

CT 系统参数标定及成像

黄璐哲, 方天庆, 帅青

指导教师: 数模组

(浙江大学数学科学学院, 杭州 310027)

编者按: 该论文采用分步处理的方式来标定 CT 系统的各个主要参数, 较为完整地解决了 CT 系统的标定问题. 首先采用二次曲线拟合确定 CT 系统的增益和探测器单元的间距, 然后用最小二乘法确定 180 个旋转角度和旋转中心的坐标, 得到的结果精度较高. 在图像重构时, 分别采用代数迭代法和滤波反投影法进行求解, 并对结果进行了比较. 可惜的是, 得到的结果精度略差. 对附件 5 给定的接收数据, 分析得到了该数据含有噪声, 并给出了噪声水平, 这是该论文的一个特色. 最后, 该论文还自行构造数据, 对 CT 系统的参数标定方法进行了检验, 同时加上随机噪声, 对算法的稳定性进行了分析.

摘要: 本文根据给定的 CT 标定板设计了一套平面 CT 标定的算法, 具有较好的精度和稳定性, 并建立了通过投影值反求吸收率的重构模型与算法, 经过去噪后可以得到较好的吸收率图像. 同时设计了一套新的 CT 标定板, 通过充分利用几何特征来提高标定算法的性能.

关键词: 最小二乘拟合; 迭代优化; 滤波反投影算法; 代数迭代法

分类号: AMS(2010) 90C08

中图分类号: TB114.1

文献标识码: A

1 问题分析

第一问中, 首先需要确定吸收率与衰减强度之间的数学关系. 考虑使用一部分投影值与圆弦长的数据进行分析, 确定二者之间的函数关系. 再进行整体的几何模型建模, 建立坐标系, 根据旋转中心、探测器与坐标轴的夹角来建立关于弦长的投影模型. 考虑到待优化参数较多, 可选代优化参数, 再通过改进的最小二乘法, 进行非线性优化, 得到标定值.

第二问, 首先根据问题 1 中求得的标定参数, 对附件 3 中的数据进行预处理, 使之旋转中心变换到正方形托盘中心. 再进行 CT 反投影重建建模, 考虑连续和离散两种建模求解方式. 连续模型中利用傅里叶中心切片定理, 设计滤波反投影算法 (FBP) 进行重建. 离散模型中使用代数迭代法 (ART) 对像素网格直接进行求解. 再对吸收率图像进行降噪处理, 考虑比较多种降噪算法表现, 得到重建图像.

第三问与第二问相比, 数据加入了噪声, 且图形更加复杂, 对算法稳定性要求更高. 首先进行去噪, 用 SPSS 软件对可能噪声值进行 Kolmogorov-Smirnov 均匀分布检验, 确定其分布, 再按照同第二问的方法进行反变换、去噪, 得到最终的重建图像.

第四问, 首先用模拟仿真的方法对第一问的标定模型进行检验, 研究其精度; 再考察其对于噪声和迭代初值的稳定性. 最后考虑建立新模板并利用其几何特征估计参数并作为迭代初值, 提升标定算法速度与精度, 并进行稳定性验证.

2 理论基础

问题中, 使用的 CT 系统的原理是使用 X 射线照射在样品上, 物体吸收部分射线的能量, 使得射线强度产生衰减, 射线的衰减呈指数变化^[1]. 那么对于长度为 l 的均匀同质物体, 吸收率为 ρ , 则探测器上对应位置得到的接收信息 D 应满足

$$D = f(\rho l). \quad (1)$$

而对于平面内的不均匀介质, 射线沿某一路径后得到的探测器的值应为

$$D = f\left(\int \rho(l) dl\right). \quad (2)$$

因此, 在进一步分析之前, 我们需要先确定经过增益等处理之后得到的接收信息与其吸收量之间的关系.

观察附件 2 中接收信息图, 如图 1 所示, 可以发现, 图像可以很明显的看成是两部分叠加而成. 结合图 2 所示的标定模板集合信息可知, 这两部分分别为椭圆部分的投影与圆部分的投影. 由于圆具有各方向投影均相等的良好性质, 因此, 我们截取其中一部分数据进行试探性研究. 选择第一个测量角度的属于圆的投影的非零数据, 得到一组探测信息 $D(i)$. 对于探测点 i , 其发出的射线与圆心的距离为 $d_i = i\Delta d + d_0$, 其中 Δd 为探测器上的射线间距, d_0 为探测器位置相对偏置. 那么, 第 i 条射线与圆相交的弦长为 $2\sqrt{R^2 - d_i^2}$, 其中 R 为圆半径. 我们推测探测器的接收数据与 ρl 成一次函数关系, 即

$$D(i) = \mu \times 2\sqrt{R^2 - (i\Delta d + d_0)^2} \rho + c. \quad (3)$$

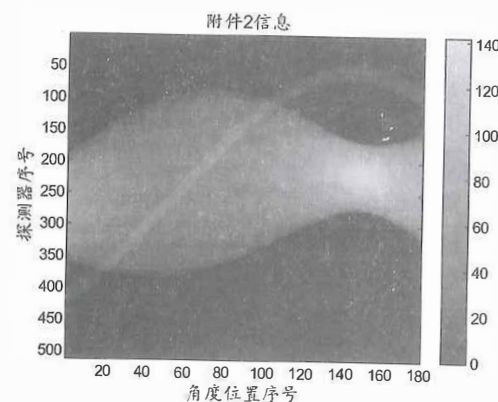


图 1: 附件 2 信息

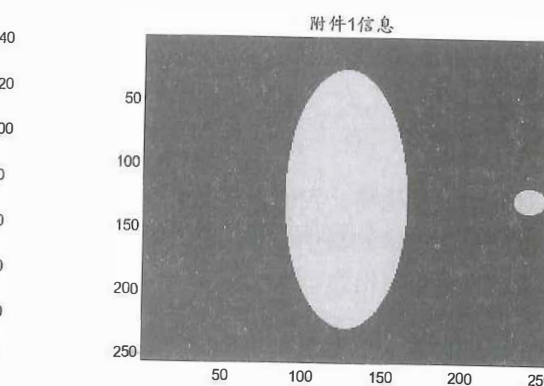


图 2: 附件 1 几何形状

使用最小二乘法对曲线进行拟合, 可得到如图 3 所示的拟合图像, 并求出各个参数的值为

$$\mu = 1.7724, \quad \Delta d = 0.2768, \quad d_0 = -4.0688, \quad c = 0.0000.$$

即是说对于标定模板, 其吸收强度 $D = \mu \rho l$, 对于参数 μ , 在后面的模型中我们会进一步进行求解, 此处仅是为了寻找模型之间的关系进行初步的分析.

