เซต

บทที่ 1

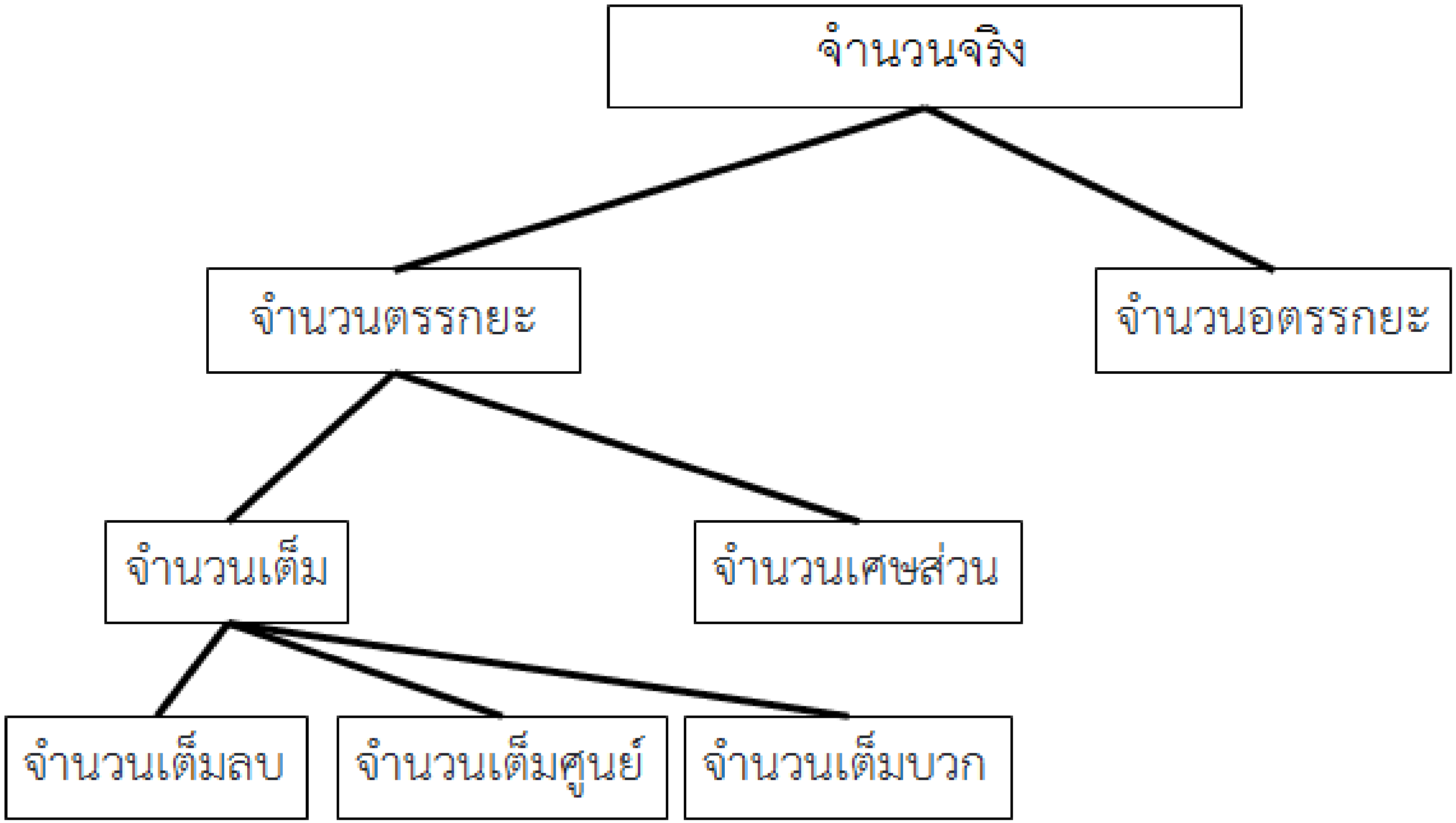
Discrete Mathematics for Computer Science

ดาวน์โหลดเอกสารได้ที่

https://bit.ly/Discrete-ENS

อ.เอิญ สุริยะฉาย (ENS)
ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ระบบจำนวนจริง



ระบบจำนวนจริง

ชื่อ	สัญลักษณ์	ตัวอย่าง	บรรยาย
จำนวนเต็มบวก	I^+	1 2 3	**จำนวนเต็มบวก** คือ จำนวนที่นับสิ่งของต่างๆ ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ประเภทคือ จำนวนคู่ คือ จำนวนที่หารด้วย 2 ลงตัว เช่น 2, 4, ... จำนวนคี่ คือ จำนวนที่หารด้วย 2 ไม่ลงตัว เช่น 1, 3, 5, ...
จำนวนเต็มลบ	I^-	-1 -2 -3	
จำนวนเต็มศูนย์	I^0	0	
จำนวนเต็ม	I	-1 0 1	**จำนวนเต็ม** คือ จำนวนที่สามารถเขียนได้ โดยไม่ใช่เศษส่วนหรือทศนิยม เช่น 21, 4, −20 แต่จำนวนเหล่านี้ $9.75, \frac{5}{2}, \sqrt{3}$ ไม่ใช่จำนวนเต็ม เซตของจำนวนเต็มเป็นเซตย่อยของจำนวนจริง และประกอบด้วย จำนวนเต็มบวก (1, 2, 3, ...) จำนวนเต็มศูนย์ (0) และจำนวนเต็มลบ (−1, −2, −3, ...)

