Chapitre 1 : Rappels et compléments sur les systèmes échantillonnés

Commande Avancée

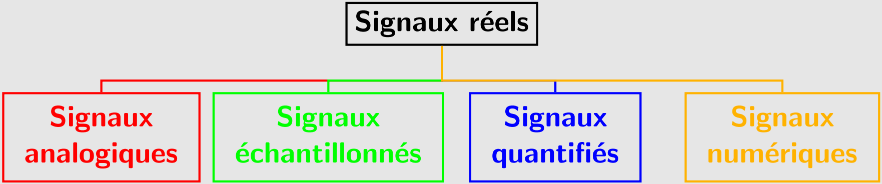
B. Boukhezzar
boubekeur.boukhezzar@umc.edu.dz

Laboratoire Automatique et Robotique de Constantine (LARC)
Département d'électronique, Université Constantine 1
Route de Aïn-El-Bey, Constantine 25017, Algérie
https://sites.google.com/site/bboukhezzar/

January 29, 2021

Plan du Cours

Classification des signaux



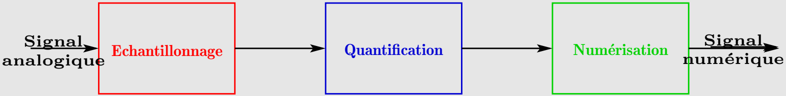
Signal échantillonné

- est une suite de nombres $\{\ldots, s(0), s(1), s(2), \ldots\}$ qui dépend d'un paramètre discret k,
- Appelé aussi *signal à temps discret*,
- Il provient de l'échantillonnage d'un signal à temps continu $s(t)$ à une période d'échantillonnage T_s,
- n utilise alors souvent la notation $s(k)$ pour désigner l'échantillon $s(kT_s)$ à l'instant kT_s

$$s(k) = s(kT_s)$$

Signal numérique

- Un signal à temps discret possède une amplitude continue,
- La quantification et la numérisation (conversion en séquence binaire) de ce signal produit un *signal numérique*,
- Le signal numérique est adapté pour un traitement par calculateur



Signal impulsionnel discret

$$s^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_s)\delta(t - kT_s)$$

$s(t)$ signal à temps continu et T_s la période d'échantillonnage.
$s^*(t)$ provient de la multiplication de $s(t)$ par un peigne périodique de Dirac $\delta_{T_s}(t)$

$$s^*(t) = s(t) \cdot \delta_{T_s}(t)$$

avec

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$$

Classification des systèmes

- **Systèmes réels**
  - **Systèmes analogiques**
  - **Systèmes échantillonnés**
  - **Systèmes numériques**
  - **Systèmes hybrides**

Classification des systèmes

Systèmes analogiques : Toutes les entrées et les sorties sont analogiques. A titre d'exemple, on peut citer les amplificateur, les filtres et les modulateurs analogiques

Systèmes échantillonnés : Les signaux sont échantillonés mais ne sont pas numérisés. C'est le cas des circuits à transfert de charge et des filtres à capacités commutées.

Systèmes numériques : toutes les entrées et les sorties sont numériques. Les filtres numériques, les corrélateurs et les processeurs spécialisés (DSP par exemple) sont des exemples de ces systèmes.

Systèmes hybrides : Des signaux analogiques et numériques coexistent ensemble dans ce type de système. Un exemple typique est celui des convertisseurs analogique-numérique (CAN) et numérique-analogique (CNA).