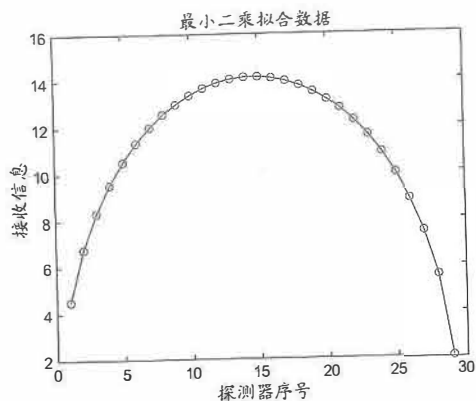


图3: 拟合圆上的数据

2.1 模型建立

以正方形托盘的中心为坐标原点, 椭圆中心与圆中心的连线方向为 x 轴, 过坐标原点垂直于 x 轴方向为 y 轴, 建立平面直角坐标系. 在这一坐标系中, 设 CT 系统的旋转中心坐标为 $R(x_0, y_0)$, 探测器平面与 x 轴的夹角为 θ , 探测器中心与旋转中心在探测器平面上的投影的距离为 d_0 .

2.2 理论公式

由于这个问题中, 标定模板是均匀介质, 所有地方的吸收率都为 1, 那么其探测器获得的数值即与穿过的长度有关. 那么在这一问题中, 我们转化为某一方向的直线穿过标定模板的长度的求解.

标定模板中, 椭圆与圆的方程分别为

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1, \quad m = 15, \quad n = 40, \quad (x - 45)^2 + y^2 = 4^2.$$

为了对问题进行化简, 我们设定一个坐标原点在探测器上的投影位于探测器中心的状态, 此时对于探测器上与探测器中心相距为 d 的一条射线, 可以对其在椭圆中交出的弦长进行求解. 这条射线的方程可写出为

$$x \cos \phi + y \sin \phi = d.$$

与椭圆的方程进行联立求解, 可解出该直线与椭圆相交的弦长

$$p = \frac{2mn\sqrt{r^2 - d^2}}{r^2},$$

这里

$$r^2 = m^2 \cos^2 \phi + n^2 \sin^2 \phi.$$

对于圆上的部分, 设圆心坐标为 $(G, 0)$, 圆半径为 r_0 , 其中 $G = 45$, $r_0 = 4$, 那么容易求出其弦长表达式为

$$p_1 = 2\sqrt{r_0^2 - (G \cos \phi - d)^2},$$

同时, 由于在整个旋转过程中, 直线与椭圆或圆不一定有交点, 那么这种情况下, 我们对整个角度范围进行整合, 可以得到总的投影长度为

$$p_t = \frac{2mn\sqrt{\max(0, m^2 \cos^2 \phi + n^2 \sin^2 \phi - d^2)}}{m^2 \cos^2 \phi + n^2 \sin^2 \phi} + 2\sqrt{\max(0, r_0^2 - (G \cos \phi - d)^2)}.$$

考虑到实际情况中, 探测器的中心与坐标原点有一定的偏移, 那么在上式的基础上, 我们需要对投影长度进行修正.

易证, 在探测器能探测到物体的前提下, 沿垂直于探测器方向的探测器位置变化对投影长度没有影响. 即在探测器位置发生变化时, 只需要考虑沿探测器方向的位置变化.

那么对于旋转中心坐标 $R(x_0, y_0)$, 探测器中心与旋转中心在探测器平面上的投影的有向距离 d_0 , 对于探测器上一条射线, 其与探测器中心的距离为 d , 那么容易求出, 该点与坐标原点在探测器上的投影的距离 d' 的值为

$$d' = x_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi + d_0 + d,$$

即可转化到刚才求出的标准形式的公式上去.

由于在实际数据中, 探测器是有 512 个 X 射线组成的, 对于第 i 个发射器, 其与发射器中心的距离也可以简单的表示为

$$d = (i - 256.5)\Delta d,$$

这里距离的负号表示探测器中心与该点的连线沿探测器与 x 轴夹角 ϕ 的反向, 则

$$d' = x_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi + d_0 + (i - 256.5)\Delta d.$$

标定模板的吸收强度处处相等且都为 1, 为计算吸收强度与探测器探测到的数值的关系, 我们引入增益系数 μ , 表示投影长度与最终结果的关系, 即

$$V = \mu p_t.$$

综合上述各式, 所以对于探测角度为 ϕ 的探测器, 其上第 i 条 X 射线探测所得的数值的计算公式为

$$V = \mu \frac{2mn\sqrt{\max(0, m^2 \cos^2 \phi + n^2 \sin^2 \phi - (x_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi + d_0 + (i - 256.5)\Delta d)^2)}}{m^2 \cos^2 \phi + n^2 \sin^2 \phi} + 2\mu\sqrt{\max(0, r_0^2 - (G \cos \phi - (x_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi + d_0 + (i - 256.5)\Delta d))^2)}.$$

问题即转化为, 根据附件 2 给出的数据, 对该公式中的参数进行求解.

