

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université des Frères Mentouri Constantine 1,  
Faculté des Sciences de la Technologie,  
Département d'Electronique

# Modélisation et commande des Robots de manipulation



## Modélisation géométrique

**Master 2 AII**  
**Automatique et Informatique Industrielle**



## 2. Modélisation géométrique

### 2.1 Introduction

- Le **modèle géométrique** décrit le mouvement d'un manipulateur sans prendre en considération les vitesses et les couples rassurants ce mouvement.
- Le **modèle géométrique directe MGD** permet de décrire la position et l'orientation de l'effecteur connaissant les valeurs des variables articulaires ( $\theta_i$ ), « Modèle d'information »
- Le **modèle géométrique inverse MGI** détermine les valeurs des variable articulaires connaissant la position et l'orientation de l'effecteur. « Modèle de commande »



## 2. Modélisation géométrique

### 2.2 Modèle géométrique direct

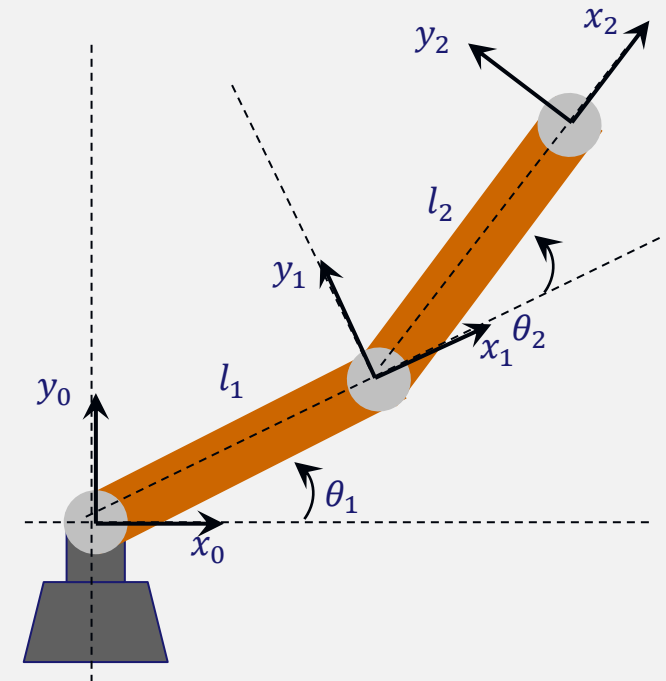
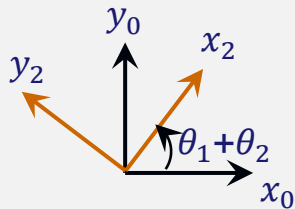
Soit le robot planaire représenté par la figure ci-contre.  
Le modèle géométrique doit décrire la position et l'orientation du repère  $R_2$ , attaché à l'extrémité de l'effecteur, par rapport au repère de référence  $R_0$  attaché à la base du robot,

#### Position

$$x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

#### Orientation



$$R_2^0 = \begin{bmatrix} x_2 \cdot x_0 & y_2 \cdot x_0 \\ x_2 \cdot y_0 & y_2 \cdot y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

**Remarque:** pour un robot à 6DDL le calcul du modèle devient plus complexe, pour cela il est recommandé de travailler avec les transformations homogènes



## 2. Modélisation géométrique

### 2.2 Modèle géométrique direct

MGD avec matrices homogènes

$$R_2^0 = R_1^0 \cdot R_2^1$$

$$R_2^0 = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & L_1 C1 \\ S1 & C1 & 0 & L_1 S1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & L_2 C2 \\ S2 & C2 & 0 & L_2 S2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2^0 = \begin{bmatrix} C1C2 - S1S2 & -C1S2 - S1C2 & 0 & L_1 C1 + L_2 (C1C2 - S1S2) \\ S1C2 + C1S2 & -S1S2 + C1C2 & 0 & L_1 S1 + L_2 (S1C2 + C1S2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

