ตรรกศาสตร์

บทที่ 5

Discrete Mathematics for Computer Science

อ.เอิญ สุริยะฉาย (ENS)
ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ตรรกศาสตร์

การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ สิ่งที่สำคัญคือผู้เขียนโปรแกรมต้องมีความคิดเชิงลอจิกหรือตรรกศาสตร์ เช่น ต้องการสร้างโปรแกรมคำนวณเกรดของนักศึกษา โดยถ้าใส่คะแนนมากกว่า 80 ให้แสดงผลลัพธ์เป็นเกรด A ถ้าใส่คะแนนมากกว่า 70 ให้แสดงผลลัพธ์เป็นเกรด B เป็นต้น โดยตรรกศาสตร์จะเป็นการฝึกให้ผู้เรียนคิดอย่างมีเหตุผลให้เป็นที่ยอมรับกับการแก้ปัญหาทางคอมพิวเตอร์ เพื่อให้ผู้เขียนโปรแกรมสามารถเข้าใจหลักการคิดของคอมพิวเตอร์มากขึ้น และสามารถสั่งการให้คอมพิวเตอร์ทำงานได้ตามที่ผู้เขียนโปรแกรมต้องการ ดังนั้น ตรรกศาสตร์ จึงเป็นวิชาที่สำคัญมาก เป็นพื้นฐานของการศึกษาในสาขาด้านคอมพิวเตอร์ต่อไป

ความหมายตรรกศาสตร์และประพจน์

- **ตรรกศาสตร์ (logic)**
  - เป็นการศึกษาเชิงปรัชญาว่าด้วย**การให้เหตุผล** หรือ**การตรวจสอบข้อโต้แย้งที่สมเหตุสมผล** โดยมักจะเป็นส่วนสำคัญของวิชาปรัชญา คณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ รวมถึงภาษาศาสตร์ ตรรกศาสตร์เป็นการศึกษาที่มีมานานโดยมนุษยชาติที่เจริญแล้ว เช่น กรีก จีน หรืออินเดีย และถูกยกขึ้นเป็นสาขาวิชาหนึ่งโดย อริสโตเติล

ความหมายตรรกศาสตร์และประพจน์

- **ประพจน์ (proposition)**
  - คือ **ประโยคที่มีค่าความจริงเป็น จริง (True หรือสัญลักษณ์ตัว T) หรือ เท็จ (False หรือสัญลักษณ์ตัว F) อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น** โดยประโยคเหล่านี้จะอยู่ในรูป**ประโยคบอกเล่า**
  - ส่วนข้อความรูปแบบ **คำสั่ง คำขอร้อง คำอุทาน คำปฏิเสธ** ข้อความเหล่านี้**ไม่เป็นประพจน์**
  - สำหรับข้อความบอกเล่าแต่**มีตัวแปรอยู่ด้วย** ไม่สามารถบอกว่าเป็นจริงหรือเท็จถึงว่า**ไม่เป็นประพจน์**
  - ประโยคที่มีค่าความจริงไม่แน่นอน หรือไม่อาจระบุได้ว่ามีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จได้ **ไม่เป็นประพจน์** เช่น **อารมณ์ ความรู้สึก** เป็นต้น

ความหมายตรรกศาสตร์และประพจน์

- **ตัวอย่าง**

ธงชาติไทยมี 3 สี	(จริง)
$1 \in \{1,2,3,4\}$	(จริง)
กรุงเทพมหานครเป็นจังหวัดหนึ่งในประเทศไทย	(เท็จ)
$5 > 6$	(เท็จ)

ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น **จริง (T) เรียกว่า ประพจน์จริง**

ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น **เท็จ (F) เรียกว่า ประพจน์เท็จ**

กำหนดตัวแปร **p, q, r,...** แทนประพจน์ใดๆ เรียกตัวแปรว่า **ตัวแปรประพจน์**

ค่าความจริงของตัวแปรประพจน์ ขึ้นอยู่กับตัวแปรนั้นใช้แทนประพจน์ใด

p แทน $1 \in \{1,2,3,4\}$	p เป็นประพจน์จริง
q แทน $5 > 6$	q เป็นประพจน์เท็จ

การเชื่อมต่อประพจน์

- การนำประพจน์มาเชื่อมกัน จะได้ประพจน์ใหม่ ซึ่งสามารถบอกได้ว่าค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ สำหรับตัวเชื่อมประพจน์ (Propositional Connective) นั้น มีอยู่ 5 ตัว และตัวเชื่อมที่ใช้กันมากในตรรกศาสตร์คือ และ, หรือ, ถ้า...แล้ว, ก็ต่อเมื่อ, ไม่

- ตัวเชื่อมประพจน์ **“และ”** (conjunction) ใช้สัญลักษณ์ “ $\wedge$ ”
  - การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “และ” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \wedge q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นจริงทั้งคู่ นอกนั้นมีค่าความจริงเป็นเท็จ

การเชื่อมต่อประพจน์

- ตัวเชื่อมประพจน์ **“หรือ”** (disjunction) ใช้สัญลักษณ์ “ $\vee$ ”
  - การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “หรือ” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \vee q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จทั้งคู่ นอกนั้นมีค่าความจริงเป็นจริง
- ตัวเชื่อมประพจน์ **“ถ้า...แล้ว”** (if...then...) ใช้สัญลักษณ์ “ $\rightarrow$ ”
  - การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “ถ้า...แล้ว” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \rightarrow q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ นอกนั้นมีค่าความจริงเป็นจริง

การเชื่อมต่อประพจน์

- ตัวเชื่อมประพจน์ **“ก็ต่อเมื่อ”** (if and only if) ใช้สัญลักษณ์ “ $\leftrightarrow$ ”
  - การเชื่อม p และ q เข้าด้วยกันด้วยตัวเชื่อมประพจน์ “ก็ต่อเมื่อ” สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $p \leftrightarrow q$ ซึ่งจะมีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อ p และ q มีค่าความจริงตรงกัน และจะมีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อ p และ q มีค่าความจริงตรงข้ามกัน
- นิเสธของประพจน์ **“นิเสธ”** (negation) ใช้สัญลักษณ์ “ ~ ”
  - นิเสธของประพจน์ใดๆ คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงกันข้ามกับประพจน์นั้นๆ และสามารถเขียนแทนนิเสธของ p ได้ด้วย $\sim p$

การเชื่อมต่อประพจน์

ค่าความจริงของประพจน์ที่เชื่อมต่อกัน ตารางค่าความจริง (Truth Table) ของประพจน์ที่เชื่อมต่อกัน โดย T แทนค่าความจริงเป็นจริง และ F แทนค่าความจริงเป็นเท็จ มีรายละเอียดดังนี้

p	q	~p	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

การเชื่อมต่อประพจน์

ตัวอย่างการประยุกต์ใช้ประพจน์กับข้อความ

สมมติให้

p ฝนตก

q น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

เครื่องหมายของประพจน์และข้อความ

~p ฝนไม่ตก

$p \wedge q$ ฝนตก และ น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

$p \vee q$ ฝนตก หรือ น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

$p \rightarrow q$ ถ้า ฝนตก แล้ว น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

