République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Frères Mentouri Constantine 1,
Faculté des Sciences de la Technologie,
Département d'Electronique

# Modélisation et commande des Robots de manipulation

## Modélisation cinématique
## Jacobien

**Master 2 AII**
**Automatique et Informatique Industrielle**

# 3. Modélisation cinématique

## 3.1 Introduction

- Le modèle cinématique représente la relation entre les vitesses des articulations et la vitesse linéaire et angulaire de l'extrémité de l'effecteur.

- La cinématique directe s'articule sur le calcul de la vitesse linéaire $\vec{V}_G^R$ et angulaire $\vec{W}_G^R$ de l'extrémité de l'effecteur connaissant les valeurs angulaires ou prismatiques des articulations $(q)$ et leurs vitesses $(\dot{q})$

- La cinématique inverse se base sur le calcul des valeurs angulaires ou prismatiques des articulations $(q)$ et leurs vitesses $(\dot{q})$ , connaissant les vitesses linéaires $\vec{V}_G^R$ et angulaires $\vec{W}_G^R$ de l'extrémité de l'effecteur.

# 3. Modélisation cinématique

## 3.2 Analyse directe en vitesse

- L'analyse directe en vitesse consiste à chercher une vitesse linéaire généralisée de la forme:

$$\vec{V}_G^R = h(\vec{q}, \dot{\vec{q}}\,)$$

- La vitesse généralisée $\vec{V}_G^R$ comporte deux composantes: composante linéaire $v$ et angulaire $w$.
  Le torseur cinématique du $R_G$ (repère attaché à l'effecteur) par rapport à $R_R$( repère univers) est donné par:

$$\hat{C}_{R_G} = J\,\dot{q}$$

Avec :

$J$ : la matrice jacobienne

$\dot{q}$: le vecteur des vitesses articulaires

# 3. Modélisation cinématique

## 3.2 Analyse directe en vitesse

L'expression générale est donnée par:

$$\begin{bmatrix} V_G^R \\ W_G^R \end{bmatrix} = \mathrm{J}\,\dot{q}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix}}_{6\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_{L1} & J_{L2} & \cdots & J_{Ln} \\ J_{A1} & J_{A2} & \cdots & J_{An} \end{bmatrix}}_{6\times n} . \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}}_{n\times 6}$$

Vitesses cartésiennes généralisées

Jacobien

Vitesses articulaires



## 3.2 Analyse directe en vitesse

On peut la mettre sous la forme:

$$\begin{bmatrix} V_G^R \\ W_G^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{L1}\,\dot{q}_1 + J_{L2}\,\dot{q}_2 + \cdots + J_{Li}\,\dot{q}_i + \cdots + J_{Ln}\,\dot{q}_n \\ J_{A1}\,\dot{q}_1 + J_{A2}\,\dot{q}_2 + \cdots + J_{Ai}\,\dot{q}_i + \cdots + J_{An}\,\dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Avec:

$J_{Li}\,\dot{q}_i$ : la contribution de l’articulation « i » à la vitesse linéaire $V_G^R$ de l’effecteur.

$J_{Ai}\,\dot{q}_i$ : la contribution de l’articulation « i » à la vitesse angulaire $W_G^R$ de l’effecteur.

Le calcul du modèle cinématique directe nécessite le calcul des éléments de la matrice jacobienne ($J_{Li}$ et $J_{Ai}$)

# 3. Modélisation cinématique

## 3.2 Analyse directe en vitesse

### Méthode de calcul

- **Pour une articulation prismatique**

  - *La contribution dans la vitesse linéaire de l'effecteur*

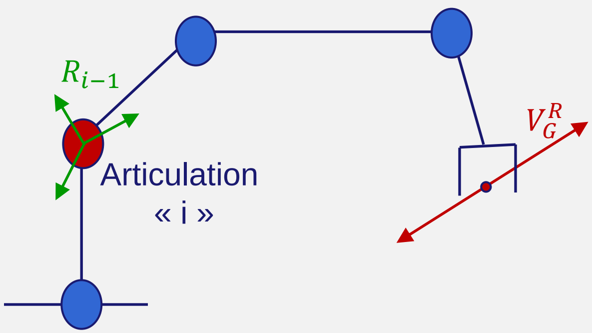
    En général on a

    $$V_{G_i}^{R} = J_{Li}\,\dot{q}_i,$$

    De la figure on peut écrire:

    $$V_{G_i}^{R} = Z_{i-1}\,\dot{d}_i$$

    Donc $\boxed{J_{Li} = Z_{i-1}}$




  - *la contribution dans la vitesse angulaire de l'effecteur*

$$J_{Ai}\,\dot{q}_i = J_{Li}\dot{d}_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{Ai} = 0}$$



## 3.2 Analyse directe en vitesse

### Méthode de calcul

- **Pour une articulation rotoïde**

*- La contribution dans la vitesse linéaire de l'effecteur*

la relation entre la vitesse linéaire et la vitesse angulaire est donnée par:

$$V_G^R = w.r$$

avec $r$ le rayon et $w$ la vitesse angulaire.

