Chapitre 2 : Commande Adaptative par Modèle de Référence

Commande Avancée

B. Boukhezzar
boubekeur.boukhezzar@umc.edu.dz

Laboratoire Automatique et Robotique de Constantine (LARC)
Département d'électronique, Université Constantine 1
Route de Aïn-El-Bey, Constantine 25017, Algérie
https://sites.google.com/site/bboukhezzar/

Plan du Cours

1. Bref historique sur la commande adaptative
2. Définitions
3. Commande adaptative par modèle de référence
4. Stabilité des systèmes non Autonomes
5. MRAC par la théorie de Lyapunov
6. MRAC dans l'espace d'état
7. Applications industrielles de la commande adaptative

Bref historique sur la commande adaptative 1/3

1951 : Premiers travaux sur la commande adaptative par Draper et Li; commande pour un moteur à combustion interner,

1954 : Apparition de l'appellation adaptation par Tsien dans sa description du modèle d'Ashlay du cerveau humain,

1955 : Benner et Drenick proposent un système de commande avec des caractéristiques adaptatives,

1955 : Whitaker et al. introduisent la *commande adaptative par modèle de référence* (MRAC) pour le pilotage d'un avion,

Bref historique sur la commande adaptative 2/3

1960 : Li et Van der Velde proposent la technique des *systèmes adaptatifs auto-oscillants*,

1963 : Petrov propose une technique de commande adaptative pour les systèmes de commande en tout-ou-rien : Débuts de *la commande à structure variable*,

Bellman au USA et Feldman en ex-URSS appliquent la programmation dynamique en présence d'incertitudes stochastiques : *Commande duale*,

Åström et Wittenmark introduisent *le régulateur auto-ajustable* (*Self-Tuned Regulator : STR*) selon une approche algorithmique par calculateur,

Bref historique sur la commande adaptative 3/3

1974 : Monopoli propose l'approche de l'erreur augmentée : preuve de la stabilité asymptotique globale des contrôleurs adaptatifs,

1970 : Narendra, Morse, Goodwin et Agardt proposent des techniques de commande adptative *globalement asymptotiquement stables* en temps continu et en temps discret avec des contraintes moins restrictives sur la stabilité,

1980 : *Unification du formalisme* des commandes adaptatives et preuve de l'équivalence entre MRAC et STR.

Plan du Cours

1 Bref historique sur la commande adaptative

2 Définitions

3 Commande adaptative par modèle de référence

4 Stabilité des systèmes non Autonomes

5 MRAC par la théorie de Lyapunov

6 MRAC dans l'espace d'état

7 Applications industrielles de la commande adaptative

Définition de la commande adaptative

Définition (Commande adaptative)

La commande adaptative est un ensemble de techniques qui permettent de fournir une approche systématique pour l'ajustement des correcteurs en temps réel.
Par ajustement, on fait référence à la mise à jours des paramètres des correcteurs. Le but de la commande adaptative est d'atteindre et de maintenir le degré de performances désiré pour le système de commande quand les paramètres du système sont inconnus ou variables dans le temps.

Commande conventionnelle et commande adaptative

Commande conventionnelle : Trois étapes :

1. Cahier des charges,
2. Modélisation-Identification,
3. Analyse et synthèse de la commande.

Commande adaptative : Implementation en temps réel de la procédure de synthèse d'un correcteur conventionnel.

