République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Frères Mentouri Constantine 1,
Faculté des Sciences de la Technologie,
Département d'Electronique

Modélisation et commande des Robots de manipulation

Introduction et fondement mathématique

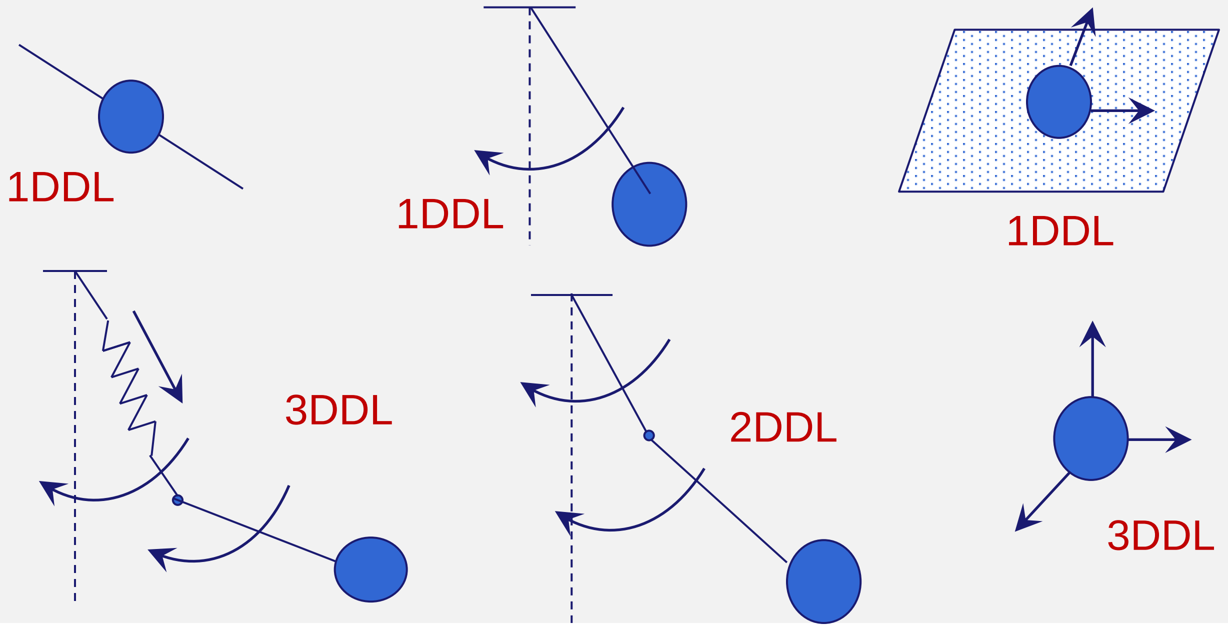
Master 2 AII
Automatique et Informatique Industrielle

1. Introduction

1.1 degré de liberté

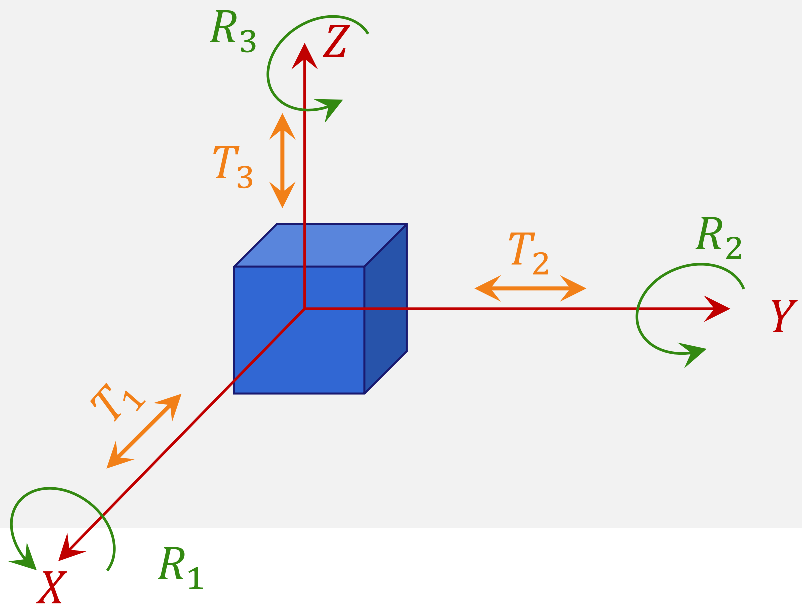
- **Degré de liberté:** C'est le nombre des coordonnées indépendantes nécessaires pour une description complète de la position de la masse.

