Solution TD: MGI: Méthode de Paul

Soit les matrices de transformation suivantes:

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} C1 & 0 & S1 & 0 \\ S1 & 0 & -C1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2^1 = \begin{bmatrix} C2 & -S2 & 0 & l_2 C2 \\ S2 & C2 & 0 & l_2 S2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} C3 & 0 & S3 & 0 \\ S3 & 0 & -C3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot T_3^2$$

$$T_3^0 = \begin{bmatrix} C1\,C23 & S1 & C1S23 & l_2\,C1\,C2 \\ S1\,C23 & -C1 & S1\,S23 & l_2\,C2\,S1 \\ S23 & 0 & -C23 & l_1 + l_2\,S2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la matrice E qui représente le dernier repère attaché à l'extrémité de l'effecteur dans le repère attaché à la dernière articulation est donnée par:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CS CamScanner

$$pos = T_4^0 = T_3^0 \cdot E .$$

$$\Rightarrow T_4^0 = \begin{bmatrix} C1C23 & S1 & C1S23 & l_3 S23 C1 + l_2 C1 C2 \\ S1C23 & -C1 & S1S23 & l_3 S23 S1 + l_2 C2 S1 \\ S23 & 0 & -C23 & l_1 - l_3 C23 + l_2 S2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

les Coordonnées de l'effecteur dans l'espace cartesien sont données par : $p = [\underset{px}{1} \;\; \underset{py}{1.1} \;\; \underset{pz}{1.2}]^T$.

les longueurs des segments sont : $l_1 = 1m$, $l_2 = 1{,}01m$, $l_3 = 0{,}8m$

$$\text{donc } T_4^0 = \begin{bmatrix} C1C23 & S1 & C1S23 & 1 \\ S1C23 & -C1 & S1S23 & 1.1 \\ S23 & 0 & -C23 & 1.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on utilise la méthode de Paul pour calculer les variables articulaires $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ permettant d'atteindre le point $p(1, 1.1, 1.2)$.

Etape 1 : Calcul de θ_1.

On a : $T_4^0 = T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot T_3^2 \cdot T_4^3$

on multiplie par $(T_1^0)^{-1}$

on obtient : $(T_1^0)^{-1} \cdot T_4^0 = \cancel{(T_1^0)^{-1}}(\cancel{T_1^0} \cdot T_2^1 \cdot T_3^2 \cdot T_4^3) = T_4^1$.

$$(T_1^0)^{-1} \cdot T_4^0 = \begin{bmatrix} C23 & 0 & S23 & C1 + 1{,}1 S1 \\ S23 & 0 & -C23 & 0{,}2 \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{S1 - 1{,}1 C1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$T_4^1 = T_2^1 \cdot T_3^2 \cdot T_4^3 = \begin{bmatrix} C23 & 0 & S23 & 1{,}1 C2 + 1{,}2 S23 \\ S23 & 0 & -C23 & 1{,}1 S2 - 1{,}2 C23 \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\to S1 - 1{,}1 C1 = 0$

$= 0$ ~~atan~~

$\theta_1 = atan2(1{,}1, 1)$.

~~$\theta_1 = 0{,}8329 rad$~~

$\boxed{\theta_1 = 0{,}8329812617 rad}$ ⇐ $\boxed{\theta_1 = 47{,}72631098°}$

Etape : Calcul de θ_2.

on multiplie l'équation obtenue dans l'étape 1 par $(T_2^1)^{-1}$ en remplaçant θ_1 par sa valeur.

pour $\theta_1 = 0,83298$ rad on a :

$$T_4^1 = \begin{bmatrix} C23 & 0 & S23 & 1,4866 \\ S23 & 0 & -C23 & 0,2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(T_2^1)^{-1} \cdot T_4^1 = \cancel{(T_2^1)^{-1}} \left(\cancel{T_2^1} \cdot T_3^2 \cdot T_4^3 \right).$$

$$(T_2^1)^{-1} \cdot T_4^1 = \begin{bmatrix} C2 & S2 & 0 & -1,05 \\ -S2 & C2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot T_4^1$$

$$\Rightarrow (T_2^1)^{-1} \cdot T_4^1 = T_4^2 = \begin{bmatrix} C3 & 0 & S3 & \overset{a}{1,4866\, C2 + 0,2\, S2 - 1,05} \\ S3 & 0 & -C3 & \underset{b}{0,2\, C2 - 1,4866\, S2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } T_3^2 \cdot T_4^3 = \begin{bmatrix} C3 & 0 & S3 & \overset{c}{0,89\, S3} \\ S3 & 0 & C3 & -0,89\, C3 \;\; d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut écrire que : $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.

donc : $(1,4866\, C2 + 0,2\, S2 - 1,05)^2 + (0,2\, C2 - 1,4866\, S2)^2 = (0,89\, S3)^2 + (-0,89\, S3)^2$

$$\boxed{3,12186\, C2 + 0,42\, S2 = 2,56038}$$

équation de type 2.

$$3{,}12186\, C2 + 0{,}42\, S2 = 2{,}56038.$$

équation de type 2 de la forme.

$$P_y\, C\theta - P_x\, S\theta = d.$$

avec $P_y = 3{,}12186$, $P_x = -0{,}42$. et $d = 2{,}56038$.

Selon le cours, la solution est.

$$\theta_2 = \varphi - A\tan 2\left(d, \pm\sqrt{r^2 - d^2}\right).$$

avec : $\varphi = A\tan 2(P_y, P_x)$

$$= A\tan 2(3{,}12186, -0{,}42).$$

$$\varphi = 1{,}704528527295 \text{ rad}.$$

On a: $r^2 = P_x^2 + P_y^2$.

$$\Rightarrow \theta_2 = 1{,}704528527295 - 0{,}948981673 18 = 0{,}7555468 5412 \text{ rad}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_2 \simeq 43{,}28^\circ}.$$

ou

$$\theta_2 = 1{,}704528527295 - 2{,}1926109804 1 = -0{,}4880824 5312 \text{ rad}$$

$$\boxed{\theta_2 \simeq -27{,}965^\circ}.$$

* **Calcul de θ_3:** pour le calcul de θ_3, on remplace θ_2 dans la matrice T_4^2 et par correspondance de terme avec la matrice $(T_3^2 \cdot T_4^3)$, on peut calculer la valeur de θ_3.

des termes a, b, c et d on peut écrire.

$$\theta_3 = A\tan 2\left(1{,}4866\, C2 + 0{,}2\, S2 - 1{,}05,\ 0{,}2\, C2 - 1{,}4866\, S2\right)$$

* pour $\theta_2 = 0{,}7555$ rad. $\Rightarrow \boxed{\theta_3 \simeq -11^\circ}$

* pour $\theta_2 = -0{,}488$ rad $\Rightarrow \boxed{\theta_3 \simeq 11^\circ}$

CamScanner

donc deux Configuration sont possible pour atteindre le point (1 1,1 1,2).

① $\begin{cases} \theta_1 = 47{,}72^0 \\ \theta_2 = 43{,}28^0 \\ \theta_3 = -11^0 \end{cases}$ ou ② $\begin{cases} \theta_1 = 47{,}72^0 \\ \theta_2 = -27{,}96^0 \\ \theta_3 = 11^0 \end{cases}$.

fini.