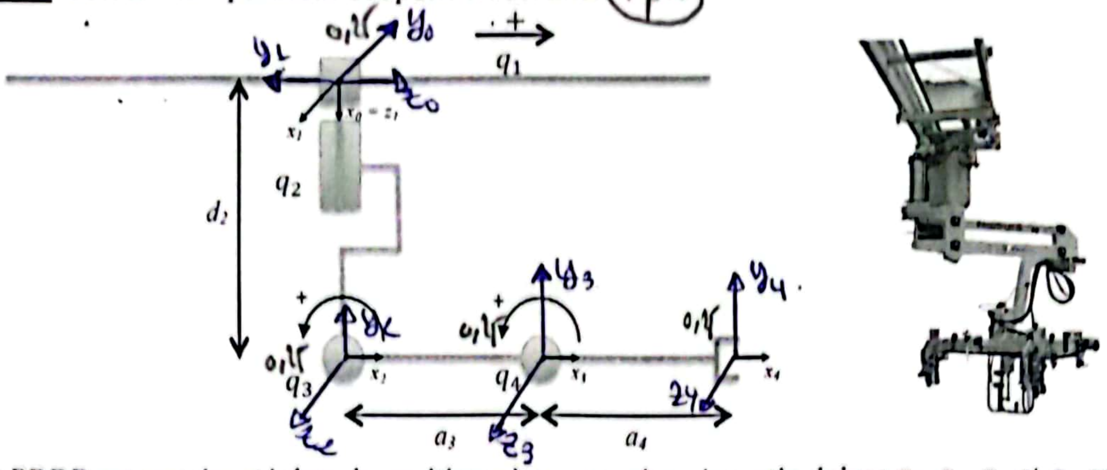
Contrôle N°1 : Modélisation des robots de manipulation **Durée : 2H00**

Exercice 1 : Soit le manipulateur suspendu suivant: (7 pts)



Ce robot PRRR est représenté dans la position où ses coordonnées articulaires q_1, q_2, q_3 et q_4 sont nulles

(1) 1. Placer les axes manquants sur la figure selon la convention de DH.

(2) 2. Remplir la table de DH de ce robot

	Axe	α	a	d	θ
0,5	1	$-\pi/2$	0	q_1	$-\pi/2$
0,5	2	$-\pi/2$	0	d_2	$q_2-\pi/2$
0,5	3	0	a_3	0	q_3
0,5	4	0	a_4	0	q_4

(2) 3. Donner l'expression des matrices de transformation $T_0^1, T_1^2, T_2^3, T_3^4$ (0,5 pour chaque matrice.)

(1) 4. Dans la suite on considère que le robot évolue dans le plan de la figure ($q_2 = 0$). Dans ce cas particulier, calculer la matrice homogène T_0^4

(1) 5. Vérifier le modèle géométrique de la question précédente pour :

0,5 - Toutes les coordonnées articulaires nulles.

0,5 - $q_1 = q_2 = 0$ et $q_3 = q_4 = -\frac{\pi}{2}$

Exercice 2 : soit le robot PR de la figure suivante (7 pts).

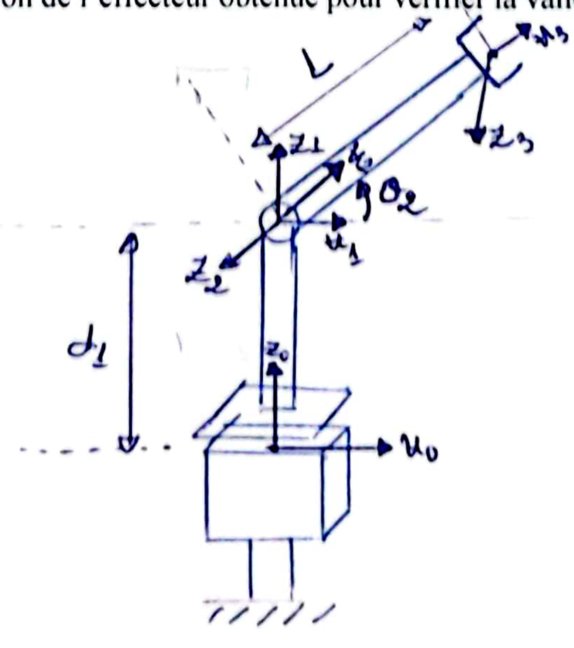
(2) - Calculer la matrice POS de ce robot

(3) - Pour une position donnée $P(x, y, z)$, calculer analytiquement son modèle géométrique inverse.