Exemple: DDL d'une masse



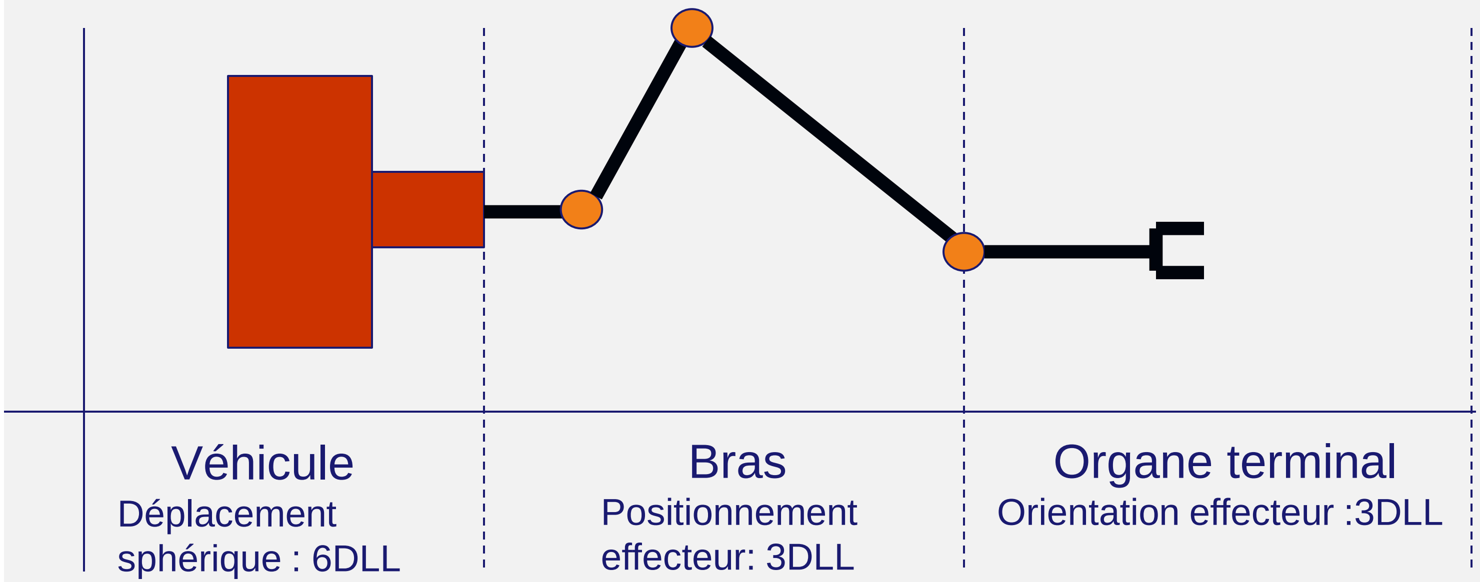
1.1 degré de liberté

En robotique on s'intéresse pas à la masse mais à des corps rigides . Si on associe à un solide **S** le repère **R(X,Y,Z),** les trois translations selon les axes X, Y et Z représentent trois 3 DDL et les trois rotations selon les mêmes axes représentent 3 autres DDL. Donc un corps rigide dans l'espace possède 6 DDL; 3 translations et 3 rotations



1.1 degré de liberté

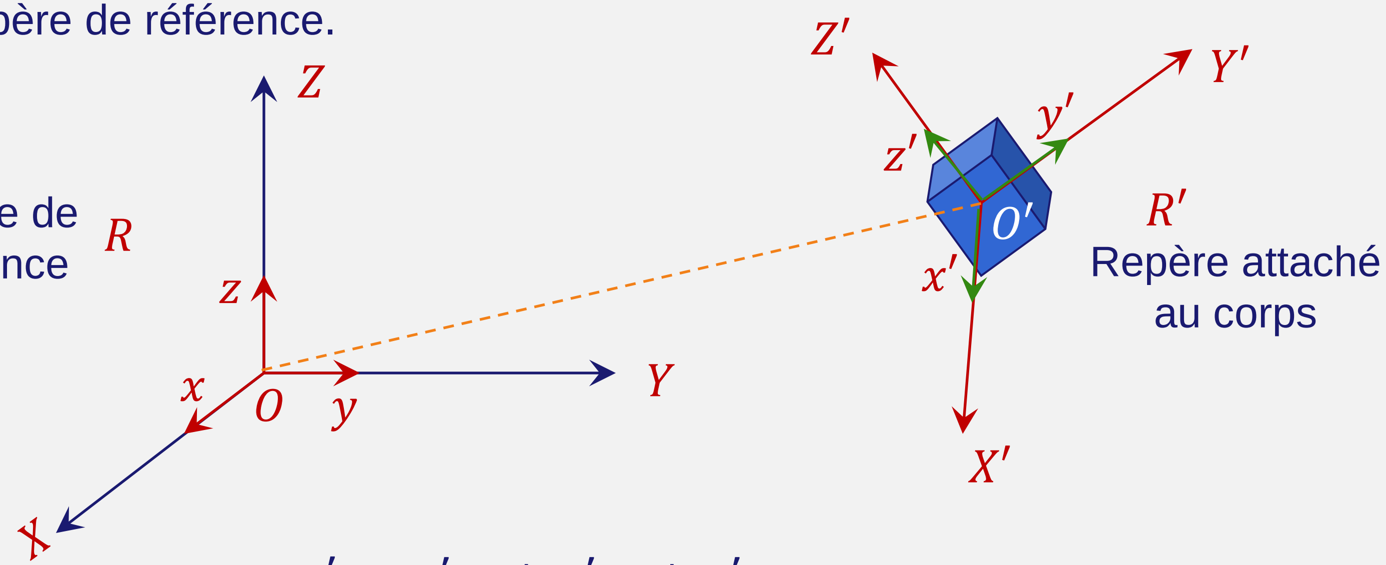
Un robot est composé de véhicule (base mobile) , bras et organe terminal.



