



- 2025



飞行器动力学设计与仿真

飞行器结构动力学

## 第2章 单自由度系统

哈尔滨工业大学 航天学院

田 浩

联系方式：电话 - 139 3624 9818 电邮 - [tih@hit.edu.cn](mailto:tih@hit.edu.cn)

# 目录 contents



- ➔ 2.1 单自由度系统的自由振动
- ➔ 2.2 单自由度系统的强迫振动
- ➔ 2.3 单自由度系统的工程应用
- ➔ 2.4 阻尼理论

任何实际振动系统都是连续系统，其振动规律受到许多复杂因素影响。但工程测试研究与理论分析表明，在振动系统中只有质量及其分布、运动阻尼、恢复力特性等少数参数对振动特性及其响应起主导作用，据此提出了所谓的**集中参数模型(lumped parameter model)**。线性振动系统的集中参数模型由质量 $m$ ，弹簧刚度 $k$ 和阻尼 $c$ 构成，常将其称为实际对象的**质-弹-阻模型(mass-spring-damper model, 力学模型)**。

集中参数模型是最典型的离散化振动模型，模型中的集中参数是把实际连续系统**简化为理想的离散系统**后对应的**当量值(等效值)**，这通常需要根据测试结果进行分析计算得到。简化模型的精细程度取决于所考虑问题的复杂程度和所要求的精度，不同的简化模型，对应的集中参数将有所不同，分析的准确性也不尽相同，处理不好甚至会得到错误结论。因此，对实际系统进行**合理简化**是正确分析的前提。

- ◆ 正如绪论所述, 工程实践中的**结构振动系统**可模化为**离散模型**和**连续模型**两类不同的理想力学模型。其中**离散模型**具有(**可数的**)有限个自由度, **连续模型**则用(空间)分布式参数描述、具有(**可数/不可数的**)无限个自由度。
- ◆ 离散模型中最简单的是**单自由度线性系统**。
  - 单自由度振动系统的**质-弹-阻** ( $m-k-c$ ) 力学模型由质量块、弹簧和阻尼器三种理想化的元件组成, 分别以质量大小  $m$ 、阻尼器阻尼系数  $c$  和弹簧刚度系数  $k$  为**集中参数**。
  - 它的运动规律一般可用一个**二阶常系数常微分方程**来描述。这类力学和数学模型常用来作为工程实践中复杂系统的**初步近似描述**。

## 2.1 单自由度系统的自由振动

2.1.1 离散系统模型元素

2.1.2 单自由度系统的运动方程

2.1.3 无阻尼自由振动

2.1.4 有阻尼自由振动

2.1.5 对数衰减率

2.1.6 弹簧的等效质量

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

## 2.1 单自由度系统的自由振动



### 2.1.1 构成离散模型的元素

如前所述，组成离散模型的基本理想元素包括 **弹性元件( $k$ )、阻尼元件( $c$ )和质量(惯性)元件( $m$ )**三种。

对动力学而言当然还要考虑**外力**的作用。

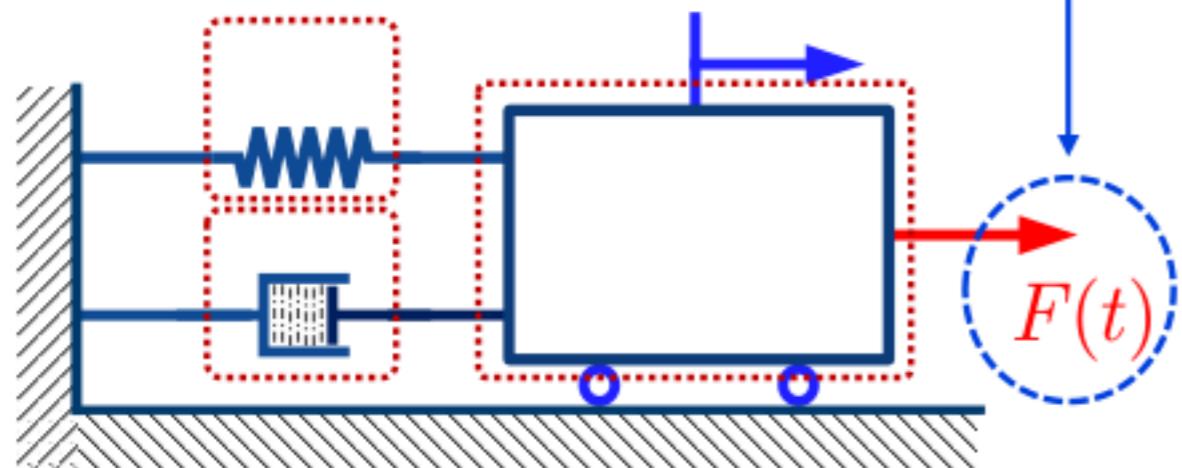


图2-1 离散质-弹-阻 模型

实际中工程结构系统往往比较复杂，只有经过详细分析与合理简化，才能获得标准的(单自由度)质-弹-阻( $m-k-c$ )模型。通常把**标准单自由度质-弹-阻模型**称为其所代表的原系统的 **单自由度等效振动系统(Equivalent Systems with SDOF)**

## 2.1 单自由度系统的自由振动



### ★ 构成离散模型的元素——弹性元件

弹性元件的典型例子是线弹簧，线弹簧在外力作用下产生变形，并提供与相对运动方向相反的弹性力 $F_s$ 。 $\Leftrightarrow$  (弹性)恢复力

弹性恢复力 $F_s$ 与其 相对位移 $x_2 - x_1$ (相对变形)的典型关系如图所示

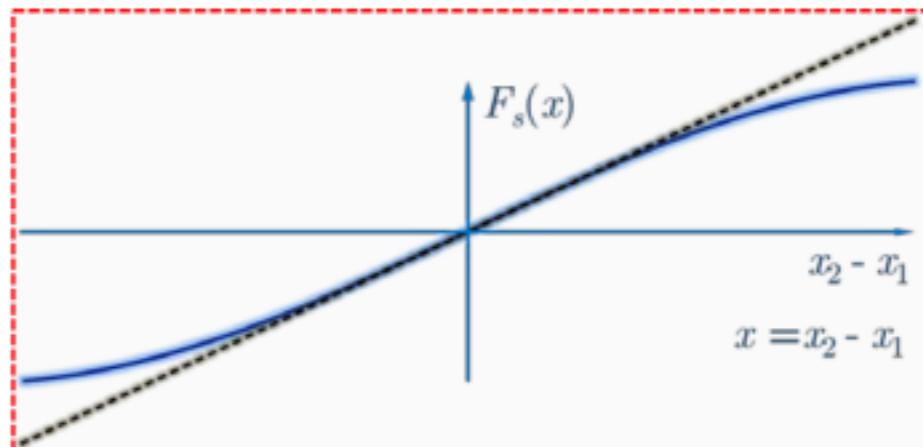
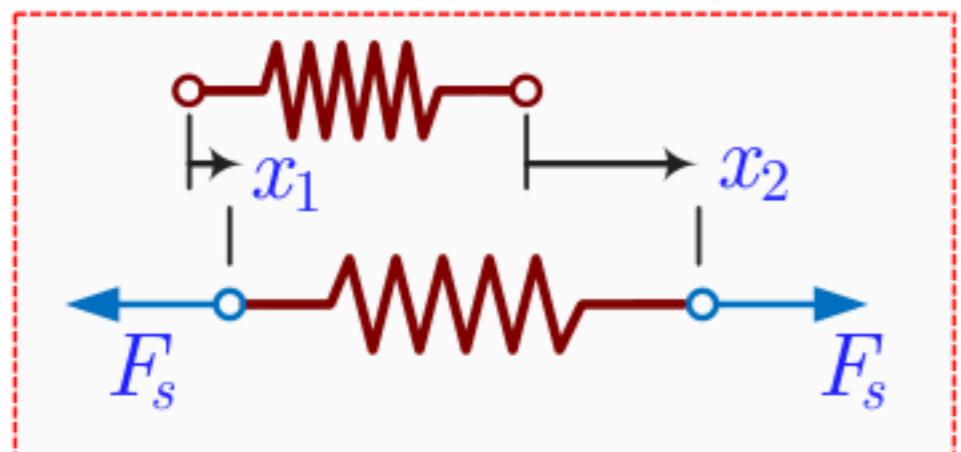


图2-2 弹簧模型

## 2.1 单自由度系统的自由振动



当线弹簧的两端点的相对位移  $x_2 - x_1$  较小(称为**小变形**)时, 可认为**弹簧力与弹簧变形量成正比**, 比例系数为图中曲线的**斜率  $k$** , 如果弹簧工作于弹簧力与其相对变形成正比的范围内, 则称弹簧为**线性弹簧**, 比例常数称为**弹簧常数**, 或**弹簧刚度(Stiffness)**, (一般)用符号  $k$  表示, 其量纲为  $[M][T]^{-2}$ , 单位为  $Nm^{-1}$ 。

$$F_s = k \cdot (x_2 - x_1)$$

显然, **弹簧刚度  $k$**  在数值上等于使弹簧产生单位线位移所需施加的力

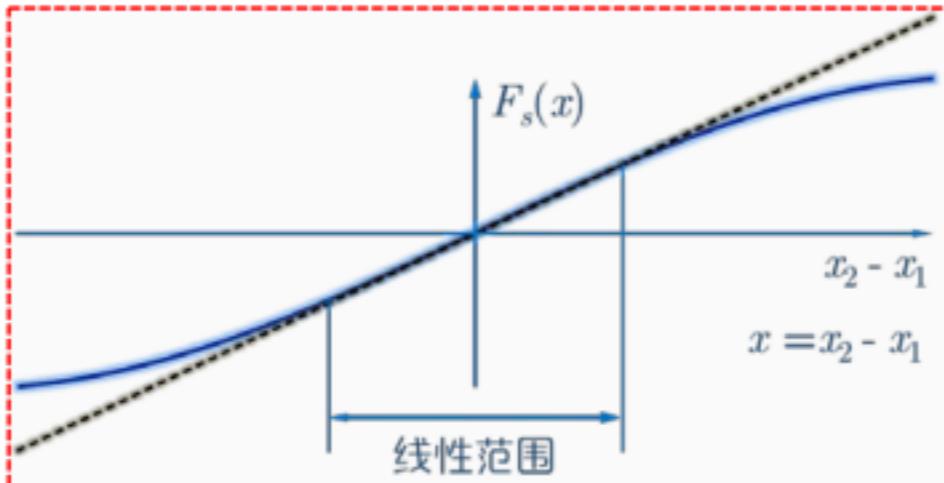
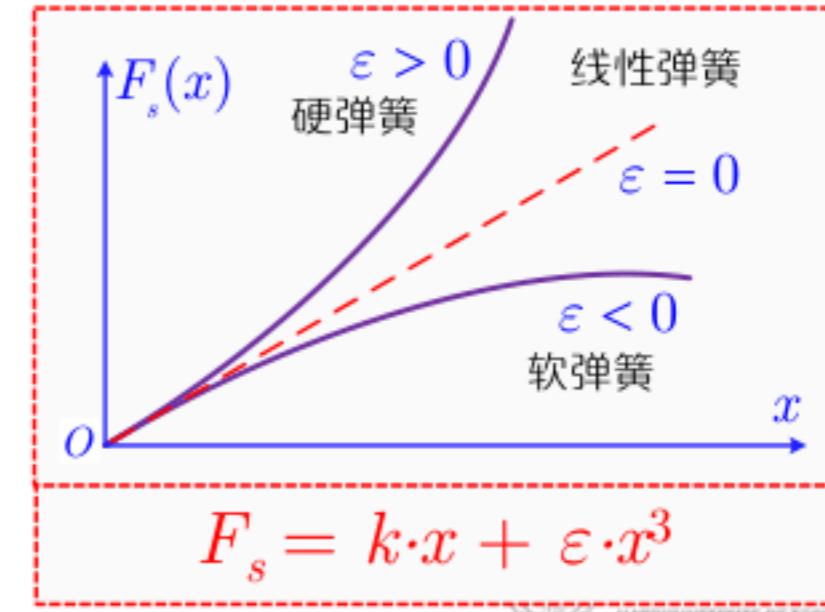


图2-2 弹簧模型



$$F_s = k \cdot x + \varepsilon \cdot x^3$$

## 2.1 单自由度系统的自由振动

对于角振动(或扭转振动)系统, 其振动则为在外力矩作用下的往复角位移运动, 此时系统对应的弹簧为扭转弹簧, 与线位移弹簧类似, 在小变形范围内外力矩 $M_k$ 与扭转角 $\theta$ 呈线性关系:  $M_k = k_\theta \cdot \theta$ , 常数 $k_\theta$ 称为**扭转弹簧刚度**, 其大小等于使扭转弹簧产生单位角位移所需施加的力矩。

扭转弹簧刚度的量纲为  $[M][L]^2[T]^{-2}$ , 单位为  $N\cdot m/rad$ 。

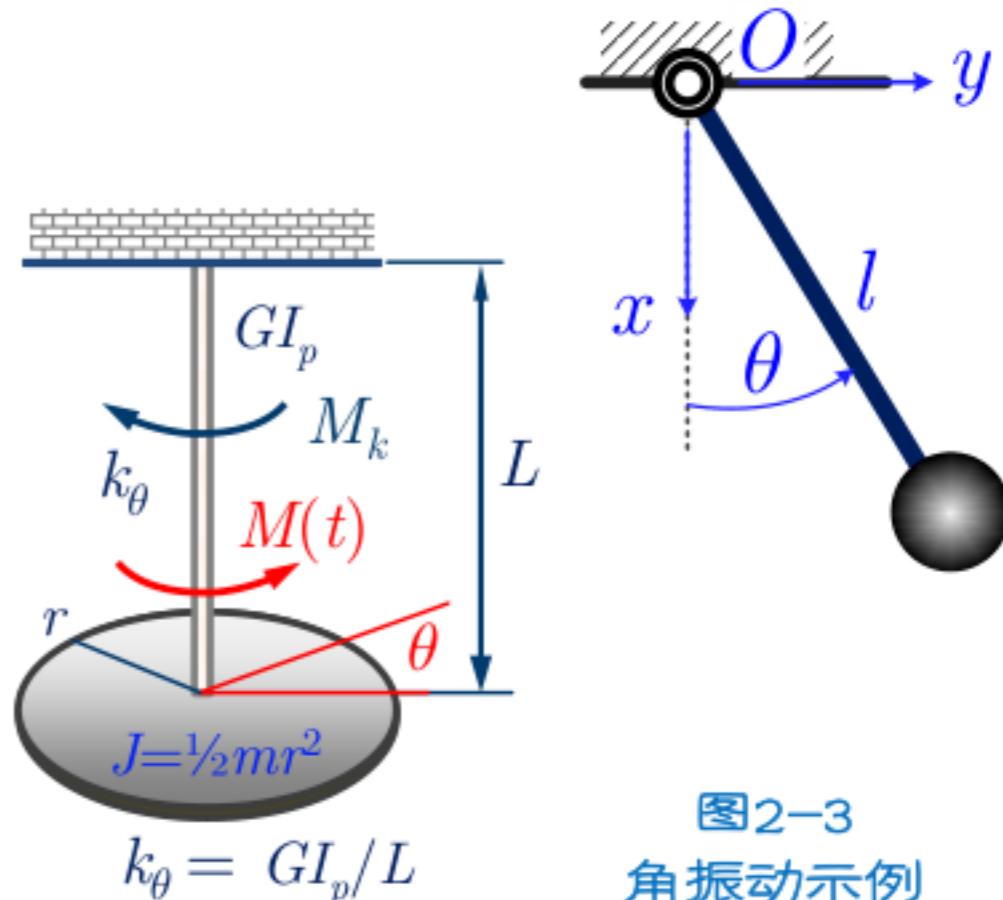


图2-3  
角振动示例

## 2.1 单自由度系统的自由振动



实际工程结构中的许多构件，其工作时受力与变形之间(近似)保持线性关系，在研究其振动规律时均可作为线性弹性元件处理。

在结构振动分析中，通常采用如下假设：

- 1. 忽略弹簧质量：**振动系统中惯量元件的质量往往远远大于弹簧的质量，在这种情况下忽略弹簧的质量，引起的误差微乎其微。因此，工程计算中为了简化计算，常常忽略弹簧的质量。但是在弹簧质量相对较大时，不应忽略弹簧的质量，否则会引起较大的计算误差。
- 2. 小变形假设：**实际工程系统在设计时一般已经限定构件的受力和变形在线性范围以内，系统振幅在正常情形中一般不会超出其弹性元件的线性范围，将其做线性化假设处理符合一般工程情况。

## 2.1 单自由度系统的自由振动



### ★ 构成离散模型的元素——弹性元件

#### ■ 单个物理(实际)弹簧的刚度

- ◆ 由机械设计手册中查得计算式



$$k_1 = \frac{Gd}{8nD^2}$$

$G$ —剪切弹性模量

$n$ —有效圈数

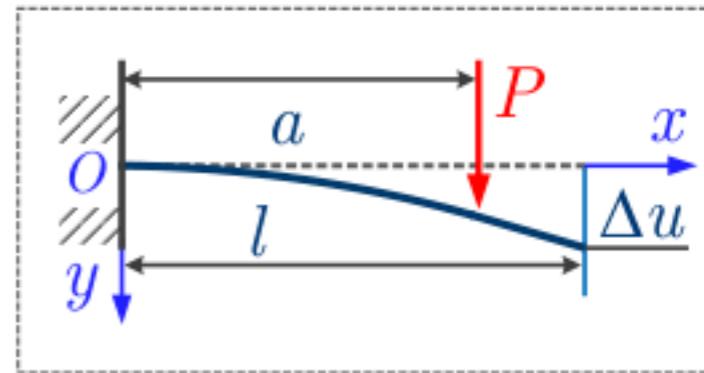
$D$ —簧圈平均直径

$d$ —弹簧丝的直径

- ◆ 实验测量实际弹簧的刚度

#### ■ 简单结构件的刚度计算

- ◆ 悬臂梁结构等效刚度(静力  $P$ )



$$y(x) = \begin{cases} \frac{Px^2(3a-x)}{6EI}, & (0 \leq x \leq a) \\ \frac{Pa^2(3x-a)}{6EI}, & (a < x \leq l) \end{cases}$$

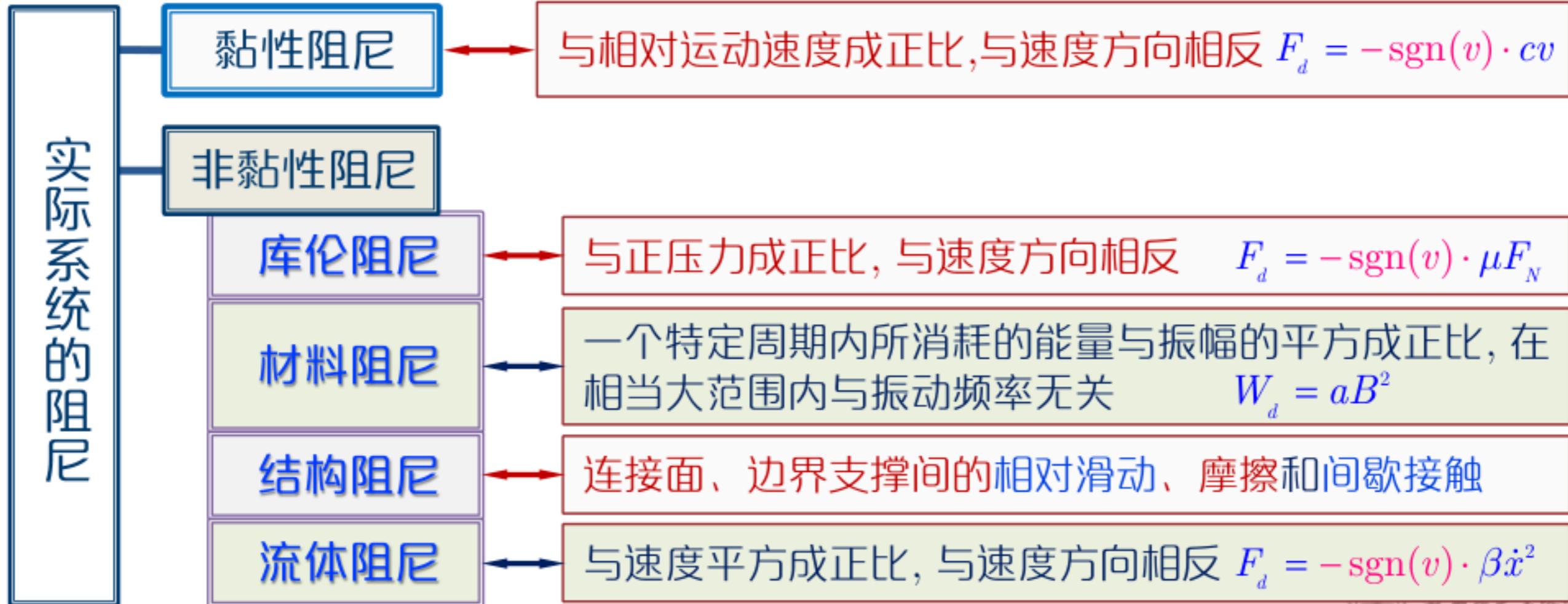
$$k = \frac{F_k}{y(l)} = \frac{P}{\Delta u} \quad \text{端点集中力} \rightarrow$$

$$k = \frac{3EI}{l^3}$$

哈尔滨工业大学  
HEILONGJIANG INSTITUTE OF TECHNOLOGY

## 2.1 单自由度系统的自由振动

常见的阻尼模型形式:



