ความสัมพันธ์เวียนเกิด

บทที่ 4

Discrete Mathematics for Computer Science

อ.เอิญ สุริยะฉาย (ENS)
ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ลำดับและอนุกรม

- **ลำดับ** (Sequences) หมายถึง จำนวนหรือพจน์ที่เขียนเรียงกันภายใต้กฎเกณฑ์อย่างใดอย่างหนึ่ง สำหรับนิยามคือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตจำนวนเต็มบวก (1, 2, 3, ...)
  - เช่น มีฟังก์ชัน $f(n)=n^2+1$ เมื่อ n=1, 2, 3, ... จะได้ f(1)=2, f(2)=5, f(3)=10, f(4)=17, ...
  - ค่าฟังก์ชันเหล่านี้ที่เขียนต่อกันเป็น 2, 5, 10, 17, ... เรียกว่า ลำดับ นิยมเขียนฟังก์ชันด้วย a_n คือ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$
  - เขียนแทนด้วย f(1), f(2), f(3), ..., f(n) เพื่อให้ทราบว่าเป็นลำดับ โดยโดเมนต้องเป็นจำนวนนับเท่านั้น เรียก a_1 ว่า "พจน์ที่ 1" ของลำดับ เรียก a_2 ว่าพจน์ที่ 2 ของลำดับ, ไปเรื่อยๆ จนถึงพจน์ที่ n ใดๆ เขียนแทนด้วย a_n จะเรียกว่า พจน์ทั่วไปของลำดับ เช่น ลำดับ 2, 5, 10, 17, ... มีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n = n^2+1$

ลำดับ

- การหาพจน์ทั่วไปนั้น โดยปกติมีได้มากกว่า 1 แบบ
- เช่น ลำดับ 2, 4, 8,...
  - อาจมีพจน์ทั่วไปเป็นคือ $a_n = 2^n$ ทำให้ a_4 มีค่าเท่ากับ 16
  - หรือมีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n =(n+1)(n2–n+6)/6$ ทำให้ a_4 มีค่าเท่ากับ 15 ซึ่งมีค่าไม่เท่ากัน แต่ 3 พจน์แรกมีค่าเท่ากัน กลายเป็นลำดับที่ต่างกัน
- หรืออีกกรณี ลำดับ 1, 2, 3, 4, ...
  - อาจมีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n = n$ ซึ่งทำให้พจน์ที่ 5 มีค่าเท่ากับ 5
  - หรือ $a_n = (n–1)(n–2)(n–3)(n–4)+n$ ซึ่งทำให้พจน์ที่ 5 มีค่าเท่ากับ 29 ซึ่งมีค่าไม่เท่ากัน แต่ 4 พจน์แรกมีค่าเท่ากัน กลายเป็นลำดับที่ต่างกัน

ลำดับ

ลำดับทั่วๆ ไปแบ่งเป็น 2 ชนิดคือ

- **ลำดับจำกัด** (finite sequence)
  - คือลำดับที่มีจำนวนพจน์ที่แน่นอน เช่น 8 พจน์, 15 พจน์, หรือ n พจน์
- **ลำดับอนันต์** (infinite sequence)
  - คือลำดับที่มีจำนวนพจน์มากจนนับไม่ได้ เช่น **1,2,3,4,...**

ลำดับเลขคณิต

- **ลำดับเลขคณิต** (Arithmetic Sequence) คือ ลำดับที่มีผลต่างของพจน์หลังลบด้วยพจน์หน้าที่ติดกันมีค่าคงตัวเท่ากันเสมอนี้ จะเรียกว่า ลำดับเลขคณิต และเรียกผลต่างที่มีค่าคงตัวเท่ากันเสมอว่าผลต่างร่วม
- สำหรับนิยามคือลำดับที่ผลต่างซึ่งได้จากพจน์ที่ n+1 ลบด้วยพจน์ที่ n มีค่าคงตัว ค่าคงตัวนี้เรียกว่าผลต่างร่วม เขียนแทนผลต่างร่วมด้วย d

ลำดับเลขคณิต

- พิจารณาลำดับ 1, 4, 7, 10, 13, ...
- จะเห็นว่าเมื่อนำพจน์หลังลบด้วยพจน์หน้าที่อยู่ติดกันมีผลต่างเป็นค่าคงตัวเท่ากับ 3 เสมอนั่น
- คือ 4 – 1 = 3, 7 – 4 = 3, 10 – 7 = 3, 13 – 10 = 3
- ตัวอย่าง

2, 5, 8, 11, ...	มี d เท่ากับ 3
9, 7, 5, 3,...	มี d เท่ากับ -2
5, 5, 5, ...	มี d เท่ากับ 0

