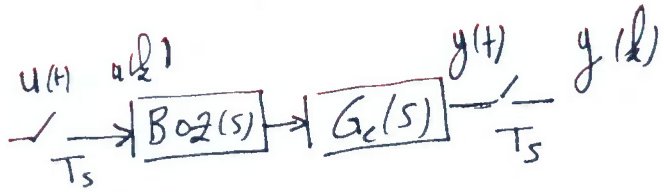
TD3 Régulateur STR

Exercice 3.1 :

1) $G_c(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$



On rappelle que $Boz(s) = \dfrac{1-e^{-T_s s}}{s}$

par conséquent $G(z) = \mathcal{Z}\left\{Boz(s)\,G_c(s)\right\} = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\dfrac{G_c(s)}{s}\right\}$

$$= \frac{z-1}{z}\,\mathcal{Z}\left\{\frac{G_c(s)}{s}\right\}$$

$$\frac{G_c(s)}{s} = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s} + \frac{c_3}{s+1}$$

$c_1 = \left.\dfrac{1}{s+1}\right|_{s=0} = 1$; $c_3 = \left.\dfrac{1}{s^2}\right|_{s=-1} = 1$; $\dfrac{1}{s+1} = c_1 + s c_2 + \dfrac{s^2}{s+1} c_3$

↓ on dérive/s

$$\frac{-1}{(s+1)^2} = c_2 + \frac{s(s+2)c_3}{(s+1)^2}$$

$s=0$

$-1 = c_2 + c_3 \times 0$

$\boxed{c_2 = -1}$

$$\frac{G_c(s)}{s} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

d'après les tables :

$\mathcal{Z}\left\{\dfrac{1}{s^2}\right\} = \dfrac{T_s z}{(z-1)^2}$; $\mathcal{Z}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} = \dfrac{z}{z-1}$

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = \frac{1}{1-e^{-T_s}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-T_s}}$$

Par conséquent

$$G(z) = \frac{(z-1)}{z}\left\{\frac{T_s z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T_s}}\right\}$$

avec $\boxed{T_s = 0{,}5\,s}$

après calcul :

$$\boxed{G(z) = \frac{(T_s - 1 + e^{-T_s})\,z + (1 - e^{-T_s} - T_s e^{-T_s})}{(z-1)(z - e^{-T_s})}}$$

A. N : $T_s = 0{,}1\ s$

$$\boxed{G(z) = \frac{b_0 z + b_1}{z^2 + a_1 z + a_2}} \; ; \quad \boxed{\begin{array}{l} b_0 = 0{,}1065 \; ; \; b_1 = 0{,}0902 \\ a_1 = -1{,}6065 \; ; \; a_2 = 0{,}6065 \end{array}}$$

$$\boxed{B(z) = b_0 z + b_1 = 0{,}1065\,z + 0{,}0902}$$

$$\boxed{A(z) = z^2 + a_1 z + a_2 = z^2 - 1{,}6065\,z + 0{,}6065}$$

2) $b_0 z + b_1 = 0 \Rightarrow z_1 = -\frac{b_1}{b_0} = -0{,}84$; $\boxed{z_1 = -0{,}84}$

Proche instabilité

$z^2 + a_1 z + a_2 = 0$; $P_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$; $\Delta = a_1^2 - 4a_2$

A. N : $\boxed{\begin{array}{l} P_1 = 1 \\ P_2 = 0{,}6065 \end{array}}$ limite stabilité

Le système est à la limite de la stabilité (intégrateur). Ces zéros sont stables

3) Modèle de référence :

On calcule le MR d'abord en continu :

$$G_{mc}(s) = \frac{w_0^2}{s^2 + 2\xi w_0 s + w_0^2}$$ (gain statique unitaire).

