TD Commande adaptative par modèle de référence

Exercice 1:

1) Pour un critère $J(\theta)$, la règle MIT s'écrit en continu

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta}} \quad \gamma > 0$$

dans le cas où $J(\theta) = \frac{1}{2} e^2(\theta) \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt} = -\gamma\, e(\theta) \frac{\partial e}{\partial \theta}}$

Pour passer en discret, on fait l'approximation $\frac{d\theta}{dt} \simeq \frac{\theta(k+1) - \theta(k)}{T_s}$

pour $J(k,\theta) = \frac{1}{2} e^2(k,\theta)$, on a

T_s : période de mise à jour de θ

$$\frac{d\theta}{dt} \simeq \frac{\theta(k+1) - \theta(k)}{T_s} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma\, e(k,\theta) \frac{\partial e(k,\theta)}{\partial \theta}$$

$$\Rightarrow \theta(k+1) = \theta(k) - \underbrace{T_s \gamma}_{\gamma'} e(k,\theta) \frac{\partial e(k,\theta)}{\partial \theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(k+1) = \theta(k) - \gamma\, e(k,\theta) \frac{\partial e(k,\theta)}{\partial \theta}} \quad \gamma > 0$$

Règle MIT en discret

2) On a:

$$y(k+1) = -a\, y(k) + b\, u(k) \quad (1)$$
$$y_m(k+1) = -a_m\, y_m(k) + b_m\, y_c(k) \quad (2)$$
$$u(k) = -\theta_1\, y(k) + \theta_2\, y_c(k) \quad (3)$$

$$(3) \to (1) \Rightarrow y(k+1) = -a\,y(k) + b\,\overbrace{\left[-\theta_1\, y(k) + \theta_2\, y_c(k)\right]}^{u(k)}$$

opérateur retard temporel : $q^{-1} \times \Big(y(k+1) = -(a + b\theta_1)\, y(k) + b\theta_2\, y_c(k) \Big)$

$$y(k) = -(a + b\theta_1)\, q^{-1} y(k) + b\theta_2\, q^{-1} y_c(k)$$

On deduit alors que:

$$(\mathrm{I}) \quad \boxed{y(k) = \frac{b\theta_2 q^{-1}}{1+(a+b\theta_1)q^{-1}} y_c(k)}$$

Fonction de transfert échantillonnée en BF ($q \to z$)

(1.2)

en multipliant (2) par q^{-1} on obtient également

$$(\mathrm{II}) \quad \boxed{y_m(k) = \frac{b_m q^{-1}}{1+a_m q^{-1}} y_c(k)}$$

Fonction de transfert échantillonnée du modèle de référence

Pour réaliser une poursuite parfaite du modèle de référence, (I) et (II) doivent avoir la même fonction de transfert

$$\frac{b\theta_2 q^{-1}}{1+(a+b\theta_1)q^{-1}} = \frac{b_m q^{-1}}{1+a_m q^{-1}} \Rightarrow \begin{cases} b\theta_2 = b_m \\ a+b\theta_1 = a_m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \theta_1^0 &= \frac{a_m - a}{b} \\ \theta_2^0 &= \frac{b_m}{b} \end{aligned}}$$

valeur idéale des paramètres du correcteur si a et b connus

3) Comme a et b inconnus, on utilise une commande adaptative

On a: $y(k) = \left[\frac{b\theta_2 q^{-1}}{1+(a+b\theta_1)q^{-1}}\right] y_c(k)$ et $y_m(k) = \left[\frac{b_m q^{-1}}{1+a_m q^{-1}}\right] y_c(k)$

l'erreur de poursuite du modèle est:

$$e(k) = y(k) - y_m(k)$$

comme $\theta(k+1) = \theta(k) - \gamma e(k,\theta) \frac{\partial e(k,\theta)}{\partial \theta}$, on calcule $\frac{\partial e(k,\theta)}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial e}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial e}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y(k)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial y(k)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}$$

