \rightarrow q$$

$$3. P$$

$$4. R$$

สรุป **s**

วิธีการคือพยายามสมมุติให้มันเป็น F ให้ได้ จากข้อนี้สามารถเขียนออกมาเป็นรูปแบบนี้ $(p \wedge q \rightarrow \sim r) \wedge (\sim s \rightarrow q) \wedge p \wedge r \rightarrow s$

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

$$(p \wedge q \rightarrow \sim r) \wedge (\sim s \rightarrow q) \wedge p \wedge r \rightarrow s$$

$(p \wedge q \rightarrow \sim r) \wedge$	$(\sim s \rightarrow q) \wedge$	$p \wedge$	r	$\rightarrow s$	
T					
$(T \wedge F \rightarrow F)$	T \rightarrow T	T	T	F	สัจニรันดร์
q ต้องเป็น F แต่ค่าตอบที่ได้คือ T ขัดแย้ง ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไขของการเป็นเท็จ ของประพจน์นี้ ดังนั้นประพจน์จึงไม่สามารถเป็น F ได้	T \rightarrow T				

เมื่อประพจน์เป็นสัจニรันดร์ จึงสมเหตุสมผล

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดประพจน์ข้อ 1 และ 2 เป็นจริง จงแสดงว่าการได้
ข้อยุตินี้สมเหตุผล

วิธีทำ

$$1. \quad p \rightarrow r$$

$$2. \quad p \rightarrow q$$

สรุป $p \rightarrow (r \wedge q)$

วิธีการคือพยายามสมมุติให้มันเป็น F ให้ได้ จากข้อนี้สามารถเขียนออกมาเป็นรูปแบบ
นี้ $(p \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow (r \wedge q)$

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

$$(p \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow (r \wedge q)$$

$(p \rightarrow r) \wedge$	$(p \rightarrow q)$	\rightarrow	$p \rightarrow$	$(r \wedge q)$	สัจニรันดร์
T				F	
T	T		T	F	
T \rightarrow T	T \rightarrow T			r หรือ q ต้องเป็น F ตัวใดตัวหนึ่ง แต่คำตอบที่ได้คือ r หรือ q เป็น T ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไขของถ้าเป็นเท็จ ของประพจน์นี้ ดังนั้นประพจน์จึงไม่สามารถเป็น F ได้	

เมื่อประพจน์เป็นสัจニรันดร์ จึงสมเหตุสมผล

แบบฝึกหัด

1) จากข้อความข้างล่างนี้ ให้ทำเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่ถูก และทำเครื่องหมาย ✗ หน้าข้อความที่ผิด

- _____ 1.1) ถ้ามีประพจน์ย่ออยรวมทั้งสิ้น 5 ประพจน์ จะมีค่าความจริงกี่กรณี 32
- _____ 1.2) ประพจน์ที่มีความสมมูลกันคือประพจน์ทั้งสองมีจำนวนค่าความจริงเท่ากัน
- _____ 1.3) สัจニรันดร์คือค่าความจริงของประพจน์เป็นจริงทุกกรณี
- _____ 1.4) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ เป็น F และ $(p \wedge q) \rightarrow q$ เป็น F
- _____ 1.5) $(\sim p \leftrightarrow \sim r) \vee (p \leftrightarrow q)$ เป็น F และ $(p \wedge q) \wedge \sim r$ เป็น F
- _____ 1.6) $(p \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (r \vee s)$ เป็น F และ $(p \wedge q) \rightarrow s$ เป็น F
- _____ 1.7) $\sim ((p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee r)) \equiv p \wedge \sim(q \rightarrow r)$
- _____ 1.8) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv \sim(p \vee q) \wedge r$
- _____ 1.9) $p \vee (\sim q) \vee r \equiv \sim p \rightarrow (q \rightarrow (r \wedge q))$

แบบฝึกหัด

_____ 1.10) $((p \rightarrow q) \vee \sim q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ เป็นสัจنيรันดร์

_____ 1.11) $((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ เป็นสัจنيรันดร์

_____ 1.12) $(\sim p \wedge (q \vee p)) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ เป็นสัจنيรันดร์

2) จงหาว่าประพจน์ต่อไปนี้ สมมูลกันหรือไม่ $P \wedge Q \rightarrow R$ และ $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

3) จงหาว่าประพจน์ต่อไปนี้ สมมูลกันหรือไม่ $\sim (P \wedge Q) \leftrightarrow R$ และ $P \rightarrow (\sim Q \leftrightarrow R)$

แบบฝึกหัด

4) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ จงแสดงให้เห็นว่าประพจน์สมมูลกันหรือไม่

5) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$ จงแสดงให้เห็นว่าประพจน์สมมูลกันหรือไม่

แบบฝึกหัด

6) จงแสดงว่าการสรุปข้อยุติข้ออย่างต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

6.1) $p \rightarrow q$

$$\sim q$$

—

$$\sim p$$

6.2) $p \rightarrow r$

$$p$$

—

$$r$$

6.3) $r \rightarrow s$

$$\sim s$$

—

$$\sim r$$

6.4) $\sim q \rightarrow r$

$$p \rightarrow \sim q$$

—

$$p \rightarrow r$$

ແບບືກ້ດ

6.5) $(p \rightarrow q) \vee r$

$\sim r$

—

$p \rightarrow q$

6.6) $\sim p \rightarrow r$

$q \rightarrow \sim s$

$\sim p \vee q$

—

$s \rightarrow r$

ແບບຝຶກຫັດ

6.7) $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$

$$r \rightarrow \sim s$$

—

$$\sim p \wedge \sim q$$

6.8) $p \rightarrow \sim q$

$$q \vee r$$

—

$$p$$

6.9) $p \wedge q$

$$q \rightarrow r$$

$$\sim r \vee s$$

—

$$s$$

6.10) $p \rightarrow q \rightarrow \sim s$

$$p \wedge s$$

—

$$q$$

ประโยชน์เปิด

ประโยชน์เปิด คือ **ประโยชน์ของเล่าที่มีตัวแปร** สำหรับ **ประโยชน์เปิด** ไม่สามารถลบออกค่าความจริงได้ ซึ่งประกอบด้วยตัวแปรหนึ่งตัว หรือมากกว่าโดยไม่เป็นประพจน์ แต่ถ้าแทนค่าตัวแปรลงไป ประโยชน์เปิดจะกลายเป็นประพจน์ และสามารถลบออกค่าความจริงได้

ตัวอย่างประโยชน์เปิด เช่น

$$x + 5 = 15$$

$$y < -6$$

$$x < 3$$

$$x + y \geq 0$$

$$x = y$$

ตัวอย่างประโยชน์ที่ไม่ใช่ประโยชน์เปิด เช่น

- 10 เป็นคำตอบของสมการ $x - 1 = 7$
- โลกหมุนรอบตัวเอง
- จงหาค่า x จากสมการ $2x + 1 = 8$
- กรุณานั่งเงียบๆ
- ห้ามสูบบุหรี่

ประโยชน์เปิด

ข้อตกลงของประโยชน์เปิด

1. นิยมแทนประพจน์ด้วย p, q, r, s, \dots
2. นิยมแทนประโยชน์เปิดด้วย $P(x), Q(x), \dots P(x, y), Q(x, y), \dots$

โดย $P(x), Q(x), \dots$ แทน ประโยชน์เปิดที่มี x เป็นตัวแปร

โดย $P(x, y), Q(x, y), \dots$ แทน ประโยชน์เปิดที่มี x และ y เป็นตัวแปร

กำหนดให้ $P(x)$

เป็นประโยชน์เปิดที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร x

$P(x, y)$

เป็นประโยชน์เปิดที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร x และ

$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$

เป็นประโยชน์เปิดที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร x_1, x_2, \dots, x_n

ประโยชน์คเปิด

เช่น	$P(x)$	แทน $x+4 = 20$	เป็นประโยชน์คเปิดที่ประกอบด้วยตัวแปร x ถ้า แทนค่า x จะสามารถบอกได้ว่าค่าความจริงเป็น จริง หรือเป็นเท็จ
	$p(x, y)$	แทน $x + y < 50$	เป็นประโยชน์คเปิดที่ประกอบด้วยตัวแปร x, y ถ้า แทนค่า x, y จะสามารถบอกได้ว่าค่าความจริง เป็นจริง หรือเป็นเท็จ

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวบ่งปริมาณ (quantifier) เป็นตัวระบุจำนวนสมาชิกในเอกภาพสัมพัทธ์ที่ทำให้ประโยคเปิดกล้ายเป็นประพจน์ เพราะประโยคเปิดจะเป็นประพจน์ได้ เมื่อแทนค่าตัวแปรแล้วหรือมีตัวบ่งปริมาณกำกับอยู่ ตัวบ่งปริมาณมี 2 ชนิด คือ

1. ตัวบ่งปริมาณที่กล่าวถึง “สมาชิกทุกตัวในเอกภาพสัมพัทธ์” ซึ่งเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ \forall (for all) อ่านว่า “สำหรับสมาชิก x ทุกตัว ”
2. ตัวบ่งปริมาณที่กล่าวถึง “สมาชิกบางตัวในเอกภาพสัมพัทธ์” ซึ่งเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ \exists (for some) อ่านว่า “สำหรับสมาชิก x บางตัว ”

ตัวปงปริมาณ

$\forall x(p(x))$ คือ ทุกค่า x ในเอกภพสัมพัทธ์ หรือเมื่อแทนค่า x ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ ลงใน $p(x)$ และทำให้ $p(x)$ มีค่าความจริงเป็นจริง ทุกตัว ถึงว่าประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นจริง ถ้าหากแทนค่า x ลงใน $p(x)$ และ มีเพียง 1 ตัวที่ทำให้ความค่าจริงเป็นเท็จ ถึงว่าประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวอย่างเช่น

$$\forall x \in \mathbb{R} (x^2 \geq 0) \quad \text{เป็น “จริง”}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} (x^2 \geq x) \text{ ไม่จริงกรณี } x = 1/2 \quad \text{เป็น “เท็จ”}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} (|x| \geq 0) \quad \text{เป็น “จริง”}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} (x^3 \geq 0) \text{ ไม่จริงกรณี } x = -1 \quad \text{เป็น “เท็จ”}$$

ตัวปั๊งปริมาณ

$\exists x(p(x))$ คือ ค่า x เพียงค่าเดียวในเอกภพสัมพัทธ์ หรือเมื่อแทนค่า x เพียงตัวเดียวตัวในเอกภพสัมพัทธ์ ลงใน $p(x)$ และทำให้ $p(x)$ มีค่าความจริงเป็นจริงเพียงตัวเดียว ถึงว่าประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นจริงถ้าหากแทนค่า x ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ ลงใน $p(x)$ และทำให้ $p(x)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จทุกตัว ถึงว่าประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวอย่างเช่น

$\exists x \in \mathbb{R} (x^2 \geq x)$	เป็นจริงเมื่อแทน $x=5$	เป็น “จริง”
$\exists x \in \mathbb{R} (x=x+1)$	ไม่จริงสักกรณี	เป็น “เท็จ”
$\exists x \in \mathbb{R} (x^2 \leq 0)$	เป็นจริงเมื่อแทน $x=0$	เป็น “จริง”
$\exists x \in \mathbb{R} (x^2 < 0)$	ไม่จริงสักกรณี	เป็น “เท็จ”

ตัวบ่งปริมาณ

■ ตัวบ่งปริมาณ 2 ตัว

$\forall x \forall y (P(x,y))$

มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ x และ y ทุกค่าเป็นจริง

มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ x และ y เพียง 1 คู่ทำให้เป็นเท็จ

$\forall x \exists y (P(x,y))$

มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ x ทุกตัวต้องสามารถมี y เพียง 1 ค่าที่ทำให้เป็นจริง

มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ x อย่างน้อย 1 ตัวที่นำ y มาแทนค่าให้เป็นจริงไม่ได้

$\exists x \forall y (P(x,y))$

มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ y ทุกตัวต้องสามารถมี x เพียง 1 ค่าที่ทำให้เป็นจริง

มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ y อย่างน้อย 1 ตัวที่นำ x มาแทนค่าให้เป็นจริงไม่ได้

$\exists x \exists y (P(x,y))$

มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ มีเพียง 1 คู่ที่เป็นจริง

มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ ไม่มีคู่ไหนที่เป็นจริง

ตัวปั๊งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าความจริงของ $\forall x \forall y (P(x, y))$ โดย $U = \{0, 1\}$
และ $P(x, y) = x + y \geq y$

วิธีทำ กรณีนี้ต้องแทนค่าทั้งหมดที่เป็นไปได้ จากสมการนี้ $x + y \geq y$
และต้องเป็นจริงทุกรูปนี่

$$0+0 \geq 0 \quad \text{เป็นจริง}$$

$$0+1 \geq 1 \quad \text{เป็นจริง}$$

$$1+0 \geq 0 \quad \text{เป็นจริง}$$

$$1+1 \geq 1 \quad \text{เป็นจริง}$$

จากการนี่ ทั้ง x และ y ให้ผลลัพธ์เป็นจริงทุกรูปนี่
ดังนั้น $\forall x \forall y (P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นจริง

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าความจริงของ $\forall x \forall y (P(x, y))$ โดย $U = \{0, 1\}$
และ $P(x, y) = x \geq y$

วิธีทำ กรณีนี้ต้องแทนค่าทั้งหมดที่เป็นไปได้ จากสมการนี้ $x \geq y$ และ^{*}
ต้องเป็นจริงทุกรายนิแต่ถ้าเป็นเท็จเพียงกรณีเดียวถึงว่าเป็นเท็จ

$$0 \geq 1 \text{ เป็นเท็จ}$$

ดังนั้น $\forall x \forall y (P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นเท็จ

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าความจริงของ $\exists x \exists y (P(x, y))$ โดย $U = \{ 0, 1 \}$
และ $P(x, y) = x + y \geq xy$

วิธีทำ กรณีนี้ถ้าเป็นจริงเพียงกรณีเดียว ค่าความจริงเป็นจริง

$$1 + 1 \geq 1 * 1 \text{ เป็นจริง}$$

ดังนั้น $\exists x \exists y (P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นจริง

