ความสัมพันธ์

บทที่ 3

Discrete Mathematics for Computer Science

อ.เอิญ สุริยะฉาย (ENS)
ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ความสัมพันธ์

- ในสาขาวิชาทางด้านคอมพิวเตอร์ ข้อมูลต่างๆ นั้น มีความสัมพันธ์กัน ซึ่งผู้เรียนต้องมีความรู้เรื่องพื้นฐานของสัมพันธ์ จึงสามารถวิเคราะห์และนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาต่างๆ ของคอมพิวเตอร์ได้
  - เช่น กรณีของการออกแบบฐานข้อมูล ต้องรู้จักความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่ง หรือแบบหนึ่งต่อหลายตัว เพื่อจะใช้ในการสร้างตารางฐานข้อมูล เป็นต้น
- ดังนั้นนักศึกษาจึงมีความจำเป็นต้อง เรียนเรื่องความสัมพันธ์ เพื่อเป็นพื้นฐานของการศึกษาในสาขาด้านคอมพิวเตอร์ต่อไป

ความหมายของความสัมพันธ์

- **คู่อันดับ** (Ordered Pairs) คือ สัญลักษณ์ที่แสดงการจับคู่กันระหว่างสิ่ง 2 สิ่ง
    - เช่น ระยะทางกับเวลา ถ้าเราจะแสดงการจับคู่ระยะทาง (กิโลเมตร) กับเวลา (ชั่วโมง) การเขียนระยะทางกับเวลาลงในวงเล็บ และคั่นด้วยเครื่องหมายจุลภาค เช่น (200, 4) จะหมายถึง ระยะทาง 200 กิโลเมตร ต้องใช้เวลา 4 ชั่วโมง เป็นต้น
- คู่อันดับประกอบด้วยสมาชิก 2 ตัว คือ สมาชิกตัวหน้า และ สมาชิกตัวหลัง เขียนแทนในรูป (a, b)
    - โดยที่ a เป็นสมาชิกตัวหน้า และ b เป็นสมาชิกตัวหลัง **ลำดับของคู่อันดับมีความสำคัญ** การสลับที่กันระหว่างสมาชิกทั้ง 2 ของคู่อันดับ ทำให้ความหมายเปลี่ยนไป

ตัวอย่างของคู่อันดับ

- **(a, b)** อ่านว่า คู่อันดับ เอบี
  - a เป็นสมาชิกตัวหน้าหรือสมาชิกตัวที่หนึ่งของคู่อันดับ (a, b)
  - b เป็นสมาชิกตัวหลังหรือสมาชิกตัวที่สองของคู่อันดับ (a, b)
- การเขียนคู่อันดับจะสลับที่สมาชิกไม่ได้ จะทำให้ความหมายเปลี่ยนไป เช่น (a, b) เป็น (b, a) โดยทั่วไป (a, b) ไม่เท่ากับ (b, a) ยกเว้น a = b

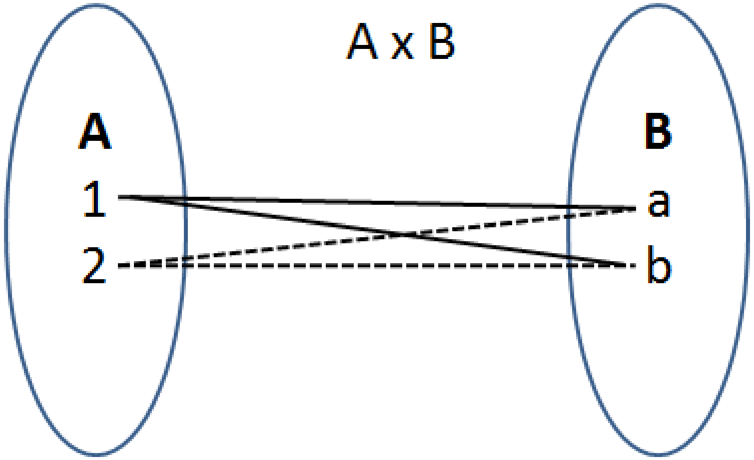
สมบัติของคู่อันดับ

- (a, b) = (b, a) ก็ต่อเมื่อ a = b
- ถ้า (a, b) = (c, d) แล้วจะได้ว่า a = c และ b = d
- ถ้า $(a, b) \neq (c, d)$ แล้วจะได้ว่า $a \neq c$ หรือ $b \neq d$

ผลคูณคาร์ทีเชียน

- **ผลคูณคาร์ทีเชียน** ของเซต A และ B แทนสัญลักษณ์ด้วย **A x B**
- **A x B** = เซตของคู่อันดับทั้งหมดที่เป็นไปได้ เมื่อสมาชิกตัวหน้าอยู่ในเซต A และ สมาชิกตัวหลังอยู่ในเซต B
  - ตัวอย่าง เช่น ถ้า A = {1, 2} และ B = {a, b}

    A x B = { (1,a), (1,b), (2,a), (2,b) }
  - สามารถเขียนแผนภาพการคูณคาร์ทีเชียนดังรูปข้างล่าง



สมบัติของผลคูณคาร์ทีเชียน

1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$	2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
3) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$	4) $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$
5) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$	

ความสัมพันธ์

- **ความสัมพันธ์** เป็นเซตซึ่งสมาชิกในเซตคู่อันดับหรือความสัมพันธ์เป็นสับเซตของผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างเซตสองเซต
- การเขียนแสดงความสัมพันธ์อาจเขียนในรูป แผนภาพ เซตสมการ ตาราง และกราฟก็ได้ โดยปกติจะเห็นความสัมพันธ์โดยทั่วไป
  - เช่น เป็นพ่อของ..., มากกว่า..., เป็นสมาชิกของ..., เป็นสับเซตของ...
- ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่าง **2 สิ่ง** เรียกว่า **ความสัมพันธ์ทวิภาค**

ความสัมพันธ์

- ถ้าให้ A = {3, 4} และ B = {3, 4, 5}
- จะได้ว่า A x B = {(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5)}

- และถ้าให้ r เป็นเซตของคู่อันดับที่เกี่ยวข้องกันแบบน้อยกว่าจะได้
- r = {(3, 4), (3, 5), (4, 5)}
  - เราเรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์แบบน้อยกว่าจาก A ไป B

ความสัมพันธ์

- ลักษณะของความสัมพันธ์ r นั้น ต้องเป็นเซตของคู่อันดับที่ได้มาจากสมาชิกใน A x B และมีความสัมพันธ์เงื่อนไขที่กำหนด ซึ่งสามารถนิยามความสัมพันธ์ได้ดังนี้
- บทนิยามให้ A และ B เป็นเซต r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ A x B

ตัวอย่าง 1

- กำหนด A = {2, 3}, B = {4, 6, 9} และให้
  - r1 แทนความสัมพันธ์ เป็น สองเท่า จาก A ไป B
  - r2 แทนความสัมพันธ์ เป็น หารลงตัว จาก A ไป B
  - r3 แทนความสัมพันธ์ เป็น รากที่สอง จาก A ไป B
- วิธีทำ A x B = {(2, 4), (2, 6), (2, 9), (3, 4), (3, 6), (3, 9)}
  - r1 = ø
    - เพราะไม่มีสมาชิกของ A ที่มีค่าเท่าสมาชิก B คูณสอง
  - r2 = {(2, 4), (2, 6), (3, 6), (3, 9)}
    - เพราะสมาชิก A สามารถนำไปหารสมาชิก B ลงตัว
  - r3 = {(2, 4), (3, 9)}
    - เพราะสมาชิก A สามารถเป็นรากที่สองของสมาชิก B ได้

ความสัมพันธ์

- r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$ หรือ $r \subset A \times B$
  - ถ้า $(a, b) \in r$ จะกล่าวว่า a มีความสัมพันธ์ r กับ b
  - ถ้า $(a, b) \notin r$ จะกล่าวว่า a ไม่มีความสัมพันธ์ r กับ b
- ถ้า $A = B$ จะกล่าวว่า r เป็นความสัมพันธ์บน A หรือ $r \subset A \times A$

ตัวอย่าง 2

- **จงหาจำนวนสับเซตทั้งหมดของ A x B**

  A = {1}

  B = {2, 3}

  A x B = { (1,2), (1,3) }

  จำนวนสับเซตทั้งหมดของ A x B คือ 2^{1x2} = 4 เซต ได้แก่

  $r_1 = \emptyset$

  $r_2 = \{ (1,2) \}$

  $r_3 = \{ (1,3) \}$

  $r_4 = \{ (1,2), (1,3) \}$

ตัวอย่าง 3

- **จงพิจารณาว่า r_1 , r_2 , r_3 เป็นความสัมพันธ์ของ A x B**

$A = \{ 1, 2, 3 \}$

$B = \{ 2, 3, 4, 5 \}$

โดยที่ $r_1 = \{ (1,2), (2,2), (1,4), (2,5) \}$

$r_2 = \{ (x, y) \in A \times B \mid x+2 = y \} = \{ (1,3), (2,4), (3,5) \}$

$r_3 = \{ (x, y) \in A \times B \mid x \geq y \} = \{ (2,2), (3,2), (3,3) \}$

ตัวอย่าง 4

- **จงพิจารณาว่า r เป็นความสัมพันธ์ของ A x A**

  $A = \{ a, b, c, d \}$

  โดยที่ $r = \{ (x, y) \in A \times A \mid x=y \}$

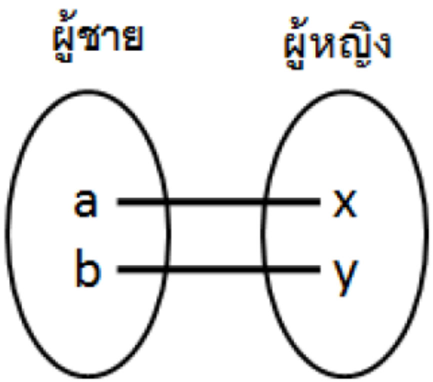
ลักษณะของความสัมพันธ์

1) หนึ่งต่อหนึ่ง (One to one)

