

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université des Frères Mentouri Constantine 1,  
Faculté des Sciences de la Technologie,  
Département d'Electronique

# Modélisation et commande des Robots de manipulation

## Modélisation géométrique Inverse



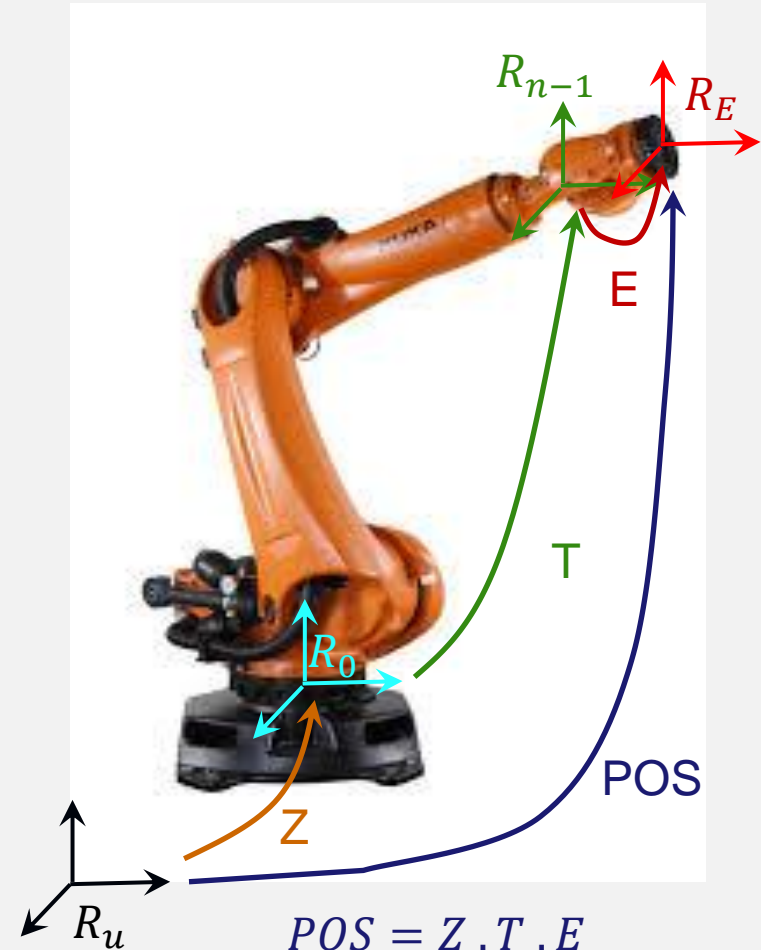
**Master 2 AII**  
**Automatique et Informatique Industrielle**



## 2. Modélisation géométrique

### 2.3 Modèle Géométrique Inverse MGI

- Le **MGD** exprime la position et l'orientation de l'extrémité de l'effecteur, par rapport au repère univers, en fonction des variables articulaires. Le calcul de ces variables articulaires qui permettent d'amener l'effecteur à une position donnée s'appelle le problème géométrique inverse MGI. Il représente les variables articulaires en fonction des variables cartésiennes.
- Comme le MGI est un ensemble d'équations trigonométriques, il possède, en général, une multiplicité de solutions. De plus la complexité de la résolution de ces équations dépend principalement de la géométrie du robot. Ce modèle permet de représenter toutes les configurations possibles pour atteindre une position donnée.