Schéma fonctionnel d'une commande adaptative

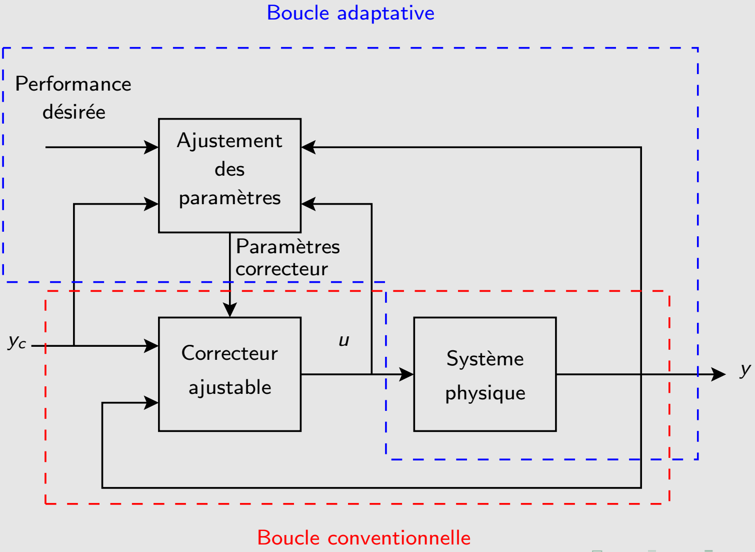


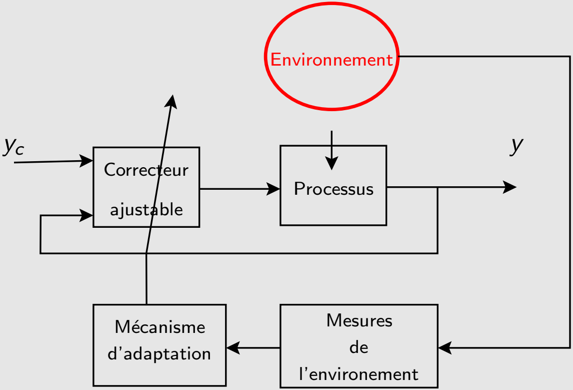
Schéma fonctionnel d'une commande adaptative

Deux boucles :

Une boucle conventionnelle : C'est la boucle interne. Son rôle est de réaliser une régulation ou une poursuite,

Une boucle adaptative : C'est la boucle externe. Son rôle est de modifier si besoin le correcteur de la boucle interne.

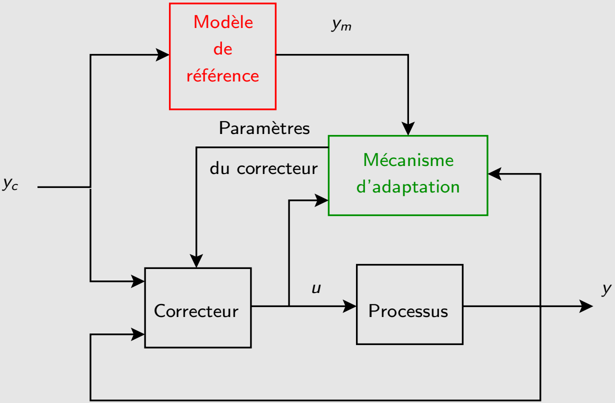
Commande adaptative en boucle ouverte



Commande adaptative en boucle ouverte

- Pas de feedback dans la boucle externe,
- La boucle adaptative agit suite à un changement dans l'environnement,
- La commande par séquencement de gain (gain-scheduling) en est un exemple.

Commande adaptative directe



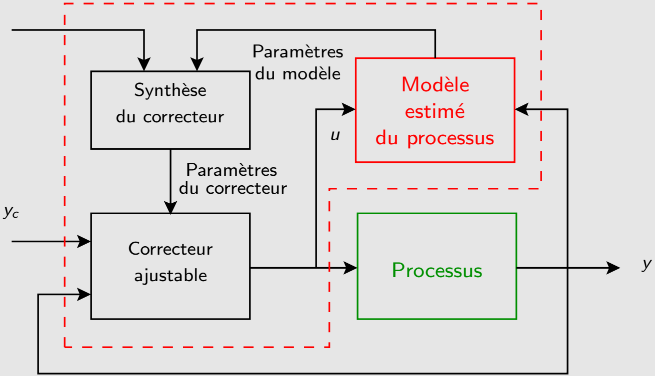
Commande adaptative directe

- Elle utilise un modèle de référence our spécifier les performances désirées,
- La boucle adaptative modifie le correcteur de la boucle conventionnelle pour que celle-ci ai un comportement aussi proche que possible du modèle de référence,

Le mécanisme d'adaptation agit comme suit :

1. Il reçoit des informations à partir de la sortie du système, de la sortie du modèle de référence, de la consigne et de la commande,
2. Il calcule l'erreur $e = y - y_m$ pour mesurer l'indice de performance,
3. Il ajuste les paramètres du correcteur **directement** à travers le mécanisme d'adaptation.

Commande adaptative indirecte



Commande adaptative indirecte

Elle agit en trois étapes :

1. Collecte des données à partir du processus,
2. Identification d'un modèle,
3. Utilisation du modèle pour la synthèse du correcteur.

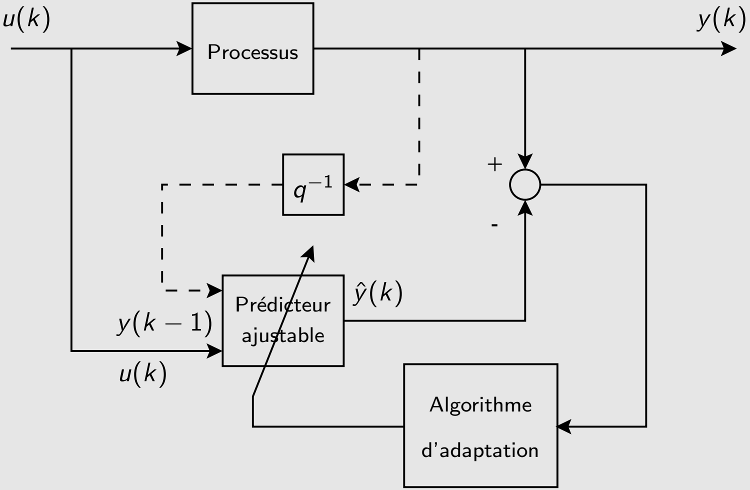
Ce qui distingue une commande adaptative indirecte d'une commande directe est :

1. Estimation en-ligne (temps réel) des paramètres du modèle du processus,
2. Calcul en-ligne des paramètres du correcteur en fonction du modèle estimé.