ความสัมพันธ์นี้คือ ผู้ชายหนึ่งคนต่อผู้หญิงหนึ่งคน

เช่น a เชื่อมต่อกับ x เท่านั้น

b เชื่อมต่อกับ y เท่านั้น



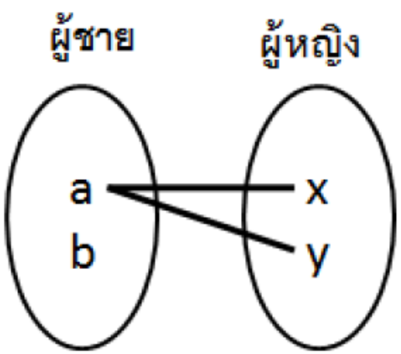
2) หนึ่งต่อหลากหลาย (One to many)

ความสัมพันธ์นี้คือ ผู้ชายหนึ่งคนต่อผู้หญิงหลายคนได้

เช่น a เชื่อมต่อกับ x และ y

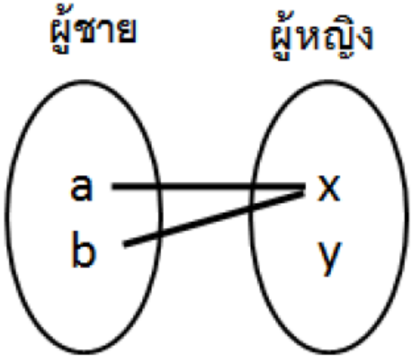
b ไม่ได้เชื่อมต่อกับใคร

ทั้ง x และ y เชื่อมต่อกับ a ตัวเดียว

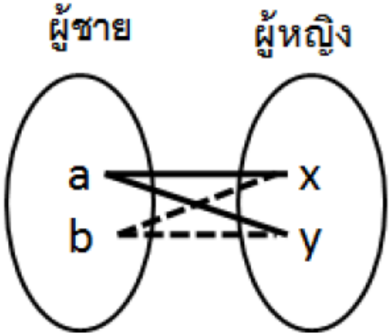


ลักษณะของความสัมพันธ์

3) หลากหลายต่อหนึ่ง (Many to one)
ความสัมพันธ์นี้คือ ผู้ชายหลายคนต่อผู้หญิงหนึ่งคน
เช่น a เชื่อมต่อกับ x
b เชื่อมต่อกับ x
ทั้ง a และ b เชื่อมต่อกับ x ตัวเดี่ยว



4) หลากหลายต่อหลากหลาย (Many to Many)
ความสัมพันธ์นี้คือ ผู้ชายหลายคนต่อผู้หญิงหลายคนได้
เช่น a เชื่อมต่อกับ x และ y
b เชื่อมต่อกับ x และ y



ความสัมพันธ์ผกผัน

ความสัมพันธ์ผกผัน หรือ อินเวอร์สของความสัมพันธ์ (Inverse of r)

- คือ ความสัมพันธ์ซึ่งเกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r
- ความผกผันของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

r^{-1} คือ ความสัมพันธ์จาก B ไป A

เขียนแทนด้วย $r^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in r \}$

r^{-1} จะมีสมาชิกเป็นคู่อันดับ (y, x)

ตัวอย่าง 1

- **ตัวอย่างที่ 1 จงหาความสัมพันธ์ผกผันของความสัมพันธ์ r**
- กำหนดให้ A = { 1, 2, 3, 4 } และ B = { a, b, c, d }
- สำหรับความพันธ์ r มีดังนี้

  r = { (1,b), (1,d), (2,a), (4,a) }

  โดย r อยู่ในความสัมพันธ์ A x B
- ดังนั้นความสัมพันธ์ผกผันของ r คือ

  r^{-1} = { (b,1), (d,1), (a,2), (a,4) }

ตัวอย่าง 2

- **ตัวอย่างที่ 2 จงหาความสัมพันธ์ผกผันของความสัมพันธ์ r**
- กำหนดให้ความพันธ์ r มีดังนี้

$$r = \{ (1,2), (3,4), (5,6) \}$$

- ดังนั้นความสัมพันธ์ผกผันของ r คือ

$$r^{-1} = \{ (2,1), (4,3), (6,5) \}$$

โดเมนและพิสัย

- **โดเมน (Domain)** ของ r คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิก ตัวหน้าของคู่ลำดับใน r เขียนแทนด้วย D_r

  $D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$ สำหรับตัวอย่างนี้ D_r คือ x

- **พิสัย (Range)** ของ r คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก ตัวหลังของคู่ลำดับใน r เขียนแทนด้วย R_r

  $R_r = \{y \mid (x, y) \in r\}$ สำหรับตัวอย่างนี้ R_r คือ y

ตัวอย่าง 3

ตัวอย่าง จงหาโดเมนและพิสัยของความสัมพันธ์ r

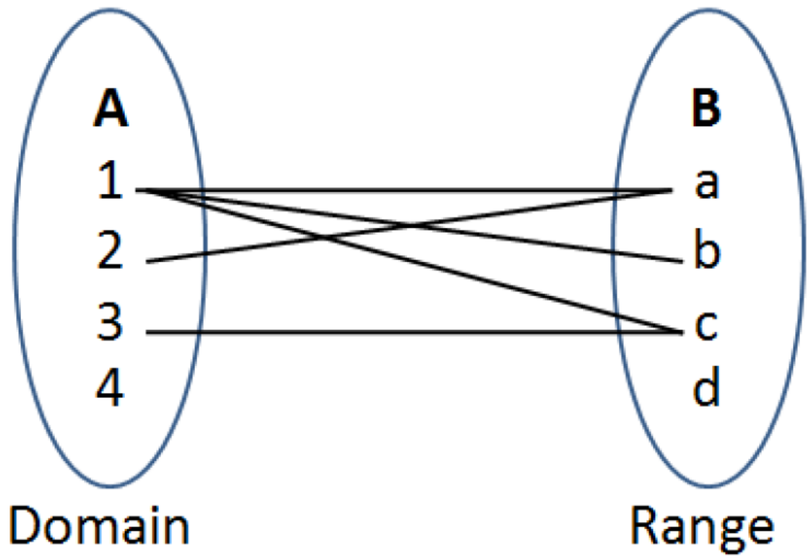
กำหนดให้ A = { 1, 2, 3, 4 } และ B = { a, b, c, d }

สำหรับความพันธ์ r มีดังนี้ r = { (1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (3,c) } โดย r อยู่ในความสัมพันธ์ A x B

โดเมนของ r คือสมาชิกตัวหน้าของความสัมพันธ์ r คือ D_r = { 1, 2, 3 }

พิสัยของ r คือสมาชิกตัวหลังของความสัมพันธ์ r คือ R_r = { a, b, c }

สามารถเขียนแผนภาพได้ดังนี้



ตัวอย่างการหาความสัมพันธ์

- 1 หา y จัด x / หา x จัด y
  - หา Domain จัด y ในเทอมของ x
  - หา Range จัด x ในเทอมของ y
- 2 พิจารณาเงื่อนไข = root / เศษส่วน
  - root ≥ 0
  - เศษส่วน ตัวส่วนต้องไม่เท่ากับ 0
- 3 เขียนเส้นจำนวน และตอบ
  - ใช้วิธีแก้ อสการ

ตัวอย่าง 4

- กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริง
- โดยที่ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{5}{2-x^2}\}$ จงหา R_r

วิธีทำ หา R_r จัด x ในเทอมของ y

$$2 - x^2 = \frac{5}{y}$$

$$x^2 = 2 - \frac{5}{y}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{2y-5}{y}}$$ โดย $y \neq 0$

พิจารณา $\frac{2y-5}{y} \geq 0$ คูณ y ทั้งสองข้าง

$$2y - 5 \geq 0$$

ดังนั้น $R_r = (-\infty,0) \cup [\frac{5}{2},\infty)$

แบบฝึกหัด 1

- กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริง
- โดยที่ $r = \{ (x, y) \mid y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \}$ จงหา D_r

แบบฝึกหัด 2

- กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริง
- โดยที่ r = { (x, y) $\in$ R x R | y =2 $- \frac{4}{(x-1)^2-4}$ } จงหา R_r

แบบฝึกหัด 3

- กำหนดให้ $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x-3} \}$ จงหา r^{-1}