Un robot manipulateur universel à poste fixe (pas de véhicule) possède 6DDL qui le permettent de positionner et orienter l’organe terminal

1.2 positionnement d'un corps solide

Un corps solide est représenté dans l'espace par une position et une orientation par rapport à un repère de référence.



$$x'_R = x'.x + x'.y + x'.z$$
$$y'_R = y'.x + y'.y + y'.z$$
$$z'_R = z'.x + z'.y + z'.z$$

Cosinus directeurs

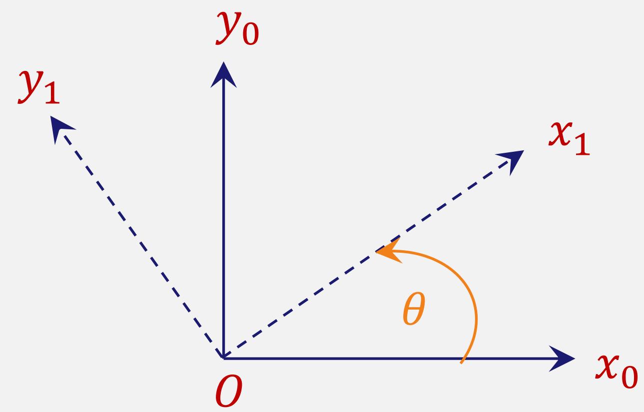
Produit scalaire:
$a.b = \|a\|\|b\| \, cos\theta$

1. Introduction

1.2 positionnement d'un corps solide

Représentation d'une rotation: Rotation dans un plan

On représente x_1 et y_1 dans le plan Ox_0y_0 comme suit:



$$x_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 cos\theta \\ x_1 sin\theta \end{bmatrix} \qquad y_1^0 = \begin{bmatrix} -y_1 sin\theta \\ y_1 cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_1^0 = [x_1^0 \vdots y_1^0] \quad \Rightarrow \quad R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 cos\theta & -y_1 sin\theta \\ x_1 sin\theta & y_1 cos\theta \end{bmatrix}$$

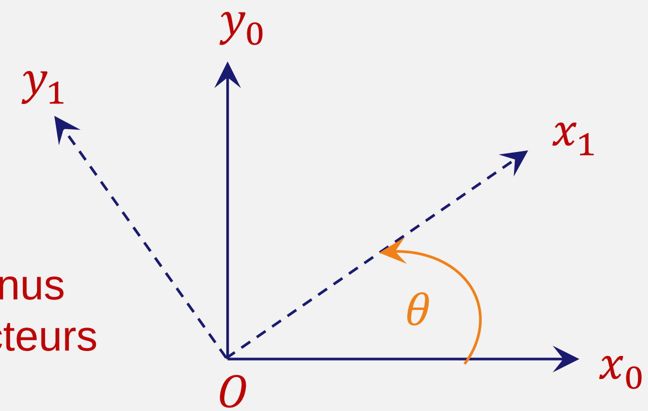
Comme x_1 et y_1 vecteurs unitaires: $\boxed{R_1^0 = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}}$

1.2 positionnement d'un corps solide

Représentation d'une rotation: Rotation dans un plan

On écrit aussi

$$x_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad y_1^0 = \begin{bmatrix} y_1 \cdot x_0 \\ y_1 \cdot y_0 \end{bmatrix}$$



$$R_1^0 = [x_1^0 \vdots y_1^0] \Rightarrow \quad R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot x_0 \\ x_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot y_0 \end{bmatrix}$$ Cosinus directeurs

