Chapitre 3 : Commande par Régulateur Auto-ajustable

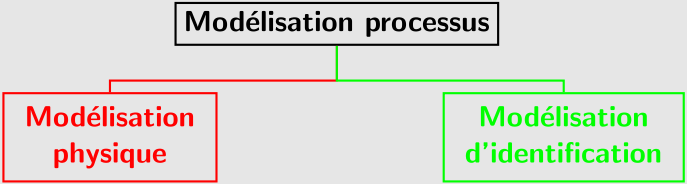
Commande Avancée

B. Boukhezzar
boubekeur.boukhezzar@umc.edu.dz

Laboratoire Automatique et Robotique de Constantine (LARC)
Département d'électronique, Université Constantine 1
Route de Aïn-El-Bey, Constantine 25017, Algérie
https://sites.google.com/site/bboukhezzar/

Plan du Cours

Modélisation d'un processus



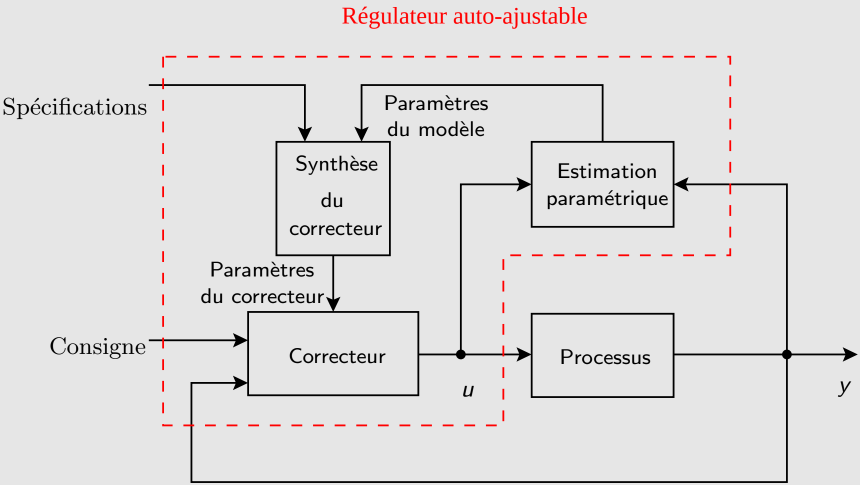
Modélisation d'un processus

Modélisation physique : Les lois physiques sont utilisées pour modéliser le comportement du système. Ces lois comportent des paramètres caractéristiques du système. Ces paramètres sont soit connus, mesurés, ou obtenus par une procédure d'identification.

Modélisation d'identification : Ces sont des modèles boîte noire. On attribue une *structure de modèle* au système et on identifie les paramètres de cette structure.

Plan du Cours

Régulateur auto-ajustable



- Les régulateurs auto-ajustables utilisent un modèle de structure fixe mais dont les paramètres *inconnus* sont identifiés continuellement *en-ligne* par une procédure *d'estimation recursive*,
- Ces paramètres sont alors utilisés pour calculer les paramètres du correcteur,
- Ce calcul de fait à partir des paramètres estimés et de spécifications externes.

Approches STR

1. Une première approche dite *adaptative indirecte.* Les paramètres du correcteur ne sont mis à jour directement. Les paramètres du modèles sont d'abord estimés, par la suite, les paramètres du correcteur sont mis à jours à partir des estimés de ceux du modèle. Il s'agit *d'un algorithme adaptatif indirecte*.
2. Une seconde approche dite *adaptative directe*. Dans ce cas, on reparamétrise le modèle en y ajoutant ceux du correcteur pour que les paramètres du correcteur soient obtenus directement. On parle alors *d'algorithme adaptatif direct*.