## 2.1 单自由度系统的自由振动



### ★ 构成离散模型的元素——阻尼元件

如无特别说明, 本课程所涉及的阻尼均指**黏滞阻尼**, 其**阻尼力**  $F_d$  与**阻尼器**(用  $c$  表示)两端的**相对速度**成正比, 如图2-4所示, 其中比例系数  $c$  称为**黏性阻尼系数**, 其单位为牛顿·秒/米( $\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ )。

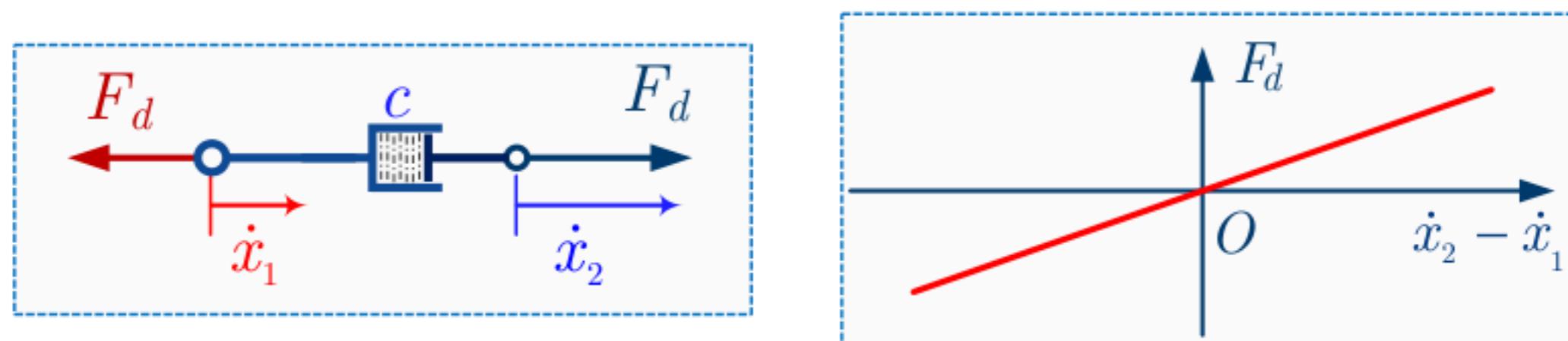


图2-4 黏性阻尼模型

## 2.1 单自由度系统的自由振动



### ★ 构成离散模型的元素——惯性元件

惯性元件就是系统的质量元件，惯性力 $F_m$ 与质量元件加速度  $\ddot{x}(t)$  成正比，

图2-5所示平移运动的比例系数就是质量 $m$ 。

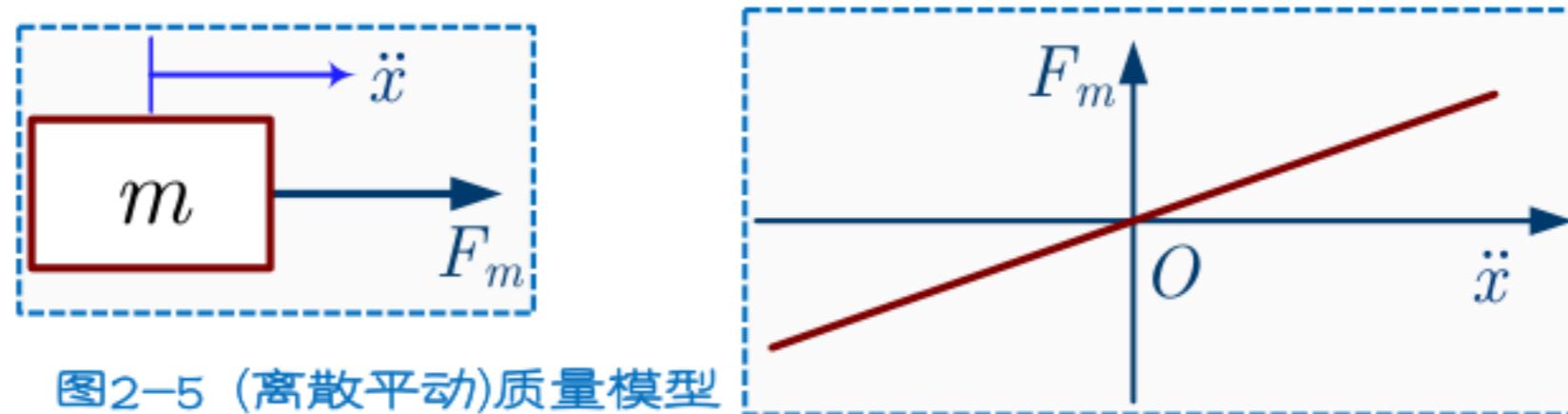


图2-5 (离散平动)质量模型

在结构振动系统中，质量元件由实际结构简化而来，一般以**质点**或**质量块**形式表示，用它的运动代表振动系统的运动规律。因此，质量元件的简化至关重要。



### ★ 构成离散模型的元素——惯性元件

质量元件对于外激励的响应表现为一定的位移、速度和加速度，并产生一定的惯性力，这是质量元件被称为惯性元件的原因之一。

- ◆ 平移振动系统的质量：在平移系统中，质量的惯性体现为惯性力

$$F_m = m \ddot{x}$$

- ◆ 角振动系统的质量：在角振动系统中，旋转质量元件的惯性体现为惯性力矩

$$M_m = J \ddot{\phi}$$

式中， $m$  为平移系统质量元件的质量(mass)，其量纲为[M]，单位为kg或N·s<sup>2</sup>/m； $J$  为角振动系统中转动质量元件的转动惯量(moment of inertia)，其量纲为[M][L]<sup>2</sup>，单位为kg·m<sup>2</sup> 或N·m·s<sup>2</sup>/rad

## 2.1 单自由度系统的自由振动



### ★ 弹性元件的组合

实际工程系统中，常常会有多个弹性元件以各种形式组合在一起的情况，其中最典型的是并联和串联两种形式。

- ◆ 弹簧并联时的等效刚度(图2-6(a))

$$F_{s_1} = k_1(x_2 - x_1) \quad F_{s_2} = k_2(x_2 - x_1) \quad (2-1)$$

$$\begin{aligned} F_s &= F_{s_1} + F_{s_2} = (k_1 + k_2)(x_2 - x_1) \\ &= k_{eq}(x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (2-2)$$

即等效弹簧刚度为

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

当n个弹簧并联时有

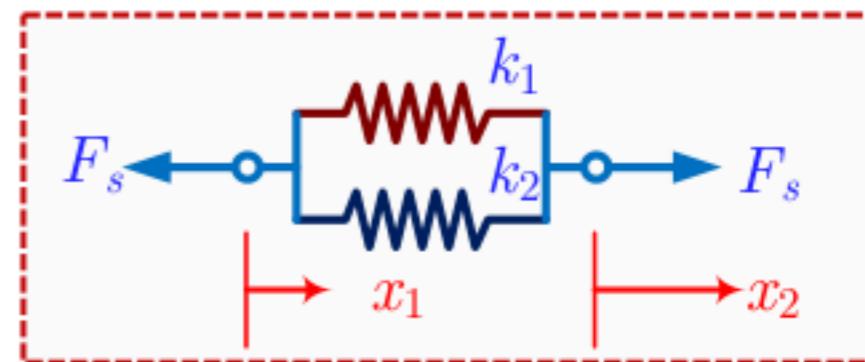


图2-6(a) 弹簧的组合(并联)

$$k_{eq} = \sum_{i=1,n} k_i \quad (2-3)$$

## 2.1 单自由度系统的自由振动

### ★ 弹性元件的组合

- ◆ 弹簧串联时的等效刚度(图2-6(b))

在串联情况下, 每个弹簧的恢复力相等:

$$F_s = k_1(x_0 - x_1) \quad F_s = k_2(x_2 - x_0) \quad (2-4)$$

消去 $x_0$ , 得  $F_s = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} (x_2 - x_1) = k_{\text{eq}} (x_2 - x_1)$

即

$$k_{\text{eq}} = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \quad (2-5)$$

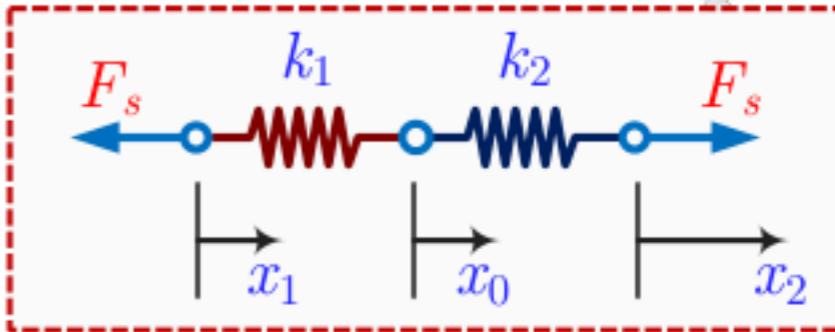


图2-6(b) 弹簧的组合(串联)

易证: 若 $n$ 个弹簧串联时有以下结论:

$$k_{\text{eq}} = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{k_i} \right) \right]^{-1} \quad (2-6)$$

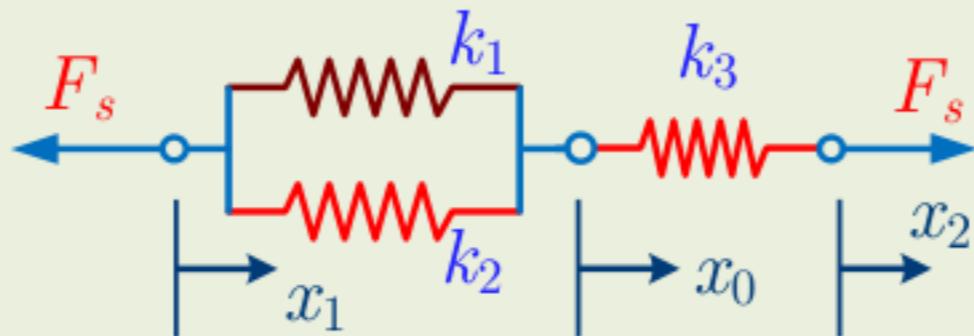
思考: 一弹簧被截去一半后其刚度系数 $k$ 如何变化?



### ★ 弹性元件的组合

**思考题2.1** 判断弹簧元件的串并联的原则是什么？

弹簧混合串、并联时的**等效刚度**



通过自学了解复杂单自由度系统的等效刚度(参考补充材料02-01-等效刚度.pdf)

## 2.1 单自由度系统的自由振动



### 2.1.2 单自由度系统的运动方程

#### 运动微分方程

单自由度质-弹-阻系统可由图2-1表示，**惯性元件(质量块)**的受力分析如图2-7所示。

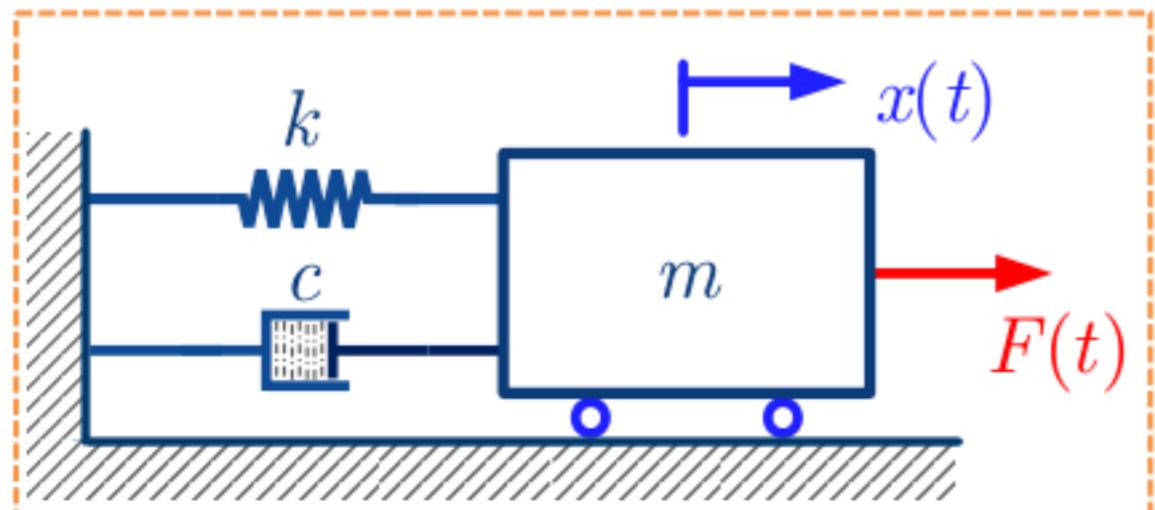


图2-1 单自由度系统：离散质-弹-阻模型

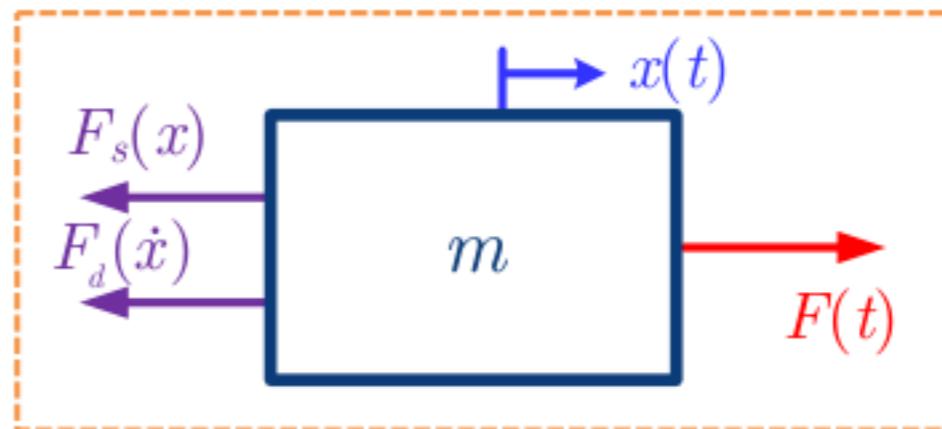


图2-7 单自由度系统的受力分析

哈爾濱工業大學  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

## 2.1 单自由度系统的自由振动



→ 用牛顿第二定律来建立系统的运动方程

用 $F(t)$ 表示作用于系统的外力,  $x(t)$ 表示质量 $m$ 相对于**静平衡位置**的位移:

$$m\ddot{x}(t) = F(t) - F_s(t) - F_d(t) \quad (2-7)$$

由于  $F_s(t) = kx(t)$      $F_d(t) = c\dot{x}(t)$

方程(2-7)可化为作:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (2-8)$$

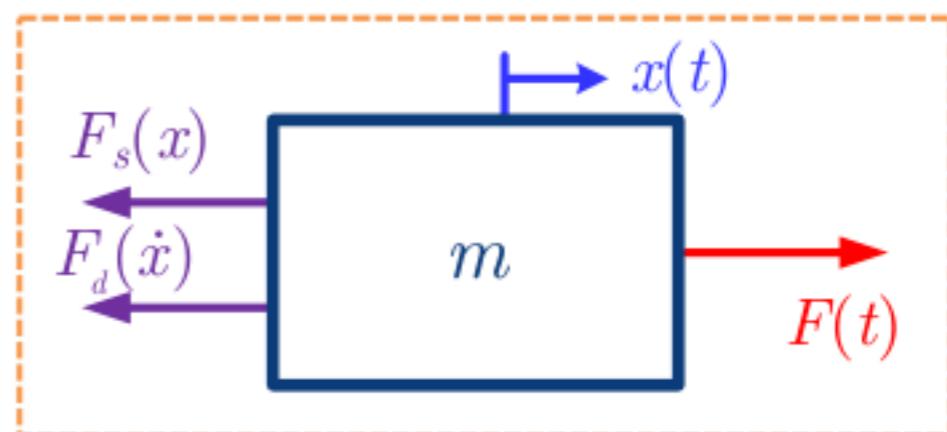


图2-7 单自由度系统的受力分析

式(2-8)是一个**二阶常系数线性常微分方程**。常数 $m, c, k$ 称为描述系统的**系统参数**。

→ 方程(2-8)的求解在(结构)振动理论和工程中具有十分重要的意义

## 2.1 单自由度系统的自由振动

受常值力作用的系统动力学建模

### ★ 受常值力的系统的建模及其影响

质量块在铅垂平面内振动时始终受**恒定重力**作用

系统的**静平衡方程**为:  $F = -k\delta_{st} \equiv mg$  (a)

- 以弹簧原长( $O'$ )为坐标原点

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + mg \quad (b)$$

- 以静平衡位置( $O$ )为坐标原点

于是有  $m\ddot{x} = -k(x + \delta_{st}) + mg$



$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (c)$$

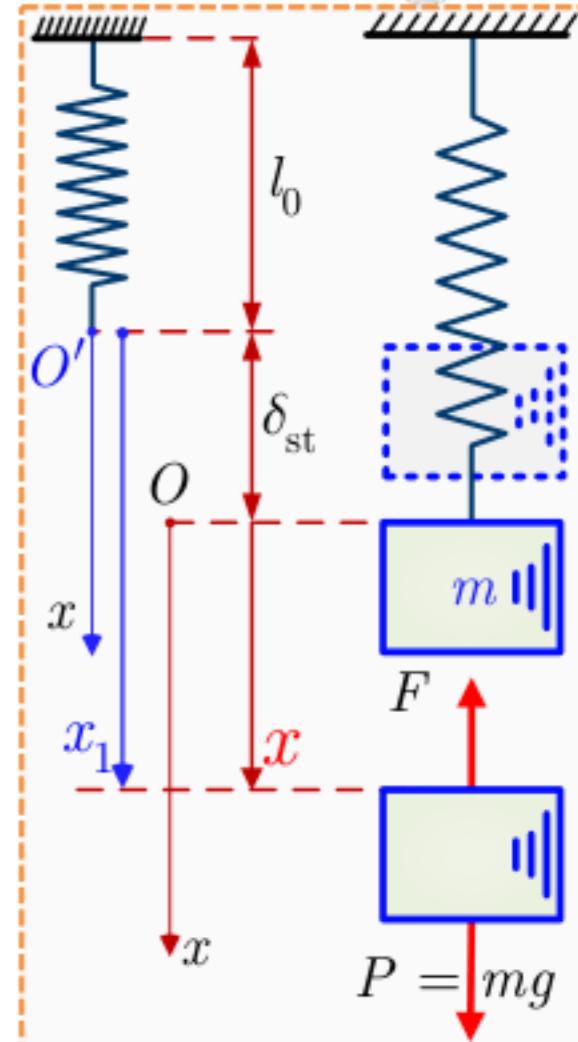


图2-8(a) 常值力影响  
Harbin Institute of Technology

## 2.1 单自由度系统的自由振动

受常值力作用的系统动力学建模

### ★ 受常值力的系统的建模及其影响

质量块在铅垂平面内振动时始终受**恒定重力**作用

系统的**静平衡方程**为:  $F = -k\delta_{st} \equiv mg$  (d)