กฎของความสัมพันธ์

1. $(r^{-1})^{-1} = r$

ตัวอย่าง $(r^{-1})^{-1} \subset r$ และ $r \subset (r^{-1})^{-1}$

สมมุติ $r = \{ (1,2) , (2,3) \}$ แล้ว $(x, y) \in r$

$r^{-1} = \{ (2,1), (3,2) \}$ แล้ว $(y, x) \in r^{-1}$

$(r^{-1})^{-1} = \{ (1,2) , (2,3) \}$ แล้ว $(x, y) \in (r^{-1})^{-1}$

กฎของความสัมพันธ์

2. $(r \cup s)^{-1} = r^{-1} \cup s^{-1}$

ตัวอย่าง $(r \cup s)^{-1} \subset r^{-1} \cup s^{-1}$ และ $r^{-1} \cup s^{-1} \subset (r \cup s)^{-1}$

สมมุติ r	$= \{ (1,2) , (2,3) \}$	
s	$= \{ (2,3) , (4,5) \}$	$(x, y) \in r$ หรือ $(x, y) \in s$
$(r \cup s)$	$= \{ (1,2) , (2,3) , (4,5) \}$	$(x, y) \in r \cup s$
$(r \cup s)^{-1}$	$= \{ (2,1) , (3,2) , (5,4) \}$	$(y, x) \in (r \cup s)^{-1}$
r^{-1}	$= \{ (2,1), (3,2) \}$	
s^{-1}	$= \{ (3,2) , (5,4) \}$	$(y, x) \in r^{-1}$ หรือ $(y, x) \in s^{-1}$
$r^{-1} \cup s^{-1}$	$= \{ (2,1) , (3,2) , (5,4) \}$	$(y, x) \in r^{-1} \cup s^{-1}$

กฎของความสัมพันธ์

3. ถ้า $s \subset r$ แล้ว $s^{-1} \subset r^{-1}$

ตัวอย่าง $r = \{ (1,2) , (2,3) \}$ $\quad (x, y) \in r$

$s = \{ (2,3) \}$ $\quad (x, y) \in s$

$s \subset r$

$r^{-1} = \{ (2,1) , (3,2) \}$ $\quad (y, x) \in r^{-1}$

$s^{-1} = \{ (3,2) \}$ $\quad (y, x) \in s^{-1}$

$s^{-1} \subset r^{-1}$

4. $D_{r^{-1}} = R_r$

$R_{r^{-1}} = D_r$

คุณสมบัติความสัมพันธ์

- **สมบัติสะท้อน** $r = \{ (x, x) \in A \times A \mid x \in A \}$ ดังนั้น **r** ไม่มีสมบัติสะท้อน เมื่อมี $x \in A$ อย่างน้อย 1 ตัว ที่ $(x, x) \notin r$ โดยหลักการพิจารณาต้องมีตัวที่ซ้ำกันระหว่าง x, y **ครบทุกตัว**

A = { 1, 2, 3 }

A X A = { **(1,1)**, (1,2), (1,3), (2,1), **(2,2)**, (2,3), (3,1), (3,2), **(3,3)** }

$r_1 = \{ (x, y) \in A \times A \mid x \leq y \}$

$= \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3) \}$ มีสมบัติสะท้อน

$r_2 = \{ (x, y) \in A \times A \mid x < y \}$

$= \{ (1,2), (1,3), (2,3) \}$ ไม่มีสมบัติสะท้อน ไม่มี (1,1) (2,2) (3,3)

$r_3 = \{ (1,1), (2,2) \}$ ไม่มีสมบัติสะท้อน ไม่มี (3,3)

คุณสมบัติความสัมพันธ์

- **สมบัติสมมาตร** (Symmetric) สำหรับ $x, y \in A$ ถ้า $(x, y) \in r$ แล้ว $(y, x) \in r$ ดังนั้น r ไม่มีสมบัติสมมาตร เมื่อมี $(x, y) \in r$ แต่ $(y, x) \notin r$ โดยหลักการพิจารณาไม่จำเป็นต้องครบ แต่ถ้ามีต้องมีคู่ของมัน

A = { a, b, c, d }

r_1 = { (a, a), (b, c), (c, b), (d, d) }

มีสมบัติสมมาตร

r_2 = { (a, a), (b, c), (d, d) }

ไม่มีสมบัติสมมาตร ไม่มี (c, b)

$r_3 = \{ (x, y) \in I^+ \times I^+ \mid x+y = 4 \} = \{ \{1,3\}, \{2,2\}, \{3,1\} \}$

มีสมบัติสมมาตร

คุณสมบัติความสัมพันธ์

- **สมบัติถ่ายทอด** (Transitive) สำหรับ x, y, z $\in$ A
  ถ้า (x, y) $\in$ r และ (y, z) $\in$ r แล้ว (x, z) $\in$ r ดังนั้น r ไม่มีสมบัติถ่ายทอด
  เมื่อมี (x, y) $\in$ r และ (y, z) $\in$ r **แต่ (x, z) $\notin$ r**
  - โดยหลักการพิจารณาเมื่อไรมีคู่ลำดับที่มีความสัมพันธ์แบบเชื่อมกันเกิดขึ้น เช่น (1,2) (2,3) ต้องมีตัวที่ 3 ตามมา ถ้าไม่มีไม่เป็นไร แต่ถ้ามีต้องมีตัวที่สาม ตามมาเท่านั้น นั้นคือ (1,3)

r_1 = { (1,1), (2,4) }	มีสมบัติถ่ายทอด
r_2 = { (1,2), (2,4), (1,4), (1,3) }	มีสมบัติถ่ายทอด
r_3 = { (1,2), (2,4), (1,3) }	ไม่มีสมบัติถ่ายทอด ไม่มี (1,4)
r_4 = { (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1) }	มีสมบัติถ่ายทอด
r_5 = { (2,2), (3,3), (1,2), (2,1) }	ไม่มีสมบัติถ่ายทอด ไม่มี (1,1)
r_6 = { (1,1), (3,3), (1,2), (1,3) }	มีสมบัติถ่ายทอด
r_7 = { (1,1), (2,2), (1,2), (2,3) }	ไม่มีสมบัติถ่ายทอด ไม่มี (1,3)

คุณสมบัติความสัมพันธ์

- **ความสัมพันธ์สมมูล** (Equivalence relation) จะมีสมบัตินี้เมื่อ r มีสมบัติ สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด

A = { 1, 2, 3 } แล้ว **r = { (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1) }**

จงพิสูจน์ว่า r มีความสัมพันธ์สมมูล

มีสมบัติสะท้อน r ต้องมี (1,1), (2,2), (3,3)

มีสมบัติสมมาตร ถ้า r มี (1,2) ต้องมี (2,1)

มีสมบัติถ่ายทอด ถ้า r มี (1,2) และ (2,1) ต้องมี (1,1)

ดังนั้น r มีความสัมพันธ์สมมูล

ตัวอย่าง 1

- จงพิสูจน์ $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid x = y \}$ มีสมบัติสะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด

ตัวอย่าง 2

- จงพิสูจน์ $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid x + y = 10 \}$ มีสมบัติสมมาตร

การพิสูจน์สมบัติสมมาตร

สมมุติ $(x, y) \in r$

$x + y = 10$ โดยอาศัยกฎสลับที่ $x + y = y + x$

$y + x = 10$ โดยอาศัยกฎสลับที่ $x + y = y + x$

$(y, x) \in r$

ดังนั้น r มีสมบัติสมมาตร

ตัวอย่าง 3

- จงพิสูจน์ $r = \{ (x, y) \in I \times I \mid x \leq y \}$ มีสมบัติถ่ายทอด

การพิสูจน์สมบัติถ่ายทอด

สมมุติ $(x, y) \in r$ และ $(y, z) \in r$

$x \leq y$ และ $y \leq z$

$x \leq z$

$(x, z) \in r$

ดังนั้น r มีสมบัติถ่ายทอด

- โดยอาศัยสมบัติการถ่ายทอดของจำนวนเต็ม ถ้า $x \leq y$ และ $y \leq z$ แล้ว $x \leq z$

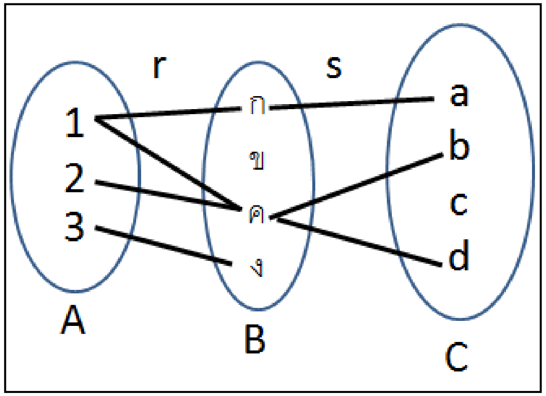
ตัวอย่าง 4

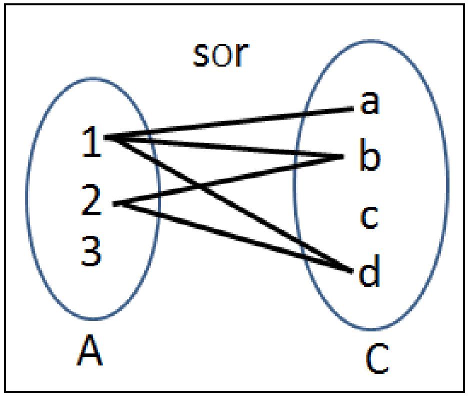
r เป็นความสัมพันธ์บนเซต I^+ และ r = { (x, y) | x + y หารด้วย 2 ลงตัว }