ระบบจำนวนจริง

ชื่อ	สัญลักษณ์	ตัวอย่าง	บรรยาย
จำนวนตรรกยะ	Q	$\frac{0}{2}, \frac{1}{3}, \sqrt{49}, 5, 0.75$	**จำนวนตรรกยะ** คือ จำนวนที่สามารถเขียนในรูปเศษส่วน จำนวนเต็ม ทศนิยมที่ซ้ำไม่รู้จบ เช่น $\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{25}{10}, 0.5, -\frac{5}{1}$
จำนวนอตรรกยะ	Q’	$\sqrt{3}, \sqrt{7}$	**จำนวนอตรรกยะ** คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนได้ในรูปเศษส่วน หรือทศนิยมที่ไม่ซ้ำไม่รู้จบ เช่น $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$
จำนวนจริง	R	จำนวนอตรรกยะ และ จำนวนตรรกยะ	**จำนวนจริง** คือ จำนวนที่สามารถจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งกับจุดบนเส้นจำนวนได้

ช่วงของจำนวนจริง

1) ช่วงเปิด

- $(-4,5) = \{ x \mid -4 < x < 5 \}$

- โดยจุดที่เป็นวงกลมโปร่งใส เป็นจุดที่ไม่อยู่ในเซต ดังนั้น -4 และ 5 จึงไม่อยู่ในเซต และเทียบเท่ากับวงเล็บเปิด “(”,“)”

ช่วงของจำนวนจริง

2) ช่วงปิด

- $[1, 10] = \{ x \mid 1 \le x \le 10 \}$

- โดยจุดที่เป็นวงกลมทึบ เป็นจุดที่อยู่ในเซต ดังนั้น 1 และ 10 จึงอยู่ในเซต และเทียบเท่ากับวงเล็บปิด “[”,“]”

ช่วงของจำนวนจริง

3) ช่วงกึ่งเปิดปิด

- $(-5, 10] = \{ x \mid -5 < x \leq 10 \}$

ช่วงของจำนวนจริง

4) ช่วงอนันต์

- $[1,\infty) = \{ x \mid x \geq 1 \}$

เซต

- **เซต** คือ กลุ่มของสิ่งต่างๆ ซึ่งต้องทราบแน่นอนว่ามีสิ่งใดอยู่ในกลุ่มบ้าง โดยสิ่งที่อยู่ในกลุ่มเรียกว่า “สมาชิก”
  - A = {1,2,3,4,5}
  - B = {2,1,1,3}

เซต

- **เซตว่าง** คือ ไม่มีสมาชิก (∅) หรือ {}
- **เซตจำกัด** (finite sets) คือ เซตที่บอกจำนวนสมาชิกได้
  - เช่น A = { 1,2,3,4 ...., 100 }
- **เซตอนันต์** (infinite sets) คือ เซตที่ไม่สามารถบอกจำนวนสมาชิกได้
  - เช่น A = { 1,2,3,4 .... }

เซตที่เท่ากัน

- **เซตที่เท่ากัน** คือ เซตที่มีสมาชิกเหมือนกันหมด โดยไม่พิจารณาลำดับ และสมาชิกสามารถซ้ำกัน
  - $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{x \in I^+ \mid 1 \le x \le 5\}$
  - $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{x \in I \mid 0 \le x \le 5\}$
  - $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{1,2,3,4,5,5\}$

เซตที่เท่ากัน

- $A = \{1,2,3\}$ $B = \{2,1,1,3\}$

- $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{x \in R \mid 1 \le x \le 5\}$

- A = {แดง, เหลือง, ชมพู, เขียว, แสด}
- B = {เงาะ, ลำไย, มะม่วง, ชมพู่, แตงโม}

เซตที่เทียบเท่ากัน

- **เซตที่เทียบเท่ากัน** คือ เซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน
  - A = {1,2,3,4,5}   B = {1,2,3,4,5,5}
  - A = {แดง,เหลือง,ชมพู,เขียว,แสด}
  - B = {เงาะ,ลำไย, มะม่วง,ชมพู่, แตงโม}
  - $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{x \in I^{+} \mid 1 \leq x \leq 5\}$

สมาชิก

- **สมาชิก** ถ้าเซต A คือ {1, 2, 3} แล้ว $1 \in A$

$\in$ (epsilon) = เป็นสมาชิก, $\notin$ = ไม่เป็นสมาชิก, | = โดยที่

  - A = {1, 2, 3} แล้ว $2 \in A$
  - $A = \{x \in I^+ \mid 0 \le x \le 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$ แล้ว $0 \in A$
  - A = {1, 2, 3} แล้ว $4 \notin A$ และ $\{1\} \notin A$

สับเซต

- **สับเซต (SUBSET)** คือ ทั้งหมดของเซต A อยู่ใน B
- หรือ A เป็นสับเซตของ B ($A \subset B$)
  - B = {1,2,3} A = {1,2} สรุป $A \subset B$
  - B = {1,2,3} C = {1,4} สรุป $C \not\subset B$

เพาเวอร์เซต

- **เพาเวอร์เซต (POWERSET)** P(A) คือเซตเป็นไปได้ทั้งหมดที่เป็นสมาชิกของเซต A
  - A = {1, 2}   P(A) = { ∅, {1}, {2}, {1,2} } = จำนวนคือ 2^n
  - B = {1,2,3}
  - P(B) =

Cartesian Product

- **ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian Product)** ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$
- คือ เซตของคู่ลำดับ (a, b) ทั้งหมดที่ $a \in A$ และ $b \in B$
- โดย $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A$ และ $b \in B \}$
  - $A = \{1,2,3\}$ $B = \{x, y\}$
  - $A \times B =$

เอกภพสัมพันธ์

- **เอกภพสัมพันธ์ (Universal)** หรือ U คือ ขอบเขตทั้งหมดที่พิจารณา
- เช่น U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
- เซต A คือ {1,2,3,4}