2.3 模型求解

为了确定模型中的各项参数信息, 我们需要对模型参数进行求解, 使得理论值与实际测量值误差最小, 我们使用均方根误差来作为衡量指标. 即

$$\min \delta = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{180} \sum_{i=1}^{512} (V(i, j) - D(i, j))^2}{n - 1}},$$

这里 $D(i, j)$ 指附件2中, 第 j 组探测数据中第 i 个探测器的测量值, $V(i, j)$ 指第 j 组探测数据中第 i 个探测器的计算值.

使用 Matlab 的非线性拟合函数工具进行模型求解, 由于这是一个数据量较大的非线性优化模型, 直接寻找到最优解比较困难, Matlab 函数在进行求解时会从给定的初值开始迭代, 初值的选取对计算结果有直接影响. 因此, 我们使用以下步骤对参数进行迭代求解, 获取更准确的参数值:

1) 选取参数 $d_0, x_0, y_0, \mu, \Delta d, \phi_i, i = 1, 2, \dots, 180$ 的初值, 这里参数的初值可以随意选取, 我们设置为 $d_0 = x_0 = y_0 = 0, \mu = 1.7724$ (由前文粗计算得), 使用 512×180 组数据, 对所有参数进行拟合, 获得第一次求解的参数结果;

2) 对第一次求解得到的 $\phi_{1i}, i = 1, 2, \dots, 180$, 使用局部加权回归散点平滑法进行平滑处理, 接着将 ϕ_i 作为已知参数, 使用 512×180 组数据, 以第一次求解的结果作为初始点, 对参数 $d_0, x_0, y_0, \mu, \Delta d$ 进行求解, 得到第二次参数的求解结果;

3) 使用第二次求解得到的参数 $d_0, x_0, y_0, \mu, \Delta d$ 作为已知参数, 对于 180 组, 每组 512 个数据, 以第 2) 步中得到的角度作为初值, 分别对每组数据的角度参数进行求解, 得到第 3) 步的求解结果;

4) 使用第 2) 步与第 3) 步的结果作为初始值, 再次使用 512×180 组数据, 对所有参数进行拟合, 得到最终结果.

2.4 求解结果

使用上述算法对模型进行求解, 得到各个参数如下

$$\mu = 1.7727, \quad x_0 = -9.2696, \quad y_0 = 6.2738, \quad d_0 = 0.0000, \quad \Delta d = 0.2768.$$

同时可以求出 180 个测量角度的数据, 部分数据见表 1, 由于我们求的是探测器的角位置, 因此这里将所得数据转换为题目要求的 X 射线的角度位置.

表 1: X 射线角度信息

角度序号	1	2	3	90	91	179	180
角度(度)	-60.3465	-58.9927	-58.4392	28.6382	29.6437	117.6509	118.6439

2.5 模型评价

在问题 1 的模型中, 我们使用均方根误差来进行衡量, 第一次求解均方根误差为 4.4161, 最终结果的均方根误差为 0.0148. 可以看出, 我们的算法对原始数据的拟合程度较好, 均方根误差很小, 因此可以认为我们得到的参数信息是较为准确的, 模型的可靠性较好.

3 问题 2 的求解

在问题 2 中, 需要根据某未知介质的接受信息, 利用问题 1 中求出的参数, 确定该未知介质在正方形托盘中的位置、几何形状和吸收率. 第一题中分析了投影的过程, 此问需要利用给定的投影数据进行逆过程. 首先利用标定数据对投影数据进行了预处理, 并分别用连续模型的 FBP (滤波反投影) 算法和离散模型中的 ART (代数迭代法) 并结合 NLM 降噪算法进行反投影重建, 并比较了两种算法的效果.

3.1 数据预处理

由问题 1 可知, 由于安装过程的误差, CT 系统的旋转中心并不在正方形的中心, 由前文推导公式可知, 探测器上的第 i 个传感器与坐标原点的沿探测器方向的距离为

$$d' = x_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi + d_0 + (i - 256.5) \Delta d.$$

对于任意角度的探测器, 我们假想一个中心与原点重合的参考探测器, 将探测器上的数据转化到参考探测器上, 再对问题进行求解. 即

$$d' = (i' - 256.5) \Delta d = x_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi + d_0 + (i - 256.5) \Delta d,$$

则对于原始数据 $y = data(i, j)$, 可以得到新的转化后的数据

$$data_{pre}(i', j) = data(i(i'), j) = data(i' - (x_0 \cos \phi + y_0 \sin \phi + d_0) / \Delta d, j).$$

变换前后数据等高线图, 如图 4 所示.

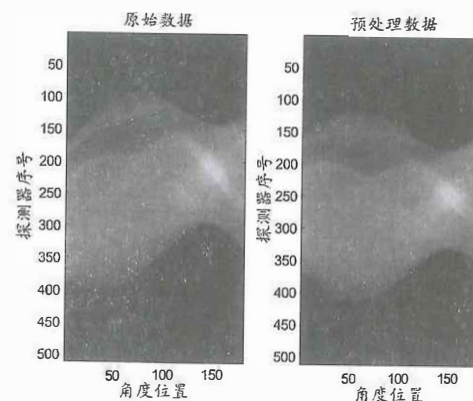


图 4: 变换前后数据

3.2 连续模型

首先, 将物体的吸收率记为 $f(x, y)$, 投影射线为 $l: x \cos \theta + y \sin \theta = t$, 则 $f(x, y)$ 关于该射线的线积分为

$$P_\theta(t) = \int_l f(x, y) ds.$$

再根据傅里叶中心切片定理 (Fourier Slice Theorem)^[2], 它表明给定一组投影的数据 p_θ , 则可以通过二维傅里叶变换还原物体. 即

$$S_\theta(w) = F(w \cos \theta, w \sin \theta),$$

其中

$$S_\theta(w) = \int_R P_\theta(t) e^{-j2\pi w t} dt, \quad F(u, v) = \int_{R^2} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy.$$

实际情况中, 我们考察的数据均被离散化, 可被表为矩阵形式, 因而使用离散傅里叶变换的算法进行重建.