car $y_m(k)$ indépendant de θ

$\theta = [\theta_1 \ \ \theta_2]^T$

On obtient

$y(k)$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \left[\frac{-b \, b\theta_2 q^{-1}}{(1+(a+b\theta_1)q^{-1})^2}\right] y_c(k)$$

comme $y(k) = \left[\frac{b\theta_2 q^{-1}}{1+(a+b\theta_1)q^{-1}}\right] y_c(k)$

alors

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \left[\frac{-b q^{-1}}{(1+(a+b\theta_1)q^{-1})}\right] y(k)$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_2} = \left[\frac{b\, q^{-1}}{1+(a+b_1)\,q^{-1}}\right] y_c(k)$$

1.3

Comme a et b sont inconnus, on suppose que $\theta_1 \simeq \theta_1^0$ soit $a + b\theta_1 = a_m$

On obtient alors

$$\frac{\partial e(k)}{\partial \theta_1} = \left[\frac{-b\,q^{-1}}{1+a_m\,q^{-1}}\right] y(k)$$

$$\frac{\partial e(k)}{\partial \theta_2} = \left[\frac{b\,q^{-1}}{1+a_m q^{-1}}\right] y_c(k)$$; en remplaçant dans la

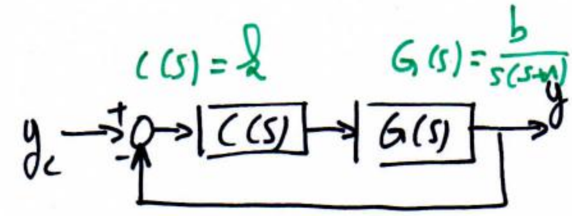
règle MIT discrète : $\theta(k) = \theta(k) - \gamma\, e(k,\theta)\, \frac{\partial e(\theta,k)}{\partial \theta}$

avec $\theta(k) = \begin{bmatrix}\theta_1(k)\\ \theta_2(k)\end{bmatrix}$

$\gamma' = b\gamma$

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_1(k+1) &= \theta_1(k) + \gamma' \left[\frac{q^{-1}}{1+a_m q^{-1}} y(k)\right] e(k) \\ \theta_2(k+1) &= \theta_2(k) - \gamma' \left[\frac{q^{-1}}{1+a_m q^{-1}} y_c(k)\right] e(k) \end{aligned}}$$

Exercice 2 :



1) Fonction de transfert en boucle fermée

$G(s) = \frac{b}{s(s+1)}$; 1er ordre avec intégrateur

$u(t) = k(y_c(t) - y(t))$ → Correcteur proportionnel

$\Rightarrow \boxed{C(s) = k}$

$$G_{BF}(s) = \frac{C(s)\cdot G(s)}{1 + C(s)\cdot G(s)} = \frac{\left(k \frac{b}{s(s+1)}\right) \to \times s(s+1)}{\left(1 + k\frac{b}{s(s+1)}\right) \to \times s(s+1)}$$

$$\boxed{G_{BF}(s) = \frac{kb}{s^2+s+kb}} \quad (1)$$

2) $G_m(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ pour avoir $G_m(s) = G_{BF}(s)$

on doit avoir $kb = 1$

soit $\boxed{k^\circ = \frac{1}{b}}$ valeur idéale de k si b est connu.

3) Comme b est inconnu, on utilise la règle MIT pour la mise à jour de k : Pour $J(\theta) = \frac{1}{2}e^2$ et $\theta = k$ on a

← Paramètre du correcteur à mettre à jour

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dk}{dt} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial k} = -\gamma e \frac{\partial y}{\partial k}$$

On a $e = y - y_m$ et y_m indépendant de k.