De la figure on a

$$w = \dot{\theta}_i \,.Z_{i-1} \quad \text{et} \quad r = P_{i-1,G}$$

Donc:

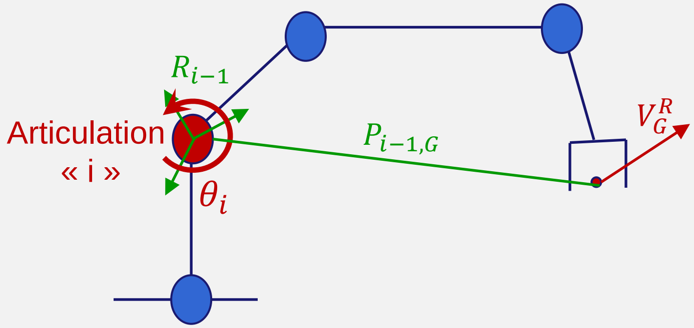
$$V_G^R = \dot{\theta}_i \,.Z_{i-1}.\, P_{i-1,G}$$

de la forme générale on a:

$$V_G^R = J_{Li}.\dot{\theta}_i$$

Produit vectoriel

Donc $\boxed{J_{Li} = Z_{i-1} \times P_{i-1,G}}$




*- la contribution dans la vitesse angulaire de l'effecteur*

Comme l'articulation est rotoïde, nous avons une rotation pure autour de l'axe $Z_{i-1}$

$$J_{Ai}.\dot{q}_i = J_{Ai}.\dot{\theta}_i \Longrightarrow \boxed{J_{Ai} = Z_{i-1}}$$



## 3.2 Analyse directe en vitesse

### Méthode de calcul

- En résumé:

  - *Articulation prismatique*

$$\begin{bmatrix} J_{Li} \\ J_{Ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{i-1}^{R} \\ 0 \end{bmatrix}$$

  - *Articulation rotoïde*

$$\begin{bmatrix} J_{Li} \\ J_{Ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{i-1}^{R} \times P_{i-1,G}^{R} \\ Z_{i-1}^{R} \end{bmatrix}$$

**N.B:** afin de compléter la matrice Jacobienne il faut calculer les éléments $(Z_{i-1}^{R}, P_{i-1,G}^{R})$ pour i allant de 1 à n. sachant que n est le nombre des articulations.

- Calcul du $Z_{i-1}^{R}$: ce sont les cordonnées de l'axe $Z$ du repère $R_{i-1}$ dans le repère univers $R$.
  Donc, $Z_{i-1}^{R}$ est la 3ème colonne de la matrice $Z.A_1.A_2 \ldots..A_{i-1}$

$$\begin{bmatrix} Z_{i-1}^{R} \\ 0 \end{bmatrix} = Z.A_1\,.A_2\,.\ldots.A_{i-1}\,.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{i-1}^{R} \\ 0 \end{bmatrix} = Z.A_{i-1}^{0}.\begin{bmatrix} \vec{k} \\ 0 \end{bmatrix}$$

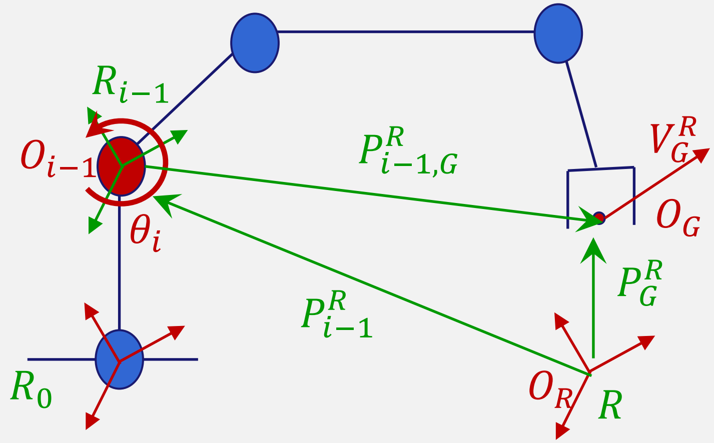


## 3.2 Analyse directe en vitesse

### Méthode de calcul

- Calcul du $P^{R}_{i-1,G}$:

$$\overrightarrow{P^{R}_{i-1,G}} = \overrightarrow{P^{R}_{G}} - \overrightarrow{P^{R}_{i-1,}}$$




$P^{R}_{G}$: la 4ème colonne de la matrice POS (Z*T*E)

$P^{R}_{i-1}$: la 4ème colonne de la matrice $Z * A^{0}_{i-1}$

Donc:

$$P^{R}_{i-1,G} = Z.T.E.\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} - Z.A^{0}_{i-1}.\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