ตัวปั๊งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าความจริงของ $\exists x \exists y (P(x, y))$ โดย $U = \{ 0, 1 \}$ และ $P(x, y) = x + y = 5$

วิธีทำ กรณีนี้ต้องแทนค่าทั้งหมดที่เป็นไปได้ จากสมการนี้ $x + y = 5$ และต้องเป็นเท็จทุกรณี จึงมีค่าความจริงเป็นเท็จ

$$0+0 \neq 5 \quad \text{เป็นเท็จ}$$

$$0+1 \neq 5 \quad \text{เป็นเท็จ}$$

$$1+0 \neq 5 \quad \text{เป็นเท็จ}$$

$$1+1 \neq 5 \quad \text{เป็นเท็จ}$$

จากการนี้ ทั้ง x และ y ให้ผลลัพธ์เป็นเท็จทุกรณี

ดังนั้น $\exists x \exists y (P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นเท็จ

ตัวปั๊งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าความจริงของ $\forall x \exists y (P(x, y))$ โดย $U = \{-1, 0, 1\}$
และ $P(x, y) = x + y = 0$

วิธีทำ กรณีนี้ต้องแทนค่า x ทุกตัว แต่ y ให้อิสระ ให้มาแทนค่าก็ได้ของให้
ประพจน์เป็นจริง

$$-1 + 1 = 0 \quad \text{เป็นจริง}$$

$$0 + 0 = 0 \quad \text{เป็นจริง}$$

$$1 + -1 = 0 \quad \text{เป็นจริง}$$

จากการนี้ x ทุกตัวให้ผลลัพธ์เป็นจริงทุกกรณี
ดังนั้น $\forall x \exists y (P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นจริง

ตัวปงปริมาณ

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าความจริงของ $\forall x \exists y (P(x, y))$ โดย $U = \{0, 1\}$
 และ $P(x, y) = x + y = 0$

วิธีทำ กรณีนี้ต้องแทนค่า x ทุกตัว แต่ y ให้อ่านมาแทนค่าก็ได้ของให้ประจันเป็นจริง

$$0 + 0 = 0 \quad \text{เป็นจริง}$$

$$1 + y = 0 \quad \text{เป็นเท็จ เพราะไม่สามารถหาค่ามาแทน } y \text{ แล้วเป็นจริง}$$

จากกรณีนี้มี x หนึ่งกรณีที่ไม่เป็นจริง

ดังนั้น $\forall x \exists y (P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นเท็จ

ตัวปั๊งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าความจริงของ $\exists x \forall y (P(x, y))$ โดย $U = \{ -1 \ 0 \ 1 \}$
และ $P(x, y) = x + y = 0$

วิธีทำ กรณีนี้ต้องแทนค่า y ทุกตัว แต่ x ให้อ่านตัวไหนมาแทนค่าก็ได้ของให้
ประพจน์เป็นจริง

$$-1 + 1 = 0 \quad \text{เป็นจริง}$$

$$0 + 0 = 0 \quad \text{เป็นจริง}$$

$$1 + -1 = 0 \quad \text{เป็นจริง}$$

จากกรณี y ทุกตัวให้ผลลัพธ์เป็นจริงทุกกรณี
ดังนั้น $\exists x \forall y (P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นจริง

ตัวปงปริมาณ

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าความจริงของ $\exists x \forall y (P(x, y))$ โดย $U = \{0, 1\}$ และ $P(x, y) = x + y = 0$

วิธีทำ กรณีนี้ต้องแทนค่า y ทุกตัว แต่ x ให้อาตัวใหม่มาแทนค่าก็ได้ของให้ประจันเป็นจริง

$$0 + 0 = 0 \quad \text{เป็นจริง}$$

$$x + 1 = 0 \quad \text{เป็นเท็จ เพราะไม่สามารถหาค่ามาแทน } x \text{ แล้วเป็นจริง}$$

จากการนี้มี x หนึ่งกรณีที่ไม่เป็นจริง

ดังนั้น $\exists x \forall y (P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นเท็จ

ตัวบ่งปริมาณ

- นิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณที่สมมูลกัน มีรายละเอียดดังนี้

$\sim \forall x(P(x))$	สมมูลกับ	$\exists x(\sim P(x))$
$\sim \exists x(P(x))$	สมมูลกับ	$\forall x(\sim P(x))$
$\sim \forall x(\sim P(x))$	สมมูลกับ	$\exists x(P(x))$
$\sim \exists x(\sim P(x))$	สมมูลกับ	$\forall x(P(x))$
$\sim \forall x \forall y(P(x, y))$	สมมูลกับ	$\exists x \exists y(\sim P(x, y))$
$\sim \forall x \exists y(P(x, y))$	สมมูลกับ	$\exists x \forall y(\sim P(x, y))$
$\sim \exists x \forall y(P(x, y))$	สมมูลกับ	$\forall x \exists y(\sim P(x, y))$
$\sim \exists x \exists y(P(x, y))$	สมมูลกับ	$\forall x \forall y(\sim P(x, y))$

ตัวบ่งปริมาณ

- ตัวอย่างนิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณที่สมมูลกัน

จงพิสูจน์ $\sim \forall x (x+3 > 5)$ สมมูลกับ $\exists x (x+3 \leq 5)$

การพิสูจน์

$\sim (\forall x p(x))$ สมมูลกับ $\exists x \sim p(x)$

ต้องพิสูจน์

$\sim (\forall x p(x)) \rightarrow \exists x \sim p(x)$ และ $\exists x \sim p(x) \rightarrow \sim (\forall x p(x))$

กรณีพิสูจน์ $\sim (\forall x p(x)) \rightarrow \exists x \sim p(x)$

สมมติ

$\sim (\forall x p(x))$

เป็น T

$\forall x (p(x))$

เป็น F

มี x ที่ทำให้

$p(x)$

เป็น F

มี x ที่ทำให้

$\sim p(x)$

เป็น T

$\exists x \sim p(x)$

เป็น T

สรุป $\sim (\forall x p(x)) \rightarrow \exists x \sim p(x)$ คือ T \rightarrow T เป็นจริง

ตัวปงปริมาณ

กรณีพิสูจน์ $\exists x \sim p(x) \rightarrow \sim(\forall x p(x))$

สมมติ $\exists x(\sim p(x))$ เป็น T

มี x ที่ทำให้ $\sim p(x)$ เป็น T

มี x ที่ทำให้ $p(x)$ เป็น F

$\forall x(p(x))$ เป็น F

$\sim(\forall x p(x))$ เป็น T

สรุป $\exists x (\sim p(x)) \rightarrow \sim(\forall x p(x))$ คือ T \rightarrow T เป็นจริง

ตัวปงปริมาณ

หมายเหตุ ถ้าหากต้องการพิสูจน์โดยแทนค่า สมมุติให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ตัวเลขที่แทนค่า	1	2	3	4	5
$\forall x[x+3>5]$	F	F	T	T	T
$\sim \forall x[x+3>5]$	T	T	F	F	F
$\exists x[x+3\leq 5]$	T	T	F	F	F

$\sim \forall x[x+3>5]$ โดยภายใน 3, 4, 5 ทั้งหมดมีค่าความจริงเป็น T แต่ประพจน์มีนิเสธจึงมีผลลัพธ์ที่ได้เป็น F และ 1, 2 ทำให้มีค่าความจริงเป็น F แต่ประพจน์มีนิเสธจึงมีผลลัพธ์ที่ได้เป็น T ซึ่งเหมือนกับกรณีของ $\exists x[x+3\leq 5]$ ทุกรอบนี้

$\exists x[x+3\leq 5]$ โดยภายใน 3, 4, 5 ในเซตคำตอบนี้ไม่มีแม้แต่ตัวเดียว ที่ทำให้ประพจน์มีผลลัพธ์ที่ได้เป็น F และ 1, 2 ทำให้มีค่าความจริงเป็น T ซึ่งเหมือนกับกรณีของ $\sim \forall x[x+3>5]$ ทุกรอบนี้

ดังนั้น จึงสามารถสรุปได้ว่า $\sim \forall x(x+3 > 5)$ สมมูลกับ $\exists x(x+3 \leq 5)$ โดยพิจารณาจากการแทนค่า แต่วิธีนี้ไม่สามารถนำมาพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้ แต่อาจจะใช้ในการตรวจสอบคำตอบได้

แบบฝึกหัด 1.1

1) จากข้อความข้างล่างนี้ให้ทำเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่ถูก และทำเครื่องหมาย ✗ หน้าข้อความที่ผิด

_____ 1.1) $\sim(\forall x[x^2=1] \vee \exists x[2x=x+1]) \equiv \exists x[x^2 \neq 1] \wedge \forall x[2x \neq x+1]$ โดย $x \in \mathbb{R}$

แบบฝึกหัด

1) จากข้อความข้างล่างนี้ให้ทำเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่ถูก และทำเครื่องหมาย ✗ หน้าข้อความที่ผิด

_____ 1.1) $\sim(\forall x[x^2=1] \vee \exists x[2x=x+1]) \equiv \exists x[x^2 \neq 1] \wedge \forall x[2x \neq x+1]$ โดย $x \in \mathbb{R}$

_____ 1.2) $\sim\forall x\forall y[x+y > 0] \equiv \exists x\exists y[x+y \geq 0]$ โดย $x, y \in \mathbb{R}$

_____ 1.3) $\sim\exists x\forall y[(x=y)] \equiv \sim\forall x\exists y[x \neq y]$ โดย $x, y \in \mathbb{R}$

_____ 1.4) $\exists x\forall y[(x=y) \rightarrow (x^2 > y)] \equiv \forall x\exists y[(x=y) \wedge (x^2 \leq y)]$ โดย $x, y \in \mathbb{R}$

_____ 1.5) $\sim\exists x\forall y[(xy < 0) \rightarrow (x < 0 \vee y < 0)] \equiv \exists x\forall y[(xy < 0) \wedge (x \geq 0 \wedge y \geq 0)]$ โดย $x, y \in \mathbb{R}$

_____ 1.6) $\exists y\forall x[(xy = 0 \wedge x \neq 0) \rightarrow y = 0] \equiv \forall y\exists x[(xy = 0 \wedge x \neq 0) \wedge y \neq 0]$ โดย $x, y \in \mathbb{R}$

_____ 1.7) $\forall x\exists y[(x > y) \wedge (x^2 < y)] \equiv \exists x\forall y[(x > y) \rightarrow (y \leq x^2)]$ โดย $x, y \in \mathbb{R}$

_____ 1.8) $U = \{1, 2, 3\} \exists x\forall y[x^2 < y + 1]$ มีค่าความจริงเป็น F

_____ 1.9) $U = \{1, 2, 3\} \exists y\forall x[x^2 + y^2 < 12]$ มีค่าความจริงเป็น T

แบบฝึกหัด 2

2) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x \in \mathbb{R} (x^2 - 6x + 9 \geq 0)$

ແບບຝຶກຫັດ 3

3) ຈົນພິສູງນີ້ຄ່າຄວາມຈົງຂອງປະເພນີ້ນີ້ $\forall x \in \mathbb{R} (x^2 - 6x + 9 < 0)$

แบบฝึกหัด 4

4) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x \left(\frac{1}{x^2+1} > 1 \right)$ เมื่อ x จำนวนจริง

แบบฝึกหัด 5

5) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x(x^2 > x)$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

แบบฝึกหัด 6

6) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x(x^2 > x)$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

แบบฝึกหัด 8

7) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x(x > 1 \rightarrow x^2 > x)$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

แบบฝึกหัด

- 8) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x(x > 1 \rightarrow x^2 > x)$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง
- 9) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x(x > 1 \rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3})$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง
- 10) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x(x > 1 \rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3})$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง
- 11) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x(x > 1 \rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{2})$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง
- 12) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x(x > 1 \rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{2})$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

แบบฝึกหัด

- 13) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x(p(x))$ โดย $U = \{1, 2, 3\}$ และให้ $p(x)$ คือ $x + 1 \geq 2$
- 14) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x(p(x))$ โดย $U = \{1, 2, 3\}$ และให้ $p(x)$ คือ $x + 1 \leq 2$
- 15) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x(p(x))$ โดย $U = \{1, 2, 3\}$ และให้ $p(x)$ คือ $x + 1 < 3$
- 16) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x(p(x))$ โดย $U = \{1, 2, 3\}$ และให้ $p(x)$ คือ $x + 1 < 2$

ขั้นตอนวิธี

บทที่ 6

Discrete Mathematics for Computer Science

อ.เอัญ สุริยะฉาย (ENS)

ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ในการเขียนโปรแกรม ผู้เขียนโปรแกรมสามารถเขียนแล้วรัน
ออกมายieldผลลัพธ์เหมือนกัน แต่บางครั้งโปรแกรมเหล่านี้อาจจะใช้
ระยะเวลาในการประมวลผลหรือทรัพยากรที่ใช้ในการประมวลผล
แตกต่างกัน แน่นอนว่า **โปรแกรมที่ดีต้องเป็นโปรแกรมที่ใช้เวลาน้อย**
และใช้ทรัพยากรน้อยที่สุด ซึ่งการที่จะวิเคราะห์ได้ว่าโปรแกรมไหนดี
หรือไม่ นั้นต้องวิเคราะห์จากขั้นตอนวิธีที่ใช้ในการเขียนโปรแกรมนั้น
ดังนั้นขั้นตอนวิธีจึงเป็นวิชาที่สำคัญมาก เป็นพื้นฐานของการศึกษาใน
สาขาวิชานคณิตศาสตร์ต่อไป