Plan du Cours

Représentation d'un système à temps discret

Un signal système à temps discret peut être représenté par :

1. Réponse impulsionnelle,
2. Fonction de transfert,
3. Equation aux différences,
4. Représentation polynomiale.

Réponse impulsionnelle

C'est la réponse $g(k)$ du système à une impulsion discrète $\delta(k)$.

$$g(k) = \mathcal{S}\left(\delta(k)\right)$$

avec $\delta(k)$ l'impulsion discrète

$$\begin{cases} \delta(k) & = 1, \text{ si } k = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

la réponse du système à une séquence d'entrée quelconque est égale au produit de convolution discret de cette entrée par la réponse impulsionnnelle du système

$$y(k) = u(k) * g(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n) \cdot g(k-n)$$

Fonction de transfert

La fonction de transfert discrète $G_d(z)$ est égale à la transformée en z de la réponse impulsionnnelle $g(k)$.

$$G_d(z) = \mathcal{Z}\left\{g(k)\right\}.$$

Elle est aussi égale au rapporte de la transformée en $\mathcal{Z}$ de la sortie du système $y(k)$ et de son entrée $u(k)$

$$G_d(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Elle est aussi appelée *transmitance pulsée*.

Equation aux différences (réccurente)

La sortie $y(k)$ à l'instant k est définie, de façon récurrente, à partir de la valeur actuelle et des valeurs passées de la sortie et de l'entrée

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) + \sum_{j=0}^{p} b_j u(k-j) \qquad n \geq p$$

L'équation aux différences est l'équivalent de la représentation par équation différentielle dans le cas d'un système à temps continu.

Fonction de transfert d'un système sans retard

La forme générale de la fonction de transfert échantillonnée d'un système sans retard est donnée par

$$G_d(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_p z^{-p}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

ou avec des puissances de z positive par

$$G_d(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_p z^{n-p}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Fonction de transfert d'un système avec retard

La forme générale de la fonction de transfert échantillonnée d'un système avec retard est donnée par

$$G_d(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \qquad m \leq n$$

ou bien en z^{-1}

$$G_d(z) = z^{-d} \cdot \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

avec $d = n - m$ *le retard du signal d'entrée*: C'est la différence entre le nombre de pôles et de zéros du système. C'est aussi la différence entre le degré du numérateur et du dénominateur dans le cas d'une représentation en z (avec des puissances de z positive). Son équation aux différences s'écrit

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) + \sum_{j=0}^{m} b_j u(k-d-j)$$

Représentation polynomiale

Opérateur d'avance temporelle q

On définit l'*opérateur q d'avance temporelle d'un pas* comme suit

$$qx(k) = x(k+1)$$

L'opérateur q^{-1} est alors celui du *retard temporel d'un pas*

$$q^{-1}x(k) = x(k-1)$$

Représentation polynomiale

En utilisant l'opérateur q, l'équation aux différences

$$G_d(z) = z^{-d} \cdot \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

est réecrite comme suit

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) = B(q^{-1})u(k-d)$$

avec

$$A(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i q^{-i} \; ; \; B(q^{-1}) = 1 + \sum_{j=0}^{m} b_j q^{-j}$$

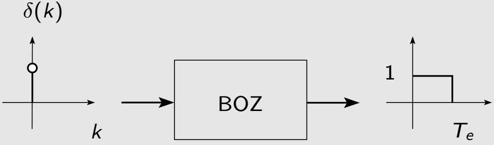
Pour un SLTI échantillonné, la fonction de transfert discréte est obtenue en remplaçant q^{-1} par z^{-1}

$$G_d(z^{-1}) = \frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

Calcul de la fonction de transfert échantillonnée

Fonction de transfert échantillonnée avec BOZ

Le bloqueur d'ordre zéro permet de maintenir l'entrée constante pendant la durée d'une période d'échantillonnage



La fonction de transfert continue $B_0(s)$ du BOZ est donnée par

$$B_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

La fonction de transfert échantillonnée avec un BOZ est alors

$$G_d(z^{-1}) = \overline{G_c B_0}(z^{-1}) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left(\frac{G_c(s)}{s}\right)$$

Représentation d'état

Le système échantillonné décrit par sa fonction de transfert discrète

$$G_d(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Il admet une représentation d'état

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

qui peut prendre plusieurs formes :