$\frac{\partial e}{\partial k} = \frac{\partial y}{\partial k}$ Comme $y = G_{BF}(s)\, y_c$ alors

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \frac{b(s^2+s+kb) - kb^2}{(s^2+s+kb)^2}\, y_c = \frac{b}{s^2+s+kb}\, y_c - \frac{kb^2}{s^2+s+kb}\, y_c$$

$$\frac{\partial y}{\partial k} = \frac{b}{s^2+s+kb}\left[y_c - \underbrace{\frac{kb}{s^2+s+kb}y_c}_{y} \right]$$ (1.5)

$$\Rightarrow \frac{\partial e}{\partial k} = \frac{b}{s^2+s+kb}(y_c - y)$$

mais b inconnu. On suppose alors que $k \simeq k_0$ soit $k \simeq \frac{1}{b}$ d'où $kb \simeq 1$

$$\Rightarrow \frac{\partial e}{\partial k} \simeq b \frac{1}{s^2+s+1}(y_c - y)$$

d'après la règle MIT

$$\frac{dk}{dt} = -\gamma \frac{\partial e}{\partial k} e = -\overbrace{\gamma b}^{\gamma'} \left(\frac{1}{s^2+s+1}(y_c - y) \right) \cdot e$$

$$\gamma' > 0 \quad \boxed{\frac{dk}{dt} = -\gamma' \left(\frac{1}{s^2+s+1}(y_c - y) \right) \cdot e}$$

Exercice 2.3 :

1) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \varphi(x_1)^T\theta \ , & \varphi(0)=0 \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$

On considère la dynamique de x_1 avec x_2 comme commande virtuelle

$$\dot{x}_1 = \underbrace{x_2}_{\text{commande virtuelle pour stabiliser } x_1} + \varphi^T(x_1)\,\theta \qquad (1)$$

On souhaite imposer une dynamique asymptotiquement stable du premier ordre pour x_1 :

$$\dot{x}_1 = -c_1 x_1 \qquad (2)$$

à partir de (1) et (2) on tire l'expression de $x_2 \to \alpha_1(x_1,\theta)$:

$$x_2 \to \alpha_1(x_1,\theta) = -\varphi^T(x_1)\theta - c_1 x_1 \ , \quad c_1>0$$

Commande virtuelle pour stabiliser x_1

$$\boxed{\alpha_1(x_1,\theta) = -c_1 x_1 - \varphi^T(x_1)\,\theta \ , \quad c_1>0}$$

2) On a

$$z_1 = x_1 \Rightarrow \dot{z}_1 = \dot{x}_1 = x_2 + \varphi^T(x_1)\theta$$

$z_2 = x_2 - \alpha_1$ On va d'abord écrire $\dot{z}_1$ en fonction de z_1, z_2 et θ.

On tire $x_2 = z_2 + \alpha_1$ et on remplace dans $\dot{z}_1$ avec l'expression de α_1 obtenue en 1

$$\dot{z}_1 = z_2 \underbrace{-c_1 \overset{z_1}{\overbrace{x_1}} - \cancel{\varphi^T(x_1)\theta}}_{\alpha_1(x_1,\theta)} + \cancel{\varphi^T(x_1)\theta}$$

On tire $\boxed{\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2}$

Pour $\dot{z}_2$:

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 = \underbrace{u}_{\dot{x}_2} - \underbrace{\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\cdot\dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta}\underbrace{\dot{\theta}}_{=0}\right)}_{\dot{z}_1}$$

$\to = 0$ car θ constant

On remplace $\dot{x}_1$ par $x_2 + \varphi^T\theta$

$$\boxed{\dot{z}_2 = u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\left(x_2 + \varphi^T(x_1)\theta\right)}$$

En regroupant les résultats

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -c_1 z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\left(x_2 + \varphi^T(x_1)\theta\right) \end{aligned}}$$

3) $V(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial z_1}\dot{z}_1 + \frac{\partial V}{\partial z_2}\dot{z}_2$$

en utilisant les résultats de la question 2, on remplace $\dot{z}_1$ et $\dot{z}_2$

$$\dot{V} = z_1(-c_1 z_1 + z_2) + z_2\left[u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(x_2 + \varphi^T(x_1)\theta)\right]$$

$$\dot{V} = -c_1 z_1^2 + z_2 \left[\overbrace{\underbrace{u + z_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\left(x_2 + \varphi^T(x_1)\theta\right)}}^{-c_2 z_2}\right]$$