Commande adaptative indirecte

- La commande adaptative indirecte utilise les techniques d'estimation en-ligne du modèle. L'estimateur en-ligne est un *prédicteur ajustable* qui utilise la mesure des sorties passées du processus pour prédire la sortie actuelle.
- L'erreur de prédiction entre la sortie du processus et celle du prédicteur est utilisée pour ajuster les paramètres du prédicteur à travers des algorithmes d'adaptation

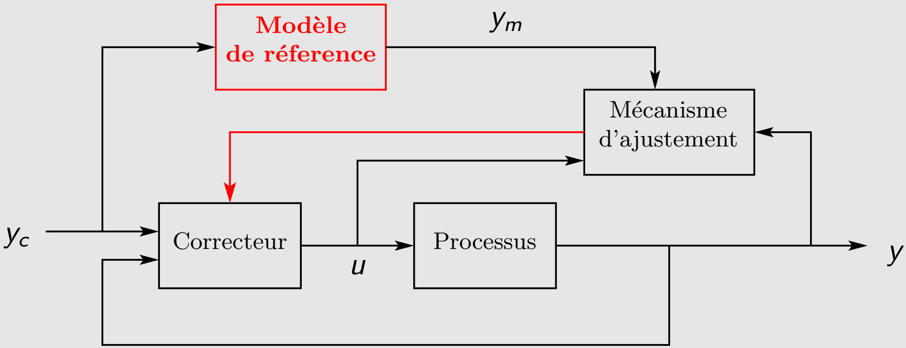
Commande adaptative indirecte



Plan du Cours

1. Bref historique sur la commande adaptative
2. Définitions
3. Commande adaptative par modèle de référence
4. Stabilité des systèmes non Autonomes
5. MRAC par la théorie de Lyapunov
6. MRAC dans l'espace d'état
7. Applications industrielles de la commande adaptative

Commande Adaptative par Modèle de Référence MRAC



- L'objectif de la commande adaptative par modèle de référence est d'avoir un système commandé en boucle fermée qui se comporte le plus proche possible d'un modèle de référence.

Commande Adaptative par Modèle de Référence MRAC

- Un schéma de commande adaptative comporte principalement deux boucles :

  1. **Une boucle interne** qui a la structure d'une boucle classique de régulation,
  2. **Une boucle externe** qui est la boucle adaptative.

- Les paramètres du régulateur adaptatif sont claculés à partir de l'erreur $e = y - y_m$ par la boucle adaptative pour un modèle de réference donné. On peut classer les méthodes d'ajustement des paramètres du correcteur adaptatif à modèle de réference en deux catègories :

  1. Les méthodes du gradient,
  2. Les méthodes basées sur la théorie de la stabilité.

Méthodes du Gradient

Règle MIT

On définit le critère de performances suivant :

$$J(\theta) = \frac{1}{2}e^2$$

avec

y	:	Sortie du système à commander,
y_m	:	Sortie du modèle de référence,
$e = y - y_m$	:	Erreur de poursuite du modèle de référence.

Ce critère doit être minimisé pour réduire l'erreur entre le système commandé et le modèle de référence.

Méthodes du Gradient

Règle MIT

- On utilise alors l'algorithme de descente du gradient pour rendre $J(\theta)$ plus petit, lors d'une mise à jour des paramètres

$$\frac{d\theta}{dt} \triangleq -\gamma\frac{\partial J}{\partial\theta} = -\gamma e\frac{\partial e}{\partial\theta}$$

où $\gamma > 0$ est un paramètre de réglage. $\dfrac{\partial J}{\partial\theta}$ représente la sensibilité de l'erreur par rapport aux paramètres.

- Il indique comment l'erreur est influencée par une variation de paramètres.