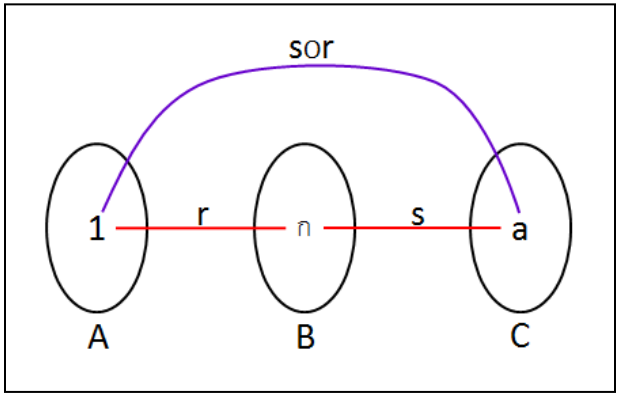
จงพิสูจน์แสดงว่า r เป็นความสัมพันธ์สมมูล

ความสัมพันธ์ประกอบ

- นิยามความสัมพันธ์ประกอบ (Composite Relation) จากรูปข้างล่าง
  กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B
  และ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C
  ความสัมพันธ์ประกอบของ r และ s คือ ความสัมพันธ์ซึ่งประกอบด้วยคู่อันดับ (a, c) โดยที่ (a, b) $\in$ r และ (b, c) $\in$ s
- เขียนแทนด้วย sor นั้นคือ
- sor = { (a, c) $\in$ A $\times$ C มี b $\in$ B ซึ่ง (a, b) $\in$ r และ (b, c) $\in$ s }







ความสัมพันธ์ประกอบ

ตัวอย่าง กำหนดให้ A = { 1, 2, 3 }, B = { 1, 2, 3, 4 }, C = { 0, 1, 2 }

แล้ว r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C

แล้ว กำหนดให้ r = { (1,1) , (1,4), (2,3), (3,1), (3,4) }

s = { (1,0), (2,0), (3,1), (3,2), (4,1) }

จงหาเซตความสัมพันธ์ประกอบของ sor

จากโจทย์ ให้พิจารณาจากพิสัยของ r เชื่อมกับโดเมนของ s ถ้าโดเมนของ s และพิสัยของ r เป็นค่าเดี่ยวกัน ให้เขียน โดเมน r เป็นโดเมนของ sor และเขียนพิสัยของ s เป็นพิสัยของ sor

r = (1, 1) ตรงกับ s = (1, 0) ดังนั้น sor คือ (1, 0)

r = (1, 4) ตรงกับ s = (4, 1) ดังนั้น sor คือ (1, 1)

r = (2, 3) ตรงกับ s = (3, 1) ดังนั้น sor คือ (2, 1)

r = (2, 3) ตรงกับ s = (3, 2) ดังนั้น sor คือ (2, 2)

r = (3, 1) ตรงกับ s = (1, 0) ดังนั้น sor คือ (3, 0)

r = (3, 4) ตรงกับ s = (4, 1) ดังนั้น sor คือ (3, 1)

ดังนั้นเซตของ sor คือ { (1,0), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1) }

แบบฝึกหัด 1

- จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้มีสมบัติ สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด และความสัมพันธ์สมมูล $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid x \geq y \}$

แบบฝึกหัด 2

- จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้มีสมบัติ สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด และความสัมพันธ์สมมูล $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid x^2+y^2 = 1 \}$

แบบฝึกหัด 3

- จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้มีสมบัติ สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด และความสัมพันธ์สมมูล **$r = \{ (x, y) \in I \times I \mid x-y$ หารด้วย 2 ลงตัว $\}$**

แบบฝึกหัด 4

- จงแสดงให้เห็นว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้มีสมบัติ สะท้อน สมมาตร ถ่ายทอด และความสัมพันธ์สมมูล **$r = \{ (x, y) \in I \times I \mid x-y$ เป็นเลขคี่ $\}$**

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

บทที่ 4

Discrete Mathematics for Computer Science

อ.เอิญ สุริยะฉาย (ENS)
ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์และสารสนเทศ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ลำดับและอนุกรม

- **ลำดับ** (Sequences) หมายถึง จำนวนหรือพจน์ที่เขียนเรียงกันภายใต้กฎเกณฑ์อย่างใดอย่างหนึ่ง สำหรับนิยามคือฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตจำนวนเต็มบวก (1, 2, 3, ...)
  - เช่น มีฟังก์ชัน $f(n)=n^2+1$ เมื่อ $n=1, 2, 3, \dots$ จะได้ $f(1)=2$, $f(2)=5$, $f(3)=10$, $f(4)=17$, ...
  - ค่าฟังก์ชันเหล่านี้ที่เขียนต่อกันเป็น 2, 5, 10, 17, ... เรียกว่า ลำดับ นิยมเขียนฟังก์ชันด้วย a_n คือ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$
  - เขียนแทนด้วย $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)$ เพื่อให้ทราบว่าเป็นลำดับ โดยโดเมนต้องเป็นจำนวนนับเท่านั้น เรียก a_1 ว่า “พจน์ที่ 1” ของลำดับ เรียก a_2 ว่าพจน์ที่ 2 ของลำดับ, ไปเรื่อยๆ จนถึงพจน์ที่ n ใดๆ เขียนแทนด้วย a_n จะเรียกว่า พจน์ทั่วไปของลำดับ เช่น ลำดับ 2, 5, 10, 17, ... มีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n = n^2+1$

ลำดับ

- การหาพจน์ทั่วไปนั้น โดยปกติมีได้มากกว่า 1 แบบ
- เช่น ลำดับ 2, 4, 8,...
  - อาจมีพจน์ทั่วไปเป็นคือ $a_n = 2^n$ ทำให้ a_4 มีค่าเท่ากับ 16
  - หรือมีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n =(n+1)(n2-n+6)/6$ ทำให้ a_4 มีค่าเท่ากับ 15 ซึ่งมีค่าไม่เท่ากัน แต่ 3 พจน์แรกมีค่าเท่ากัน กลายเป็นลำดับที่ต่างกัน
- หรืออีกกรณี ลำดับ 1, 2, 3, 4, ...
  - อาจมีพจน์ทั่วไปเป็น $a_n = n$ ซึ่งทำให้พจน์ที่ 5 มีค่าเท่ากับ 5
  - หรือ $a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+n$ ซึ่งทำให้พจน์ที่ 5 มีค่าเท่ากับ 29 ซึ่งมีค่าไม่เท่ากัน แต่ 4 พจน์แรกมีค่าเท่ากัน กลายเป็นลำดับที่ต่างกัน

ลำดับ

ลำดับทั่วๆ ไปแบ่งเป็น 2 ชนิดคือ

- **ลำดับจำกัด** (finite sequence)
  - คือลำดับที่มีจำนวนพจน์ที่แน่นอน เช่น 8 พจน์, 15 พจน์, หรือ n พจน์
- **ลำดับอนันต์** (infinite sequence)
  - คือลำดับที่มีจำนวนพจน์มากจนนับไม่ได้ เช่น **1,2,3,4,...**

ลำดับเลขคณิต

- **ลำดับเลขคณิต** (Arithmetic Sequence) คือ ลำดับที่มีผลต่างของพจน์หลังลบด้วยพจน์หน้าที่ติดกันมีค่าคงตัวเท่ากันเสมอนี้ จะเรียกว่าลำดับเลขคณิต และเรียกผลต่างที่มีค่าคงตัวเท่ากันเสมอว่าผลต่างร่วม
- สำหรับนิยามคือลำดับที่ผลต่างซึ่งได้จากพจน์ที่ n+1 ลบด้วยพจน์ที่ n มีค่าคงตัว ค่าคงตัวนี้เรียกว่าผลต่างร่วม เขียนแทนผลต่างร่วมด้วย d

ลำดับเลขคณิต

- พิจารณาลำดับ 1, 4, 7, 10, 13, ...
- จะเห็นว่าเมื่อนำพจน์หลังลบด้วยพจน์หน้าที่อยู่ติดกันมีผลต่างเป็นค่าคงตัวเท่ากับ 3 เสมอนั่น
- คือ 4 – 1 = 3, 7 – 4 = 3, 10 – 7 = 3, 13 – 10 = 3
- ตัวอย่าง

2, 5, 8, 11, ...	มี d เท่ากับ 3
9, 7, 5, 3,...	มี d เท่ากับ -2
5, 5, 5, ...	มี d เท่ากับ 0

ลำดับเลขคณิต

- สูตรการหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต การหาพจน์ที่ n คือ $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$
- ตัวอย่าง จงหาค่าของ a_5 และ a_{10} จากลำดับเลขคณิตนี้ 2, 5, 8, 11, ...
- จากโจทย์มี ผลต่างร่วมเท่ากับ 3
- เมื่อแทนค่าลงในสูตร $a_n = a_1 + (n-1)d$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$a_5 = 2 + (5-1) * 3 = 14$$

$$a_{10} = 2 + (10-1) * 3 = 29$$

ลำดับเรขาคณิต

- **ลำดับเรขาคณิต** (Geometric Sequence) คือจับพจน์ที่อยู่ข้างหลังหารด้วยพจน์ที่อยู่ติดกันข้างหน้าจะแล้วได้ค่าเท่ากันตลอดลำดับนั้นจะเป็นลำดับเรขาคณิต
- สำหรับนิยามคือลำดับที่มีผลหารซึ่งเกิดจากพจน์ที่ n+1 หารด้วยพจน์ที่ n แล้วมีค่าคงตัว และค่าคงตัวนี้เรียกว่า **อัตราส่วนร่วม เขียนแทนอัตราส่วนร่วมนี้ด้วย r**
- พิจารณาลำดับ 4, 8, 16, 32, 64, ... จะเห็นว่าเมื่อนำพจน์หลังหารด้วยพจน์หน้าที่อยู่ติดกันมีผลหารเป็นค่าคงตัวเท่ากับ 2 เสมอ
- นั่นคือ 8 / 4 = 2, 16 / 8 = 2, 32 / 16 = 2, 64 / 32 = 2
- ตัวอย่าง