# 3. Modélisation cinématique

## 3.2 Analyse directe en vitesse

### Méthode de calcul

***Remarque:*** il est possible de calculer la composante des vitesses linéaires ($J_{Li}$) en dérivant le vecteur de position de la matrice POS. Ceci est valable que ce soit l'articulation est rotoïde ou prismatique.

$$J_{Li} = \frac{\partial P}{\partial q_i}$$

$$\begin{bmatrix} J_{Li\ X} \\ J_{Li\ Y} \\ J_{Li\ Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {\partial P_X}/{\partial q_i} \\ {\partial P_Y}/{\partial q_i} \\ {\partial P_Z}/{\partial q_i} \end{bmatrix}$$

# 3. Modélisation cinématique

## 3.2 Analyse directe en vitesse

### Méthode de calcul

Résumé:

- Axe prismatique:

$$\begin{bmatrix} J_{Li} \\ J_{Ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^{R}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} Z^{R}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} = Z.A_1.A_2.\ldots.A_{I-1}.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Axe rotoïde:

$$\begin{bmatrix} J_{Li} \\ J_{Ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^{R}_{i-1} \times P^{R}_{i-1,G} \\ Z^{R}_{i-1} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad P^{R}_{i-1,G} = P^{R}_{G} - P^{R}_{i-1}$$

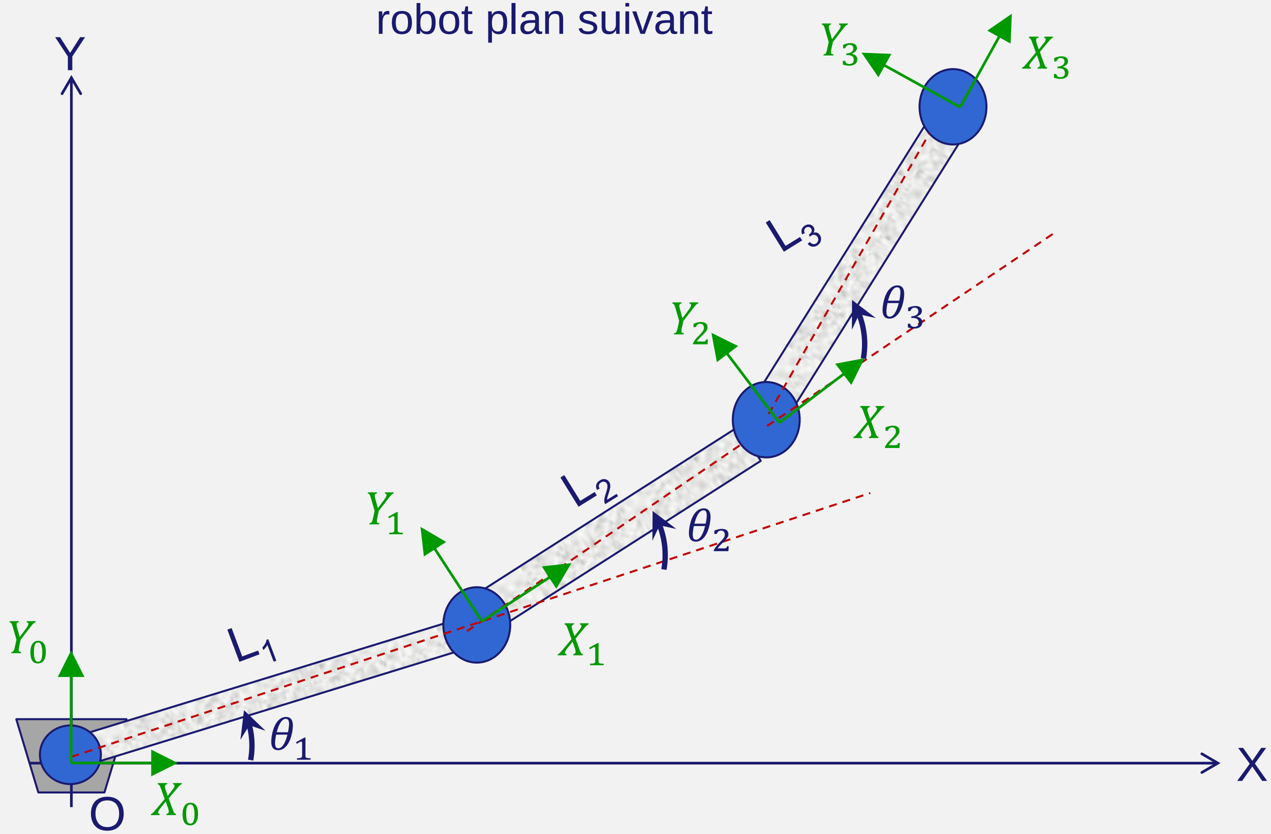
$$= Z.T.E.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - Z.A^{0}_{i-1}.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Axe rotoïde ou prismatique: $J_{Li} = {}^{\partial P}/_{\partial q_i}$