$$s_{1,2} = -\xi w_0 \pm j w_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

comme $D\% = 5\% \Rightarrow \xi = 0{,}707$; $w_0 = 1\ rad.s^{-1}$

A. N : $\boxed{s_{1,2} = -0{,}7 \pm j\,0{,}7141}$ Pôles continus

On déduit les pôles discret

$$\boxed{q_{1,2} = e^{T_s s_{1,2}} = 0{,}6602 \pm j\,0{,}2463}$$

$$G_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)}$$

$$A_m(q) = (q-q_1)(q-q_2) = q^2 - 2\,\mathrm{Re}\{q_1\}\,q + |q_1|^2$$
$$= q^2 + a_{m1}\,q + a_{m2}$$

$$\boxed{A_m(q) = (q^2 + a_{m1}q + a_{m2}) = q^2 - 1{,}3205\,q + 0{,}4966}$$

On choisit $B_m(q) = b_{m0}\,q$. Comme $G_m(1) = 1$
alors

$$\frac{b_{m0}}{1 + a_{m1} + a_{m2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad b_{m0} = 1 + a_{m1} + a_{m2} = 0{,}1761$$

$$\boxed{B_m(q) = b_{m0}\,q = 0{,}1761\,q}$$

4) $B(q) = \underbrace{B^+(q)}_{\text{monique et mêmes racines que } B(q)} B^-(q)$

$$B(q) = b_0 q + b_1 = \overbrace{b_0}^{B^-(q)} \overbrace{\underbrace{\left(q + \frac{b_1}{b_0}\right)}_{\text{monique et mêmes racines que } B(q)}}^{B^+(q)}$$

$$\boxed{B^+(q) = q + \frac{b_1}{b_0}}$$

$$\boxed{B^-(q) = b_0}$$

5) Pour avoir une solution minimale on doit avoir :

condition pour solution minimale $\leftarrow$ $\boxed{\deg S < \deg A}$ sachant que

$$\boxed{\deg R = \deg A_c - \deg A} \qquad A_c = A_0 A_m B^+$$

$$\Rightarrow \deg R = \underbrace{\deg A_0}_{0} + \deg A_m + \deg B^+ - \deg A$$

On a $\boxed{\deg A_0 = \deg A - \deg B^+ - 1}$

$\Rightarrow$ d'où $\deg A_0 = 2 - 1 - 1 = 0$ $\Rightarrow A_0 = c^{te}$ $\Rightarrow \boxed{A_0(q) = 1}$

On déduit alors

$$\deg R = 0 + 2 + 1 - 2 = 1$$

$$\boxed{\deg R = 1}$$

Comme $\boxed{R = R' B^+}$ alors

et que R' est monique et $\deg B^+ = 1$

$$\boxed{R = B^+ = q + \frac{b_1}{b_0}}$$

$\deg S < \deg A = 2 \Rightarrow \deg S = 0$ ou 1

on choisit $\boxed{\deg S = 1}$ $\Rightarrow$ $\boxed{S(q) = s_0 q + s_1}$

6) Equation de Bezout

$$\boxed{AR + BS = A_c = A_0 A_m B^+}$$

en remplaçant: $B = B^+ B^-$; $R = R' B^+$; on élimine B^+

$$A R' \cancel{B^+} + \cancel{B^+} B^- S = A_0 A_m \cancel{B^+}$$

$$\boxed{A R' + B^- S = A_0 A_m}$$ équation de Bezout simplifiée

$R' = 1$; $B^- = b_0$; $S(q) = s_0 q + s_1$; $A_0(q) = 1$

On remplace

$$\underbrace{(q^2 + a_1 q + a_2)}_{A(q)} \cdot \underbrace{1}_{R'(q)} + \underbrace{b_0}_{B^-(q)} \underbrace{(s_0 q + s_1)}_{S(q)} = \underbrace{1}_{A_0(q)} \cdot \underbrace{(q^2 + a_{m1} q + a_{m2})}_{A_m(q)}$$

en développant

et en égalant les coefficients des même puissance de q:

$$a_0 + b_0 s_0 = a_{m1}$$
$$a_2 + b_0 s_1 = a_{m2}$$

$$\Rightarrow \boxed{s_0 = \frac{a_{m1} - a_1}{b_0} \qquad s_1 = \frac{a_{m2} - a_1}{b_0}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} S(q) = s_0 q + s_1 = 2{,}6852\, q + 19{,}7419 \\ R(q) = B^+(q) = q + 0{,}8467 \end{array}}$$

7) $\boxed{T(q) = \underbrace{A_0(q)}_{=1} B_m'(q)} \Rightarrow \boxed{T(q) = B_m'(q)}$

$$B_m(q) = B^-(q)\, B_m'(q)$$

$$\Rightarrow \quad B_m'(q) = \frac{B_m(q)}{B^-(q)} = \frac{b_{m0}\, q}{b_0}$$

$$\boxed{T(q) = \frac{b_{m0}\, q}{b_0} = 1{,}6531\, q}$$

Exercice 3.2 :

1) Pas de compensation de zéros $\Rightarrow$ $\boxed{B^+(q) = 1}$ Contient les zéros à éliminer

$B = B^+B^- \Rightarrow$ $\boxed{B^-(q) = B(q) = b_0 q + b_1}$ Contient les zéros restants (non éliminés).