ความหมาย

ขั้นตอนวิธีหรืออัลกอริทึม (Algorithms) คือ ลำดับของขั้นตอนการคำนวณที่ใช้แก้ปัญหา โดยการเปลี่ยนข้อมูลนำเข้าของปัญหา (input) ออกมายield เป็นผลลัพธ์ (output) ขั้นตอนวิธีดังกล่าววนจะสามารถนำมาเขียนเป็นโปรแกรมในคอมพิวเตอร์ได้หรือกระบวนการแก้ปัญหาที่สามารถเข้าใจได้โดยมีลำดับหรือวิธีการในการแก้ไขปัญหาได้ปัญหานั้นอย่างเป็นขั้นเป็นตอนและชัดเจน เมื่อนำเข้าอะไร แล้วจะต้องได้ผลลัพธ์เช่นไร โดยทั่วไปขั้นตอนวิธีจะประกอบด้วย วิธีการเป็นขั้นๆ และมีส่วนที่ต้องทำแบบวนซ้ำ (iterate) หรือเวียนเกิด (recursive) โดยใช้ตรรกะ (logic) และ/หรือ ในการเปรียบเทียบ (comparison) ในขั้นตอนต่างๆ จนกระทั่งเสร็จสิ้นการทำงาน ในการทำงาน หรือแก้ปัญหาอย่างเดียวกัน การเลือกขั้นตอนวิธีที่ใช้แก้ปัญหาที่แตกต่างกันนั้น อาจได้ผลลัพธ์ออกมาเหมือนกันหรือไม่ก็ได้ โดยขั้นตอนวิธีที่แตกต่างกันนั้นจะส่งผลให้เวลา (time) และขนาดหน่วยความจำ (space) ที่ต้องการต่างกัน หรือเรียกว่าอีกอย่างว่ามีความซับซ้อน (complexity) ต่างกัน

ความหมาย

การนำขั้นตอนวิธีไปใช้ ไม่จำกัดเฉพาะการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ แต่สามารถใช้กับปัญหาอื่น ๆ ได้ เช่น การออกแบบวงจรไฟฟ้า, การทำงานเครื่องจักรกล, หรือแม้กระทั่งปัญหาในธรรมชาติ เช่น วิธีของสมองมนุษย์ในการคิดเลข หรือวิธีการขนาดอาหารของแมลง

หนึ่งในขั้นตอนวิธีอย่างง่าย คือ ขั้นตอนวิธีที่ใช้หาจำนวนที่มีค่ามากที่สุดในรายการซึ่งไม่ได้เรียงลำดับไว้ ในการแก้ปัญหานี้ต้องพิจารณาจำนวนทุกจำนวนในรายการ ซึ่งมีขั้นตอนวิธีดังนี้ และ **รหัสเทียม (Pseudo Code)** สำหรับขั้นตอนวิธีนี้

- 1) พิจารณาแต่ละจำนวนในรายการ ถ้ามันมีค่ามากกว่า จำนวนที่มีค่ามากที่สุดที่เคยพบจนค่านั้นเอาไว้
- 2) จำนวนที่จดไว้ตัวสุดท้าย จะเป็นจำนวนที่มีค่ามากที่สุด

ความหมาย

ขั้นตอนวิธีการหาค่ามากสุดระหว่าง จำนวน 3
จำนวน a, b, c

ขั้นตอนวิธี เพื่อหาค่ามากสุดของชุดข้อมูล a_1, a_2, \dots, a_n
โดย a คือ อาร์เรย์ โดยถ้า a_1 คือตำแหน่งสมาชิกตัวที่ 1
 เช่น a มีสามารถ คือ 5, 2, 4, 7, 8 ตามลำดับ ค่าของ a_1
 คือ 5 และค่าของ a_5 คือ 8 ในกรณีนี้ n คือขนาดของ
 อาร์เรย์

บรรทัด

```

1      If (a > b) then
2          If (a > c) then
3              return a
4          else
5              return c
6          else if (b > c) then
7              return b
8          else
9              return c
    
```

บรรทัด

```

1      large = a1
2      i = 2
3      if ( ai > large ) then
4          large = ai
5      i = i+1
6      if ( i > n ) then
7          return large
8      else
9          goto line 3
    
```

การวิเคราะห์ขั้นตอนวิธี

โดยปกติประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธี หรือ การวิเคราะห์ขั้นตอนวิธี สามารถพิจารณาได้ 2 ส่วนหลัก

1) หน่วยความจำ (Memory) เรียกว่า การวิเคราะห์หน่วยความจำ (Space Complexity)

โดยองค์ประกอบคือ จำนวนหน่วยความจำที่ใช้ตอนรัน (run) และตอนคอมไพล์ (compile) สำหรับหน่วยความจำ มี 2 แบบ คือ

Static คือ ขนาดหน่วยความจำที่ใช้เป็นค่าคงที่ เช่น อาร์เรย์ (Array)

Dynamic คือ ขนาดหน่วยความจำที่ใช้สามารถเปลี่ยนแปลงได้ เช่น วัตถุ (Object)

หมายเหตุ กรณีการเขียนโปรแกรมรูปแบบเวียนเกิดยิ่งลักษณะมาก ยิ่งใช้หน่วยความจำมาก

การวิเคราะห์ขั้นตอนวิธี

OS (Reserved)			
Function โดยตรงมาข้างล่าง (Read-Write)	void func() { }		Stack Segment
New โดยเขียนมาข้างบน (Read-Write)	Test t = new Test();	Dynamic Data (Heap)	Data Segment
Global variables Static variables (Read-Write)	int a = 10;	Static Data	
Code Program (Read-only)	public class TEST { public static void main(String[] args) { } }		Text Segment

การวิเคราะห์ขั้นตอนวิธี

2) เวลา (Time) เรียกว่า การวิเคราะห์เวลา (Time Complexity)

โดยองค์ประกอบคือ เวลาที่ใช้ตอนรัน โดยส่วนนี้จะขึ้นอยู่กับโปรแกรมที่เขียน และ เป็นส่วนที่ใช้พิจารณาขั้นตอนวิธี เพราะตอนคอมไพล์หรือตรวจสอบภาษาซีมเพนซ์ (syntax) ส่วนนี้ไม่ขึ้นอยู่กับโปรแกรมที่เขียน

การวิเคราะห์เวลาสามารถกระทำได้โดยการจับเวลา และทดลองรันกับข้อมูลหลายชุด ซึ่งบางชุดอาจจะใช้เวลาน้อย บางชุดอาจจะใช้เวลามาก แล้วดูว่าคอมพิวเตอร์ใช้เวลาในการรันนานไหม โดยรันหลายๆ ครั้งแล้วหาค่าเฉลี่ย

- เวลากระทำการน้อย (น้อยสุด คือเวลาดีที่สุด best-case time)
- เวลากระทำการมาก (มากสุด คือเวลาแย่ที่สุด worst-case time)
- เวลากระทำโดยเฉลี่ย (เวลาโดยเฉลี่ย average-case time)

การพิจารณาตามขั้นตอนวิธี คือการพิจารณาเฉพาะขั้นตอนที่สำคัญของปัญหาที่ต้องการแก้ เช่น จำนวนการกระทำหรือเวลา ตัวนี้คือโค้ด (code) มาวิเคราะห์ว่าต้องใช้ทรัพยากรหรือเวลาในการรันเท่าไรโดยประมาณ

การวิเคราะห์บันตอนวิธี

ตัวอย่างที่ 1 จะพิจารณาจำนวนหรือเวลา กระทำคำสั่งเปรียบเทียบ $a_i > \text{large}$ และ a คือ อาร์เรย์ โดยถ้า a_1 คือตัวแทนของสมาชิกตัวที่ 1 เช่น a มีค่า 5, 2, 4, 7, 8 ตามลำดับ ค่าของ a_1 คือ 5 และค่าของ a_5 คือ 8 ในกรณีนี้ n คือขนาดของอาร์เรย์

บรรทัด

1	Large = a_1	ให้ $t(n)$ เป็นจำนวนหรือเวลา สำหรับโค้ดชุดนี้
2	$i = 2$	สมมุติ $n = 5$
3	if ($a_i > \text{Large}$) then	รอบแรก $i = 3 \rightarrow 3 > 5$
4	Large = a_i	รอบสอง $i = 4 \rightarrow 4 > 5$
5	$i = i+1$	รอบสาม $i = 5 \rightarrow 5 > 5$
6	if ($i > n$) then	รอบสี่ $i = 6 \rightarrow 6 > 5$ หยุด \rightarrow ทำ 4 ครั้งจาก $n = 5$ ดังนั้น $n-1$
7	return Large	
8	else	
9	goto line 3	

การวิเคราะห์บันตอนวิธี

ตัวอย่างที่ 2 จงพิจารณาจำนวนหรือเวลา

บรรทัด

```

1      j=n
2      while ( j ≥ 1 )
3      {
4          for i = 1 to j
5              x = x+1
6              j = j-1
7      }

```

ให้ $t(n)$ เป็นจำนวนหรือเวลา สำหรับโค้ดชุดนี้
 สมมุติ $n = 5$
 รอบแรก $j = 5 \rightarrow$ for i to j ทำอีก 5 รอบ
 รอบสอง $j = 4 \rightarrow$ for i to j ทำอีก 4 รอบ
 รอบสาม $j = 3 \rightarrow$ for i to j ทำอีก 3 รอบ
 รอบสี่ $j = 2 \rightarrow$ for i to j ทำอีก 2 รอบ
 รอบห้า $j = 1 \rightarrow$ for i to j ทำอีก 1 รอบ

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 = \frac{5(5+1)}{2}$$
 คือ $\frac{n(n+1)}{2}$

การวิเคราะห์บันตอนวิธี

ตัวอย่างที่ 3 จงพิจารณาจำนวนหรือเวลา

บรรทัด

1	$j=n$	ให้ $t(n)$ เป็นจำนวนหรือเวลา สำหรับโค้ดชุดนี้
2	while ($j > 1$)	สมมุติ $n = 8$
3	{	รอบแรก $j = 8 \rightarrow 4 = 8/2$
4	$j = j/2$	รอบสอง $j = 4 \rightarrow 2 = 4/2$
5	}	รอบสาม $j = 2 \rightarrow 1 = 2/2$ จำนวนรอบทั้งหมด คือ 3 รอบ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\log_2 8 = 3 = \log_2 n$

การวิเคราะห์บันตอนวิธี

ตัวอย่างที่ 4 จงพิจารณาจำนวนหรือเวลา

บรรทัด

1	$j=n$	ให้ $t(n)$ เป็นจำนวนหรือเวลา สำหรับโค้ดชุดนี้
2	while ($j \geq 1$)	สมมุติ $n = 5$
3	{	รอบแรก $j = 5 \rightarrow$ for i to n ทำอีก 5 รอบ
4	$i=n$	รอบสอง $j = 4 \rightarrow$ for i to n ทำอีก 5 รอบ
5	while ($i \geq 1$)	รอบสาม $j = 3 \rightarrow$ for i to n ทำอีก 5 รอบ
6	{	รอบสี่ $j = 2 \rightarrow$ for i to n ทำอีก 5 รอบ
7	$i = i - 1$	รอบห้า $j = 1 \rightarrow$ for i to n ทำอีก 5 รอบ
8	}	จำนวนรอบทั้งหมด คือ 25 รอบ ซึ่งมีค่าเท่ากับ nxn หรือ n^2
9	$j = j-1$	
10	}	

การเปรียบเทียบขั้นตอนวิธี

ขั้นตอนวิธีที่ได้ บางครั้งไม่สามารถบอกจำนวนหรือเวลาที่แท้จริงได้ถ้าต้องการเปรียบเทียบขั้นตอนวิธีเหล่านี้ที่แก้ปัญหาเดียวกัน จะต้องปรับขั้นตอนวิธีให้เข้าสู่ตัวอ้างอิงตัวเดียวกัน โดยการตัวอ้างอิงที่นิยมใช้ คือ บิกโอ (Big O) โดย O คือสัญลักษณ์ของ Big O ซึ่งเป็นการปรับให้มีค่าโดยประมาณที่มากที่สุด โดยหลักการคือการยุบเศษเข้ากับตัวมากที่สุดเพื่อให้ได้ค่าที่มากที่สุดค่าของขั้นตอนวิธี โดยเรียงลำดับประสิทธิภาพจากมากไปน้อยดังนี้

$$c > \log N > N > N^2 > 2^n > N!$$

บิกโอ คือ กรณีที่ใช้เวลากระทำการมาก (worst case) ของขั้นตอนวิธี ซึ่งหมายความว่า ขั้นตอนวิธีนี้จะทำงานไม่แย่ไปกว่า Big O ของมันแล้ว ซึ่งก็เหมือนกับเป็นตัวบวกถึง ประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธี เพื่อใช้ในการเปรียบเทียบขั้นตอนวิธีหลายวิธีเข้าด้วยกัน

การเปรียบเทียบขั้นตอนวิธี

ขั้นตอนวิธีที่อยู่ใน $O(n)$ ก็หมายความว่า ถ้าใช้ขั้นตอนวิธีนี้ประมวลผลข้อมูล n อย่าง มีขั้นตอนในการประมวลผลประมาณ n ครั้ง และไม่ซ้ำไปกว่านี้ ส่วนขั้นตอนวิธีที่อยู่ใน $O(n^3)$ ก็หมายความว่าถ้าใช้ขั้นตอนวิธีนี้ประมวลผลข้อมูล n อย่าง มีขั้นตอนในการประมวลผลประมาณ n^3 ครั้ง และ **ไม่ซ้ำไปกว่านี้** ด้วยวิธีนี้ Big O ของขั้นตอนวิธีใดๆ จะสามารถเปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาของขั้นตอนวิธีนั้นๆ เช่นตัวอย่างนี้ $O(n)$ นั้นเร็วกว่า $O(n^3)$ ถ้าประมวลผลข้อมูลเดียวกัน