$p \leftrightarrow q$ ฝนตก ก็ต่อเมื่อ น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

การเชื่อมต่อประพจน์

- **ตัวอย่างที่ 1** ประเทศไทยเป็นเมืองร้อน และประเทศไทยอยู่ในทวีปแอฟริกา

p	ประเทศไทยเป็นเมืองร้อน	T
q	ประเทศไทยอยู่ในทวีปแอฟริกา	F

$T \wedge F = F$

- **ตัวอย่างที่ 2** $(10 + 10 > 8) \wedge (1 \times 0 = 0)$

p	$10 + 10 > 8$	T
q	$1 \times 0 = 0$	T

$T \wedge T = T$

การเชื่อมต่อประพจน์

- **ตัวอย่างที่ 3** -3 เป็นเลขจำนวนจริง หรือ สกุลเงินไทยคือปอนด์

p	-3 เป็นเลขจำนวนจริง	T
q	สกุลเงินไทยคือปอนด์	F

$T \vee F = T$

- **ตัวอย่างที่ 4** π เป็นเลขจำนวนเต็ม หรือ -2 เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

p	π เป็นเลขจำนวนเต็ม	F
q	-2 เป็นเลขจำนวนเต็มบวก	F

$F \vee F = F$

การเชื่อมต่อประพจน์

- **ตัวอย่างที่ 5** ถ้าฝนตก แล้ว รถติด

  p ฝนตก T (กำหนดให้ฝนตกเป็น T)

  q รถติด T (กำหนดให้รถติดเป็น T)

  $T \rightarrow T = T$

- **ตัวอย่างที่ 6** จงแสดงตารางค่าความจริงของประพจน์ S V ~S

S	~S	S V ~S
T	F	T
F	T	T

การเชื่อมต่อประพจน์

- **ตัวอย่างที่ 7** จงแสดงตารางค่าความจริงของประพจน์

  $p \vee q$, $(p \vee q) \rightarrow p$, $(p \vee q) \rightarrow q$

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow p$	$(p \vee q) \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	T	T	F
F	T	T	F	T
F	F	F	T	T

การเชื่อมต่อประพจน์

- **ตัวอย่างที่ 8** จงแสดงตารางค่าความจริงของประพจน์ $p \wedge q$ และ $(p \wedge q) \rightarrow r$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

ประพจน์ที่มีค่าความจริง

สัจจะ แปลว่า จริง และสำหรับนิรันดร์ แปลว่า ตลอดกาล ประพจน์ที่เป็น**สัจนิรันดร์ (tautology)** คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงตลอดกาล ทุกกรณีของประพจน์ย่อย หรือประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี

สำหรับการตรวจสอบสัจนิรันดร์ สามารถทำได้ 2 กรณีดังนี้

- **กรณีที่ 1**

สร้างตารางค่าความจริงของประพจน์นั้นๆ ขึ้นมาเพื่อตรวจสอบว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ โดยถ้าเป็นต้องได้ผลลัพธ์ทุกกรณีเป็นจริงหมด แสดงว่าประพจน์นั้นเป็นสัจนิรันดร์

ประพจน์ที่มีค่าความจริง

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ประพจน์เหล่านี้ $p\wedge \sim p$, $p\vee\sim p$, $(p\wedge q)\rightarrow p$, $(p\wedge q)\rightarrow q$, $p\wedge q\wedge\sim q$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

วิธีทำ ให้สร้างตารางค่าความจริงแล้วพิจารณาว่าประพจน์ใดที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี หากมีกรณีที่ค่าความจริงเป็นเท็จเพียงกรณีเดียวเท่านั้นก็ถึงว่า ไม่เป็นสัจนิรันดร์

P	$p\wedge \sim p$	$p\vee\sim p$
T	F	T
F	F	T
	ไม่เป็นสัจนิรันดร์	สัจนิรันดร์

p	q	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\rightarrow p$	$(p\wedge q)\rightarrow q$	$p\wedge q\wedge\sim q$
T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	T	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	T	T	F
			สัจนิรันดร์	สัจนิรันดร์	ไม่เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น $p\vee\sim p$, $(p\wedge q)\rightarrow p$, $(p\wedge q)\rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์ เพราะตารางความจริงเป็นจริงทุกกรณี

ประพจน์ที่มีค่าความจริง

- **กรณีที่ 2**

กำหนดให้ประพจน์ทั้งหมดเป็นเท็จ แล้วพยายามพิสูจน์ว่าประพจน์นี้สามารถเป็นเท็จได้ ถ้าสามารถเป็นเท็จได้ แสดงว่าประพจน์นี้ไม่เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่าประพจน์ $p\wedge q\wedge\sim q$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

$p \wedge q \wedge \sim q$ กรณีนี้ถ้ากำหนด p = T และ q = T ได้ผลลัพธ์ของประพจน์เป็น F

$T \wedge T \wedge F$

ผลลัพธ์ของประพจน์นี้คือ F ถ้าเป็นเท็จได้ถึงว่าไม่เป็นสัจนิรันดร์ ดังนั้นจึงไม่เป็นสัจนิรันดร์

ประพจน์ที่มีค่าความจริง

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่าประพจน์ $(p\wedge q)\rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

$(p\wedge q)\rightarrow p$	กำหนดให้เป็น F ถ้าจะเป็นเท็จได้ p ต้องเป็น F และ $p\wedge q$ ต้องเป็น T
$T\rightarrow F$	
$p\wedge q = T$	ดังนั้น $p\wedge q$ ต้องเป็น T ทั้งหมด ซึ่งขัดแย้งกับ p ที่ต้องแรกกำหนดเป็น F

ดังนั้นประพจน์นี้จึงเป็นสัจนิรันดร์ เนื่องจาก $(p\wedge q)\rightarrow p$ ไม่สามารถเป็น F ได้

แบบฝึกหัด

1). จากข้อความข้างล่างนี้ ให้ทำเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่เป็นประพจน์