Méthodes du Gradient

Autres critères

- D'autres critère peuvent êtres utilisés :

$$J(\theta) = |e|$$

- Ce qui donne en appliquant l'algorithme du gradient la règle de mise à jour suivante :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial e}{\partial \theta} \, \mathrm{s}gn\,(e)$$

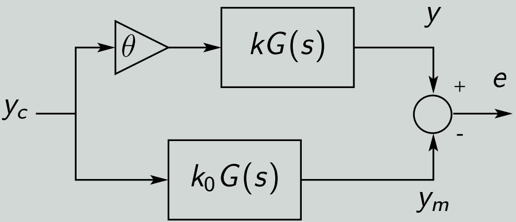
- On utilise aussi une autre règle de mise à jour appelée *sign-sign*

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \, \mathrm{s}gn \left(\frac{\partial e}{\partial \theta} \right) \mathrm{s}gn\,(e)$$

- Ce dernier algorithme est simple et rapide. Il est utilisé en télécommunications.

Commande adaptative MRAC en boucle ouverte I

Exemple (MRAC en BO)



- *La fonction de transfert du système $G(s)$ est connue,*
- *Le gain k est inconnu.*

Commande adaptative MRAC en boucle ouverte II

Exemple (MRAC en BO)

Objectif : *Trouver un correcteur en boucle ouverte pour que système corrigé possède la fonction de transfert $G_m(s)$ du modèle de réference :*

$$G_m(s) = k_0 G(s)$$

Correcteur : *proportionnel*

$$u = \theta y_c$$

- θ : *Paramètre ajustable du correcteur,*
- y_c *la consigne.*

Commande adaptative MRAC en boucle ouverte III

Exemple (MRAC en BO)

- *k connu $\Rightarrow$ poursuite parfaite du modèle de référence si*

$$\theta k G(s) = G_m(s) = k_0 G(s)$$

On déduit θ

$$\theta = \frac{k_0}{k}$$

Mais ... k inconnu $\Rightarrow$ utiliser la règle MIT pour la mise à jour de θ :

Commande adaptative MRAC en boucle ouverte IV

Exemple (MRAC en BO)

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial e}{\partial \theta} e$$

Or

$$e = y - y_m = [k\theta G(s) - k_0 G(s)] \cdot y_c$$

En dérivant par rapport à θ, et en tenant compte du fait que $y_m = k_0 G(s) y_c$:

$$\frac{\partial e}{\partial \theta} = kG(s)y_c = \frac{k}{k_0} y_m$$

d'où

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\gamma k}{k_0} y_m e = -\gamma' y_m e \text{ en posant} \gamma' = \frac{\gamma k}{k_0}$$

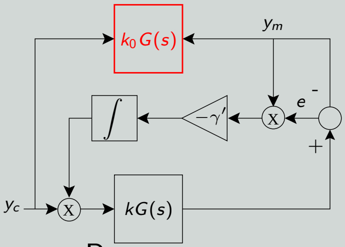
Commande adaptative MRAC en boucle ouverte V

Exemple (MRAC en BO)

On tire finalement

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = -\gamma' y_m e}$$

Modèle de référence



Processus

MRAC pour un premier ordre en boucle fermée I

MRAC pour un premier ordre en boucle fermée II

Exemple (Commande adaptative d'un système du premier ordre)

Système linéaire du premier ordre :

$$\frac{dy}{dt} = -ay + bu$$

- *a et b deux paramètres inconnus.*

Objectif : *Comportement en boucle fermée similaire à un modèle de référence du premier ordre également*

$$\frac{dy_m}{dt} = -a_m y_m + b_m y_c$$

On utilise la commande suivante

$$u(t) = \theta_1 y_c - \theta_2 y$$

MRAC pour un premier ordre en boucle fermée III

Exemple (Commande adaptative d'un système du premier ordre)

en remplaçant $u(t)$ on obtient le système en boucle fermée

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b\theta_1 y_c - b\theta_2 y = -(a + b\theta_2)y + b\theta_1 y_c$$

On aura un comportement similaire au modèle de référence si

$$a + b\theta_2 = a_m \qquad b\theta_1 = b_m$$

MRAC pour un premier ordre en boucle fermée IV

Exemple (Commande adaptative d'un système du premier ordre)

soit

$$\theta_1 = \frac{b_m}{b} = \theta_1^0$$
$$\theta_2 = \frac{a_m - a}{b} = \theta_2^0$$

Ordre du système = Ordre du modèle de référence ⇒ il est possible de faire une poursuite parfaite du modèle de référence. Dans le domaine de Laplace :

$$y = \frac{b\theta_1}{s + a + b\theta_2} y_c$$

MRAC pour un premier ordre en boucle fermée V

Exemple (Commande adaptative d'un système du premier ordre)

on calcule alors $\dfrac{\partial e}{\partial \theta} = \left[\dfrac{\partial e}{\partial \theta_1} \quad \dfrac{\partial e}{\partial \theta_2} \right]^T$:

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \frac{b}{s + a + b\theta_2} y_c$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_2} = -\frac{b^2\theta_1}{s + a + b\theta_2} y_c = -\frac{b}{s + a + b\theta_2} y.$$

Ces relation ne peuvent pas êtres utilisées directement car a et b sont inconnus.