Quiz

- A = [1, 2, 3, x] แล้ว A เป็นเซต หรือไม่

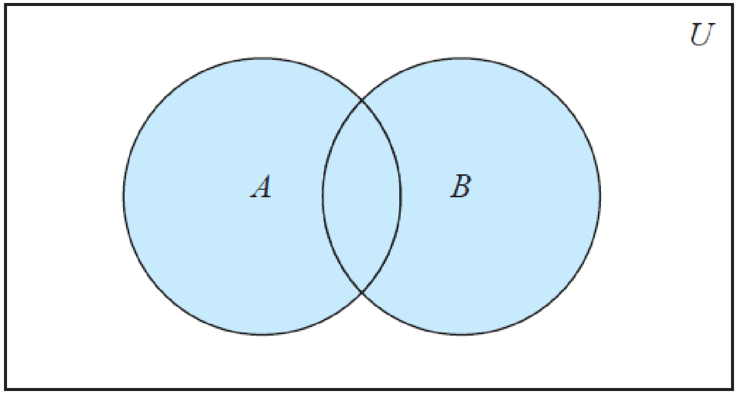
- $A = \{-1, 0, \{1,2\}\}$ จงหา P(A)

- $A = \{\varnothing, 0, \{\varnothing\}\}$ จงหา P(A)

Union

- **Union** (∪) สำหรับยูเนียนระหว่างเซตสองเซต คือ การเอาเซตทั้งสองเซตมารวมกันเป็นเซตเดียว นั้นคือ การเอาสมาชิกมารวมกัน
- สัญลักษณ์ที่ใช้แทนคำว่ายูเนียน คือ ∪ ตัวอย่างเช่น

$A = \{1,2\}$ $B = \{2,3\}$ ➔ $A \cup B = \{1,2,3\}$

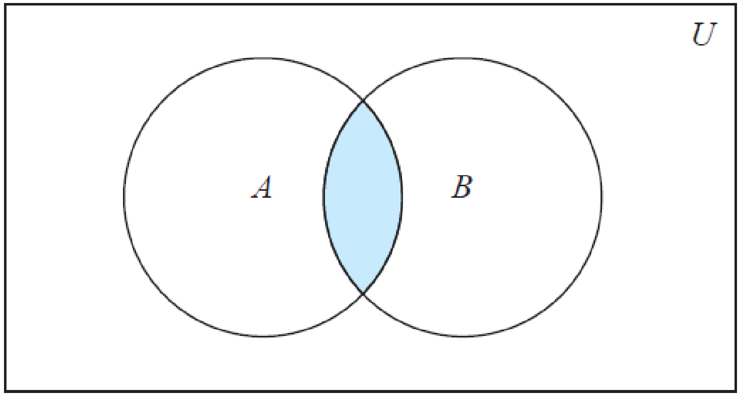


$A \cup B$ is shaded.

Intersection

- **Intersection** ($\cap$) สำหรับอินเตอร์เซกกันของเซตสองเซต คือ การหาสมาชิกส่วนที่ซ้ำกันจากสองเซตมาเขียนเป็นอีกเซตหนึ่ง
- สัญลักษณ์ที่ใช้แทนคำว่าอินเตอร์เซก คือ $\cap$ ตัวอย่างเช่น

$A = \{1,2\}$ $B = \{2,3\}$ ➔ $A \cap B = \{2\}$

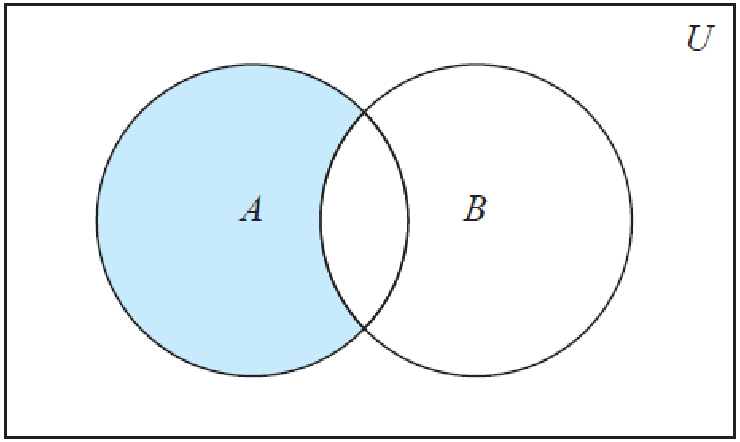


$A \cap B$ is shaded.

Difference

- **Difference** (-) สำหรับการหาผลต่างระหว่างเซตหรือจับเซตสองเซตมาลบกัน ให้คิดว่าเอาเซตข้างหน้าเป็นตัวตั้ง จากนั้นถ้าหากมีสมาชิกตัวไหนซ้ำกับในเซตด้านหลังให้ตัดออก
- สัญลักษณ์แทนการลบ คือ เครื่องหมายลบ – ตัวอย่างเช่น

A = {1,2}   B= {2,3}   ➔ A - B = {1}

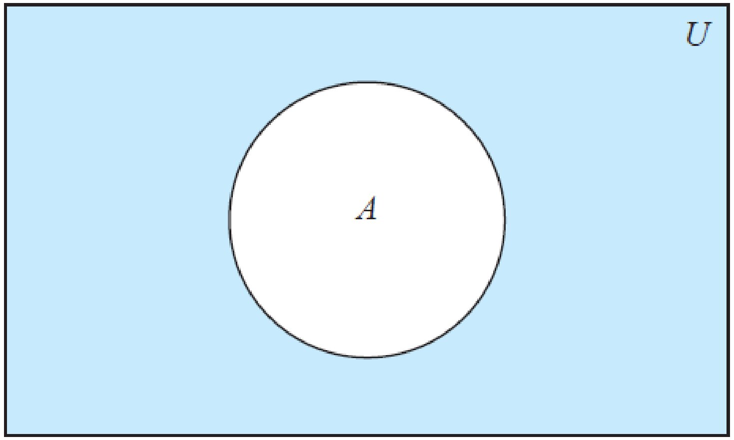


$A - B$ is shaded.