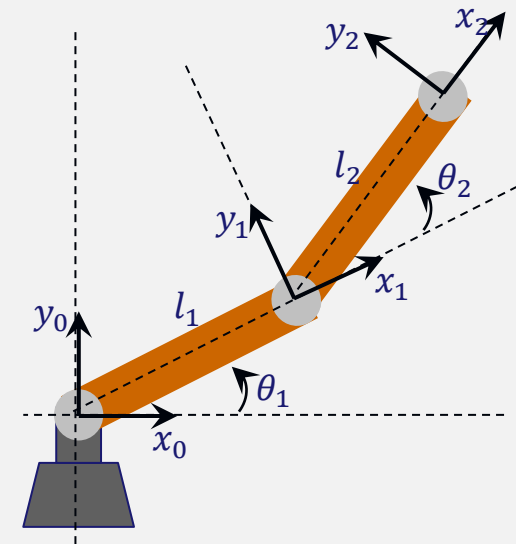
On a:  $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$

$$R_2^0 = \begin{bmatrix} C12 & S12 & 0 & L_1 C1 + L_2 C12 \\ S12 & C12 & 0 & L_1 S1 + L_2 S12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vecteur de position

matrice de rotation



Avec

$C12 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$

$S12 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$



## 2. Modélisation géométrique

### 2.2 Modèle géométrique direct

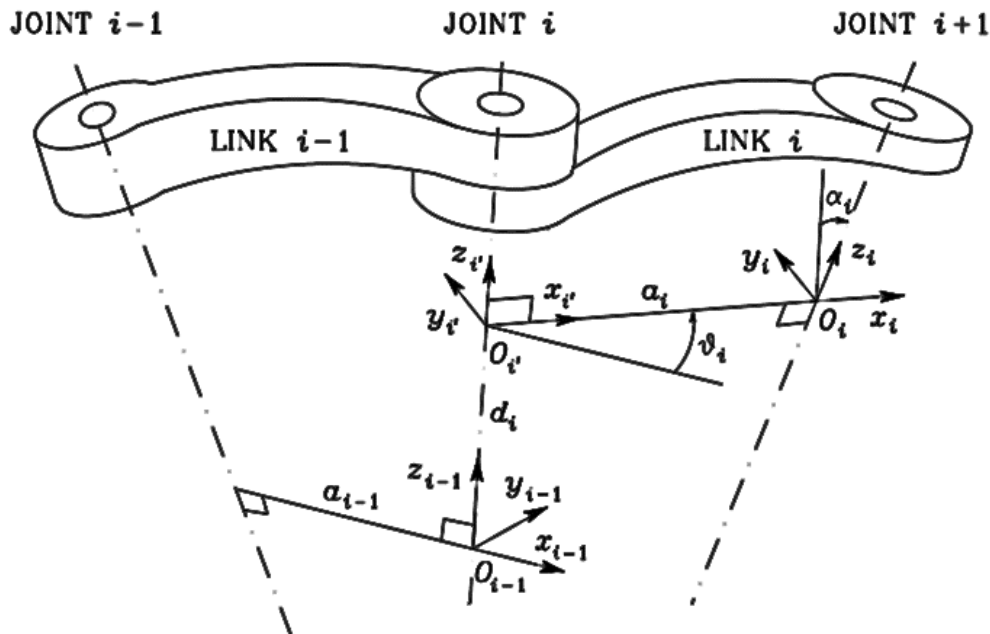
#### Convention de Denavit – Hartenberg (DH)

Selon le formalisme de DH le passage d'un repère à un autre se fait via quatre transformations élémentaires. Cette solution permet d'utiliser, dans les matrices de transformations, seulement quatre paramètres au lieu de six.

$$DH = Rot_{z,\theta_i} \cdot Trans_{z,d} \cdot Trans_{x,a_i} \cdot Rot_{x,\alpha_i}$$