ในแง่ของการเปรียบเทียบ Big O สามารถนำมาระดับความสามารถของขั้นตอน เช่นกัน $O(\log n)$ อันนี้เร็วมาก ส่วน $O(2^n)$ อันนี้ช้ามาก ถ้าให้เรียงลำดับ Big O มาตรฐานที่พบบ่อย มีเปรียบเทียบกับความเร็วจากเร็วมากไปทางเร็วน้อยนั้นมีรายละเอียดดังนี้

$$O(1) > O(\log n) > O(n) > O(n \log n) > O(n^2) > O(2^n) > O(n!)$$

การเปรียบเทียบขั้นตอนวิธี

โดย **O(1)** คือ **Constant Time Algorithm** เป็นขั้นตอนวิธีที่เร็วที่สุด คือ ทำงานทุกครั้งใช้เวลาเท่าเดิมเสมอ ไม่ว่า ข้อมูลนำเข้าจะมีค่ามากแค่ไหน ขั้นตอนวิธี ประเภทนี้ไม่ค่อยมีให้เห็นนัก และแก้ปัญหาได้ไม่ก่อปัจจัย เช่น การแทรกค่าใหม่เข้าไปที่จุดท้ายสุดของรายการโยง (linked list) หรือโปรแกรมที่ไม่มีลูปเลย หรือลูปที่กำหนดตายตัว

โดย **O(log n)** คือ **Logarithmic Algorithm** เป็นขั้นตอนที่เริ่มน้อยจริง เรียกได้ว่าเป็นขั้นตอนวิธีที่ที่เร็วที่สุดในความเป็นจริงแล้ว ตัวอย่างเช่น สมมติค่าเป็น ลอการิทึมฐาน 2 ใส่ค่าไป 8 แต่วนซ้ำแค่ 3 ครั้ง ก็สามารถได้ผลลัพธ์ เป็นต้น

โดย **O(n)** คือ **Linear Algorithm** เป็นขั้นตอนที่ทำงานเท่ากับตัวข้อมูลนำเข้า ตัวอย่างเช่น สมมุติใส่ค่าไป 10 แต่วนซ้ำแค่ 10 ครั้ง ก็สามารถได้ผลลัพธ์ เป็นต้น

การเปรียบเทียบขั้นตอนวิธี

โดย **$O(n^2)$** คือ **Quadratic Algorithm** เป็นขั้นตอนที่ทำงานยกกำลังเท่ากับตัวข้อมูลนำเข้า ตัวอย่างเช่น สมมติใส่ค่าไป 10 แต่ว่าหน้า 100 ครั้ง ก็สามารถได้ผลลัพธ์ เป็นต้น พวgnีมักเป็นลูปซ้อนลูปอีกที

โดย **$O(2^n)$** คือ **Polynomial Algorithm** เป็นขั้นตอนที่pubในกรณี เวียนเกิด (recursive) เช่น ปริศนาหอคอยahanอยจำนวนครั้งในการทำงานคือ $a_n = 2^n - 1$ เป็นต้น

โดย **$O(n!)$** คือ **Factorial Algorithm** เป็นขั้นตอนที่pubในกรณีเวียนเกิด เช่น การสลับเปลี่ยนค่า สำหรับ $\{1,2\}$ สามารถสลับได้ 2 ครั้ง คือ $\{1,2\}$ กับ $\{2,1\}$ หรือ $2!$ สำหรับ $\{1,2,3\}$ สามารถสลับได้ $\{1,2,3\} \{1,3,2\} \{2,1,3\} \{2,3,1\} \{3,2,1\} \{3,1,2\}$ จำนวน 6 ครั้ง หรือ $3!$ เป็นต้น

การเปรียบเทียบขั้นตอนวิธี

ตัวอย่างที่ 1

$$f(n) = 2n-1 \text{ จงหา Big O}$$

$f(n) = 2n-1$ คือ $2n$ มีค่าเยอะมาก n คืออนันต์ แล้วเศษคือ -1 เอาเศษยุบรวมเข้าไปที่ n

$$= 2n + n$$

$O(f(n)) = 3n$ โดยที่ $f(n) \leq 3n$ แต่การเขียน Big O ไม่คิดตัวเลขหน้า n ดังนั้น คำตอบคือ n

หมายเหตุ สำหรับกรณี Big O ไม่ว่าพจน์ที่ความเร็วมากกว่าพจน์ที่ชาที่สุด ในกรณีนี้คือ 1 ซึ่ง **ไม่ว่าจะเป็นบวกหรือลบ** ให้บวกเพิ่มไปอีก 1 สำหรับพจน์ที่มีค่ามากที่สุด เช่นในกรณีนี้คือ $2n$ กลายเป็น $3n$ แต่การเขียน Big O สามารถ **ไม่คิดตัวเลขหน้า n** ที่ชาที่สุด เพราะจะทำให้เปรียบเทียบกันได้ง่ายกว่า ดังนั้นจึงนิยมไม่เขียนตัวเลขหน้า n ที่ชาที่สุด ทำให้คำตอบที่ได้ n

การเปรียบเทียบขั้นตอนวิธี

ตัวอย่างที่ 2

$$f(n) = n^2 + n + 3 \quad \text{จงหา Big O}$$

$$f(n) = n^2 + n + 3$$

คือ n^2 มีค่าเยอะมาก เมื่อเปรียบเทียบกับ n เอาเศษยุบรวมเข้าไปที่ n^2

$$O(f(n)) = 2n^2$$

โดยที่ $f(n) \leq 2n^2$ แต่การเขียน Big O ไม่คิดตัวเลขหน้า n ดังนั้น คำตอบคือ n^2

ตัวอย่างที่ 3

$$f(n) = 2n^2 + 7n \quad \text{จงหา Big O}$$

$$f(n) = 2n^2 + 7n$$

คือ n^2 มีค่าเยอะมาก เมื่อเปรียบเทียบกับ n เอาเศษยุบรวมเข้าไปที่ n^2

$$O(f(n)) = 3n^2$$

โดยที่ $f(n) \leq 3n^2$ แต่การเขียน Big O ไม่คิดตัวเลขหน้า n ดังนั้น คำตอบคือ n^2

ແບບືກທັດ

1.1) <pre> i = i * i i = i + 2 j = j + 1 j = j - 3 if(j > 5) print "Love" else print "No" </pre>	1.2) <pre> for i = 1 to n print "Loop" </pre>
1.3) <pre> i = 1 loop (i <= n) i = i+2 </pre>	1.4) <pre> i = 1 loop (i <= n) i = i * 2 </pre>

ແບບຝຶກຫັດ

1.5) for i = 1 to n print “loop1” for j = i to n print “loop2”	1.6) for i = 1 to n for j = 1 to n $x = x+1$
1.7) for i = 1 to n for j = 1 to n for k = 1 to n $x = x+1$	1.8) for i = 1 to n for j = 1 to i print “loop2”
1.9) for i = 1 to n if($a \% 2 == 0$) print “loop2”	1.10) $i = n$ loop ($i \geq 1$) $i = i-2$

ແບບືກທັດ

1.11) $i = n$

loop ($i \geq 1$)

$i = i / 2$

1.12) $i = 1$

loop ($i \leq n$)

if($i \% 2 == 0$)

$i = i + 2$

else

$i = i + 1$

1.13)

for ($i = 0; i < n; i++$)

{

 print E

}

for ($j = 0; j < n; j++$)

{

 print ***

}

for ($j = 0; j < n; j++$)

{

 print ann

}

1.14)

If($n < 2$)

{

$n = n + 2$

}

for ($i = 1; i < n ; i++$)

{

$j = j * 3$

 print dead

}

ແບບືກທັດ

1.15) for (i = 1; i < n ;) { i = i * 10 print dead }	1.16) for (i = 0 ; i < n ; i++) { for (j = 0 ; j < n ; j++) { for (k = 0 ; k < n ; k++) { print work } } }
1.17) for (i = 0 ; i < n ;) { for (j = 0 ; j < n ; j++) { print no_name } }	1.18) for (i = n; i ≥ 1;) { i = i / 5; for (j = 0; j < n; j++) { print love me } }

ແບບຝຶກຫັດ

1.19)

```
for (i = 0 ; i < 100000 ; i++)
{
    for (j = 0 ; j < 1000000 ; j++)
    {
        print work
    }
}
```

1.20)

```
for (i = 0; i < N; i++)
{
    print love
}
for (j = 0; j < N; j++)
{
    print love
}
```

1.21)

```
for (i = 1; ; i++)
{
    i = i * 2;
}
```

1.22)

```
Function test (int N)
{
    print chanida
    if (N<1)
    { return; }

    if (N>1)
    { test (N-1); }

    if (N>1)
    { test (N-1);}
}
```

ແບບືກທັດ

1.23)
 for ($i = 1; i \leq N; i++$)
 {
 $i = i * 2;$
 for ($j = 0; j < N; j++$)
 {
 print love
 }
 }
 }

1.24)
 Function test(int l)
 {
 if ($l == n$) {}
 else
 {
 for (int i = l; i < n; i++)
 {
 test($l+1$);
 }
 }
 }
 }

1.25)
 for ($i = n; i \geq 1; i--$)
 {
 $i = i - 2;$
 }
 }

1.26)
 for ($i = n; i \geq 1; i--$)
 {
 $i = i / 10;$
 for ($j = 0; j < n; j++$)
 {
 print love me
 }
 }
 }

แบบฝึกหัด

2) จงหา Big O ของฟังก์ชัน $f(n) = 3n^2 - 7n$

3) จงหา Big O ของฟังก์ชัน $f(n) = 6n^3 + 5n$

4) จงหา Big O ของฟังก์ชัน $f(n) = 2n^2 + n - n\log_2 n$

5) จงหา Big O ของฟังก์ชัน $f(n) = 2^n(n^2 - 2n)$

6) จงหา Big O ของฟังก์ชัน $f(n) = 2n^4 + 3n^3 + 5$

7) จงหา Big O ของฟังก์ชัน $f(n) = n^2 - 3n + 3$

8) จงหา Big O ของฟังก์ชัน $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Note

ทฤษฎีกราฟ

บทที่ 7

Discrete Mathematics for Computer Science

อ.เอัญ สุริยะฉาย (ENS)
ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ทฤษฎีกราฟ

- ในการเขียนโปรแกรม ผู้เขียนโปรแกรมจำเป็นต้องวิเคราะห์ปัญหาต่างๆ ซึ่งปัญหาต่างๆ เหล่านี้ถ้ามองในมุมมองข้อความเราราอาจจะวิเคราะห์ปัญหานั้นได้ยาก เช่น เมือง A เชื่อมกับเมือง C, เมือง D เชื่อมเมือง B, เมือง C เชื่อมเมือง B จงหาเส้นทางจากเมือง A ไป D ถ้าได้โจทย์แบบนี้ผู้เขียนโปรแกรมคงสับสนและวิเคราะห์ความสัมพันธ์ได้ยาก
- แต่ถ้าหากเรานำข้อความเหล่านี้มาเขียนเป็นรูปภาพ เราจะสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ได้ง่าย ซึ่งในความเป็นจริงแล้วปัญหานี้ในโลกนี้สามารถเขียนอธิบายในเชิง**กราฟ**ได้มากมาย ดังนั้นเรียนทฤษฎีกราฟจึงเป็นเรื่องสำคัญและเป็นพื้นฐานของการศึกษาในสาขาด้านคอมพิวเตอร์ต่อไป

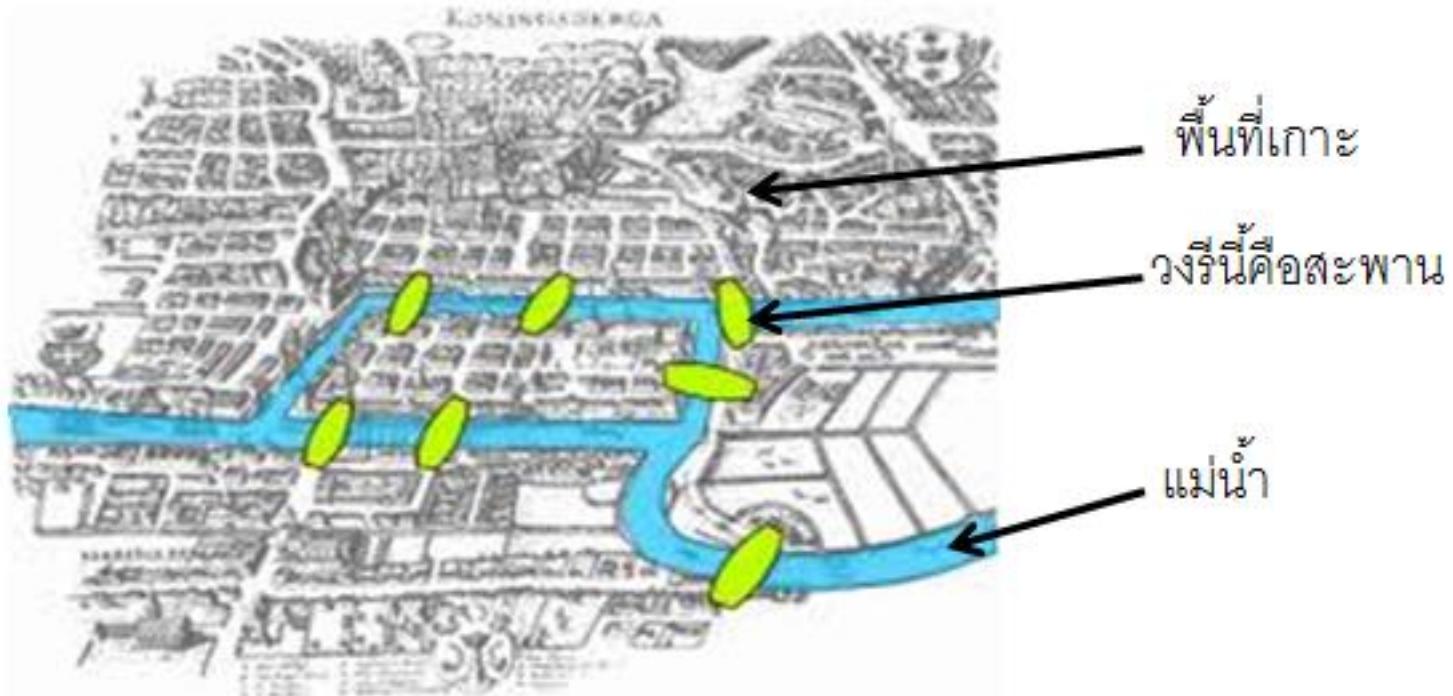
คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ

- กราฟเป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งใช้สำหรับจำลองปัญหาบางอย่าง ด้วยแผนภาพที่ประกอบด้วยจุด และเส้นที่เชื่อมระหว่างจุด 2 จุด ตัวอย่างเช่น
- แผนภาพที่แสดงเส้นทางของรถไฟฟ้า, แผนภาพที่แสดงถนนที่เชื่อมเมืองต่างๆ, แผนภาพแสดงโครงสร้างของจราจรไฟฟ้า, แผนภาพเครือข่ายคอมพิวเตอร์, แผนภาพแสดงเส้นทางการบิน, แผนภาพแสดงโครงสร้างทางเคมีของสารประกอบไฮโดรคาร์บอน เป็นต้น

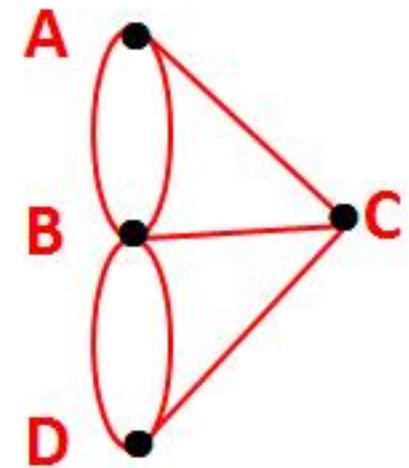
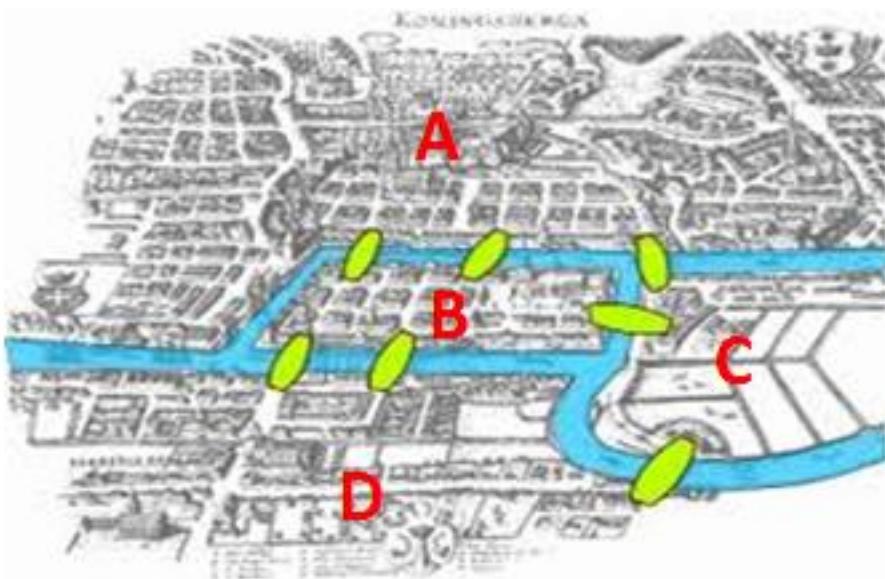
คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ

- เลออนาร์ด ออยเลอร์ (Leonhard Euler) นักคณิตศาสตร์ ชาวสวิส เป็นผู้เริ่มในการศึกษาทฤษฎีกราฟ เนื่องจากการตอบข้อคำถาม เกี่ยวกับสะพานเมืองเคอนิกส์เบอร์ก โดยเมืองเคอนิกส์เบอร์กตั้งอยู่ริมฝั่งแม่น้ำพรีเกล (Pregel) ทั้งสองฝั่ง และบางส่วนเป็นเกาะ โดยมีสะพานเชื่อม 7 สะพาน
- คำถามคือ เป็นไปได้หรือไม่ ที่จะเดินทางรอบเมือง โดยเริ่มจากพื้นที่ใดพื้นที่หนึ่ง แล้วมาจบลงที่พื้นที่เดิมต้น โดยการข้ามสะพันทั้ง 7 แห่ง แต่ละแห่งข้ามได้เพียงครั้งเดียว โดยจากคำถามนี้สามารถเขียนออกมาเป็นรูปได้ดังนี้

คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ



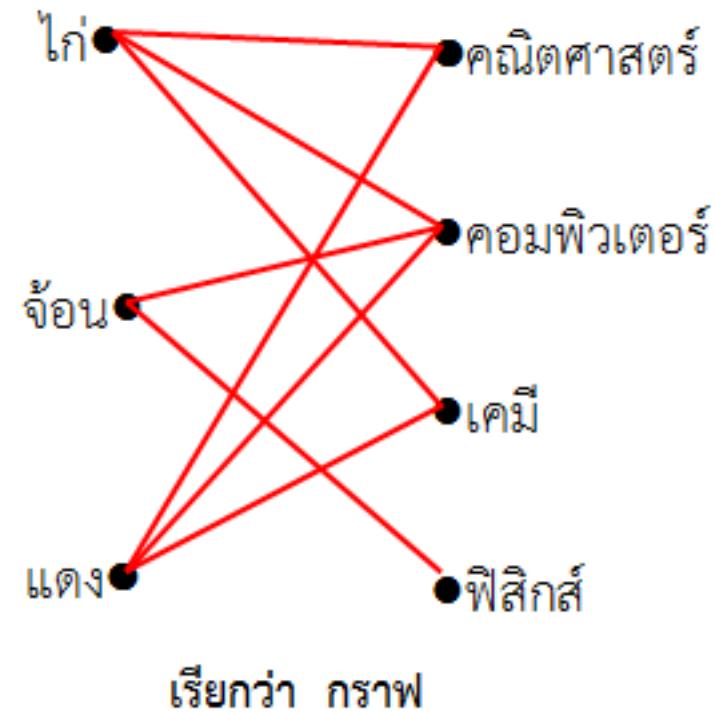
คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ



คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ

นอกจากกรณีสะพานเมืองคูโอนิกส์เบอร์ก ความสัมพันธ์ของข้อมูลต่างก็สามารถเขียนออกมาในแบบกราฟดังตัวอย่างข้างล่างนี้ ด้านซ้ายมีคือตัวร่างความสัมพันธ์ ด้านขวา มีคือความสัมพันธ์ในรูปแบบกราฟ

ชื่อ	วิชา
ไก่	คณิตศาสตร์
จ้อน	คอมพิวเตอร์
แดง	คณิตศาสตร์
ไก่	เคมี
ไก่	คอมพิวเตอร์
จ้อน	ฟิสิกส์
แดง	เคมี
แดง	คอมพิวเตอร์



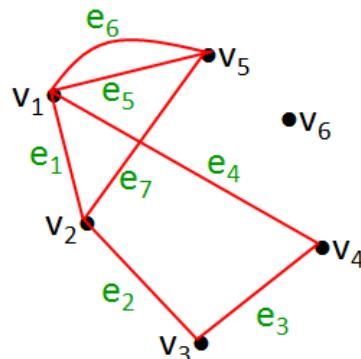
คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ

บทนิยาม กราฟ G ประกอบด้วย เชตจำกัด 2 เชต คือ

1. เชตที่ไม่เป็นเชตว่างของจุดยอด (Vertex) แทนด้วยสัญลักษณ์ $V(G)$
2. เชตของเส้นเชื่อม (Edge) ที่เชื่อมระหว่างจุดยอด แทนด้วยสัญลักษณ์ $E(G)$

ข้อสังเกต $V(G) \neq \emptyset$ แต่ $E(G)$ อาจเป็นเชตว่างได้

จากรูปข้างล่างนี้ เส้นที่ลากต่อระหว่างจุดหรือจุดยอด (Vertex) เรียกว่า **เส้นเชื่อม (edge)** กราฟ $G = (V, E)$ ประกอบด้วยเชต V ซึ่งเป็นเชตของจุดต่างๆ และ E ซึ่งเป็นเชตของเส้นเชื่อมระหว่างจุด 2 จุด



$$\begin{aligned} V &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \\ E &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \text{ หรือ} \\ E &= \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_1, v_5), (v_1, v_6), (v_2, v_5)\} \end{aligned}$$

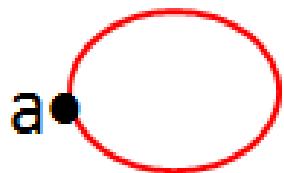
คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ



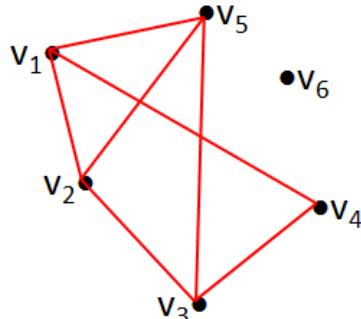
จากรูป เส้นเชื่อม $e = (a, b)$ คือเส้นที่เชื่อมต่อระหว่างจุด a และ จุด b จะเรียกว่าเส้นเชื่อม e โดยที่จุด a และ จุด b เชื่อมกัน (adjacent) สามารถเขียน $e = (b, a)$ ได้



จากรูป จุดประชิดกันมีเส้นเชื่อมมากกว่า 1 เส้น เรียกว่า **เส้นเชื่อมขนาน (parallel edges)**

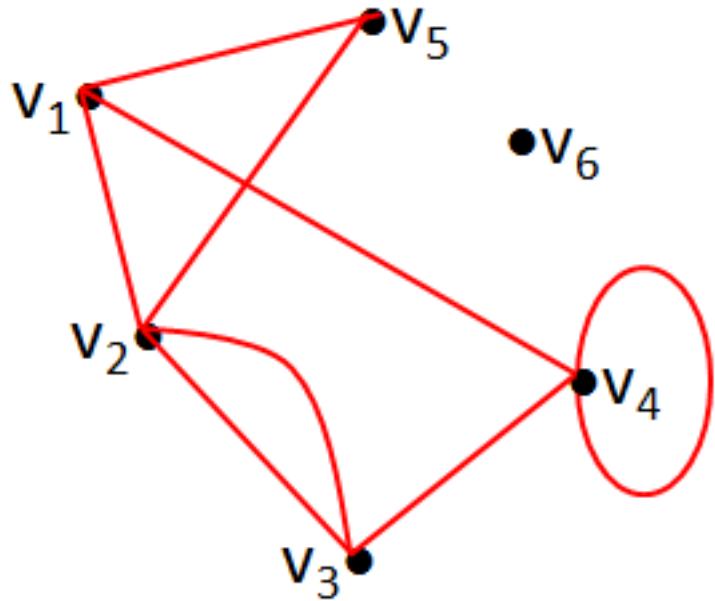


จากรูป $e = (a, a)$ คือเส้นเชื่อมที่ต่อจุดเดียวกัน เรียกว่า **เส้นเชื่อมวงวน (loop)**



กราฟที่ไม่มีหัวเส้นเชื่อมวงวนและเส้นเชื่อมขนาน เรียกว่า **กราฟเชิงเดียว (simple graph)** จุดที่ไม่มีการเชื่อมกับใคร เรียกว่า **จุดอิสระ (isolated point)** จากรูป ในกรณีนี้คือ V_6

คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ



ดีกรีของจุด (Degree of Vertex) คือ ดีกรีของจุด v เขียนแทนด้วย $\deg(v)$ คือจำนวนเส้นเชื่อมที่กระแทบกับจุด v สำหรับดีกรีเป็นเลขคู่เรียกว่า จุดยอดคู่ (even vertex) และดีกรีเป็นเลขคี่ เรียกว่า จุดยอดคี่ (odd vertex) จากรูป

$$\deg(v_1) = 3$$

$$\deg(v_2) = 4$$

$$\deg(v_3) = 3$$

$$\deg(v_4) = 4 \text{ มีเส้นเชื่อมวงวน (loop) } = +2$$

$$\deg(v_5) = 2$$

$$\deg(v_6) = 0$$

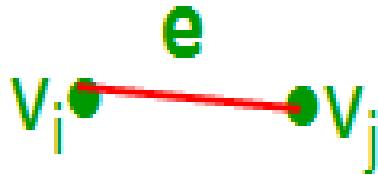
ถ้า G เป็นกราฟ มีผลรวมของดีกรีของทุกจุดในกราฟเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อม ถ้า G คือ กราฟ และ

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) + \dots + \deg(v_n) = 2 \text{ (จำนวนเส้นเชื่อมของ } G\text{)}$$

$$\text{ผลรวมดีกรี} = 16$$

$$\text{จำนวนเส้นเชื่อม} = 8$$

คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ

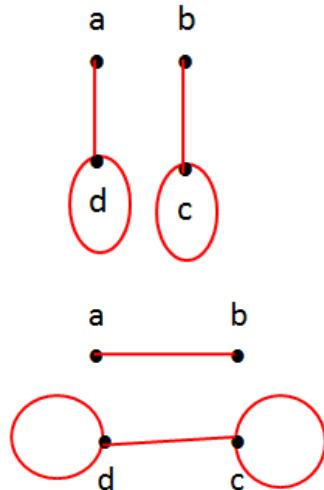


จากรูป เส้นเชื่อม e ระหว่างจุด v_i และ v_j มีค่าเป็น 1
 v_i มีจำนวนดีกรี 1 และ v_j มีจำนวนดีกรี 1 ดังนั้น

จำนวนดีกรีของ e จะนับเป็น 2

สรุป เส้นเชื่อม e ใดๆ จะนับเป็นดีกรี 2 ครั้งเสมอ
 ดังนั้น ผลรวมดีกรีของกราฟ

$$G = 2 \times \text{ของจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟ } G$$



จากรูป กราฟที่มี 4 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 1, 1, 3 และ 3
 ซึ่ง **สามารถเขียนกราฟได้**

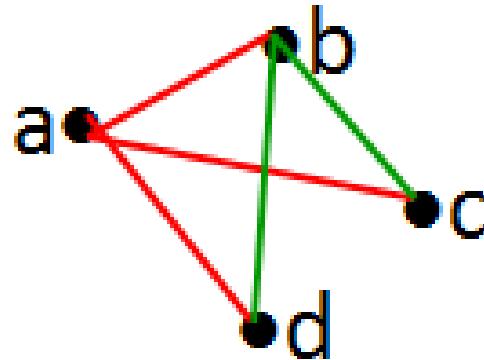
$$\text{ผลรวมดีกรี} = 1+1+3+3 = 8 \text{ (เลขคู่)}$$