______ 1) คุณวรนุช

______ 2) สุนัขเห่าเหมียวๆ

______ 3) มนุษย์มีสองขา

______ 4) 8 x 8 > 10

______ 5) โลกเป็นบริวารของดวงอาทิตย์

______ 6) ฉันคิดถึงเธอมาก

______ 7) โปรดเห็นใจฉันบ้าง

______ 8) ผู้หญิงที่เดินมาเธอเป็นใครเหรอ

______ 9) จงเงียบสะ

______ 10) กากเกรียนกะโหลกกะลากิ๊กก๊อก

แบบฝึกหัด

______ 11) รบกวนช่วยเปิดหน้าต่างหน่อย

______ 12) ผมอยากเป็นโปรแกรมเมอร์

______ 13) ผมเป็นนักศึกษา

______ 14) ผมเป็นเมียเขา

______ 15) โอ้ยเจ็บ

______ 16) เราพร้อมแล้วเพื่อนเอ๋ย

______ 17) รักลูกให้ผูก รักวัวให้ตี

______ 18) x + 5 = 15

______ 19) x + y = z

______ 20) ไก่ขัน “เหมียวๆ”

แบบฝึกหัด

______ 21) แม่คิดถึงลูกมาก

______ 22) อาจารย์ทิพย์เป็นผู้ชาย

______ 23) กรุงเทพเป็นเมืองหลวงของประเทศไทย

______ 24) นกไม่มีปีก

______ 25) ธนาคารมีการบันทึกและจัดเก็บข้อมูลลูกค้าไว้ในคอมพิวเตอร์

______ 26) 4+5 มีค่าเท่ากับ 9

______ 27) จังหวัดอุดรธานีไม่ได้อยู่ในภาคอีสาน

______ 28) 2 + 3 = 3 - 1

______ 29) โลกเป็นดาวเคราะห์

______ 30) เลขคู่ทุกจำนวนหารด้วยสองลงตัว

แบบฝึกหัด

______ 31) 17 + 8 = 30

______ 32) เซตว่างไม่เป็นสับเซตของทุกเซต

______ 33) ปลาและนกเป็นสัตว์บก

______ 34) 50 คูณด้วย 40 มีค่าเท่ากับเท่าไร

______ 35) หยุดเดี๋ยวนี้นะ

______ 36) อย่าส่งเสียงดังในเวลาทำงาน

______ 37) กรุณาปิดไฟทุกครั้งก่อนออกจากห้อง

_____ 38) ได้โปรดเถอะนะถือว่าสงสารฉันหน่อย

______ 39) ว้าย! ตะเถรตกกระโถน

______ 40) บรรยากาศสำหรับเราสองคนอยากให้เป็นเช่นนี้จังเลย

แบบฝึกหัด

______ 41) อย่าคุยเวลาทำงาน

______ 42) อยากดูหนังมากเลย

______ 43) ว้าย! น่ากลัวจัง

______ 44) สมการของ x+y = 1 เป็นสมการอะไร

แบบฝึกหัด

2) จงเติมตารางค่าความจริงของประพจน์ $(P \wedge Q) \rightarrow Q$

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow Q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

สอดคล้อง

สัจจะนิรันดร์

สัจจะนิรันดร์

3) จงเติมตารางค่าความจริงของประพจน์ $\sim P \rightarrow (P \vee Q)$

P	Q	$\sim P$	$P \vee Q$	$\sim P \rightarrow (P \vee Q)$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

F or F = F

$\sim P \rightarrow (P \vee Q) = F$

ไม่สัจจะนิรันดร์

แบบฝึกหัด

4) จงเติมตารางค่าความจริงของประพจน์ $(\sim P \vee R) \rightarrow Q$

P	R	Q	$\sim P \vee R$	$(\sim P \vee R) \rightarrow Q$

แบบฝึกหัด

5) จงเติมตารางค่าความจริงของประพจน์ $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \vee \sim R)$

แบบฝึกหัด

6) จงหาค่าความจริงของประพจน์ $(10 > 5) \wedge (\frac{4}{8} + 5 > 6)$

7) จงหาค่าความจริงของประพจน์ $((P \vee Q) \wedge (\sim P)) \rightarrow (R \rightarrow P)$ โดยที่ P = F, Q = T, R = T

8) จงหาค่าความจริงของประพจน์ 5 + 5 = 10 และ -3 + 3 = 3

9) จงหาค่าความจริงของ $(\sim Q \wedge (P \vee Q)) \rightarrow ((Q \wedge R) \vee (P \vee R))$ โดยที่ P, Q, R โดยมีค่าความจริง T, F, F

แบบฝึกหัด

10) จงหาค่าความจริงของประพจน์ ถ้า 6 มากกว่า 5 แล้ว -6 มากกว่า -5

11) จงหาค่าความจริงของประพจน์ ถ้า 5 มากกว่า 6 แล้ว -5 มากกว่า -6

12) จงหาค่าความจริงของประพจน์ ถ้า 2 คือเลขคี่ แล้ว 3 เป็นเลขคู่

13) จงหาค่าความจริงของประพจน์ 33 คือเลขจำนวนเต็มบวก ก็ต่อเมือ 33 เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

แบบฝึกหัด

14) จงหาค่าความจริงของประพจน์ 10 คือเลขคู่ ก็ต่อเมื่อ π เป็นเลขจำนวนเต็ม

15) $p \rightarrow p \vee q$ ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่

16) $(R \rightarrow (S \vee T)) \vee (S \leftrightarrow (R \wedge T))$ ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่

แบบฝึกหัด

17) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$ ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่

18) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่

แบบฝึกหัด

19) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่

20) $(p \rightarrow (r \vee q)) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (p \rightarrow q))$ ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ หรือไม่

ประพจน์สมมูลกัน

ประพจน์สมมูลกัน (Logically equivalent) คือ ประพจน์สองประพจน์จะสมมูลกันก็ต่อเมื่อประพจน์ทั้งสอง**มีค่าความจริงเหมือนกัน**ทุกกรณีของค่าความจริงของประพจน์ย่อย หรือประพจน์ทั้งสองต้องมีค่าความจริงแบบเดียวกันทุกกรณี เขียนแทนด้วย $p \equiv q$

การทดสอบว่าประพจน์ 2 ประพจน์ สมมูลกันนั้นสามารถทำได้โดยการสร้างตารางแจกแจงค่าความจริง ถ้าค่าความจริงของตารางตรงกันทุกกรณี แสดงว่าประพจน์ 2 ประพจน์สมมูลกัน

ประพจน์สมมูลกัน

ตัวอย่างประพจน์ที่สมมูลกันที่ควรทราบ มีดังนี้

$p \land q \equiv q \land p$

$p \lor q \equiv q \lor p$

$(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$

$(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$

$p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$

$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$

$p \rightarrow q \equiv \sim p \lor q$

$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$

ประพจน์สมมูลกัน

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ เป็นประพจน์ที่สมมูลกันหรือไม่

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

ข้อสังเกต ประพจน์ที่สมมูลกัน เมื่อเชื่อมกันด้วย ↔ จะเป็นประพจน์สัจนิรันดร์ แต่โดยส่วนมากแล้ว **นิยมเขียนตาราง** เพราะตัวเชื่อมกันเป็น ↔ ทำให้กรณีที่เกิดขึ้นมีโอกาสเป็น T และ F หรือ F และ T เมื่อพิสูจน์ทำให้มีหลายกรณี จึงทำให้การพิจารณากรณีให้ครบเป็นเรื่องที่ยุ่งยาก ถ้าพบว่าไม่เป็นสัจนิรันดร์ เพียงกรณีเดียวก็สามารถสรุปได้ว่า ประพจน์ทั้งสองไม่สมมูลกัน แต่ถ้าไล่กรณีไม่ครบก็มีโอกาสที่จะไม่พบกรณีที่ไม่เป็นสัจนิรันดร์ ทำให้พิจารณาว่าประพจน์ทั้งสองนี้สมมูลกัน ซึ่งทำให้ได้คำตอบที่ผิด

ประพจน์สมมูลกัน

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า $p \rightarrow q \equiv (p \wedge q) \wedge (q \rightarrow p)$ เป็นประพจน์ที่สมมูลกันหรือไม่