ลำดับเลขคณิต

- สูตรการหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต การหาพจน์ที่ n คือ $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$
- ตัวอย่าง จงหาค่าของ a_5 และ a_{10} จากลำดับเลขคณิตนี้ 2, 5, 8, 11, ...
- จากโจทย์มี ผลต่างร่วมเท่ากับ 3
- เมื่อแทนค่าลงในสูตร $a_n = a_1 + (n-1)d$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$a_5 = 2 + (5-1) * 3 = 14$

$a_{10} = 2 + (10-1) * 3 = 29$

ลำดับเรขาคณิต

- **ลำดับเรขาคณิต** (Geometric Sequence) คือจับพจน์ที่อยู่ข้างหลังหารด้วยพจน์ที่อยู่ติดกันข้างหน้าจะแล้วได้ค่าเท่ากันตลอดลำดับนั้นจะเป็นลำดับเรขาคณิต
- สำหรับนิยามคือลำดับที่มีผลหารซึ่งเกิดจากพจน์ที่ n+1 หารด้วยพจน์ที่ n แล้วมีค่าคงตัว และค่าคงตัวนี้เรียกว่า **อัตราส่วนร่วม เขียนแทนอัตราส่วนร่วมนี้ด้วย r**
- พิจารณาลำดับ 4, 8, 16, 32, 64, ... จะเห็นว่าเมื่อนำพจน์หลังหารด้วยพจน์หน้าที่อยู่ติดกันมีผลหารเป็นค่าคงตัวเท่ากับ 2 เสมอ
- นั่นคือ 8 / 4 = 2, 16 / 8 = 2, 32 / 16 = 2, 64 / 32 = 2
- ตัวอย่าง

3, 6, 12, 24, ...	มี r เท่ากับ 2
2, -4, 8, -16,...	มี r เท่ากับ -2
5, 5, 5, ...	มี r เท่ากับ 1

ลำดับเรขาคณิต

- สูตรการหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต การหาพจน์ที่ n คือ $\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}}$
- ตัวอย่างเช่น จงหาค่าของ a_5 และ a_{10} จากลำดับเรขาคณิตนี้ 3, 6, 12, 24, …
- จากโจทย์มี r เท่ากับ 2 เมื่อแทนค่าลงในสูตร $a_n = a_1 r^{n-1}$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$a_5 = 3*2^4 = 48$$

$$a_{10} = 3*2^9 = 1536$$

ผลรวม

- **ผลรวม** (Summation) หมายถึงการบวกของเซตของจำนวน ซึ่งจะให้ผลลัพธ์เป็นผลบวกจำนวนที่กล่าวถึงเป็นจำนวนธรรมชาติ

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

- ตัวอย่างการหาผลรวมพจน์ที่ 10 = $\frac{10(10+1)}{2} = 55$

อนุกรม

- **อนุกรม** (Series) คือ ผลจากการบวกสมาชิกทุกตัวของลำดับไม่จำกัดเข้าด้วยกัน
- หากกำหนดให้ลำดับของจำนวนเป็นอนุกรมของลำดับนี้ก็คือ อนุกรมสามารถเขียนแทนได้ด้วย $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$
- สัญลักษณ์ของผลรวม ∑ เช่นตัวอย่างนี้เป็น
- อนุกรมของลำดับ 2^n คือ $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = 2 + 4 + 8 + \cdots}$

อนุกรมเลขคณิต

- **อนุกรมเลขคณิต** (Arithmetic Series) คือ อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต เรียกว่า อนุกรมเลขคณิต และผลต่างรวมของลำดับเลขคณิตเป็นผลต่างรวมของอนุกรมเลขคณิตด้วย หรืออาจกล่าวว่า เป็นผลบวก n พจน์แรก

  เมื่อ $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \ldots, a_1 + (n-1)d$ เป็นลำดับเลขคณิต

  จะได้ $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d)$ เป็นอนุกรมเลขคณิต

- ซึ่งมี a_1 เป็นพจน์แรกของอนุกรม และ d เป็นผลต่างรวมของอนุกรมเลขคณิต จากบทนิยาม จะได้ว่า ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มี n พจน์ จะเรียกการเขียนแสดงผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ ว่า อนุกรมเลขคณิต และผลต่างรวม (d) ของลำดับเลขคณิต เป็นผลต่างรวมของอนุกรมเลขคณิต

ตัวอย่างของอนุกรมเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 1 คือ 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 99 เป็น อนุกรมเลขคณิต
เพราะว่า 1, 3, 5, ..., 99 เป็น ลำดับเลขคณิต และมี d เท่ากับ 2

ตัวอย่างที่ 2 คือ 25 + 20 + 15 + 10 + ... เป็น อนุกรมเลขคณิต
เพราะว่า 25, 20, 15, 10, ... เป็น ลำดับเลขคณิต และมี d เท่ากับ – 5