แต่ถ้ากราฟที่มี 4 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 1, 1, 2 และ 3

กรณีนี้ **ไม่สามารถเขียนเป็นกราฟได้**

$$\text{ผลรวมดีกรี} = 1+1+2+3 = 7 \text{ (เลขคี่)}$$

คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ



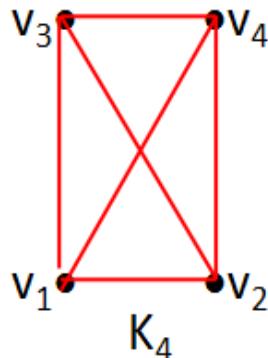
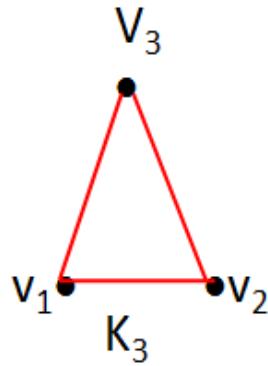
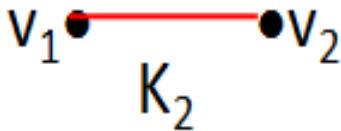
กำหนดให้ภาพนี้มี 4 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 1, 1, 3 และ 3 = 8 สมมุติจุด a มีดีกรี 3 แสดงว่า จุด a ต้อง เชื่อมต่อกับจุดอื่นอีก 3 จุด ให้เป็น b, c, d และ b เป็นอีกจุดที่มีดีกรี 3 ดังนั้น b ต้องมีเส้นเชื่อมกับจุด อื่นที่ไม่ใช่ a อีก 2 เส้น ซึ่งทำให้จุด c และ d มีดีกรี เกิน 1 สรุปคือดีกรี 1, 1, 3 และ 3 นี้ไม่เป็นกราฟ ถ้าสังเกต หังหมดมีเส้นเชื่อม 5 เส้น ซึ่งต้องมีดีกรี เป็น 10 จึงจะสามารถสร้างกราฟได้ดังรูป ซึ่งรูปนี้

ควรจะมี ดีกรี 2, 2, 3 และ 3 = 10 จึงจะสามารถ เขียนกราฟได้ ดังนั้นการกำหนดจุดและผลรวม

ดีกรีของจุดเป็นเลขคู่ ไม่ได้เป็นกราฟได้เสมอไป

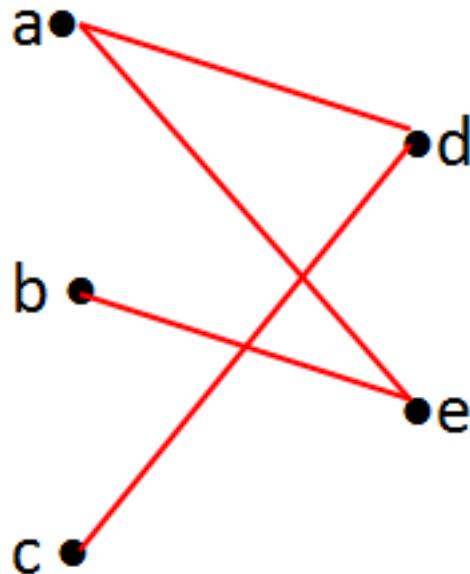
คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ

- K_1



จากรูป กราฟที่มี g จุด จะเรียกกราฟว่า **กราฟบริบูรณ์ (Complete Graph)** เมื่อเป็นกราฟเชิงเดียวและระหว่างจุดทุกคู่ต้องมีเส้นเชื่อม หรืออาจกล่าวได้ว่า ทุกจุดได้มีเส้นเชื่อมโดยตรงกับจุดอื่นๆ ในกราฟทั้งหมด และ**ต้องเชื่อมกันเพียงเส้นเดียวเท่านั้น** ดังรูป

คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ



กราฟ $G = (V, E)$ เป็น **กราฟสองส่วน (Bipartite Graph)** ถ้ามีเซตย่อย V_1 และ V_2 ของ V ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง โดยที่ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ และ $V_1 \cup V_2 = V$ และแต่ละเส้นเชื่อมใน E เชื่อมระหว่างจุดหนึ่งใน V_1 และอีกจุดใน V_2 โดยหลักการคือการสมมุติให้กราฟแบ่งเป็นสองกลุ่ม และมีกฎว่าภายในกลุ่มของตัวเองจะต้องไม่มีเส้นเชื่อมถึงกันโดยตรง โดยพิจารณาดังนี้ จากรูป a เชื่อม d กับ e ดังนั้น a อยู่กลุ่มไหนห้ามมี d กับ e และ b เชื่อม e ดังนั้น b อยู่กลุ่มไหนห้ามมี e และ c เชื่อม d ดังนั้น c อยู่กลุ่มไหนห้ามมี d ซึ่ง a, b, c จึงจัดอยู่ในกลุ่มเดียวกัน ให้จัดอยู่กลุ่มเดียวกันโดยพิจารณาจากตัวห้าม

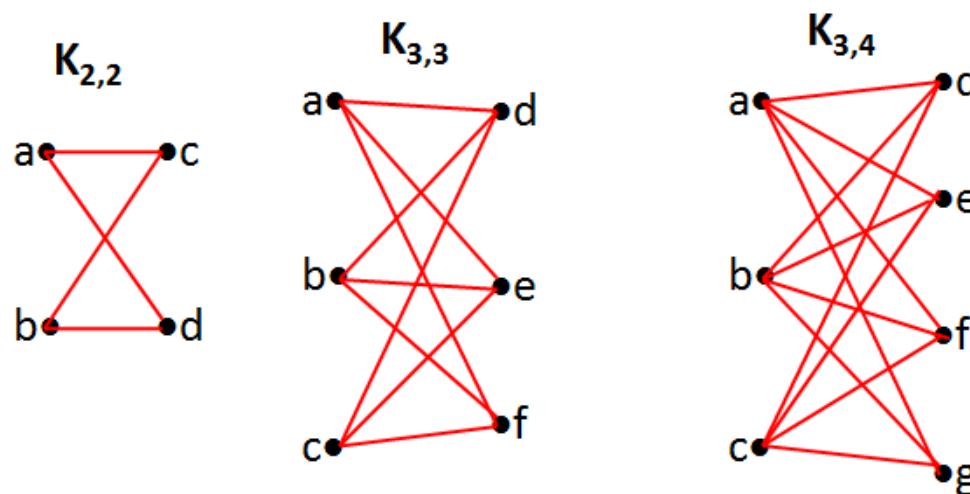
$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$V_1 = \{a, b, c\}$ คือ a จะไม่เชื่อมกับเซตของตัวเองเสมอเมื่อแบ่งเป็นสองชุด

$V_2 = \{d, e\}$ คือ d จะไม่เชื่อมกับเซตของตัวเองเสมอเมื่อแบ่งเป็นสองชุด

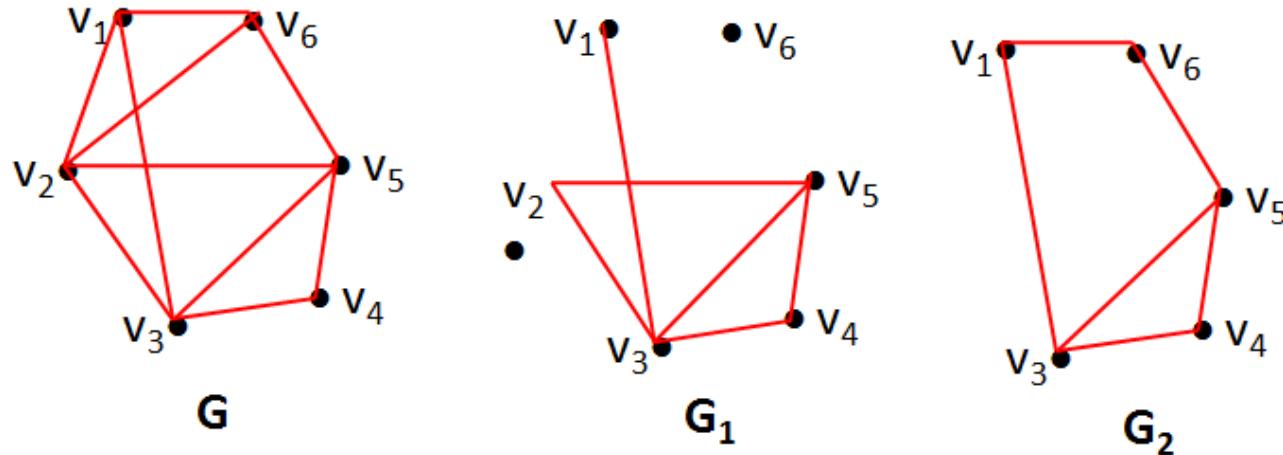
คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ

- จากรูปข้างล่าง กราฟ $G = (V, E)$ เป็นกราฟสองส่วนบริบูรณ์ (**Complete bipartite graph**) เมื่อ G เป็นกราฟสองส่วน และแต่ละจุดในเซตย่อย V_1 ของ V ต้องมีเส้นเชื่อมไปยังทุกจุดในเซตย่อย V_2 ของ V เขียนแทนด้วย $K_{m,n}$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนสมาชิกของ V_1 และ V_2 ตามลำดับ โดยการพิจารณาคือ ชุดแรกต้อง เชื่อมกับชุดที่สองให้ครบถ้วนเป็นกราฟสองส่วนบริบูรณ์
- ตัวอย่างเช่น กราฟซ้ายมือ สมาชิกชุดแรก คือ a สามารถเชื่อม c กับ d ซึ่งเป็น สมาชิกในชุดที่สองทั้งหมด และสมาชิกชุดสอง คือ c สามารถเชื่อม a กับ b ซึ่งเป็น สมาชิกในชุดแรกทั้งหมด



คำศัพท์ของทฤษฎีกราฟ

- กราฟ $G_1 = (V_1, E_1)$ เป็นกราฟย่อยของกราฟ $G = (V, E)$ ถ้า $V_1 \subset V$ และ $E_1 \subset E$ และ เส้นเชื่อม $e \in E_1$ มีจุดกระแทบทั้งสองอยู่ใน V_1 ตัวอย่างเช่น กราฟ G ของรูปข้างล่างนี้ สามารถแยกออกมารูป G_1 และ G_2 โดย G_1 และ G_2 เมื่อประกอบกันแล้วจะเป็นกราฟ G



แบบฝึกหัด 1

- 1) จงเขียนกราฟต่อไปนี้ กราฟที่มี 5 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 1, 2, 2, 3 และ 5 ตามลำดับ และจากข้อความนี้สามารถเขียนกราฟได้หรือไม่

แบบฝึกหัด 2

- 2) จงเขียนกราฟต่อไปนี้ กราฟที่มี 4 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 1, 2, 3 และ 3 ตามลำดับ และจากข้อความนี้สามารถเขียนกราฟได้หรือไม่

แบบฝึกหัด 3

- 3) จงเขียนกราฟต่อไปนี้ กราฟที่มี 4 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ และจากข้อความนี้สามารถเขียนกราฟเชิงเดียวได้หรือไม่

แบบฝึกหัด

- 4) มีคน 15 คน เป็นไปได้หรือไม่ที่แต่ละคนจะมีเพื่อนอย่างแน่นอน 3 คน จงอธิบาย (ก. เป็นเพื่อน ข. ความหมายเดียวกับ ข. เป็นเพื่อน ก.)

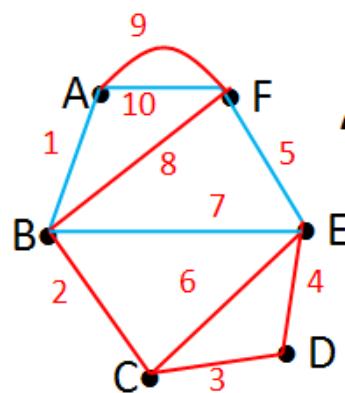
แบบฝึกหัด

- 5) คน 4 คน เป็นໄປได้หรือไม่ที่แต่ละคนจะมีเพื่อนอย่างแน่นอน 3 คน จ่อธิบาย
- 6) จงเขียนกราฟต่อไปนี้ กราฟที่มี 5 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 0, 2, 2, 3 และ 9 ตามลำดับ และจากข้อความนี้สามารถเขียนกราฟได้หรือไม่

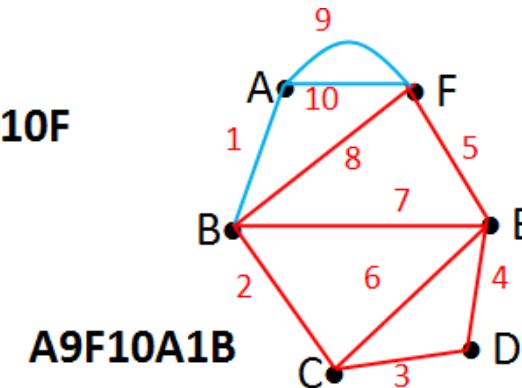
แบบฝึกหัด

- 7) จงเขียนกราฟต่อไปนี้ กราฟที่มี 8 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 1, 3, 4, 1, 5, 2, 2, 1 ตามลำดับ และสรุปว่าภาพนี้เป็นกราฟหรือไม่
- 8) จงเขียนกราฟต่อไปนี้ กราฟที่มี 8 จุด แต่ละจุดมีดีกรี 1, 1, 2, 2, 9, 1, 3, 1 ตามลำดับ และสรุปว่าภาพนี้เป็นกราฟเชิงเดี่ยวหรือไม่