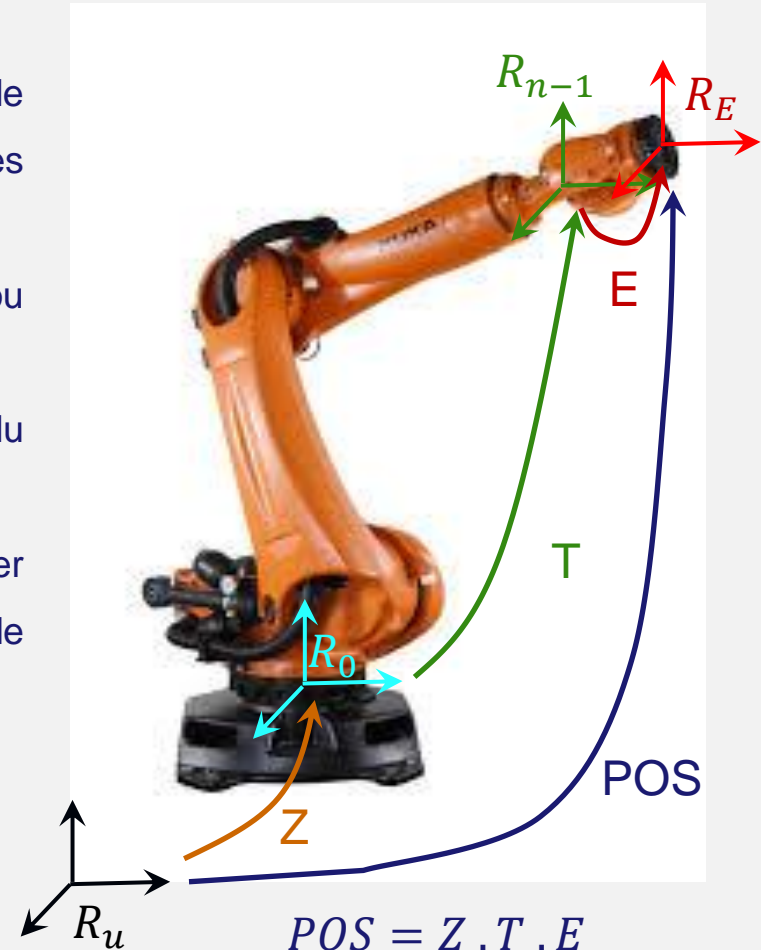




## 2. Modélisation géométrique

### 2.3 Modèle Géométrique Inverse MGI

- Lors de la résolution des équations on peut avoir:
  - Un nombre fini de solutions. Le nombre dépend de l'architecture du robot et de la plage de variation des variables articulaires (butées articulaires)
  - Une infinité de solution pour les robots redondant ou dans le cas d'une configuration singulière.
  - Aucune solution, si le point à atteindre est hors du domaine atteignable.
- On dit qu'un robot est **résolvable** si il est possible de calculer toutes les variables articulaires pour une position donnée de l'effecteur. Sinon on dit que le robot est **non résolvable**.
- Il existe plusieurs techniques pour le calcul du MGI
  - Méthode géométrique
  - Méthode analytique
  - Méthode numérique





## 2. Modélisation géométrique

### 2.3 Modèle Géométrique Inverse MGI

#### Principe

$$POS = Z.T.E$$

$Z$ : matrice de représentation de repère  $R_0$  attaché à la base du robot dans le repère univers  $R_u$ .

$T$ : matrice de représentation du repère  $R_{n-1}$  attaché à la dernière articulation dans le repère  $R_0$

$POS$ : La matrice de représentation de repère  $R_E$  attaché à l'effecteur dans le repère univers  $R_u$ .