## 3.2 Analyse directe en vitesse

Exemple d'application: Calculer le modèle cinématique (Jacobien) du robot plan suivant



# 3. Modélisation cinématique

## Exemple d'application: modèle cinématique du robot plan (Solution)

Les matrices de transformation des repères

$$A_1 = Rot(Z_0, \theta_1).Trans(X_0, l_1) = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & l_1C1 \\ S1 & C1 & 0 & l_1S1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = Rot(Z_1, \theta_2).Trans(X_1, l_2) = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & l_2C2 \\ S2 & C2 & 0 & l_2S2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = Rot(Z_2, \theta_3).Trans(X_2, l_3) = \begin{bmatrix} C3 & -S3 & 0 & l_3C3 \\ S3 & C3 & 0 & l_3S3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## Exemple d'application: modèle cinématique du robot plan (Solution)

Les matrices de transformation des repères

$$A_1.A_2 = \begin{bmatrix} C12 & -S12 & 0 & l_1C1 + l_2C12 \\ S12 & C12 & 0 & l_1S1 + l_2S12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1.A_2.A_3 = \begin{bmatrix} C123 & -S123 & 0 & l_1C1 + l_2C12 + l_3C123 \\ S123 & C123 & 0 & l_1S1 + l_2S12 + l_3S123 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## Exemple d'application: modèle cinématique du robot plan (Solution)

**Calcul du Jacobien**

$$V_G^R = \begin{bmatrix} V_{L,\theta_1}^R & V_{L,\theta_2}^R & V_{L,\theta_3}^R \\ \omega_{\theta_1}^R & \omega_{\theta_2}^R & \omega_{\theta_3}^R \end{bmatrix}$$

La contribution de l'articulation $\theta_1$ dans la vitesse linéaire et angulaire de l'extrémité de l'effecteur.

Donc le Jacobien est *:*

$$J = \begin{bmatrix} J_L \\ J_\omega \end{bmatrix}$$

Articulations rotoïdes

$$= \begin{bmatrix} Z_0^0 \times P_{0,G}^0 & Z_1^0 \times P_{1,G}^0 & Z_2^0 \times P_{2,G}^0 \\ Z_0^0 & Z_1^0 & Z_2^0 \end{bmatrix}$$



## Exemple d'application: modèle cinématique du robot plan (Solution)

**Calcul du Jacobien**

$$J = \begin{bmatrix} Z_0^0 \times P_{0,G}^0 & Z_1^0 \times P_{1,G}^0 & Z_2^0 \times P_{2,G}^0 \\ Z_0^0 & Z_1^0 & Z_2^0 \end{bmatrix}$$

- Calcul des $J_{Ai} = Z_{i-1}^0$

$Z_0^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = J_{A1}$

$Z_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = J_{A2}$, 3ème colonne de la matrice $A_1$ $(passage\ de\ R_0$ à $R_1)$

$Z_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = J_{A3}$, 3ème colonne de la matrice $A_1 . A_2$ $(passage\ de\ R_0$ à $R_2)$

$Z_3^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,3ème colonne de la matrice $A_1 . A_2 . A_3$ $(passage\ de\ R_0$ à $R_3)$

# 3. Modélisation cinématique

## Exemple d'application: modèle cinématique du robot plan (Solution)

### Calcul du Jacobien

$$J = \begin{bmatrix} Z_0^0 \times P_{0,G}^0 & Z_1^0 \times P_{1,G}^0 & Z_2^0 \times P_{2,G}^0 \\ Z_0^0 & Z_1^0 & Z_2^0 \end{bmatrix}$$

- Calcul des $P_{i-1,G}^0 = P_G^0 - P_{i-1}^0$

$P_{i-1}^0$

$$P_0^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1^0 = \begin{bmatrix} l_1 C1 \\ l_1 S1 \\ 0 \end{bmatrix}$$, 4ème colonne de $A_1$ $(cordonnés\ de\ O_1\ dans\ R_0)$

$$P_2^0 = \begin{bmatrix} l_1 C1 + l_2 C12 \\ l_1 S1 + l_2 S12 \\ 0 \end{bmatrix}$$, 4ème colonne de $A_1 \,.\, A_2$ $(cordonnés\ de\ O_2\ dans\ R_0)$

$$P_3^0 = \begin{bmatrix} l_1 C1 + l_2 C12 + l_3\ C123 \\ l_1 S1 + l_2 S12 + l_3\ S123 \\ 0 \end{bmatrix}$$, 4ème colonne de $A_1 \,.\, A_2 \,.\, A_3$ $(cordonnés\ de\ O_3\ dans\ R_0)$