แนวเดินวงจรและวัฏจักร



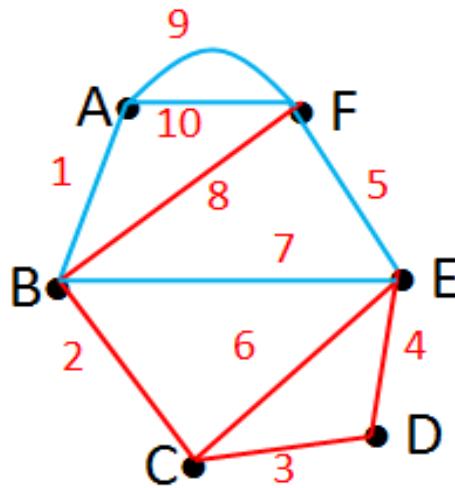
A10F5E7B1A10F



A9F10A1B

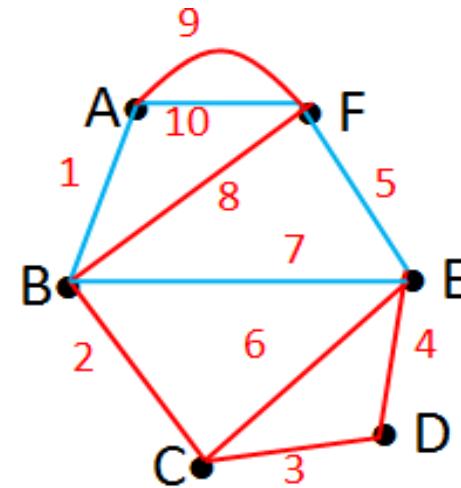
แนวเดิน (walk) คืออันดับจำกัดของจุดและเส้นเชื่อมสลับกัน ดังนี้ $v_0e_1v_1e_2...v_ne_n$ โดย $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ และ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ เรียก v_0 ว่า จุดเริ่มต้น และ เรียก v_n ว่า จุดสิ้นสุดของแนวเดิน เรียก v_1, v_2, \dots, v_{n-1} ว่า จุดภายในของแนวเดิน เรียกแนวเดินดังกล่าวว่า แนวเดิน v_0-v_n ตัวอย่างเช่น จากรูปข้างบนด้านซ้ายมือ A ไปหา F ด้วยเส้นทาง 10 และ F ไปหา E ด้วยเส้นทาง 5 และ E ไปหา B ด้วยเส้นทาง 7 ตามลำดับ เป็นต้น

แนวเดินวงจรและวัฏจักร



A9F10A1B7E5F
แนวเดินเปิด ความยาว 5

รูปที่ 1



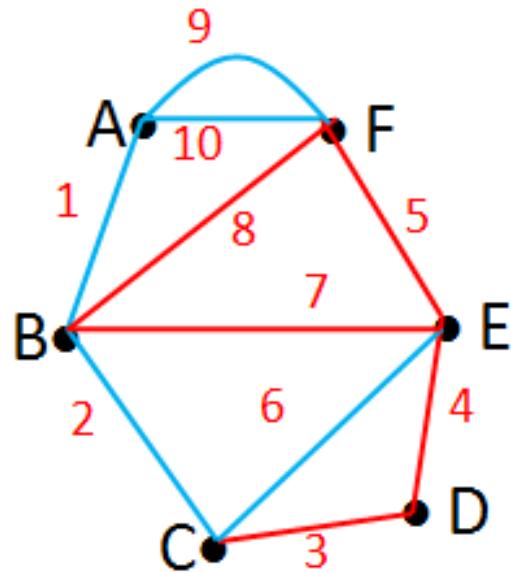
A10F5E7B1A
แนวเดินปิด ความยาว 4

รูปที่ 2

แนวเดินวงจรและวัฏจักร

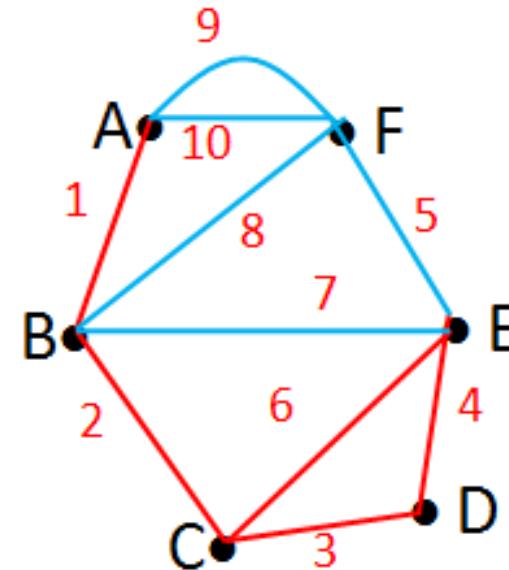
- แนวเดินที่มีเส้นเชื่อม ก เส้น เรียกว่า แนวเดินที่มีความยาวเท่ากับ ก ตัวอย่างเช่น รูปที่ 1 และ รูปที่ 2 มีความยาวเท่ากับ 5 และ 4 ตามลำดับ
- แนวเดินที่มีจุดเริ่มต้นกับจุดสิ้นสุดแตกต่างกัน เรียกว่า แนวเดินเปิด ตัวอย่างเช่น รูปที่ 1 จุดเริ่มต้นที่ A และจุดสิ้นสุดที่ F
- แนวเดินที่มีจุดเริ่มต้นกับจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน เรียกว่า แนวเดิน ปิด ตัวอย่างเช่น รูปที่ 2 จุดเริ่มต้นที่ A และจุดสิ้นสุดที่ A

แนวเดินวงจรและวัฏจักร



ร่องเดิน **A9F10A1B2C6E**

รูปที่ 3



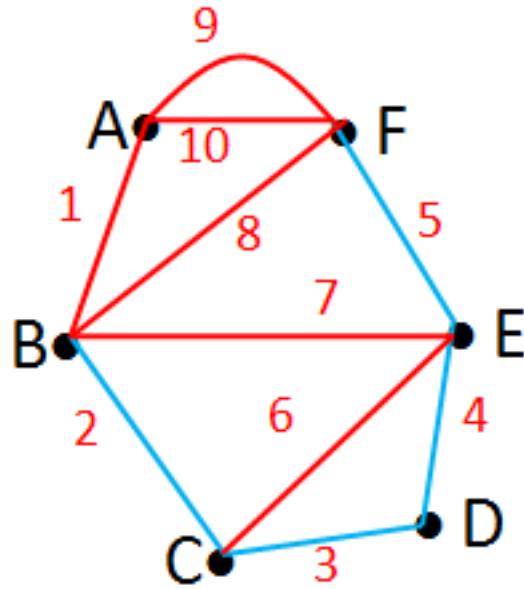
ร่องเดินปิด(วงจร) **A9F5E7B8F10A**

รูปที่ 4

แนวเดินวงจรและวัฏจักร

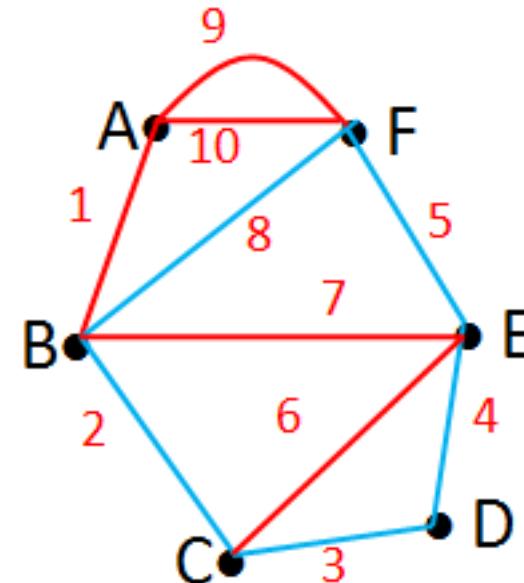
- แนวเดินที่เส้นเชื่อมทุกเส้นในอันดับแตกต่างกัน (V ซ้ำได้แต่ E ห้ามซ้ำ) เรียกว่า **แนวเดินไม่ซ้ำหรือร่องเดิน (trail)** เพราะปกติแนวเดินนั้น สามารถซ้ำเส้นทางเดิมได้ (V ซ้ำได้และ E ซ้ำได้) ตัวอย่างเช่น A9F9A1B7E กรณีนี้คือ A ไป F และ F ไป A กรณีนี้มีเส้นทางที่ซ้ำเส้นทางเดิม ซึ่งกรณีถึงว่าไม่เป็นร่องเดิน แต่รูปที่ 3 นั้น เป็นร่องเดิน เพราะไม่มีเส้นเชื่อมที่ซ้ำเส้นเดิม
- ร่องเดินแบบปิดที่มีความยาวตั้งแต่ 3 ขึ้นไป (V ซ้ำได้แต่ E ห้ามซ้ำ และกลับที่จุดเริ่มต้น) เรียกว่า **วงจร (circuit)** ตัวอย่างเช่นรูปที่ 4 นั้น เป็นร่องเดิน ที่จุดเริ่มต้นกับจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน คือจุดเริ่มต้นคือจุด A และจุดสิ้นสุดคือจุด A

แนวเดินวงจรและวัฏจักร



วิถี **B2C3D4E5F**

รูปที่ 5



วิถีปิด(วัฏจักร) **B2C3D4E5F8B**

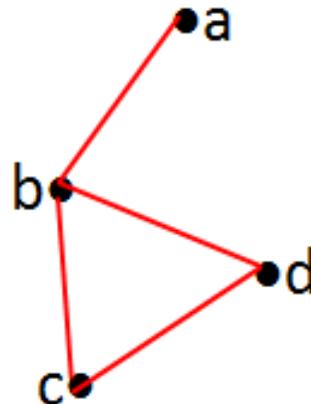
รูปที่ 6

แนวเดินวงจรและวัฏจักร

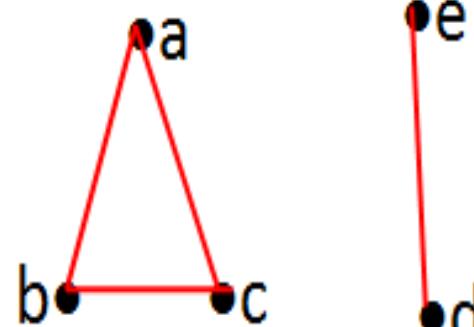
- ร่องเดินที่จุดในอันดับทุกจุดแตกต่างกัน (**V ห้ามซ้ำ และ E ห้ามซ้ำ**) เรียกว่า **วิถี (path)** ตัวอย่างเช่นรูปที่ 5 นี้ เป็นวิถี เพราะไม่มีเส้นเชื่อมที่ซ้ำเส้นเดิม และไม่มีจุดยอดใดซ้ำกันเลยเนื่องจากอันดับของจุดและเส้นเชื่อมที่เป็นวิถี ไม่ซ้ำกัน จึงสามารถเขียนแทนวิถีในรูปที่ 5 คือ $B2C3D4E5F$ ด้วยอันดับของจุด $BCDEF$ แบบนี้ได้
- **วิถีแบบปิด** (วิถีที่ยกเว้นจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดซ้ำกัน หรือ **V ห้ามซ้ำ และกลับที่จุดเริ่มต้น**) ที่มีความยาวตั้งแต่ 3 ขึ้นไป เรียกว่า **วัฏจักร (cycle)** ตัวอย่างเช่นรูปที่ 6 เป็นวัฏจักร เพราะไม่มีเส้นเชื่อมที่ซ้ำเส้นเดิม และไม่มีจุดยอดใดซ้ำกันเลย มีจุดเริ่มต้นกับจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน คือจุดเริ่มต้นคือจุด A และจุดสิ้นสุดคือจุด A
- ระยะห่างระหว่างจุด a และ b คือ ความยาวของวิถีจากจุด a ไปยังจุด b ที่สั้นที่สุด ตัวอย่างเช่น A ไป E ระยะห่างระหว่างจุด A และ E คือ 8 โดยวิถีคือ $A1B7E$ ระยะห่างคือ $1 + 7 = 8$

แนวเดินวงจรและวัฏจักร

- ให้ a และ b เป็นจุดในกราฟ จุด a เชื่อมโยง (connect) กับจุด b ก็ต่อเมื่อ มีแนวเดินจากจุด a ไปยังจุด b กราฟ G เป็น **กราฟเชื่อมโยง (connected graph)** ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ คู่ของจุดในกราฟ G ต้องเชื่อมโยงกัน หรืออาจกล่าวได้ว่า จุดใดๆ บนกราฟสามารถไปถึงจุดใดบนกราฟได้ทุกจุด เช่น กราฟบนด้านซ้ายมีอีดี a มีเส้นทางที่สามารถไปหา b, c, d ได้ จึงเป็นกราฟเชื่อมโยง แต่กราฟบนด้านขวา มีอีดี a ไม่มีเส้นทางที่สามารถไปหา e กับ d ได้ จึงไม่เป็นกราฟเชื่อมโยง