傅里叶中心切片定理将投影的傅里叶变换和图像的傅里叶变换建立了联系, 故可以通过充足数目方向上投影的傅里叶变换信息, 来构建出原始函数的估计值. 在实际应用过程中, 本文使用滤波反投影法 (FBP) 来完成重构, 其算法步骤如下:

- 1) 指定 θ , 对 $P_\theta(t)$ 应用 FFT, 得到 $S_\theta(w)$;
- 2) 对 $S_\theta(w)$ 做滤波, 本文使用 Ramp 函数;
- 3) 应用 IFFT 于滤波后的结果, 得滤波后的投影矩阵;
- 4) 对投影矩阵插值, 进行反投影, 本文使用 nearest 方式;
- 5) 遍历所有的 θ .

3.3 离散模型

设图片共有 $J = n \times n$ 个像素, 记 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_J]^T$ 为 J 维图像矢量, x_j 表示图像上第 j 个像素点的吸收强度; $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_I]^T$ 为 I 维投影矢量, p_i 表示第 i 条射线所经过的所有像素的投影值, $R = (r_{ij})_{I \times J}$ 为投影矩阵, r_{ij} 为 0-1 变量表示宽为 δ 的粗射线 i 是否穿过像素 j , 则 $R\mathbf{x} = \mathbf{p}$, 左侧各分量称为伪射线和, 右侧称为真射线和. 一般地, R 是大型稀疏矩阵, 直接求解方程组有困难. ART (代数迭代法) 的思路是每次校正一条射线路径上的像素值, 使得该条真伪射线和间误差减小. 迭代公式为

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} \frac{p_{i_k} - r_{i_k} x^{(k)}}{\|r_{i_k}\|^2} r_{i_k},$$

其中 k 是迭代次数, $k = 0, 1, \dots$, $i_k = k(\bmod I) + 1$; $\lambda^{(k)}$ 称为松弛参数. 本文取 $\lambda^{(k)} = 0.25$. 求解步骤为:

- 1) 设置初值;
- 2) ART 迭代;
- 3) 应用先验信息决定的限制条件, 本文使用像素值非负限制, 转步骤 2);
- 4) 一定迭代次数后终止, 一般为 $(3 \sim 8)I$ 次.

3.3.1 降噪算法

不论何种重建算法, 不可避免会带入伪影点, 同时由于数据含有噪声, 成像质量并不令人满意. 本文使用 NLM (非局部均值) 降噪方式对图像进行处理. NLM 算法是图像降噪领域非常有效的算法之一, 效率较高, 实现简单. 其思路是对像素的某邻域窗口内的像素灰度值做加权平均, 且像素越相似, 权重越大. Huang 等人^[3] 将其运用到 CT 图像迭代重建过程中, 显示其具有良好的性能.

$$\text{NLM}(x_i) = \sum_{j \in N_i} w(i, j) x_j,$$

其中

$$w(i, j) = \frac{e^{-\|x_{V_i} - x_{V_j}\|^2 / h^2}}{\sum_{j \in N_i} e^{-\|x_{V_i} - x_{V_j}\|^2 / h^2}},$$

N_i 表示像素 i 的邻域, 本文取 5×5 像素窗口, x_{V_i} 是像素 i 邻域像素的值构成的矩阵, 这里矩阵模的意义是各元素平方和的平方根 h 控制滤波强度, 本文取为 0.5.

对于问题 2, 重建结果如图 5 所示. 可以看出 NLM 算法对于重建图像的去噪有着较好的效果, 并且保留了较多的边缘信息. 将输出做适当处理即为所求结果.

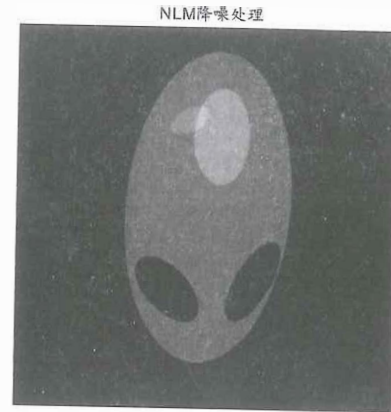


图 5: 问题 2 重建结果

4 问题 3 的求解

问题 3 的要求与问题二中相同, 但是观察所给出的数据, 发现其中含有较多噪声, 因此考虑进行降噪预处理.

4.1 去噪预处理

观察附件 5 数据, 绘制对数坐标图, 如图 6 所示, 发现其数据主要集中在探测器中间部位, 探测器两边的数据数值较小, 且在小范围内无规律波动. 取其中第一组观测数据, 做出差分图, 可以看出, 探测器两边的相邻两个传感器的数据差集中在 0 附近, 因此我们推测这些数据是由测量时的误差引起的波动.

进一步分析数据, 小于 0.3 的数据值有无规律波动, 考虑将小于 0.3 的数据值作为噪声. 提取所有小于 0.3 的数据值, 利用 SPSS 软件进行 Kolmogorov-Smirnov 均匀分布检验, 结果如表 2 所示, 并做出 Q-Q 图, 如图 7 所示.

表 2: Kolmogorov-Smirnov 检验

	值
样本数	21307
D	0.007654
P-value	0.1647
均匀分布范围	[0.0257, 0.2829]

因此, 对原数据做去噪处理, 本文将非主信号区域的噪声删去并在主要信号值上减去噪声均值. 之后再按照问题 2 所述方法进行预处理, 并分别使用 ART 算法与 FBP 算法进行重建, 结果如图 8 和图 9 所示.