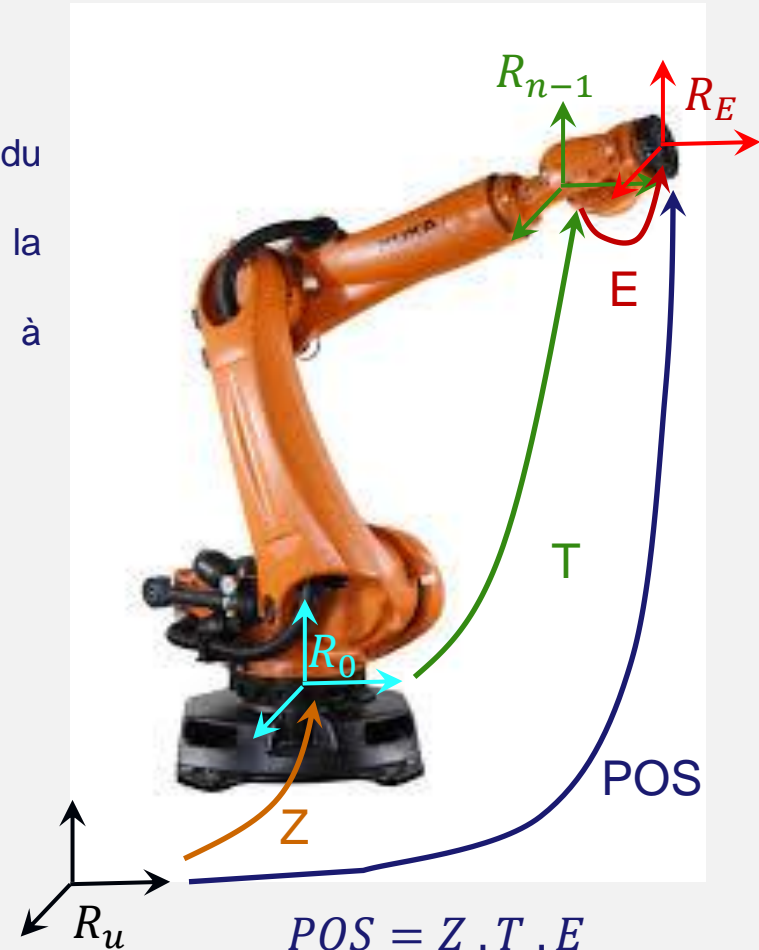
$$Z^{-1} . POS . E^{-1} = T$$

On pose :  $Z^{-1} . POS . E^{-1} = POS'$   
 $POS'$

Soit la matrice  $POS$  donnée par:

$$POS = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & P_x \\ n_y & s_y & a_y & P_y \\ n_z & s_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a donc, 12 équations avec  $n$  inconnus





## 2. Modélisation géométrique

### 2.3 Modèle Géométrique Inverse MGI

#### Principe

Afin d'avoir des équations trigonométriques plus simple il est recommandé de :

- Découpler les DDL si c'est possible ( cas du porteur et l'organe terminal)
- Utiliser la méthode de pré-multiplication (méthode de Paul). Par exemple pour un robot à 3 axes:

$$T = T_1^0 . T_2^1 . T_3^2$$

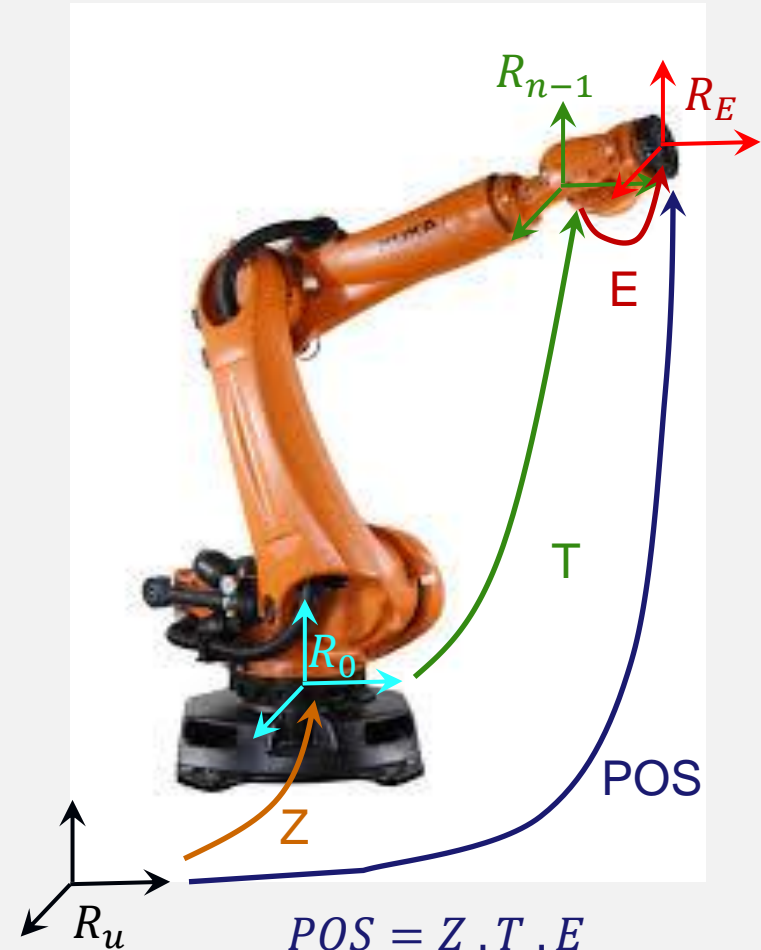
On pose :  $Z^{-1} . POS . E^{-1} = U_0$