(1) - Vérifier le MGI obtenu par une méthode graphique.

(0,5) - On donne $L = 10cm$, $\theta_2 = 45°$, $d_1 = 5$ cm. Calculer la position de l'effecteur pour cette configuration articulaire.

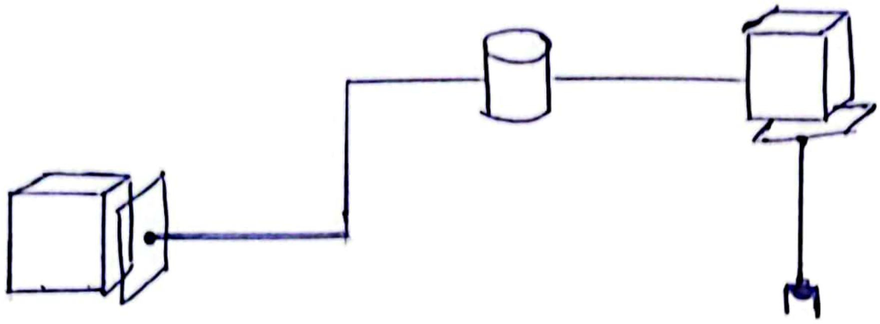
(0,5) - Utiliser la position de l'effecteur obtenue pour vérifier la validitédu MGI obtenu.



Exercice 3 :

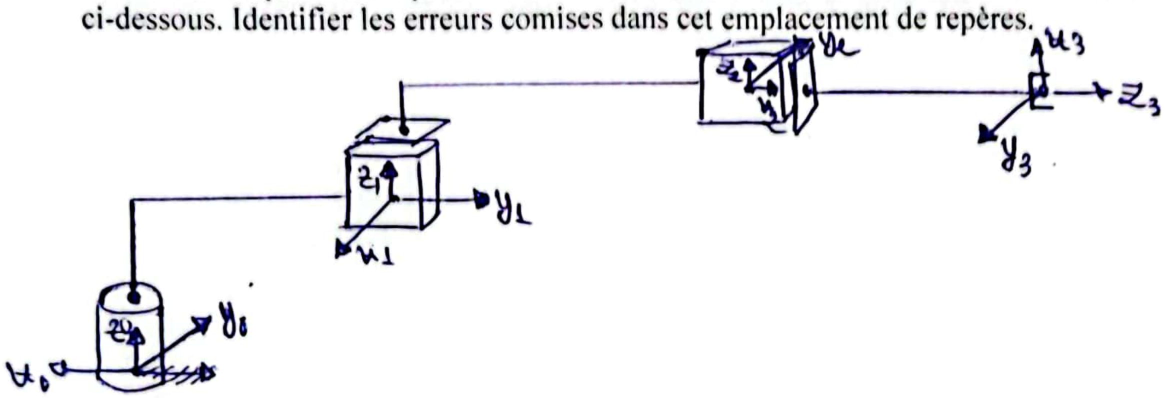
2,5

A. Soit le robot suivant. Placer les repères selon la convention DH



2,5

B. Un étudiant a placé les repères dans les articulations d'un robot comme il est mentré par la figure ci-dessous. Identifier les erreurs comises dans cet emplacement de repères.