Pour représenter R_0 par rapport à R_1

$$R_0^1 = [x_0^1 \vdots y_0^1] \Rightarrow \quad R_0^1 = \begin{bmatrix} x_0 \cdot x_1 & y_0 \cdot x_1 \\ x_0 \cdot y_1 & y_0 \cdot y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cdot x_0 & x_1 \cdot y_0 \\ y_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot y_0 \end{bmatrix}$$

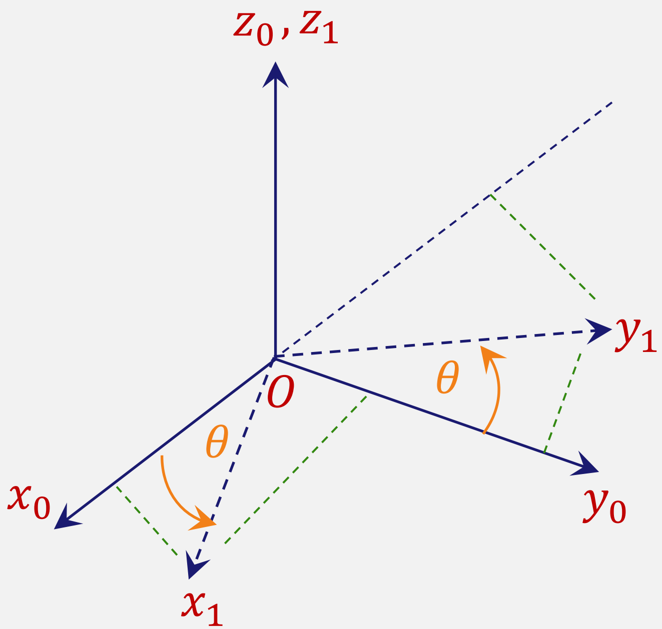
$$\Rightarrow R_0^1 = (R_1^0)^T$$

En général: $R_0 \underset{A^{-1}}{\overset{A}{\rightleftarrows}} R_1$ $\qquad (R_1^0)^T = (R_0^1)^{-1}$

1.2 positionnement d'un corps solide

Représentation d'une rotation: Rotation en 3 dimension

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 x_0 & y_1 x_0 & z_1 x_0 \\ x_1 y_0 & y_1 y_0 & z_1 y_0 \\ x_1 z_0 & y_1 z_0 & z_1 z_0 \end{bmatrix}$$



Exemple

$$x_1 . x_0 = cos\theta \qquad y_1 . x_0 = -sin\theta$$

$$x_1 . y_0 = sin\theta \qquad y_1 . y_0 = cos\theta$$

$$z_1 . z_0 = 1$$

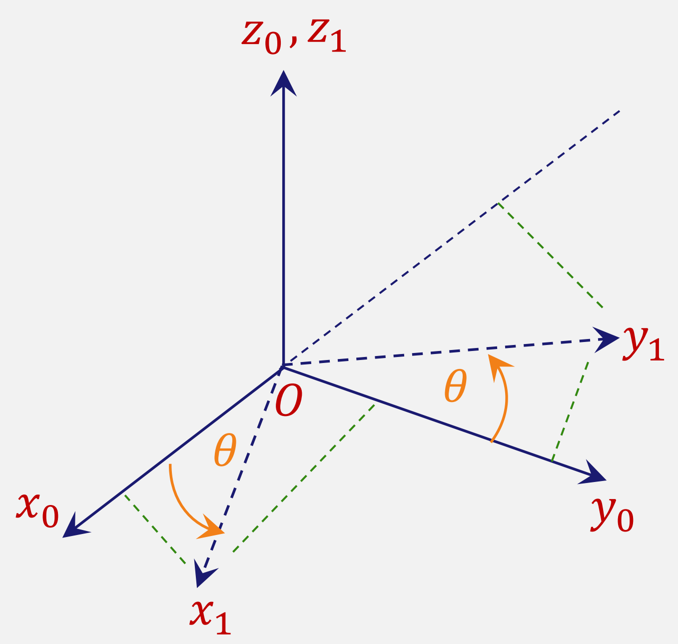
$$R_1^0 = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation sur l'axe Z avec un angle θ $R_{Z,\theta}$

1.2 positionnement d'un corps solide

Représentation d'une rotation: Rotation en 3 dimension

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 x_0 & y_1 x_0 & z_1 x_0 \\ x_1 y_0 & y_1 y_0 & z_1 y_0 \\ x_1 z_0 & y_1 z_0 & z_1 z_0 \end{bmatrix}$$



De la même façon on obtient

$$R_{X,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation sur l'axe X avec un angle θ

$$R_{Y,\theta} = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix}$$

Matrice de rotation sur l'axe Y avec un angle θ

Propriétés

$$R_{X,0} = R_{Y,0} = R_{Z,0} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \left(R_{Z,\theta}\right)^{-1} = R_{Z,-\theta}$$