ถ้าคิดกรณีแรกเป็นกรณีที่สมมูลกัน ดังนั้นจึงตอบว่าประพจน์ทั้งสองสมมูลกัน แต่ความจริงแล้วพลาดไม่ได้คิดกรณีที่ สอง ซึ่งเป็นกรณีที่ไม่สมมูลกัน ทำให้นักศึกษาตอบคำถามผิด

<table>
<tr><th colspan="2">$p \rightarrow q$</th><th>$\leftrightarrow$</th><th>$(p \wedge q)$</th><th>$\wedge$</th><th>$(q \rightarrow p)$</th><th rowspan="4">สัจนิรันดร์</th></tr>
<tr><td colspan="2">F</td><td></td><td colspan="3">T</td></tr>
<tr><td>T</td><td>T</td><td></td><td>$T \wedge T$</td><td></td><td>$T \rightarrow T$</td></tr>
<tr><td colspan="2">q ต้องเป็น F แต่ q ถูกกำหนดเป็น T แล้วจึงขัดแย้งกัน แสดงว่าประพจน์ไม่สามารถเป็น "เท็จ"</td><td></td><td>T</td><td></td><td>T</td></tr>
</table>

ประพจน์สมมูลกัน

แต่ในความจริงแล้วถ้าคิดกรณีที่สอง กรณีนี้ไม่เป็นสัจนิรันดร์ เพราะสามารถเป็นเท็จได้ ดังนั้นประพจน์ทั้งสองไม่สมมูลกัน

$p \rightarrow q$	$\leftrightarrow$	$(p \wedge q)$	$\wedge$	$(q \rightarrow p)$	
T		F			ไม่เป็นสัจนิรันดร์
$F \rightarrow T$		$F \wedge T$		$T \rightarrow F$	
ไม่ขัดแย้ง T แสดงว่าประพจน์สามารถเป็น "เท็จ" ได้		F		F	

สำหรับการค้นหาคำตอบ ถ้าหากพบคำตอบที่ไม่เป็นสัจนิรันดร์ เพียงคำตอบเดี่ยวถึงว่าให้ยุติการค้นหาคำตอบ เพราะประพจน์ทั้งสองอันนั้นไม่สมมูลกันแน่นอน แต่ถ้าเกิดพบว่าคำตอบเป็นสัจนิรันดร์ ต้องหากรณีอื่นๆ อีกจนครบทุกกรณีที่เป็นไปได้ จึงจะสรุปได้ว่า ประพจน์ทั้งสองสมมูลกัน ถ้าหากขาดเพียงกรณีเดียว อาจจะสรุปคำตอบที่ผิด

ประพจน์สมมูลกัน

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงให้เห็นว่าประพจน์ $p \rightarrow q \equiv {\sim}p \vee q$ สมมูลกันหรือไม่

p	~p	q	$p \rightarrow q$	${\sim}p \vee q$
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T

จากตารางนี้สรุปได้ว่า $p \rightarrow q \equiv {\sim}p \vee q$ ประพจน์สมมูลกัน

ประพจน์สมมูลกัน

ตัวอย่างที่ 2 จงแสดงให้เห็นว่า ถ้า 4^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว 4 เป็นจำนวนคู่ และถ้า 4^2 ไม่เป็นจำนวนคู่แล้ว 4 ไม่เป็นจำนวนคู่ สมมูลกันหรือไม่

<u>วิธีทำ</u>

สามารถเขียนแทนในรูปแบบ p และ q ได้ดังนี้

p = 4^2 เป็นจำนวนคู่ ~p = 4^2 ไม่เป็นจำนวนคู่

q = 4 เป็นจำนวนคู่ ~q = 4 ไม่เป็นจำนวนคู่

และสามารถเขียนสรุปได้ดังนี้ $p \rightarrow q \equiv {\sim}p \rightarrow {\sim}q$

ประพจน์สมมูลกัน

p	q	p→q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

~p	~q	~p→~q
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

จากตารางทั้งสองนี้สรุปได้ว่า $p \rightarrow q \equiv {\sim}q \rightarrow {\sim}p$ ประพจน์**ไม่สมมูลกัน**

ประพจน์สมมูลกัน

ตัวอย่างที่ 4 จงแสดงให้เห็นว่าประพจน์ $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge {\sim}q) \rightarrow r$ สมมูลกันหรือไม่

p	q	r	$p \rightarrow (q \vee r)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	T

p	q	r	$(p \wedge {\sim}q) \rightarrow r$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	T

จากตารางสองตารางนี้สรุปได้ว่า $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge {\sim}q) \rightarrow r$ ประพจน์สมมูลกัน

ประพจน์สมมูลกัน

ประพจน์ที่สมมูลกัน เพื่อใช้ในการลดรูปประพจน์ และพิสูจน์ประพจน์

$p \equiv {\sim}({\sim}p)$	นิเสธซ้อน		
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	กระจาย	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	กระจาย
$(q \vee r) \wedge p \equiv (q \wedge p) \vee (r \wedge p)$	กระจาย	$(q \wedge r) \vee p \equiv (q \vee p) \wedge (r \vee p)$	กระจาย
$p \vee q \equiv q \vee p$	สลับที่	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	สลับที่
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	จัดกลุ่ม	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	จัดกลุ่ม
${\sim}(p \vee q) \equiv {\sim}p \wedge {\sim}q$	เดอมอร์แกน	**${\sim}(p \wedge q) \equiv {\sim}p \vee {\sim}q$**	เดอมอร์แกน
${\sim}(p \rightarrow q) \equiv p \wedge {\sim}q$		$p \rightarrow q \equiv {\sim}p \vee q$	
$p \rightarrow q \equiv {\sim}q \rightarrow {\sim}p$	ประพจน์แย้งสลับที่	${\sim}({\sim}p \vee q) \equiv p \wedge {\sim}q$	
$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$		**$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$**	

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

นิยาม : ลำดับของประพจน์ เขียนแทนด้วย p_1 p_2 .... p_n และ q จะเรียก $p_1, p_2, ..., p_n$ ว่า สมมุติฐาน (hypothesis) และเรียก q ว่า ข้อยุติ (conclusion) ซึ่งสมเหตุสมผล ถ้า p_1 และ p_2 และ ... และ p_n เป็นจริงทั้งหมด แล้ว q ต้องเป็นจริงเท่านั้น มิฉะนั้น จะถือว่า ไม่สมเหตุสมผล

- นิยามนี้คือ $(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \rightarrow q$ จะสมเหตุสมผล เมื่อประพจน์เป็น **สัจนิรันดร์** ต้องเอาประพจน์มาเชื่อมต่อกัน ถ้าตารางความจริงเป็นสัจนิรันดร์ถึงว่า ข้อความนี้สมเหตุสมผล

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดประพจน์ทั้ง 2 ข้อเป็นจริง จงแสดงว่าการได้ข้อยุตินี้สมเหตุสมผล