ตัวอย่าง	3, 6, 12, 24, ...	มี r เท่ากับ 2
	2, -4, 8, -16,...	มี r เท่ากับ -2
	5, 5, 5, ...	มี r เท่ากับ 1

ลำดับเรขาคณิต

- สูตรการหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต การหาพจน์ที่ n คือ $\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}}$
- ตัวอย่างเช่น จงหาค่าของ a_5 และ a_{10} จากลำดับเรขาคณิตนี้ 3, 6, 12, 24, ...
- จากโจทย์มี r เท่ากับ 2 เมื่อแทนค่าลงในสูตร $a_n = a_1 r^{n-1}$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$a_5 = 3*2^4 = 48$$

$$a_{10} = 3*2^9 = 1536$$

ผลรวม

- **ผลรวม** (Summation) หมายถึงการบวกของเซตของจำนวน ซึ่งจะให้ผลลัพธ์เป็นผลบวกจำนวนที่กล่าวถึงเป็นจำนวนธรรมชาติ

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

- ตัวอย่างการหาผลรวมพจน์ที่ 10 $= \frac{10(10+1)}{2} = 55$

อนุกรม

- **อนุกรม** (Series) คือ ผลจากการบวกสมาชิกทุกตัวของลำดับไม่จำกัดเข้าด้วยกัน
- หากกำหนดให้ลำดับของจำนวนเป็นอนุกรมของลำดับนี้ก็คือ อนุกรมสามารถเขียนแทนได้ด้วย $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$
- สัญลักษณ์ของผลรวม $\sum$ เช่นตัวอย่างนี้เป็น
- อนุกรมของลำดับ 2^n คือ $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = 2 + 4 + 8 + \cdots}$

อนุกรมเลขคณิต

- **อนุกรมเลขคณิต** (Arithmetic Series) คือ อนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต เรียกว่า อนุกรมเลขคณิต และผลต่างรวมของลำดับเลขคณิตเป็นผลต่างรวมของอนุกรมเลขคณิตด้วย หรืออาจกล่าวว่า เป็นผลบวก n พจน์แรก

เมื่อ $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, ..., a_1 + (n - 1)d$ เป็นลำดับเลขคณิต

จะได้ $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + (n - 1)d)$ เป็นอนุกรมเลขคณิต

- ซึ่งมี a_1 เป็นพจน์แรกของอนุกรม และ d เป็นผลต่างรวมของอนุกรมเลขคณิต จากบทนิยาม จะได้ว่า ถ้า $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มี n พจน์ จะเรียกการเขียนแสดงผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ ว่า อนุกรมเลขคณิต และผลต่างรวม (d) ของลำดับเลขคณิต เป็นผลต่างรวมของอนุกรมเลขคณิต

ตัวอย่างของอนุกรมเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 1 คือ 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 99 เป็น อนุกรมเลขคณิต

เพราะว่า 1, 3, 5, ..., 99 เป็น ลำดับเลขคณิต และมี d เท่ากับ 2

ตัวอย่างที่ 2 คือ 25 + 20 + 15 + 10 + ... เป็น อนุกรมเลขคณิต

เพราะว่า 25, 20, 15, 10, ... เป็น ลำดับเลขคณิต และมี d เท่ากับ – 5

ตัวอย่างที่ 3 คือ 7 + 14 + 21 + 28 + ... เป็น อนุกรมเลขคณิต

เพราะว่า 7, 14, 21, 28, ... เป็น ลำดับเลขคณิต และมีมี d เท่ากับ 7

สูตรการหาผลบวก อนุกรมเลขคณิต

- **สูตรการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต**
  คือ $\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$
- ตัวอย่าง จงหาผลรวมพจน์ที่ 5 จากลำดับ**เลขคณิต** 2, 5, 8, 11, 14, …
- จากโจทย์เมื่อแทนค่าลงในสูตร $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$S_n = \frac{5}{2}(2 + 14) = 40$$

อนุกรมเรขาคณิต

- **อนุกรมเรขาคณิต** (Geometric Progression) อนุกรมที่ได้จากจาก ลำดับเรขาคณิตเรียกว่า อนุกรมเรขาคณิต และอัตราส่วนรวมของลำดับเรขาคณิตจะเป็นอัตราส่วนรวมของอนุกรมเรขาคณิตด้วย

กำหนด $a_1, a_1r, a_1r^2, \ldots, a_1r^{n-1}$ **เป็นลำดับเรขาคณิต**

จะได้ $a_1 + a_1r + a_1r^2 + \ldots + a_1r^{n-1}$ **เป็นอนุกรมเรขาคณิต**

- ซึ่งมี a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนรวมของอนุกรมเรขาคณิต

ตัวอย่างของอนุกรมเรขาคณิต

ตัวอย่างที่ 1 คือ 2 + 4 + 8 + 16 + ... เป็น อนุกรมเรขาคณิต

เพราะ 2, 4, 8, 16, ... เป็น ลำดับเรขาคณิต และมี r เท่ากับ 2

ตัวอย่างที่ 2 คือ 81 + 27 + 9 + 3 + ... เป็น อนุกรมเรขาคณิต

เพราะ 81, 27, 9, 3, ... เป็น ลำดับเรขาคณิต และมี r เท่ากับ 3

ตัวอย่างที่ 3 คือ 3 + 3 + 3 + 3 + ... เป็น อนุกรมเรขาคณิต

เพราะ 3, 3, 3, 3, ... เป็น ลำดับเรขาคณิต และมี r เท่ากับ 1

สูตรการหาผลบวก อนุกรมเรขาคณิต

- **สูตรการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต**

  คือ $\boxed{\boldsymbol{S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}} \quad \text{โดยที่ } \mathbf{r \neq 1}}$

- จงหาผลรวมพจน์ที่ 5 จากลำดับ**เรขาคณิต** 3, 6, 12, 24, 48 …
- จากโจทย์ มี r = 2 และเมื่อแทนค่าลงใน

  สูตร $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-\mathrm{r}}$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$S_n = \frac{3(1-2^5)}{1-2} = 93$$

ความหมายการเวียนเกิด (Recursion)

- การเรียกซ้ำหรือการเรียกตัวเองหรือการเวียนเกิด (Recursion)
- คือ วิธีการที่ฟังก์ชันสามารถ**เรียกใช้ฟังก์ชันตัวเอง** โดยแต่ละครั้งที่ฟังก์ชันถูกเรียก จะเกิดค่าตัวแปรหรือพารามิเตอร์เปลี่ยนแปลงไปอย่างอัตโนมัติ **แล้วกำหนดการทำงานขั้นสุดท้ายไว้** เมื่อทำงานถึงขั้นสุดท้ายก็จะสิ้นสุดการทำงานและส่งผลลัพธ์กลับไป

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

- **ความสัมพันธ์เวียนเกิด** (Recurrence Relations) สำหรับอันดับ a_0, a_1, ..., a_n เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของพจน์ a_n กับพจน์ a_0, a_1, ..., a_{n-1} ที่เกิดก่อน โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับพจน์ a_0, a_1, ..., a_{n-1} ที่ชัดแจ้ง หรืออาจจะกล่าวได้ คือตัวเลขถัดไปนั้นมีความสัมพันธ์กับตัวเลขก่อนหน้า โดยสามารถนำมาเขียนสมการคณิตศาสตร์ได้

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

- **ตัวอย่าง** จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของอันดับ 5, 8, 11, 14, 17,...

$$
\begin{array}{lllllll}
a_0 & = & 5 & & & & \\
a_1 & = & 8 & = & 5+3 & = & a_0+3 \\
a_2 & = & 11 & = & 8+3 & = & a_1+3 \\
a_3 & = & 14 & = & 11+3 & = & a_2+3 \\
a_4 & = & 17 & = & 14+3 & = & a_3+3
\end{array}
$$

พิจารณาพบว่า พจน์ถัดไปมีค่าต่างจากพจน์ก่อนหน้าอยู่ 3

พิจารณาต่อไปจะได้

$a_n = a_{n-1}+3 \; ; n \geq 1$ เป็น ความสัมพันธ์เวียนเกิด

โดยมี $a_0 = 5$ เป็น เงื่อนไขเริ่มต้น

ตัวอย่าง 1

- จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของอันดับ 1, 2, 4, 7, 11, 16 ...