$P_G^0 = P_3^0$ les cordonnées de l'extrémité de l'effecteur dans le repère $R_0$. 4ème colonne de POS



## Exemple d'application: modèle cinématique du robot plan (Solution)

### Calcul du Jacobien

$$J = \begin{bmatrix} Z_0^0 \times P_{0,G}^0 & Z_1^0 \times P_{1,G}^0 & Z_2^0 \times P_{2,G}^0 \\ Z_0^0 & Z_1^0 & Z_2^0 \end{bmatrix}$$

- Calcul des $P_{i-1,G}^0 = P_G^0 - P_{i-1}^0$

$$P_{i-1}^0 \left\{ \begin{aligned} P_0^0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ P_1^0 &= \begin{bmatrix} l_1 C1 \\ l_1 S1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ P_2^0 &= \begin{bmatrix} l_1 C1 + l_2 C12 \\ l_1 S1 + l_2 S12 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ P_3^0 &= \begin{bmatrix} l_1 C1 + l_2 C12 + l_3\ C123 \\ l_1 S1 + l_2 S12 + l_3\ S123 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} P_{0,G}^0 &= P_3^0 - P_0^0 = \begin{bmatrix} l_1 C1 + l_2 C12 + l_3\ C123 \\ l_1 S1 + l_2 S12 + l_3\ S123 \\ 0 \end{bmatrix} \\ P_{1,G}^0 &= P_3^0 - P_1^0 = \begin{bmatrix} l_2 C12 + l_3\ C123 \\ l_2 S12 + l_3\ S123 \\ 0 \end{bmatrix} \\ P_{2,G}^0 &= P_3^0 - P_2^0 = \begin{bmatrix} l_3 C123 \\ l_3 S123 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

$$P_G^0 = P_3^0$$



## Exemple d'application: modèle cinématique du robot plan (Solution)

### Calcul du Jacobien

$$J = \begin{bmatrix} Z_0^0 \times P_{0,G}^0 & Z_1^0 \times P_{1,G}^0 & Z_2^0 \times P_{2,G}^0 \\ Z_0^0 & Z_1^0 & Z_2^0 \end{bmatrix}$$

- Calcul des $J_{Li}$ à partir de :

$$P_{i-1,G}^0 = P_G^0 - P_{i-1}^0$$

$$J_{L1} = Z_0^0 \times P_{0,G}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 C1 + l_2 C12 + l_3\ C123 \\ l_1 S1 + l_2 S12 + l_3\ S123 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -l_1 S1 - l_2 S12 - l_3\ S123 \\ l_1 C1 + l_2 C12 + l_3\ C123 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{L2} = Z_1^0 \times P_{1,G}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 C12 + l_3\ C123 \\ l_2 S12 + l_3\ S123 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_2 S12 - l_3\ S123 \\ l_2 C12 + l_3\ C123 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{L3} = Z_2^0 \times P_{2,G}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3 C123 \\ l_3 S123 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ l_3 S123 \\ l_3 C123 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Rappel produit vectoriel**

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad v' = \begin{bmatrix} \acute{x} \\ \acute{y} \\ \acute{z} \end{bmatrix}$$

$$v \times v' = \begin{bmatrix} y\acute{z} - \acute{y}z \\ \acute{x}z - x\acute{z} \\ x\acute{y} - \acute{x}y \end{bmatrix}$$



## Exemple d'application: modèle cinématique du robot plan (Solution)

### Calcul du Jacobien

$$\mathrm{J} = \begin{bmatrix} Z_0^0 \times P_{0,G}^0 & Z_1^0 \times P_{1,G}^0 & Z_2^0 \times P_{2,G}^0 \\ Z_0^0 & Z_1^0 & Z_2^0 \end{bmatrix}$$

Le Jacobien obtenu est le suivant.

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 S1 - l_2 S12 - l_3\ S123 & l_2 S12 - l_3\ S123 & -\ l_3 S123 \\ l_1 C1 + l_2 C12 + l_3\ C123 & l_2 C12 + l_3\ C123 & l_3 C123 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Comme le robot se déplace seulement dans le plan XY, de la forme du Jacobien on remarque que la vitesse linéaire selon l'axe z est nulle.
Comme l'axe de rotation des articulations est l'axe Z on constate du Jacobien que les vitesse angulaire selon les axes X et Y sont nulles.