2) $G_m(q) = \dfrac{B_m(q)}{A_m(q)}$; comme il n'y a pas de compensation de zéros

$B_m(q) = \beta B(q)$ pour avoir un gain statique unité pour le modèle de référence, on doit avoir $G_m(1) = \dfrac{B_m(1)}{A_m(1)} = 1$ soit $\dfrac{\beta B(1)}{A_m(1)} = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{A_m(1)}{B(1)} = \frac{1 + a_{m1} + a_{m2}}{b_0 + b_1}}$$

A.N. : $\boxed{\beta = 0,8951}$

Pour $A_m(q)$, comme pour l'exercice précédent

$A_{m_c}(s) = s^2 + 2\xi w_0 s + w_0^2$; $w_0 = 1$ rad.s^{-1}

$A_{mc}(s) =$ $\xi = 0,7$

$\Rightarrow P_{1,2} = -\xi w_0 \pm j w_0 \sqrt{1-\xi^2}$

A.N : $\boxed{P_{1,2} = -0,7 \pm j\, 0,7141}$

$T_s = 0,5\, s$: $\boxed{z_{1,2} = e^{T_s P_{1,2}}}$ A.N : $z_{1,2} =$

3) $\Rightarrow$ $\boxed{A_m(z) = (q - z_1)(q - z_2)}$

A.N : $\boxed{A_m(z) = 0,6602 \pm j\, 0,2463}$

On déduit la valeur numérique de β.

$$\boxed{\beta = 0,8591}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_m(q) = b_{m0} q + b_{m1} = 0,0954\, q + 0,0807}$$

III.8

4) $\deg A_0 = \deg A - \deg B^+ - 1 = 2 - 0 - 1 = 1$

$\boxed{\deg A_0 = 1}$

$\Rightarrow \boxed{A_0(q) = q + a_0}$ $|a_0| < 1$ (Pour avoir un système stable en BF)

5) La condition de causalité $\boxed{\begin{matrix}\deg S \leq \deg R \\ \deg T \leq \deg R\end{matrix}}$

La solution minimale vérifie $\boxed{\deg S < \deg A}$

On utilise la relation

$\boxed{\deg R = \deg A_c - \deg A}$ ⚠ avec $A_c = A_0 A_m B^+$

$\Rightarrow \deg R = \underbrace{\deg A_0}_{1} + \underbrace{\deg A_m}_{2} + \underbrace{\deg B^+}_{0} - \underbrace{\deg A}_{2} = 1+2+0-2 = 1$

$\boxed{\deg R = 1}$ $\Rightarrow$ $\deg S \leqslant 1$

On choisit $\boxed{\deg S = \deg R = 1}$

On aura donc $\boxed{\begin{matrix}R(q) = q + r_1 \\ S(q) = s_0 q + s_1\end{matrix}}$ ← Polynome monique (Plus haut coefficient $= 1$).

6) Equation de Bezout:

$$\boxed{AR + BS = A_c = A_o A_m B^+}$$

en remplaçant

$$\underbrace{(q^2 + a_1 q + a_2)}_{A(q)} \underbrace{(q + r_1)}_{R(q)} + \underbrace{(b_0 q + b_1)}_{B(q)} \underbrace{(\cancel{s_0 q + s_1})}_{S(q)} = \underbrace{(q^2 + a_{m_1} q + a_{m_2})}_{A_m(q)} \underbrace{(q + a_0)}_{A_o(q)} \cdot \underbrace{1}_{B^+(q)}$$