ลักษณะของความสัมพันธ์เวียนเกิด

1. เป็นฟังก์ชันที่ต้องมีพารามิเตอร์
2. แต่ละครั้งที่เรียกใช้ฟังก์ชันนั้น พารามิเตอร์ของฟังก์ชันต้องค่าเปลี่ยนแปลง
3. ฟังก์ชันการเรียกซ้ำ **ต้องมีกรณีหยุดอย่างน้อย 1 กรณี** หรือ กรณีจำกัด (Stopping Case)

- โดยเมื่อพารามิเตอร์ของฟังก์ชันมีค่าถึงขอบเขตที่กำหนดให้หยุดนี้ ฟังก์ชันจะสามารถให้คำตอบและจะไม่ต้องเรียกตัวเองซ้ำอีก

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

```
function A()
{
  if()
  {
    function A()
  }
  return or print
}
```

เงื่อนไขในการหยุดอย่างน้อย 1 กรณี (หยุด)

เปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ และเรียกฟังก์ชันตัวเอง (เรียกตัวเอง หรือ วนซ้ำ)

ส่งหรือแสดงผลลัพธ์ย้อนกลับไป (คำตอบ)

ข้อดีและข้อเสียการเวียนเกิด

- ข้อดีของวิธีการเวียนเกิด คือ ทำให้สามารถเขียนโปรแกรมได้สั้น และสามารถเขียนฟังก์ชันบางรูปแบบได้ง่าย
- ข้อเสียของวิธีการเวียนเกิด คือ ทำให้ใช้เนื้อที่ในหน่วยความจำมาก และการรันโปรแกรมทำได้ช้า
- การเขียนโปรแกรมเข้าใจยาก อาจเกิดการเรียกซ้ำไม่รู้จบหากกำหนดเงื่อนไขเพื่อหยุดทำงานไม่รัดกุม

แบบฝึกหัด 1

- จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของอันดับ 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...

แบบฝึกหัด 2

- จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดของอันดับ 1, 3, 7, 13, 21, 31, ...

แฟกทอเรียล

- **แฟกทอเรียล** ของจำนวนเต็มไม่ติดลบ n คือ ผลคูณของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ n เขียนแทนด้วย n!
- คำตอบเกิดจากการคูณของจำนวนเต็มบวกชุดหนึ่ง ซึ่งถ้าคำตอบเกิดจากการคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n เช่น 1 x 2 x 3 x 4 x 5 จำนวนเหล่านี้เราสามารถใช้สัญลักษณ์ แฟกทอเรียล เขียนแทนได้ คือ 5!

$$
\begin{aligned}
N! &= N \times (N-1)! \\
&= N \times (N-1) \times (N-2)! \\
&= N \times (N-1) \times (N-2) \times (N-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1
\end{aligned}
$$

โดย 0! มีค่า เป็น 1

โดย 1! มีค่า เป็น 1

แฟกทอเรียล

- จากนิยามสามารถสรุปการหาคำตอบของ N! ได้เป็น 2 กรณี คือ
  - ถ้า N มีค่าเท่ากับ 0 คำตอบที่ได้คือ N! = 1
  - ถ้า N มีค่ามากกว่า 0 คำตอบที่ได้คือ N! = N x (N-1)!
- สำหรับ 5! การคำนวณหาค่าแฟกทอเรียล

$$
\begin{aligned}
5! &= 5 \times 4! \\
&= 5 \times 4 \times 3! \\
&= 5 \times 4 \times 3 \times 2! \\
&= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1! \\
&= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120
\end{aligned}
$$

1	**ft = 5 * fact(4);**	
2	ft = 5 * 4 * fact(3);	
3	ft = 5 * 4 * 3 * fact(2);	
4	ft = 5 * 4 * 3 * 2 * fact(1);	
5	ft = 5 * 4 * 3 * 2 * 1;	หยุดการทำงาน

แฟกทอเรียล

$n! = 1 \times 2 \times 3 \ldots \times (n-1) \times n = (n-1)! \times n$

$a_n = (n-1)! \times n$

$= a_{n-1} \times n$

- ดังนั้น ความสัมพันธ์เวียนเกิดของ n!
- คือ $a_n = na_{n-1}$; $n \geq 1$
- เงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 1$ และ $a_1 = 1$

ฟีโบนักชี

- **ลำดับฟีโบนัชชี** (Fibonacci Sequence) มีนิยามของความสัมพันธ์ว่า จำนวนถัดไปเท่ากับผลบวกของจำนวนสองจำนวนก่อนหน้า และสองจำนวนแรกก็คือ 0 และ 1 ตามลำดับ หากเขียนให้อยู่ในรูปของสัญลักษณ์ ลำดับ F_n ของฟีโบนัชชี
- สามารถเขียนความสัมพันธ์เวียนเกิดได้ดังนี้

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

โดยกำหนดค่าเริ่มแรกให้

$F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$

ฟีโบนักชี

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ,... จากตัวเลขอนุกรมดังกล่าว สามารถแสดงวิธีการหาค่าเทอมต่างๆ ได้ดังนี้

1) $F_0 = 0$

2) $F_1 = 1$

3) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

พจน์ที่ 3 มาจาก พจน์ที่ 1 + พจน์ที่ 2 = 0 +1 = 1 โดยเริ่มจากพจน์ที่ 3 เป็นต้นไป

พจน์ที่ 4 มาจาก พจน์ที่ 2 + พจน์ที่ 3 = 1 + 1 = 2

พจน์ที่ 5 มาจาก พจน์ที่ 3 + พจน์ที่ 4 = 1 + 2 = 3

ดังนั้น ความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $n \geq 2$

และเงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$

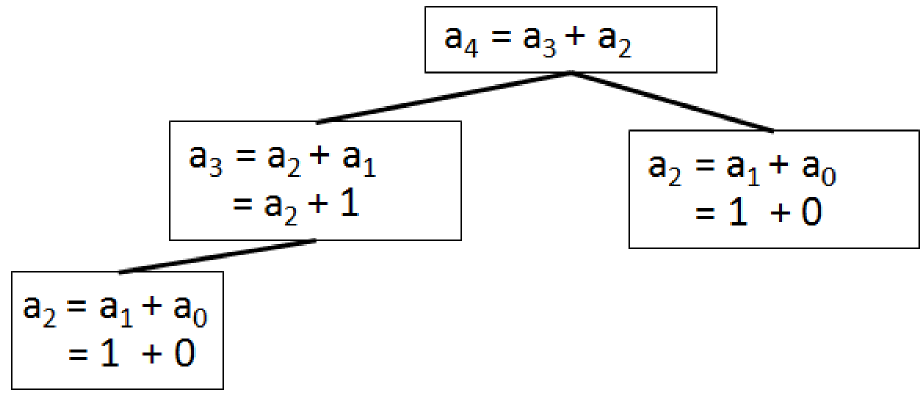
จากนิยามสามารถสรุปการหาคำตอบออกเป็น 2 ทางคือ

ถ้า n มีค่าเป็น 0 หรือ 1 คำตอบที่ได้คือ $F_n = n$

ถ้า n มีค่ามากกว่า 1 คำตอบที่ได้คือ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

ฟีโบนักชี

- จงคำนวณหาค่าอนุกรมไฟโบเนชชีที่ 4
- วิธีคิดแบบต้นไม้แตกกิ่งก้านสาขา



- วิธีคิดแบบปกติ

$$
\begin{aligned}
F(4) \quad &= F(3) + F(2) \\
&= (F(2) + F(1)) + (F(1) + F(0)) \\
&= ((F(1) + F(0)) + F(1)) + (F(1) + F(0)) \\
&= ((1+0) + 1) + (1 + 0) \\
&= 3
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 2

- มีเงินฝาก 1,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี ถ้าฝากแบบดอกเบี้ยทบต้นสิ้นปีที่ n จะมีเงินรวมทั้งหมดเท่าไร

สิ้นปีที่ 1	มีเงิน	1000.00 + (0.12) (1000.00)	= 1120.00
สิ้นปีที่ 2	มีเงิน	1120.00 + (0.12) (1120.00)	= 1254.40
สิ้นปีที่ 3	มีเงิน	1254.40 + (0.12) (1254.40)	= 1404.92

...

สิ้นปีที่ n มีเงิน เงินรวมสิ้นปีที่ n-1 + ดอกเบี้ย

ให้ a_n เป็นเงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ n

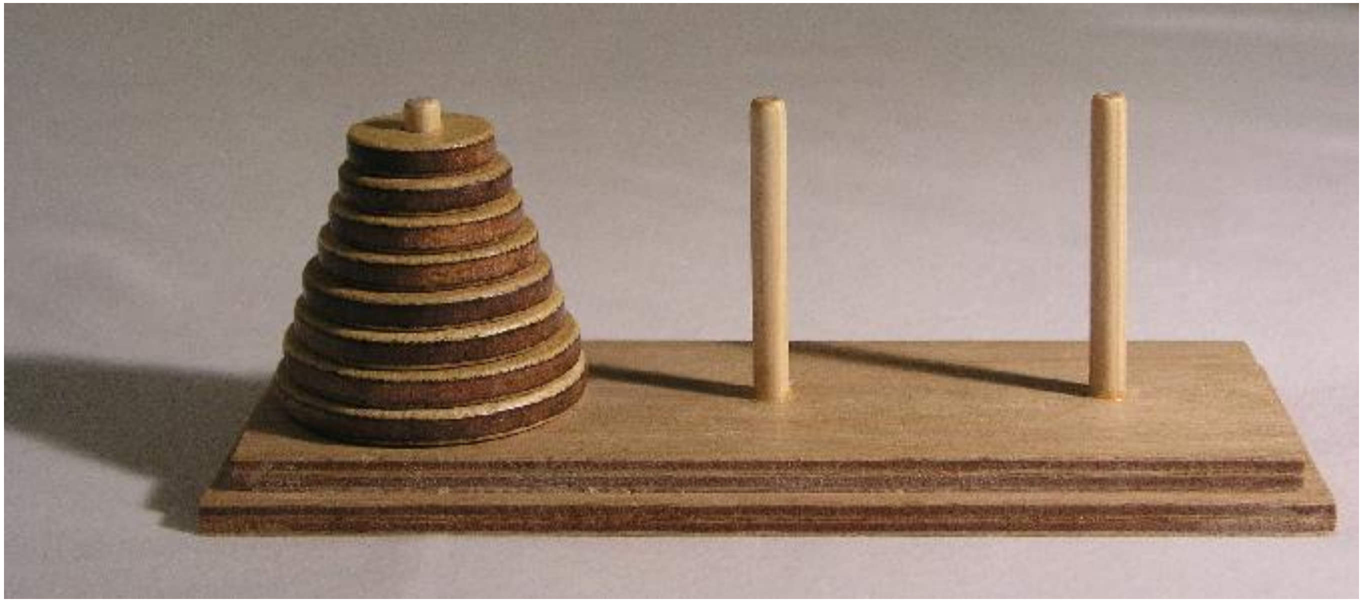
$$a_n = (1)\,(a_{n-1}) + (0.12)\,(a_{n-1})$$