Représentation polynômiale

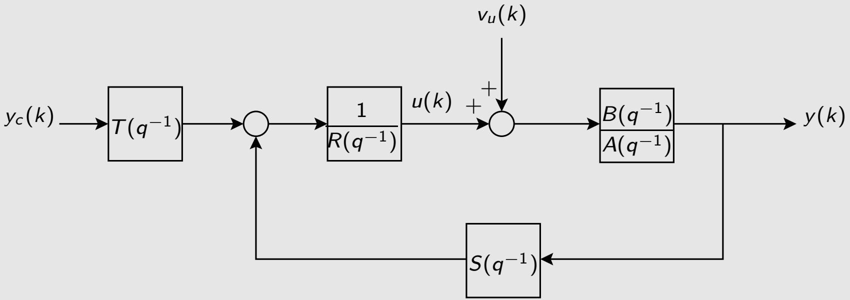
$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) = B(q^{-1})u(k-d)$$

avec

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i q^{-i} \\ B(q^{-1}) &= \sum_{j=0}^{m} b_j q^{-j} \end{aligned}$$

d est le *retard pur* de l'entrée du système. Le triple $(A(q^{-1}), B(q^{-1}), d)$ est la représentation polynomiale du système.

Structure d'un correcteur STR



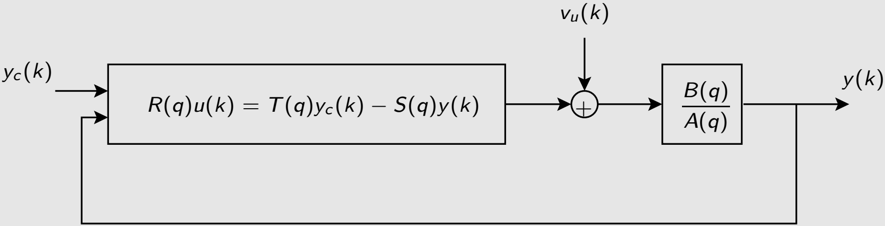
Structure d'un correcteur STR

Le bloc $\dfrac{1}{R(q)}$: Il agit dans la chaîne directe après le comparateur,

Le bloc $S(q)$: Il agit dans la chaîne de retour,

Le bloc $T(q)$: Il agit dans la chaîne directe avant le comparateur. Il peut être vu comme un prétraitement de la consigne $y_c(k)$

Structure groupée d'un correcteur STR



Transferts du correcteur STR

Transferts avec la sortie $y(k)$

$$y(k) = \underbrace{\frac{B(q)T(q)}{A(q)R(q)+B(q)S(q)}y_c(k)}_{G_{y_c\to y}(k)} + \underbrace{\frac{B(q)R(q)}{A(q)R(q)+B(q)S(q)}}_{G_{v\to y}}v(k)$$

$P_c(q)$: polynôme caractéristique en boucle fermée

$$\boxed{P_c(q) = A(q)R(q) + B(q)S(q).}$$

Transferts du correcteur STR

Transferts avec la commande $u(k)$

$$u(k) = \underbrace{\frac{A(q)T(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)}}_{G_{y_c \to u}} y_c(k) + \underbrace{\frac{-B(q)S(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)}}_{G_{v \to u}} v(k)$$

Le même polynôme caractéristique

$$P_c(q) = A(q)R(q) + B(q)S(q)$$

est commun aux transferts de la sortie $y(k)$ et de la commande $u(k)$.

Poursuite de modèle

• Objectif : poursuivre un modèle de référence décrit par l'équation polynomiale suivante

$$A_m(q)y_m(k) = b_m(q)y_c(k)$$

soit

$$G_{y_c \to y} = G_{y_c \to y_m}$$

il faut alors que

$$\frac{B(q)T(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)} = \frac{B(q)T(q)}{P_c(q)} = \frac{B_m(q)}{A_m(q)}$$

Calcul du correcteur STR

On décompose le polynôme $B(q)$ en un produit de deux polynômes $B^+(q)$ et $B^-(q)$

$$B(q) = B^+(q)B^-(q)$$

- $B^+(q)$: Polynôme monique qui contient les racines stables et bien amorties de $B(q)$. Comme on le verra par la suite, le polynôme $B^+(q)$ est la partie de $B(q)$ qui peut être compensée (éliminée ou simplifiée) par la correcteur STR. Le polynôme caractéristique $P_c(q)$ doit alors contenir $B^+(q)$,
- $B^-(q)$: Polynôme qui contient les racines instables ou mal amorties de $B(q)$. Le polynôme $B^-(q)$ ne peut pas être compensé (éliminé) par le correcteur STR.