→ On choisit u pour rendre ce terme égal à $-c_2 z_2$ afin d'avoir $\dot{V} < 0$

en choisissant u tel que

$$u + z_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\left(x_2 + \varphi^T(x_1)\theta\right) = -c_2 z_2$$

$$\boxed{u = -c_2 z_2 - z_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\left(x_2 + \varphi^T(x_1)\theta\right)}$$

on aura alors $\boxed{\dot{V}(z_1, z_2) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2}$

d'après le théorème de Lyapunov sur la stabilité asymptotique globale, $(z_1, z_2) = (0,0)$ est Globalement Asymptotiquement Stable (GAS).

Comme $z_1 = x_1$ et que $z_2 = x_2 - \alpha_1(x_1)$ avec $\alpha_1(0)=0$

$$\begin{array}{l} z_1 \to 0 \\ z_2 \to 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 \to 0 \\ x_2 \to 0 \end{array}$$

$$\boxed{(x_1, x_2) = (0,0) \text{ est aussi GAS}}$$

en remplaçant u dans la dynamique des erreurs de la question 3, on obtient la représentation d'état de l'erreur en BF :

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 \\ -1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}}$$

dynamique linéaire asymptotiquement stable

Exercice 2.4:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \varphi(x_1)^T\theta \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$$

θ : vecteur des paramètres inconnu,

$\hat{\theta}$: estimé de θ ; $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$: erreur d'estimation

1) On définit les variables d'erreur

On remplace θ par $\hat{\theta}$, car θ est inconnu.

$z_1 = x_1$

$$z_2 = x_2 - \alpha_1(x_1, \hat{\theta}) = x_2 - \underbrace{\left(-c_1 z_1 - \varphi^T(x_1)\hat{\theta}\right)}_{\alpha_1(x_1,\hat{\theta})}$$

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 - \alpha_1(x_1, \hat{\theta}) \\ \alpha_1(x_1,\hat{\theta}) &= -c_1 z_1 - \varphi^T(x_1)\hat{\theta} \end{aligned}}$$

On utilise la même expression de α_1 obtenue dans l'exercice précédent

Pour la commande u, on utilise la même expression que l'exercice précédent, en remplaçant θ par $\hat{\theta}$ et en ajoutant un terme $V_2(x_1, x_2, \hat{\theta})$ qu'on calculera par la suite :

$$\boxed{u = \alpha_2(x_1, x_2, \hat{\theta}) = -c_2 z_2 - z_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\left(x_2 + \varphi^T(x_1)\hat{\theta}\right) + V_2(x_1, x_2, \hat{\theta})}$$

2) On calcule les dynamique des erreurs z_1 et z_2

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 = x_2 + \varphi^T(x_1)\theta = \underbrace{z_2 + \alpha_1(x_1,\hat{\theta})}_{x_2} + \varphi^T(x_1)\theta$$

en remplaçant $\alpha_1(x_1, \hat{\theta})$:

$$\boxed{\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 + \varphi^T(x_1)\tilde{\theta}}$$

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 = \underbrace{u}_{\dot{x}_2} \underbrace{- \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\dot{x}_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}}_{\dot{\alpha}_1}$$

en remplaçant la commande u de la question 1, on obtient

$$\dot z_2 = -z_1 - c_2 z_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\left(\cancel{x_2} + \varphi^T \hat\theta\right) + \nu_2(x_1, x_2, \hat\theta) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\left(\cancel{x_2} + \varphi^T \theta\right) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat\theta}\dot{\hat\theta}$$

$$\Rightarrow \dot z_2 = -z_1 - c_2 z_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\varphi^T(x_1)\tilde\theta - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat\theta}\dot{\hat\theta} + \nu_2(x_1, x_2, \hat\theta)$$