- 以弹簧原长( $O'$ )为坐标原点

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + mg \quad (e)$$

- 以静平衡位置( $O$ )为坐标原点

于是有  $m\ddot{x} = -k(x + \delta_{st}) + mg$



$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (f)$$

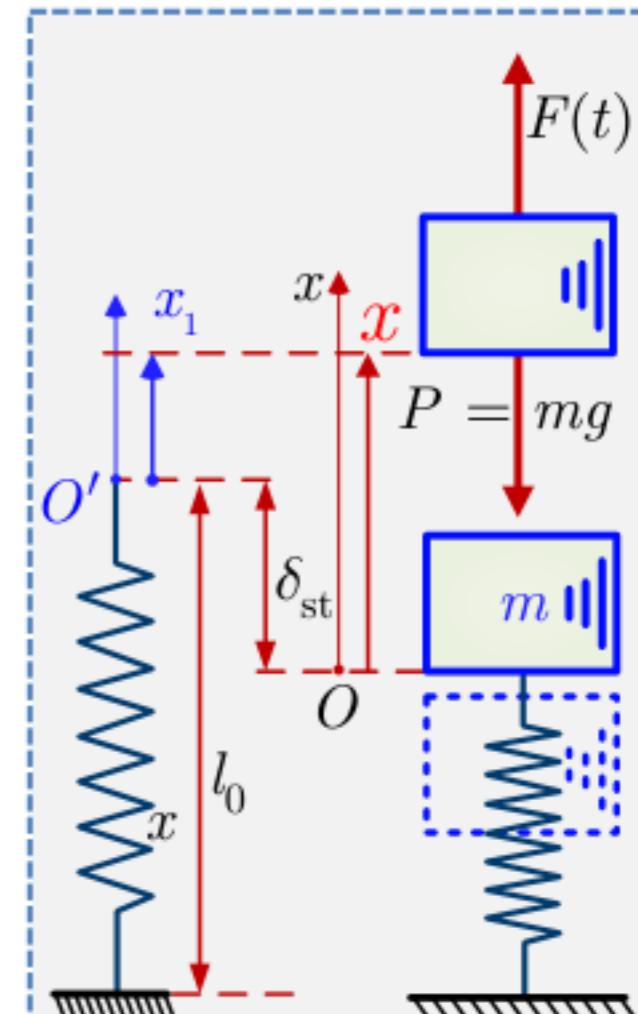


图2-8(b) 常值力影响



### ★ 受常值力的系统的建模及其影响

上述分析表明：相对于动力系统的静力平衡位置所给出的运动方程  
不受类似重力这类常值力的影响。

基于这一原因，通常在线性系统的动力分析中，首先确定静力平衡位  
置，以该静平衡位置作为位移测量参考位置，从而在动力学建模时不  
考虑常值力的影响：

- ◆ 这样确定的位移和系统相应内力即为对动激励的反应；
- ◆ 如果需要，可将相应的常值力(静力)分析结果叠加到动力反应中，  
即可得到总位移和合力。

## 2.1 单自由度系统的自由振动



### 2.1.3 无阻尼自由振动

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (2-8)$$

系统由**非零初始条件**(如初始位移、初始速度)所导致的振动称为**自由振动**(Free Vibration)

#### ◆ 运动方程的标准形式及其解

首先讨论系统的**无阻尼自由振动**。在自由振动情况下,  $F(t)$ 恒为零。

令(2-8)式中  $F(t)=0, c=0$ , 则有:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \xrightarrow{\text{化为标准形式}}$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0, \text{ with } \omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad (2-9)$$

$\omega_n$  称为无阻尼系统自由振动的**圆频率**。

由于 $\omega_n$  仅取决于系统的固有参数( $k, m$ )而与其它条件无关, 故通常也称之为系统的**固有(角, 圆)频率**(intrinsic frequency)或**自然频率**(nature frequency)

## 2.1 单自由度系统的自由振动



### 2.1.3 无阻尼自由振动

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (2-9)$$

根据常微分方程理论, 方程式(2-9) 具有如下形式通解:

$$\boxed{\underline{x(t) = 0}}$$

和

$$\boxed{x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t}$$

舍去该平凡解

仅保留非平凡解

平凡解通常也不能满足初始条件

非平凡解中待定系数  $C_1$  和  $C_2$  为积分常数, 需根据系统的初始条件 —— 初始位移  $x(0)$  和初始速度  $v_0 = \dot{x}(0)$  共同予以确定

方程(2-10)表明系统的振动运动是一种圆频率为  $\omega_n$  的简谐振动, 因此该系统常被称为简谐振荡器 — 简称谐振器。

(2-10)式描述的是最简单而又非常重要的一类振动。

## 2.1.3 无阻尼自由振动

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t \quad (2-10)$$

引入  $C_1 = C \sin \theta, C_2 = C \cos \theta \quad (2-11)$

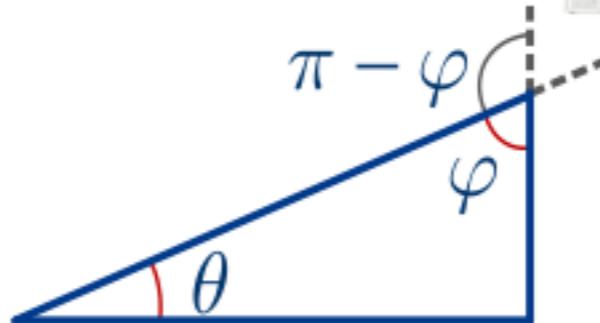
可得:  $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad (2-12)$

$$\theta = \arctan(C_1 / C_2)$$

将(2-11)代入(2-10)可得用正弦函数表示的振动解:

$$x(t) = C \sin(\omega_n t + \theta) \quad (2-13)$$

$C$  和  $\theta$  是另一种形式的积分常数, 同样需由  $x(0)$  和  $\dot{x}(0)$  确定。 $C$  和  $\theta$  分别称为系统的振幅与(初)相位



类似地, 若记

$$C_1 = C \cos \varphi, \quad (2-11a)$$

$$C_2 = C \sin \varphi \quad (2-12a)$$

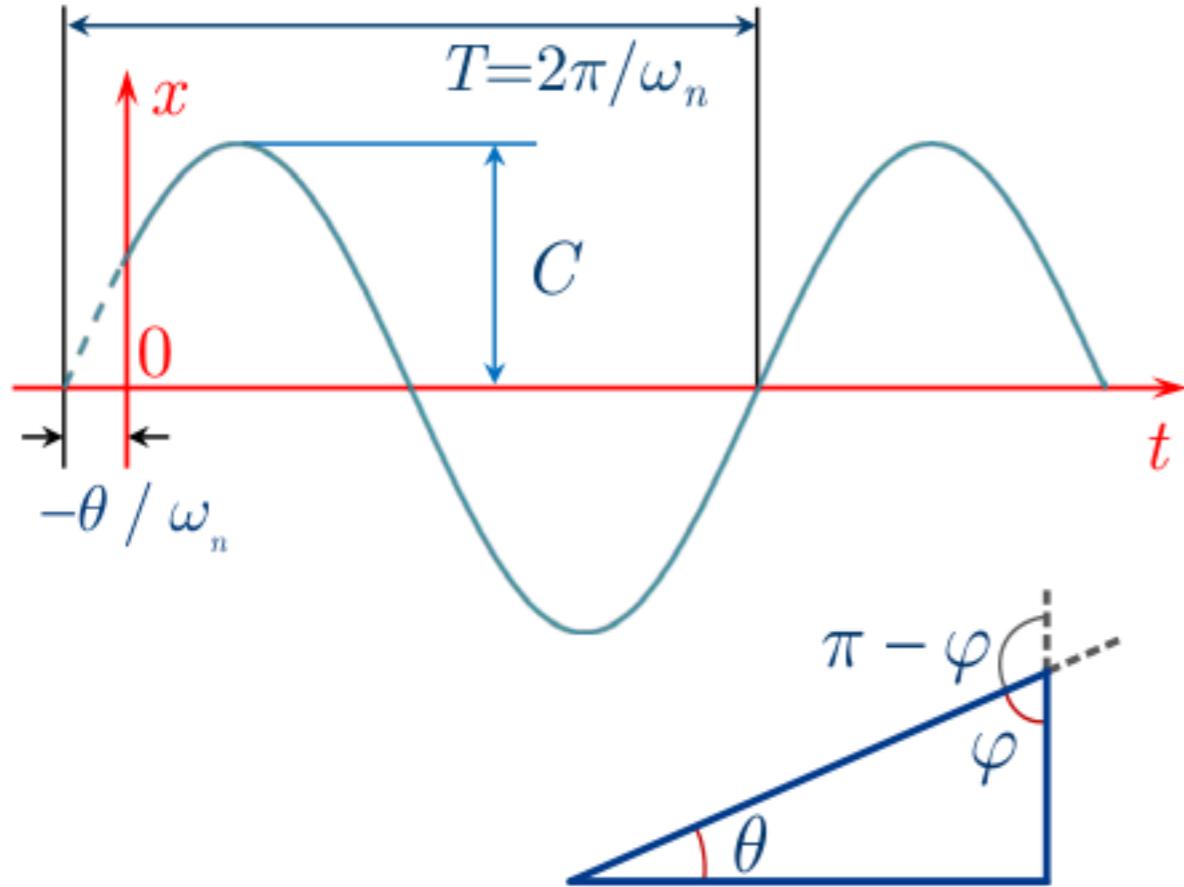
$$\varphi = \arctan(C_2 / C_1) \quad (2-12a)$$

振动解也可用余弦函数表示为

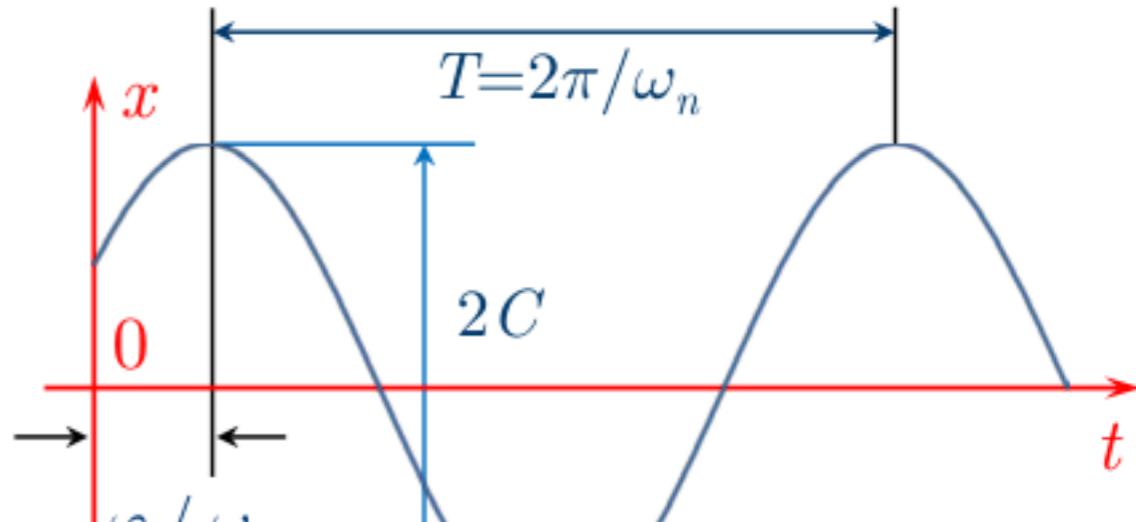
$$x(t) = C \cos(\omega_n t - \varphi) \quad (2-13a)$$

## 2.1.3 无阻尼自由振动

$$x(t) = C \sin(\omega_n t + \theta)$$



$$x(t) = C \cos(\omega_n t - \varphi)$$



$$\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

## 2.1.3 无阻尼自由振动

◆ 确定积分常数  $C_1$ 与 $C_2$  ( $C$ 和  $\theta$ )

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t \quad (2-10)$$

当给定初始条件后可确定的积分常数  $C_1$ 与 $C_2$ :  $C_1 = x_0$ ,  $C_2 = \dot{x}_0 / \omega_n$

引入符号  $x_0=x(0)$ ,  $v_0=\dot{x}_0=\dot{x}(0)$ , 利用式(2-10)及其导数可得简谐振子对初始条件  $x_0$ 和  $v_0(\dot{x}_0)$ 的响应解为:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2-14)$$

由(2-12)式可得振幅  $C$ 与相位  $\theta$ :

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{x_0}{\dot{x}_0 / \omega_n}\right) = \arctan\left(\frac{x_0}{\dot{x}_0} \cdot \omega_n\right)$$

(2-15)

## 2.1.3 无阻尼自由振动

- ◆ **周期( $T_n$ )** 从单自由度系统的解可看到运动具有周期性，在简谐振动中，完成一个完整运动周期所需的时间定义为系统振动的**周期  $T_n$**

$$T_n = 2\pi / \omega_n \quad (2-16)$$

- ◆ **频率( $f_n$ )** **固有频率**通常还用单位时间的振动循环次数表示：

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (2-17)$$

周期的单位为**秒(s)**； 固有频率的单位为**赫兹(Hz)**



### ★ 确定固有频率的方法

系统的固有频率 $\omega_n$ 是结构系统的重要参数，它是结构振动系统固有动特性的**本质反映**。由单自由度无阻尼系统的运动微分方程(的标准形式)可见，只有固有频率 $\omega_n$ 确定了，系统才能确定，方程才有特定的解。因此要确定系统的振动规律，首先要确定系统的固有频率。

确定系统的固有频率除了可以直接按照**定义**确定外，常用的还有**静变形法**和**能量法(对保守系统)**。

**思考2.2 总结求单自由度系统固有频率的方法和步骤。**

(根据补充材料：02-02-确定系统固有频率的方法.pdf)

## 例2-1

### 匀质半圆环的微幅振动

图 2-9 所示半径为  $R$  的匀质半圆环(其线密度为  $\rho$ )在粗糙水平面上作平面微幅无滑动振动。

试导出半圆环微幅振动下的运动微分方程，并证明其运动类似于简谐振子，计算振子的固有圆频率。

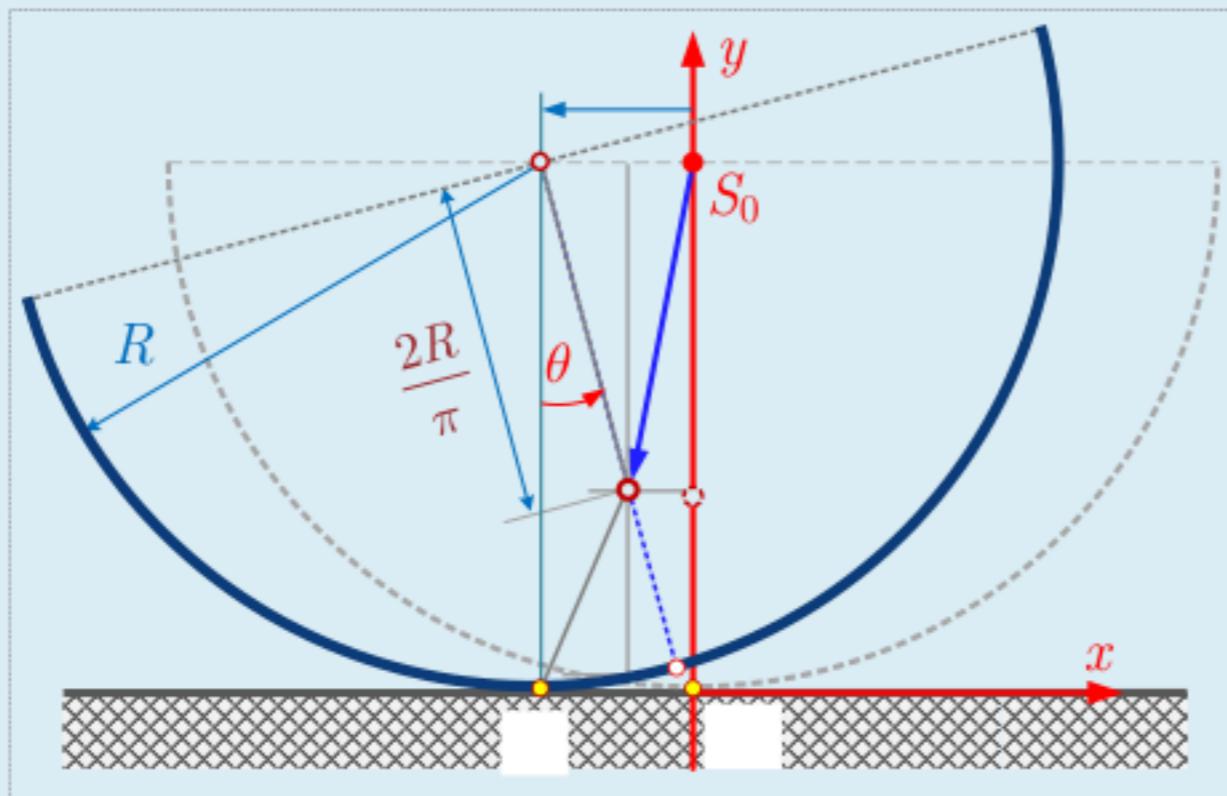


图2-9 例2-1题图

分析：

半圆环可简化为一维曲线。其运动属于刚体平面一般运动问题，其运动方程的建立过程比弹簧质量系统要复杂一些，需应用理论力学中**刚体的平面一般运动理论**来建立系统的运动方程。



哈爾濱工業大學  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

## 例2-1

### 匀质半圆环的微幅振动

设图中点C为半圆环质心，半圆环滚动倾角为 $\theta$ ，点B为半圆环与粗糙表面的接触点，它同时也是半圆环运动的速度瞬心，接触点B的定轨迹线为直线。在纯滚动限制条件下，过点B且垂直于半圆环面的轴线为半圆环微幅运动的瞬时转动轴。

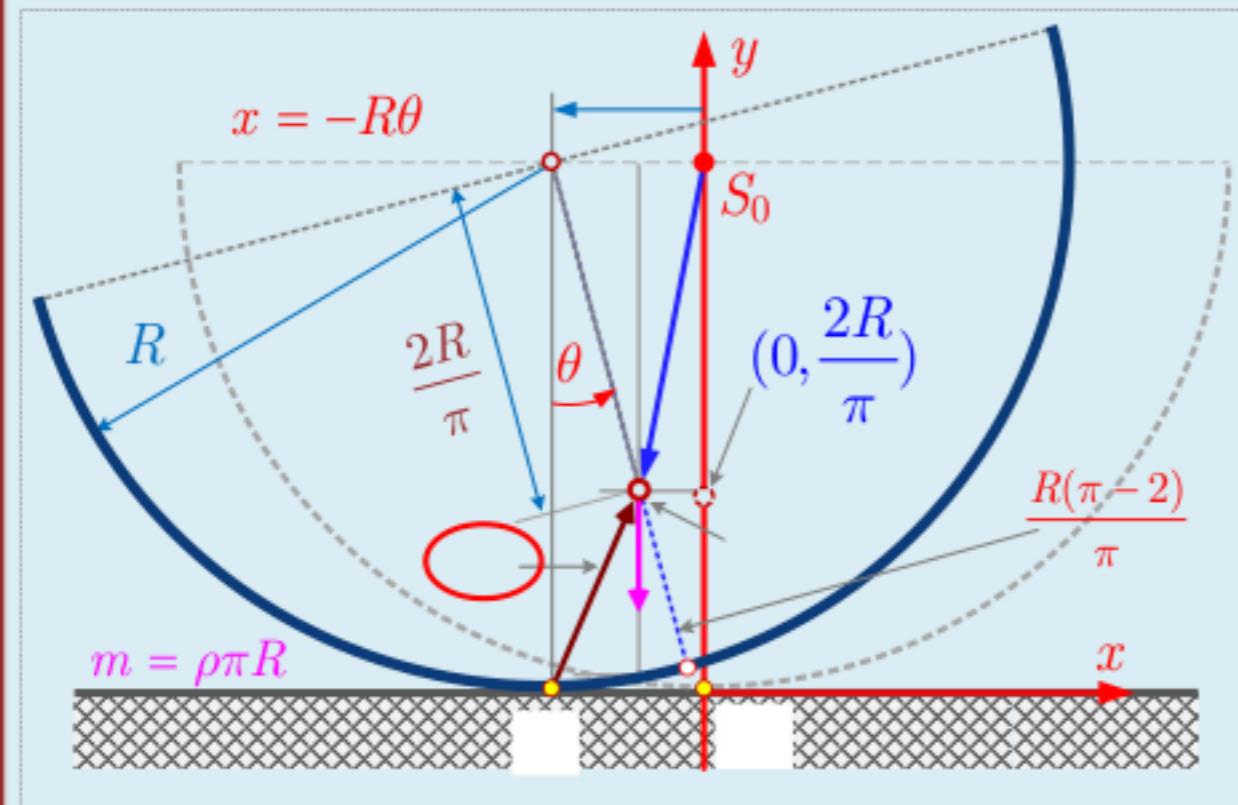


图2-9 例2-1题图

取速度瞬心定轨迹点B(也即接触点)为动基点，并应用质点系对任意动基点的绝对动量矩定理：

$$\dot{L}_B + \dot{r}_B \times m\dot{r}_C = M_B^{(e)}$$

也可应用 相对动量矩定理

$$\dot{L}'_B + \dot{r}_{bc} \times m\ddot{r}_B = M_B^{(e)}$$

## 例2-1

### 匀质半圆环的微幅振动

对于给定转角 $\theta$ , 半圆环的重力作用提供的外力矩为:

$$M_B^{(mg)} = \left(\frac{2R}{\pi} \cdot \sin \theta\right) \mathbf{i} \times (-\rho\pi R g) \mathbf{j} = -2\rho R^2 g \sin \theta \mathbf{k} \quad (\text{a})$$