可以看出, FBP 算法得到的图像更加平滑, ART-NLM 算法的图像边缘较为锐利. 同时给出两种算法重建得到 10 个采样点的吸收率数据.

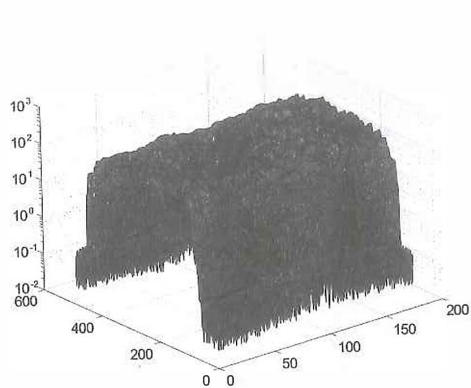


图6: 附件5数据对数坐标图

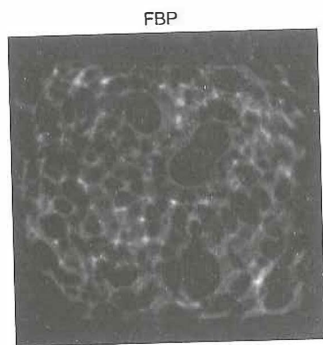


图8: FBP重建结果

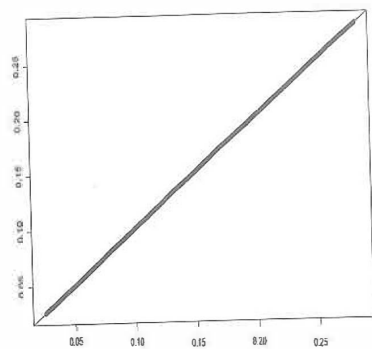


图7: Q-Q图

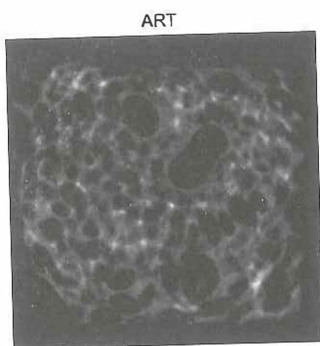


图9: ART重建结果

4.2 对比分析

对比两者, ART-NLM算法重建速度较慢,但保留了较多的边缘信息;FBP算法速度快,成像质量高,但算法本身处理不完全数据时具有缺陷.使用模拟仿真方法对两算法所得吸收率值进行对比,发现ART-NLM值偏大.我们认为这是由于投影矩阵 R 元素取值仅有0或1造成的,每次做迭代修正时,射线边缘的像素也同时受到等值的修正,造成了一定的偏差.可以考虑对于投影矩阵 R 做改进,部分文献提出了 $[0,1]$ 区间内连续取值的赋权方法,由于篇幅限制在此不做展开了.

5 问题4的求解

5.1 精度分析

在这个问题中,我们采用模拟仿真的方法进行精度分析.在问题一模型的基础上,我们通过更改位置参数信息,进行模拟,得到这种情况下的 512×180 个数据,再使用我们的模型,在这组数据的基础上进行标定,计算得出标定所需参数,与设定的理论值进行对比,即可得到模型的精度信息.

设置参数 $d_0 = 1$, $\mu = 1.5$, $x_0 = 10$, $y_0 = 10$,观测角度依次为 $\phi_i = i^\circ$, $i = 1, 2, \dots, 180$,使用问题1中模型,模拟生成180组探测器数据.将生成的探测器数据进行参数标定,得到结果如表3所示.

表3: 计算机仿真实验的几何标定结果

参数名称	$d_0(mm)$	$x_0(mm)$	$y_0(mm)$	μ
理论值	5	-8	10	1.5
计算值	5.0000	-8.0000	10.0000	1.5000
差值($\times 10^{-10}$)	-0.1195	-0.0022	-0.5961	-0.0135

计算观测角度的误差平方和

$$SSE_\phi = \sum_{i=1}^{180} (\phi_i - \bar{\phi}_i)^2 = 9.8618 \times 10^{-17}.$$

从表3中可以看出,本文的标定方法的计算值与真实值之间的误差很小,使用这种方法进行标定的精度较高.

5.2 稳定性分析

在CT系统的标定过程中,误差的存在不可避免.探测器上获得的传感器的值有与实际值相比有一定波动,即接收信息有一定噪音.为分析问题1中的模型在接收器存在噪声的情况下的标定结果的稳定性,这一节中我们使用计算机进行仿真,人为地在投影坐标中增加不同等级的噪声数据,再以此进行模板标定.

与精度分析相同,设置参数 $d_0 = 1$, $\mu = 1.5$, $x_0 = 10$, $y_0 = 10$,观测角度依次为 $\phi_i = i^\circ$, $i = 1, 2, \dots, 180$,使用问题1中模型,模拟生成180组探测器数据.根据这种方法模拟得到的探测器接受信息中的数据范围在 $(0, 120)$ 之间,我们给原数据增加在 $(-15, 15)$ 范围内均匀分布的随机噪声.从图10可以看出,数据信息较原数据更模糊,且噪声较多.

使用本文的标定算法进行标定得到的计算值与理论值的对比,如表4所示,标定角度与原角度的对比如图角度计算误差所示.

角度计算的均方根误差为 0.0053 rad ,结合图像与表格数据,我们可以看出,我们的标定算法在数据有小范围的噪音的时候,标定产生的误差仍然较小,算法具有很好的稳定性.