## Exemple d'application: modèle cinématique du robot plan (Solution)

**Calcul du Jacobien**

- Calcul des $J_{Li}$ avec la méthode des dérivées (dérivation du vecteur de position de la matrice POS):

$$\boxed{J = \begin{bmatrix} Z_0^0 \times P_{0,G}^0 & Z_1^0 \times P_{1,G}^0 & Z_2^0 \times P_{2,G}^0 \\ Z_0^0 & Z_1^0 & Z_2^0 \end{bmatrix}}$$

De la matrice POS, le vecteur de position P est le suivant:

$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 C1 + l_2 C12 + l_3\ C123 \\ l_1 S1 + l_2 S12 + l_3\ S123 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La forme du Jacobien linéaire est donnée par:

$$J_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial P_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial P_z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial P_z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}$$



## Exemple d’application: modèle cinématique du robot plan (Solution)

### Calcul du Jacobien

- Calcul des $J_{Li}$ avec la méthode des dérivées (dérivation du vecteur de position de la matrice POS):

$$\mathrm{J} = \begin{bmatrix} Z_0^0 \times P_{0,G}^0 & Z_1^0 \times P_{1,G}^0 & Z_2^0 \times P_{2,G}^0 \\ Z_0^0 & Z_1^0 & Z_2^0 \end{bmatrix}$$

Donc:

$$\frac{\partial P_x}{\partial \theta_1} = -l_1 S1 - l_2 S12 - l_3\, S123 \qquad \frac{\partial P_y}{\partial \theta_1} = l_1 C1 + C12 + l_3\, C123$$

$$\frac{\partial P_x}{\partial \theta_2} = -l_2 S12 - l_3\, S123 \qquad \frac{\partial P_y}{\partial \theta_2} = l_2 C12 + l_3\, C123$$

$$\frac{\partial P_x}{\partial \theta_3} = -\, l_3 S123 \qquad \frac{\partial P_y}{\partial \theta_3} = \ l_3 C123$$

$$\frac{\partial P_z}{\partial \theta_1} = \frac{\partial P_z}{\partial \theta_2} = \frac{\partial P_z}{\partial \theta_3} = 0$$



## Exemple d'application: modèle cinématique du robot plan (Solution)

### Calcul du Jacobien

- Calcul des $J_{Li}$ avec la méthode des dérivées (dérivation du vecteur de position de la matrice POS):

$$J = \begin{bmatrix} Z_0^0 \times P_{0,G}^0 & Z_1^0 \times P_{1,G}^0 & Z_2^0 \times P_{2,G}^0 \\ Z_0^0 & Z_1^0 & Z_2^0 \end{bmatrix}$$

La matrice Jacobéenne devient:

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 S1 - l_2 S12 - l_3\, S123 & l_2 S12 - l_3\, S123 & -\, l_3 S123 \\ l_1 C1 + l_2 C12 + l_3\, C123 & l_2 C12 + l_3\, C123 & l_3 C123 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

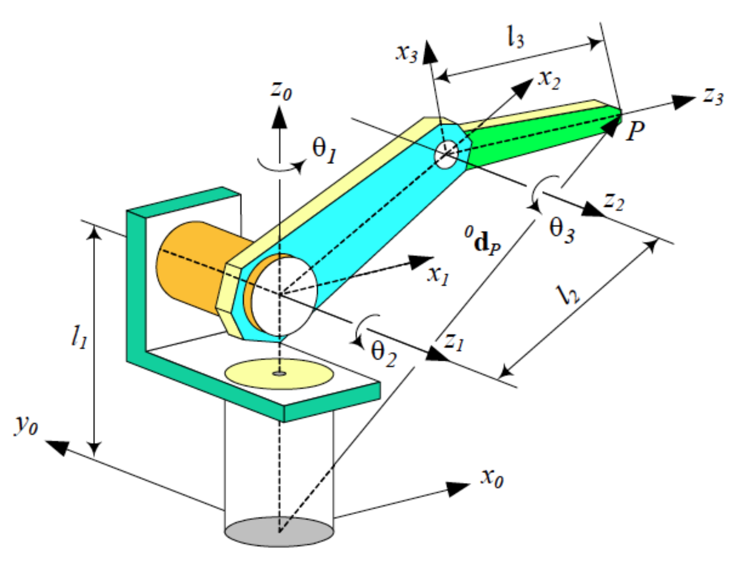
NB. Le jacobien est identique à celui calculé avec la méthode du produit vectoriel.



## 3.2 Analyse directe en vitesse

**Exerciece:** Soit le robot manipulateur suivant dont les matrices transformation entre les différents repères sont données par:

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} C1 & 0 & S1 & 0 \\ S1 & 0 & -C1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_1^2 = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & l_2C2 \\ S2 & C2 & 0 & l_2S2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2^3 = \begin{bmatrix} C3 & 0 & S3 & 0 \\ S3 & 0 & -C3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$




- Déterminer les positions du point $P(P_x, P_y, P_z)$ dans le repère $R_0$ en fonction des variables articulaires $\theta_1 \theta_2$ *et* $\theta_3$.
- Déterminer le Jacobien J du manipulateur et en déduire le modèle cinématique