$d_i$ : distance entre  $O_{i-1}$  et la projection de  $O_i$  sur la l'axe  $z_{i-1}$

$a_i$ : distance entre  $O_{i-1}$  et la projection de  $O_{i-1}$  sur le plan OYZ



$\theta_i$ : angle entre  $x_{i-1}$  et le plan définie par  $O_i$  et  $z_{i-1}$

$\alpha_i$ : angle entre  $z_{i-1}$  et la projection de  $z_{i-1}$  sur le plan normal au plan  $(z_{i-1}, O_i)$



## 2. Modélisation géométrique

### 2.2 Modèle géométrique direct

#### Convention de Denavit – Hartenberg (DH)

Selon le formalisme de DH le passage d'un repère à un autre se fait via quatre transformations élémentaires. Cette solution permet d'utiliser, dans les matrices de transformations, seulement quatre paramètres au lieu de six.

$$DH = Rot_{Z,\theta_i} \cdot Trans_{Z,d_i} \cdot Trans_{X,a_i} \cdot Rot_{X,\alpha_i}$$

$$DH = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$DH = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## 2. Modélisation géométrique

### 2.2 Modèle géométrique direct

Convention de Denavit – Hartenberg (DH)

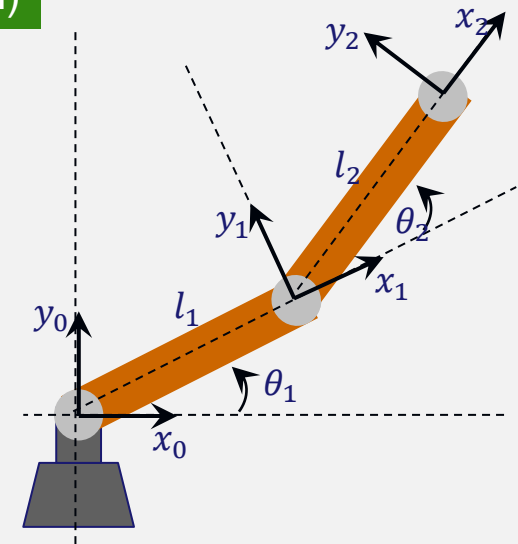
**Exemple** MGD du robot plan

Segment	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$l_1$	0	0	$\theta_1$
2	$l_2$	0	0	$\theta_2$

$$DH = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & l_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & l_1 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2^1 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & l_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & l_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





## 2. Modélisation géométrique

### 2.2 Modèle géométrique direct

Convention de Denavit – Hartenberg (DH)

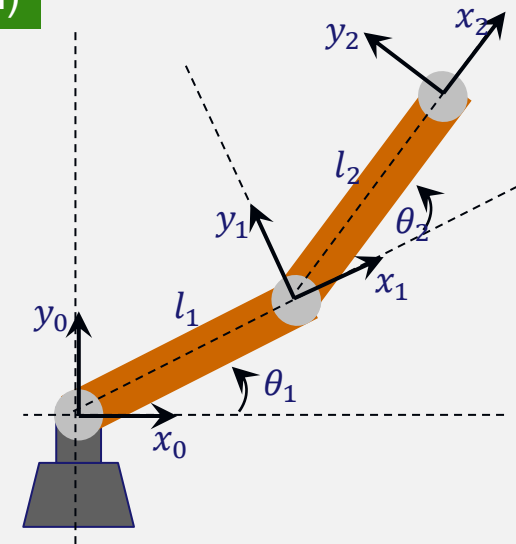
**Exemple** MGD du robot plan

Segment	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	$l_1$	0	0	$\theta_1$
2	$l_2$	0	0	$\theta_2$

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & l_1 C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & l_1 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2^1 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & l_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & l_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2^0 = R_1^0 \cdot R_2^1 = \begin{bmatrix} C12 & S12 & 0 & L_1 C1 + L_2 C12 \\ S12 & C12 & 0 & L_1 S1 + L_2 S12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$