Donc:  $U_0 = T_1^0 . T_2^1 . T_3^2$

$$T_1^{0^{-1}} . U_0 = . T_2^1 . T_3^2 \longrightarrow \text{Calculer } \theta_1$$

$$T_2^{1^{-1}} . U_1 = T_3^2 \longrightarrow \text{Calculer } \theta_2$$

$$\text{Avec } U_i = T_i^{i-1^{-1}} . U_{i-1}$$





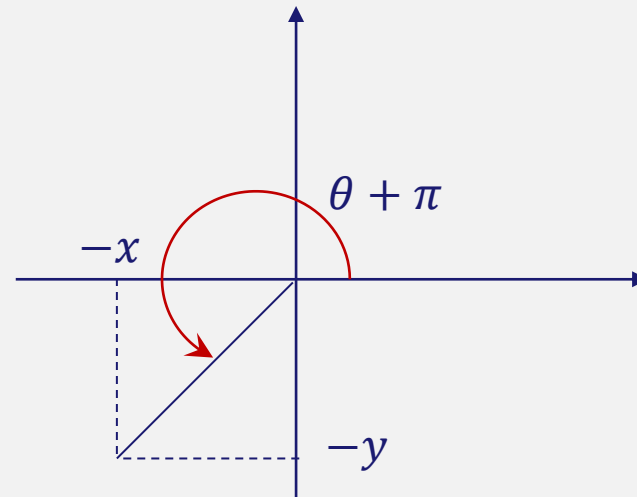
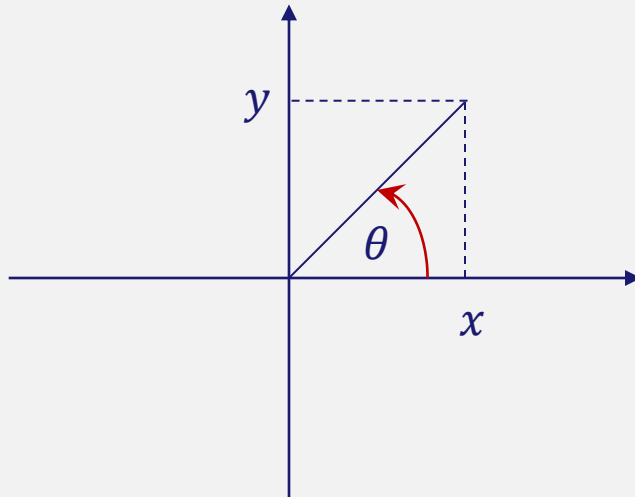
## 2. Modélisation géométrique

### 2.3 Modèle Géométrique Inverse MGI

#### Solutions des équations trigonométrique souvent rencontrées

Equation de Type 1:  $y \cdot \cos\theta - x \cdot \sin\theta = 0$

$$\begin{cases} y \cos\theta = x \sin\theta \\ -y \cos\theta = -x \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan(\theta) = \frac{y}{x} \\ \tan(\theta) = \frac{-y}{-x} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \theta = \text{Atan2}(y, x) \\ \theta = \text{Atan2}(-y, -x) \end{cases}}$$