1.2 positionnement d’un corps solide

Représentation d’une rotation: Rotation en 3 dimension

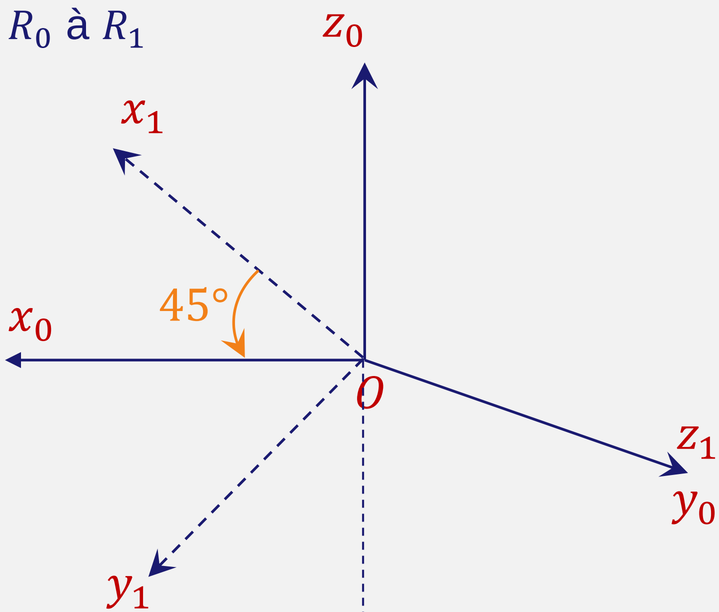
Activité:

Les repères R_0 et R_1 sont orientés comme il est indiqué dans la figure.

1. Donner la matrice de transformation qui représente R_1 dans R_0.
2. Définir les rotations effectuées pour passer de R_0 à R_1

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} x_1 x_0 & y_1 x_0 & z_1 x_0 \\ x_1 y_0 & y_1 y_0 & z_1 y_0 \\ x_1 z_0 & y_1 z_0 & z_1 z_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$



Rotation sur x_0 d’un angle de $-\pi/2$ suivie d’une rotation sur $z_0{}'$ de $-\pi/4$

1.2 positionnement d'un corps solide

Représentation d'une rotation: transformation des rotations

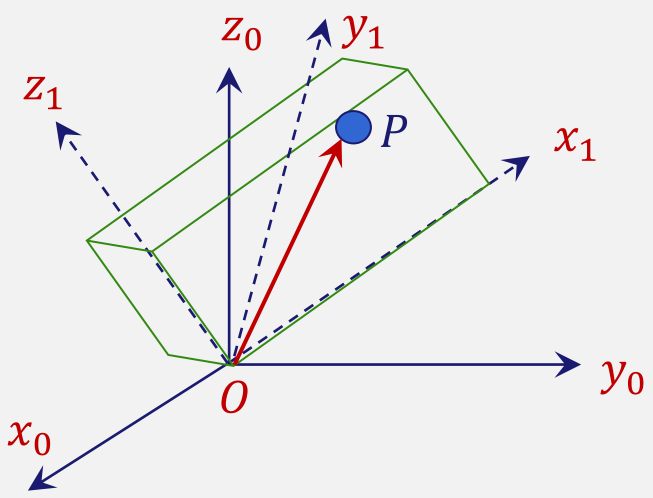
Soit un corps solide et R_1 un repère attaché à ce corps avec P^1 les coordonnées de P dans R_1 tel que $P^1 = [a; b; c]$

Donc: $P = a.x_1 + b.y_1 + c.z_1$

Pour exprimer P dans R_0 on peut écrire:

$$P^0 = \begin{bmatrix} P.x_0 \\ P.y_0 \\ P.z_0 \end{bmatrix}$$, projection de P dans R_0

$$P^0 = \begin{bmatrix} (a.x_1 + b.y_1 + c.z_1).x_0 \\ (a.x_1 + b.y_1 + c.z_1).y_0 \\ (a.x_1 + b.y_1 + c.z_1).z_0 \end{bmatrix}$$



$$P^0 = \begin{bmatrix} a.x_1.x_0 + b.y_1.x_0 + c.z_1.x_0 \\ a.x_1.y_0 + b.y_1.y_0 + c.z_1.y_0 \\ a.x_1.z_0 + b.y_1.z_0 + c.z_1.z_0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1.x_0 & y_1.x_0 & z_1.x_0 \\ x_1.y_0 & y_1.y_0 & z_1.y_0 \\ x_1.z_0 & y_1.z_0 & z_1.z_0 \end{bmatrix}}.\underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}$$

Matrice de transformation de R_1 *par rapport à* R_0

$$\boxed{P^0 = R_1^0.P^1}$$

Coordonnées de P dans R_1

1. Introduction

1.2 positionnement d'un corps solide

Représentation d'une rotation: Rotation en 3 dimension

Activité:

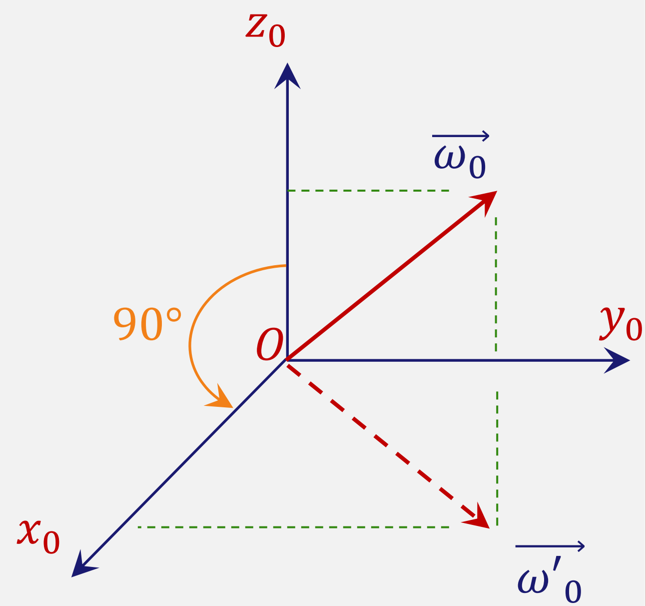
Soit $\overrightarrow{\omega_0}$ un vecteur dont les coordonnées dans R_0 sont $\omega_0 = [0;1;1]$. Ce vecteur fait une rotation de $\pi/2$ selon l'axe y_0. Donner les nouvelles coordonnées de ce vecteur.

$$R_{y_0,\pi/2} = \begin{bmatrix} \cos\pi/2 & 0 & \sin\pi/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\pi/2 & 0 & \cos\pi/2 \end{bmatrix}$$

$$\omega_0{}' = R_{y_0,\pi/2} \, . \, \omega_0$$

$$\omega_0' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Coordonnée nulle sur z_0



1.2 positionnement d’un corps solide

Représentation d’une rotation: Composition des rotations

Soit P un point dans l’espace. P^0, P^1, P^2 les coordonnées de P dans les repères R^0, R^1, R^2 respectivement.

Donc:

$$P^0 = R_1^0 . P^1 \qquad (1)$$
$$P^1 = R_2^1 . P^2 \qquad (2)$$
$$P^0 = R_2^0 . P^2 \qquad (3)$$

Remplaçant (2) dans (1)

$$P^0 = R_1^0 . R_2^1 . P^2$$

Donc:

$$\boxed{R_2^0 = R_1^0 . R_2^1}$$

Exemple: un repère R fait une rotation d’un angle α sur son axe Y puis une autre rotation d’un angle β sur l’axe Z du repère obtenu. Donner la matrice de transformation qui représente le dernier repère obtenu par rapport au repère initial.

$$R_0^2 = R_{\alpha,Y} . R_{\beta,Z} = \begin{bmatrix} cos\alpha & 0 & sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\alpha & 0 & cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_0^2 = \begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta & -S_\alpha S_\beta & S_\alpha \\ S_\beta & C_\beta & 0 \\ -S_\alpha C_\beta & -S_\alpha S_\beta & C_\alpha \end{bmatrix}$$

Remarque: Il faut représenter les transformations selon la séquence de rotation (respecter l’ordre)

1.2 positionnement d'un corps solide

Représentation d'une rotation: Composition des rotations

Soit *P* un point dans l'espace. P^0, P^1, P^2 les coordonnées de *P* dans les repères R^0, R^1, R^2 respectivement.
Donc:

$$P^0 = R_1^0 . P^1 \qquad (1)$$
$$P^1 = R_2^1 . P^2 \qquad (2)$$
$$P^0 = R_2^0 . P^2 \qquad (3)$$