ตัวอย่างที่ 3 คือ 7 + 14 + 21 + 28 + ... เป็น อนุกรมเลขคณิต
เพราะว่า 7, 14, 21, 28, ... เป็น ลำดับเลขคณิต และมีมี d เท่ากับ 7

สูตรการหาผลบวก อนุกรมเลขคณิต

- **สูตรการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต**

  คือ $\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$

- ตัวอย่าง จงหาผลรวมพจน์ที่ 5 จากลำดับ**เลขคณิต** 2, 5, 8, 11, 14, ...
- จากโจทย์เมื่อแทนค่าลงในสูตร $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$S_n = \frac{5}{2}(2 + 14) = 40$$

อนุกรมเรขาคณิต

- **อนุกรมเรขาคณิต** (Geometric Progression) อนุกรมที่ได้จากจาก ลำดับเรขาคณิตเรียกว่า อนุกรมเรขาคณิต และอัตราส่วนรวมของ ลำดับเรขาคณิตจะเป็นอัตราส่วนรวมของอนุกรมเรขาคณิตด้วย

กำหนด $a_1, a_1r, a_1r^2, \ldots, a_1r^{n-1}$ **เป็นลำดับเรขาคณิต**

จะได้ $a_1 + a_1r + a_1r^2 + \ldots + a_1r^{n-1}$ **เป็นอนุกรมเรขาคณิต**

- ซึ่งมี a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนรวมของอนุกรมเรขาคณิต

ตัวอย่างของอนุกรมเรขาคณิต

ตัวอย่างที่ 1 คือ 2 + 4 + 8 + 16 + ... เป็น อนุกรมเรขาคณิต
เพราะ 2, 4, 8, 16, ... เป็น ลำดับเรขาคณิต และมี r เท่ากับ 2

ตัวอย่างที่ 2 คือ 81 + 27 + 9 + 3 + ... เป็น อนุกรมเรขาคณิต
เพราะ 81, 27, 9, 3, ... เป็น ลำดับเรขาคณิต และมี r เท่ากับ 3

ตัวอย่างที่ 3 คือ 3 + 3 + 3 + 3 + ... เป็น อนุกรมเรขาคณิต
เพราะ 3, 3, 3, 3, ... เป็น ลำดับเรขาคณิต และมี r เท่ากับ 1

สูตรการหาผลบวก อนุกรมเรขาคณิต

- **สูตรการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต**

  คือ $\boxed{S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad \text{โดยที่ } r \neq 1}$

- จงหาผลรวมพจน์ที่ 5 จากลำดับ**เรขาคณิต** 3, 6, 12, 24, 48 ...
- จากโจทย์ มี r = 2 และเมื่อแทนค่าลงใน

  สูตร $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$S_n = \frac{3(1-2^5)}{1-2} = 93$$

ความหมายการเวียนเกิด (Recursion)

- การเรียกซ้ำหรือการเรียกตัวเองหรือการเวียนเกิด (Recursion)
- คือ วิธีการที่ฟังก์ชันสามารถ**เรียกใช้ฟังก์ชันตัวเอง** โดยแต่ละครั้งที่ฟังก์ชันถูกเรียก จะเกิดค่าตัวแปรหรือพารามิเตอร์เปลี่ยนแปลงไปอย่างอัตโนมัติ **แล้วกำหนดการทำงานขั้นสุดท้ายไว้** เมื่อทำงานถึงขั้นสุดท้ายก็จะสิ้นสุดการทำงานและส่งผลลัพธ์กลับไป

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

- **ความสัมพันธ์เวียนเกิด** (Recurrence Relations) สำหรับอันดับ a_0, $a_1, \ldots, a_n$ เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของพจน์ a_n กับพจน์ a_0, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ ที่เกิดก่อน โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับพจน์ $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ที่ชัดแจ้ง หรืออาจจะกล่าวได้ คือตัวเลขถัดไปนั้นมีความสัมพันธ์กับตัวเลขก่อนหน้า โดยสามารถนำมาเขียนสมการคณิตศาสตร์ได้

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

- **ตัวอย่าง** จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของอันดับ 5, 8, 11, 14, 17,...