1pt

C. Il a été demandé à un étudiant de calculer la matrice de transformation qui représente l'orientation d'un repère R1 par rapport à un repère R0. L'étudiant a obtenu le résultat suivant :

$$T = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & -1 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sans regarder les repères R1 et R0, le résultat obtenu est incorrect. D'apères vous pourquoi ?

$$DH = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Solution Examen (1) Robotique 2022-2023

Exercice 1 : Solution

1/ placement des repères selon DH (voir sujet) 1

2/ Table de DH (voir sujet) 2

3/ Matrices de transformation

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 0{,}5 \qquad , \qquad T_1^2 = \begin{bmatrix} c(q_2 - \pi/2) & 0 & -s(q_2-\pi/2) & 0 \\ s(q_2-\pi/2) & 0 & c(q_2-\pi/2) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 0{,}5$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & a_3C3 \\ S3 & C3 & 0 & a_3S3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 0{,}5 \qquad , \qquad T_3^4 = \begin{bmatrix} C4 & -S4 & 0 & a_4C4 \\ S4 & C4 & 0 & a_4S4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 0{,}5$$

4/ pour $q_2 = 0$ $\qquad T_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

dans ce cas la

matrice $pos = T_0^1 \, T_1^2 \, T_2^3 \, T_3^4$

$$pos = \begin{bmatrix} -S34 & -C34 & 0 & -a_4S34 - a_3S3 + d_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ C34 & -S34 & 0 & a_4C34 + a_3C3 + q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 1$$

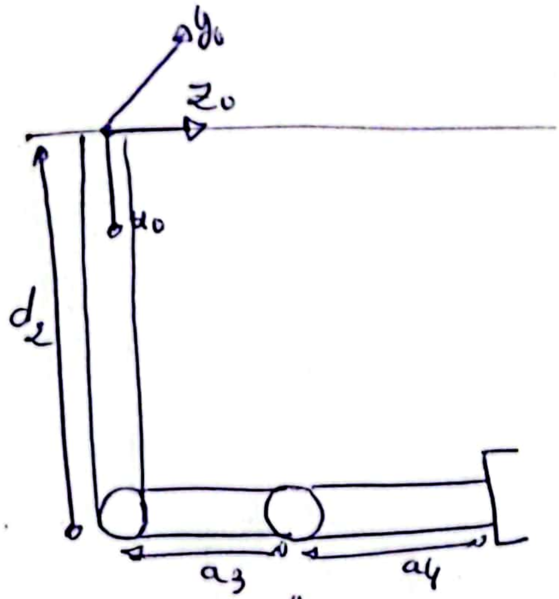
Exercice

5/ Vérification du MGD.

a/ ~~[illegible]~~ $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0$.

0,5

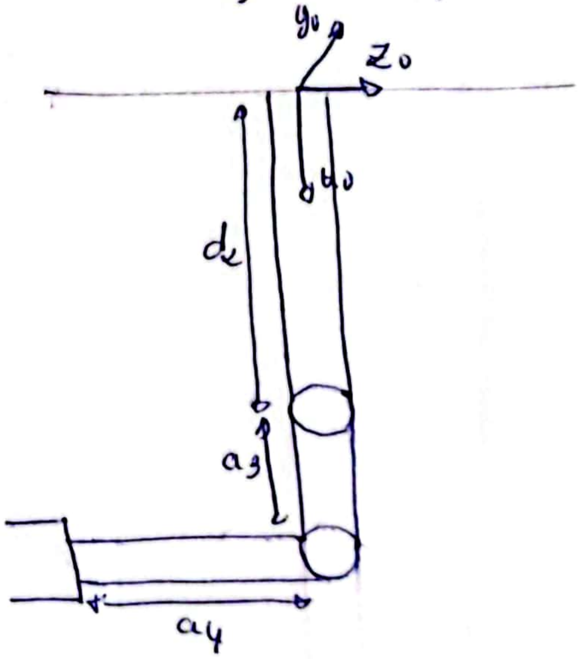
$$T_0^4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 + a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



b/ $q_1 = q_2 = 0$ et $q_3 = q_4 = -\pi/2$.

