微积分 I（第一层次）期中试卷 (2018.11.17)

一、简答题：(5分×8 = 40 分)

1. 用极限的定义证明：$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$.
2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4+4^n}$.
3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}$.
4. 设 $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, 求 $\mathrm{d}y$.
5. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty} n\Big((1+\dfrac{1}{n})^n-e\Big)$.
6. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\arcsin x}$.
7. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\Big((1+\ln(1+x))^{2x}-1\Big)$.
8. 设 x 为基准无穷小，求 $\ln(1+x)-\arctan x$ 的主部.

二、(7分) 设 $f(x)=\dfrac{5x-1}{2x^2+x-1}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

三、(7分) 证明方程 $\cos x-\dfrac{1}{x}=0$ 有无穷多个正根.

四、(7分) 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ 2y-ty^2+e^t=5a \end{cases}$ 所确定(其中 a 为常数)，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

五、(8分) 设 $f(x)=\arctan x-\arctan\dfrac{x-1}{x+1}$, 其中 $x>-1$.

(1) 证明：$f(x)$ 是常数函数；　(2) 求 $\arctan(2-\sqrt{3})$ 的值.

六、(8分) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+\ln(1+x^2), & x>0; \\ ax\sin x, & x\leqslant 0, \end{cases}$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导. 试求 a 的值以及 $f''(0)$.

七、(8分) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}$, 试确定 $f(x)$ 的间断点及其类型.

八、(8分) (1) 对任意的正整数 n, 证明 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$;

(2) 令 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 极限存在.

九、(7分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，$f(0)=1$, $f(1)+2f(2)=3$. 试证明：$\exists\,\xi\in(0,2)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

微积分 I (第一层次)期中试卷 (2019.11.16)

一、计算下列各题（每题6分，共48分）

1. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-\sin^3 x}=1$.

2. 用 $\varepsilon-N$ 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}=1$.

3. 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+5}\sin x+(\arctan x)^{\tan x}}$ 的一阶导数和微分。

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$，其中 $a\geqslant 0, b\geqslant 0$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可微性.

6. 设 $x_1>0$, $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

7. 设 $f(x)=x\ln(1+x)+\cos x+ax^2+bx+c=o(x^2)$, 求 a, b, c 的值. 若以 x 为基准无穷小，求 $f(x)$ 关于 x 的无穷小阶数和无穷小主部。

8. 设函数 $y(x)$ 由如下参数方程定义: $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\operatorname{arccot} t+\ln(1+t^2).\end{cases}$ 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

二、(10分）确定函数 $f(x)$ 的间断点，并说明是哪种类型的间断点。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}, & x\neq 0, x\neq 1,\\ 0, & x=0,\\ \sin 1, & x=1.\end{cases}$$

三、(10分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且导函数 $f'(x)$ 严格单调递增. 若 $f(a)=f(b)$, 证明对一切 $x\in(a,b)$, 有 $f(x)<f(a)=f(b)$.

四、(10分) 求由方程 $e^{x+y}-xy-e=0$ 确定的曲线在点 $(0,1)$ 处的切线和法线方程。

五、(12分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\neq 0$, 又 $f(a)=1$, $f(b)=0$, 证明

(1) 存在 $\xi_1\in(a,b)$, 使得 $f(\xi_1)=\dfrac{4}{5}$;

(2) 存在 $\xi_2,\xi_3\in(a,b)$ $(\xi_2\neq\xi_3)$, 使得 $\dfrac{1}{f'(\xi_2)}+\dfrac{4}{f'(\xi_3)}=5(a-b)$.

六、(10分) 设 $f(x)=|x|^n g(x)$, 其中 n 为奇数，$g(x)$ 有 n 阶导数. 在什么条件下 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有 n 阶导数？

微积分 I (第一层次)期中试卷(2020.11.21)

一、计算下列各题（每题6分，共48分）

1. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{x}=1$.

2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n}\right)=0$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}\sin x, & x>0, \\ x, & x\leqslant 0. \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

4. 设 $0<x_1<1$, 且 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n\ (n\geqslant 1)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限并求该极限.

5. 求由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\dfrac{y}{x}=\ln 2$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数.