Complement

- Complement (′) สำหรับคอมพลีเมนต์ของเซต เป็นการดำเนินการบนเซตเซตเดียว ทำได้โดยการเอายูนิเวอร์สหรือเอกภพสัมพัทธ์เป็นตัวตั้งแล้วลบออกด้วยเซตนั้นๆ หรือ การหาสมาชิกทั้งหมดที่ไม่อยู่ในเซตนั้น แต่อยู่ในยูนิเวอร์ส
- สัญลักษณ์ของคอมพลีเมนต์ คือ ′ ตัวอย่างเช่น

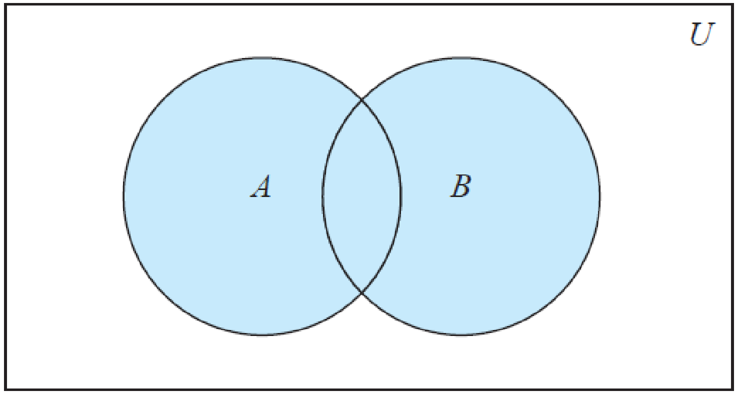
U = {1,2,3,4} ➔ A = { 1,2} สำหรับ A′ = {3,4}



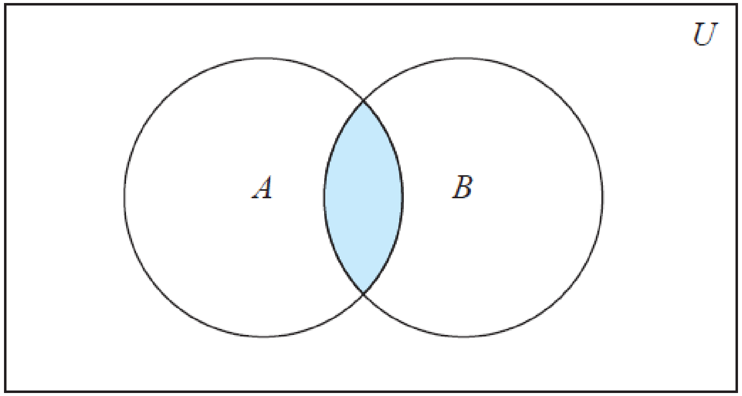
$\overline{A}$ is shaded.

Euler diagram

- แผนภาพออยเลอร์ (Euler diagram) เป็นแผนภาพที่ใช้ในการอธิบายความสัมพันธ์ของเซตต่างๆ โดยให้วงกลมแต่ละวงแทนแต่ละเซต และแสดงความสัมพันธ์ของแต่ละเซตด้วย การครอบซึ่งแสดงความเป็นสับเซต การทับซ้อนกันหรือการไม่ทับซ้อนกัน ซึ่งแสดงว่าทั้งสองเซตไม่มีความสัมพันธ์กัน



$A \cup B$ is shaded.



$A \cap B$ is shaded.

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- 1. จงพิสูจน์ ถ้า $3x - 15 = 0$ แล้ว $x = 5$
  - แก้สมการ $x = 15 / 3 = 5$ เป็นจริง
  - สรุปข้อความนี้ เป็นจริง

- 2. จงพิสูจน์ $23 \in A$ โดย
  $A = \{ x \mid x$ เป็นจำนวนเต็ม และ $x = 3k+5$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม $\}$
  - กรณีนี้คือ $x = 23$ โดยเงื่อนไขคือ x และ k เป็นจำนวนเต็ม
  - แก้สมการ $23 = 3k + 5$ ได้ผลลัพธ์คือ $k = 6$ ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม
  - สรุป $23 \in A$

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- 3. จงพิสูจน์ว่า $A \subset B$ กำหนด

  $A = \{ 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots \}$ $B = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}$

  - $A = \{ 2^i \mid i \in \{1,2,3,\ldots\} \}$ ดังนั้น $A = \{ 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\ldots \}$
  - $B = \{ 2j \mid j \in \{1,2,3,\ldots\} \}$ ดังนั้น $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\ldots \}$
  - วิเคราะห์ $A \subset B$ คือ ทุกอย่างใน A ต้องอยู่ใน B ถ้ามีเพียงกรณีเดี่ยวที่ A ไม่อยู่ใน B แสดงว่า $A \not\subset B$
  - พิจารณาจากเซตแล้วพบว่า สมาชิกของเซต A เป็นจำนวนคู่เท่านั้น ซึ่งเป็นสมาชิกของเซต B
  - สรุป $A \subset B$

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- 4. จากข้อ 3 จงพิสูจน์ว่า $B \not\subset A$

  $A = \{ 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots \}$ $B = \{ 2, 4, 6, 8, \dots \}$

  - $B = \{ 2j \mid j \in \{1,2,3,\dots\} \}$ ดังนั้น $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10, \dots\dots \}$
  - $A = \{ 2^i \mid i \in \{1,2,3,\dots\} \}$ ดังนั้น $A = \{ 2, 4, 8, 16, 32, \dots\dots \}$
  - วิเคราะห์ $B \subset A$ คือ ทุกอย่างใน B ต้องอยู่ใน A ถ้ามีเพียงกรณีเดียวที่ B ไม่อยู่ใน A แสดงว่า $B \not\subset A$
  - พิจารณาจากเซตแล้วพบว่า สมาชิกของเซต B คือ 6 ซึ่งไม่เป็นสมาชิกของเซต A
  - สรุป $B \not\subset A$