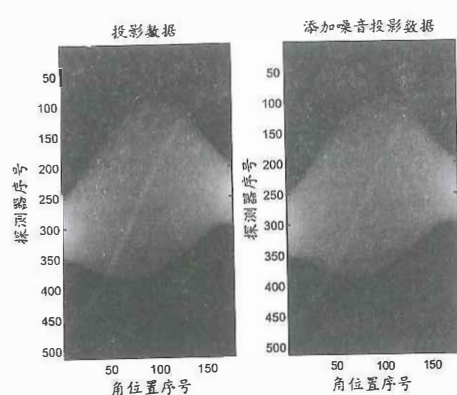
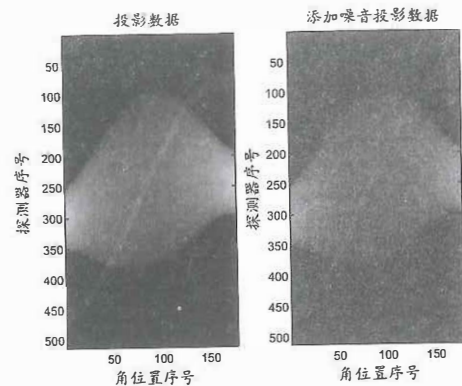
为了进一步检验算法的稳定性,我们对原图像增加在 $(-50, 50)$ 范围内均匀分布的随机噪声,从图11可以看出,此时的图片与原图相比已有较大变化,在这样的数据的基础上,使用本文的算法进行标定,得到的参数见表5.

表4: $(-15, 15)$ 均匀分布的噪声误差

参数名称	$d_0(mm)$	$x_0(mm)$	$y_0(mm)$	μ
理论值	5	-8	10	1.5
计算值	5.0189	-7.9957	10.0339	1.4986
差值	-0.0189	-0.0043	-0.0339	0.0014

表5: $(-50, 50)$ 均匀分布的噪声误差

参数名称	$d_0(mm)$	$x_0(mm)$	$y_0(mm)$	μ
理论值	5	-8	10	1.5
计算值	5.0693	-8.0188	10.3614	1.4938
差值	-0.0693	0.0188	-0.3614	0.0062

图10: $(-15, 15)$ 均匀分布噪声图11: $(-50, 50)$ 均匀分布噪声

角度计算的均方根误差为0.0191 rad, 相比噪声较小时, 参数标定的误差有所增大, 但仍然在很小的范围内. 因此, 我们可以得出结论, 由于采用了迭代使用最小二乘法进行函数拟合, 我们的算法对数据的利用率较高, 在使整体数据偏差最小的前提下, 标定得到的参数稳定性较好, 受测量过程中的误差的影响较小.

5.3 自行设计标定模板

一般来说, 模板的设计可以考虑遵从两个原则:

- 1) 模板易于加工;
- 2) 模板中的特征图形可以写出简洁的解析表达式.

例如, CT标定界著名的“头模”(head phantom), 其中就包含多个椭圆的形状, 这种能写出解析表达式的图形能在计算机仿真中起到很大的优势^[2]. 但是, 根据第一问中标定求解的分析, 发现当标定托盘上为一个椭圆和一个圆形时, 标定解法的稳定性不是特别好, 而且在求解过程中并没有充分利用特征图形的几何关系. 故考虑设计新标定模板, 如图12所示, 其工作示意图如图13所示. 圆内灰色部分的吸收率均为1.0000.

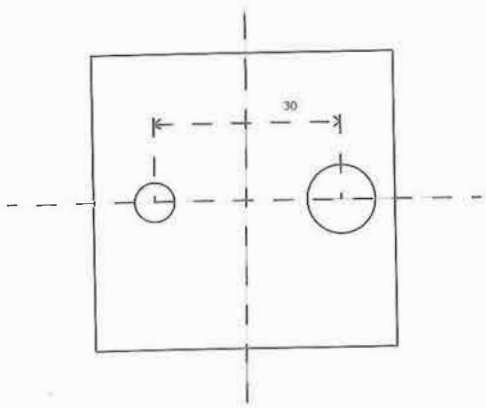


图12: 新标定模板示意图

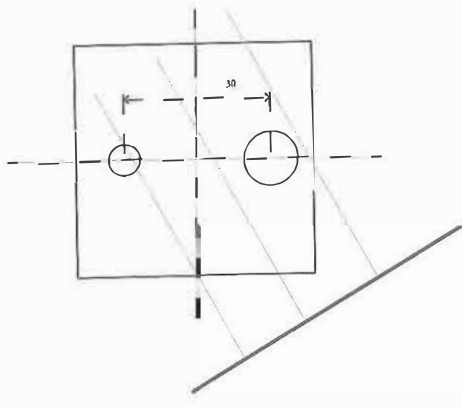


图13: 新标定模型的几何示意图

5.3.1 标定模型的建立

与第一问中标定坐标系类似的, 以正方形托盘的中心为坐标原点, 小圆中心到大圆中心的连线为 x 轴, 过坐标原点垂直于 x 轴方向为 y 轴, 建立平面直角坐标系. 同时记半径为5mm的小圆为 $C1$, 大圆为 $C2$. 其中设CT系统的旋转中心坐标为 $R(x_0, y_0)$, 探测器平面与 x 轴的夹角为 ϕ , 则探测光束与 x 轴正向的夹角为 $\theta = \phi + \pi/2$, 探测器中心与旋转中心在探测器平面上的投影的距离为 d_0 .

与问题1类似, 探测器获得的数值与射线穿过圆形区域的弦长成正相关. 则对于探测器上第 i 个单元, 设该点相距 R 在探测器上的投影距离为 d . 射向它的射线直线方程可写为

$$y = \tan(\theta) \times (x - x_0) + y_0 - \frac{d}{\cos(\theta)}, \quad d = d_0 - (256.5 - i) \times \Delta d.$$

再记圆 $C1$ 的半径为 $R_1 = 5\text{mm}$, 其圆心为 (x_{C1}, y_{C1}) , $C2$ 的半径为 $R_2 = 10\text{mm}$, 其圆心为 (x_{C2}, y_{C2}) . 射向该传感器的射线经过圆的弦长为

$$l_1 = 2 \times \sqrt{\max\left(0, R_1^2 - \frac{(-y_{C1} + \tan(\theta) \times x_{C1} + y_0 - d/\cos(\theta))^2}{1 + \tan^2(\theta)}\right)},$$

$$l_2 = 2 \times \sqrt{\max\left(0, R_2^2 - \frac{(-y_{C2} + \tan(\theta) \times x_{C2} + y_0 - d/\cos(\theta))^2}{1 + \tan^2(\theta)}\right)}.$$

可知第 i 个探测器处的测量值为 $p = \mu(l_1 + l_2)$.

