TD1 Commande avancée

1.1

Exercice 1.1:

1) Fonction transfert PID:

On a : $u(t) = K_p\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)\,d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt}\right]$

en calculant la transformée de Laplace

$$e(t) \longrightarrow \boxed{PID} \longrightarrow u(t)$$

$$U(s) = K_p\left[E(s) + \frac{1}{T_i s}E(s) + T_d s E(s)\right]$$

$$U(s) = K_p \frac{T_i s + 1 + T_i T_d s^2}{T_i s} E(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{PID(s) = \frac{U(P)}{E(P)} = \frac{s^2 + \frac{1}{T_d}s + \frac{1}{T_i T_d}}{\frac{1}{K_p T_d}\, s}}$$

2) On peut écrire:

$$u(t) = \underbrace{K_p\, e(t)}_{\substack{\text{Proportionnelle} \\ P(t)}} + \underbrace{\frac{K_p}{T_i}\int_0^t e(\tau)\,d\tau}_{\substack{\text{Intégrale} \\ I(t)}} + \underbrace{K_p T_d \frac{de(t)}{dt}}_{\substack{\text{Derivée} \\ D(t)}}$$

* $P(t) = K_p\left(y_c(t) - y(t)\right) \Rightarrow \boxed{P(k) = K_p\left(y_c(k) - y(k)\right)}$

$$\boxed{P(z) = K_p\, e(z)} \xleftarrow{TZ}$$

⚠ : On note $y_c(kT_s) = y_c(k)$

$y(kT_s) = y(k)$

* $I(t) = \frac{K_p}{T_i}\int_0^t e(\tau)\,d\tau$ → On dérive / temps

$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{K_p}{T_i} e(t)$ → On approxime la dérivée $\frac{dI(t)}{dt}$ par la méthode des différences avant

(1.2)

$$\frac{dI(t)}{dt} \simeq \frac{I(k+1) - I(k)}{T_s} = \frac{K_p}{T_i} e(k)$$

$$\Rightarrow TZ : \frac{zI(z) - I(z)}{T_s} = \frac{K_p}{T_i} E(z)$$

$$\boxed{I(z) = \frac{T_s K_p}{T_i (z-1)} E(z)}$$

* $D(t) = K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$; on approxime $\frac{de(t)}{dt}$ par les différences avant :

$$D(t) = K_p T_d \frac{e(k+1) - e(k)}{T_s} \rightarrow TZ$$

$$\boxed{D(z) = \frac{K_p T_d}{T_s} (z-1) E(z)}$$

en sommant les 3 actions

$$U(z) = P(z) + I(z) + D(z) = K_p E(z) + \frac{T_s K_p}{T_i (z-1)} E(z) + \frac{K_p T_d}{T_s} (z-1) E(z)$$

On constate que c'est la même expression de $U(s)$ en remplaçant

$$\boxed{s = \frac{(z-1)}{T_s}}$$ opérateur de dérivation avant

On déduit le transfert discret en remplaçant s dans $PID(s)$ par $\frac{(z-1)}{T_s}$

$$PID_d(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_i T_d}}{\frac{1}{K_p T_d} s}$$

$$s = \frac{z-1}{T_s}$$

3) Dans ce cas

$$u(s) = P(s) + I(s) + D(s) \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} P(s) = K\, e_p(s) = K\left(p\, y_c(s) - y(s)\right) \\ I(s) = \dfrac{K}{T_i\, s}\, e(s) = \dfrac{K}{T_i s}\left(y_c(s) - y(s)\right) \\ D(s) = \dfrac{s K T_d}{1 + s\frac{T_d}{N}}\, e_d(s) = \dfrac{s K T_d}{1 + s\frac{T_d}{N}}\left(0 - y(s)\right) \end{cases}$$

Pour calculer la version discrète, on somme les trois actions et on remplace s par $\dfrac{(z-1)}{T_s}$

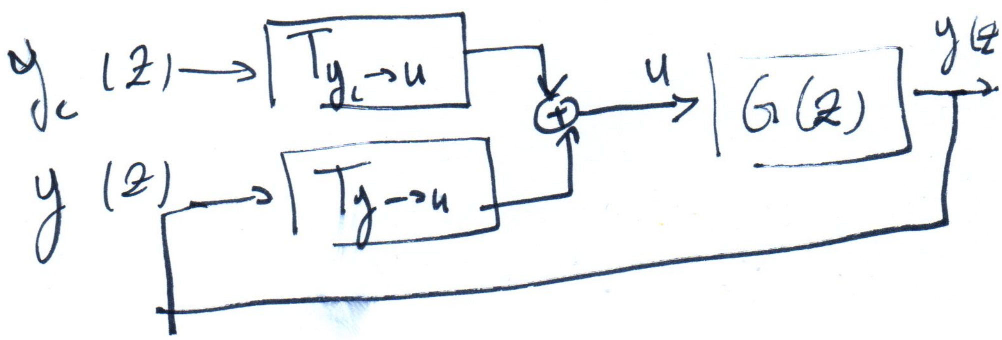
$$u(z) = P(z) + I(z) + D(z)$$

$$= K\left(p\, y_c(z) - y(z)\right) + \frac{K\, T_s}{T_i\,(z-1)}\left(y_c(z) - y(z)\right)$$

$$+ \frac{\frac{(z-1)}{T_s} K T_d}{1 + \frac{(z-1)}{T_s}\frac{T_d}{N}}\left(\quad - y(z)\right)$$