6. 求曲线 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\sin 2t \\ y=\mathrm{e}^t\cos t \end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线和法线方程.

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

8. 已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}\left(\arctan\dfrac{2020}{n-1}-\arctan\dfrac{2020}{n+1}\right)$ 是不为零的常数, 求 α 以及该极限值.

二、(10分）确定以下函数的间断点，并说明是哪种类型的间断点.

$$f(x)=\begin{cases} \sin\pi x, & x\text{ 为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}. \end{cases}$$

三、(12分）当 $x\to 0$ 时，求 $1-\cos(\sin x)+a\ln(1+x^2)$ 的无穷小阶数和无穷小主部.

四、(10分）设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=e^{f(x)}$, $f(2)=1$, 计算 $f'''(2)$.

五、(10分）设 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$, 求 $f(x)$ 的各阶导函数.

六、(10分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且 $f(0)=0$, $|f'(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(x)|$. 证明：在 $[0,1]$ 上，$f(x)\equiv 0$.

微积分I（第一层次）期中试卷参考答案18.11.17

一、 1. 证明：$\left|\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}\right|=\dfrac{|(x-2)(x+2)|}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}}\leqslant 5|x-2|$ （设$0<|x-2|<1$）

$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$, 则当$0<|x-2|<\delta$时，总有$\left|\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}\right|<\varepsilon$.

2. 解：$4\leqslant\sqrt[n]{n^4+4^n}\leqslant\sqrt[n]{n^4\cdot 4^n}=4(\sqrt[n]{n})^4$, $\lim\limits_{n\to\infty}4=\lim\limits_{n\to\infty}4(\sqrt[n]{n})^4=4$, 由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4+4^n}=4$.

3. $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^4=\mathrm{e}^4$.

4. $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left((1+\dfrac{1}{x})^x-\mathrm{e}\right)\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-\mathrm{e}}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}\left[\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}-1\right]}{t}=\mathrm{e}\cdot\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$,

所以原式$=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}{x\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\left((1+\ln(1+x))^{2x}-1\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x\ln(1+\ln(1+x))}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\ln(1+\ln(1+x))}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\ln(1+x)}{x}=2$.

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-\arctan x}{cx^k}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x^2}}{ckx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x-1)}{(1+x)(1+x^2)ckx^{k-1}}\xlongequal{k=2}-\dfrac{1}{2c}=1$,

所以$k=2,c=-\dfrac{1}{2}$, 无穷小主部为$-\dfrac{x^2}{2}$.

二、$f(x)=\dfrac{5x-1}{(x+1)(2x-1)}=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$, 所以$f^n(x)=(-1)^n n!\left(\dfrac{2}{(1+x)^{n+1}}+\dfrac{1}{2(x-\frac{1}{2})^{n+1}}\right)$.

三、证明：令$f(x)=\cos x-\dfrac{1}{x}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(2n\pi)=1-\dfrac{1}{2n\pi}>0$, $f((2n+1)\pi)=-1-\dfrac{1}{(2n+1)\pi}<0$, 由零点定理可知，存在$\xi\in(2n\pi,(2n+1)\pi)$, 使得$f(\xi)=0$. n取所有正整数，所以$f(x)=0$有无穷多个正根.

四、 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(y^2-e^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}$.

五、(1) $f'(x)\equiv0$, 所以$f(x)$是常值函数$(x>-1)$. 令$x=1$得$f(1)=\dfrac{\pi}{4}$, 所以$\arctan x-\arctan\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{\pi}{4}$.

(2) 由(1)知$\arctan(2-\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{4}+\arctan\dfrac{2-\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}+1}=\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\pi}{12}$.

六、$f'(x)=\begin{cases}2x+\dfrac{2x}{1+x^2}, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ a\sin x+ax\cos x, & x<0,\end{cases}$ $f''_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x+\frac{2x}{1+x^2}}{x}=4$;

$f''_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{a\sin x+ax\cos x}{x}=2a$; 所以$a=2$时$f(x)$在$x=0$处二阶可导，$f''(0)=4$.

七、0 是第二类间断点（无穷间断点），1 是第一类间断点（跳跃间断点）.