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- 5. $A = \{x \in R \mid x^2 + x - 6 = 0\}$ $B = \{2, -3\}$
- จงพิสูจน์ว่า $A = B$

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- 6. $A = \{ x \mid x = 2j$ เมื่อ $j \in I^+ \}$

  $B = \{ x \mid x = 2k+2$ เมื่อ $k \in I$ และ $k > -1 \}$
- จงพิสูจน์ว่า $A = B$ โดยที่ A จะเท่ากับ B ได้ก็ต้องเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$
  - พิสูจน์ $A \subset B$ โดยนำ A และ B จับเท่ากัน เพื่อแก้สมการดังนี้

$B = A$

$2k+2 = 2j$

$2k+2 = 2j-2 + 2$

$2k+2 = 2(j-1) + 2$

$k = j - 1$ j มีค่าต่ำสุดคือ 1 ดังนั้น k มีค่าเป็น 0 แต่ k สามารถมีค่าเป็น 0 ได้ $k > -1$

  - สรุป $A \subset B$

ตัวอย่างการพิสูจน์เซต

- (ต่อ) $A = \{ x \mid x = 2j$ เมื่อ $j \in I^+ \}$

  $B = \{ x \mid x = 2k+2$ เมื่อ $k \in I$ และ $k > -1 \}$

  - พิสูจน์ $B \subset A$ โดยนำ A และ B จับเท่ากัน เพื่อแก้สมการดังนี้

    $A = B$

    $2j = 2(k+1)$

    $j = k+1$ k มีค่าต่ำสุดคือ 0 ดังนั้น j มีค่าเป็น 1 ซึ่ง $j \in I^+$

    สรุป $B \subset A$

  - ดังนั้น $A = B$

แบบฝึกหัด 1

	I^+	I^-	I^0	Q	Q’
-555					
7.2121…					
$\frac{1}{2}$					
96					
$\sqrt{7}$					
0.51					
9					
$\sqrt{7} \text{ x } \sqrt{343}$					
$(\sqrt{6})^2$					
1.234852793…..					
$\sqrt{3} \text{ x } \sqrt{9}$					
0					

แบบฝึกหัด 2

- $A = \{x \in R \mid x^2 + x - 2 = 0\}$
- $B = \{0,1,2,\ldots\}$

จงพิสูจน์ว่า $A \neq B$

แบบฝึกหัด 3

- จงแสดงว่า 30 $\notin$ A
- โดย A = {x | x เป็นจำนวนเต็ม และ x = 3k+5 เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม}

แบบฝึกหัด 4

- จงพิสูจน์ว่า $A \subset B$ กำหนด $A = \{ x \mid x = 2k+5$ เมื่อ $k \in I^+ \}$
- และ $B = \{ x \mid x = 2j+1$ เมื่อ $j \in I^+ \}$

แบบฝึกหัด 5

- จงพิสูจน์ว่า $B \not\subset A$ กำหนด $A = \{ x \mid x = 2k+5$ เมื่อ $k \in I^+ \}$
- และ $B = \{ x \mid x = 2j+1$ เมื่อ $j \in I^+ \}$

คุณสมบัติของเซต

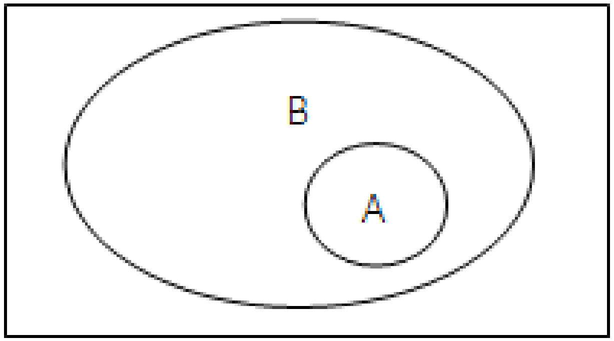
1) $A \subset A$ $\varnothing \subset A$	2) $A \in P(A)$ $\varnothing \in P(A)$ $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$	3) $U' = \varnothing$ $\varnothing' = U$ $A \cup A' = U$ $A \cap A' = \varnothing$
4) $A \cup A = A$ $A \cup \varnothing = A$	5) $A \subset A \cup B$ $B \subset A \cup B$	6) $A \cup B = B \cup A$ (กฎการสลับที่)
7) $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$ (กฎการเปลี่ยนหมู่)	8) $A \cap A = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	9) $A \cap B \subset A$ $A \cap B \subset B$
10) $A\cap B = B\cap A$ (กฎการสลับที่)	11) $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$ (กฎการเปลี่ยนหมู่)	12) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ (กฎการกระจาย)

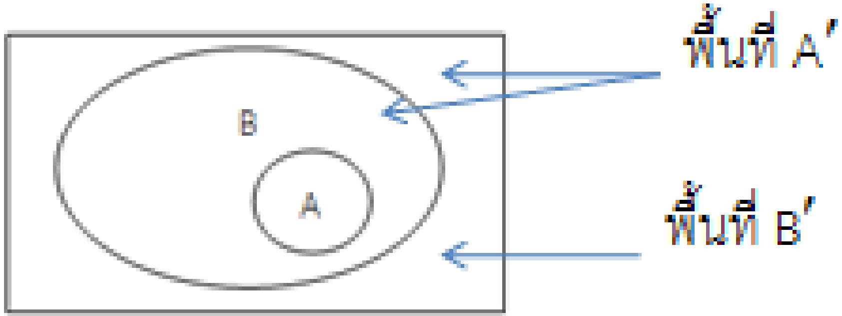
คุณสมบัติของเซต

13) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (กฎการกระจาย)	14) $(A')' = A$	15) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (กฎเดอมอร์แกน)
16) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (กฎเดอมอร์แกน)	17) $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$	18) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
19) $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$	20) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$	21) $(A-B) \cap (B-A) = \varnothing$
22) $(A-B) \cap (A \cap B) = \varnothing$ หรือ $(B-A) \cap (A \cap B) = \varnothing$	23) $A - B = A \cap B' = B' - A'$	24) $A \cap B = A - B'$
25) $A \cup (A \cap B) = A$ (กฎการดูดกลืน)		