# 3. Modélisation cinématique

## 3.3 Modèle Cinématique Inverse

- Le modèle cinématique inverse consiste à rechercher le vecteur des vitesses articulaires $\dot{q}$ correspondant à la vitesse de l'extrémité de l'effecteur $\dot{X}$.

$$\dot{X} = J\,\dot{q} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{q} = J^{-1}\,\dot{X}$$

- Si $J$ n'est pas carrée, pour le calcul de $J^{-1}$ on utilise la pseudo inverse de $J$ comme suit:

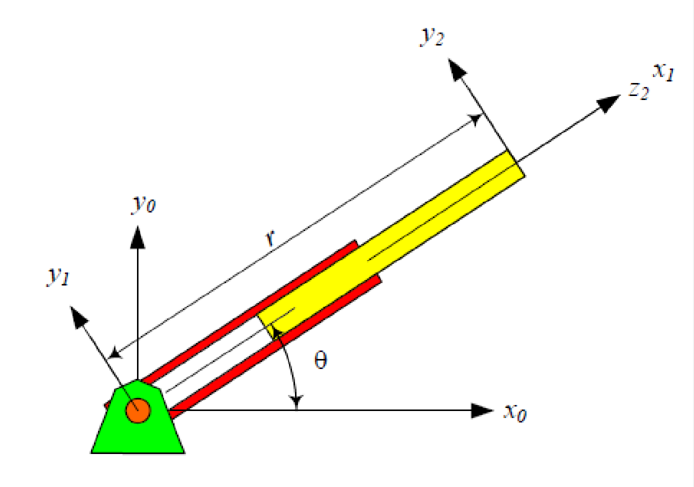
$$J^{-1} = J^T [J\,J^T]^{-1}$$

# 3. Modélisation cinématique

## 3.3 Modèle Cinématique Inverse

Exemple: Soit le robot polaire suivant:

$$T_0^2 = Rot(\theta, z).Trans(r, x)$$
$$= \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & r\, c\theta \\ S\theta & C\theta & 0 & r\, S\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$




La position de l'extrémité du robot est donnée par:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix}$$

D'où la vitesse est:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r}\cos\theta - r\,\dot{\theta} sin\theta \\ \dot{r}\sin\theta + r\,\dot{\theta}\, cos\theta \end{bmatrix}$$



## 3.3 Modèle Cinématique Inverse

### Exemple: Robot polaire

la vitesse peut être représenter sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{Y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -r\,\sin\theta\\ \sin\theta & r\,\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{r}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}$$

La relation entre les vitesses linéaires de l'extrémité de l'effecteur et les vitesses articulaire est représentée par:

$$\begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{Y}\end{bmatrix} = J_L\begin{bmatrix}\dot{r}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} \Rightarrow\ J_L = \begin{bmatrix}\cos\theta & -r\,\sin\theta\\ \sin\theta & r\,\cos\theta\end{bmatrix}$$

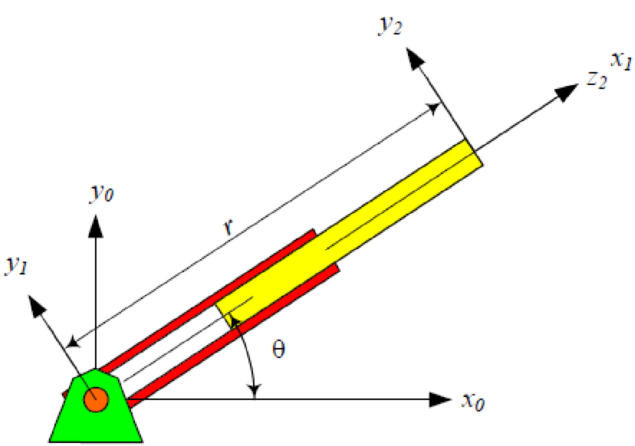
Avec $J_L$: Jacobian linéaire.

Comme le robot possède une seule articulation rotoïde:

$\omega = J_A\dot{\theta} \qquad \Rightarrow J_A = 1$

Donc:

$$\begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{Y}\\ \omega\end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\,\sin\theta\\ \sin\theta & r\,\cos\theta\\ 0 & 1\end{bmatrix}}^{J}\begin{bmatrix}\dot{r}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}$$





## 3.3 Modèle Cinématique Inverse

Pour déterminer la cinématique inverse on doit calculer l'inverse de la matrice jacobienne. Comme le robot opère seulement dans le plan XY on s'intéresse seulement au jacobien linéaire $J_L$.