1. ถ้า ฝนตก แล้ว น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ
2. ฝนตก

สรุป น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

สามารถแทนข้อความ ออกมาในรูปแบบประพจน์ได้ดังนี้

p	แทน ฝนตก
q	แทน น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ
$p \rightarrow q$	คือ ถ้าฝนตก แล้วน้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

โดยสรุป สามารถเขียนรูปแบบประพจน์ได้ดังนี้

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

วิธีการคือพยายามสมมุติให้มันเป็น F ให้ได้ จากข้อนี้สามารถเขียนออกมาเป็นรูปแบบนี้ $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$

<table>
<tr><td>p</td><td>→ q</td><td>∧ p</td><td>→ q</td><td rowspan="3">สัจนิรันดร์</td></tr>
<tr><td colspan="3">T</td><td rowspan="2">F</td></tr>
<tr><td>T</td><td>T
เดิมกำหนด q ต้องเป็น F แต่เมื่อแทนค่า F เข้าไปแล้วขัดแย้งกับเงื่อนไขใหม่ ที่กำหนดให้ q เป็น T ดังนั้นประพจน์ไม่สามารถเป็น F ได้</td><td>T</td></tr>
</table>

เมื่อประพจน์เป็นสัจนิรันดร์ ประพจน์นี้จึงสมเหตุสมผล

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด ประพจน์ทั้ง 2 ข้อ เป็นจริง จงแสดงว่าการได้ข้อยุตินี้สมเหตุผล

1. ถ้า ฝนตก แล้ว น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ
2. น้ำท่วมถนนในกรุงเทพฯ

สรุป ฝนตก

โดยสรุป สามารถเขียนรูปแบบประพจน์ได้ดังนี้

$p \rightarrow q$

q

—

p

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

วิธีการคือพยายามสมมุติให้มันเป็น F ให้ได้ จากข้อนี้สามารถเขียนออกมาเป็นรูปแบบนี้ $((p \to q) \wedge q) \to p$

p	$\to$ q	$\wedge$ q	$\to$ p	
T			F	ไม่เป็นสัจนิรันดร์
F เดิมกำหนด p ต้องเป็น F เมื่อแทนค่า F เข้าไปแล้ว ประพจน์นี้สามารถเกิดขึ้นได้ แสดงว่าสอดคล้องกัน ดังนั้นประพจน์สามารถเป็น F ได้	T	T		

เมื่อประพจน์ไม่เป็นสัจนิรันดร์ จึงไม่สมเหตุสมผล

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดประพจน์ข้อ 1-4 เป็นจริง จงแสดงว่าการได้ข้อยุตินี้สมเหตุผล

<u>วิธีทำ</u>

1. $p \wedge q \to \sim r$
2. $\sim s \to q$
3. P
4. R

สรุป s

วิธีการคือพยายามสมมุติให้มันเป็น F ให้ได้ จากข้อนี้สามารถเขียนออกมาเป็นรูปแบบนี้ $(p \wedge q \to \sim r) \wedge (\sim s \to q) \wedge p \wedge r \to s$

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

$(p \wedge q \to \sim r) \wedge (\sim s \to q) \wedge p \wedge r \to s$

$(p \wedge q \to \sim r) \wedge$	$(\sim s \to q) \wedge$	$p \wedge$	r	$\to s$	
T				F	สัจนิรันดร์
$(T \wedge F \to F)$	$T \to T$	T	T		
q ต้องเป็น F แต่คำตอบที่ได้คือ T ขัดแย้ง ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไขของการเป็นเท็จของประพจน์นี้ ดังนั้นประพจน์จึงไม่สามารถเป็น F ได้	$T \to T$				

เมื่อประพจน์เป็นสัจนิรันดร์ จึงสมเหตุสมผล

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดประพจน์ข้อ 1 และ 2 เป็นจริง จงแสดงว่าการได้ข้อยุตินี้สมเหตุผล

<u>วิธีทำ</u>

1. $p \to r$
2. $p \to q$

สรุป $p \to (r \wedge q)$

วิธีการคือพยายามสมมุติให้มันเป็น F ให้ได้ จากข้อนี้สามารถเขียนออกมาเป็นรูปแบบนี้ $(p \to r) \wedge (p \to q) \to p \to (r \wedge q)$

การได้ข้อยุติอย่างสมเหตุสมผล

$(p \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow (r \wedge q)$

$(p \rightarrow r) \wedge$	$(p \rightarrow q)$	$\rightarrow$	$p \rightarrow$	$(r \wedge q)$	
T			F		
T	T		T	F	
T→T	T→T			r หรือ q ต้องเป็น F ตัวใดตัวหนึ่ง แต่คำตอบที่ได้คือ r หรือ q เป็น T ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไขของการเป็นเท็จของประพจน์นี้ ดังนั้นประพจน์จึงไม่สามารถเป็น F ได้	สัจนิรันดร์

เมื่อประพจน์เป็นสัจนิรันดร์ จึงสมเหตุสมผล

แบบฝึกหัด

1) จากข้อความข้างล่างนี้ ให้ทำเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่ถูก และทำเครื่องหมาย × หน้าข้อความที่ผิด

______1.1) ถ้ามีประพจน์ย่อยรวมทั้งสิ้น 5 ประพจน์ จะมีค่าความจริงกี่กรณี 32

______1.2) ประพจน์ที่มีความสมมูลกันคือประพจน์ทั้งสองมีจำนวนค่าความจริงเท่ากัน

______1.3) สัจนิรันดร์คือค่าความจริงของประพจน์เป็นจริงทุกกรณี

______1.4) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ เป็น F แล้ว $(p \wedge q) \rightarrow q$ เป็น F

______1.5) $(\sim p \leftrightarrow \sim r) \vee (p \leftrightarrow q)$ เป็น F แล้ว $(p \wedge q) \wedge \sim r$ เป็น F

______1.6) $(p \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (r \vee s)$ เป็น F แล้ว $(p \wedge q) \rightarrow s$ เป็น F

______1.7) $\sim ((p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee r)) \equiv p \wedge \sim(q \rightarrow r)$

______1.8) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv \sim (p \vee q) \wedge r$

______1.9) $p \vee (\sim q) \vee r \equiv \sim p \rightarrow (q \rightarrow (r \wedge q))$

แบบฝึกหัด

______1.10) $((p \rightarrow q) \vee \sim q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ เป็นสัจนิรันดร์

______1.11) $((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ เป็นสัจนิรันดร์

______1.12) $(\sim p \wedge (q \vee p)) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ เป็นสัจนิรันดร์

2) จงหาว่าประพจน์ต่อไปนี้ สมมูลกันหรือไม่ $P \wedge Q \rightarrow R$ และ $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

3) จงหาว่าประพจน์ต่อไปนี้ สมมูลกันหรือไม่ $\sim (P \wedge Q) \leftrightarrow R$ และ $P \rightarrow (\sim Q \leftrightarrow R)$

แบบฝึกหัด

4) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ จงแสดงให้เห็นว่าประพจน์สมมูลกันหรือไม่

5) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$ จงแสดงให้เห็นว่าประพจน์สมมูลกันหรือไม่

แบบฝึกหัด

6) จงแสดงว่าการสรุปข้อยุติข้อย่อยต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