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 5 \\
a_1 &= 8 = 5+3 = a_0+3 \\
a_2 &= 11 = 8+3 = a_1+3 \\
a_3 &= 14 = 11+3 = a_2+3 \\
a_4 &= 17 = 14+3 = a_3+3
\end{aligned}
$$

พิจารณาพบว่า พจน์ถัดไปมีค่าต่างจากพจน์ก่อนหน้าอยู่ 3

พิจารณาต่อไปจะได้

$a_n = a_{n-1}+3 \;;\; n \geq 1$ เป็น ความสัมพันธ์เวียนเกิด

โดยมี $a_0 = 5$ เป็น เงื่อนไขเริ่มต้น

ตัวอย่าง 1

- จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของอันดับ 1, 2, 4, 7, 11, 16 …

ลักษณะของความสัมพันธ์เวียนเกิด

1. เป็นฟังก์ชันที่ต้องมีพารามิเตอร์
2. แต่ละครั้งที่เรียกใช้ฟังก์ชันนั้น พารามิเตอร์ของฟังก์ชันต้องค่าเปลี่ยนแปลง
3. ฟังก์ชันการเรียกซ้ำ **ต้องมีกรณีหยุดอย่างน้อย 1 กรณี** หรือ กรณีจำกัด (Stopping Case)

- โดยเมื่อพารามิเตอร์ของฟังก์ชันมีค่าถึงขอบเขตที่กำหนดให้หยุดนี้ ฟังก์ชันจะสามารถให้คำตอบและจะไม่ต้องเรียกตัวเองซ้ำอีก

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

```
function A()
{
  if()
  {
    function A()
  }
  return or print
}
```

เงื่อนไขในการหยุดอย่างน้อย 1 กรณี (หยุด)

เปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ และเรียกฟังก์ชันตัวเอง (เรียกตัวเอง หรือ วนซ้ำ)

ส่งหรือแสดงผลลัพธ์ย้อนกลับไป (คำตอบ)

ข้อดีและข้อเสียการเวียนเกิด

- ข้อดีของวิธีการเวียนเกิด คือ ทำให้สามารถเขียนโปรแกรมได้สั้น และสามารถเขียนฟังก์ชันบางรูปแบบได้ง่าย
- ข้อเสียของวิธีการเวียนเกิด คือ ทำให้ใช้เนื้อที่ในหน่วยความจำมาก และการรันโปรแกรมทำได้ช้า
- การเขียนโปรแกรมเข้าใจยาก อาจเกิดการเรียกซ้ำไม่รู้จบหากกำหนดเงื่อนไขเพื่อหยุดทำงานไม่รัดกุม

แบบฝึกหัด 1

- จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของอันดับ 3, 6, 9, 12, 15, 18, …

แบบฝึกหัด 2

- จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของอันดับ 1, 3, 7, 13, 21, 31, …

แฟกทอเรียล

- **แฟกทอเรียล** ของจำนวนเต็มไม่ติดลบ n คือ ผลคูณของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ n เขียนแทนด้วย n!
- คำตอบเกิดจากการคูณของจำนวนเต็มบวกชุดหนึ่ง ซึ่งถ้าคำตอบเกิดจากการคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n เช่น 1 x 2 x 3 x 4 x 5 จำนวนเหล่านี้เราสามารถใช้สัญลักษณ์ แฟกทอเรียล เขียนแทนได้ คือ 5!

$$\begin{aligned} N! &= N \times (N-1)! \\ &= N \times (N-1) \times (N-2)! \\ &= N \times (N-1) \times (N-2) \times (N-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 \end{aligned}$$

โดย 0! มีค่า เป็น 1

โดย 1! มีค่า เป็น 1

แฟกทอเรียล

- จากนิยามสามารถสรุปการหาคำตอบของ N! ได้เป็น 2 กรณี คือ
  - ถ้า N มีค่าเท่ากับ 0 คำตอบที่ได้คือ N! = 1
  - ถ้า N มีค่ามากกว่า 0 คำตอบที่ได้คือ N! = N x (N-1)!
- สำหรับ 5! การคำนวณหาค่าแฟกทอเรียล

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \times 4! \\ &= 5 \times 4 \times 3! \\ &= 5 \times 4 \times 3 \times 2! \\ &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1! \\ &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \end{aligned}$$

1	**ft = 5 * fact(4);**	
2	ft = 5 * 4 * fact(3);	
3	ft = 5 * 4 * 3 * fact(2);	
4	ft = 5 * 4 * 3 * 2 * fact(1);	
5	ft = 5 * 4 * 3 * 2 * 1;	หยุดการทำงาน

แฟกทอเรียล

$n! = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times (n-1) \times n = (n-1)! \times n$

$a_n = (n-1)! \times n$

$= a_{n-1} \times n$

- ดังนั้น ความสัมพันธ์เวียนเกิดของ n!
- คือ $a_n = na_{n-1}$; $n \geq 1$
- เงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 1$ และ $a_1 = 1$