Calcul du correcteur STR

- $B^-(q)$ est contenu comme facteur dans $B_m(q)$

$$B_m(q) = B^-(q)B'_m(q)$$

- $B^+(q)$ est éliminé par le polynôme caractéristique $P_c(q)$.
- $A_m(q)$ facteur de $P_c(q)$ par conséquent,

$$P_c(q) = A_0(q)A_m(q)B^+(q)$$

$A_0(q)$ est un polynôme à choisir d'après le cahier des charges.

Calcul du correcteur STR

Comme

$$P_c(q) = A(q)R(q) + B(q)S(q)$$

En supposant que $A(q)$ et $B(q)$ sont premiers entre eux, $B^+(q)$ doit être un facteur de $R(q)$

$$R(q) = R'(q)B^+(q)$$

l'équation du polynôme caractéristique devient

$$P_c(q) = A_0(q)A_m(q)B^+(q) = A(q)R'(q)B^+(q) + B^+(q)B^-(q)S(q)$$

en éliminant $B^+(q)$ de deux dernières égalités on obtient

$$A(q)R'(q) + B^-(q)S(q) = A_0(q)A_m(q) = A'_c(q)$$

On obtient alors l'expressions de $T(q)$

$$\boxed{T(q) = A_0(q)B'_m(q)}$$

Condition de caualité

Correcteur causal

$$d^\circ \text{dénominateur} \geq d^\circ \text{nominateur}$$

comme $G_{y_c \to y} = \dfrac{B(q)T(q)}{A(q)R(q) + B(q)S(q)}$ alors

$$\begin{cases} d^\circ num\,(G_{y_c \to y}) & = & d^\circ(B(q)T(q)) & = & d^\circ B(q) + d^\circ T(q) \\ d^\circ den\,(G_{y_c \to y}) & = & d^\circ(A(q)R(q)) & = & d^\circ A(q) + d^\circ R(q) \end{cases}$$

il suffit d'imposer

$$\boxed{d^\circ R(q) \geq d^\circ T(q)}$$

pour avoir $G_{y_c \to y}$ causal.

Condition de causalité

de même, par un raisonnement similaire, il suffit d'imposer

$$\boxed{d^\circ R(q) \geq d^\circ S(q)}$$

pour avoir $G_{v \rightarrow y}$ causal.
Les conditions de causalité sont donc

$$\boxed{\begin{array}{ccc} d^\circ S & \leq & d^\circ R \\ d^\circ T & \leq & d^\circ R \end{array}}$$

Plan du Cours

Equation de Bézout-Diophantine

L'équation polynomiale

$$\boxed{A(q)R(q) + B(q)S(q) = P_c(q)}$$

est appelée équation de Bézout-Diophantine.
Si l'équation $(R_0(q), S_0(q))$ est une solution particulière, alors

$$\begin{cases} R(q) & = & R_0(q) + Q(q)B(q) \\ S(q) & = & S_0(q) - Q(q)A(q) \end{cases}$$

sont aussi des solutions, avec $Q(q)$ un polynôme quelconque.

Solution minimale

Solution minimale :

- Solution de degrés minimal pour $R(q), S(q)$ et $T(q)$,
- Respecte les conditions de causalité

$$d^\circ S = d^\circ A - 1$$

$$d^\circ R = d^\circ P_c - d^\circ A$$

$$d^\circ P_c \geq 2d^\circ A - 1$$

$$d^\circ T \leq d^\circ R$$

Algorithme MDPP I

On choisit

$$d^\circ S = d^\circ R = d^\circ T$$

On applique l'algorithme suivant pour caluler $S(q), R(q)$ et $T(q)$

Algorithme MDPP II

Algorithm 1 MDPP (Minimum Degree Pole Placement)