sous forme matricielle:

$$\boxed{\begin{bmatrix}\dot z_1 \\ \dot z_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}-c_1 & 1 \\ -1 & -c_2\end{bmatrix}}_{A_z}\begin{bmatrix}z_1 \\ z_2\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}\varphi^T(x_1) \\ -\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\varphi^T(x_1)\end{bmatrix}}_{B_z}\tilde\theta + \underbrace{\begin{bmatrix}0 \\ -\frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat\theta}\dot{\hat\theta} + \nu_2(x_1, x_2, \hat\theta)\end{bmatrix}}}$$

3) Pour annuler le dernier terme de l'expression ci-dessus, on choisit $\nu_2(x_1, x_2, \hat\theta)$ de tel sorte que

$$-\frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat\theta}\dot{\hat\theta} + \nu_2(x_1, x_2, \hat\theta) = 0 \quad \text{soit}$$

$$\boxed{\nu_2(x_1, x_2, \hat\theta) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat\theta}\dot{\hat\theta}} \Rightarrow \dot z = A_z z + B_z \tilde\theta$$

il nous reste à déterminer la règle d'adaptation $\dot{\hat\theta}$.

4)

$$V_2(z_1, z_2, \tilde\theta) = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2}\tilde\theta^T \Gamma^{-1}\tilde\theta$$

$$\dot V_2 = \frac{\partial V_2}{\partial z_1}\dot z_1 + \frac{\partial V_2}{\partial z_2}\dot z_2 + \frac{\partial V_2}{\partial \tilde\theta}\dot{\tilde\theta} = \left[\underset{z_1}{\frac{\partial V_2}{\partial z_1}} \quad \underset{z_2}{\frac{\partial V_2}{\partial z_2}}\right]\dot z + \frac{\partial V_2}{\partial \tilde\theta}\dot{\tilde\theta}$$

comme $\tilde\theta = \theta - \hat\theta$ en supposant $\theta = c^{te}$ inconnue : $\dot\theta = 0$

d'où $\boxed{\dot{\tilde\theta} = -\dot{\hat\theta}}$

$$\dot V_2 = [z_1\ \ z_2]\left[A_z\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2\end{bmatrix} + B_z\tilde\theta\right] - \tilde\theta^T\Gamma^{-1}\dot{\hat\theta}$$

$$\dot V_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + [z_1\ \ z_2]\begin{bmatrix} \varphi^T(x_1) \\ -\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}\varphi^T(x_1)\end{bmatrix}\tilde\theta - \tilde\theta^T\Gamma^{-1}\dot{\hat\theta}$$

en factorisant le terme $\tilde\theta^T\Gamma^{-1}$:

$$\dot V_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + \tilde\theta^T\Gamma^{-1}\Big(\underbrace{\Gamma\left[\varphi, -\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}\varphi(x_1)\right]\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2\end{bmatrix} - \dot{\hat\theta}}_{=0}\Big)$$

Pour annuler le troisième terme, on choisit:

$$\boxed{\dot{\hat\theta} = \Gamma\left[\varphi, -\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}\varphi(x_1)\right]\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2\end{bmatrix} = \Gamma\left(\varphi z_1 - \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}\varphi(x_1) z_2\right)}$$

On peut écrire

$$\dot{\hat\theta} = \Gamma\,\tau_2(x,\hat\theta)$$

$$\tau_2(x,\hat\theta) = \underbrace{\varphi z_1}_{\tau_1} - \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}\varphi z_2$$

τ_1, τ_2 : Tuning functions

$$\dot V_2(z_1, z_2, \tilde\theta) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2$$

$$\left.\begin{array}{l} z = (0,0) \\ \tilde\theta = 0 \end{array}\right\} \text{ est globalement stable}$$

en utilisant le Lemme de Barbalat et le théorème sur la convergence bornée, on déduit que $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0\end{bmatrix}$ quand $t \to \infty$