ฟีโบนักชี

- **ลำดับฟีโบนัชชี** (Fibonacci Sequence) มีนิยามของความสัมพันธ์ว่า จำนวนถัดไปเท่ากับผลบวกของจำนวนสองจำนวนก่อนหน้า และสองจำนวนแรกก็คือ 0 และ 1 ตามลำดับ หากเขียนให้อยู่ในรูปของสัญลักษณ์ ลำดับ F_n ของฟีโบนัชชี
- สามารถเขียนความสัมพันธ์เวียนเกิดได้ดังนี้

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

โดยกำหนดค่าเริ่มแรกให้

$F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$

ฟีโบนักชี

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ,... จากตัวเลขอนุกรมดังกล่าว สามารถแสดงวิธีการหาค่าเทอมต่างๆ ได้ดังนี้

1) $F_0 = 0$

2) $F_1 = 1$

3) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

พจน์ที่ 3 มาจาก พจน์ที่ 1 + พจน์ที่ 2 = 0 +1 = 1 โดยเริ่มจากพจน์ที่ 3 เป็นต้นไป

พจน์ที่ 4 มาจาก พจน์ที่ 2 + พจน์ที่ 3 = 1 + 1 = 2

พจน์ที่ 5 มาจาก พจน์ที่ 3 + พจน์ที่ 4 = 1 + 2 = 3

ดังนั้น ความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $n \geq 2$

และเงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$

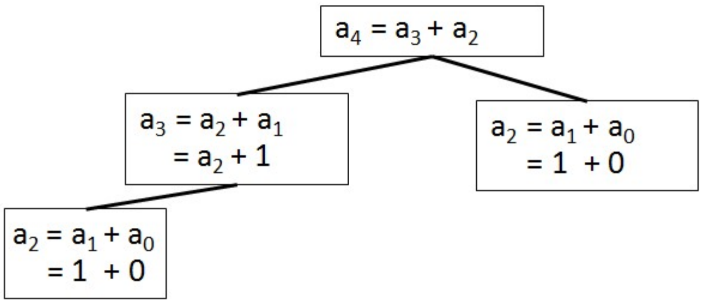
จากนิยามสามารถสรุปการหาคำตอบออกเป็น 2 ทางคือ

ถ้า n มีค่าเป็น 0 หรือ 1 คำตอบที่ได้คือ $F_n = n$

ถ้า n มีค่ามากกว่า 1 คำตอบที่ได้คือ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

ฟีโบนักชี

- จงคำนวณหาค่าอนุกรมไฟโบเนชชีที่ 4
- วิธีคิดแบบต้นไม้แตกกิ่งก้านสาขา



- วิธีคิดแบบปกติ

$$
\begin{aligned}
F(4) &= F(3) + F(2) \\
&= (F(2) + F(1)) + (F(1) + F(0)) \\
&= ((F(1) + F(0)) + F(1)) + (F(1) + F(0)) \\
&= ((1+0) + 1) + (1 + 0) \\
&= 3
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 2

- มีเงินฝาก 1,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี ถ้าฝากแบบดอกเบี้ยทบต้นสิ้นปีที่ n จะมีเงินรวมทั้งหมดเท่าไร

สิ้นปีที่ 1 มีเงิน	1000.00 + (0.12) (1000.00)	= 1120.00
สิ้นปีที่ 2 มีเงิน	1120.00 + (0.12) (1120.00)	= 1254.40
สิ้นปีที่ 3 มีเงิน	1254.40 + (0.12) (1254.40)	= 1404.92
...		
สิ้นปีที่ n มีเงิน	เงินรวมสิ้นปีที่ n-1 + ดอกเบี้ย	

ให้ a_n เป็นเงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ n

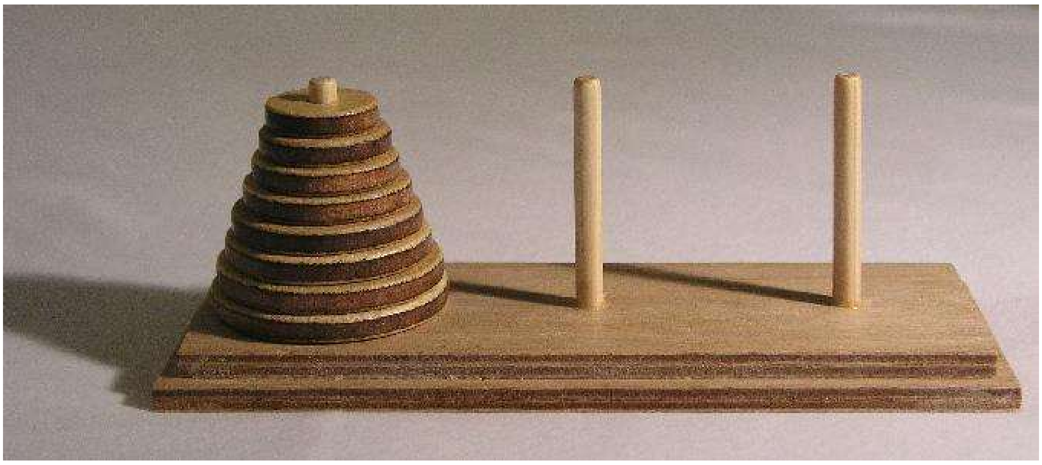
$$a_n = (1)(a_{n-1}) + (0.12)(a_{n-1})$$

$$a_n = (1.12)(a_{n-1})$$

- ดังนั้น ความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ $a_n = (1.12)(a_{n-1})$; $n \geq 1$ และเงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 1000$