6.1) $p \rightarrow q$ $\sim q$ —— $\sim p$	6.2) $p \rightarrow r$ p —— r
6.3) $r \rightarrow s$ $\sim s$ —— $\sim r$	6.4) $\sim q \rightarrow r$ $p \rightarrow \sim q$ —— $p \rightarrow r$

แบบฝึกหัด

6.5) $(p \rightarrow q) \vee r$ $\sim r$ —— $p \rightarrow q$	6.6) $\sim p \rightarrow r$ $q \rightarrow \sim s$ $\sim p \vee q$ —— $s \rightarrow r$

แบบฝึกหัด

6.7) $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$ $r \rightarrow \sim s$ — $\sim p \wedge \sim q$ -- -- -- -- -- -- -- -- --	6.8) $p \rightarrow \sim q$ $q \vee r$ $\sim r$ — P -- -- -- -- -- -- -- -- --
6.9) $p \wedge q$ $q \rightarrow r$ $\sim r \vee s$ — s -- -- -- -- -- -- -- -- --	6.10) $p \rightarrow q \rightarrow \sim s$ $p \wedge s$ — q -- -- -- -- -- -- -- -- --

ประโยคเปิด

ประโยคเปิด คือ**ประโยคบอกเล่าที่มีตัวแปร** สำหรับ**ประโยคเปิดไม่สามารถบอกค่าความจริงได้** ซึ่งประกอบด้วยตัวแปรหนึ่งตัวหรือมากกว่าโดยไม่เป็นประพจน์ แต่ถ้าแทนค่าตัวแปรลงไป ประโยคเปิดจะกลายเป็นประพจน์ และสามารถบอกค่าความจริงได้

ตัวอย่างประโยคเปิด เช่น

$x + 5 = 15$

$y < -6$

$x < 3$

$x + y \geq 0$

$x = y$

ตัวอย่างประโยคที่ไม่ใช่ประโยคเปิด เช่น

- 10 เป็นคำตอบของสมการ $x - 1 = 7$
- โลกหมุนรอบตัวเอง
- จงหาค่า x จากสมการ $2x + 1 = 8$
- กรุณานั่งเงียบๆ
- ห้ามสูบบุหรี่

ประโยคเปิด

ข้อตกลงของประโยคเปิด

1. นิยมแทนประพจน์ด้วย p, q, r, s,...

2. นิยมแทนประโยคเปิดด้วย P(x) , Q(x) ,... P(x, y) , Q(x, y), ...

โดย P(x) , Q(x) , ... แทน ประโยคเปิดที่มี x เป็นตัวแปร

โดย P(x, y) , Q(x, y) , ... แทน ประโยคเปิดที่มี x และ y เป็นตัวแปร

กำหนดให้	P(x)	เป็นประโยคเปิดที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร x
	P(x, y)	เป็นประโยคเปิดที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร x และ
	$P(x_1, x_2, ..., x_n)$	เป็นประโยคเปิดที่ขึ้นอยู่กับตัวแปร $x_1, x_2, ..., x_n$

ประโยคเปิด

เช่น	P(x)	แทน x+4 = 20	เป็นประโยคเปิดที่ประกอบด้วยตัวแปร x ถ้าแทนค่า x จะสามารถบอกได้ว่าค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ
	p(x, y)	แทน x + y < 50	เป็นประโยคเปิดที่ประกอบด้วยตัวแปร x, y ถ้าแทนค่า x, yจะสามารถบอกได้ว่าค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวบ่งปริมาณ (quantifier) เป็นตัวระบุจำนวนสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ที่ทำให้ประโยคเปิดกลายเป็นประพจน์ เพราะประโยคเปิดจะเป็นประพจน์ได้ เมื่อแทนค่าตัวแปรแล้วหรือมีตัวบ่งปริมาณกำกับอยู่ ตัวบ่งปริมาณมี 2 ชนิด คือ

1. ตัวบ่งปริมาณที่กล่าวถึง “สมาชิกทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์” ซึ่งเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ **∀ (for all)** อ่านว่า “ **สำหรับสมาชิก x ทุกตัว** ”
2. ตัวบ่งปริมาณที่กล่าวถึง “สมาชิกบางตัวในเอกภพสัมพัทธ์” ซึ่งเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ **∃ (for some)** อ่านว่า “**สำหรับสมาชิก x บางตัว**”

ตัวบ่งปริมาณ

$\forall x(p(x))$ คือ ทุกค่า x ในเอกภพสัมพัทธ์ หรือเมื่อแทนค่า x ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ ลงใน p(x) แล้ว ทำให้ p(x) มีค่าความจริงเป็นจริงทุกตัว ถึงว่าประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นจริง ถ้าหากแทนค่า x ลงใน p(x) แล้ว มีเพียง 1 ตัวที่ทำให้ความค่าจริงเป็นเท็จ ถึงว่าประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวอย่างเช่น

$\forall x \in R\ (x^2 \geq 0)$	เป็น “จริง”
$\forall x \in R\ (x^2 \geq x)$ ไม่จริงกรณีนี้ x= 1/2	เป็น “เท็จ”
$\forall x \in R\ (\lvert x \rvert \geq 0)$	เป็น “จริง”
$\forall x \in R\ (x^3 \geq 0)$ ไม่จริงกรณีนี้ x= -1	เป็น “เท็จ”

ตัวบ่งปริมาณ

$\exists x(p(x))$ คือ ค่า x เพียงค่าเดียวในเอกภพสัมพัทธ์ หรือเมื่อแทนค่า x เพียงตัวเดียวตัวในเอกภพสัมพัทธ์ ลงใน p(x) แล้วทำให้ p(x) มีค่าความจริงเป็นจริงเพียงตัวเดียว ถึงว่าประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นจริง ถ้าหากแทนค่า x ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ ลงใน p(x) แล้วทำให้ p(x) มีค่าความจริงเป็นเท็จทุกตัว ถึงว่าประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวอย่างเช่น

$\exists x \in R\ (x^2 \geq x)$	เป็นจริงเมื่อแทน x=5	เป็น “จริง”
$\exists x \in R\ (x = x+1)$	ไม่จริงสักกรณี	เป็น “เท็จ”
$\exists x \in R\ (x^2 \leq 0)$	เป็นจริงเมื่อแทน x=0	เป็น “จริง”
$\exists x \in R\ (x^2 < 0)$	ไม่จริงสักกรณี	เป็น “เท็จ”

ตัวบ่งปริมาณ

- **ตัวบ่งปริมาณ 2 ตัว**

$\forall x \forall y(P(x,y))$	มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ x และ y ทุกค่าเป็นจริง มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ x และ y เพียง 1 คู่ทำให้เป็นเท็จ
$\forall x \exists y(P(x,y))$	มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ x ทุกตัวต้องสามารถมี y เพียง 1 ค่าที่ทำให้เป็นจริง มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ x อย่างน้อย 1 ตัวที่นำ y มาแทนค่าให้เป็นจริงไม่ได้
$\exists x \forall y(P(x,y))$	มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ y ทุกตัวต้องสามารถมี x เพียง 1 ค่าที่ทำให้เป็นจริง มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ y อย่างน้อย 1 ตัวที่นำ x มาแทนค่าให้เป็นจริงไม่ได้
$\exists x \exists y(P(x,y))$	มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ มีเพียง 1 คู่ที่เป็นจริง มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ ไม่มีคู่ไหนที่เป็นจริง

