TD n° 2

Commande Adaptative par Modèle de Référence

Exercice 2.1

On souhaite calculer une loi de commande adaptative pour un système échantillonné du premier ordre à paramètres inconnus décrit par l'équation récurrente suivante

$$y(k+1) = -ay(k) + bu(k)$$

On souhaite également poursuivre un modèle de référence échantillonné du premier ordre

$$y_m(k+1) = -a_m y(k) + b_m y_c(k)$$

La loi de commande utilisée est

$$u(k) = -\theta_1 y(k) + \theta_2 y_c(k)$$

1. Proposer un équivalent discret de la règle du MIT en continu.
2. Pour quelles valeurs des paramètres θ_1 et θ_2 on réalise une poursuite parfaite du modèle de référence ?
3. Calculer la loi de commande adaptative avec les deux paramètres θ_1 et θ_2 en utilisant la règle proposée en 1.

Exercice 2.2

Soit le système décrit par la fonction de transfert suivante

$$G(s) = \frac{b}{s(s+1)}$$

où b est un paramètre variable dans le temps. Le système est commandé par un correcteur proportionnel

$$u(t) = k(y_c(t) - y(t))$$

On souhaite avoir un comportement en boucle fermée similaire au modèle de référence suivant

$$G_m(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

1. Calculer la fonction de transfert du système commandé en boucle fermée.
2. Déduire la valeur de k qui permet de réaliser une poursuite parfaite du modèle de référence.
3. Calculer une loi de commande adaptative avec le paramètre b en utilisant la règle du MIT.

Exercice 2.3

Le but des deux prochains exercices est de donner un aperçu sur une technique de commande adaptative non linéaire : *La commande par Backstepping*. On considérera dans cet exercices que les paramètres du système sont connus (backstepping non adaptatif). Dans le prochain exercice, les paramètres sont inconnus et on déduira une règle d'adaptation.

Soit le système non linéaire décrit par la représentation d'état suivante

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \theta\varphi^T(x_1), \quad \varphi(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \tag{2.1}$$

θ est le vecteur des paramètres du système. On considère dans cet exercice que θ est connus.

1. En considérant x_2 comme une commande virtuelle pour la dynamique de x_1, calculer sa valeur $\alpha_1(x_1, \theta)$ qui impose une dynamique linéaire asymptotiquement stable à x_1,
2. On définit les variables d'erreur
$$\begin{cases} z_1 = x_1 - 0 = x_1, \\ z_2 = x_2 - \alpha_1(x_1, \theta), \end{cases} \tag{2.2}$$
Calculer les dynamiques de z_1 et z_2,
3. En considérant la fonction candidate
$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 \tag{2.3}$$
calculer la loi de commande u qui permet d'avoir un point d'équilibre $z_e = (0, 0)$ globalement asymptotiquement stable pour les variables d'erreur. Que peut-on conclure concernant $x_e = (0, 0)$?

Exercice 2.4

On considère le même système de l'exercice précédent

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \theta\varphi^T(x_1), \quad \varphi(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \tag{2.4}$$

mais cette fois, on considère que le vecteur des paramètres θ est inconnu.On note $\hat{\theta}$ son estimé et $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ l'erreur d'estimation.

1. Pour tenir compte de l'erreur sur la valeur de θ, on remplace θ par $\hat{\theta}$ dans la commande obtenue dans la question 3 de l'exercice précédent et on rajoute un terme supplémentaire $\nu_2(x_1, x_2, \hat{\theta}$. Écrire la nouvelle expression de la commande u,

2. On définit la commande virtuelle $\alpha(x_1, \hat{\theta}$ en remplaçant θ pat $\hat{\theta}$ dans l'expression de $\alpha_1(x_1, \theta)$ obtenue dans la question 1 de l'exercice précédent. Écrire les dynamiques des erreurs $z_1 = x_1$ et $z_2 = x_2 - \alpha_1(x_1, \hat{\theta})$ en fonction de z_1, z_2 sans faire apparaître θ. On pourra par contre faire apparaître $\tilde{\theta}, \hat{\theta}$ et $\dot{\hat{\theta}}$,
3. Calculer l'expression de $\nu_2(x_1, x_2, \hat{\theta}$ pour écrire la dynamique de l'erreur sous la forme
$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = A_z \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + B_z \tilde{\theta}$$
Donner les valeurs de A_z et B_z,
4. En utilisant la valeur de $\nu_2(x_1, x_2, \hat{\theta})$ obtenue précédemment, on considère la fonction candidate suivante
$$V_2(z_1, z_2, \hat{\theta}) = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \tag{2.5}$$
Choisir l'expression de $\dot{\hat{\theta}}$ pour avoir $V_2(.)$ semi-définie négative,
5. En utilisant le Lemme de Barbalat et le théorème de l'erreur bornée, montrer que la commande est stabilisante.