0,5

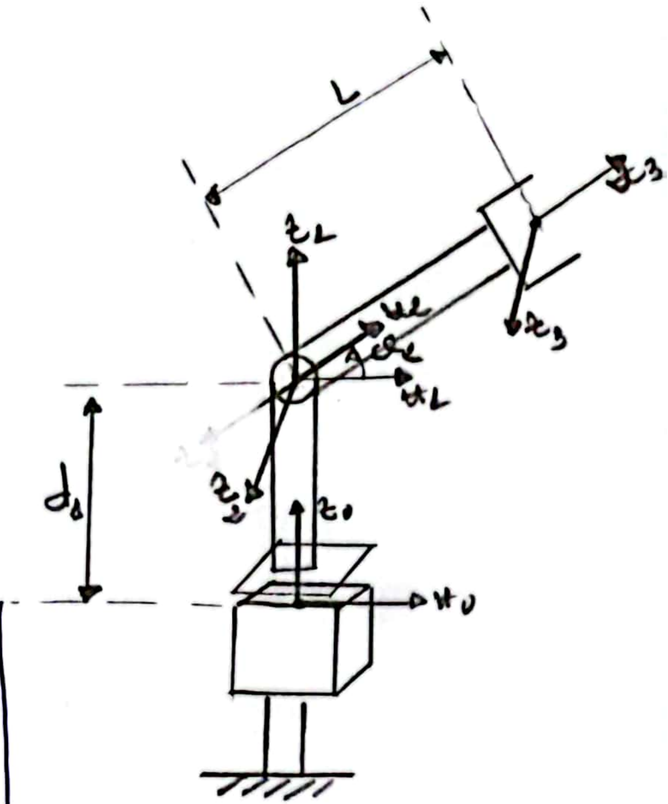
$$T_0^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & a_3 + d_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Exo2 : Solution

1/ Calcul de la matrice pos.

- Table de DH.



i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0	d_1	0	0
2	θ_2	0	0	$\pi/2$
3	θ_2	0	L	0

0,5

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & LS_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & LS_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad pos = T_0^1 \cdot T_1^2 \cdot T_2^3$$

$$\Rightarrow pos = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & LC2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S2 & C2 & 0 & LS2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1,5

2/ MGI du robot.

pour une position donné $P(x, y, z)$ on peut écrire.

$$\begin{aligned} x &= L\,C2 \\ y &= 0 \\ z &= L\,S2 + d_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = L\,C2 & \ldots (1) \\ z = L\,S2 + d_1 & \ldots (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + z^2 = (LC2)^2 + (LS2 + d_1)^2$$

$$= L^2 C_2^2 + L^2 S_2^2 + d_1^2 + 2Ld_1 S2.$$

$$x^2 + z^2 = L^2 + 2Ld_1 S2 + d_1^2$$

on a : $z = LS2 + d_1 \Rightarrow S_2 = \dfrac{(z - d_1)}{L}$.

$$\Rightarrow x^2 + z^2 = L^2 + 2(z - d_1)d_1 + d_1^2$$

$$\Rightarrow x^2 + z^2 = L^2 + 2zd_1 - d_1^2$$

$$\Rightarrow d_1^2 - 2zd_1 + (x^2 + z^2 - L^2) = 0$$

$$d_1 = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2 - 4x^2 - 4z^2 + 4L^2}}{2}$$

$$d_1 = z \pm \frac{\sqrt{4L^2 - 4x^2}}{2}$$

$$\boxed{d_1 = z \pm \sqrt{L^2 - x^2}}$$ 1,5

On a : $x = L C\alpha$, $z = L S\alpha + d_1$ $\Rightarrow$ $L C\alpha = x$, $L S\alpha = z - d_1$

donc : $\frac{S\alpha}{C\alpha} = \frac{z - d_1}{x}$ $\Rightarrow \boxed{\theta_\alpha = \mathrm{Atan2}(z - d_1, x)}$ 1,5

3/* vérification géométrique de la figure.