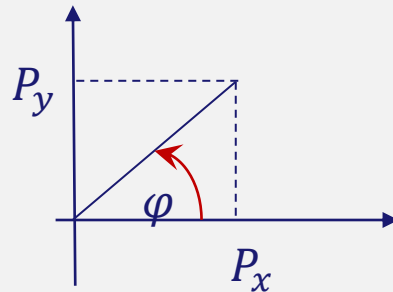
## 2. Modélisation géométrique

### 2.3 Modèle Géométrique Inverse MGI

#### Solutions des équations trigonométrique souvent rencontrées

Equation de Type 2:  $P_y \cos\theta - P_x \sin\theta = d$

Avec un changement de variable, on peut écrire



$$\begin{cases} P_x = r \cos\varphi \\ P_y = r \sin\varphi \end{cases}$$

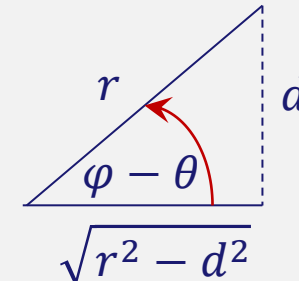
$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = \text{Atan2}(P_y, P_x) \\ r^2 = P_x^2 + P_y^2 \end{cases}$$

En remplaçant  $\varphi$  et  $r$  dans l'équation de départ on obtient:

$$\sin\varphi \cos\theta - \cos\varphi \sin\theta = \frac{d}{r}$$

$$\sin(\varphi - \theta) = \frac{d}{r}$$

$$\tan(\varphi - \theta) = \frac{d}{\pm\sqrt{r^2 - d^2}}$$



$$\theta = \varphi - \text{Atan2}(d, \pm\sqrt{r^2 - d^2})$$



## 2. Modélisation géométrique

### 2.3 Modèle Géométrique Inverse MGI

#### Solutions des équations trigonométrique souvent rencontrées

Equation de Type 3:  $P_x = l_1 C1 + l_2 C12$   
 $P_y = l_1 S1 + l_2 S12$

En mettant les deux équations au carré puis en fait la somme

$$P_x^2 + P_y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \underbrace{(C1 \cdot C12 + S1 \cdot S12)}_{\cos(\alpha - \beta)}$$

$$= l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 C2 \quad \Rightarrow \quad C2 = \frac{P_x^2 + P_y^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1 l_2}$$

Comme

$$C_2^2 + S_2^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \pm \sqrt{1 - C_2^2}$$

On obtient:

$$\theta_2 = \text{Atan2}(\pm \sqrt{1 - C_2^2}, C_2)$$





## 2. Modélisation géométrique

### 2.3 Modèle Géométrique Inverse MGI

#### Solutions des équations trigonométrique souvent rencontrées

Equation de Type 3:  $P_x = l_1 C1 + l_2 C12$   
 $P_y = l_1 S1 + l_2 S12$

Pour  $\theta_1$  on a:  $P_x = l_1 C1 + l_2 C12$

Avec:  $C12 = C1 C2 - S1 S2$

Donc:  $P_x = (l_1 + l_2 C2)C1 - (l_2 S2) S1$

$$P_x = l_1 C1 + l_2 (C1 C2 - S1 S2)$$

Cette équation est de type 2

Equation de Type 4:  $\sin\theta = a, \quad \cos\theta = b$

$$\theta = \text{Atan2}(a, b)$$



## 2. Modélisation géométrique

### 2.3 Modèle Géométrique Inverse MGI

#### Exemple 1: MGI du robot plan RR.

Le MGD du robot est donné par:

$$T = T_1^0 \cdot T_2^1 = \begin{bmatrix} C12 & -S12 & 0 & L_1 C1 + L_2 C12 \\ S12 & C12 & 0 & L_1 S1 + L_2 S12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le vecteur de position de l'extrémité de l'effecteur est le suivant :