其中:  $\rho$  为半圆环线密度

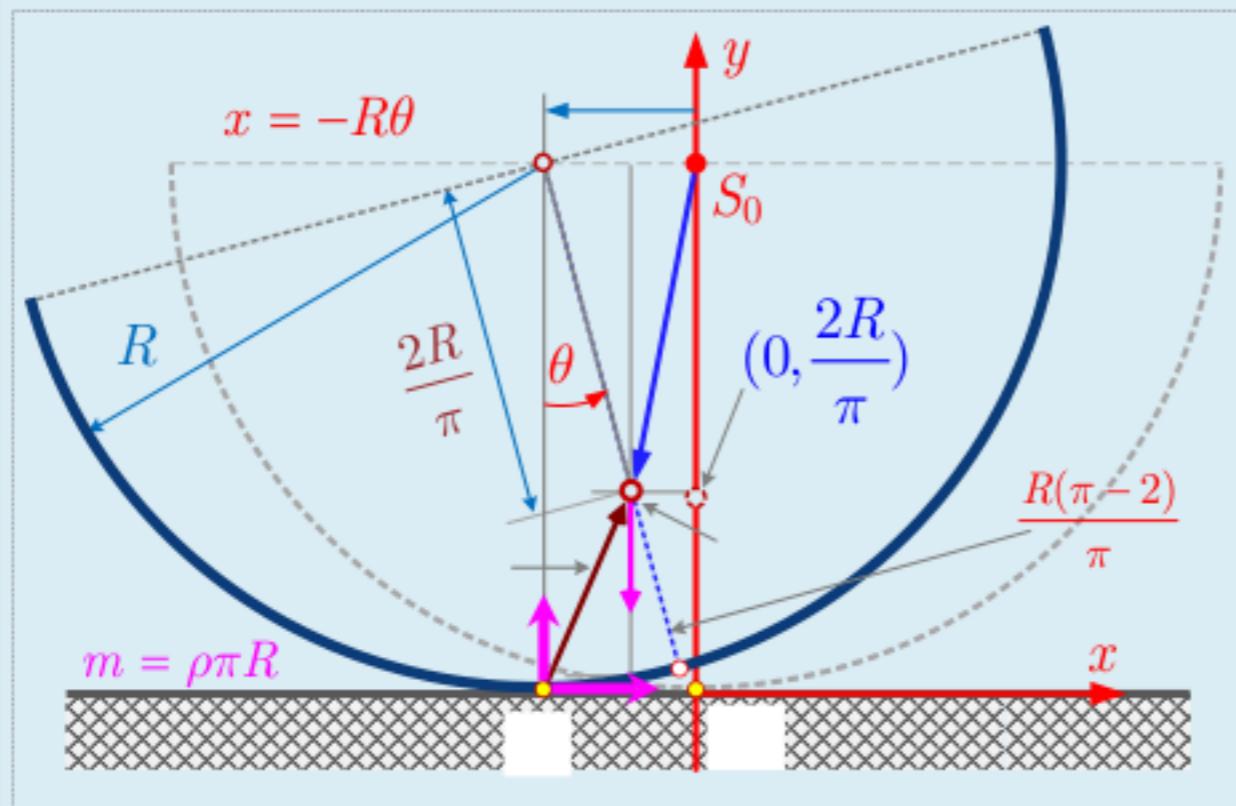


图2-9 例2-1题图

系统还受到地面的支撑力和静滑动摩擦力(约束外力)。但作用于B点的支撑力和静滑动摩擦力不提供力矩作用 — 这正是选择速度瞬心为动基点的优势/好处。

## 例2-1

### 匀质半圆环的微幅振动

半圆环对速度瞬心  $B$  点的绝对动量矩则可利用动基点与刚体质心动量矩之间的关系求得：

$$\mathbf{L}_B = \mathbf{L}_C + \mathbf{r}_{bc} \times \mathbf{p} = (-J_C \dot{\theta})\mathbf{k} + \mathbf{r}_{bc} \times m\dot{\mathbf{r}}_C \quad (b)$$

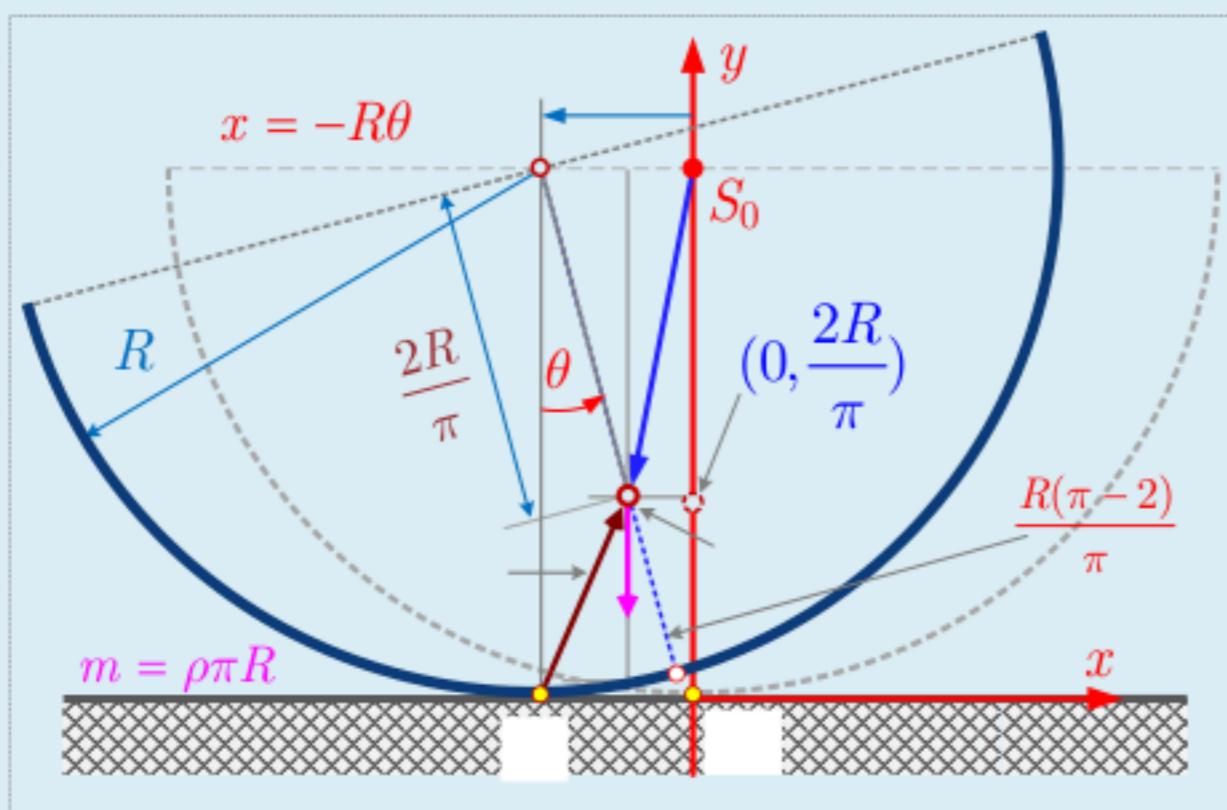


图2-9 例2-1题图

式中：

$$\begin{aligned} J_C &= J_S - (\rho\pi R)r_{sc}^2 \\ &= (\rho\pi R)R^2 - (\rho\pi R)\frac{4R^2}{\pi^2} \\ r_{bc}^2 &= R^2 + r_{sc}^2 - 2Rr_{sc}\cos\theta \\ \mathbf{r}_{bc} &= \left(R - \frac{2R}{\pi}\cos\theta\right)\mathbf{j} + \frac{2R}{\pi}\sin\theta\mathbf{i} \\ \dot{\mathbf{r}}_C &= \dot{\theta}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{bc} \end{aligned}$$

## 例2-1

### 匀质半圆环的微幅振动

将上述各量代入(b)式可得半圆环对速度瞬心点的绝对动量矩:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_B &= [-\rho\pi R^3(1 - \frac{4}{\pi^2})\dot{\theta}]k + (\rho\pi R)\mathbf{r}_{bc} \times (-\dot{\theta}k \times \mathbf{r}_{bc}) \\ &= 2\rho R^3(\pi - 2\cos\theta)\dot{\theta}k = (J_B\dot{\theta})k \end{aligned} \quad (b1)$$

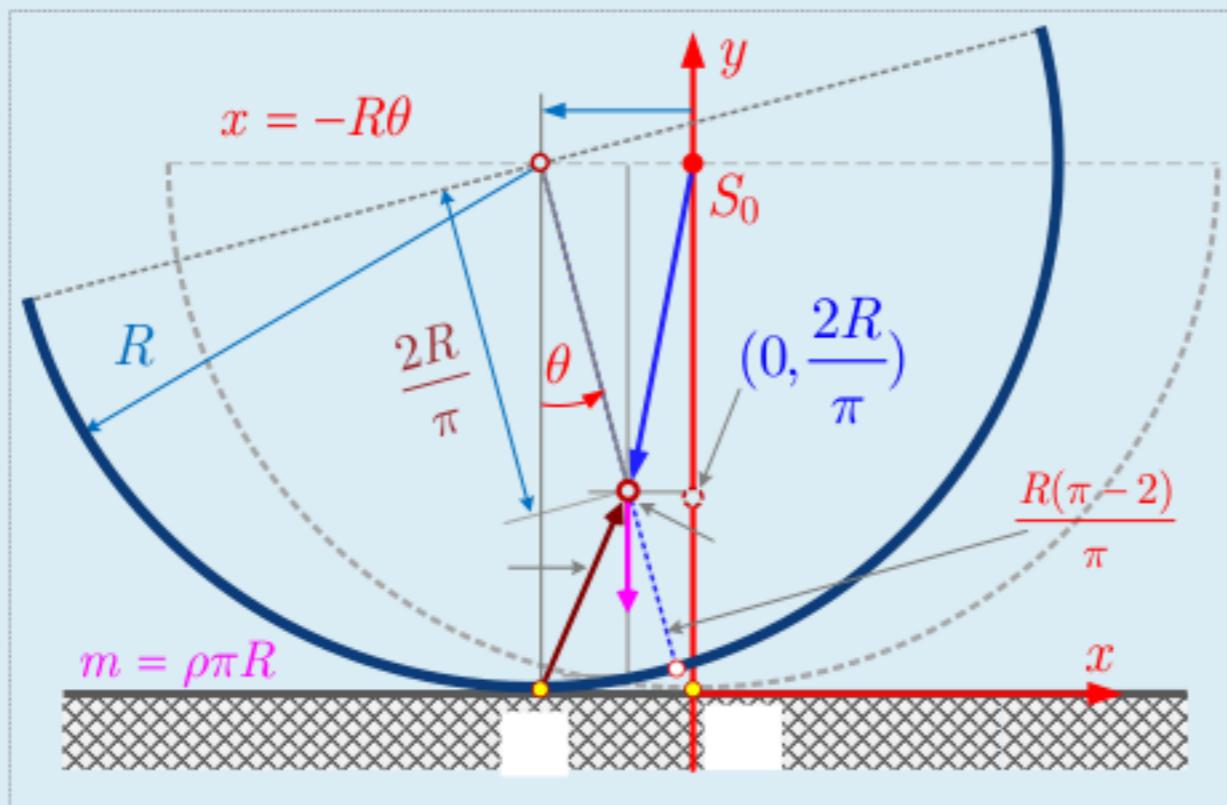


图2-9 例2-1题图

注意:

- ① 半圆环对点B的绝对动量矩与相对动量矩(碰巧)相等

$$L'_B = J_B\dot{\theta} = 2\rho R^3(\pi - 2\cos\theta)\dot{\theta}$$

- ②  $J_B$  是关于  $\theta$  的函数—非常值

$$J_B = 2\rho R^3(\pi - 2\cos\theta)$$

## 例2-1

### 匀质半圆环的微幅振动

注意到动基点(纯滚动接触几何点)和半圆环质心的速度分别为:

$$\dot{\mathbf{r}}_B = -R\dot{\theta}\mathbf{i}, \quad \dot{\mathbf{r}}_C = \dot{\theta}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{bc}$$

↑  
Why  $\neq 0$

(c)

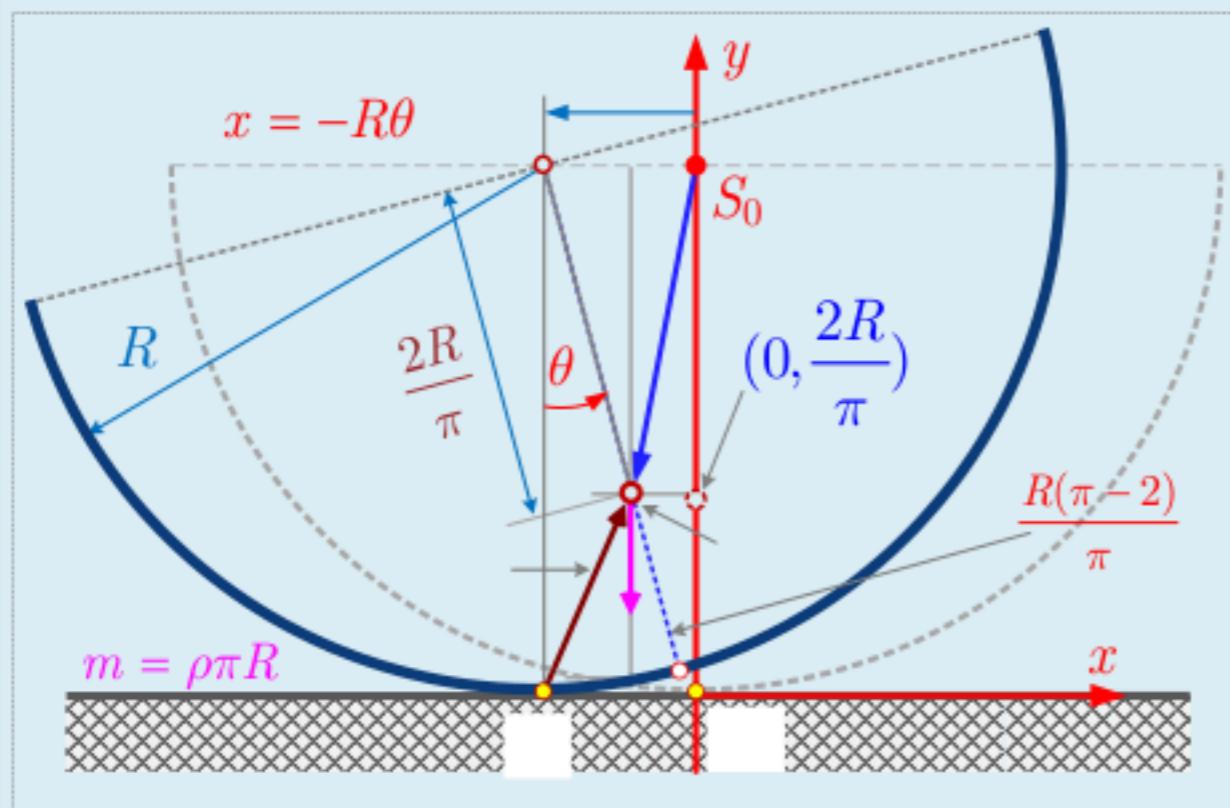


图2-9 例2-1题图

因此绝对动量矩定理式中:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{L}}_B &= \frac{d}{dt}[2\rho R^3(\pi - 2\cos\theta)\dot{\theta}\mathbf{k}] \\ &= 2\rho R^3(\pi - 2\cos\theta)\ddot{\theta}\mathbf{k} \\ &\quad + 2\rho R^3(2\sin\theta\dot{\theta})\dot{\theta}\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_B \times m\dot{\mathbf{r}}_C = -2\rho R^3 \sin\theta\dot{\theta}^2$$

## 例2-1

### 匀质半圆环的微幅振动

各项代入对接触点(动基点)的绝对动量矩方程中, 可得:

$$2\rho R^3(\pi - 2\cos\theta)\ddot{\theta} + 2\rho R^3(2\sin\theta)\dot{\theta}^2 - 2\rho R^3 \sin\theta \dot{\theta}^2 = -2\rho R^2 g \sin\theta \quad (\text{d})$$

化简得: 非线性微分方程

$$\rho R^3(\pi - 2\cos\theta)\ddot{\theta} + 2\rho R^3 \sin\theta \dot{\theta}^2 + \rho R^2 g \sin\theta = 0 \quad (\text{e})$$

微幅振动假设下, 该非线性微分方程可线性化:

$$\rho R^3(\pi - 2)\ddot{\theta} + 2\rho R^3 \cancel{\theta \dot{\theta}^2} + \rho R^2 g \theta = 0 \quad (\text{f})$$

$$R(\pi - 2)\ddot{\theta} + g\theta = 0 \qquad \ddot{\theta} + \frac{g}{R(\pi - 2)}\theta = 0 \quad (\text{f1})$$

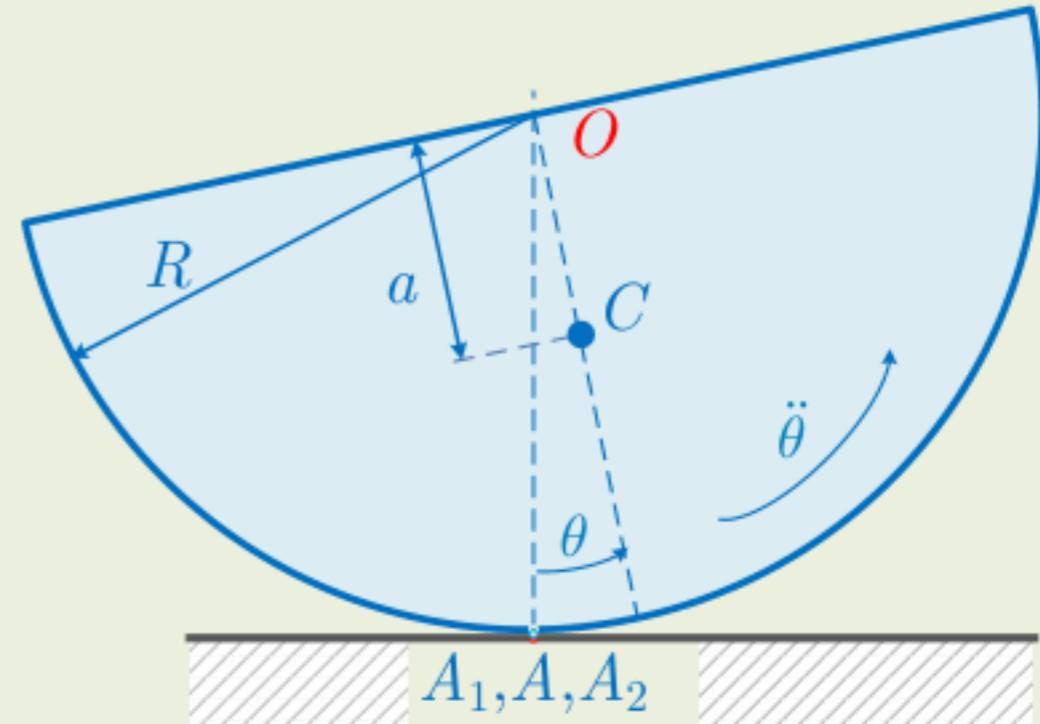
简谐振动, 其固有频率:

$$\omega_n^2 = \frac{g}{R(\pi - 2)} \quad (\text{g})$$

## 思考2.3

如图示匀质半圆盘在一水平面上作微幅无滑动摆动。设已知半圆柱半径为 $R$ , 质量为 $m$  (或设其面密度为 $\sigma$ ), 质心位于图示 $C$ 点处, 半圆盘对过质心 $C$ 且垂直于半圆盘的轴线的惯性矩(转动惯量)为 $J_c = mr^2$ , 其中 $r$ 为惯量回转半径。