MRAC pour un premier ordre en boucle fermée VI

Exemple (Commande adaptative d'un système du premier ordre)

Approximation : $\theta \simeq \theta_0$

$$s + a + b\theta_2^0 = s + a_m$$

on pose alors

$$s + a + b\theta_2 = s + a_m$$

D'après l'algorithme du gradient :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d\theta_1}{dt} \\ \dfrac{d\theta_2}{dt} \end{bmatrix} = -\gamma \begin{bmatrix} \dfrac{\partial e_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial e_2}{\partial t} \end{bmatrix} .e$$

MRAC pour un premier ordre en boucle fermée VII

Exemple (Commande adaptative d'un système du premier ordre)

soit

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma\left(\frac{b}{s+a_m}y_c\right)e$$
$$\frac{d\theta_1}{dt} = \gamma\left(\frac{b}{s+a_m}y\right)e$$

en posant $\gamma = \gamma' \cdot \frac{a_m}{b}$, *on obtient*

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d\theta_1}{dt} &= -\gamma'\left(\frac{a_m}{s+a_m}y_c\right)e\\ \frac{d\theta_1}{dt} &= \gamma'\left(\frac{a_m}{s+a_m}y\right)e\end{aligned}}$$

Le signe de b doit être connu pour avoir un gain γ *de signe correct.*

Plan du Cours

1. Bref historique sur la commande adaptative
2. Définitions
3. Commande adaptative par modèle de référence
4. Stabilité des systèmes non Autonomes
5. MRAC par la théorie de Lyapunov
6. MRAC dans l'espace d'état
7. Applications industrielles de la commande adaptative

Système non autonome

système non linéaire non autonome

$$\dot{x} = f(x, t)$$

Il dépend explicitement du temps t.

Définition (Point d'équilibre)

Le point $x_0 = 0$ *est un* point d'équilibre *du système (38) si :*

$$f(0, t) = 0, \forall t \geq 0$$

Stabilité d'un système non autonome

Définition (Stabilité uniforme)

Le point d'équilibre $x_0 = 0$ *est* stable *si*

$$\forall t_0 \geq 0, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, t_0) : \|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Si $\delta(\varepsilon, t_0) = \delta(\varepsilon)$ *est indépendant de* t_0*, alors le point d'équilibre est* uniformément stable*.*

Définition (Stabilité asymptotique)

Le point d'équilibre $x_0 = 0$ *est* asymptotiquement stable *s'il est stable et qu'en plus :*

$$\exists c > 0 : \forall t_0 > 0, \|x(t_0)\| < c \Rightarrow \underset{t \to \infty}{\|x(t)\|} \to 0$$

Fonction de classe κ

Définition (Fonction de classe κ)

La fonction $\alpha : [0, a) \to [0, \infty)$ *est* de classe κ *si :*

1. α *est strictement croissante.*
2. $\alpha(0) = 0$.

La fonction α est de classe κ_∞ *si elle est de classe* κ *et que :*

1. $a = \infty$
2. $\alpha(r) \underset{r \to \infty}{\to} \infty$

Théorèmes de Lyapunov pour le systèmes non autonomes

Théorème (Stabilité d'un système non autonome)

Soit $x_e = 0$ *un point d'équilibre de* $\dot{x} = f(x,t)$. *Soit* $D = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x\| < r\}$ *la boule de rayon* r, *alors si il existe une fonction* V *continument différentiable tel que :*

1. $\alpha_1(\|x\|) \leq V(x,t) \leq \alpha_2(\|x\|)$, *pour* $t \geq 0$
2. $\dot{V} = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial x} \cdot \dot{x} + \dfrac{\partial V}{\partial t} \leq \alpha_3(\|x\|)$, *pour* $t \geq 0$
3. *Les fonctions* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *sont de classe* κ,

alors $x_e = 0$ *est* uniformément asymptotiquement stable.

Utilisation pratique

Remarque

En pratique, il faut borner supérieurement $V(x,t)$ par une fonction indépendante de t.