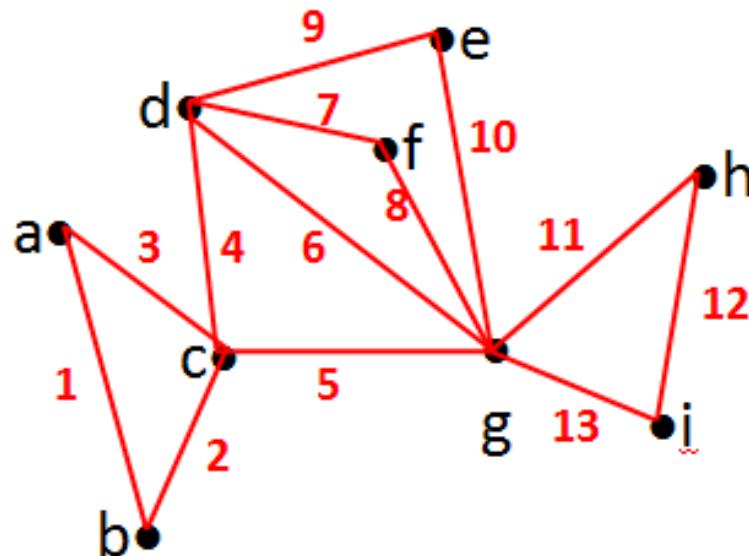
เชื่อมโยง



ไม่เชื่อมโยง

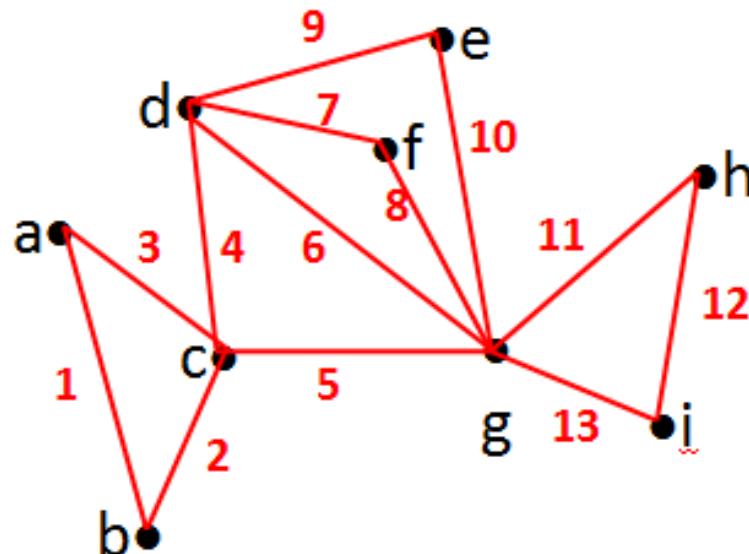
แนวเดินวงจรและวัฏจักร

- วงจรอยเลอร์ (Euler Circuit) คือ วงจรที่ผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นแต่เพียงหนึ่งครั้งเท่านั้น และทุกจุดยอด โดยเริ่มจากจุดหนึ่งไปตามเส้นเชื่อมต่างๆ แล้วสามารถกลับมาที่จุดเริ่มต้นได้ (**V ซ้ำได้แต่ E ห้ามซ้ำ และกลับที่จุดเริ่มต้น และต้องผ่าน E ให้ครบ**)



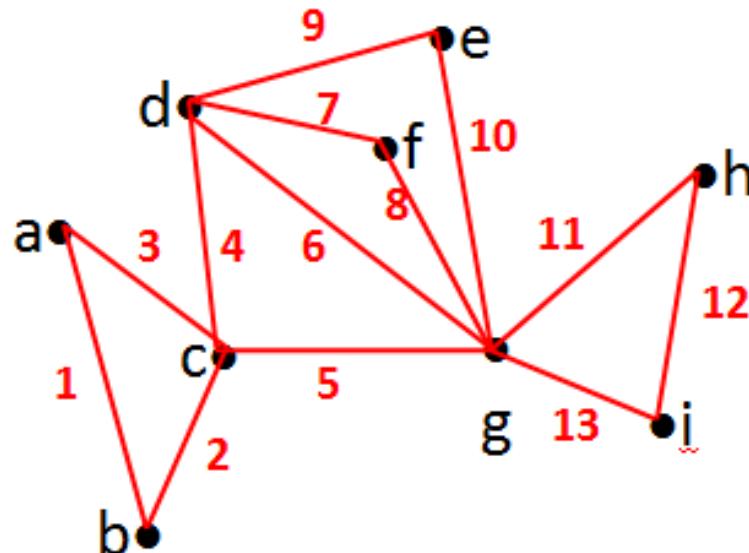
แนวเดินวงจรและวัฏจักร

- ทางเดินอยเลอร์หรือเส้นทางอยเลอร์ (Eulerian Trail) คือ อันดับเส้นเชื่อม โดยเส้นทางที่ลากผ่านเส้นต่างๆ ในกราฟ โดยแต่ละเส้นลากผ่านได้เพียงครั้งเดียว จากรูปข้างบน คือ 1 2 5 13 12 11 8 7 9 10 6 4 3 โดยเริ่มที่จุด a จบลงที่จุด a และเส้นเชื่อมไม่ซ้ำกันทุกเส้นเชื่อมในกราฟ



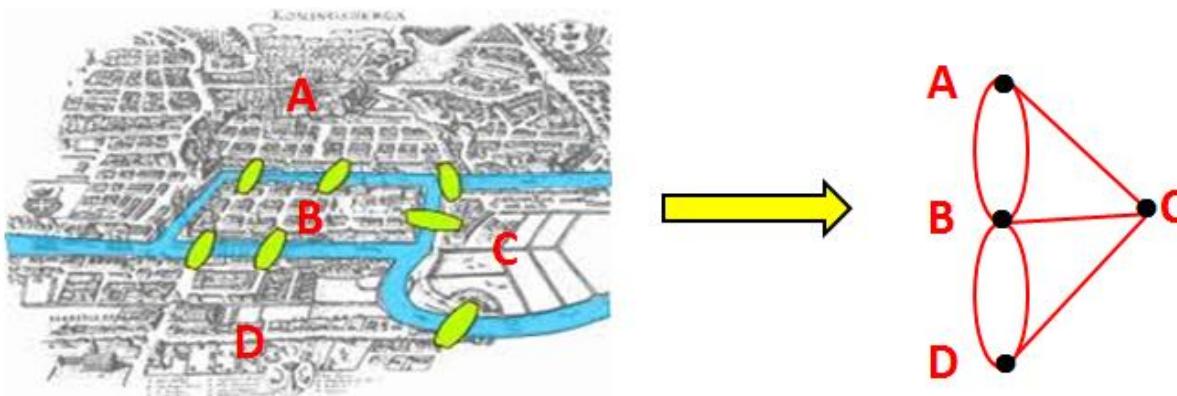
แนวเดินวงจรและวัฏจักร

- **กราฟอยอยเลอร์ (Eulerian Graph)** คือ กราฟที่มีวงจรอยอยเลอร์ ซึ่งกราฟอยอยเลอร์ นั้นเมื่อนับดีกรีของจุดจะได้คราวลักษณะ 2 เสมอ เพราะส่วนจุดเริ่มต้นเมื่อมีเส้นเชื่อมออกไป ในที่สุดจะมีเส้นเชื่อมกลับเข้ามา ซึ่งทำให้ทุกๆ จุดของกราฟเป็นจุดยอดคู่
- ตัวอย่างเช่น $\deg(a) = 2$, $\deg(b) = 2$, $\deg(c) = 4$, $\deg(d) = 4$, $\deg(e) = 2$, $\deg(f) = 2$, $\deg(g) = 6$, $\deg(h) = 2$, $\deg(i) = 2$ ดังนั้นกราฟนี้เป็นกราฟอยอยเลอร์ เพราะ ดีกรีของจุดมีค่าเป็นจุดยอดคู่ทั้งหมด



แนวเดินทางและวัฏจักร

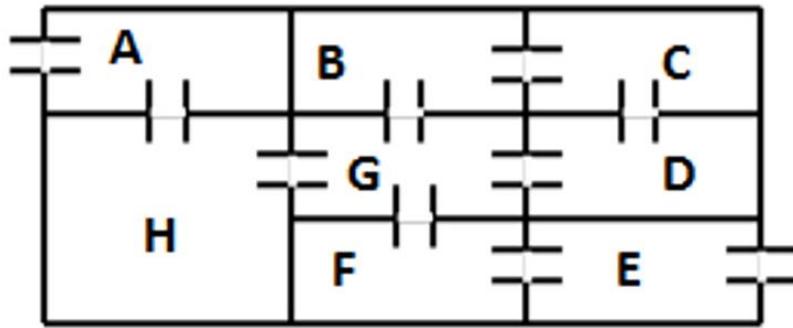
- คำถานเกี่ยวกับสะพานเมืองคอนิกส์เบอร์ก ตอบโดยทฤษฎีกราฟ พื้นที่เมืองแบ่งเป็น 4 ส่วน แทนด้วยจุด A B C D และแทนสะพานด้วยเส้นเชื่อม



- การที่จะเดินทางรอบเมือง โดยเริ่มจากพื้นที่ใดพื้นที่หนึ่ง แล้วมาจบลงที่พื้นที่เริ่มต้น โดยการข้ามสะพานทั้ง 7 แห่ง แต่ละแห่งข้ามได้เพียงครั้งเดียว คือ การทางวิธีที่ผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นนั้นคือ วงจรออยเลอร์ เนื่องจากกราฟที่ใช้แทนมีจุดยอดคี่ เช่น $\deg(C) = 3$ ดังนั้ngraphนี้ไม่เป็นกราfoอยเลอร์ จึงไม่มีวงจรออยเลอร์ คำตอบคือ เป็นไปไม่ได้

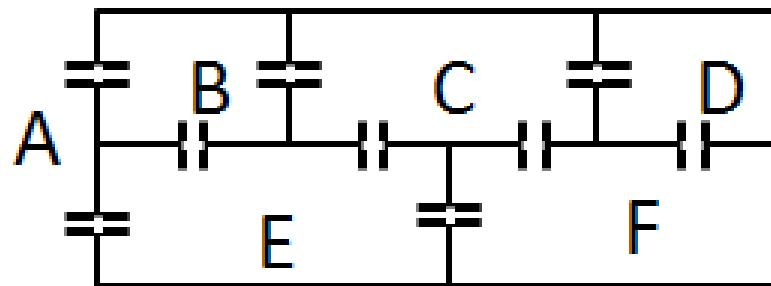
แบบฝึกหัด 1

1. ถ้าแผนผังชั้นล่างของอาคารแห่งหนึ่งเป็นดังภาพ เป็นไปได้หรือไม่ ที่จะเข้าอาคารทางห้อง A และออกทางห้อง E โดยต้องผ่านทุกประตูเพียงครั้งเดียว และต้องผ่านให้ครบทุกห้อง



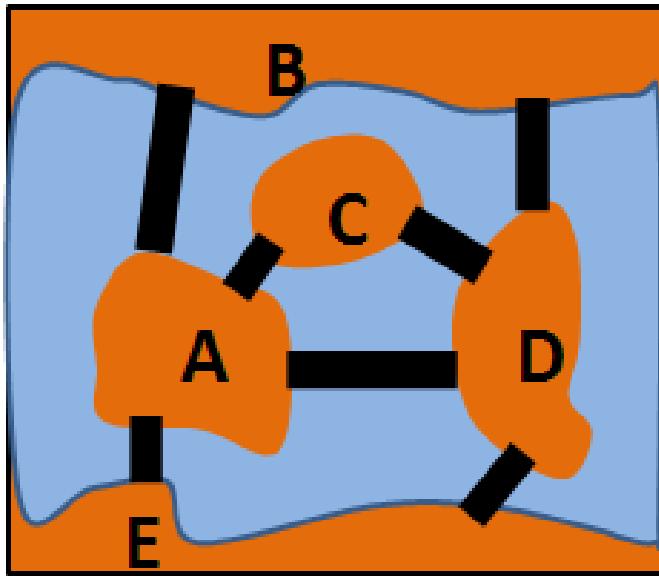
แบบฝึกหัด 2

2. ถ้าแผนผังของอาคารชั้นเดียวเป็นดังภาพ เป็นไปได้หรือไม่ ที่จะเข้าไปในอาคาร และออกมาก โดยต้องผ่านทุกประตูเพียงครั้งเดียว และต้องผ่านให้ครบทุกห้อง



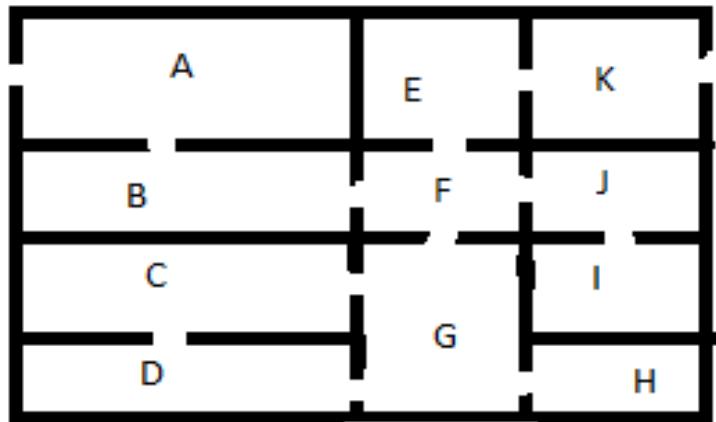
แบบฝึกหัด 3

3. การเดินทางให้ผ่านทุกพื้นที่ของเมืองดังรูป โดยเริ่มที่จุดใดๆ แล้วกลับมาที่จุดเดิม และต้องข้ามทุกสะพานเพียงครั้งเดียว



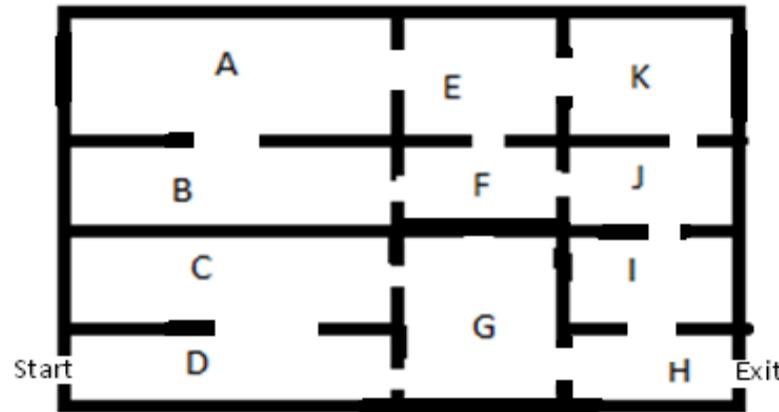
แบบฝึกหัด 4

4. ถ้าแผนผังชั้นล่างของอาคารแห่งหนึ่งเป็นดังภาพ เป็นไปได้หรือไม่ ที่จะเข้าอาคารทางห้อง A และออกทางห้อง K โดยต้องผ่านทุกประตูเพียงครั้งเดียว และต้องผ่านให้ครบทุกห้อง



แบบฝึกหัด 5

5. ถ้าแผนผังของอาคารชั้นเดียวเป็นดังภาพ เป็นไปได้หรือไม่ ที่จะเข้าไปในอาคาร และออกมาก โดยต้องผ่านทุกประตูเพียงครั้งเดียว และต้องผ่านให้ครบทุกห้อง



Note