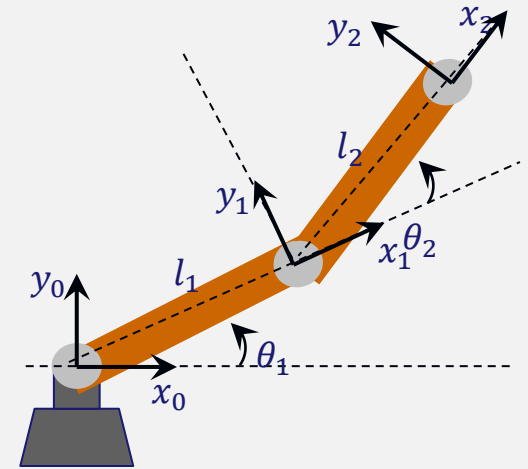
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 C1 + L_2 C12 \\ L_1 S1 + L_2 S12 \end{bmatrix}$$

Le calcul du MGI consiste à exprimer  $\theta_1$  et  $\theta_2$  en fonction de  $X$  et  $Y$ :

$$L_1 C1 + L_2 C12 = X$$

$$L_1 S1 + L_2 S12 = Y$$

Equation de type 3





## 2. Modélisation géométrique

### 2.3 Modèle Géométrique Inverse MGI

#### Exemple 1: MGI du robot plan RR (suite).

Elevez les deux équations au carré puis faites la somme, vous obtenez :

$$C2 = \frac{X^2 + Y^2 - (l_1^2 + l_2^2)}{2l_1l_2}$$

Pour calculer l'angle  $\theta_2$  en utilisant la fonction  $Atan2$  on utilise la propriété suivante:

$$[\tan(\frac{\theta_2}{2})]^2 = \frac{1 - \cos \theta_2}{1 + \cos \theta_2}$$

Donc:

$$\theta_2 = \pm 2Atan2 \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_2}{1 + \cos \theta_2}}$$

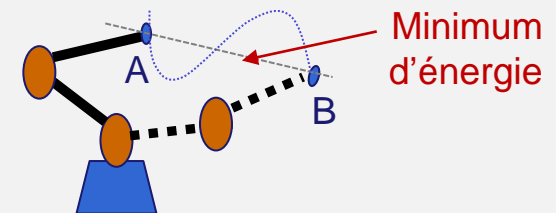
$$\theta_2 = \pm 2Atan2 \sqrt{\frac{2l_1l_2 + l_1^2 + l_2^2 - (X^2 + Y^2)}{2l_1l_2 - l_1^2 - l_2^2 + (X^2 + Y^2)}}$$

$$\theta_2 = \pm 2Atan2 \sqrt{\frac{(l_1 + l_2)^2 - (X^2 + Y^2)}{(X^2 + Y^2) - (l_1 - l_2)^2}}$$

#### Remarque

Le signe  $\pm$  dans l'expression de la solution indique l'existence de deux solutions (bras droit ou gauche, coude vers le haut et coude vers le bas). Le choix de la bonne solution doit prendre en considération:

- **Minimum d'énergie**: la solution qui permet de parcourir la distance la plus courte.
- **Butée Articulaire**: la solution qui est hors du domaine atteignable (articulaire ou cartésien) sera éliminée.