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพออยเลอร์

- 1. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$

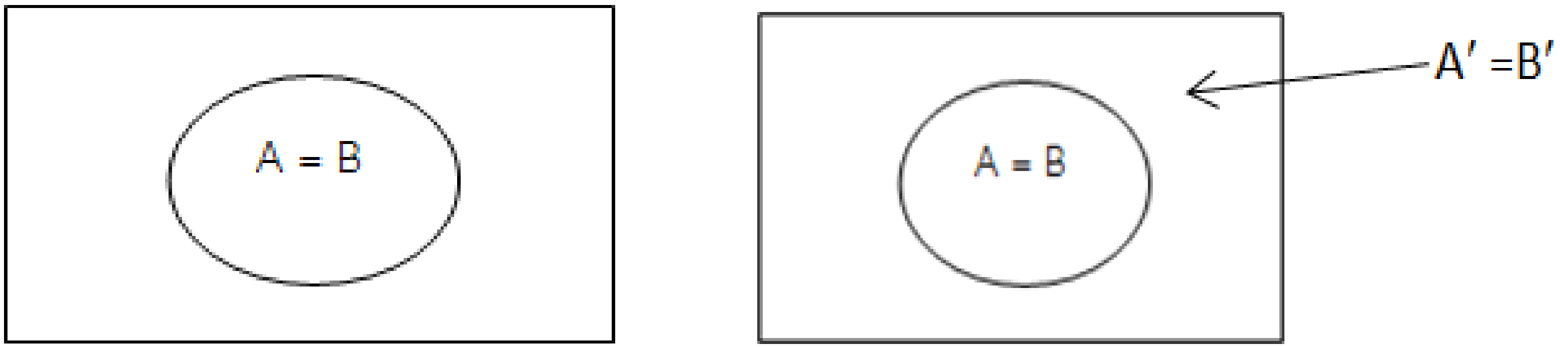




- ดังนั้น $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$ เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพออยเลอร์

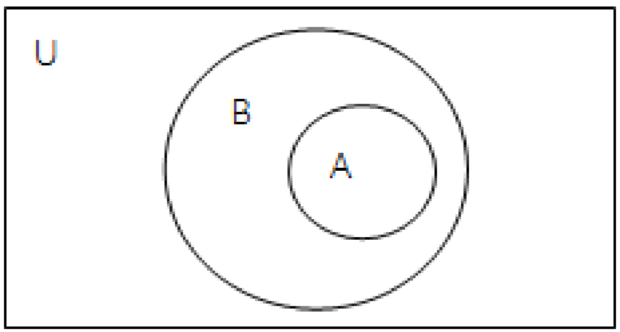
- 2. $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A' = B'$

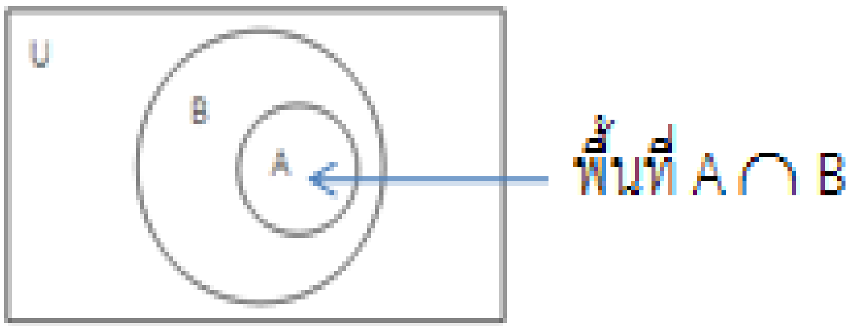


- ดังนั้น $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A' = B'$ เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพออยเลอร์

- 3. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B = A$

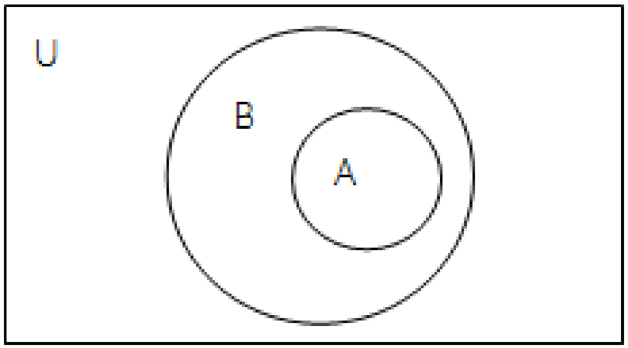


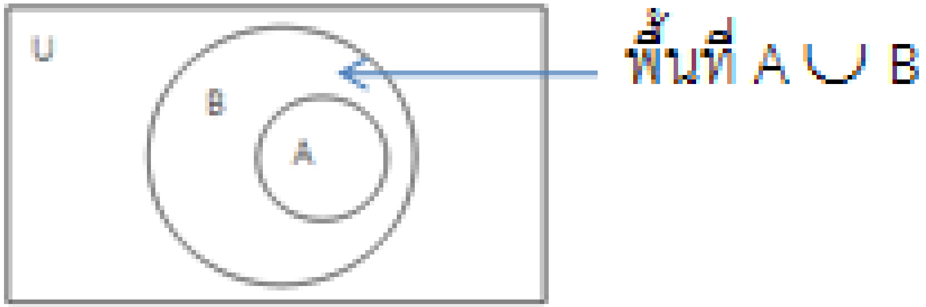


- ดังนั้น ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B = A$ เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพออยเลอร์