5.3.2 标定参数的初步估计

仪器的标定过程中, 常有的一种做法是寻找图形特征. 在设计标定物的过程中, 考虑使用具有显著几何特征的图形, 圆形比较方便直接寻找其中心坐标. 同时, 通过测试发现, 如果使用最小二乘法进行参数匹配, 当标定物中只有一个图形时, 几何特征不够明显, 可能会出现欠拟合的结果. 若标定物中有三个图形时, 则拟合的条件十分苛刻, 求解过程十分漫长. 故考虑使用两个圆作为标定物, 这样既充分利用几何关系寻找参数如 x_0, y_0 的大致范围, 又能使最小二乘法的求解较为快速.

下面利用其几何特性以及探测器的探测值, 来获取该测量值下探测器与 x 轴的夹角 ϕ , 进而继续估计旋转中心 R 、投影距离 d_0 的值. 由于所能处理的数据为离散的点, 并且由于可能存在的误差, 用几何关系得到的这些值也有一定的误差. 故考虑将这些估计值作为初始值, 再考虑使用最小二乘法对参数进行最优化求解, 以更快、更稳定地对标定参数进行求解.

由于CT一次工作旋转的角度在 180° 左右, 考察CT探测到的第1个角度和第180个角度时两个圆的投影相对位置. 如图14所示, 以探测器为参照系, $C1, C2$ 为CT工作时第1个角度下两圆的相对位置示意图, $C1', C2'$ 为前者旋转 180° 左右时的相对位置示意图. 此时, 我们可以通过CT扫描的数据比较容易地求得 $C1, C2, C1', C2'$ 各自圆心在探测器上的相对位置. 不妨记该相对位置为 i_1, i_2, i'_1, i'_2 . 则由中心对称, 可知旋转中心 R 在探测器上的投影相对位置近似为

$$i_R = \frac{i_1 + i_2 + i'_1 + i'_2}{4}.$$

同时也可推出 R 在探测器上的投影与探测器中心(第256与第257个探头之间的位置)的距离的近似值

$$d_0 = (256.5 - i_R) \times \Delta d.$$

除此之外, 由于也已知 C_1 与 C_2 圆心的实际长度、投影长度与方向, 故也可以算出当前探测器与 x 轴的夹角 ϕ 的估计值为

$$\phi = \arcsin \left(\frac{(R1_{c1} - R2_{c1})\Delta d}{C_1 C_2} \right).$$

再考察第90组CT观测数据, 此时探测器相对于初始位置逆时针旋转了大约 90° . 如图15所示, 由于坐标系原点 O 为 C_1 和 C_2 的中点, 故容易得到 O 在探测器上的投影位置为 i_O . 从而用 $HD = (i_R - i_O) \times \Delta d$ 来计算第1组和第90组中 R 点和 O 点的投影距离 HD 与 $H'D'$. 由于本次旋转角度为 90° , 故可以得到 OR 的长度 $|OR| = \sqrt{HD^2 + H'D'^2}$. 同时可以得到 $\angle ROD = \arctan(HD/H'D')$. 可知 OR 与 x 轴的夹角为 $\theta_R = \phi + \pi/2 - \angle ROD$, 则 R 坐标为

$$x_0 = |OR| \times \cos(\theta_R), \quad y_0 = |OR| \times \sin(\theta_R).$$

模型中的 d_0 , HD 中的正负号均表示方向, 其中以 R 为旋转中心, 向逆时针方向为正.

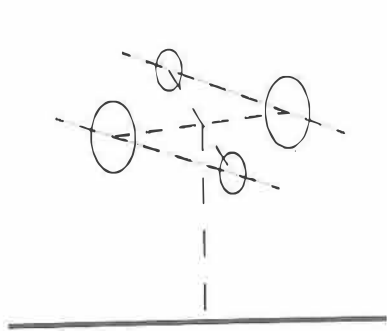


图14: 求解旋转中心的初值示意图

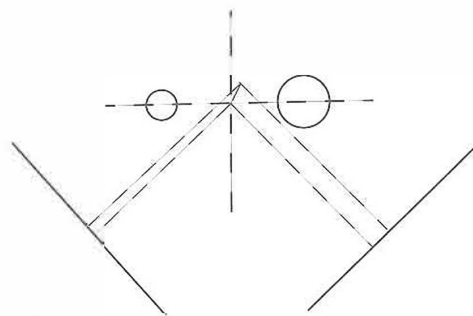


图15: 求解旋转角

5.3.3 最小二乘法参数优化

利用上节中的标定方法, 根据参数 x_0, y_0, d_0, θ , 以及探测器上探针的位置 i 、CT探测序列第 j 个角度 ($1 \leq j \leq 180$), 可唯一确定一个投影值 p_{ij} . 记实际测得的投影值为 p_{0ij} , 则在确定的序列 $\{x_0, y_0, d_0, \theta\}$, 该数据相对于原始数据的偏差为

$$SSE_j = \sum_{i=1}^{512} (p_i - p_{0i})^2,$$

则对于180个角度 θ , 整体残差平方和等于

$$SSE = \sum_{j=1}^{180} SSE_j = \sum_{j=1}^{180} \sum_{i=1}^{512} (p_{ij} - p_{0ij})^2,$$

故整体的规划为

$$\min SSE(x_0, y_0, d_0, \theta_{1 \times 180}).$$

此时问题转化为解一个183变量的非线性规划问题. 由于数据量过大, 故在实际求解中可以先考虑随机选取18组 j 值, 算出 x_0, y_0, d_0 的值, 再对每个单独的 j , 求解对应的 θ 值.