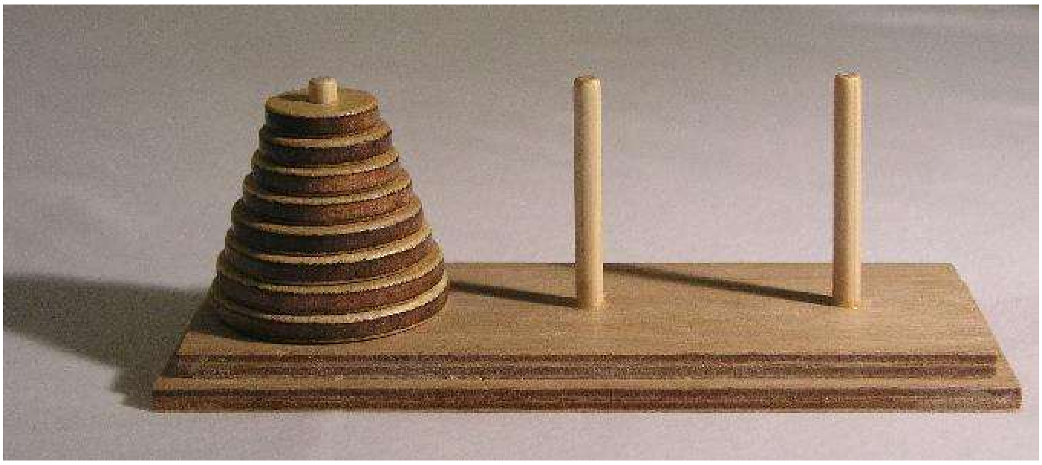
ปริศนาหอคอยฮานอย

- EDOUARD LUCAS คือ นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส เป็นผู้คิดค้นปริศนาหอคอยฮานอย (The Tower of Hanoi) โดยปริศนาหอคอยฮานอย นั้นจะมีแผ่นจานไม้ 8 แผ่น รัศมีแตกต่างกัน แต่ละแผ่นมีรูตรงกลาง นำมาใส่ไว้ในหลักเป็นกองซ้อน โดยให้แผ่นที่เล็กกว่าทับแผ่นที่ใหญ่กว่า และมีหลักเปล่าสองหลัก ดังรูป

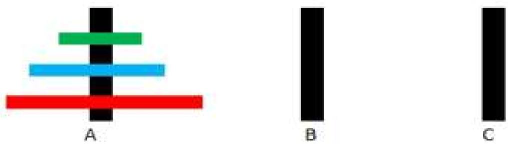


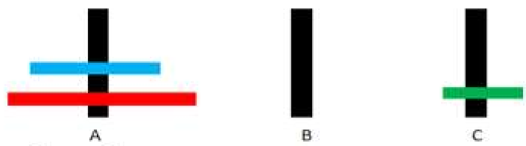
ปริศนาหอคอยฮานอย

- **ปริศนาหอคอยฮานอย** คือ ให้ย้ายแผ่นจานทั้งหมดไปกองไว้ที่หลักเปล่าหลักหนึ่ง โดยมีเงื่อนไขว่า เคลื่อนย้ายได้คราวละแผ่น และต้องนำไปไว้ที่หลักใดหลักหนึ่ง และห้ามแผ่นที่มีขนาดใหญ่กว่าวางทับแผ่นที่มีขนาดเล็กกว่า ต่อไปนี้แสดงขั้นตอนการเคลื่อนย้ายแผ่นจานจำนวน 3 แผ่นจากแผ่น A ไปแผ่น C