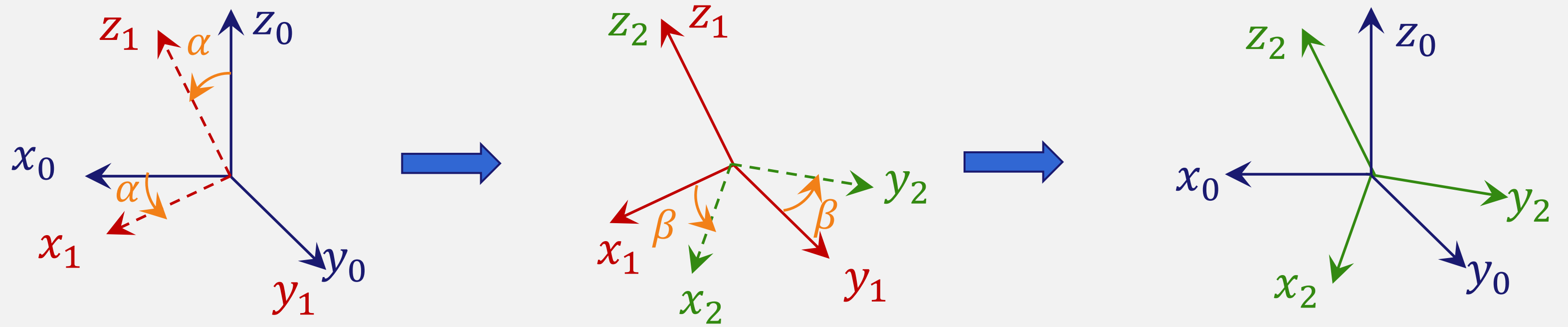
Remplaçant (2) dans (1)

$$P^0 = R_1^0 . R_2^1 . P^2$$

Donc:

$$\boxed{R_2^0 = R_1^0 . R_2^1}$$

Exemple: un repère R fait une rotation d'un angle α sur son axe Y puis une autre rotation d'un angle β sur l'axe Z du repère obtenu. Donner la matrice de transformation qui représente le dernier repère obtenu par rapport au repère initial.



1.2 positionnement d'un corps solide

Représentation d'une rotation: les angles d'Euler

On considère deux repères $R_0(O_0, x_0, y_0, z_0)$ et $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$. L'orientation de R_1 par rapport à R_0 peut être représentée par trois angles (ϕ, θ, ψ) appelés angles d'Euler.
La représentation de l'orientation d'un repère par rapport à un autre, par les angles d'Euler, est le résultat de trois transformations successives.

a. rotation d'un angle ϕ sur l'axe z_0
b. rotation d'un angle θ sur l'axe $y_0{}'$ (repère courant)
c. rotation d'un angle ψ sur l'axe $z_0{}''$ (repère courant)

Donc: $$R_0^1 = R_{z,\phi} \times R_{y,\theta} \times R_{z,\psi} = R_{ZYZ}$$

$$R_{ZYZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\phi & -sin\phi \\ 0 & sin\phi & cos\phi \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\psi & -sin\psi \\ 0 & sin\psi & cos\psi \end{bmatrix}$$

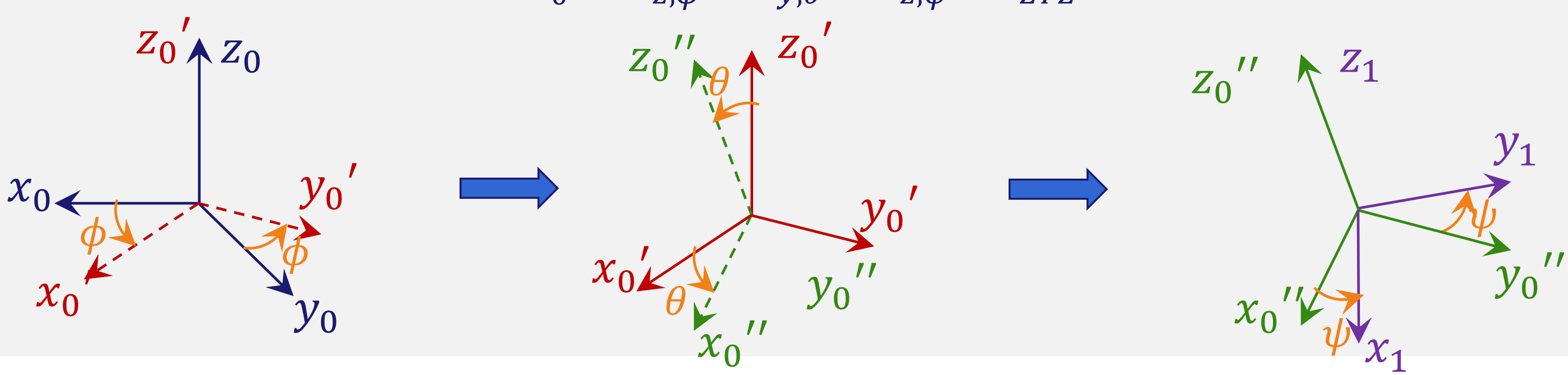
1.2 positionnement d'un corps solide

Représentation d'une rotation: les angles d'Euler

On considère deux repères $R_0(O_0, x_0, y_0, z_0)$ et $R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$. L'orientation de R_1 par rapport à R_0 peut être représentée par trois angles (ϕ, θ, ψ) appelés angles d'Euler.
La représentation de l'orientation d'un repère par rapport à un autre, par les angles d'Euler, est le résultat de trois transformations successives.