On regroupe les termes en $y_c(z)$ et en $y(z)$ et on obtient

$$u(z) = T_{y_c \to u}(z)\, y_c(z) + T_{y \to u}(z)\, y(z)$$



Exercice 1.2 :

$$G(z) = \frac{1}{(z-0,1)(z-0,5)} \quad ; \quad u(k) = 3\cos(0,2k)$$

en continu, la réponse de $G_c(s)$ à une entrée en cosinus (ou sinus)
$u(t) = u_0\cos(w_0 t)$ est

$$\boxed{y(t) = u_0\left|G(e^{jw_0})\right| \cdot \cos\left[w_0 t + \arg\left(G(e^{jw_0})\right)\right]}$$

Pour le cas discret, l'entrée est $u(k) = u_0\cos(k w_0 T_s)$ (on remplace t par kT_s).

$$\Rightarrow \boxed{y(k) = \left|G(e^{jw_0 T_s})\right| \cdot \cos\left[k w_0 T_s + \arg\left(G(e^{jw_0 T_s})\right)\right]}$$

On déduit alors :

$$y(k) = 3\left|\frac{1}{(e^{j0,2}-0,1)(e^{j0,5}-0,5)}\right| \cos\left[0,2k + \arg\left(\frac{1}{(e^{j0,2}-0,1)(e^{j0,2}-0,5)}\right)\right]$$

après calcul on obtient

$$\boxed{y(k) = 6,4\cos(0,2k - 0,614)}$$

Exercice 1.3 :

1) $y(k+1) = 0{,}5\,y(k) + u(k)$, $y(0)=0$

$\Rightarrow y(k) = 0{,}5\,y(k-1) + u(k-1)$, $y(0)=0$

Par une entrée en impulsion discrète : $u(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{y(0) = 0}$

$k=1$: $y(1) = 0{,}5\,\overbrace{y(0)}^{=0} + \overbrace{u(0)}^{=1} = 0{,}5 \times 0 + 1 = 1$

$\boxed{y(1) = 1}$

$k=2$: $y(2) = 0{,}5\,\overbrace{y(1)}^{=1} + \overbrace{u(1)}^{=0} = 0{,}5$

$\boxed{y(2) = 0{,}5}$

$k=3$: $y(3) = 0{,}5\,\overbrace{y(2)}^{=0{,}5} + \overbrace{u(2)}^{=0} = (0{,}5)^2$

$\vdots$

$k=i$: $y(i) = 0{,}5\,y(i-1) + \overbrace{u(i-1)}^{=0} = (0{,}5)^{i-1}$

Réponse impulsionnelle $\boxed{h(k) = y(k) = \begin{cases} (0{,}5)^{k-1}, & k \geq 1 \\ 0, & k < 1 \end{cases}}$

2) On utilise la transformée en Z de l'équation aux différences :

$$z\,y(z) = 0{,}5\,y(z) + u(z) \Rightarrow (z-0{,}5)\,y(z) = u(z)$$

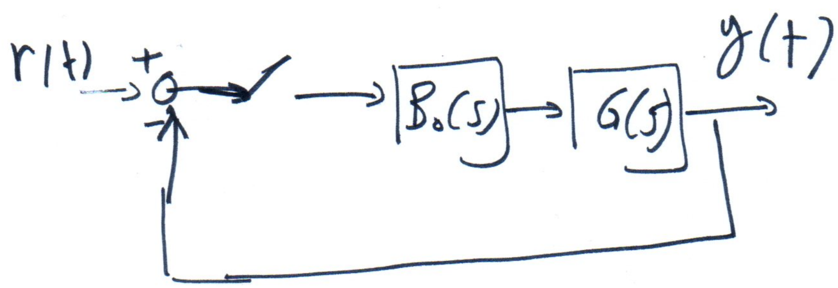
$H(z) = G(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)} = \dfrac{1}{z-0{,}5}$; d'après les tables de TZ inverse : $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{1}{z-a}\right\} = \begin{cases} 0 & k<1 \\ a^{(k-1)}, & k \geq 1 \end{cases}$, dans ce cas $\boxed{a = 0{,}5}$

On déduit $\boxed{h(k) = \begin{cases} (0{,}5)^{k-1}, & k \geq 1 \\ 0 & k < 1 \end{cases}}$

Exercice 1.4 :

1) $G(s) = \dfrac{\ell}{s(s+4)}$;

$$B_0(s) = \frac{1 - e^{T_s s}}{s}$$



On a : $H_{B_0}(s) = B_0(s) \cdot G(s)$

et $H_{B_0}(z) = \mathcal{Z}^{-1}\left[B_0(s) \cdot G(s)\right]$ (Pas d'échantilloneur entre $B_0(s)$ et $G(s)$)

$$H_{B_0}(z) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1 - \overset{\text{retard}}{e^{-T_s s}}}{s} \cdot \frac{\ell}{s(s+4)}\right\}$$

$$= (1 - z^{-1})\, \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{\ell}{s^2(s+4)}\right\}$$

$$H_{B_0}(z) = \ell(1 - z^{-1})\, \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+4)}\right\}$$

On peut décomposer en éléments simples ou utiliser les tables

d'après les tables de TZ :

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{a^2}{s^2(s+a)}\right\} = \frac{z\left[(aT_s - 1 + e^{-aT_s})z + (1 - e^{-aT_s} - aT_s e^{-aT_s})\right]}{(z-1)^2(z - e^{-aT_s})}$$

dans notre cas, $a = 4$, après calcul on déduit

$$\boxed{H_{B_0}(z) = 0{,}00438\ell\, \frac{z + 0{,}885}{z^2 - 1{,}67z + 0{,}67}}$$

2) En boucle fermée :

$$H_{BF}(z) = \frac{H_{BO}(z)}{1 + H_{BO}(z)}$$

après calcul

$$\boxed{H_{BF}(z) = \frac{0{,}2(z + 0{,}885)}{z^2 - 1{,}47z + 0{,}847}}$$