算法步骤如下:

- 1) 随机选取18个CT旋转中的方向. 计算圆 C_1, C_2 的投影, 估算这18个方向上的 θ_e 值;
- 2) 选取第1、第90、第180个方向上的数据, 计算圆 C_1, C_2 的投影, 计算出 x_0, y_0, d_0 的估计值 x_{0e}, y_{0e}, d_{0e} ;
- 3) 以估计的 x_{0e}, y_{0e}, d_{0e} 以及18个 θ_e 作为初值, 用Matlab中的非线性优化工具箱对该规划模型进行求解, 得到优化值 x_0, y_0, d_0 ;
- 4) 将 x_0, y_0, d_0 带入每个 SSE_j . 这时只剩下 θ 还是决策变量, 则为了求解CT系统使用的X射线的180个方向, 再进行180次单变量的非线性规划, 即可得到所有的角度值.

5.3.4 方法的评价

对算法的评价采用仿真的方法, 先给定 x_0, y_0, d_0 以及180个 θ 值, 从而可以计算出一个 512×180 的投影值矩阵 p_0 . 再由上述算法反求 x_0, y_0, d_0 以及 θ 的值.

在无噪声的情况下, 在 $[-15, 15]$ 内随机选取 x_0, y_0 , 在 $[-2, 2]$ 内随机选取 d_0 . 选取角度值 θ 为 $-60, -59, -58, \dots, 28, 29$ (单位: 度), 求解情况如表6所示, 最后一列为 x_0, y_0, d_0 的相对误差平均值.

表6: 仿真实验及其参数相对误差平均值

x_0	y_0	d_0	x'_0	y'_0	d'_0	误差
3.8724	-9.1262	1.9190	3.8724	-9.1262	1.9190	1.5407×10^{-5}
-6.2910	15.9300	-1.3115	-6.2910	15.9300	-1.3115	6.3544×10^{-9}
12.2357	-7.3452	0.0714	12.2357	-7.3452	0.0714	0.2865×10^{-10}
13.5689	-1.9048	1.6983	13.5689	-1.9048	1.6983	2.4923×10^{-9}
9.4854	1.4631	-1.8680	9.4854	1.4631	-1.8680	0.4155×10^{-7}
4.1775	8.2032	1.3575	4.1775	8.2032	1.3575	0.8742×10^{-8}
14.4733	2.3642	-1.5155	14.4733	2.3642	-1.5155	7.4111×10^{-4}
4.5589	7.2806	1.4863	4.5589	7.2806	1.4863	6.2535×10^{-9}
-10.3575	-12.0042	0.7845	-10.3575	-12.0042	0.7845	2.8539×10^{-7}
-2.1283	13.7360	-1.3110	-2.1283	13.7360	-1.3110	8.552×10^{-7}

表中未列出的角度 θ , 其误差也均在 1×10^{-3} 以内. 可以看到, 在没有噪声的情况下, 该算法能够很好地还原CT的各个参数. 并且可以看到, 该算法具有较好的稳定性, 对 x_0, y_0 和 d_0 的变化不敏感, 均能求出较准确的值.

当给 p_0 中非0部分加入均值为0, 方差为0.2的正态分布误差时, 固定 x_0, y_0 和 d_0 的值为 $(-10, -10, 1)$, 令角度的初始值从 -180° 变到 180° , 每次均以 3° 为间隔, 以参数 x_0 为例, 分析这些解中参数 x_0 的相对误差. 发现60%的角度中, x_0 的相对误差小于0.5%. 在初始角度位置为 -41° 时, 相对误差为取最大值3.78%. 经分析, 误差达到3.78%的原因为解非线性规划时陷入局部最优解. 这时用得到的解作为初始值, 使用模拟退火算法继续求解, 可以将最终的相对误差缩小到0.13%.

综上, 本标定模板及配套算法具有较强的稳定性和精度.

6 模型评价与总结

本文从CT投影原理出发,利用平面及射影几何知识建立了正向与反向投影模型,提出并比较了多种重建与降噪算法,对于原问题给出了较好的结果;在第四问中,对于模型进行了精度与稳定性的分析,并提出了新的标定模型.

6.1 模型优点

- 1) 标定算法精度高,稳定性强,求解速度较快;
- 2) 分别使用连续与离散反投影模型进行求解,较为全面充分;
- 3) 利用几何特征,给出了改进标定模型的思路,提出了新的标定模型并进行测试,结果优异.

6.2 模型不足

- 1) 反投影重建与去噪算法耗时较长;
- 2) ART 算法结果偏大,其投影矩阵取值可连续化,可改进以增强准确度.

参考文献:

- [1] 庄天戈. CT原理与算法[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1992
Zhuan T G. CT Principle and Algorithm[M]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 1992
- [2] Kak A C, Slanev M. Principles of computerized tomographic imaging[J]. Medical Physics, 2002, 29(1): 107
- [3] Huang J, Ma J, Liu N, et al. Sparse angular CT reconstruction using non-local means based iterative-correction POCS[J]. Computers in Biology and Medicine, 2011, 41(4): 195-205

Calibration and Imaging of a CT System

HUANG Lu-zhe, FANG Tian-qing, SHUAI Qing

Advisor: Instructor Group

(School of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract: In this paper, a set of CT calibration algorithm is designed according to the given CT calibration template, which has better accuracy and stability. The reconstruction model and algorithm of the reverse absorption rate through the projection value are established. After denoising, a better image of absorption can be acquired. At the same time, a new CT calibration template is designed to improve the performance of the calibration algorithm by making full use of the geometric features.

Keywords: least squares; iterative optimization; filtered back projection algorithm; algebraic reconstruction technique