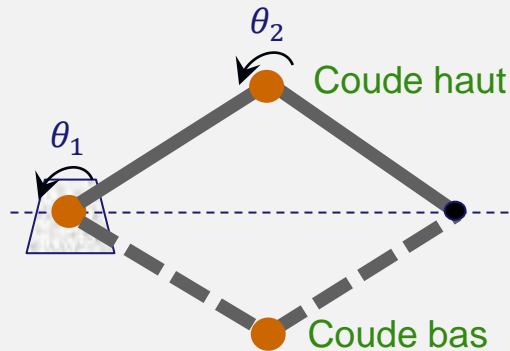


## 2. Modélisation géométrique

### 2.3 Modèle Géométrique Inverse MGI

#### Exemple 1: MGI du robot plan RR (suite).

Dans le cas du robot RR le signe  $\pm$  dans l'expression de  $\theta_2$  indique les deux configurations ; coude en haut et coude en bas



Calcul de  $\theta_1$

On a  $X = l_1 C_1 + l_2 C_{12}$   
 $C_{12} = C_1 C_2 - S_1 S_2$

Donc  $X = l_1 C_1 + l_2 C_1 C_2 - l_2 S_1 S_2$   
 Type 2  $\rightarrow X = (l_1 + l_2 C_2) C_1 - (l_2 S_2) S_1$

Avec  $X = d, \quad l_1 + l_2 C_2 = P_y, \quad l_2 S_2 = P_x$

Donc la solution est:

$$\theta_1 = \varphi - \text{Atan2}(d, \pm \sqrt{r^2 - d^2})$$

Avec  $\varphi = \text{Atan2}(P_y, P_x)$

Et  $r^2 = P_x^2 + P_y^2$

On obtient

$$\theta_1 = \text{Atan2}(l_1 + l_2 C_2, l_2 S_2) - \text{Atan2}(X, \pm \sqrt{(P_x^2 + P_y^2) - X^2})$$

$$\theta_1 = \text{Atan2}[(l_1 + l_2 C_2), (l_2 S_2)] - \text{Atan2}\left[\left(X, \pm \sqrt{((l_2 S_2)^2 + (l_1 + l_2 C_2)^2) - X^2}\right)\right]$$



## 2. Modélisation géométrique

### 2.3 Modèle Géométrique Inverse MGI

#### Exemple 2: Robot Adept (SCARA) RRP.

Soit le robot Adept de type SCARA représenté par la figure ci-contre:

Les matrices de transformation obtenues lors du calcul du MGD sont:

$$T = \begin{bmatrix} C12 & S12 & 0 & L_1 C1 + L_2 C12 \\ S12 & -C12 & 0 & L_1 S1 + L_2 S12 \\ 0 & 0 & -1 & 1075 - d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 175 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculer le MGI du ROBOT sachant que  $l_1 = 600\text{mm}$ ,  $l_2 = 550\text{mm}$ ,





## 2. Modélisation géométrique

### 2.3 Modèle Géométrique Inverse MGI

#### Exemple 2: MGI du Robot Adept (SCARA) RRP. (solution)

$$POS = Z.T.E$$

$$Z^{-1}.POS.E^{-1} = T$$

#### Remarque: Inverse d'une matrice

Soit A une matrice définie comme suit

$$A = \begin{bmatrix} [R] & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Avec } R = [\vec{n} \quad \vec{s} \quad \vec{a}]$$

L'inverse de cette matrice est donné par:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} [R]^T & \begin{bmatrix} -\vec{P}^T \cdot \vec{n} \\ -\vec{P}^T \cdot \vec{s} \\ -\vec{P}^T \cdot \vec{a} \end{bmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Z^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -500 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 175 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow E^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -175 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## 2. Modélisation géométrique

### 2.3 Modèle Géométrique Inverse MGI

#### Exemple 2: MGI du Robot Adept (SCARA) RRP. (solution)

$$T = Z^{-1} \cdot POS \cdot E^{-1}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -500 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -175 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -500 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & -n_x & a_x & -175 a_x + p_x \\ s_y & -n_y & a_y & -175 a_y + p_y \\ s_z & -n_z & a_z & -175 a_z + p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} s_y & -n_y & a_y & -175 a_y + p_y \\ s_z & -n_z & a_z & -175 a_z + p_z \\ s_x & -n_x & a_x & -175 a_x + p_x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## 2. Modélisation géométrique