1: **Données :** polynômes $A(q)$ et $B(q)$.
2: **Spécifications :** polynômes $A_m(q)$ et $B_m(q)$ et $A_0(q)$.
3: **Conditions de compatibilité :**

$$\begin{cases} d^\circ A_m & = & d^\circ A \\ d^\circ B_m & = & d^\circ B \\ d^\circ A_0 & = & d^\circ A` - d^\circ B^+ - 1 \end{cases}$$

$$B_m(q) = B^-(q)B'_m(q)$$

4: **Étape 1 :** Factoriser $B(q)$ comme

$$B(q) = B^+(q)B^-(q) \qquad \text{avec} B^+(q) \text{monique}$$

5: **Étape 2 :** Trouver les solutions $R'(q)$ et $S(q)$ avec $d^\circ S < d^\circ A$ de l'équation de Bézout

$$A(q)R'(q) + B^-(q)S(q) = A_0(q)A_m(q)$$

6: **Étape 3 :** Obtenir

$$\begin{array}{rcl} R(q) & = & R'(q)B^+(q) \\ T(q) & = & A_0(q)B'_m(q) \end{array}$$

et calculer la commande

$$R(q)u(k) = Ty_c(k) - S(q)y(k)$$

Cas spéciaux de l'algorithme MDPP I

Tous les les zéros sont éliminés

Dans ce cas, on élimine tous les zéros du système (racines de $B(q)$). Le polynôme $B^{+}(q)$ va contenir les zéros du système (racines de $B(q)$ à éliminer. Le polynôme $B^{-}(q)$ est la partie des racines de $B(q)$ qui n'est pas éliminés.
par conséquent les polynômes $B^{+}(q)$ et $B^{-}(q)$ sont donnés par

$$\begin{aligned} B^{-}(q) &= C_1^{te} \\ B^{+}(q) &= C_2^{te} B(q) \end{aligned}$$

En écrivant la forme factorisée de $B(q)$

$$B(q) = \underbrace{b_0}_{B^{-}(q)} \underbrace{(q - q_1)(q - q_2) \cdots (q - q_m)}_{B^{+}(q)}$$

Cas spéciaux de l'algorithme MDPP II

Tous les les zéros sont éliminés

on obtient

$$\begin{cases} B^-(q) & = & b_0 \\ B^+(q) & = & \dfrac{B(q)}{b_0} \end{cases}$$

alors

$$d^\circ A_0 = d^\circ A - d^\circ B^+ - 1 = d^\circ A - d^\circ B - 1$$

En choisissant

$$B_m(q) = A_m(1) q^d$$

et

$$T(q) = \frac{A_m(1)}{b_0} q^d$$

on obtient

$$P_c(q) = B^+(q) P_c'(q)$$

Cas spéciaux de l'algorithme MDPP III

Tous les les zéros sont éliminés

l'équation de Bézout devient

$$A(q)R'(q) + b_0S(q) = P'_c(q) = A_0(q)A_m(q)$$

Cette équation peut être résolue en effectuant une division euclidienne. En effet, en divisant $A_0(q)A_m(q)$ par $A(q)$, le polynôme $R'(q)$ est le quotient et $b_0S(q)$ le reste de la division.

Remarque

L'utilisation de cette méthode nécessite d'avoir tous les zéros de $B(q)$ stables et bien amortis.

Cas spéciaux de l'algorithme MDPP I

Aucun zéro n'est éliminé

Dans ce cas, on choisit de ne pas compenser aucun zéro. En suivant un raisonnement similaire au cas précédent, on obtient la factorisation suivante de $B(q)$.

$$\begin{aligned} B^{+}(q) &= 1 \\ B^{-}(q) &= B(q) \end{aligned}$$

On rappelle que $B^{+}(q)$ contient les zéros à éliminer et $B^{-}(q)$ les zéros restants. Tenant compte de cette factorisation on obtient

$$\begin{aligned} B_m(q) &= \beta B(q) \\ \beta &= \frac{A_m(1)}{B(1)} \end{aligned}$$