Lemme (Lemme de Barbalat)

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie et uniformément continue pour $t \geq 0$. Si $\lim_{t\to\infty} \int_0^t g(\tau)\mathrm{d}\tau$ existe et qu'elle est finie, alors :

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$$

Erreurs bornées I

Théorème (Erreur bornée et ensemble de convergence)

Soit $D = \{x \in R^n | \, \|x\| < r\}$. Supposons que $f(x,t)$ est Lipschitzienne sur $D \times [0, \infty)$. Soit $V(x,t)$ une fonction continûment différentiable tel que

$$\alpha_1 (\|x\|) \leq V(x,t) \leq \alpha_2 (\|x\|)$$

et

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x,t) \leq -W(x) \leq 0$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x,t) \leq -W(x) \leq 0, \ \forall t \geq 0, \ \forall x \in D$$

avec α_1 et α_2 des fonction de classe κ définies sur $[0, r)$ et $W(x)$ continue sur D.

Erreurs bornées II

Théorème (Erreur bornée et ensemble de convergence)

De plus, on suppose que $\frac{dV}{dt}$ *est uniformément continue en* t*, alors les solutions de* $\dot{x} = f(x,t)$ *avec* $\|x(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ *sont* bornées *et vérifient*

$$\lim_{t\to\infty} W(x) \to 0$$

De plus, si toutes les hypothèses sont vérifiées globalement et que $\alpha_1 \in \kappa_\infty$*, alors le résultat est vrai* $\forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n$*.*

Remarque

Il suffit d'avoir $\frac{d^2V}{d^2t}$ *bornée pour avoir* $\frac{dV}{dt}$ *uniformément continue.*

Plan du Cours

1. Bref historique sur la commande adaptative
2. Définitions
3. Commande adaptative par modèle de référence
4. Stabilité des systèmes non Autonomes
5. MRAC par la théorie de Lyapunov
6. MRAC dans l'espace d'état
7. Applications industrielles de la commande adaptative

Démarche

L'utilisation de la théorie de Lyapunov sur la stabilité des systèmes non stationnaires pour la synthèse d'une commande adaptative par modèle de référence (MRAC) passe par les étapes suivantes :

1. Formuler l'équation différentielle de l'erreur de poursuite du modèle de référence $e = y - y_m$,
2. Trouver une fonction candidate de Lyapunov et un mécanisme d'adaptation pour assurer

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = 0,$$

3. Généralement $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ est seulement semi-définie négative. Il est alors possible d'utiliser le théorème précédent pour démontrer la convergence de l'erreur vers zéro.

Exemple de synthèse I

Exemple (Synthèse MRAC par la méthode de Lyapunov)

Soit le modèle de référence linéaire à temps invariant du premier ordre

$$\frac{\mathrm{d}y_m}{\mathrm{d}t} = -a_m y_m + b_m y_c$$

On souhaite imposer son comportement à un système qui est aussi de premier ordre

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ay + bu$$

par une commande proportionnelle sur la mesure et la consigne

$$u = \theta_1 y_c - \theta_2 y$$

Exemple de synthèse II

Exemple (Synthèse MRAC par la méthode de Lyapunov)

L'erreur de poursuite est

$$e = y - y_m,$$

en remplaçant $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ *et* $\dfrac{\mathrm{d}y_m}{\mathrm{d}t}$ *on a*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y_m}{\mathrm{d}t}\\ &= -ay + bu + a_m y_m - b_m y_c - ay + b(\theta_1 y_c - \theta_2 y)\\ &\quad + a_m y - a_m y + a_m y_m - b_m y_c\end{aligned}$$

Exemple de synthèse III

Exemple (Synthèse MRAC par la méthode de Lyapunov)

Après simplification

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -a_m e - (b\theta_2 + a - a_m)y + (b\theta_1 - b_m)y_c$$

Si a et b connus alors

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_1^0 = \dfrac{b_m}{b} \\ \theta_2 = \theta_2^0 = \dfrac{a_m - a}{b} \end{cases}$$

alors

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$$

Exemple de synthèse IV

Exemple (Synthèse MRAC par la méthode de Lyapunov)

- *a et b sont inconnus* $\Rightarrow$ *construire le mécanisme d'ajustement pour que* $\theta_1 \to \theta_1^0$ *et* $\theta_2 \to \theta_2^0$

$$\lim_{t\to\infty} \theta_1 = \theta_1^0 \qquad ; \qquad \lim_{t\to\infty} \theta_2 = \theta_2^0$$

On introduit la fonction quadratique $V(.)$

$$V(e,\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{2}\left[e^2 + \frac{1}{\gamma}(\theta_1 - \theta_1^0)^2 + \frac{1}{\gamma}(\theta_2 - \theta_2^0)^2\right]$$

avec $\gamma > 0$.