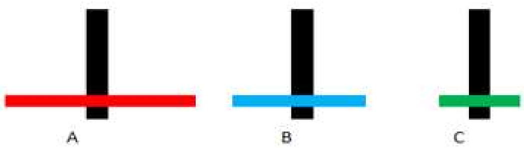


ตัวอย่างการเคลื่อนย้าย

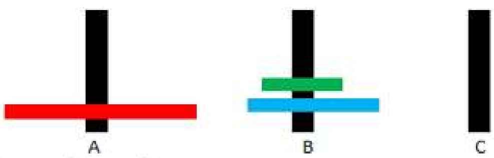




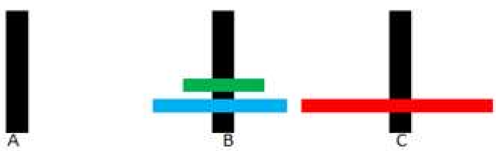
ขั้นตอนที่ 1 เคลื่อนย้ายจากแท่น A ไป C



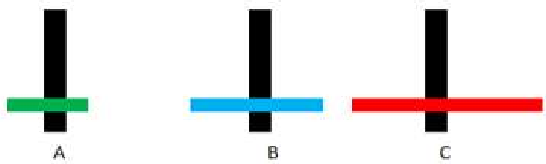
ขั้นตอนที่ 2 เคลื่อนย้ายจากแท่น A ไป **C**



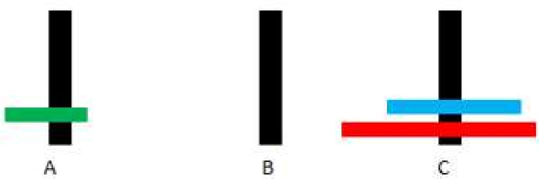
ขั้นตอนที่ 3 เคลื่อนย้ายจากแท่น C ไป B



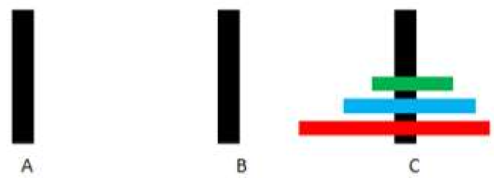
ขั้นตอนที่ 4 เคลื่อนย้ายจากแท่น A ไป C



ขั้นตอนที่ 5 เคลื่อนย้ายจากแท่น B ไป A



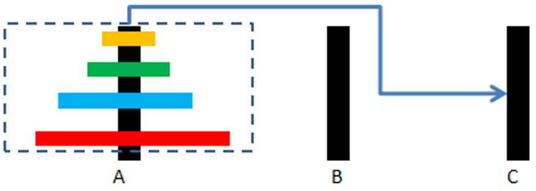
ขั้นตอนที่ 6 เคลื่อนย้ายจากแท่น B ไป C



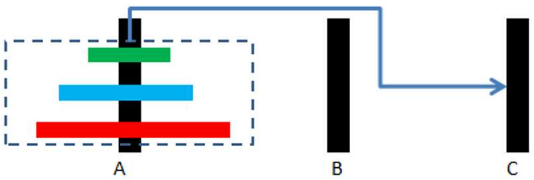
ขั้นตอนที่ 7 เคลื่อนย้ายจากแท่น A ไป C

จำนวนการเคลื่อนย้ายแผ่น

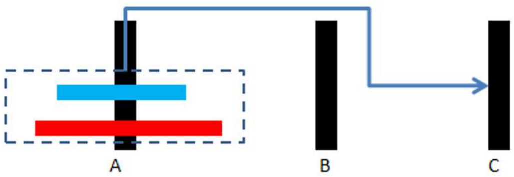
- ให้ a_n เป็นจำนวนครั้งน้อยสุดในการเคลื่อนย้ายแผ่นจาน n แผ่นจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักหนึ่ง



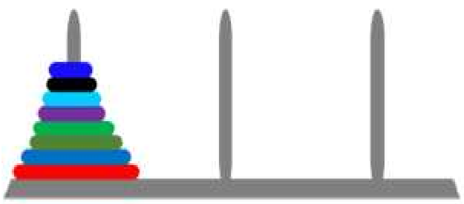
จำนวนที่เคลื่อนย้ายจาก A ไป C คือ a_n โดย n คือ 4



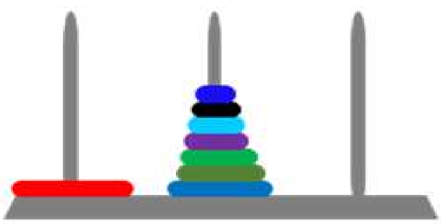
จำนวนที่เคลื่อนย้ายจาก A ไป C คือ a_{n-1} โดย n คือ 3



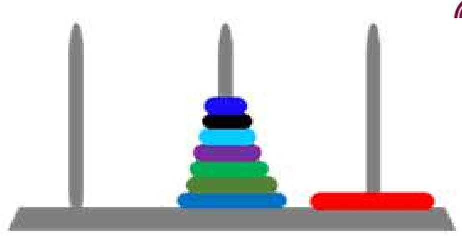
จำนวนที่เคลื่อนย้ายจาก A ไป C คือ a_{n-2} โดย n คือ 2