## 2. Modélisation géométrique

### 2.2 Modèle géométrique direct

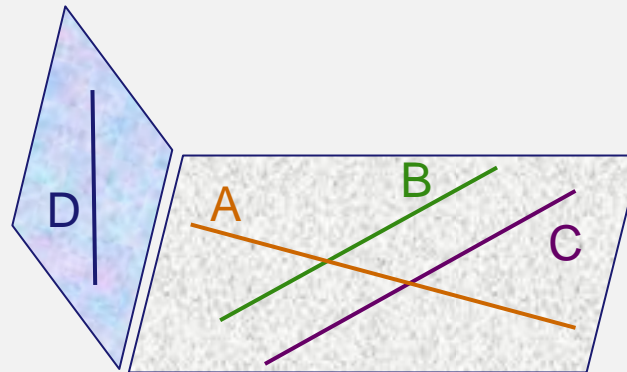
#### Convention de Denavit – Hartenberg (DH)

##### Placement des repères selon DH

DH1:  $X_i$  intersecte  $Z_{i-1}$

DH2:  $X_i$  perpendiculaire sur  $Z_{i-1}$

- $Z_i$  l'axe de l'articulation (rotoïde ou prismatique): sens positif de l'action
- Le choix du premier repère (repère de référence) est arbitraire: : respecter la méthode de la main droite
- Pour placer le repère  $R_i$  il existe 2 cas:
  - a.  $Z_{i-1}$  et  $Z_i$  sont coplanaires: appartiennent au même plan
  - b.  $Z_{i-1}$  et  $Z_i$  sont non-coplanaires: n'appartiennent pas au même plan



A, B, C: Coplanaires  
A, D: non-coplanaires



## 2. Modélisation géométrique

### 2.2 Modèle géométrique direct

#### Convention de Denavit – Hartenberg (DH)

##### Placement des repères selon DH

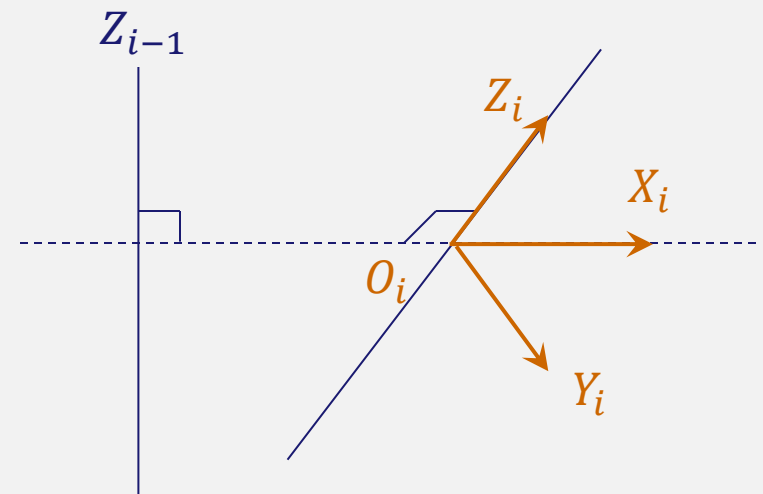
DH1:  $X_i$  intersecte  $Z_{i-1}$

DH2:  $X_i$  perpendiculaire sur  $Z_{i-1}$

##### $Z_{i-1}$ et $Z_i$ non-coplanaires

Il existe une seule normale qui représente l'axe  $X_i$ . Le point d'intersection de cette normale avec  $Z_i$  représente l'origine  $O_i$ . L'axe  $Y_i$  est choisie afin d'avoir un repère droitier