试确定该系统的线性化运动微分方程、等效质量、等效刚度以及固有频率。



## 思考题2.4

### 弹簧与阻尼器串联的单自由度系统

试导出图示弹簧与阻尼器串联的单自由度系统的运动微分方程，给出确定初始条件的方法，并求取其自由振动时的解。

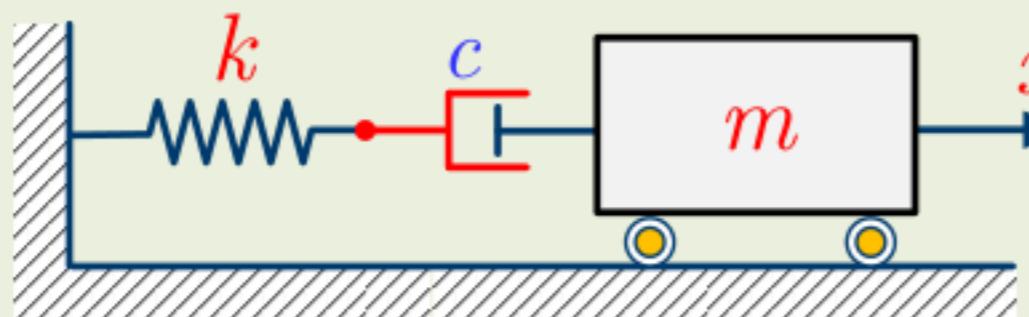


图 a

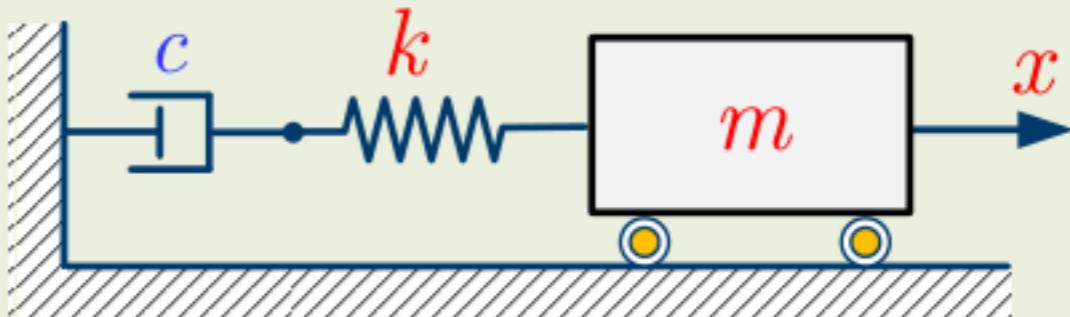


图 b

## 2.1 单自由度系统的自由振动



### 2.1.4 有阻尼自由振动

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (2-8)$$

从(2-8)式可知**有阻尼自由振动方程**为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2-18a)$$

将之改写为标准形式

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad (2-18b)$$

式中  $\zeta$  称为**阻尼比**(damping ratio)或**黏滞阻尼因子**(viscous damping factor)：

$$\zeta \equiv \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (2-18c)$$

设(2-18b)式的解有如下形式：

$$x(t) = A e^{st} \quad (2-19)$$

将(2-19)代入(2-18b)中，可得**代数方程**

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (2-20)$$

## 2.1 单自由度系统的自由振动

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

(2-20)

(2-20)称为系统的**特征方程**(Characteristic Equation)

它是关于 $s$ 的一元二次方程,其两个根(解)为

$$s_{1,2} = (-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \quad (2-21)$$

根 $s_1, s_2$ 的性质显然取决于**阻尼比** $\zeta$ ,其关系如

图2-10所示(复平面图形)。

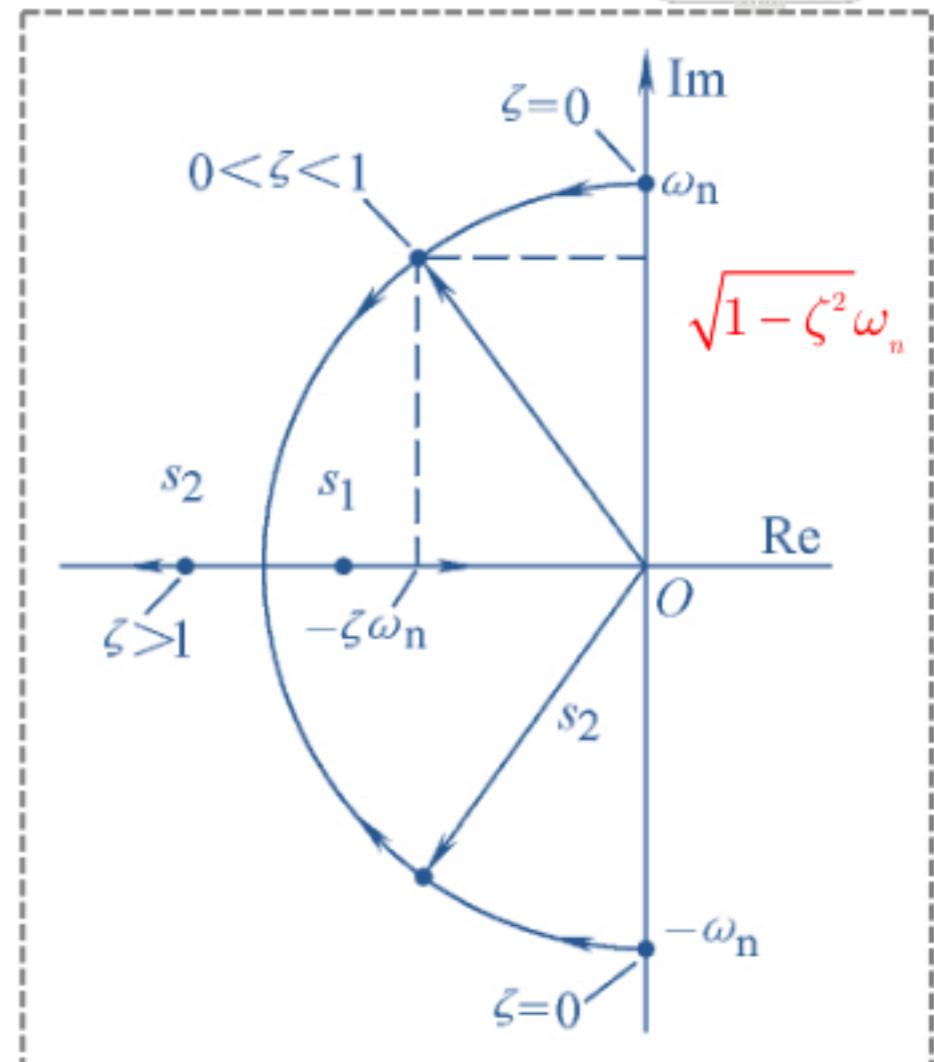


图2-10  $s_{1,2}$ 的复平面表示  
哈工大  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

## 2.1 单自由度系统的自由振动



### ◆ 系统的通解

$$x(t) = A e^{st} \quad (2-19)$$

$$s_1 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad s_2 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (2-21)$$

将特征根(2-21)代入(2-19)式, 可得系统的**通解**  $x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

$$x(t) = A_1 e^{-\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t} + A_2 e^{-\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t} \quad (2-22)$$

式(2-22)所代表的**解的性质**取决于(2-21)式中**根式** [ $\zeta^2-1$ ] $^{1/2}$ 是**实数、零、还是纯虚数**, 现分别讨论如下:

## 2.1 单自由度系统的自由振动

(1)  $\zeta=0$  — 无阻尼:

$s_{1,2}$ 为两个纯虚根 $\pm i\omega_n$ 。此时系统为简谐振子;

(2)  $0 < \zeta < 1$ : 小阻尼

$s_{1,2}$ 为位于半径为 $\omega_n$ 的圆上的一对共轭复根;

随 $\zeta$ 增大, 根 $s_{1,2}$ 向负实轴逼近; **临界阻尼**

(3)  $\zeta=1$ : 特征根 $s_{1,2} = -\omega_n$ 为位于负实轴上的**重根**;

(4)  $\zeta > 1$ : **过阻尼**

特征根始终在实轴上, 随 $\zeta \rightarrow \infty$ , 有  $s_1 \rightarrow 0$ ,  $s_2 \rightarrow -\infty$

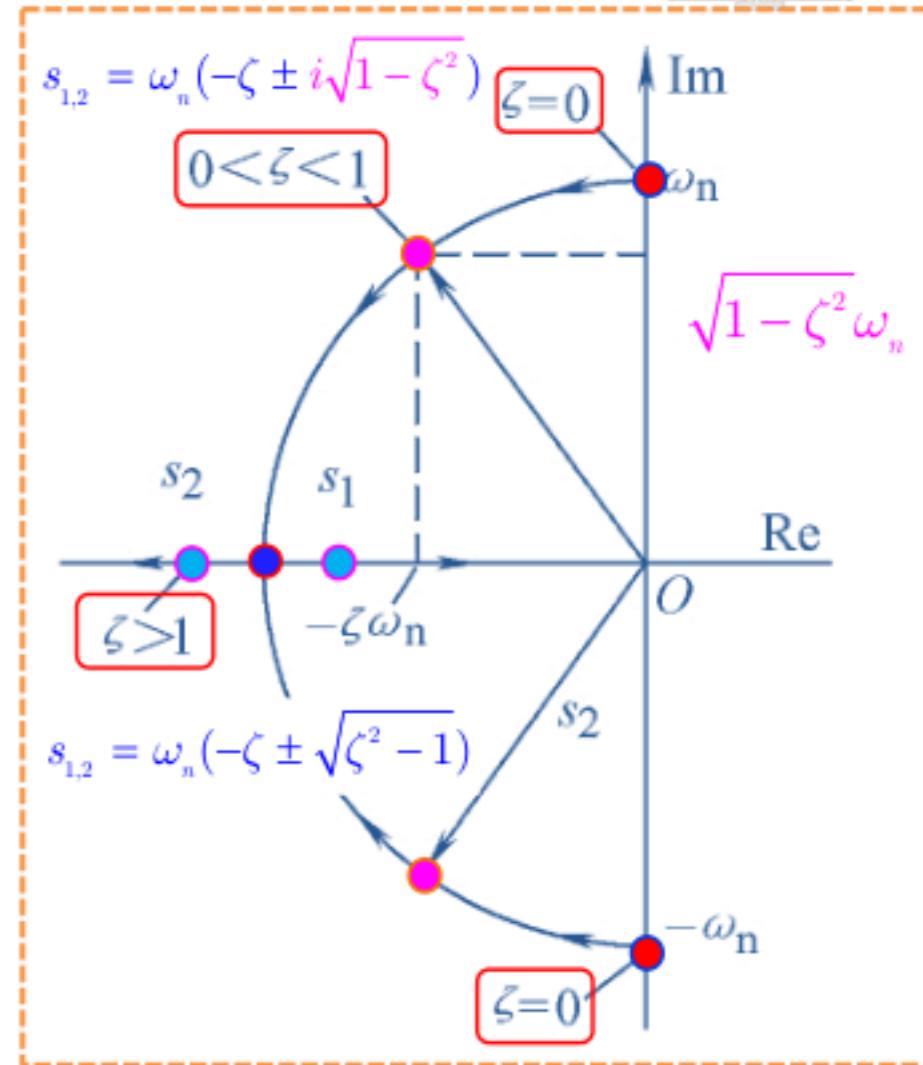


图2-10  $s_1, s_2$ 的复平面表示

## 2.1 单自由度系统的自由振动



### 1. 过阻尼 —— $\zeta > 1$

$$x(t) = A_1 e^{-\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} + A_2 e^{-\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} \quad (2-22)$$

注意到  $\sqrt{\zeta^2 - 1} < \zeta$  通解式(2-22)中两项均为负指数, 因此它表示的运动是一种(非振荡的)**指数律衰减运动**;

而且第2项总是比第1项衰减更快;

因而  $\zeta > 1$  的情况称为 **过阻尼(Overdamping)**。

$x(t)$  的确切形状取决于  $A_1$  和  $A_2$ , 也即取决于初始位移  $x_0$  和初速度  $v_0$ 。

## 2.1 单自由度系统的自由振动

1. 过阻尼 ——  $\zeta > 1$

若  $t = 0$  时的初始条件为  $x(0) = x_0$ ,

$\dot{x}(0) = v_0$ , 则可确定解的系数 :

$$A_1 = \frac{v_0 + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n x_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$A_2 = \frac{-v_0 - (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n x_0}{2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

设  $x_0 > 0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0 > 0$ , 则运动图形大致如图

$$x(t) = A_1 e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + A_2 e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (2-22)$$

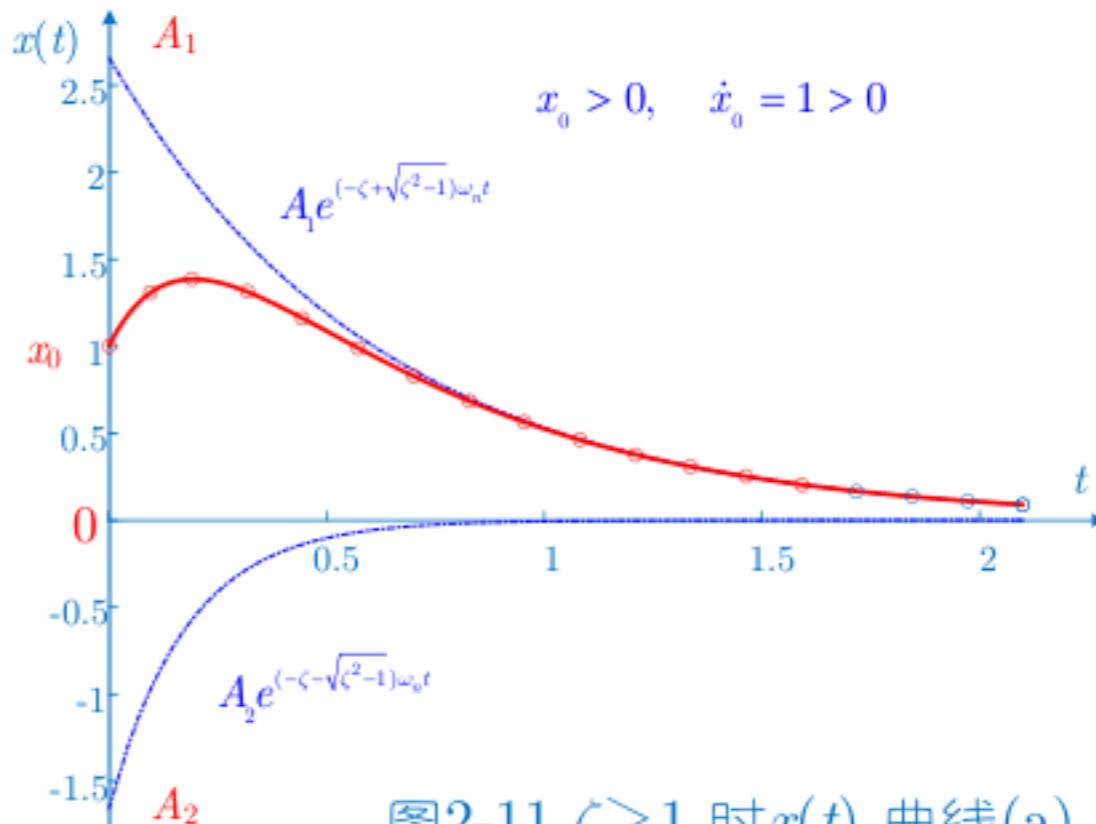


图 2-11  $\zeta > 1$  时  $x(t)$  曲线(a)

$\zeta > 1$

# 过阻尼

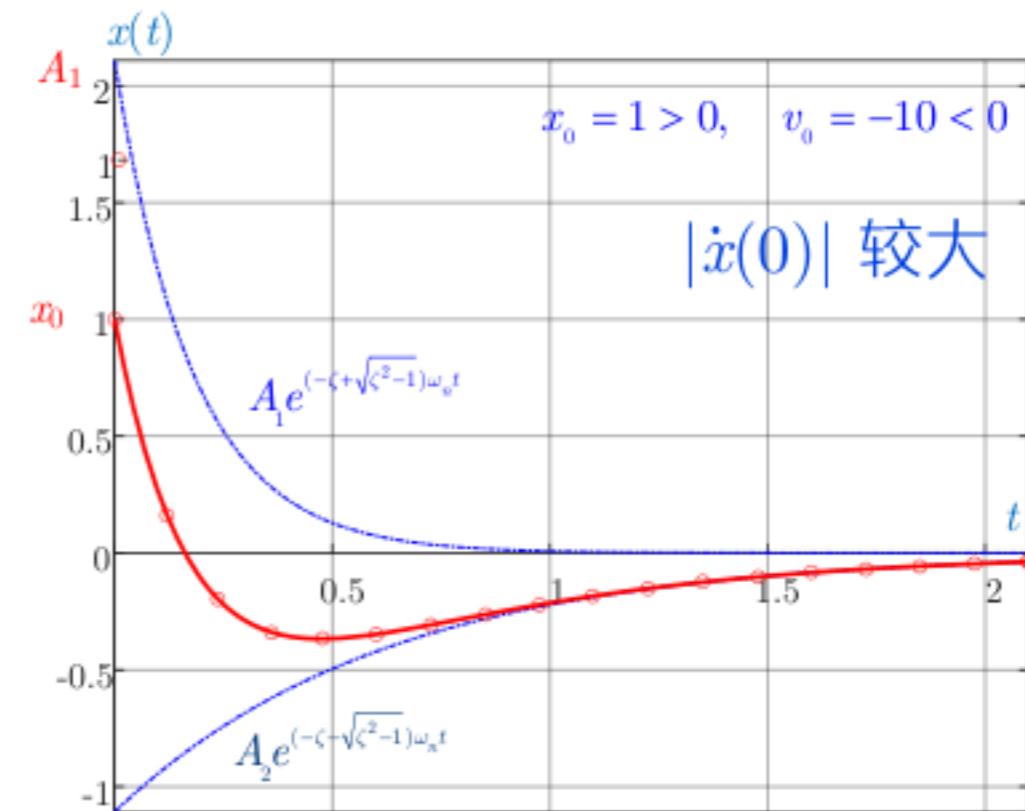
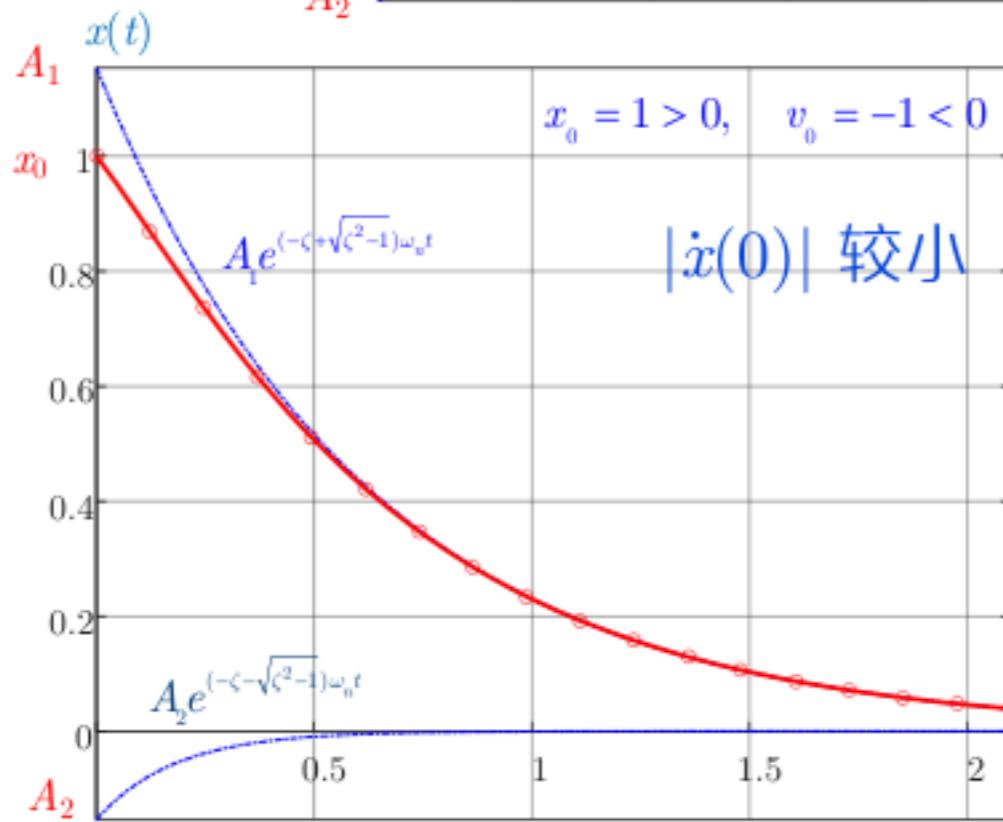
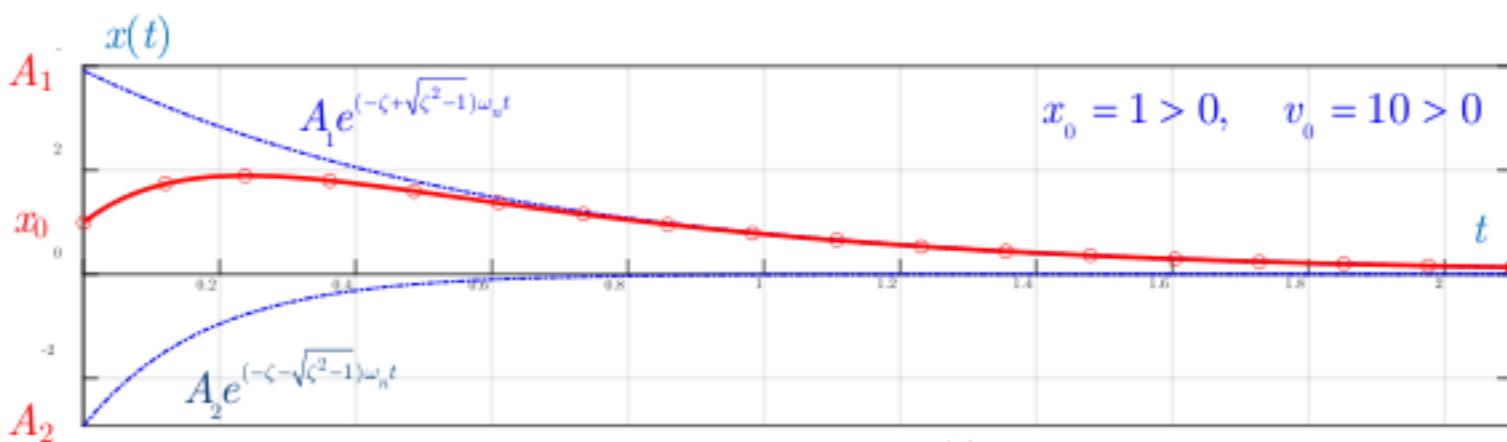
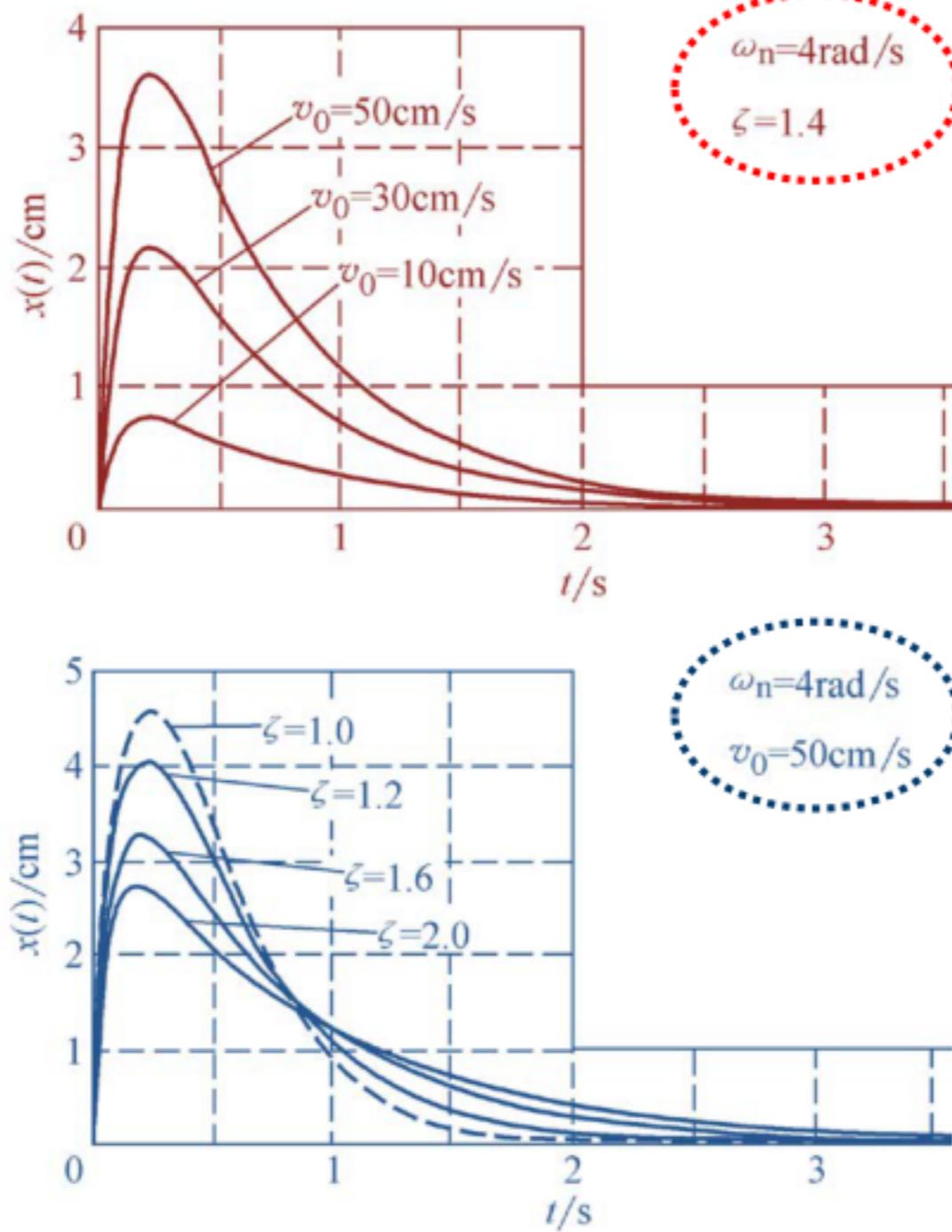