- 4. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cup B = B$

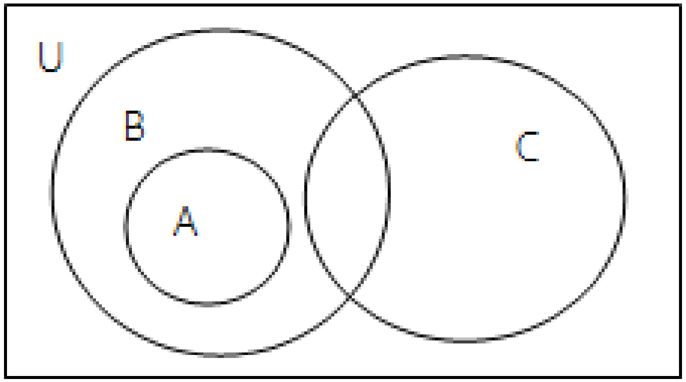


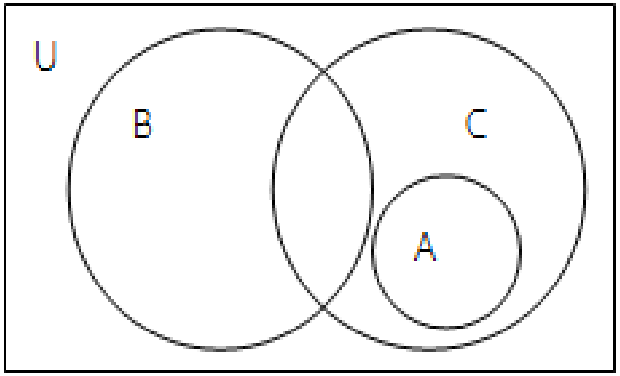


- ดังนั้น ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cup B = B$ เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพออยเลอร์

- 5. ถ้า A ⊂ B **หรือ** A ⊂ C แล้ว A ⊂ B ∪ C

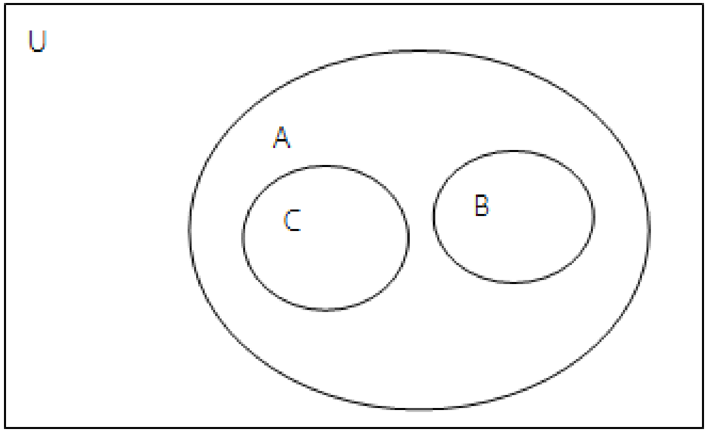




- ดังนั้น ถ้า A ⊂ B **หรือ** A ⊂ C แล้ว A ⊂ B ∪ C เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพออยเลอร์

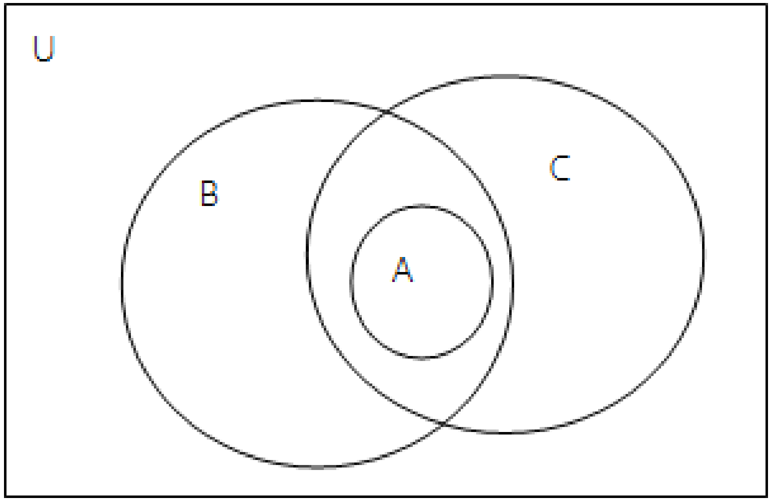
- 6. ถ้า B ⊂ A **และ** C ⊂ A แล้ว B ∪ C ⊂ A



- ดังนั้น ถ้า B ⊂ A **และ** C ⊂ A แล้ว B ∪ C ⊂ A เป็นจริง

การอธิบายเซตด้วยแผนภาพออยเลอร์

- 7. ถ้า $A \subset B$ และ $A \subset C$ แล้ว $A \subset B \cap C$

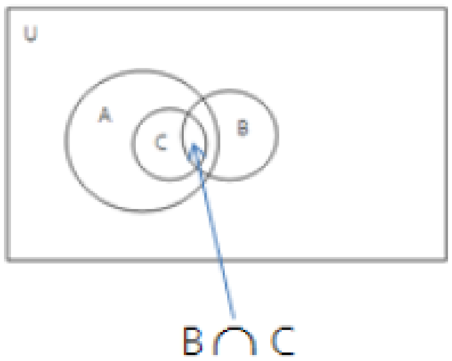


- ดังนั้น ถ้า $A \subset B$ **และ** $A \subset C$ แล้ว $A \subset B \cap C$ เป็นจริง