Cas spéciaux de l'algorithme MDPP II

Aucun zéro n'est éliminé

concernant le polynôme $A_0(q)$ qui est un paramètre du réglage, son degré est donné par

$$d^\circ A_0 = d^\circ A - d^\circ B - 1$$

Une fois le polynôme $A_0(q)$ choisis, le polynôme $T(q)$ est alors donné par

$$T(q) = \beta A_0(q)$$

et le polynôme caractéristique $P_c(q)$ devient

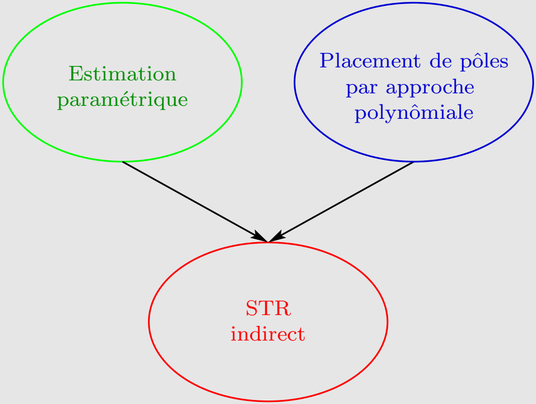
$$P_c(q) = A_0(q)A_m(q)$$

et l'équation de Bézout s'écrit

$$A(q)R(q) + B(q)S(q) = P_c(q) = A_0(q)A_m(q).$$

Plan du Cours

Commande adaptative indirecte par STR



Moindres carrés récursifs

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \hat{\theta}(k) & = & \hat{\theta}(k-1) + K(k)\varepsilon(k) \\ \varepsilon(k) & = & y(k) - \varphi^T(k-1)\hat{\theta}(k-1) \\ K(k) & = & P(k-1)\varphi(k-1)\left(\lambda + \varphi^T(k-1)P(k-1)\varphi(k-1)\right)^{-1} \\ P(k) & = & \frac{\left(I - K(k)\varphi^T(k-1)\right)P(k-1)}{\lambda} \end{array}}$$

STR indirect

Algorithm 2 MDPP (STR avec RLS et MDPP)

1: **Données :**
2: **Spécifications :**
   1. Modèle de référence $A_m(q)$ et $B_m(q)$,
   2. Polynôme caractéristique en boucle fermée $A_0(q)$.
3: **Étape 1 :** Estimer $A(q)$ et $B(q)$ par les moindres carrés récursifs
4: **Étape 2 :** Utiliser l'algorithme MDPP vu avec l'algorithme 1 en utilisant $A(q)$ et $B(q)$ obtenus à l'étape 1. Déduire $R(q), S(q)$ et $T(q)$.
5: **Étape 3 :** Calculer la commande

$$R(q)u(k) = T(q)y_c(k) - S(q)y(k)$$

6: Répéter les étapes 1,2 et 3 pour chaque pas d'échantillonnage k.

Plan du Cours

Commande MDDP d'un Moteur à courant continu I

On présente dans cet exemple l'application de l'algorithme MDPP pour la commande en position d'un servomoteur [**?**]
Soit le modèle normalisé à temps continu d'un moteur à courant continu. La constante de temps et le gain statique sont normalisés à 1

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

On souhaite construire un correcteur STR pour ce système. La première étape est de calculer le modèle échantillonné correspondant au système continu (37). L'utilisation d'un bloqueur d'ordre zéro à la fonction de transfert continue $G(s)$ avec une période d'échantillonnage $T_s = 0.5\,\mathrm{s}$ donne l'équivalent échantillonné suivant

$$H(q) = \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{b_0 q + b_1}{q^2 + a_1 q + a_2} = \frac{0.1065q + 0.0902}{q^2 - 1.6065q + 0.6065}$$

Commande MDDP d'un Moteur à courant continu II

On va faire la poursuite d'un modèle de référence avec placement de pôles sans simplification de zéros. On a alors

$$B^+(q) = 1,$$

le degré de $B^+(q)$ est alors

$$d^\circ B^+ = 0$$

comme $B(q) = B^+(q)B^-(q)$ on déduit que

$$B^-(q) = B(q) = b_0 q + b_1$$

On choisit le modèle de référence suivant

$$H_m(q) = \frac{B_m(q)}{A_m(q)}$$

Commande MDDP d'un Moteur à courant continu III

où $A_m(q)$ est obtenu par la discrétisation du dénominateur de la fonction de transfert d'un système linéaire continu du second ordre

$$s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$$

avec

$$\begin{aligned} \xi &= 0.7, \\ \omega_0 &= 1 \text{ rad.s}^{-1} \end{aligned}$$

