Inférence statistique devoir 2 (date limite : le jeudi 15 février)

Wen, Zehai ; Li, Qingyue

2024-02-12 09:39:19-05:00

Exercice 1

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ un échantillon de taille n avec densité $f_\theta(x) = \frac{1+\theta x}{2}\chi_{[-1,1]}(x)$, où $\theta \in [-1,1]$ est inconnu. Écrire $Y_i = \chi_{[0,1]}(X_i)$ pour tout $i \in \{1,2,\cdots,n\}$. Estimer θ par la méthode des moments utilisant $\{X_i\}_{i=1}^n$ et calculer l'écart quadratique moyenne. Proposez un autre estimateur de θ qui améliore cet écart quadratique moyenne. Répétez les mêmes tâches utilisant $\{Y_i\}_{i=1}^n$ et pas $\{X_i\}_{i=1}^n$.

Solution La méthode des moments consiste à égaler les moments théoriques aux moments empiriques calculés à partir de l'échantillon. Le premier moment (moyenne) d'une variable aléatoire X avec densité $f(x|\theta)$ est donné par l'espérance mathématique $E[X]$.

Considérons la fonction de densité de X donnée par

$$f(x|\theta) = \frac{1+\theta x}{2}, \quad \text{pour } x \in [-1,1] \tag{1}$$

L'espérance de X,$E[X]$, s'obtient en intégrant le produit de X par la densité de probabilité sur l'intervalle de définition de X, ce qui nous donne :

$$E[X] = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1+\theta x}{2}\, dx \tag{2}$$

Cette intégration aboutit à :

$$E[X] = \frac{\theta}{3} \tag{3}$$

$$E[X^2] = \frac{\theta}{4} \tag{4}$$

En utilisant la méthode des moments, nous égalisons le moment théorique, ici l'espérance calculée $E[X]$, avec le moment empirique, la moyenne d'échantillon $\bar{X}$, ce qui nous donne l'équation :

$$\bar{X} = \frac{\theta}{3} \tag{5}$$

En résolvant cette équation pour θ, nous obtenons l'estimateur de θ par la méthode des moments :

$$\hat{\theta}_{MM} = 3\bar{X} \tag{6}$$

$$\hat{\theta}_{MM} = 3\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \tag{7}$$

L'Écart Quadratique Moyen (EQM) d'un estimateur $\hat{\theta}$ est défini par :

$$EQM(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta}-\theta)^2]. \tag{8}$$

$$E\left[\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \theta\right)^2\right] = \frac{9}{n}E[X_1^2] + \frac{18}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot E^2[X_1] + \theta^2 + 6\theta\cdot E[X_1] \tag{9}$$

Nous procédons maintenant à la substitution de $E[X]$ et $E[X^2]$ dans notre expression précédente pour simplifier le calcul.

$$E\left[\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \theta\right)^2\right] = \frac{\left(\frac{9}{2} + 8n\cdot\theta^2 - 2\theta^2\right)}{2n} \tag{10}$$

Exercice 2

On a un échantillon de taille 2 de Cauchy$(\theta, 1)$, où le centre $\theta \in \mathbb{R}$ est inconnu. Estimer θ selon la méthode du maximum de vraisemblance.

Solution à faire

Exercice 3

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. On suppose que toutes les fonctions $f_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $\theta \in \mathbb{R}$, définies par $f_\theta(x) = g(|x - \theta|)$ sont densités de probabilité. Soit $x_1, x_2, \cdots, x_n$ un échantillon de taille n avec densité f_θ, où $\theta \in \mathbb{R}$ est inconnu. Écrire $x_{(1)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$ pour les statistiques d'ordre. Montrez que l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ existe et se trouve dans l'intervalle $[x_{(1)}, x_{(n)}]$.

Solution à faire