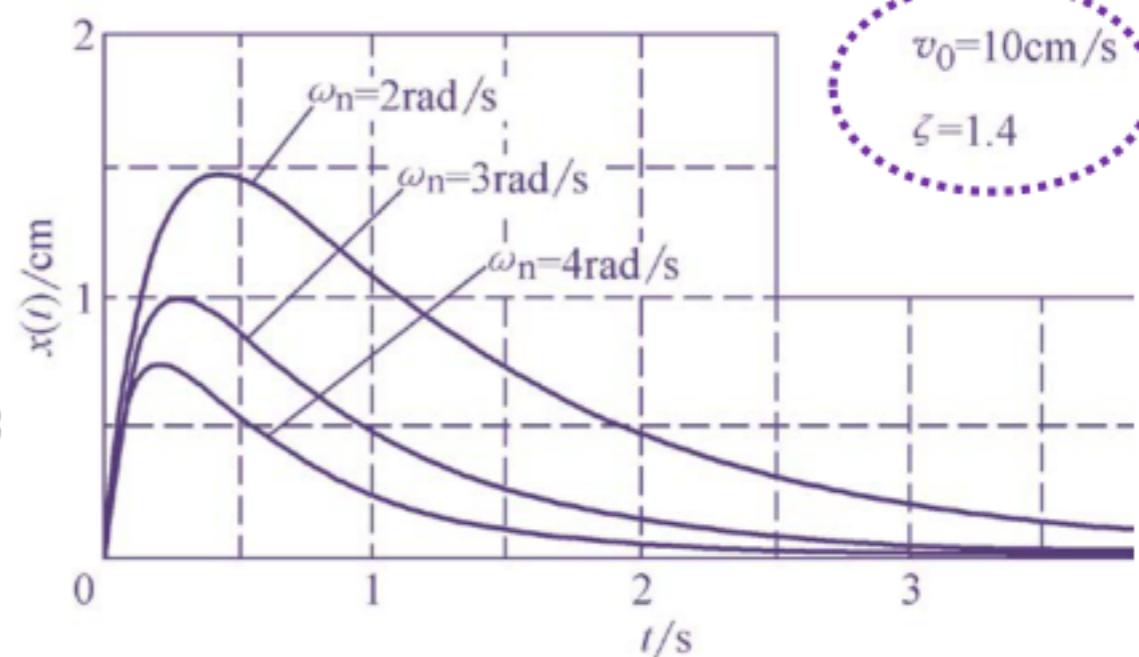
图2-11  $\zeta > 1$  时  $x(t)$  曲线(b)

$\zeta > 1$

# 过阻尼



$$x(t) = A_1 e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + A_2 e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (2-22)$$



$$x(0)=0$$

图2-11  $\zeta > 1$  时  $x(t)$  曲线(c)

## 2.1 单自由度系统的自由振动



2. 临界阻尼 ——  $\zeta=1$   $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \rightarrow s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2 = 0$  (2-20)

此时方程(2-20)有一对重根:  $s_{1,2} = -\omega_n$ , 这种情况下系统的通解为:

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega_n t} \quad A_1 = x_0, \quad A_2 = v_0 + \omega_n x_0 \quad (2-23)$$

$\zeta = 1$  的情况称为**临界阻尼(critical damping)**, 它也代表一指数衰减的响应。

- ◆ 临界阻尼是  $\zeta > 1$  和  $\zeta < 1$  的分界点。
- ◆  $\zeta = 1$  也是系统振动与非振动运动的运动性质变化的**分界点**。
- ◆ 由定义  $\zeta = c / 2m\omega_n$  可见当  $\zeta = 1$  时, 被称为**临界黏性阻尼系数**的  $c_{cr}$  在数

值上为  $c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{mk}$  所以有时也直接将**阻尼比**定义为  $\zeta \equiv c / c_{cr}$

$\zeta=1$

# 临界阻尼

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega_n t} = [x_0 + (v_0 + \omega_n x_0)t]e^{-\omega_n t} \quad (2-23a)$$

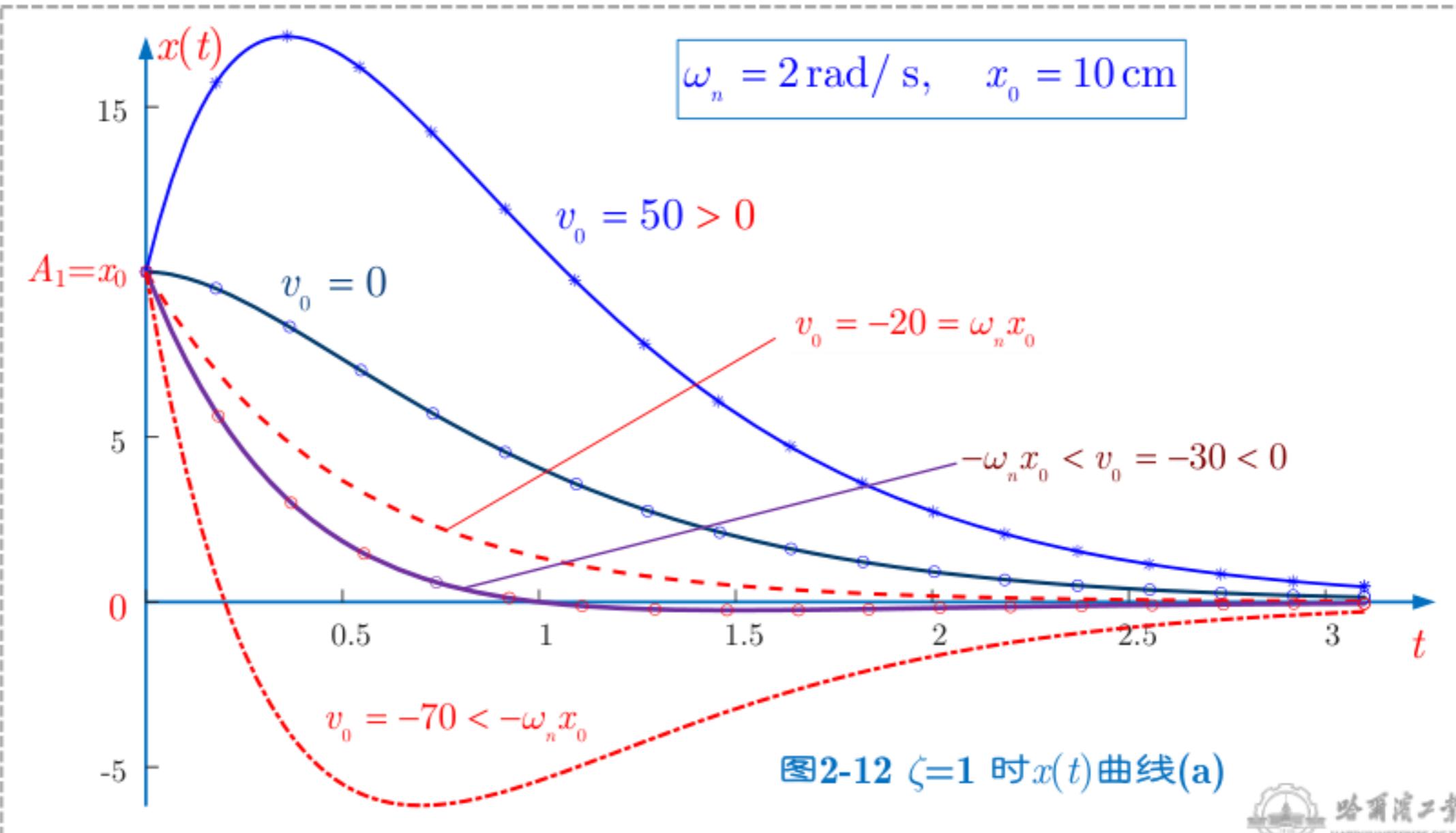
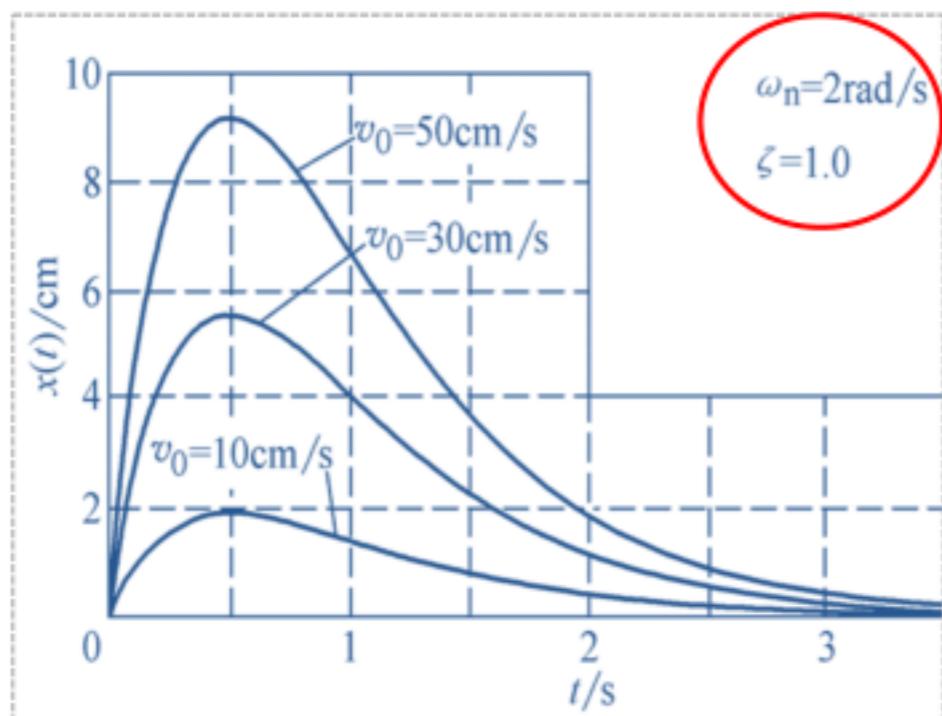


图2-12  $\zeta=1$  时  $x(t)$  曲线(a)

$\zeta=1$

# 临界阻尼

不同速度初值



不同固有频率

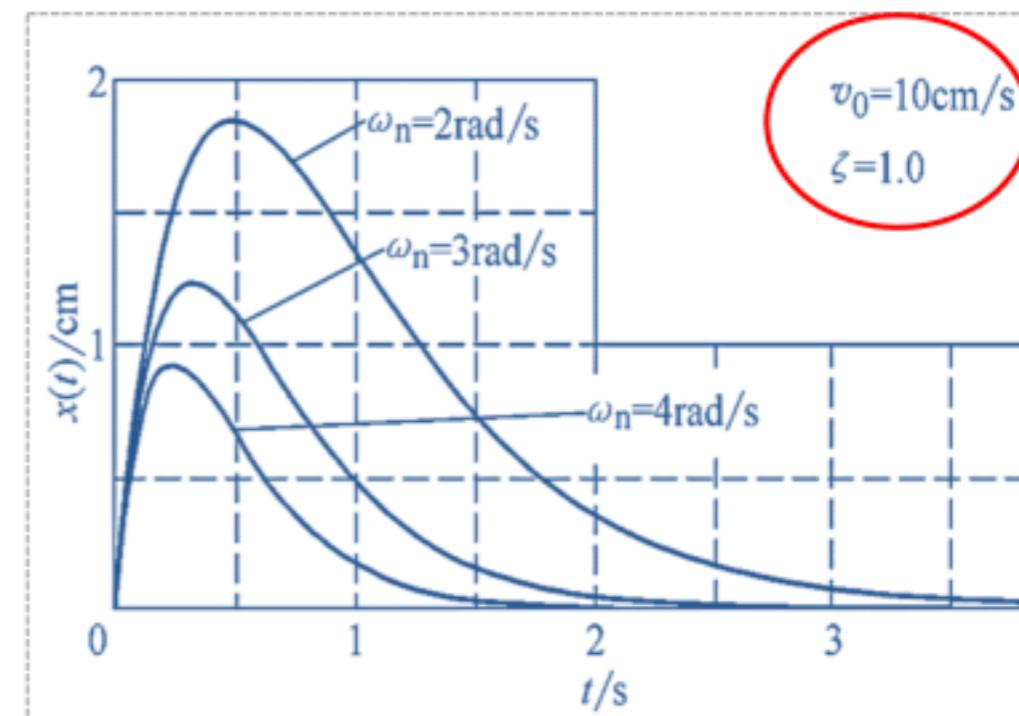


图2-12  $\zeta=1$  时  $x(t)$  曲线(b)  $- x_0 = 0$

## 2.1 单自由度系统的自由振动



3. 小阻尼 ——  $0 < \zeta < 1$

$$x(t) = A_1 e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + A_2 e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (2-22)$$

$0 < \zeta < 1$  也称为欠阻尼(underdamping), 此时特征根为一对共轭复根,  
解(2-22)可改写成如下形式:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left( A_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} + A_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} \right)$$

或

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}) \quad (2-24)$$

$$\omega_d \equiv \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

称为 有阻尼固有频率(damped natural frequency)

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} < \omega_n$  — 即 阻尼导致系统运动的振动频率降低

## 2.1 单自由度系统的自由振动



3. 小阻尼 ——  $0 < \zeta < 1$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}) \quad (2-24)$$

利用欧拉公式  $e^{\pm i\omega_d t} = \cos \omega_d t \pm i \sin \omega_d t$

(2-24)化为

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t) \quad (2-24a)$$

设  $C_1 \equiv A_1 + A_2 = C \sin \theta \quad C_2 \equiv i(A_1 - A_2) = C \cos \theta \quad (2-25)$

(2-24a)可化为

$$x(t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta) \quad (2-24b)$$

上式表示的运动为振幅随时间衰减的简谐振动，其中频率为常值  $\omega_d$ ，相角为  $\theta$ ，而幅值  $Ce^{-\zeta\omega_n t}$

## 2.1 单自由度系统的自由振动



### 3. 小阻尼 —— $0 < \zeta < 1$

设初始条件为:  $x(0)=x_0$ ,  $v(0)=v_0$ , 易得

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{v_0 + \zeta \omega_n x_0}{\omega_d} \right)^2} \\ \theta = \arctan \left( \frac{x_0}{v_0 + \zeta \omega_n x_0} \cdot \omega_d \right) \\ C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{v_0 + \zeta \omega_n x_0}{\omega_d} \end{array} \right. \quad (2-26)$$

与无阻尼情况 ( $\omega_d = \omega_n$ ) 对比

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{v_0}{\omega_n} \right)^2} \\ \theta = \arctan \left( \frac{x_0}{v_0} \cdot \omega_n \right) \\ C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega_n} \end{array} \right. \quad (2-15)$$