### 2.3 Modèle Géométrique Inverse MGI

#### Exemple 2: MGI du Robot Adept (SCARA) RRP. (solution)

$$T = \begin{bmatrix} s_y & -n_y & a_y & -175 a_y + p_y \\ s_z & -n_z & a_z & -175 a_z + p_z \\ s_x & -n_x & a_x & -175 a_x + p_x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a aussi lors du calcul du MGD

$$T = \begin{bmatrix} C12 & S12 & 0 & L_1 C1 + L_2 C12 \\ S12 & -C12 & 0 & L_1 S1 + L_2 S12 \\ 0 & 0 & -1 & 1075 - d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par correspondance de termes

On obtient 12 équations pour 3 inconnus

- |                |                  |               |   |
|----------------|------------------|---------------|---|
| 1. $C12 = s_y$ | 4. $S12 = -n_y$  | 7. $a_y = 0$  | 10. $600 C1 + 550 C12 = -175 a_y + p_y$       |
| 2. $S12 = s_z$ | 5. $-C12 = -n_z$ | 8. $a_z = 0$  | 11. $600 S1 + 550 S12 = -175 a_z + p_z - 500$ |
| 3. $s_x = 0$   | 6. $-n_x = 0$    | 9. $a_x = -1$ | 12. $1075 - d = -175 a_x + p_x$               |





## 2. Modélisation géométrique

### 2.3 Modèle Géométrique Inverse MGI

#### Exemple 2: MGI du Robot Adept (SCARA) RRP. (solution)

A partir des ces équation

- |                |                  |               |   |
|----------------|------------------|---------------|---|
| 1. $C12 = s_y$ | 4. $S12 = -n_y$  | 7. $a_y = 0$  | 10. $600 C1 + 550 C12 = -175 a_y + p_y$       |
| 2. $S12 = s_z$ | 5. $-C12 = -n_z$ | 8. $a_z = 0$  | 11. $600 S1 + 550 S12 = -175 a_z + p_z - 500$ |
| 3. $s_x = 0$   | 6. $-n_x = 0$    | 9. $a_x = -1$ | 12. $1075 - d = -175 a_x + p_x$               |

On peut avoir les équations simplifiées suivantes:

1.  $C12 = s_y$
2.  $S12 = s_z$
3.  $600 C1 + 550 C12 = -175 a_y + p_y = p_y$
4.  $600 S1 + 550 S12 = -175 a_z + p_z - 500 = p_z - 500$
5.  $1075 - d = 175 + p_x$

#### Calcul de $\theta_1$

De 3 et 4 on aura:  $C1 = \frac{1}{600}(p_y - 550 s_y)$  et  $S1 = \frac{1}{600}(p_z - 500 - 550 s_z)$

$$\theta_1 = \text{Atan2}[(p_z - 500 - 550 s_z), (p_y - 550 s_y)]$$



## 2. Modélisation géométrique

### 2.3 Modèle Géométrique Inverse MGI

#### Exemple 2: MGI du Robot Adept (SCARA) RRP. (solution)

##### Calcul de $\theta_2$

$$\tan 12 = \frac{S_{12}}{C_{12}} = \frac{s_z}{s_y} \quad \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = \text{Atan2}(s_z, s_y)$$

Donc:

$$\theta_2 = -\theta_1 + \text{Atan2}(s_z, s_y)$$

##### Calcul de $d$

$$1075 - d = 175 + p_x \quad \Rightarrow \quad d = 900 + p_x$$

Le **MGI** du robot est décrit donc par le système d'équation suivant:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Atan2}[(p_z - 500 - 550 s_z), (p_y - 550 s_y)] \\ -\theta_1 + \text{Atan2}(s_z, s_y) \\ 900 + p_x \end{bmatrix}$$

**NB:** Comme dans le cas du MGD le MGI doit être aussi vérifié sur des configurations particulières