$$a_n = (1.12)\,(a_{n-1})$$

- ดังนั้น ความสัมพันธ์เวียนเกิด คือ $a_n = (1.12)\,(a_{n-1})$; $n \geq 1$ และเงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 1000$

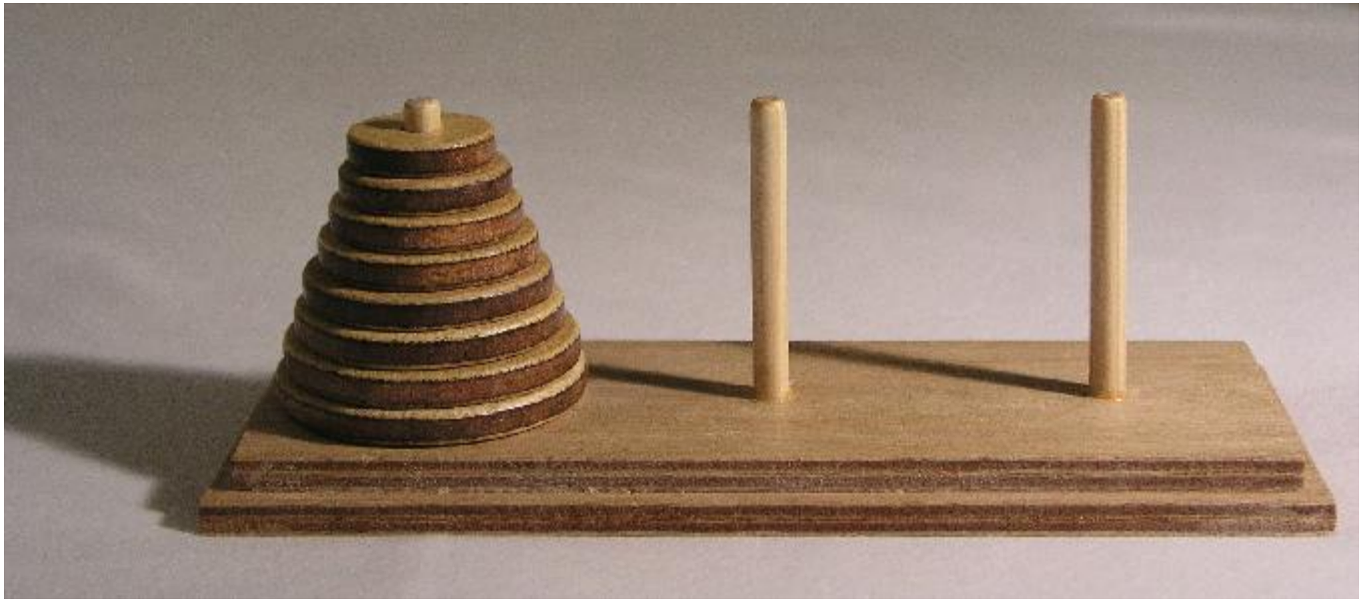
ปริศนาหอคอยฮานอย

- EDOUARD LUCAS คือ นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส เป็นผู้คิดค้นปริศนาหอคอยฮานอย (The Tower of Hanoi) โดยปริศนาหอคอยฮานอย นั้นจะมีแผ่นจานไม้ 8 แผ่น รัศมีแตกต่างกัน แต่ละแผ่นมีรูตรงกลาง นำมาใส่ไว้ในหลักเป็นกองซ้อน โดยให้แผ่นที่เล็กกว่าทับแผ่นที่ใหญ่กว่า และมีหลักเปล่าสองหลัก ดังรูป

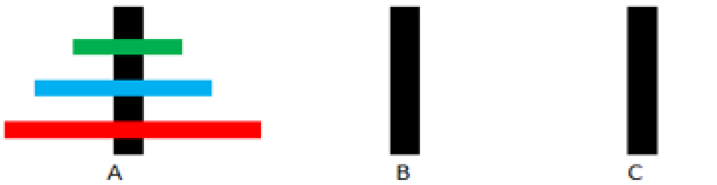


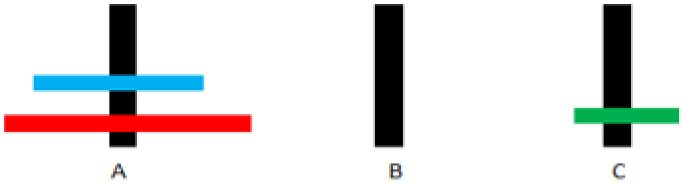
ปริศนาหอคอยฮานอย

- **ปริศนาหอคอยฮานอย** คือ ให้ย้ายแผ่นจานทั้งหมดไปกองไว้ที่หลักเปล่าหลักหนึ่ง โดยมีเงื่อนไขว่า เคลื่อนย้ายได้คราวละแผ่น และต้องนำไปไว้ที่หลักใดหลักหนึ่ง และห้ามแผ่นที่มีขนาดใหญ่กว่าวางทับแผ่นที่มีขนาดเล็กกว่า ต่อไปนี้แสดงขั้นตอนการเคลื่อนย้ายแผ่นจานจำนวน 3 แผ่นจากแผ่น A ไปแผ่น C

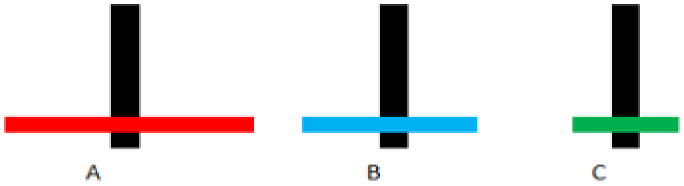


ตัวอย่างการเคลื่อนย้าย

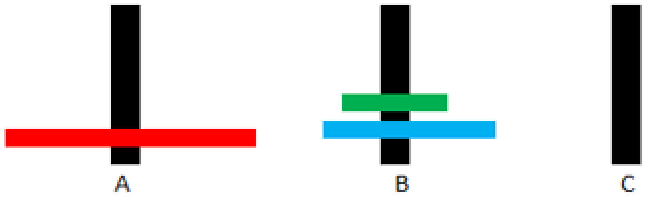




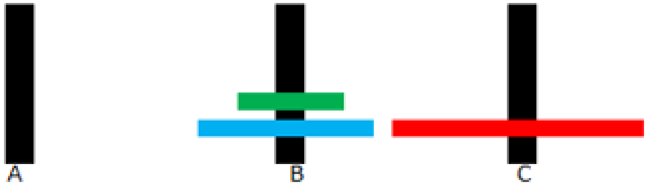
ขั้นตอนที่ 1 เคลื่อนย้ายจากแท่น A ไป C



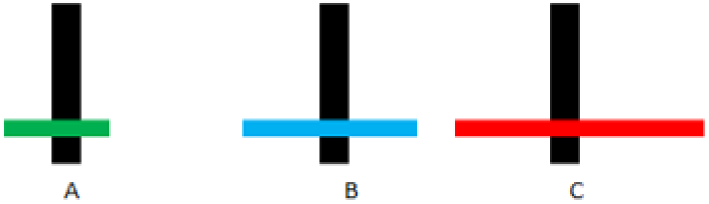
ขั้นตอนที่ 2 เคลื่อนย้ายจากแท่น A ไป **C**