$0 < \zeta < 1$

## 小阻尼

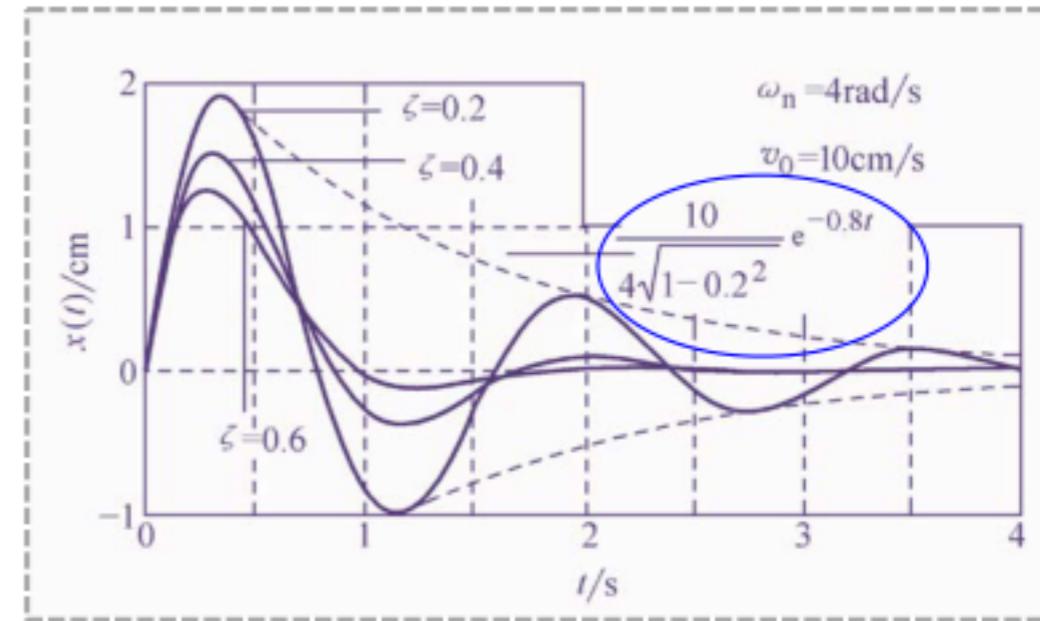
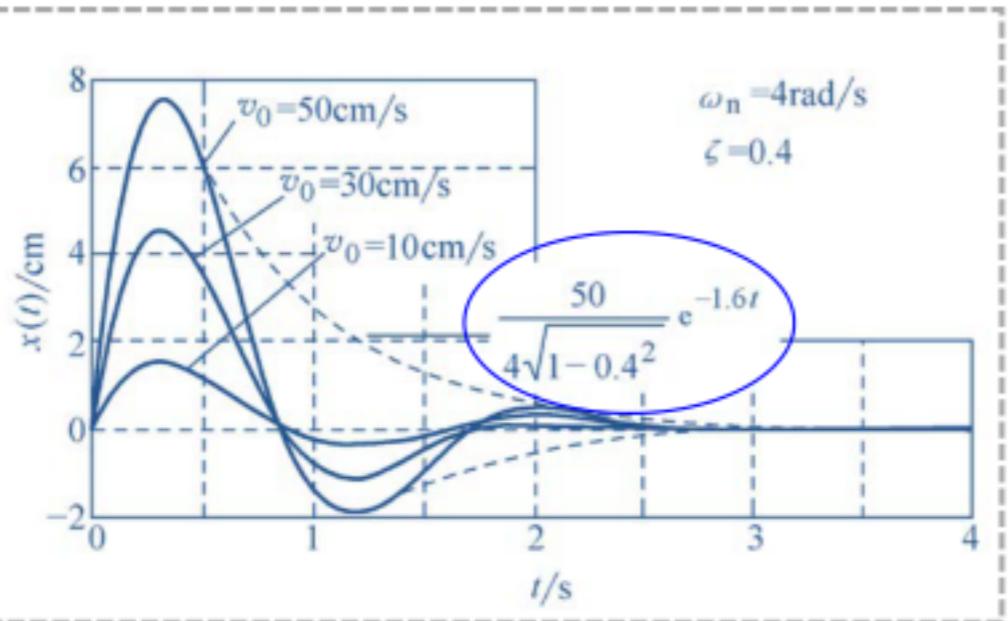
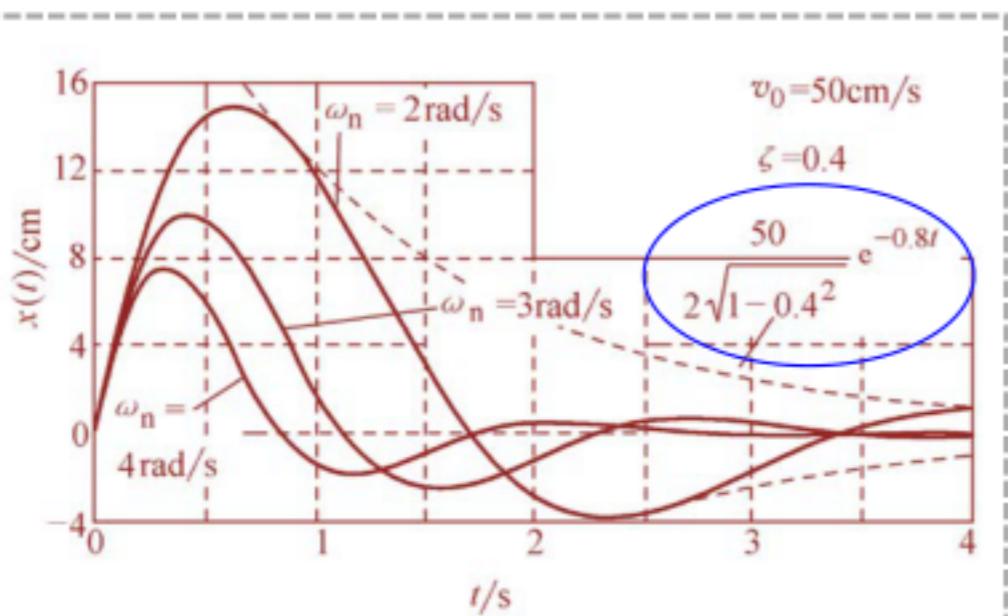


图2-13给出了小阻尼情况的典型响应曲线, 曲线  $\pm Ae^{-\zeta\omega_n t}$  为响应曲线的**包络线**。很明显, 当  $t \rightarrow \infty$ ,  $x(t) \rightarrow 0$ , 因此**响应最终趋于消失**。

图2-13  $0 < \zeta < 1$  时  $x(t)$  曲线

## 例2-2

### 质 弹 阻 系 统 的 有 阻 尼 自 由 响 应

计算图2-1所示单自由度系统分别在  $\zeta > 1$ ,  $\zeta = 1$  和  $0 < \zeta < 1$  时, 对于初始条件  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$  的自由振动响应。

解: (1)  $\zeta > 1$ : 利用(2-22)式有  $x(0) = A_1 + A_2 = 0$ , 即  $A_2 = -A_1$  (a)

因此, 系统响应化为下式

$$x(t) = A_1 e^{-\zeta \omega_n t} [e^{-\sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot \omega_n t} - e^{\sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot \omega_n t}] \quad (b)$$

$$x(t) = 2A_1 e^{-\zeta \omega_n t} \sinh(\sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot \omega_n t) \quad (b)$$

对(b)式求导, 代入初始条件  $\dot{x}(0) = v_0$  得  $2A_1 = \frac{v_0}{\sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot \omega_n}$  (c)

由此求得  $\zeta > 1$  时 系统的自由振动响应为

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\zeta \omega_n t} \sinh(\sqrt{\zeta^2 - 1} \cdot \omega_n t) \quad (d)$$

## 例2-2

### 质 弹 阻 系 统 的 有 阻 尼 自 由 响 应

(2)  $\zeta = 1$  : 从(2-23)式中容易导出  $A_1=0$  和  $A_2=v_0$ , 因此其响应为:

$$x(t) = v_0 t e^{-\omega_n t} \quad (e)$$

(3)  $0 < \zeta < 1$  : 在(2-24)式中用初始条件  $x(0)=0$  得  $\theta = 0$ , 幅值则由初始速度  $\dot{x}(0) = v_0$  易得  $C = v_0/\omega_d$ , 因此(2-24b)简化为 :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_d} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_d t \quad (\text{with } \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}) \quad (f)$$

前面的图2-11 ~ 2-13分别给出了表达式(d)、(e)、(f)所对应的过阻尼、临界阻尼和小阻尼的情况, 图中将  $\zeta$ 、 $\omega_n$ 、 $v_0$  作为参数, 给出了响应  $x(t)$  随这些参数的变化规律。

## 2.1 单自由度系统的自由振动



### 2.1.5 对数衰减率

通过测量自由衰减响应确定阻尼比(阻尼因子) $\zeta$

如前所述,在小阻尼情况下黏性阻尼使振动按指数规律衰减,而 指数因子本身又是阻尼比 $\zeta$  的线性函数:

$$x(t) \propto e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_d t$$

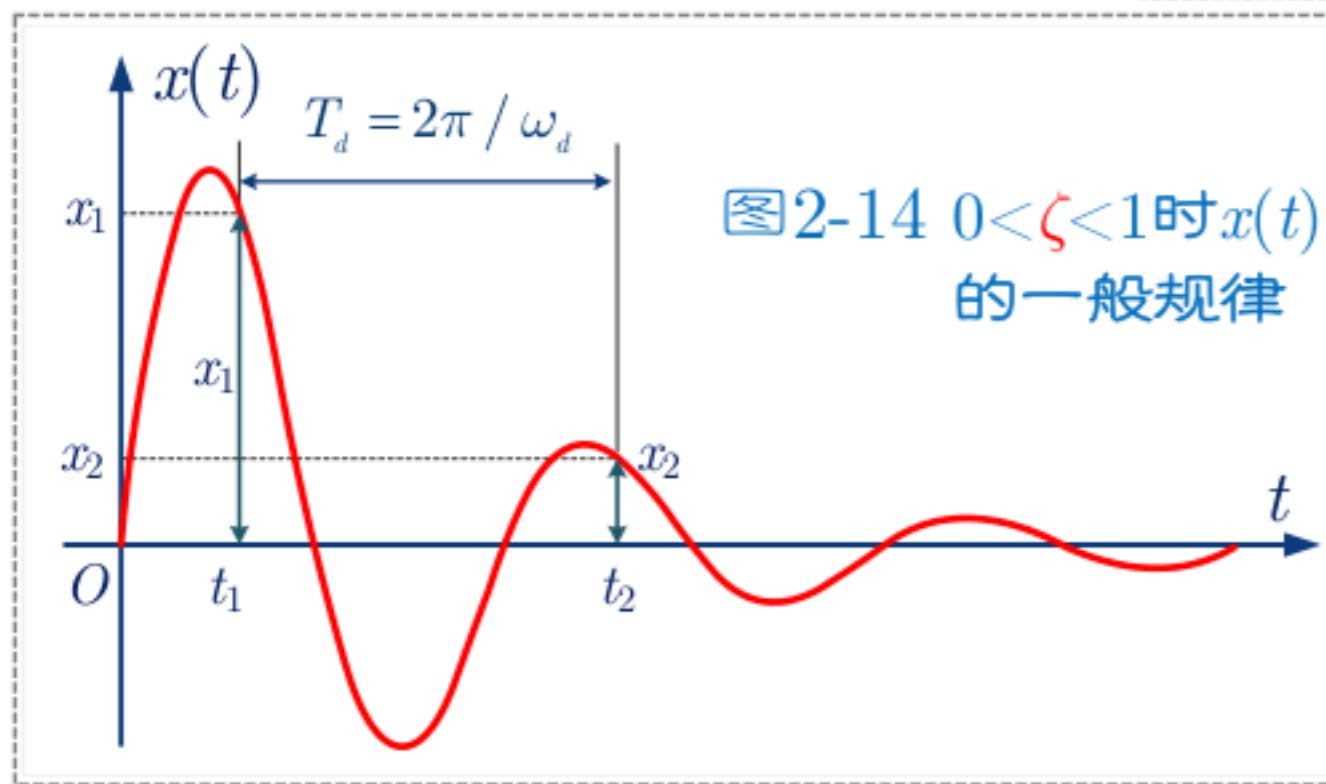


图2-14  $0 < \zeta < 1$  时  $x(t)$  的一般规律

下面来寻求通过自由衰减响应确定阻尼比 $\zeta$  的方法:

设左图中  $t_1$  和  $t_2$  表示有阻尼运动的相邻振动周期中相距一个完整周期  $T_d$  的两对应点的时间。

## 2.1.5 对数衰减率

$$x(t) = Ce^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta) \quad (2-24b)$$

由式(2-24b)可得

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{Ce^{-\zeta \omega_n t_1} \sin(\omega_d t_1 + \theta)}{Ce^{-\zeta \omega_n t_2} \sin(\omega_d t_2 + \theta)} \quad (2-27)$$

由于  $t_2 = t_1 + T_d$ ,  $T_d = 2\pi/\omega_d$  是有阻尼振动的周期, 因此有

$$\sin(\omega_d t_2 + \theta) = \sin(\omega_d t_1 + \theta)$$

这样(2-27)式可化为:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\zeta \omega_n t_1}}{e^{-\zeta \omega_n (t_1 + T_d)}} = e^{\zeta \omega_n T_d} \quad (2-28)$$

## 2.1.5 对数衰减率

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{\zeta \omega_n T_d} \quad (2-28)$$

引入自然对数:  $\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \zeta \omega_n T_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$  (2-29)

自然对数  $\delta$  称为小阻尼振动运动的**对数衰减率**

由此可知, 只要测量两任意**相邻周期**的对应点  $x_1$  和  $x_2$ , 并确定对数衰减率  $\delta$  就可由(2-29)式获得阻尼比:

$$\zeta^2 = \frac{\delta^2}{4\pi^2 + \delta^2} \Rightarrow \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (2-30)$$

对于**微小阻尼**情况( $\zeta \ll 1, \approx 0$ ), 式(2-30)还可近似为

$$\zeta \approx \frac{\delta}{2\pi} \quad (2-31)$$

## 2.1.5 对数衰减率



阻尼因子 $\zeta$ 也可以通过测量相隔任意周期的两对应点的位移  $x_1, x_{k+1}$  来确定。

设  $t_1, t_{k+1} = t_1 + kT$  为  $x_1, x_{k+1}$  对应的时间( $k$ 为整数), 则

$$\frac{x_1}{x_{k+1}} = e^{k\zeta\omega_n T} \quad (2-32)$$

由(2-32)可导得

$$\delta = \ln \frac{x_1}{x_{k+1}} = \frac{1}{k} \ln \frac{x_1}{x_{k+1}} \quad (2-33)$$

思考2.5 总结用衰减法求单自由度系统阻尼比的方法和步骤。

## 例2-3

实验观察到一有阻尼单自由度系统的振动幅值在5个完整周期后衰减了50%，设系统阻尼为黏性阻尼，试计算系统的阻尼因子。

### 阻尼因子测量

解：由题设知  $k = 5$ ，则

$$\delta = \frac{1}{5} \ln \frac{x_1}{x_6} = \frac{1}{5} \ln \frac{x_1}{0.5x_1} = \frac{1}{5} \ln 2 = 0.13863$$

由(2-30)、(2-31)式分别可得：

$$\zeta_{(31)} = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} = \frac{0.13863}{\sqrt{(2\pi)^2 + 0.13863^2}} = 0.022058$$

$$\zeta_{(32)} \approx \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0.13863}{2\pi} = 0.022064$$

## 例2-4

### 减振器参数设计

为车辆设计小阻尼减振器, 要求振动一周后的振幅减小到原幅值的 $1/16$ 。已知车辆质量 $m$ 为 $500\text{kg}$ , 阻尼振动周期 $T_d = 1\text{s}$ 。试求减振器所需的弹簧常数 $k$ 和阻尼系数 $c$ 。

解: 由题设知所需对数衰减率  $\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln 16 = 2.7726$

由此可求得阻尼比和无阻尼固有振动频率为

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} = 0.40371 \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T_d \sqrt{1 - \zeta^2}} = 6.8677(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$$

所需弹簧常数及阻尼系数分别为

$$k = m\omega_n^2 = 500 \times 6.8677^2 = 23582.65(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$$

$$c = 2m\zeta\omega_n = 2 \times 500 \times 0.40371 \times 6.8677 = 2772.56(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$$



### 2.1.6 弹簧的等效质量

实际工程系统中的质量是连续分布的, 在将其简化为质-阻-弹模型时, 如何正确地确定质量元件非常关键。

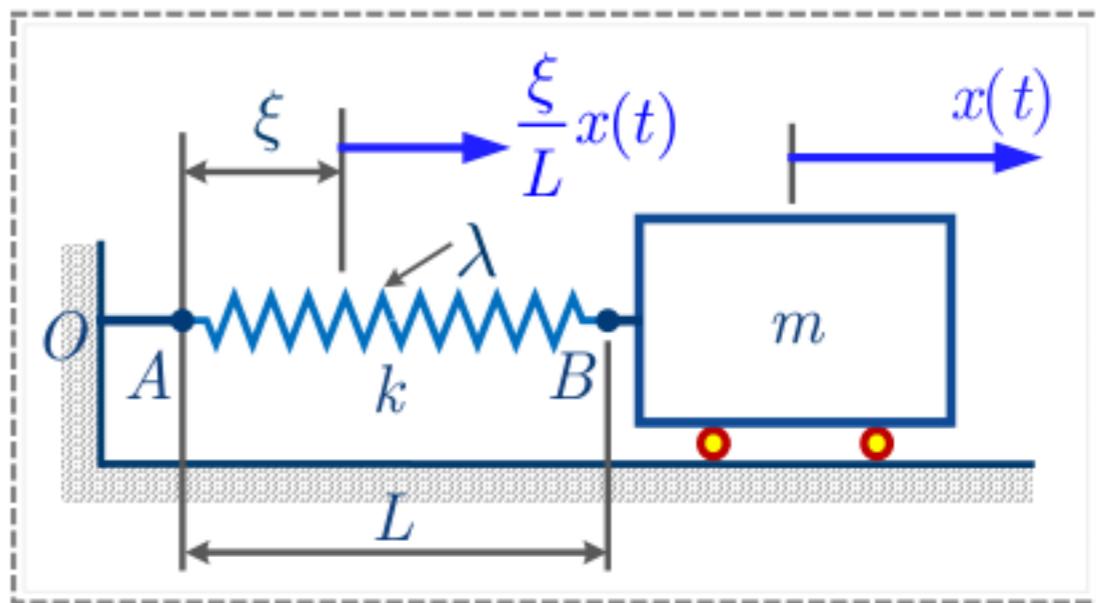
对于与质-阻-弹模型比较接近的简单振动系统, 可以直接把弹簧连接部分的构件简化为质量元件。

但当实际振动系统比较复杂, 如何简化弹性元件不是很明确时, 可利用质量元件的储能(动能)特性来简化, 即通过 来确定质-阻-弹模型的质量。

通常把取代复杂系统中的整个质量元件组的等价效应元件, 称为**等效质量元件**, 等效质量元件的质量称为**等效质量(equivalent mass)**

## 2.1.6 弹簧的等效质量

- 在图2-15中, 设弹簧  $k$  具有(不可忽略的)质量  $m_s$ , 其线密度为 $\lambda$ , 那么弹簧质量对系统振动固有特性的影响有多大呢?
- 设质量块 $m$ 的位移用  $x$  表示, 弹簧原长为  $L$ 。则距左端为  $\xi$  的质量为  $\lambda d\xi$  的微单元的位移则可假设为  $(\xi/L)x$ ; 同时还假设弹簧为匀质材料(即  $\lambda$  为常数)



★ 特点: 保守系统, 机械能守恒

图2-15 弹簧等效质量系统示意图

## 2.1.6 弹簧的等效质量

系统的动能为  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\int_0^L (\xi / L)^2 \dot{x}^2 \cdot \lambda d\xi = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{3}m_s\right)\dot{x}^2$

计算积分得到  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\lambda\dot{x}^2 \frac{1}{3L^2}\xi^3 \Big|_0^L = \frac{1}{2}\left(m + \frac{\lambda L}{3}\right)\dot{x}^2 \quad (2-35)$

而系统势能为

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2-36)$$

**势能与弹簧质量无关**

由**机械能守恒**原理可知

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(T + V)}{dt} = 0 \quad (2-37)$$

## 2.1.6 弹簧的等效质量

可得

$$(m + m_s / 3) \ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad m_{\text{eff}} \ddot{x} + kx = 0 \quad (2-38)$$

$m_{\text{eff}} = m + m_s / 3$  称为系统的**等效质量**

考虑弹簧分布式质量时系统的固有频率

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \leftrightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{1}{3}\rho L}} = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{1}{3}m_s}} \quad (2-39)$$

可见考虑弹簧的分布质量导致系统固有频率降低

- (2-39)式表明在匀质弹簧按 $(\xi/L)x$ 假设规律变形情形下, 弹簧将自身质量的1/3贡献给系统的等效质量。
- 如果假设弹簧变形模式为其它类型, 则影响效果则有可能不同。



- 2025



飞行器动力学设计与仿真

飞行器结构动力学

## 第2章 单自由度系统的振动

哈尔滨工业大学 航天学院

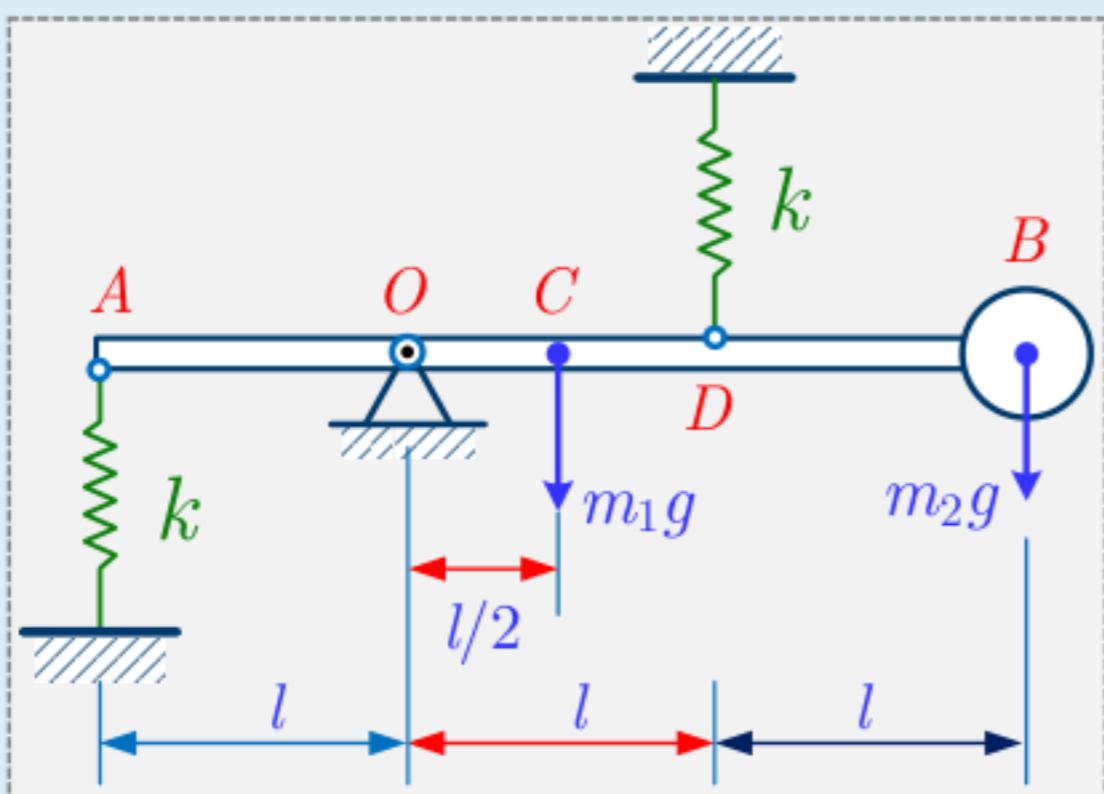
田 浩

联系方式：电话 - 139 3624 9818 电邮 - [tih@hit.edu.cn](mailto:tih@hit.edu.cn)

## 补充例

### 题2-1

系统绕  $O$  点的转动用变量  $\varphi$  表示, 设杆 AB 水平时  $\varphi = 0$ 。以系统静平衡位置为运动参考原点(这样常值作用力——本题中即两个重力在微振动建模时可以忽略不计), 由动量矩定理得杆运动微分方程:



$$[J_O + m_2(2l)^2]\ddot{\varphi} + 2kl^2\varphi = 0$$

其中:  $J_O = \frac{1}{12}m_1(3l)^2 + m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 = m_1l^2$

带入得:  $(m_1 + 4m_2)\ddot{\varphi} + 2k\varphi = 0$

$$\rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m_1 + 4m_2}}$$

等效质量与等效刚度?