on peut écrire que

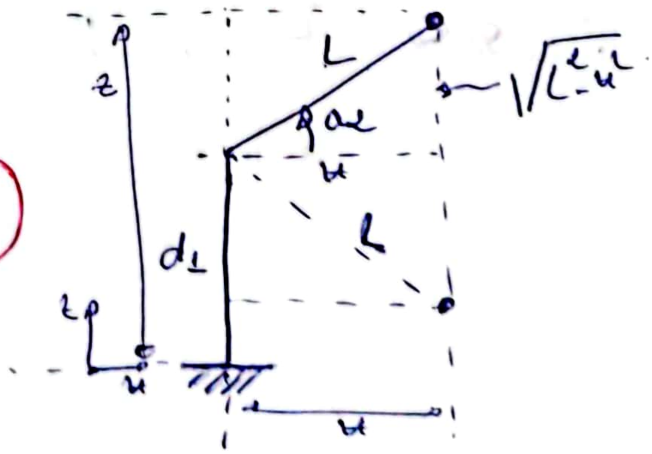
* $d_1 = z \pm \sqrt{L^2 - x^2}$

et $S\alpha = \frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{L} = \frac{z - d_1}{L}$

et $C\alpha = \frac{x}{L}$

$\Rightarrow \theta_\alpha = \mathrm{Atan2}(z - d_1, x)$

1



* 2ème méthode de calcul du MGI.

$x = L C\alpha$, $z = L S\alpha + d_1$ $\Rightarrow C\alpha = \frac{x}{L}$ et donc $S\alpha = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_\alpha = \mathrm{Atan2}\left(\pm\sqrt{1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2}, \frac{x}{L}\right)}$$

$$\boxed{\text{et } d_1 = z - L S\alpha}$$

4/ pour $L = 10$ Cm , $\theta_2 = 45^\circ$, $d_1 = 5$ Cm.

on remplace ces valeurs dans la matrice pos. on obtient.

$$\begin{cases} x = L c_2 \\ y = 0 \\ z = L s_2 + d_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7,07 \text{ Cm} \\ y = 0 \\ z = 12,07 \text{ Cm} \end{cases}$$

0,5

5/ verification du MGI obtenu.

on remplace les positions de l'effecteur obtenues dans les équations du MGI. Si le modèle est correcte on doit avoir parmi les solutions $\theta_2 = 45^\circ$ et $d_1 = 5$ Cm.

on a : $d_1 = z \pm \sqrt{L^2 - x^2}$

$\Rightarrow d_1 = 12,07 \pm \sqrt{(10)^2 - (7,07)^2}$

$\Rightarrow \boxed{d_1 = 19,14 \text{ Cm}}$ ou $\boxed{d_1 = 5,00 \text{ Cm}}$

0,5

$\theta_2 = \text{Atan2}(z - d_1 , x)$.

$= \text{Atan2}(12,07 - 19,14 , 7,07)$ $\Rightarrow \boxed{\theta_2 = 315^\circ}$