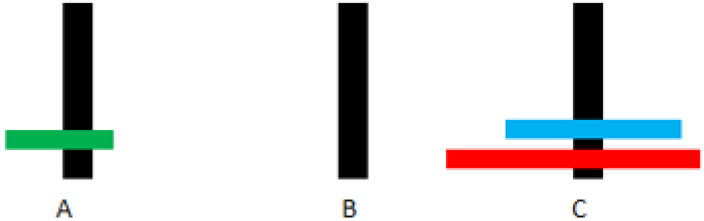
ขั้นตอนที่ 3 เคลื่อนย้ายจากแท่น C ไป B



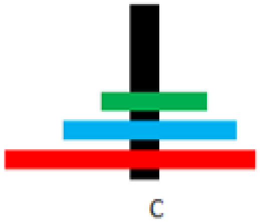
ขั้นตอนที่ 4 เคลื่อนย้ายจากแท่น A ไป C



ขั้นตอนที่ 5 เคลื่อนย้ายจากแท่น B ไป A



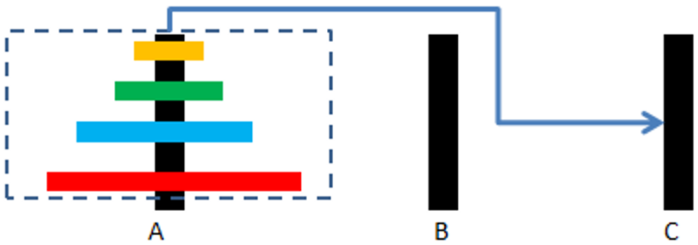
ขั้นตอนที่ 6 เคลื่อนย้ายจากแท่น B ไป C



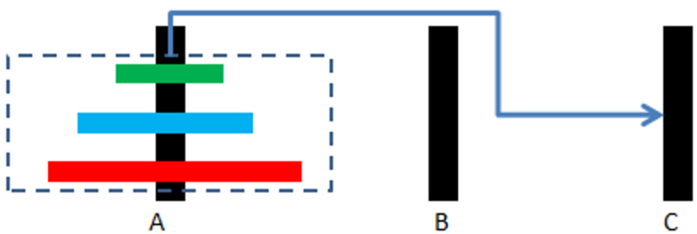
ขั้นตอนที่ 7 เคลื่อนย้ายจากแท่น A ไป C

จำนวนการเคลื่อนย้ายแผ่น

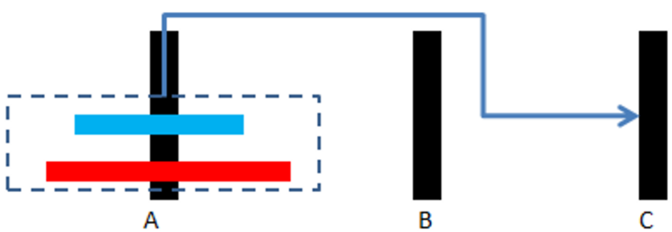
- ให้ a_n เป็นจำนวนครั้งน้อยสุดในการเคลื่อนย้ายแผ่นจาน n แผ่นจากหลักหนึ่งไปยังอีกหลักหนึ่ง



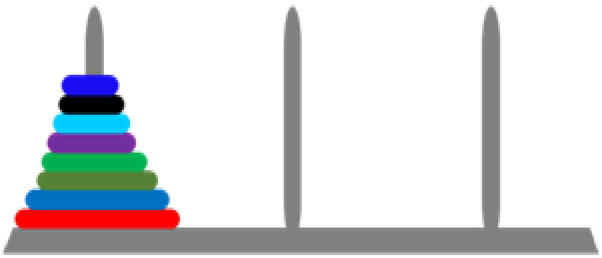
จำนวนที่เคลื่อนย้ายจาก A ไป C คือ a_n โดย n คือ 4



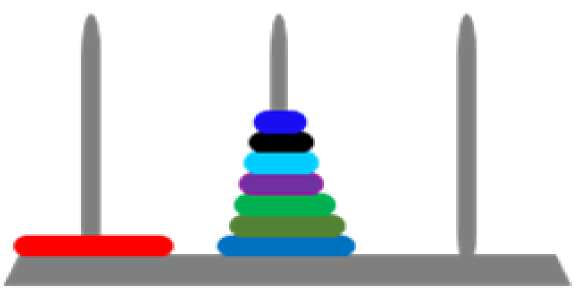
จำนวนที่เคลื่อนย้ายจาก A ไป C คือ a_{n-1} โดย n คือ 3



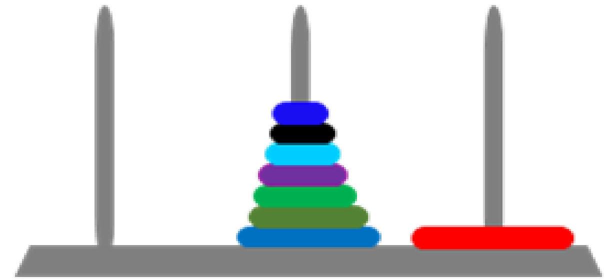
จำนวนที่เคลื่อนย้ายจาก A ไป C คือ a_{n-2} โดย n คือ 2



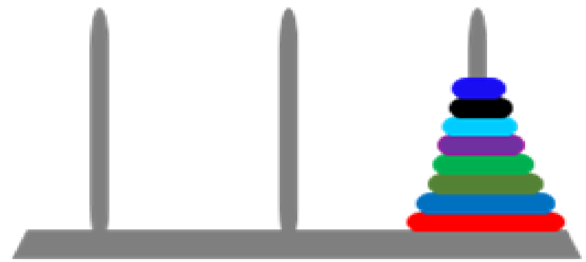
1. ต้องย้ายแผ่นที่เล็กกว่าทั้งหมด n-1 แผ่น ไปยังหลักที่ว่างก่อน จำนวนการเคลื่อนย้าย คือ a_{n-1} ครั้ง



2. ย้ายแผ่นใหญ่ที่สุดไปยังหลักเป้าหมาย จำนวนการเคลื่อนย้ายคือ 1 ครั้ง



3. ย้ายแผ่นจานทั้งหมดในข้อ 1. ไป ยังหลักเป้าหมาย จำนวนการเคลื่อนย้าย คือ a_{n-1} ครั้ง



จะได้

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1}$$
$$= 2a_{n-1} + 1$$

ตัวอย่าง 3

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = -3a_{n-1}$ และ $a_0=7$

ขั้นตอนที่ 1 จากสูตรการแปลง $a_n = ra_{n-1}$ เป็นรูปแบบนี้ $a_n = Ar^n$

$a_n = -3a_{n-1}$

$a_n = -3a_{n-1}$

$a_n = A(-3)^n$

ขั้นตอนที่ 2 หาค่า A โดยการแก้สมการ

n=0; $a_0 = (-3)^0 \times A$ - (1)

$A = 7$

แก้สมการ (1) จะได้ $A = 7$

ผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 7x(-3)^n$

ตัวอย่าง 4

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 3a_{n-1} - 5 ; n \geq 1$ และ $a_0 = 6$

ตัวอย่าง 5

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$; $n \geq 2$ และเงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$

ตัวอย่าง 6

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$; $n \geq 2$ โดยที่ $a_0 = 1$ และ $a_1 = 3$

ตัวอย่าง 7

- จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดปริศนาหอคอยฮานอย
- ถ้า n = 1 คือมีแผ่นจานเพียง 1 แผ่น จำนวนการเคลื่อนย้ายเป็น 1 ครั้ง และ n = 0 ไม่มีแผ่นจาน จำนวนการเคลื่อนย้ายเป็น 0 ครั้ง ความสัมพันธ์เวียนบังเกิดของปริศนาหอคอยฮานอย คือ $a_n = 2a_{n-1} + 1 ; n \geq 2$
- เงื่อนไขเริ่มต้น $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$
- จากปริศนาหอคอยฮานอย ทำแปลงรูปจากสูตรการแปลง $a_n = ra_{n-1} + d$ เป็นรูปแบบนี้ $a_n = Ar^n + B$

ผลเฉลยอยู่ในรูป	a_n	$= Ax2^n + B$	เมื่อ $r = 2$
จะได้	a_0	$= Ax2^0 + B$	แล้ว $0 = A+B$
	a_1	$= Ax2^1 + B$	แล้ว $1 = 2A+B$
แก้สมการ	$A = 1,$	$B = -1$	
ผลเฉลยคือ	a_n	$= 2^n - 1 ; n \geq 2$	

ตัวอย่าง 7

- ถ้าจานมีจำนวน 3 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 7
- ถ้าจานมีจำนวน 4 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 15
- ถ้าจานมีจำนวน 5 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 31
- ถ้าจานมีจำนวน 6 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 63
- ถ้าจานมีจำนวน 7 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 127
- ถ้าจานมีจำนวน 8 อัน ต้องใช้จำนวนรอบทั้งหมดน้อยสุด = 255
- **หมายเหตุ** รูปแบบของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด คือ จะนำพจน์ก่อนหน้ามาคำนวณ ซึ่งถ้าต้องการทราบพจน์ที่ n ต้องทราบพจน์ที่ n-1 ก่อน จากตัวอย่างปริศนาหอคอยฮานอย คือ $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ถ้าต้องการทราบพจน์ที่ 8 ต้องหาพจน์ที่ 7 ก่อนแล้วนำมาเข้าสูตร คือ $a_8 = 2(127) + 1 = 255$ จึงจะสามารถหาพจน์ที่ 8 แต่ถ้ารูปแบบผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดนั้นไม่มีความจำเป็นต้องรู้ค่าพจน์ก่อนหน้า จากตัวอย่างปริศนาหอคอยฮานอย คือ $a_n = 2^n - 1$ ถ้าต้องการทราบพจน์ที่ 8 สามารถแทนค่า n ด้วย 8 เข้าไปได้ ตัวอย่างเช่น $a_8 = 2^8 - 1 = 255$ จึงไม่มีความจำเป็นต้องหาพจน์ก่อนหน้าจึงสะดวกในการใช้งานมากกว่า