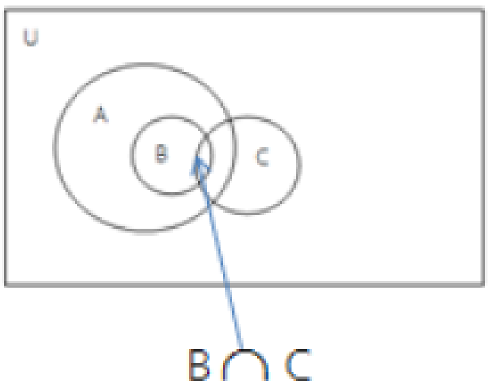
การอธิบายเซตด้วยแผนภาพออยเลอร์

- ถ้า $B \subset A$ **หรือ** $C \subset A$ แล้ว $B \cap C \subset A$

ถ้ากรณีทั้งหมดของ C อยู่ใน A โดย B ∩ C ก็จะเป็นพื้นที่อยู่ใน A สามารถเขียนแผนภาพออยเลอร์ ได้ดังนี้



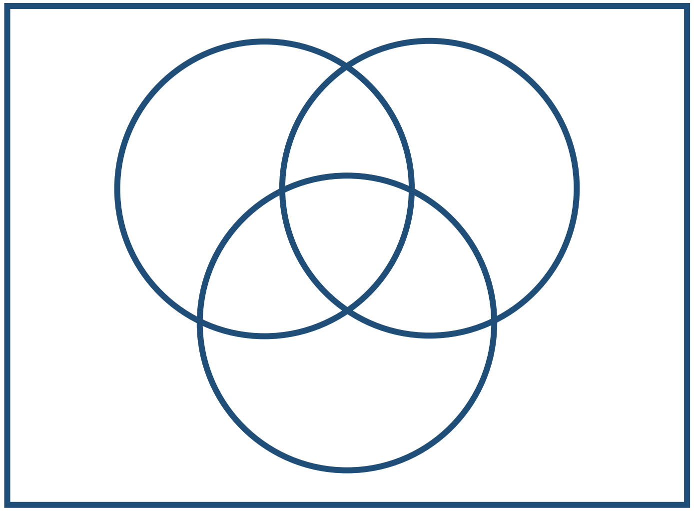
ถ้ากรณีทั้งหมดของ B อยู่ใน A โดย B ∩ C ก็จะเป็นพื้นที่อยู่ใน A สามารถเขียนแผนภาพออยเลอร์ ได้ดังนี้

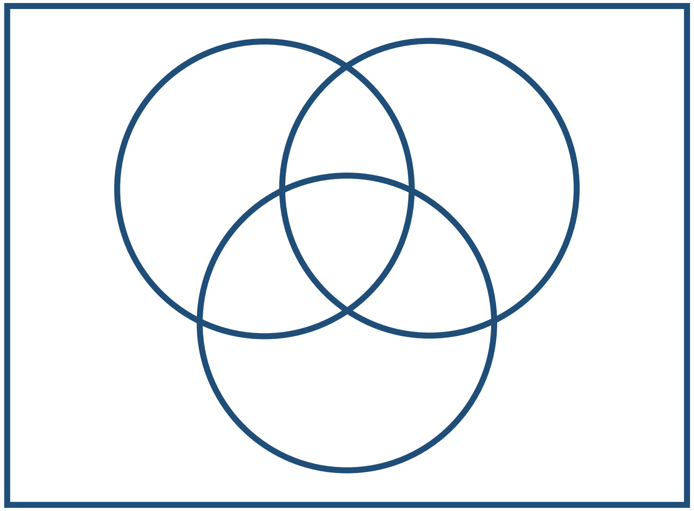


- ดังนั้น ถ้า $B \subset A$ **หรือ** $C \subset A$ แล้ว $B \cap C \subset A$ เป็นจริง

แผนภาพออยเลอร์

- $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$





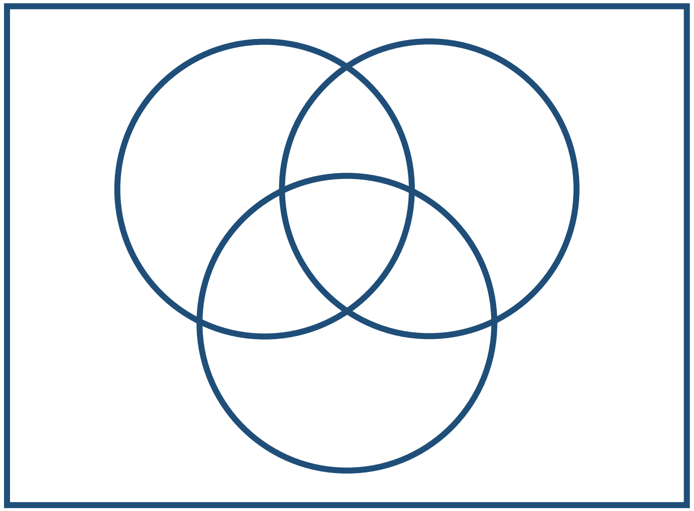
แบบฝึกหัด 6

- ให้ A, B, C เป็นเซต จงหา $n(A' \cap B \cap C)$ มีค่าเท่าไร

$n(B) = 42$ **$n(C) = 28$** **$n(A \cap C) = 8$**

$n(A \cap B \cap C) = 3$ **$n(A \cap B \cap C') = 2$** **$n(A \cap B' \cap C') = 20$**

$n(A \cup B \cup C) = 80$



แบบฝึกหัด 7

- ข้อกำหนดว่า
  - รับประทานเนื้อ 10 คน รับประทานหมู 14 คน รับประทานไก่ 16 คน
  - รับประทานทั้งเนื้อและหมู 7 คน รับประทานทั้งเนื้อและไก่ 5 คน
  - รับประทานทั้งหมูและไก่ 5 คน
  - รับประทานทั้ง 3 อย่าง 3 คน
  - ถ้าทุกคนต้องรับประทานอาหารอย่างน้อย 1 ชนิดจงหาว่าหอพักนี้มีผู้อาศัยอยู่กี่คน