a. rotation d'un angle ϕ sur l'axe z_0
b. rotation d'un angle θ sur l'axe ${y_0}'$ (repère courant)
c. rotation d'un angle ψ sur l'axe ${z_0}''$ (repère courant)

Donc: $R_0^1 = R_{z,\phi} \times R_{y,\theta} \times R_{z,\psi} = R_{ZYZ}$



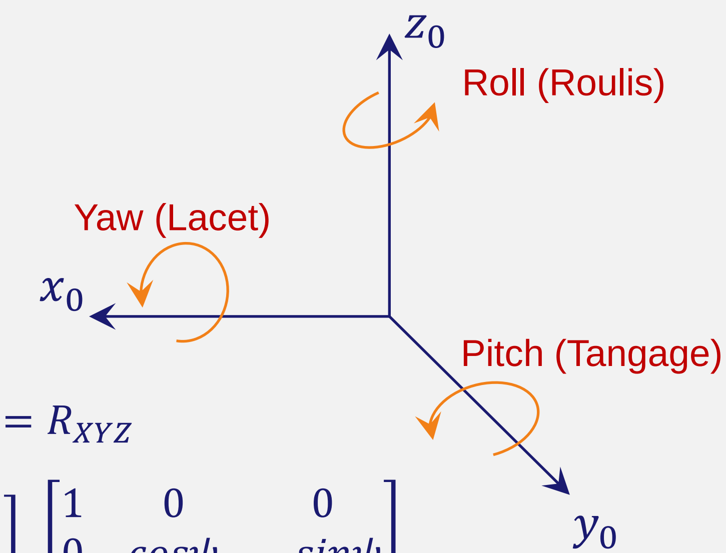
1. Introduction

1.2 positionnement d'un corps solide

Représentation d'une rotation: les angles Roll, Pitch, Yaw

Une matrice de rotation *R* est décrit par une succession de rotation sur les trois axes x_0, y_0, z_0 , respectivement, du repère initial

a. Yaw avec angle ψ sur l'axe x_0
b. Pitch avec angle θ sur l'axe y_0
c. Roll avec angle ϕ sur l'axe z_0



Donc:

$$R_0^1 = R_{z,\phi} \times R_{y,\theta} \times R_{x,\psi} = R_{XYZ}$$

$$R_{XYZ} = \begin{bmatrix} cos\phi & -sin\phi & 0 \\ sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\psi & -sin\psi \\ 0 & sin\psi & cos\psi \end{bmatrix}$$

NB: On inverse l'ordre lors de la multiplication des matrice car les transformation sont faites par rapport à un repère fixe (non par rapport au repère courant)

1. Introduction

1.3 le mouvement rigide

Un mouvement rigide est une association d'une translation pure et une rotation pure

$$P^0 = R_1^0 \,.\, P^1 + d_1^0$$

Coordonnées de P Dans R_0

Translation de R_1par rapport à R_0

Coordonnées de P Dans R_1

Rotation de R_1 Par rapport R_0

On considère les deux mouvements rigides suivants :

$$P^0 = R_1^0 \,.\, P^1 + d_1^0 \qquad (4)$$

$$P^1 = R_2^1 \,.\, P^2 + d_2^1 \qquad (5)$$

Le mouvement équivalent est:

$$P^0 = R_1^0\left(R_2^1 \,.\, P^2 + d_2^1\right) + d_1^0$$

$$P^0 = R_1^0 .\, R_2^1 \,.\, P^2 + R_1^0 . d_2^1 + d_1^0$$

Remarque: Si le nombre des mouvements est important la représentation devient de plus en plus complexe. Pour cela l'utilisation des transformation homogène est devenue indispensable.

Comme le mouvement résultant est rigide, on peut donc écrire:

$\boxed{P^0 = R_2^0 \,.\, P^2 + d_2^0}$ avec: $R_2^0 = R_1^0 .\, R_2^1$ et $d_2^0 = R_1^0 . d_2^1 + d_1^0$

1. Introduction

1.4 Les transformations Homogènes

La transformation homogène permet de représenter les rotations et les translation avec une seule matrice 4×4.

$$H = \begin{bmatrix} R & \vdots & P \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

R: Matrice de rotation 3×3
P: Vecteur de translation 3×1

$$d = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

- P_x : Déplacement selon x
- P_y : Déplacement selon y
- P_z : Déplacement selon z

Exemple:

$$Trans_{x,a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Trans_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Trans_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Rot_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_\theta & -S_\theta & 0 \\ 0 & S_\theta & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Rot_{y,\beta} = \begin{bmatrix} C_\beta & 0 & S_\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S_\beta & 0 & C_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Rot_{z,\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_\varphi & -S_\varphi & 0 \\ 0 & S_\varphi & C_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$