**补充例题2-2** 下图为转动惯量为  $J_0$  的杆件  $AB$ , 连接有质量块  $m_1$  和  $m_2$ , 距杆  $AB$  转动点  $O$  的距离分别为  $a$  和  $b$ 。求将质量简化到  $A$  点的**等效质量**。

解: 设等效质量的动能为  $T_e = \frac{1}{2}m_e v_e^2$

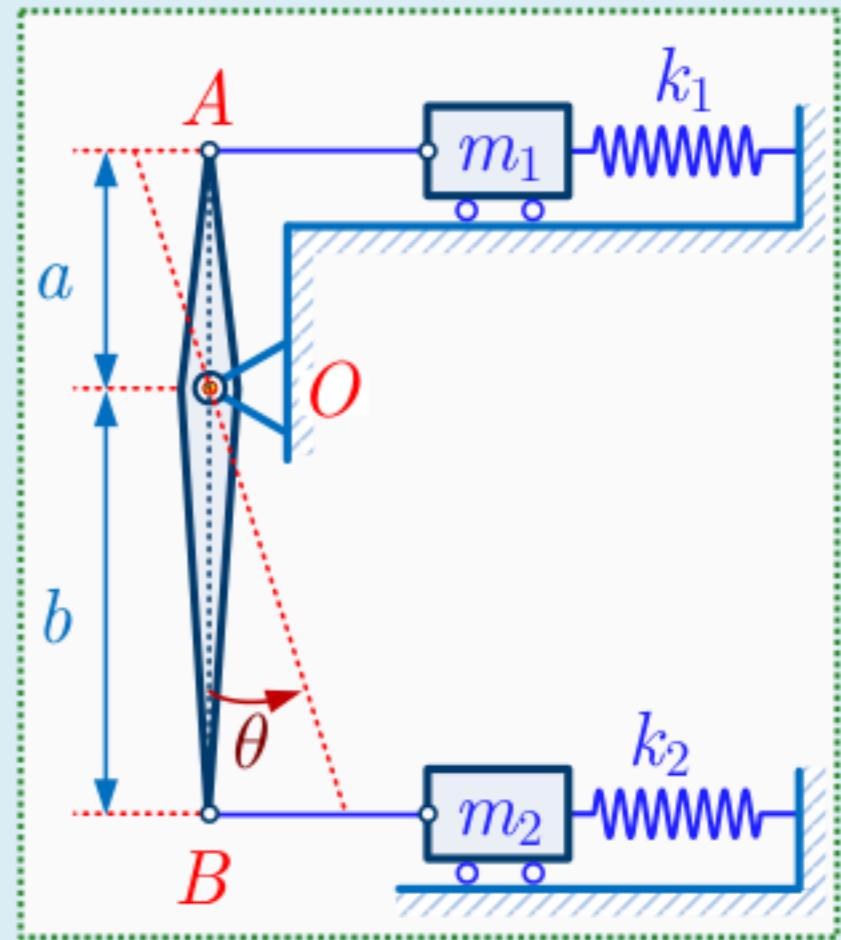
而总系统的动能  $T = \frac{1}{2}m_1 v_A^2 + \frac{1}{2}m_2 v_B^2 + \frac{1}{2}J_0 \dot{\theta}^2$

又  $v_e = v_A = a \cdot \dot{\theta}$      $v_B = b\dot{\theta}$

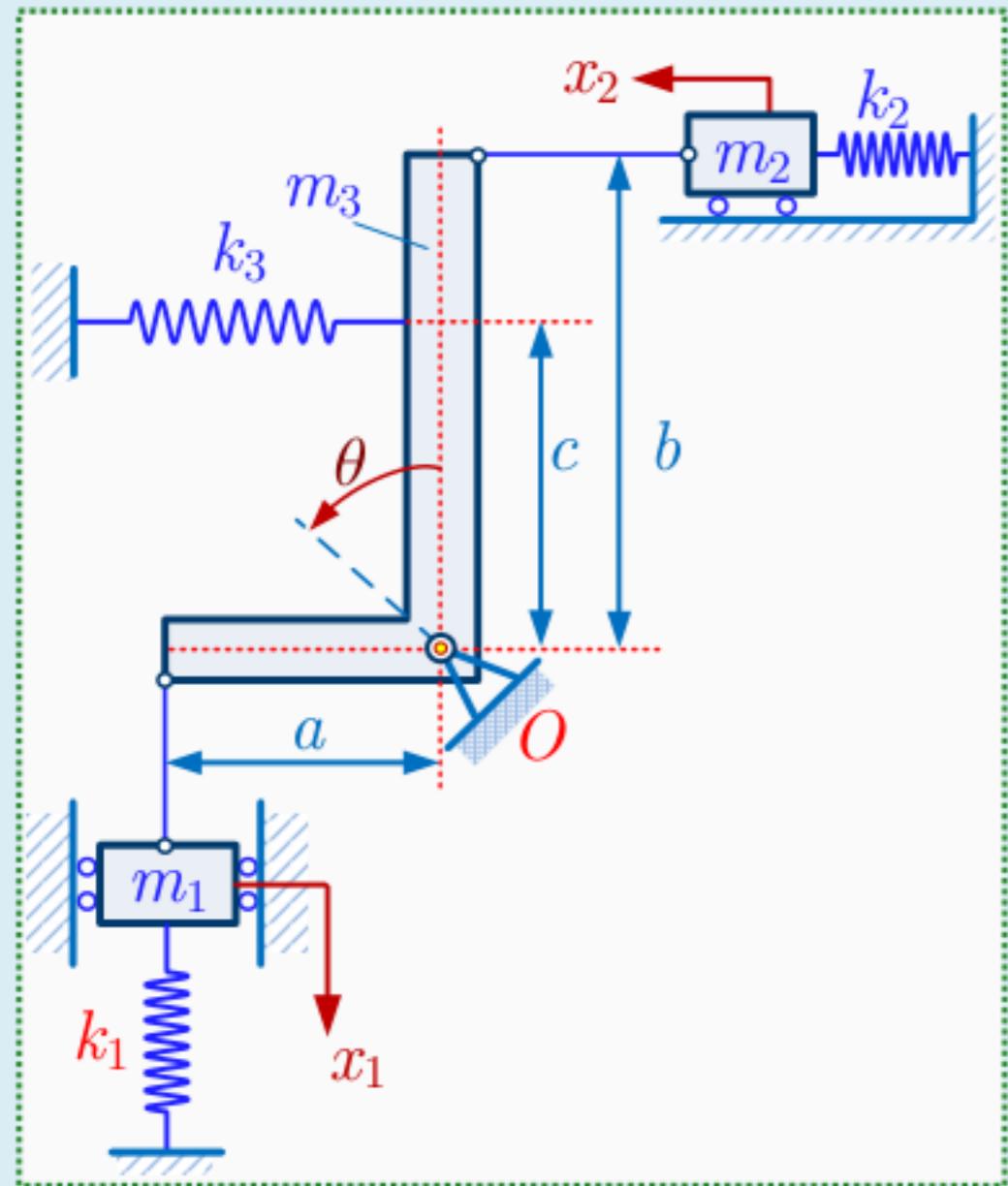
$$T = \frac{1}{2}m_1(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_2(b\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2$$

得  $\frac{1}{2}m_e(a\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m_1(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_2(b/a)^2(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2$

$$m_e = m_1 + (b/a)^2 m_2 + J_0 / a^2$$



$$\theta \approx \tan \theta = x_A / a = x_b / b$$



解：可以任意选择坐标  $x_1, x_2, \theta$  作为变量。它们互相关联且只有一个独立，现取绕固定轴  $O$  的转角  $\theta$  为独立坐标，则**等效转动惯量**

$$J_e = m_1 a^2 + m_2 b^2 + m_3 r^2$$

其中， $r$  是  $m_3$  (关于  $O$  点的) 惯性半径。

系统的等效扭转刚度  $k_{eq} = k_1 a^2 + k_2 b^2 + k_3 c^2$

则  $\ddot{\theta} + \frac{k_1 a^2 + k_2 b^2 + k_3 c^2}{m_1 a^2 + m_2 b^2 + m_3 r^2} \theta = 0$

或  $\ddot{\theta} + A\theta = 0$

其中  $A = \frac{k_1 a^2 + k_2 b^2 + k_3 c^2}{m_1 a^2 + m_2 b^2 + m_3 r^2}$

若取 $x_1$ 为独立坐标, 则有

$$(m_1)_e = m_1 + m_2(b/a)^2 + m_3(r/a)^2, \quad (k_1)_e = k_1 + k_2(b/a)^2 + k_3(c/a)^2$$

令

$$B = \frac{(k_1)_e}{(m_1)_e} = \frac{k_1 + k_2(b/a)^2 + k_3(c/a)^2}{m_1 + m_2(b/a)^2 + m_3(r/a)^2}$$

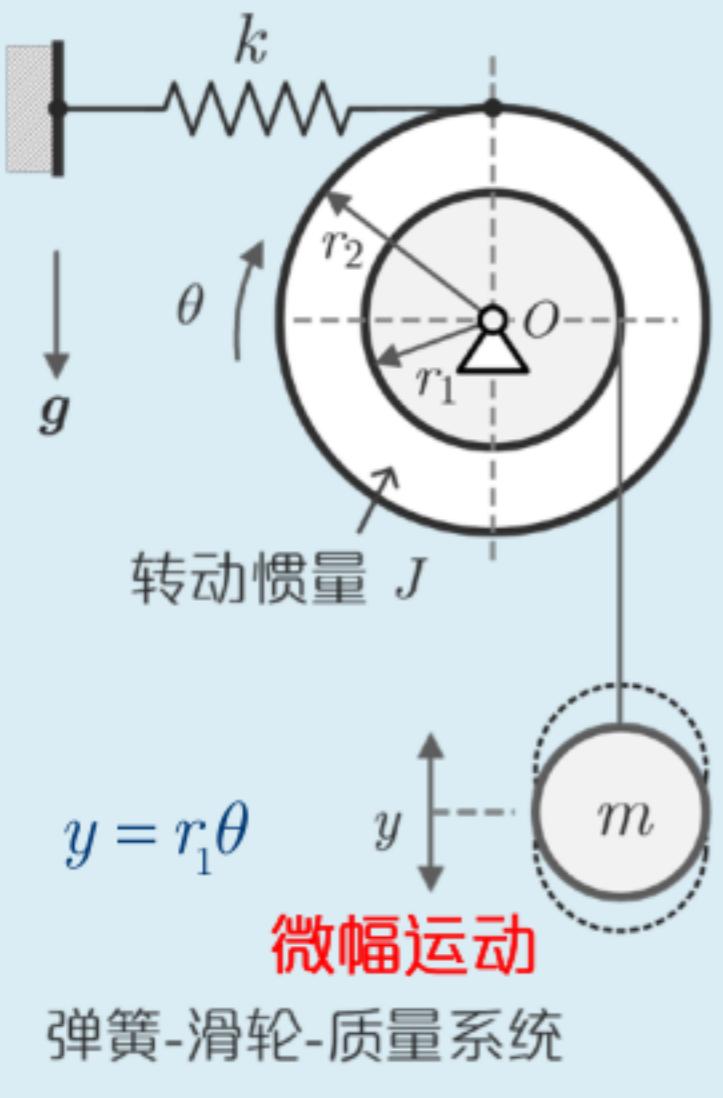
可得系统运动方程  $\ddot{x}_1 + Bx_1 = 0$

同理若以 $x_2$ 为独立坐标, 可得  $\ddot{x}_2 + Cx_2 = 0$

其中  $C = \frac{k_1 + k_2(b/a)^2 + k_3(c/a)^2}{m_1 + m_2(b/a)^2 + m_3(r/a)^2}$

不难验证  $A=B=C$

可见, 对结构较复杂的单自由度系统, 不管选择哪一个坐标变量作为独立坐标, 其运动方程形式不变。这说明系统固有振动规律与坐标选择无关。



取系统的静平衡  
位置为势能零点

能量方法求解：系统最大动能(过平衡位置时)为

$$T_{max} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}_{max}^2 + \frac{1}{2}m(r_1\dot{\theta}_{max})^2$$

系统最大势能(位于最低极限位置时)为

$$V_{max} = \frac{1}{2}kr_2^2(\theta_{max} + \theta_0)^2 - \frac{1}{2}kr_2^2\theta_0^2 - mgr_1\theta_{max} = \frac{1}{2}kr_2^2\theta_{max}^2$$

$\theta_0$ : 重力  $mg$  引起的滑轮静态角位移,

且平衡时有  $kr_2^2\theta_0 = mgr_1$

利用:  $T_{max} = V_{max}$ ,  $\dot{\theta}_{max}^2 = \omega_n^2\dot{\theta}_{max}^2$

$$\Rightarrow \omega_n^2 = \frac{kr_2^2}{J + mr_1^2}$$



## 二阶常系数齐次微分方程的解

→ 二阶常系数线性微分方程的标准形式

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 \quad (a)$$

→ 齐次方程的通解由其基础解系  $e^{\lambda_i t}$  ( $\lambda_i$  称为**特征值**) 构成

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (b)$$

→ 其基础解系中的  $\lambda_i$  由其特征方程(代数方程):

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (c)$$

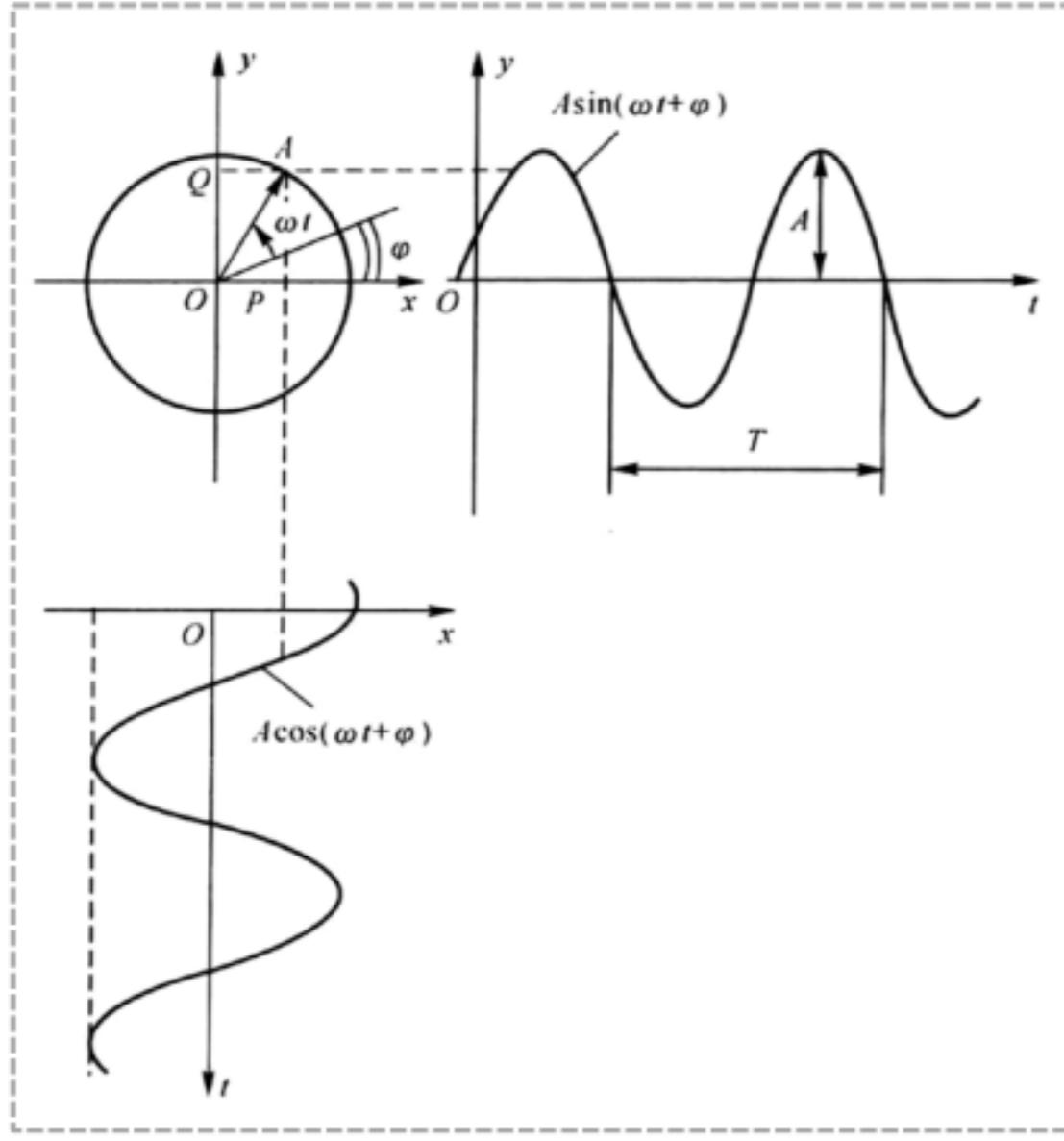
确定。依据判别式的特点，其通解有三种形式(表 I):

表 I 二阶常系数微分方程  $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$  的通解形式总结

一元二次方程根的判别式	特征根的特点	通解
1 $p^2 - 4q > 0$	相异实根: $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$
2 $p^2 - 4q = 0$	重实根: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$x(t) = (A_1 + A_2 t) e^{\lambda t}$
3 $p^2 - 4q < 0$	共轭复根: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$x(t) = e^{\alpha t} (A_1 \cos \beta t + A_2 \sin \beta t)$



# 圆频率



简谐振动都可以用某一旋转矢量的投影来表示，该矢量的模表示简谐振动的振幅，它的**旋转角速度**表示振动的圆频率 $\omega$

把  $\omega_n$  视为匀速圆周运动物体的**角速度**，则其转动一周即完成一个循环所需要的时间  $T_n$  即为其**自然周期(natural cycle)**。



- 2025



飞行器动力学设计与仿真

飞行器结构动力学

## 第2章 单自由度系统的振动

哈尔滨工业大学 航天学院

田 浩

联系方式：电话 - 139 3624 9818 电邮 - [tih@hit.edu.cn](mailto:tih@hit.edu.cn)