##### $Z_{i-1}$ et $Z_i$ coplanaires





## 2. Modélisation géométrique

### 2.2 Modèle géométrique direct

#### Convention de Denavit – Hartenberg (DH)

##### Placement des repères selon DH

DH1:  $X_i$  intersecte  $Z_{i-1}$

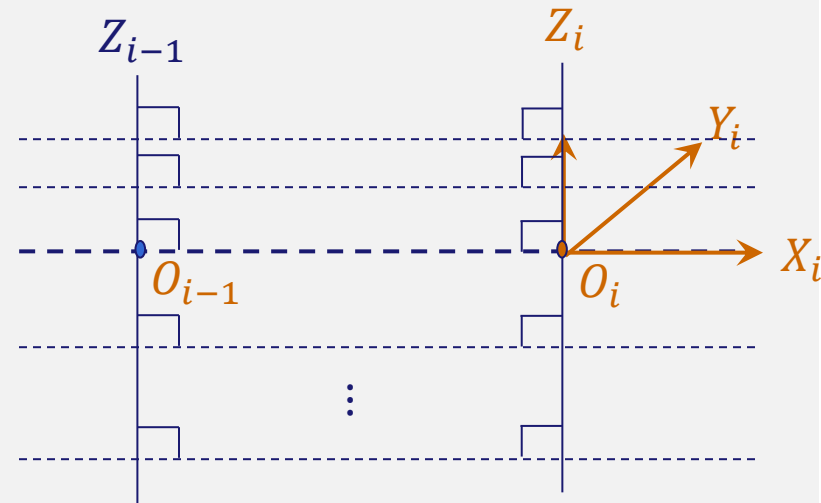
DH2:  $X_i$  perpendiculaire sur  $Z_{i-1}$

$Z_{i-1}$  et  $Z_i$  non-coplanaires

$Z_{i-1}$  et  $Z_i$  coplanaires

- **Cas 1:**  $Z_{i-1} \parallel Z_i$ : infinité de normale commune.

Le choix de  $O_i$  est arbitraire sur  $Z_i$ , mais il est recommandé de choisir  $O_i$  sur la normale qui passe par  $O_{i-1}$  et intersecte  $Z_i$ . Cette normale représente l'axe  $X_i$ . Ce choix permet d'avoir des matrices de transformation avec moins de paramètres ( $d_i = 0$ ). Comme  $Z_{i-1} \parallel Z_i \Rightarrow \alpha_i = 0$ .





## 2. Modélisation géométrique

### 2.2 Modèle géométrique direct

#### Convention de Denavit – Hartenberg (DH)

##### Placement des repères selon DH

DH1:  $X_i$  intersecte  $Z_{i-1}$

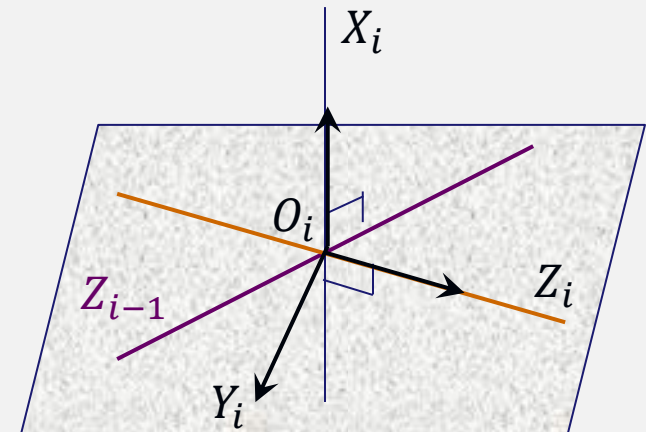
DH2:  $X_i$  perpendiculaire sur  $Z_{i-1}$

$Z_{i-1}$  et  $Z_i$  non-coplanaires

$Z_{i-1}$  et  $Z_i$  coplanaires

##### ■ Cas 2: $Z_{i-1}$ intersecte $Z_i$ :

$X_i$  est la normale du plan  $(Z_{i-1}, Z_i)$ . Le sens de  $X_i$  est arbitraire. L'origine  $O_i$  est le point d'intersection de  $Z_{i-1}$  avec  $Z_i$ . Dans ce cas  $a_i = 0$ .