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าความจริงของ $\forall x \forall y(P(x, y))$ โดย $U = \{ 0, 1 \}$ และ $P(x, y) = x + y \geq y$

<u>วิธีทำ</u> กรณีนี้ต้องแทนค่าทั้งหมดที่เป็นไปได้ จากสมการนี้ $x + y \geq y$ และต้องเป็นจริงทุกกรณี

$0+0 \geq 0$ เป็นจริง

$0+1 \geq 1$ เป็นจริง

$1+0 \geq 0$ เป็นจริง

$1+1 \geq 1$ เป็นจริง

จากกรณี ทั้ง x และ y ให้ผลลัพธ์เป็นจริงทุกกรณี

ดังนั้น $\forall x \forall y(P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นจริง

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าความจริงของ $\forall x \forall y(P(x, y))$ โดย $U = \{ 0, 1 \}$ และ $P(x, y) = x \geq y$

<u>วิธีทำ</u> กรณีนี้ต้องแทนค่าทั้งหมดที่เป็นไปได้ จากสมการนี้ $x \geq y$ และต้องเป็นจริงทุกกรณีแต่ถ้าเป็นเท็จเพียงกรณีเดียวถึงว่าเป็นเท็จ

$0 \geq 1$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $\forall x \forall y(P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นเท็จ

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าความจริงของ $\exists x \exists y(P(x, y))$ โดย U = { 0, 1 } และ $P(x, y) = x + y \geq xy$

วิธีทำ กรณีนี้ถ้าเป็นจริงเพียงกรณีเดียว ค่าความจริงเป็นจริง

$1 + 1 \geq 1*1$ เป็นจริง

ดังนั้น $\exists x \exists y(P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นจริง

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าความจริงของ $\exists x \exists y(P(x, y))$ โดย U = { 0, 1 } และ $P(x, y) = x + y = 5$

วิธีทำ กรณีนี้ต้องแทนค่าทั้งหมดที่เป็นไปได้ จากสมการนี้ $x + y = 5$ และต้องเป็นเท็จทุกกรณี จึงมีค่าความจริงเป็นเท็จ

$0+0 \neq 5$ เป็นเท็จ

$0+1 \neq 5$ เป็นเท็จ

$1+0 \neq 5$ เป็นเท็จ

$1+1 \neq 5$ เป็นเท็จ

จากกรณี ทั้ง x และ y ให้ผลลัพธ์เป็นเท็จทุกกรณี

ดังนั้น $\exists x \exists y(P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นเท็จ

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าความจริงของ $\forall x \exists y(P(x, y))$ โดย U = { -1, 0, 1 } และ P(x, y) = x + y = 0

<u>วิธีทำ</u> กรณีนี้ต้องแทนค่า x ทุกตัว แต่ y ให้เอาตัวไหนมาแทนค่าก็ได้ของให้ประพจน์เป็นจริง

-1 + 1 = 0 เป็นจริง

0 + 0 = 0 เป็นจริง

1 + -1 = 0 เป็นจริง

จากกรณี x ทุกตัวให้ผลลัพธ์เป็นจริงทุกกรณี

ดังนั้น $\forall x \exists y(P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นจริง

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าความจริงของ $\forall x \exists y(P(x, y))$ โดย U = { 0, 1 } และ P(x, y) = x + y = 0

<u>วิธีทำ</u> กรณีนี้ต้องแทนค่า x ทุกตัว แต่ y ให้เอาตัวไหนมาแทนค่าก็ได้ของให้ประพจน์เป็นจริง

0 + 0 = 0 เป็นจริง

1 + y = 0 เป็นเท็จ เพราะไม่สามารถหาค่ามาแทน y แล้วเป็นจริง

จากกรณีนี้มี x หนึ่งกรณีที่ไม่เป็นจริง

ดังนั้น $\forall x \exists y(P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นเท็จ

ตัวบ่งปริมาณ

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าความจริงของ $\exists x \forall y(P(x, y))$ โดย U = { -1 0 1 } และ $P(x, y) = x + y = 0$

<u>วิธีทำ</u> กรณีนี้ต้องแทนค่า y ทุกตัว แต่ x ให้เอาตัวไหนมาแทนค่าก็ได้ของให้ประพจน์เป็นจริง

$-1 + 1 = 0$ เป็นจริง

$0 + 0 = 0$ เป็นจริง

$1 + -1 = 0$ เป็นจริง

จากกรณี y ทุกตัวให้ผลลัพธ์เป็นจริงทุกกรณี

ดังนั้น $\exists x \forall y(P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าความจริงของ $\exists x \forall y(P(x, y))$ โดย U = { 0 1 } และ $P(x, y) = x + y = 0$

<u>วิธีทำ</u> กรณีนี้ต้องแทนค่า y ทุกตัว แต่ x ให้เอาตัวไหนมาแทนค่าก็ได้ของให้ประพจน์เป็นจริง

$0 + 0 = 0$ เป็นจริง

$x + 1 = 0$ เป็นเท็จ เพราะไม่สามารถหาค่ามาแทน x แล้วเป็นจริง

จากกรณีนี้มี x หนึ่งกรณีที่ไม่เป็นจริง

ดังนั้น $\exists x \forall y(P(x, y))$ มีค่าความจริง เป็นเท็จ

ตัวบ่งปริมาณ

- **นิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณที่สมมูลกัน มีรายละเอียดดังนี้**

เปลี่ยน

$\forall \to \exists$

$\exists \to \forall$

$\sim\forall x(P(x))$	สมมูลกับ	$\exists x(\sim P(x))$
$\sim\exists x(P(x))$	สมมูลกับ	$\forall x(\sim P(x))$
$\sim\forall x(\sim P(x))$	สมมูลกับ	$\exists x(P(x)]$
$\sim\exists x(\sim P(x))$	สมมูลกับ	$\forall x(P(x))$
$\sim\forall x\forall y(P(x, y))$	สมมูลกับ	$\exists x\exists y(\sim P(x, y))$
$\sim\forall x\exists y(P(x, y))$	สมมูลกับ	$\exists x\forall y(\sim P(x, y))$
$\sim\exists x\forall y(P(x, y))$	สมมูลกับ	$\forall x\exists y(\sim P(x, y))$
$\sim\exists x\exists y(P(x, y))$	สมมูลกับ	$\forall x\forall y(\sim P(x, y))$

ตัวบ่งปริมาณ

- **ตัวอย่างนิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณที่สมมูลกัน**

จงพิสูจน์ $\sim\forall x(x+3 > 5)$ สมมูลกับ $\exists x(x+3 \leq 5)$

การพิสูจน์ $\sim(\forall x\ p(x))$ สมมูลกับ $\exists x \sim p(x)$

ต้องพิสูจน์ $\sim(\forall x\ p(x)) \to \exists x \sim p(x)$ และ $\exists x \sim p(x) \to \sim(\forall x\ p(x))$