1. Forme canonique commandable,
2. Forme canonique observable,
3. Forme modale.

Représentation d'état

Forme canonique commandable

Les matrices (A, B, C, D) de la représentation d'état commandable sont données par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & \cdots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = b_0$$

Représentation d'état

Forme canonique observable

Les matrices (A, B, C, D) de la représentation d'état observable sont données par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = b_0$$

Représentation d'état I

Forme modale

Si on suppose que le système ne possède que des pôles réels simples, la décomposition de la fonction de transfert en éléments simples s'écrit :

$$G(z) = b_0 + \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \cdot + \frac{c_n}{z - p_n}$$

avec

$$p_i \quad : \quad \text{Pôles de la fonction de transfert}$$

$$c_i \quad = \quad \lim_{p \to p_i} [G(z) \cdot (z - p_i)]$$

On obtient alors la forme modale suivante

Représentation d'état II

Forme modale

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \quad ; \quad D = b_0$$

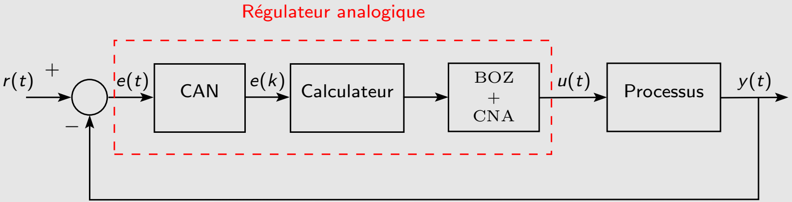
Plan du Cours

Commande par calculateur

- Un calculateur est tout dispositif qui permet de réaliser des calculs numériques. Il est utilisé en automatique pour calculer la commande à partir des informations obtenues par les capteurs et les algorithmes de commande. Il peut s'agir d'un microprocesseur, d'un microcontroleur, d'un ordinateur ou d'autres processeurs spécialisés.
- La commande par calculateur peut se faire de deux façons :
  1. Commande analogique par calculateur,
  2. Commande numérique par calculateur,

Commande analogique par calculateur

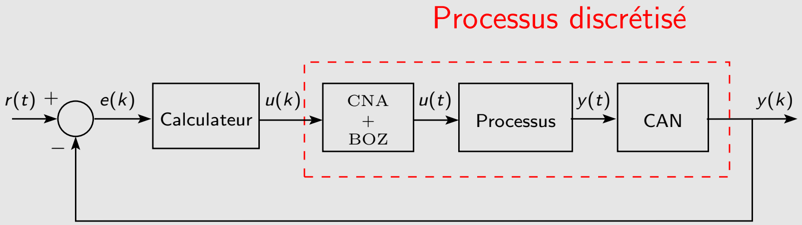
- Correcteur analogique = CAN + Calculateur + (CNA +BOZ)
- Il possède une entrée et une sortie analogiques.



Avantages : Algorithme de mise en oeuvre simple : Discrétisation de l'algorithme de commande continu?

Inconvénients : Fréquence d'échantillonnage élevée d'où le risque d'oscillations et d'instabilité.

Comamande numérique par calculateur I



- L'ensemble {(CNA+BOZ) + processus + CAN } est vu comme un système échantillonné.

Avantages :

1. La période d'échantillonnage est choisie en fonction de la bande passante du processus continu. Elle est 5 à 50 fois plus basse que dans le cas précédent.

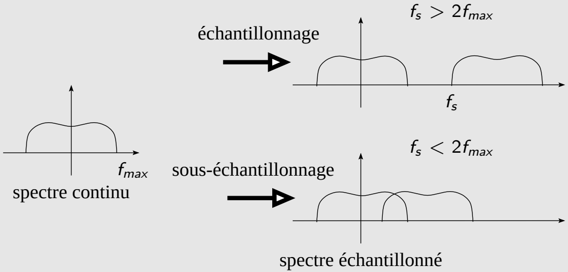
Comamande numérique par calculateur II

2. Le choix d'un période d'échantillonnage plus grande laisse le temps au calculateur de faire plus de calculs, ce qui donne plus de possibilités pour l'implementation de régulateurs plus complexes afin d'assurer une meilleure performance.
3. Les méthodes de synthèse de correcteurs numériques peuvent êtres utilisés directement sur le modèle échantillonné du système à commander.