## 2. Modélisation géométrique

### 2.2 Modèle géométrique direct

#### Convention de Denavit – Hartenberg (DH)

##### Placement des repères selon DH

DH1:  $X_i$  intersecte  $Z_{i-1}$

DH2:  $X_i$  perpendiculaire sur  $Z_{i-1}$

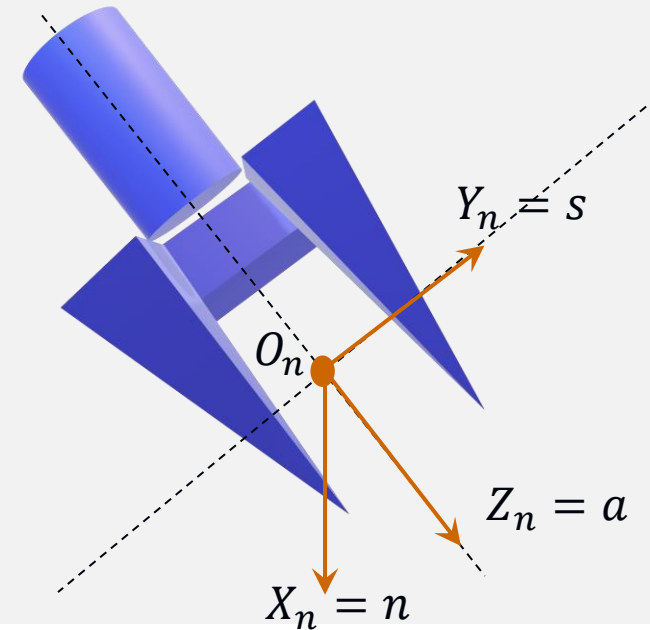
##### ▪ Repère attaché à l'extrémité de l'effecteur:

$O_n$ : au milieu

$\vec{s}$ : *sliding*. Sens d'ouverture et de fermeture de la pince

$\vec{a}$ : *approaching*. Sens de rapprochement à l'objet

$\vec{n}$ : la normale sur le plan formé par  $(\vec{s}, \vec{a})$





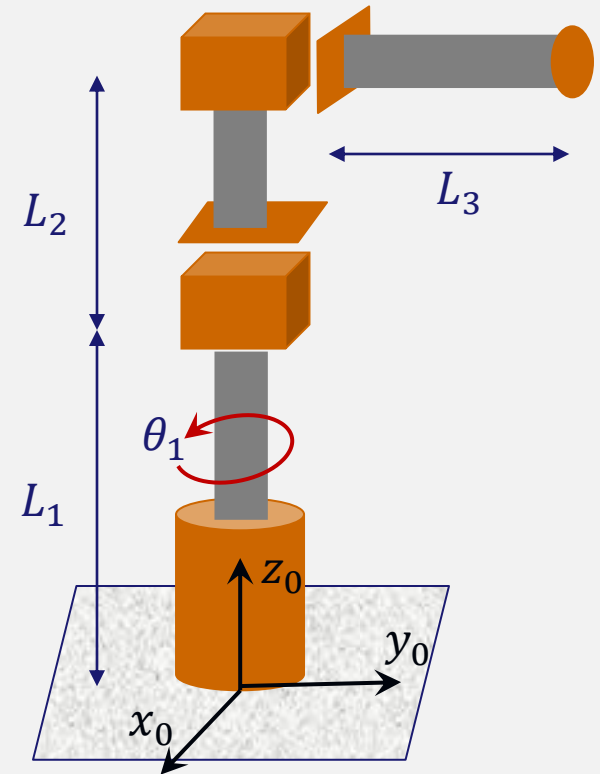
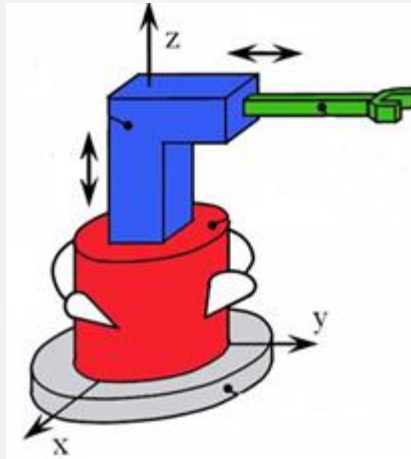
## 2. Modélisation géométrique