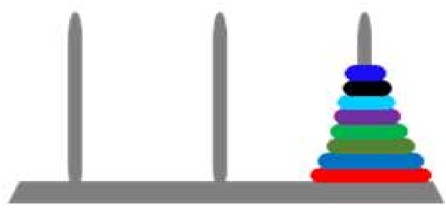
1. ต้องย้ายแผ่นที่เล็กกว่าทั้งหมด n-1 แผ่น ไปยังหลักที่ว่างก่อน จำนวนการเคลื่อนย้าย คือ a_{n-1} ครั้ง



2. ย้ายแผ่นใหญ่ที่สุดไปยังหลักเป้าหมาย จำนวนการเคลื่อนย้ายคือ 1 ครั้ง



3. ย้ายแผ่นจานทั้งหมดในข้อ 1. ไปยังหลักเป้าหมาย จำนวนการเคลื่อนย้าย คือ a_{n-1} ครั้ง



จะได้ $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$

$= 2a_{n-1} + 1$

ตัวอย่าง 3

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = -3a_{n-1}$ และ $a_0=7$

ขั้นตอนที่ 1 จากสูตรการแปลง $a_n = ra_{n-1}$ เป็นรูปแบบนี้ $a_n = Ar^n$

$a_n = -3a_{n-1}$

$a_n = -3a_{n-1}$

$a_n = A(-3)^n$

ขั้นตอนที่ 2 หาค่า A โดยการแก้สมการ

$n=0;$ $a_0 = (-3)^0 \times A$ - (1)

$A = 7$

แก้สมการ (1) จะได้ A = 7

ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 7x(-3)^n$

ตัวอย่าง 4

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 3a_{n-1} - 5 ; n \geq 1$ และ $a_0 = 6$

ตัวอย่าง 5

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}; n \geq 2$ และเงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$

ตัวอย่าง 6

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 4a_{n-1}-4a_{n-2} \; ; n \geq 2$ โดยที่ $a_0 = 1$ และ $a_1 = 3$

ตัวอย่าง 7

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดปริศนาหอคอยฮานอย
- ถ้า n = 1 คือมีแผ่นจานเพียง 1 แผ่น จำนวนการเคลื่อนย้ายเป็น 1 ครั้ง และ n = 0 ไม่มีแผ่นจาน จำนวนการเคลื่อนย้ายเป็น 0 ครั้ง ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดของปริศนาหอคอยฮานอย คือ $a_n = 2a_{n-1} + 1 ; n \geq 2$
- เงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$
- จากปริศนาหอคอยฮานอย ทำแปลงรูปจากสูตรการแปลง $a_n = ra_{n-1} + d$ เป็นรูปแบบนี้ $a_n = Ar^n + B$

ผลเฉลยอยู่ในรูป	a_n	$= Ax2^n + B$	เมื่อ r = 2
จะได้	a_0	$= Ax2^0 + B$	แล้ว 0 = A+B
	a_1	$= Ax2^1 + B$	แล้ว 1 = 2A+B
แก้สมการ	A = 1,	B = -1	
ผลเฉลยคือ	a_n	$= 2^n - 1 ; n \geq 2$	

ตัวอย่าง 7

- ถ้าจานมีจำนวน 3 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 7
- ถ้าจานมีจำนวน 4 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 15
- ถ้าจานมีจำนวน 5 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 31
- ถ้าจานมีจำนวน 6 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 63
- ถ้าจานมีจำนวน 7 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 127
- ถ้าจานมีจำนวน 8 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 255
- **หมายเหตุ** รูปแบบของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด คือ จะนำพจน์ก่อนหน้ามาคำนวณ ซึ่งถ้าต้องการทราบพจน์ที่ n ต้องทราบพจน์ที่ n-1 ก่อน จากตัวอย่างปริศนาหอคอยฮานอย คือ $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ถ้าต้องการทราบพจน์ที่ 8 ต้องหาพจน์ที่ 7 ก่อนแล้วนำมาเข้าสูตร คือ $a_8 = 2(127) + 1 = 255$ จึงจะสามารถหาพจน์ที่ 8 แต่ถ้ารูปแบบผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดนั้นไม่มีความจำเป็นต้องรู้ค่าพจน์ก่อนหน้า จากตัวอย่างปริศนาหอคอยฮานอย คือ $a_n = 2^n - 1$ ถ้าต้องการทราบพจน์ที่ 8 สามารถแทนค่า n ด้วย 8 เข้าไปได้ ตัวอย่างเช่น $a_8 = 2^8 - 1 = 255$ จึงไม่มีความจำเป็นต้องหาพจน์ก่อนหน้าจึงสะดวกในการใช้งานมากกว่า