Exemple de synthèse V

Exemple (Synthèse MRAC par la méthode de Lyapunov)

On remarque que $V = 0$ *si* $e = 0$, $\theta_1 = \theta_1^0$ *et* $\theta_2 = \theta_2^0$.
On calcul $\dot{V}$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} =& e\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{b\gamma}(b\theta_1 - b_m)\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{b\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t} \\
=& -a_m e^2 + \frac{1}{b\gamma}(b\theta_1 - b_m)(\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t} + b\gamma y_c e) \\
&+ \frac{1}{b\gamma}(b\theta_2 + a - a_m)(\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t} - b\gamma y e)
\end{aligned}$$

Exemple de synthèse VI

Exemple (Synthèse MRAC par la méthode de Lyapunov)

- *Mise à jours suivante des paramètres :* θ_1 *et* θ_2

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t} & = & -\gamma' y_c e \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t} & = & \gamma' y e \end{cases}$$

On déduit $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -a_m e^2,$$

Exemple de synthèse VII

Exemple (Synthèse MRAC par la méthode de Lyapunov)

- $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leq 0 \Rightarrow V(t)$ *est décroissante* $\Rightarrow V(t) \leq V(0)$,
- *On déduit que* e, θ_1, θ_2 *et* $y = e + y_m$*sont bornés,*
- *Le modèle de référence* $G_m(s)$ *est stable et la consigne* y_c *bornée.*

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}^2t} &= -2a_m e\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\\ &= -2a_m e\left(-a_m e - (b\theta_2 + a + (b\theta_1 - b_m)y_c - a_m)y\right)\end{aligned}$$

Exemple de synthèse VIII

Exemple (Synthèse MRAC par la méthode de Lyapunov)

- $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}^2 t}$ *est aussi bornée* $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d} V}{\mathrm{d} t}$ *est uniformément continue*
- *Le théorème précédent permet de conclure que*

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$$

$\not\Rightarrow \theta_1 \to \theta_1^0$ *et* $\theta_2 \to \theta_2^0$.

- *Il faut imposer une condition sur l'excitation.*

Comparaison MIT-Lyapunov

Lyapunov	MIT
$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t} = -\gamma' y_c e \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t} = \gamma' y e \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t} = -\gamma' \left(\dfrac{a_m}{s+a_m} y_c \right) e \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t} = \gamma' \left(\dfrac{a_m}{s+a_m} y \right) e \end{cases}$

Comparaison MIT-Lyapunov

- Dans les deux cas, la régle d'adaptation peut être écrite comme suit

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \gamma\varphi e$$

avec

$$\begin{array}{lcl} \theta & : & \text{vecteur des paramètres,} \\ \varphi = [-y_c \quad y]^T & : & \text{Règle de Lyapunov,} \\ \varphi = \dfrac{a_m}{s+a_m}[-y_c \quad y]^T & : & \text{Règle MIT.} \end{array}$$

- La règle de Lyapunov est plus simple et ne nécessite pas de filtrage.

Plan du Cours

1. Bref historique sur la commande adaptative
2. Définitions
3. Commande adaptative par modèle de référence
4. Stabilité des systèmes non Autonomes
5. MRAC par la théorie de Lyapunov
6. MRAC dans l'espace d'état
7. Applications industrielles de la commande adaptative

Formulation du problème

Processus

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + Bu$$

Modèle de référence

$$\frac{\mathrm{d}x_m}{\mathrm{d}t} = A_m x_m + B_m y_c$$

Commande

$$u = My_c - Lx$$

Objectif : Poursuivre le modèle de référence.

Système en boucle fermé

Système en boucle fermée

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= (A - BL)x + BMy_c \\ &= A_c(\theta)x + B_c(\theta)\end{aligned}$$

Paramétrisation de la loi de commande : On peut choisir les paramètres des matrice M et L.

Condition de compatibilité

Il existe des valeurs de paramètres de commande tel :
Le système en boucle fermée = modèle de référence

$$\exists\theta^0 : \begin{cases} A_c(\theta^0) & = & A_m \\ B_c(\theta^0) & = & B_m, \end{cases}$$

On réalise une poursuite parfaite si

$$\begin{cases} A - A_m & = & BL \\ B_m & = & BM, \end{cases}$$

soit

$$\begin{array}{rcl} L & = & \left(B^T B\right)^{-1} B^T (A - A_m) \\ M & = & \left(B^T B\right)^{-1} B^T B_m. \end{array}$$

Equation différentielle de l'erreur

Erreur de poursuite du modèle

$$e = x - x_m$$

en posant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_c(\theta^0) & = & A_m \\ B_c(\theta^0) & = & B_m \end{array} \right.$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= A_m e + \underbrace{\left(A_c(\theta) - A_c(\theta^0)\right) x + \left(B_c(\theta) - B_c(\theta^0)\right) y_c}_{\Psi(\theta - \theta^0)} \\ &= A_m e + \Psi(\theta - \theta^0) \end{aligned}$$