### 2.2 Modèle géométrique direct

#### Activité:

Soit le robot cylindrique RPP représenté par la figure ci-dessous

1. Placer les repères dans les différentes articulations selon DH
2. Etablir la table de DH
3. Donner les différentes matrices de transformation ainsi que la matrice  $T$  qui représente l'extrémité de l'effecteur par rapport au repère de référence





## 2. Modélisation géométrique

### 2.2 Modèle géométrique direct

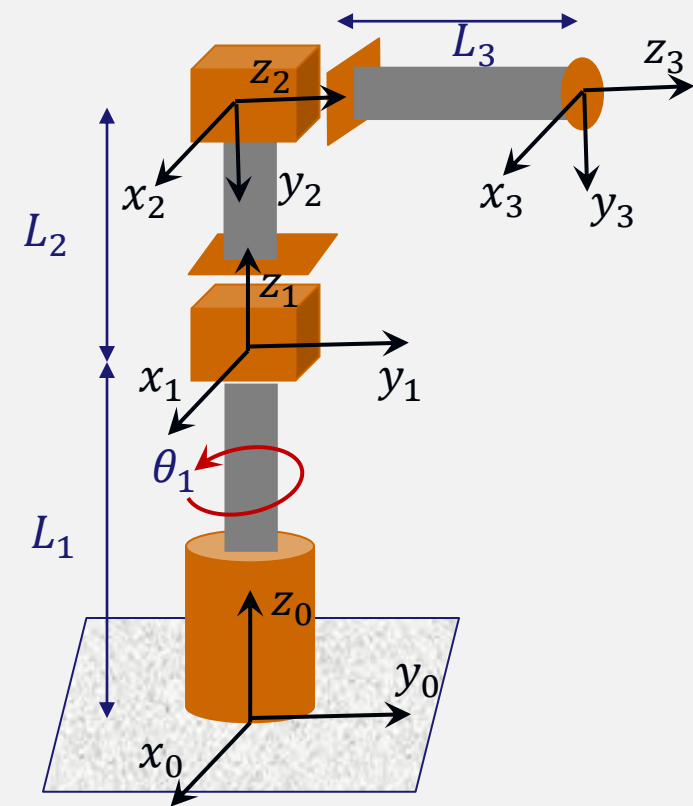
#### Activité: Solution

Table de DH

Segment	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	$L_1$	$\theta_1$
2	0	$-\pi/2$	$L_2^*$	0
3	0	0	$L_3^*$	0

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_2^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_3^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





## 2. Modélisation géométrique

### 2.2 Modèle géométrique direct

#### Activité: Solution

Table de DH

Segment	$a_i$	$\alpha_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	$L_1$	$\theta_1$
2	0	$-\pi/2$	$L_2^*$	0
3	0	0	$L_3^*$	0

$$T = R_1^0 \cdot R_2^1 \cdot R_3^2$$

$$T = \begin{bmatrix} C1 & 0 & -S1 & -L_3^* S1 \\ S1 & 0 & C1 & L_3^* C1 \\ 0 & -1 & 0 & L_1 + L_2^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vérification:  $\theta_1 = 0, L_2^* = L_2, L_3^* = L_3$

$$P_x = 0, \quad P_y = L_3, \quad P_z = L_1 + L_2$$