$= 0$

On remplace $q = -\frac{b_1}{b_0}$ Pour ne garder qu'une inconnue r_1

On obtient:

$$(q^2 + a_1 q + a_2)(q + r_1) = (q^2 + a_{m_1} q + a_{m_2})(q + a_0) \Big|_{q = -\frac{b_1}{b_0}}$$

$$(q + r_1)\Big|_{q = -\frac{b_1}{b_0}} = \frac{(q^2 + a_{m_1} q + a_{m_2})(q + a_0)}{q^2 + a_1 q + a_2}\Bigg|_{q = -\frac{b_1}{b_0}}$$

$$r_1 = \frac{(q^2 + a_m q + a_{m_2})(q + a_0)}{q + a_1 q + a_2} - q \Bigg|_{q = -\frac{b_1}{b_0}}$$

après calcul et simplification, on obtient.

$$\boxed{r_1 = \frac{a_0 a_{m_2} b_0^2 + (a_2 - a_{m_2} - a_0 a_{m_1}) b_0 b_1 + (a_0 + a_{m_1} - a_1) b_1^2}{b_1^2 - a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2}}$$

On développe l'équation de Bezout et on déduit s_0 et s_1 en fonction de r_1 : après développement on a :

$$q^3 + (a_1 + r_1 + b_0 s_0) q^2 + (a_2 + a_1 r_1 + (b_0 s_1 + b_1 s_0)) q$$
$$+ (a_2 r_1 + s_1 b_0) = q^3 + (a_{m1} + a_0) q^2 + (a_{m2} + a_{m1} a_0) q$$
$$+ (a_{m2} a_0)$$. en identifiant les termes d'ordre 2 et 0 :

$$\begin{cases} a_1 + r_1 + b_0 s_0 = a_{m1} + a_0 \\ a_2 r_1 + s_1 b_0 = a_{m2} a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_0 = \dfrac{a_{m1} + a_0 - a_1 - r_1}{b_0} \\ s_1 = \dfrac{a_{m2} a_0 - a_2 r_1}{b_0} \end{cases}$$

en remplaçant r_1, après calcul et simplification, on obtient

$$\boxed{s_0 = \frac{b_1 (a_0 a_{m1} - a_2 - a_{m1} a_1 + a_1^2 + a_{m2} - a_1 a_0)}{b_1^2 - a_1 b_0 b_1 + a_0 b_0^2} + \frac{b_0 (a_{m1} a_2 - a_1 a_2 - a_0 a_{m2} + a_0 a_2)}{b_1^2 - a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2}}$$

$$\boxed{s_1 = \frac{b_1 (a_1 a_2 - a_{m1} a_2 + a_0 a_{m2} - a_0 a_2)}{b_1^2 - a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2} + \frac{b_0 (a_2 a_{m2} - a_2^2 - a_0 a_{m2} a_1 + a_0 a_2 a_{m1})}{b_1^2 - a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2}}$$

A.N :

$$\boxed{\begin{aligned} R(q) &= \\ S(q) &= \end{aligned}}$$

III.A.1

7) On a $T(q) = \beta A_0(q) = \beta(q + a_0) =$

$$\boxed{T(q) = \beta q + \beta a_0}$$

Exercice 3.3:

1) Calcul de $G_m(z)$

On a $G_m(z) = \dfrac{B_m(z)}{A_m(z)}$

en continu:

$A_{m_c}(s) = s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2 \rightarrow \boxed{P_{1,2} = -1;}$

$\Rightarrow z_{1,2} = e^{T_s P_{1,2}} = e^{-1} \quad (T_s = 1s)$

$A_m(z) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2) z + z_1 z_2$

$= z^2 - 2 z_1 z + z_1^2$

$\boxed{A_m(z) = z^2 + a_{m_1} z + a_{m_2}}$ $\boxed{\begin{array}{l} a_{m_1} = 2 z_1 = -2 e^{-1} \\ a_{m_2} = z_1^2 = e^{-2} \end{array}}$

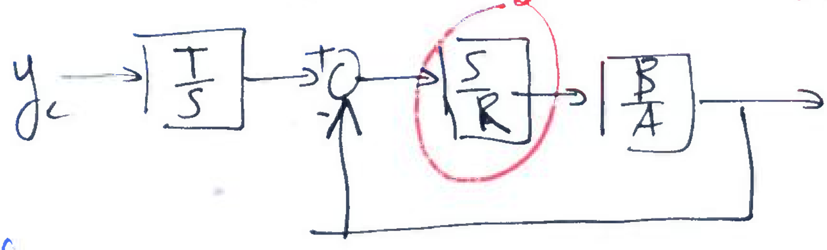
A.N.: $\boxed{A_m(z) = z^2 - 0,7358 z + 0,1353}$