soit

$$A_m(q) = q^2 + a_{m1}q + a_{m2} = q^2 - 1.3205q + 0.4966$$

et

$$B_m(q) = \beta B(q) = 0.1761q$$

Commande MDDP d'un Moteur à courant continu IV

avec

$$\beta = \frac{A_m(1)}{B(1)} = \frac{1 + a_{m1} + a_{m2}}{b_0 + b_1}$$

la fonction de transfert du modèle de référence est alors

$$H_m(q) = \beta \frac{b_0 q + b_1}{q^2 + a_{m1} q + a_{m2}}$$

soit

$$H_m(q) = \frac{b_{m0} q + b_{m1}}{q^2 + a_{m1} q + a_{m2}}$$

l'équation de Bézout s'écrit alors

$$A(q)R(q) + B(q)S(q) = A_c(q) = A_0(q)A_m(q)$$

Commande MDDP d'un Moteur à courant continu V

car $B^+(q) = 1$. Pour le polynôme $A_0(q)$, on a

$$d^\circ A_0 = d^\circ A - d^\circ B^+ - 1 = 1$$

comme $d^\circ S < d^\circ A$ alors

$$d^\circ S = 1$$

En choisissant des degrés égaux pour les trois polynôme du correcteur STR on a alors

$$d^\circ R = d^\circ T = d^\circ S = 1$$

comme le polynôme $R(q)$ est monique on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S(q) & = & s_0 q + s_1 \\ R(q) & = & q + r_1 \end{array} \right.$$

Commande MDDP d'un Moteur à courant continu VI

De même, le polynôme $A_0(q)$ est monique

$$A_0(q) = q + a_0$$

en substituant les expressions des polynôme dans l'équation de Bézout (37) on aboutit a

$$\underbrace{(q^2 + a_1 q + a_2)}_{A(q)}\underbrace{(q + r_1)}_{R(q)} + \underbrace{(b_0 q + b_1)}_{B(q)}\underbrace{(s_0 q + s_1)}_{S(q)} = \underbrace{(q^2 + a_{m1} q + a_{m2})}_{A_m(q)}\underbrace{(q}_{A}$$

pour tirer r_1, on remplace $q = -\dfrac{b_1}{b_0}$ dans l'équation pour éliminer les variable $^s_0$ et s_1, et on résoud l'équation obtenue par rapport à r_1

$$r_1 = \frac{b_1}{b_0} + \frac{(b_1^2 - a_{m1} b_0 b_1 + a_{m2} b_0^2)(-b_1 + a_0 b_0)}{b_0(b_1^2 - a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2)}$$

Commande MDDP d'un Moteur à courant continu VII

soit après simplification

$$r_1 = \frac{a_0 a_{m2} b_0^2 + (a_2 - a_{m2} - a_0 a_{m1} b_0 b_1) + (a_0 + a_{m1} - a_1) b_1^2}{b_1^2 - a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2}$$

après calcul, on déduit les expressions suivantes de s_0 et s_1

$$s_0 = \frac{b_1(a_0 a_{m1} - a_2 - a_{m1} a_1 + a_1^2 + a_{m2} - a_1 a_0)}{b_1^2 - a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2} + \frac{b_0(a_{m1} a_2 - a_1 a_2 - a_0 a_{m2} + a_0 a_2)}{b_1^2 - a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2}$$

pour s_1

$$s_1 = \frac{b_1(a_1 a_2 - a_{m1} a_2 + a_0 a_{m2} - a_0 a_2)}{b_1^2 - a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2} + \frac{b_0(a_2 a_{m2} - a_2^2 - a_0 a_{m2} a_1 + a_0 a_2 a_{m1})}{b_1^2 - a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2}$$

Commande MDDP d'un Moteur à courant continu VIII

enfin, pour le polynôme $T(q)$ on a

$$T(q) = A_0(q)B'_m(q)$$

comme

$$B_m(q) = \underbrace{B^-(q)}_{B(q)}\underbrace{B'_m(q)}_{\beta}$$

on a alors

$$T(q) = \beta A_0(q)$$

soit

$$T(q) = \beta(q + a_0)$$