$$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)}(com\,J)^{\,T}$$

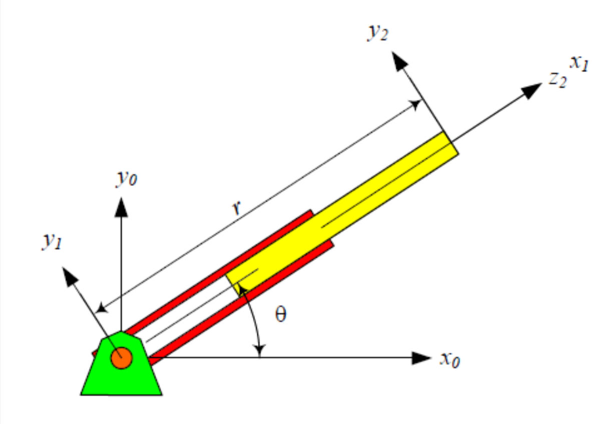
Sachant que  la comatrice d'une matrice A est calculée comme suit:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow com(A) = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Donc:

$$J^{-1} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} r\,cos\theta & r\,sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} r\,cos\theta & r\,sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix}}$$





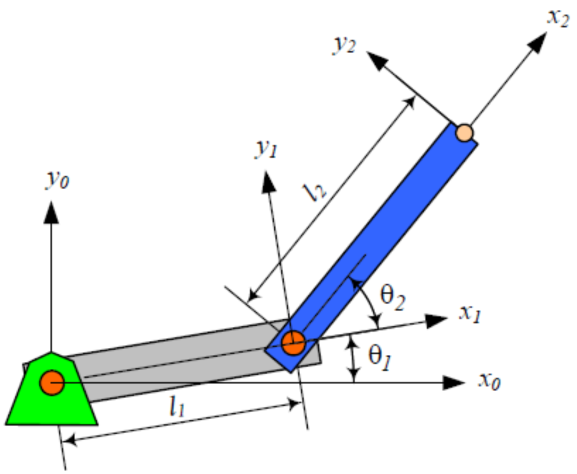
## 3.3 Modèle Cinématique Inverse

**Singularité cinématique:** pour certaines configurations, l'effecteur perd la capacité de se déplacer ou de tourner selon une direction. Dans ce cas on parle d'une configuration singulière ( le robot perd l'un de ses degrés de liberté).

La singularité est identifié à partir du déterminant de la matrice Jacobienne $\det(J) = 0$.

**Exemple**: Soit le robot plan suivant:

1. Calculer le Jacobien de ce robot
2. En déduire le MCI
3. Discuter les singularités.





## 3.3 Modèle Cinématique Inverse

### Singularité cinématique: Exemple robot plan

Le MCD du robot plan RR est donné par :

$$\begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{Y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-l_1\,S1 - l_2\,S12 & -l_2\,S12\\ l_1\,C1 + l_2\,C12 & l_2\,C12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix}$$

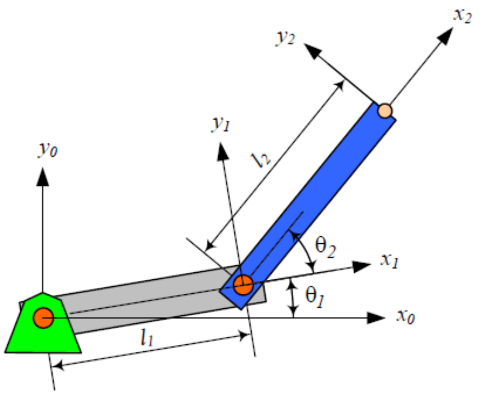
D’où la cinématique inverse est:

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-l_1\,S1 - l_2\,S12 & -l_2\,S12\\ l_1\,C1 + l_2\,C12 & l_2\,C12\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\dot{X}\\ \dot{Y}\end{bmatrix}$$

Avec

$$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)}(com\,J)^{\,T}$$

$$= \frac{1}{l_1 l_2 S2}\begin{bmatrix}l_2\,C12 & l_2\,S12\\ -l_1\,C1 - l_2\,C12 & -l_1\,S1 - l_2\,S12\end{bmatrix}$$





## 3.3 Modèle Cinématique Inverse

### Singularité cinématique: Exemple robot plan

Donc le MCI est exprimé comme suit::

$$
\begin{cases}
\dot{\theta}_1 = \dfrac{1}{l_1 S2}\left(\dot{X}\, C12 + \dot{Y}\, S12\right) \\[2ex]
\dot{\theta}_2 = \dfrac{-1}{l_1 l_2 S2}\left[\dot{X}(l_1\, C1 + l_2\, C12) + \dot{Y}(l_1\, S1 \ + l_2\, S12)\right]
\end{cases}
$$

- Singularités:

$$\det(J) = l_1 l_2 S2$$

$$\det(J) = 0 \ \Rightarrow \ Sin\ \theta_2 = 0$$

Donc les configurations singulières du robot sont:

$$\theta_2 = 0 \ \ ou \qquad \theta_2 = k\pi.$$

Dans cette situation le robot peut se déplacer seulement selon la direction perpendiculaire aux segments.