Condition de Shannon

La fréquence d'échantillonnage $f_s = \dfrac{1}{T_e}$ doit être supérieure au double de la fréquence maximale à conserver

$$f_s > 2f_{max}$$



Si $f_s < 2f_{max}$, il y a recouvrement du spectre du signal

Choix de la fréquence d'échantillonnage I

1. Si le système se comporte comme un premier ordre, alors T_s est choisie tel que

$$\frac{\tau_{eq}}{4} < T_s < \tau_{eq}$$

2. Si le système se comporte comme un second ordre, T_s est choisie en vérifiant la relation suivante

$$\frac{1}{4} < \omega_{0_{eq}} < \frac{3}{2}$$

plus ξ est petit, plus T_s doit être choisie petite.

Choix de la fréquence d'échantillonnage II

3. Si le système continu comporte un retard τ_d, il est conseillé de choisir T_s comme un sous-multiple de τ_d

$$T_s = \frac{\tau_d}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}^*,$$

si cela n'est pas possible, alors

$$T_s = \frac{\tau_d - \tau_r}{n}$$

avec $0 < \tau_r < T_s$

Choix de la fréquence d'échantillonnage III

4. Si le système continu comporte des pôles complexes conjugués (qui ne soient pas forcément les pôles dominants) tel que

$$p_{1,2} = \sigma_0 \pm j\omega_0$$

alors la période d'échantillonnage T_s doit être choisie tel que

$$\nexists n \in \mathbb{N}^* : \omega_0 = \frac{n\pi}{T_s}$$

pour faire apparaître les oscillations du système en discret.

5. Si le système continu comporte des pôles instables, soit τ_N la constante de temps la plus grande des pôles instables, il est alors conseillé de choisir

$$T_s < \frac{\tau_N}{10}$$

Ordres de grandeur de la période d'échantillonnage

Processus	Période d'échantillonnage (secondes)
Régulation de pression	$5\,\mathrm{s}$ à $10\,\mathrm{s}$
Régulation de débit	$1\,\mathrm{s}$ à $3\,\mathrm{s}$
Régulation de niveau	$5\,\mathrm{s}$ à $10\,\mathrm{s}$
Régulation de température	$10\,\mathrm{s}$ à $45\,\mathrm{s}$
Séchage	$20\,\mathrm{s}$ à $45\,\mathrm{s}$
Distillation	$10\,\mathrm{s}$ à $180\,\mathrm{s}$
Réactions catalytiques	$10\,\mathrm{s}$ à $45\,\mathrm{s}$
Fabrication de ciment	$20\,\mathrm{s}$ à $45\,\mathrm{s}$
Asservissements électriques	$0.001\,\mathrm{s}$ à $0.1\,\mathrm{s}$

Prise en compte du correcteur

On utilise la règle suivante pour déterminer un intervalle pour le choix de la fréquence d'échantillonnage

$$f_s = (6 \text{ à } 25) \cdot f_c^{BF}$$

ce qui est équivalent à écrire que

$$6f_c^{BF} < f_s < 25f_c^{BF} \Leftrightarrow \frac{T_0}{4} < T_s < T_0$$

Ces conditions vont naturellement se rajouter à celle énoncés précédemment.