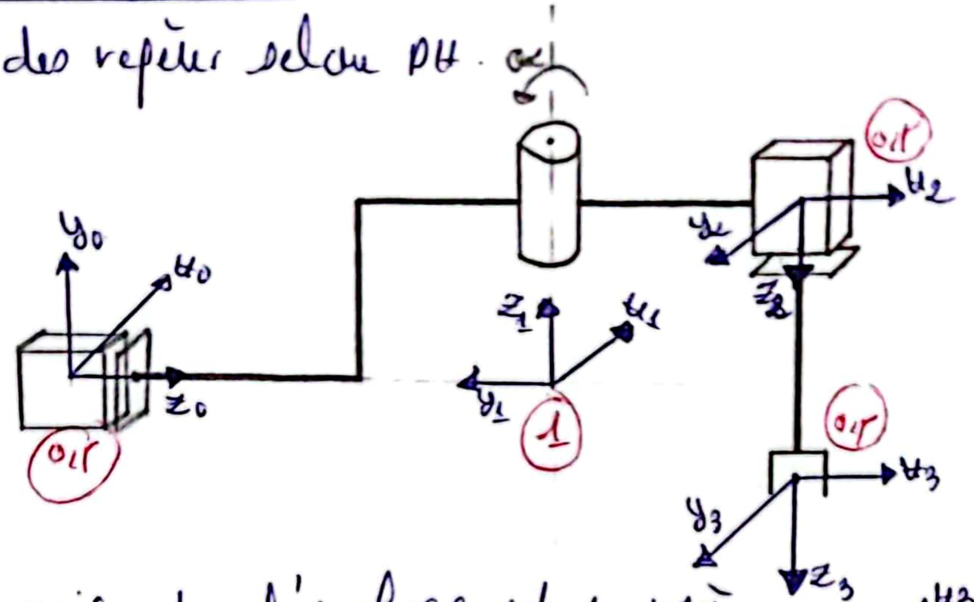
ou

$= \text{Atan2}(12,07 - 5 , 7,07)$ $\Rightarrow \boxed{\theta_2 = 45^\circ}$

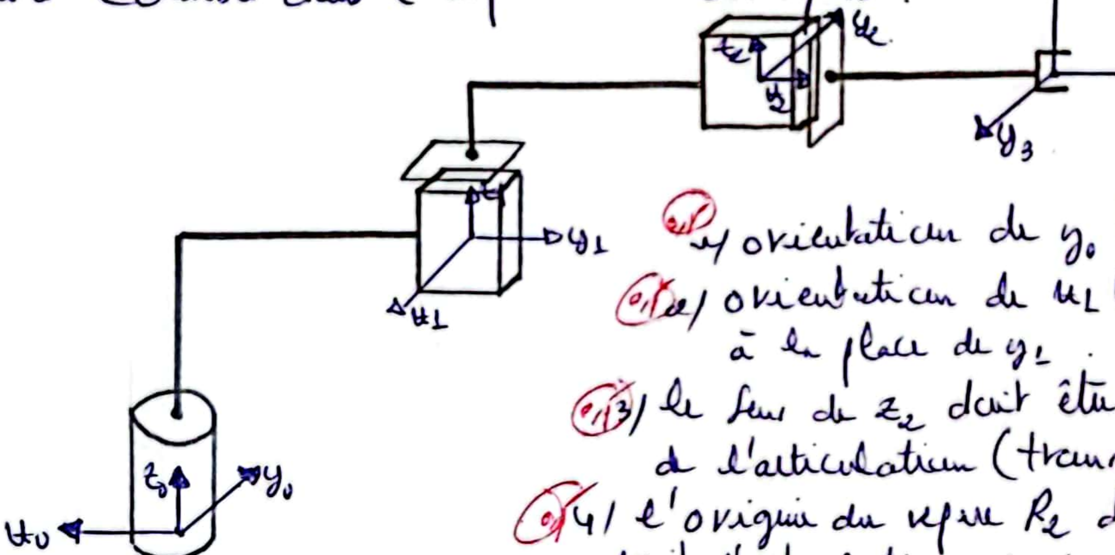
donc le MGI est verifié.

Exercice 03 : Solution :

· placement des repères selon DH.



3 : Erreurs commises dans l'emplacement de repère.



0,5 1/ orientation de y_0 (main droite).

0,5 2/ orientation de x_1 (de z_0 vers z_1) à la place de y_1.

0,5 3/ le sens de z_2 doit être au sens de l'articulation (translation).

0,5 4/ l'origine du repère R_2 doit être au point d'intersection de z_1 avec z_2.

0,5 5/ x_3 non ($\perp$) à z_2.

c/ Soit la matrice T qui représente l'orientation d'un repère R_1 par rapport ~~avec~~ à R_0. Cette matrice est incorrecte

1 car les colonnes de cette matrice représentent les projections des vecteurs unitaires de R_1 dans R_0. le module du vecteur unitaire doit être égale à 1.

par contre pour la première colonne.

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{n} & \vec{s} & \vec{a} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,8 & 0 & -1 \\ 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{(0,8)^2 + (0,5)^2 + 0^2} \neq 1$$