On choisit $B_m(1)$ pour avoir un gain statique unitaire

Gain statique $G_m(1) = \dfrac{B_m(1)}{A_m(1)} = \dfrac{B_m(1)}{1 - 2e^{-1} + e^{-2}} = 1$

$\boxed{B_m(1) = 1 - 2e^{-1} + e^{-2} = 0,3996}$

Pour inclure l'action intégrale, le schéma bloc de la commande est
doit contenir une action intégrale



La fonction de transfert en BO. $\dfrac{S}{R} \cdot \dfrac{B}{A}$ doit inclure une intégration en continu, R doit contenir le facteur s.

Compte tenu de l'analogie $s \longleftrightarrow (q-1)$ (dérivation par anticipation)

le polynôme $R(q)$ doit contenir $(q-1)$ comme facteur

$$\Rightarrow \boxed{R(q) = R'(q)\,(q-1)}$$

q : opérateur avance temporel

5) Choix / condition modèle de référence :

Dans cet exemple, le système possède un zéro instable

$$z_1 = -1{,}2\ ;\ |z_1| > 1$$

Par conséquent : $B^- = B$; $B^+ = 1$; $R' = B^+R = R$

$$\Rightarrow AR' + B^-S = A_0A_m \iff$$

$$\boxed{AR + BS = A_0A_m}$$

et $B_m = B^-B_m' = \boxed{BB_m' = B_m}$

$$\Rightarrow \boxed{T = A_0 B_m'}$$

comme $\dfrac{B_m(1)}{A_m(1)} = 1$ et $B_m' = \dfrac{B_m}{B} = c^{te}$

$$\Rightarrow B_m' = \frac{B_m(1)}{B(1)} = \frac{A_m(1)}{B(1)} = \frac{\quad}{2{,}2} =$$

$$\boxed{B_m' = 0{,}1816}$$

III . 14

3) On a : $\deg R = 1$

on choisit $\deg S = \deg R = 2$

car $R = (q+\lambda_1)(q+1) \Rightarrow \deg R = 2$

$$\Rightarrow \boxed{S(q) = s_0 q^2 + s_1 q + s_2}$$

On écrit l'équation de Bezout :

$$AR + BS = A_0 A_m \underbrace{B^+}_{=1} \Rightarrow A(q-1)R' + BS = A_0 A_m$$

or $\deg A_0 = \deg A - \deg B^+ - 1 = 2$

$\deg A^0 = \deg A + 1 - 1 = 2$

$$\boxed{A_0(q) = (q^2 + a_{01} q + a_{02})}$$

On obtient alors

$$\boxed{(q^2 + a_1 q + a_2)(q-1)(q+\lambda_1) + (b_0 q + b_1)(s_0 q^2 + s_1 q + s_2) = (q^2 + a_{m1} q + a_{m2})(q^2 + a_{01} q + a_{02})}$$

soit sous forme matricielle, en développant et en égalant les coefficients des mêmes puissances de q :

$$\begin{cases} r_1 - 1 + a_1 + b_0 s_0 = a_{01} + a_{m1} \\ -r_1 + a_1(r_1 - 1) + a_2 + b_0 s_1 + b_1 s_0 = a_{02} + a_{m1} a_{01} + a_{m2} \\ -a_1 r_1 + a_2(r_1 - 1) + b_0 s_2 + b_1 s_1 = a_{m1} a_{02} + a_{m2} a_{01} \\ -a_2 r_1 + b_1 s_2 = a_{m2} a_{02} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_1 - 1 & b_1 & b_0 & 0 \\ a_2 - a_1 & 0 & b_1 & b_0 \\ -a_2 & 0 & 0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{01} + a_{m1} + 1 - a_1 \\ a_{02} + a_{m1} a_{01} + a_{m2} + a_1 - a_2 \\ a_{m1} a_{02} + a_{m2} a_{01} + a_2 \\ a_{n2} a_{02} \end{bmatrix}}$$