Exemple de choix de périodes d'échantillonnage

Exemple (Système du premier ordre)

Soit un système de commande continu dont la fonction de transfert en boucle fermée est décrite par un système du premier ordre

$$FTBF = H(s) = \frac{1}{1 + sT_0}$$

On a donc

$$f_c^{BF} = f_0 = \frac{1}{2\pi T_0}$$

On déduit alors que

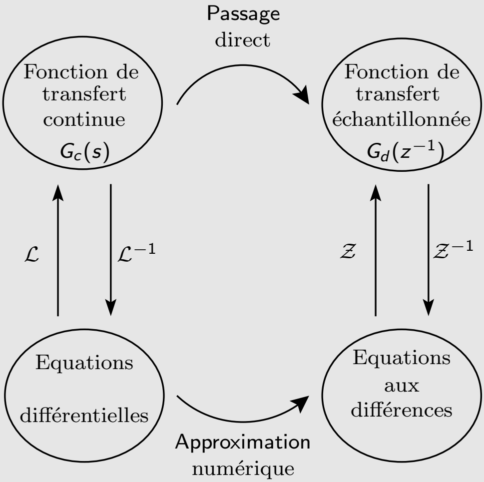
$$\frac{2\pi}{25} T_0 < T_e < \frac{2\pi}{6} T_0$$

soit

$$\frac{T_0}{4} < T_e < T_0$$

Plan du Cours

Approximation discrète de correcteurs analogiques



Approximation par différence arrière

Euler backward difference

Approximation de la dérivée première d'une fonction en utilisant l'échantillon actuel et l'échantillon passé

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \doteq \frac{y(t) - y(t - T_s)}{T_s}$$

En posant

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T_s}$$

On peut approximer un correcteur continu $C_c(s)$ par un équivalent discret $C_d(z^{-1})$ avec la formule

$$C_d(z^{-1}) = C_c(s)\big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T_s}}$$

Approximation par différence arrière

Exemple (Discrétisation d'un correcteur par avance de phase)

Soit le correcteur analogique par avance de phase

$$C(s) = \frac{1 + a\tau s}{1 + \tau s}, \quad a > 1$$

L'équivalent discret par la méthode de différence arrière est donné en faisant la substitution

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T_s}$$

dans $C(s)$. On obtient alors après simplification

$$C_d(z^{-1}) = \frac{(T_s + a\tau) - a\tau z^{-1}}{(T_s + \tau) - \tau z^{-1}}$$

Approximation par différence avant

Euler forward difference

On utilise l'échantillon futur $y(t+T_s)$ et l'échantillon actuel $y(t)$,pour approximer la dérivée

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \doteq \frac{y(t+T-s)-y(t)}{T_s}$$

On remplace alors s par

$$s = \frac{1}{T_s}\frac{1-z^{-1}}{z^{-1}}$$

l'approximation du correcteur continu $C_s(s)$ est donnée par

$$C_d(z^{-1}) = C_c(s)\Big|_{s=\frac{1}{T_s}\frac{1-z^{-1}}{z^{-1}}}$$

Approximation par différence avant

Exemple (Discrétisation d'un correcteur par avance de phase)

Soit le correcteur analogique par avance de phase

$$C(s) = \frac{1 + a\tau s}{1 + \tau s}, \quad a > 1$$

L'équivalent discret par la méthode de différence arrière est obtenu en remplaçant s pas l'expression suivante

$$s = \frac{1}{T_s} \frac{1 - z^{-1}}{z^{-1}}$$

après calcul, on obtient

$$C_d(z^{-1}) = \frac{a\tau + (T_s - a\tau)z^{-1}}{\tau + (T_s - \tau)z^{-1}}$$

Approximation trapézoïdale

C'est la moyenne des formules du point gauche et du point droit pour approximer le calcul d'une intégrale par la méthode des rectangles

$$y(nT_s) = \int_0^{nT_s} x(t)\mathrm{d}t \doteq \frac{T_s}{2}\sum_{i=1}^{n-1}[x(iT_s) + x(iT_s + T_s)]$$

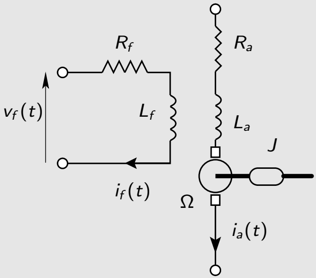
L'approximation du correcteur continu $C_s(s)$ est obtenu en remplaçant s par

$$s \doteq \frac{2}{T_s}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

Cette méthode est appelée *transformation billinéaire* appelée également *transformation homographique* ou *méthode de Tustin*.