กรณีพิสูจน์ $\sim(\forall x\ p(x)) \to \exists x \sim p(x)$

สมมติ	$\sim(\forall x\ p(x))$	เป็น T
	$\forall x\ (p(x))$	เป็น F
มี x ที่ทำให้	$p(x)$	เป็น F
มี x ที่ทำให้	$\sim p(x)$	เป็น T
	$\exists x \sim p(x)$	เป็น T

สรุป $\sim(\forall x\ p(x)) \to \exists x \sim p(x)$ คือ $T \to T$ เป็นจริง

ตัวบ่งปริมาณ

กรณีพิสูจน์ $\exists x \sim p(x) \rightarrow \sim(\forall x\ p(x))$

สมมติ $\exists x(\sim p(x))$ เป็น T

มี x ที่ทำให้	$\sim p(x)$	เป็น T
มี x ที่ทำให้	$p(x)$	เป็น F
	$\forall x(p(x))$	เป็น F
	$\sim(\forall x\ p(x))$	เป็น T

สรุป $\exists x\ (\sim p(x)) \rightarrow \sim(\forall x\ p(x))$ คือ $T \rightarrow T$ เป็นจริง

ตัวบ่งปริมาณ

หมายเหตุ ถ้าหากต้องการพิสูจน์โดยแทนค่า สมมุติให้ U = {1, 2, 3, 4, 5}

ตัวเลขที่แทนค่า	1	2	3	4	5
$\forall x[x+3>5]$	F	F	T	T	T
$\sim\forall x[x+3>5]$	T	T	F	F	F
$\exists x[x+3\leq 5]$	T	T	F	F	F

$\sim\forall x[x+3>5]$ โดยภายใน 3, 4, 5 ทั้งหมดมีค่าความจริงเป็น T แต่ประพจน์มีนิเสธจึงมีผลลัพธ์ที่ได้เป็น F และ 1, 2 ทำให้มีค่าความจริงเป็น F แต่ประพจน์มีนิเสธจึงมีผลลัพธ์ที่ได้เป็น T ซึ่งเหมือนกับกรณีของ $\exists x[x+3\leq 5]$ ทุกกรณี

$\exists x[x+3\leq 5]$ โดยภายใน 3, 4, 5 ในเซตคำตอบนี้ไม่มีแม้แต่ตัวเดียว ที่ทำให้ประพจน์มีผลลัพธ์ที่ได้เป็น F และ 1, 2 ทำให้มีค่าความจริงเป็น T ซึ่งเหมือนกับกรณีของ $\sim\forall x[x+3>5]$ ทุกกรณี

ดังนั้น จึงสามารถสรุปได้ว่า $\sim\forall x(x+3 > 5)$ สมมูลกับ $\exists x(x+3 \leq 5)$ โดยพิจารณาจากการแทนค่า แต่วิธีนี้ไม่สามารถนำมาพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้ แต่อาจจะใช้ในการตรวจสอบคำตอบได้

แบบฝึกหัด 1.1

1) จากข้อความข้างล่างนี้ ให้ทำเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่ถูก และทำเครื่องหมาย × หน้าข้อความที่ผิด

____1.1) $\sim(\forall x[x^2=1] \vee \exists x[2x=x+1]) \equiv \exists x[x^2\neq 1] \wedge \forall x[2x \neq x+1]$ โดย $x \in R$

F ∨ T   T ∧ F

~T   F

F

สมมูลกันไหม.

แบบฝึกหัด

1) จากข้อความข้างล่างนี้ ให้ทำเครื่องหมาย ✓ หน้าข้อความที่ถูก และทำเครื่องหมาย × หน้าข้อความที่ผิด

____1.1) $\sim(\forall x[x^2=1] \vee \exists x[2x=x+1]) \equiv \exists x[x^2\neq 1] \wedge \forall x[2x \neq x+1]$ โดย $x \in R$

____1.2) $\sim\forall x\forall y[\, x+y > 0] \equiv \exists x\exists y[x+y \geq 0]$ โดย $x,y \in R$

____1.3) $\sim\exists x\forall y[\,(x=y)\,] \equiv \sim\forall x\exists y[x\neq y]$ โดย $x,y \in R$

____1.4) $\exists x\forall y[(x=y)\rightarrow(x^2>y)] \equiv \forall x\exists y[(x=y)\wedge(x^2\leq y)]$ โดย $x,y \in R$

____1.5) $\sim\exists x\forall y[(xy<0) \rightarrow (x<0\vee y<0)] \equiv \exists x\forall y[(xy<0)\wedge(x\geq 0\wedge y\geq 0)]$ โดย $x,y \in R$

____1.6) $\exists y\forall x[(xy=0 \;\wedge x\neq 0) \rightarrow y=0] \equiv \forall y\exists x[(xy=0 \wedge x\neq 0) \wedge y\neq 0]$ โดย $x,y \in R$

____1.7) $\forall x\exists y[(x>y) \wedge (x^2<y)] \equiv \exists x\forall y[(x>y) \rightarrow (y\leq x^2)]$ โดย $x,y \in R$

____1.8) $U = \{1, 2, 3\}$ $\exists x\forall y[x^2 < y + 1]$ มีค่าความจริงเป็น F

____1.9) $U = \{1, 2, 3\}$ $\exists y\forall x[x^2 + y^2 < 12]$ มีค่าความจริงเป็น T

แบบฝึกหัด 2

2) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x \in R(x^2-6x+9 \geq 0)$

แบบฝึกหัด 3

3) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x \in R(x^2-6x+9 < 0)$

แบบฝึกหัด 4

4) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x(\frac{1}{x^2+1} > 1)$ เมื่อ x จำนวนจริง

แบบฝึกหัด 5

5) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x(x^2 > x)$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

แบบฝึกหัด 6

6) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x(x^2 > x)$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

แบบฝึกหัด 8

7) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x(x > 1 \rightarrow x^2 > x)$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

แบบฝึกหัด

8) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x(x > 1 \rightarrow x^2 > x)$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

9) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x(x > 1 \rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3})$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

10) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x(x > 1 \rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{3})$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

11)จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x(x > 1 \rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{2})$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

12) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x(x > 1 \rightarrow \frac{x}{x^2+1} < \frac{1}{2})$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

แบบฝึกหัด

13) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x(p(x))$ โดย $U = \{1, 2, 3\}$ และให้ $p(x)$ คือ $x + 1 \geq 2$

14) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\forall x(p(x))$ โดย $U = \{1, 2, 3\}$ และให้ $p(x)$ คือ $x + 1 \leq 2$

15) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x\,(p(x))$ โดย $U = \{1, 2, 3\}$ และให้ $p(x)$ คือ $x + 1 < 3$

16) จงพิสูจน์ค่าความจริงของประพจน์นี้ $\exists x\,(p(x))$ โดย $U = \{1, 2, 3\}$ และให้ $p(x)$ คือ $x + 1 < 2$