Calcul de la commande I

On choisit

$$V(e,\theta) = \frac{1}{2}\left[\gamma e^T P e + (\theta - \theta^0)^T(\theta - \theta^0)\right]$$

avec $P > 0$.
On supposant que Q vérifie

$$A_m^T P + P A_m = -Q$$

La dérivée temporelle de V est alors

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\gamma}{2} e^T Q e + \gamma(\theta - \theta^0)\Psi^T P e + (\theta - \theta^0)^T \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ &= -\frac{\gamma}{2} e^T Q e + (\theta - \theta^0)^T \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \gamma \Psi^T P e\right)\end{aligned}$$

Calcul de la commande II

Pour avoir $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ semi-définie négative, on choisit la règle d'adaptation suivante

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\gamma \Psi^T P e$$

ce qui donne

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma}{2} e^T Q e.$$

En utilisant le théorème sur l'erreur bornée et le Lemme de Barbalat, on conclut que

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = 0$$

MRAC en boucle ouverte par approche d'état I

MRAC en boucle ouverte par approche d'état II

Exemple (MRAC en BO par approche d'état)

Système à commander : $G(s)$,
Modèle de référence : $G_m(s)$.

$$G_m(s) = k_0 G(s)$$

Commande en boucle ouverte

$$u = \theta y_c$$

Erreur de poursuite e

$$e = y - ym = (kG(s)\theta - k_0 G(s))u_c = kG(s)(\theta - \theta^0)y_c$$

$avec\ \theta^0 = \dfrac{k_0}{k}.$

MRAC en boucle ouverte par approche d'état III

Exemple (MRAC en BO par approche d'état)

(A, B) : Réalisation de la fonction de transfert $G(s)$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= Ax + B(\theta - \theta^0)y_c \\ e &= Cx \end{aligned}$$

Si $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax$ est asymptotiquement stable, alors

$$\exists P, \exists Q : A^T P + PA = -Q$$

MRAC en boucle ouverte par approche d'état IV

Exemple (MRAC en BO par approche d'état)

en choisissant

$$V = \frac{1}{2}\left(\gamma x^T P x + (\theta - \theta^0)^2\right)$$

on obtient

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x^T}{\mathrm{d}t} P x + x^T P \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) + (\theta - \theta^0)\frac{dm\theta}{\mathrm{d}t}$$

En remplaçant $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma}{2} x^T Q x + (\theta - \theta^0)(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \gamma y_c B^T P x)$$

MRAC en boucle ouverte par approche d'état V

Exemple (MRAC en BO par approche d'état)

On choisit la règle de mise à jours suivante des paramètres

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\gamma y_c B^T P x$$

pour avoir

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma}{2} x^T Q x$$

Inconvénient : *Nécessite la connaissance de x.*

MRAC en boucle ouverte par approche d'état VI

Exemple (MRAC en BO par approche d'état)

Solution : *On choisit P tel que*

$$B^T P = C$$

C *: matrice de sortie* $\Rightarrow$ *on utilise un retour de sortie au lieu d'un retour d'état.*

$$B^T P x = C x = e$$

Soit finalement

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\gamma y_c e$$

Plan du Cours

1. Bref historique sur la commande adaptative
2. Définitions
3. Commande adaptative par modèle de référence
4. Stabilité des systèmes non Autonomes
5. MRAC par la théorie de Lyapunov
6. MRAC dans l'espace d'état
7. Applications industrielles de la commande adaptative

Applications industrielles

Date	Application
1960	Commande adaptative d'avions.
1972	Premières applications industrielles du STR.
1973	Expériences en échelle réelle pour le pilotage adaptatif de bateaux.
1974	Commande adaptative de procédés chimiques.
1980	Commercialisation de pilote automatique de bateaux.

Applications industrielles

- Commande d'avions,
- Commande de missiles
- Commande de procédés chimiques,
- commande d'actionneurs électriques,
- Commande de satellites.

Quand utiliser la commande adaptative ?

1. Paramètres incertains,
2. Paramètres variables,
3. Retards importants,
4. Perturbations sur les entrées ou les mesures,
5. Changements dans l'environnement du système,
6. Comportement non linéaire,
7. Changement dans l'ordre ou les coefficients de la fonction de transfert du système.

Régulateurs adaptatifs industriels

Compagnie	Produit	Description
SattControl	**ECA 40**	Auto-tunning par la méthode des relais.
Fisher Control	**DPR 900**	Auto-tunning par la méthode des relais.
Foxboro	**EXACT**	Analyse du régime transitoire en boucle fermée.
ABB	**ABB adaptive controller**	STR par réponse impulsionnelle.
First Loop	**First Control Adaptive Controller**	Estimation réccursive de la fonction de transfert et placement indirects des poles.