Plan du Cours

Étude de cas : Modèle numérique d'un MCC



Entrée : Tension d'alimentation V_f,

Sortie : Vitesse mécanique Ω.

On peut avoir deux cas :

1. Moteur commandé par le stator,
2. Moteur commandé par l'induit.

Moteur commandé par le stator

Sa fonction de transfert est

$$G_c(s) = \frac{\Omega(s)}{V_f(s)} = \frac{K/fR}{(\tau_e s + 1)(\tau_m s + 1)}$$

avec $\tau_f = L_f/R_f$ la constante de temps électrique et $\tau_m = J/f$ la constante de temps mécanique

Moteur commandé par l'induit

la fonction de transfert du moteur commandé par la tension d'induit (armature) $v_a(t)$

$$G_c(s) = \frac{\Omega(s)}{v_a(s)} = \frac{K_m}{JL_a s^2 + (JR_a + L_a f)s + (R_a f + K_b K_n)}$$

Modèle discret I

On suppose que le modèle continu du MCC est discrétisé en le plaçant devant un bloqueur d'ordre zéro $B_0(s)$.

$$B_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

avec une période d'échantillonnage T.

On considère un moteur commandé par le stator. Sa fonction de transfert continu est donnée par

$$G_c(s) = \frac{\Omega(s)}{V_f(s)} = \frac{K}{(Js + f)(Ls + R)}$$

sa fonction de transfert échantillonnée est donnée par

$$G_d(z^{-1}) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G_c(s)}{s}\right\}$$

Modèle discret II

Pour calculer la transformée en $\mathcal{Z}$, on décompose $\dfrac{G_c(s)}{s}$ en éléments simples

$$\frac{G_c(s)}{s} = \frac{K}{s(Js+f)(Ls+R)} = \frac{\frac{K}{JL}}{s(s+\frac{f}{J})(s+\frac{R}{L})}$$
$$= \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{(s+\frac{f}{J})} + \frac{\gamma}{(s+\frac{R}{L})}$$

On trouve respectivement

$$\alpha = G_c(s)\big|_{s=0} = \frac{K}{fR}$$

$$\beta = \left.\frac{G_c(s)(s+\frac{f}{J})}{s}\right|_{s=-\frac{f}{J}} = \frac{KJ}{f(RJ-fL)}$$

Modèle discret III

et

$$\gamma = \left.\frac{G_c(s)(s+\frac{R}{L})}{s}\right|_{s=-\frac{R}{L}} = \frac{KL}{R(RJ-fL)}$$

sachant que

$$\frac{1}{s} \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-z^{-1}} \quad , \quad \frac{1}{s+a} \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

soit

$$G_d(z^{-1}) = (1-z^{-1})\left[\frac{\alpha}{1-z^{-1}} + \frac{\beta}{1-e^{-aT}z^{-1}} + \frac{\gamma}{1-e^{-bT}z^{-1}}\right]$$

avec

$$a = \frac{f}{J} = \frac{1}{\tau_m} \qquad , \qquad b = \frac{R}{L} = \frac{1}{\tau_e}$$

Modèle discret IV

Après simplification, on obtient [?]

$$G_d(z^{-1}) = \frac{K_m}{R_f f}\left[1 + \frac{(1-z^{-1})}{\frac{J}{f} - \frac{L_f}{R_f}}\left(\frac{L_f}{R_f}\frac{1}{1-\sigma_1 z^{-1}} - \frac{J}{f}\frac{1}{1-\sigma_2 z^{-1}}\right)\right]$$

avec

$$\sigma_1 = e^{-\frac{R}{L}T} \qquad , \qquad \sigma_2 = e^{-\frac{f}{J}T}$$