八、 提示：(1) 用函数的单调性证明当 $x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, 取 $x=\frac{1}{n}$ 即得；

(2) 由(1)可得 $a_n-a_{n-1}<0$, 所以数列 $\{a_n\}$ 单调减；　又由(1)可得

$\ln(1+\frac{1}{1})=\ln 2-\ln 1<1,\quad \ln(1+\frac{1}{2})=\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2},\quad \cdots,\quad \ln(1+\frac{1}{n-1})=\ln n-\ln(n-1)<\frac{1}{n-1}$,

各式相加得 $\ln n<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$, 即 $a_n>0$. 数列 $\{a_n\}$ 单调减有下界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 极限存在.

九、 提示：用介值定理证明 $\exists\eta\in[1,2]$, 使得 $f(\eta)=1$, 由拉格朗日中值定理可得 $\exists\xi\in(0,\eta)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

微积分 I（第一层次）期中试卷参考答案 19.11.16

一、 1. $\forall\varepsilon>0$, 由 $|\sqrt{1-\sin^3 x}-1|=\frac{|\sin^3 x|}{1+\sqrt{1-\sin^3 x}}\leqslant|x|^3<\varepsilon$, 取 $\delta=\varepsilon^{1/3}$, 当 $0<|x-0|<\delta$ 时有 $|\sqrt{1-\sin^3 x}-1|<\varepsilon$.

2. $\forall\varepsilon>0$, 由 $\left|\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}-1\right|=\frac{|\sqrt{1+n^2}-n|}{\sqrt{1+n^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+n^2}(n+\sqrt{1+n^2})}\leqslant\frac{1}{n}$, 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$, 当 $n>N$ 时，$\left|\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}-1\right|<\varepsilon$.

3. 令 $y_1=\sqrt{\frac{x+2}{x+5}\sin x}$, $y_2=(\arctan x)^{\tan x}$, 则 $y'=y_1'+y_2'$, $\mathrm{d}y=(y'+y')\mathrm{d}x$, 其中

$$y_1'=y_1(\ln y_1)'=\frac{y_1}{2}\left[\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+5}+\frac{\cos x}{\sin x}\right],$$

$$y_2'=y_2(\ln y_2)'=y_2\left[\sec^2 x\ln\arctan x+\frac{\tan x}{(1+x^2)\arctan x}\right].$$

4. 当 $ab=0$ 时，易见原式为 0. 当 $ab\neq 0$ 时，

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}-1\right)\right)^{\frac{1}{\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}-1}n\cdot\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}-1\right)}=\exp\left\{\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{1/n}-1}{1/n}+\frac{b^{1/n}-1}{1/n}\right)\right\}=\sqrt{ab}.$$

5. 由于 $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0+}\frac{\frac{x}{1+e^{1/x}}}{x}=0,\quad f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0-}\frac{\frac{x}{1+e^{1/x}}}{x}=1.$

则 $f_-'(0)\neq f_+'(0)$, 故 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导，从而不可微。

6. 首先由归纳法可有 $x_n>0$, 又由于 $0<x_{n+1}=\ln(1+x_n)<x_n$,故数列 x_n 单调递减有下界，故收敛，设极限是 A，则 $\ln(1+A)=A$，从而有$A=0$.

7. 由 $f(x)=o(x^2)$ 可得 (1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, 即 $1+c=0$, 从而 $c=-1$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 即

$$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)+\cos x+ax^2+bx-1}{x}=\lim_{x\to0}\Big(\ln(1+x)+\frac{\cos x-1}{x}+ax+b\Big)=b=0;$$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$,即

$$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)+\cos x+ax^2-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}-\sin x+2ax}{2x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x+2a}{2}=\frac{1}{2}+a=0\Longrightarrow a=-\frac{1}{2}.$$

(4)

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)+\cos x-\frac{1}{2}x^2-1}{x^k}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}-\sin x-x}{kx^{k-1}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x-1}{k(k-1)x^{k-2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{2}{(1+x)^3}+\sin x}{k(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

从而取 $k=3$, 得到 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^3}=-\dfrac{1}{2}$. 则 $x\to0$ 时, $f(x)$ 的无穷小阶数为3, 无穷小主部为 $-\dfrac{1}{2}x^3$.

8. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{-\frac{1}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=2t-1,\quad \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{(2t-1)'}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=2(1+t^2).$

二、函数在 $x\neq0,x\neq1$ 的地方显然连续；由于

$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}\frac{1-x}{x}x\sin\frac{1}{x}=-\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x},$$

不存在，所以 $x=0$ 是第二类间断点，且为振荡间断点。由于

$$\lim_{x\to1+}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=\sin1,\quad \lim_{x\to1-}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=0,$$

所以 $x=1$ 是第一类间断点，且为跳跃间断点。

三、任给 $x\in(a,b)$, 由中值定理，存在 $\xi_1\in(a,x)$, $\xi_2\in(x,b)$，$\xi_1<\xi_2$ 且

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

可推出 $f(x)<f(a)$.

四、切线方程为 $y=\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}x+1$, 法线方程为 $y=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}x+1$.

五、**证明**：(1) 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，从而在 $[a,b]$ 连续。又 $f(b)=0<\dfrac{4}{5}<1=f(a)$, 由介值定理，存在 $\xi_1\in(a,b)$, 使得 $f(\xi_1)=\dfrac{4}{5}$.

(2) 由Lagrange中值定理，分别考虑区间 $[a,\xi_1]$, $[\xi_1,b]$, 可得

$$f(\xi_1)-f(a)=f'(\xi_2)(\xi_1-a),\quad f(b)-f(\xi_1)=f'(\xi_3)(b-\xi_1)$$

注意到$f(a)=1, f(b)=0, f(\xi_1)=\dfrac{4}{5}, f'(x)\neq 0$, 整理可得

$$-\frac{1}{5}\frac{1}{f'(\xi_2)}=\xi_1-a, \qquad -\frac{4}{5}\frac{1}{f'(\xi_3)}=b-\xi_1$$

两式相加得证。

六、解：由莱布尼兹公式可直接求出$f(x)$在$x\neq 0$处的 $k\ (0<k\leqslant n-1)$ 阶导数为

$$f^{(k)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}g(x)\mathrm{sgn}(x)+\sum_{i=0}^{k-1}F_{n-i}(x)g^{(k-i)}(x)\mathrm{sgn}(x)$$

其中 $F_{n-i}(x)$ 为 x 的 $n-i$ 次单项式。由导数的定义可有对任意 $0<k\leqslant n-1$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 k 阶导数为零. 则 $f^{(n-1)}(x)$ 当 $g(0)=0$ 时可导，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 n 阶可导.

微积分 I (第一层次)期中试卷参考答案 2020.11.21

一、1. 不妨设 $|x-1|<1$, 即 $0<x<2$. $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{1,\varepsilon\}$,

当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有 $\left|\sqrt[3]{x}-1\right|=\dfrac{|x-1|}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}<|x-1|<\varepsilon$.

2. 解：当n为偶数时，

$$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)<\frac{1}{n}.$$

当n为奇数时，

$$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}.$$

由夹逼准则即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n}\right)=0$.

3. $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{2x}\sin x}{x}=1, \qquad f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=1,$

所以 $f'(x)=\begin{cases}x^{2x}\left(2(1+\ln x)\sin x+\cos x\right), & x>0,\\ 1, & x\leqslant 0,\end{cases}$.

4. 首先由归纳法可得$0<x_n<1$, 又由于$x_{n+1}-x_n=x_n(1-x_n)>0$, 因此数列x_n单调递增有上界，故收敛. 设极限是A，则$A^2=A$，由$\{x_n\}$ 单调递增可知$A=1$.

5. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y}{x-y}\ (x\neq y)$. 6. 切线方程为$y=\dfrac{1}{2}x+1$, 法线方程为$y=-2x+1$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{2x}=-\dfrac{1}{2}.$

8.
$$\arctan\frac{2020}{n-1}-\arctan\frac{2020}{n+1}=\frac{1}{1+\xi^2}\left(\frac{2020}{n-1}-\frac{2020}{n+1}\right)\sim\frac{4040}{n^2}, \quad 其中\xi\in\left(\frac{2020}{n+1},\frac{2020}{n-1}\right),$$

故 $\alpha = 2$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{2020}{n-1} - \arctan\dfrac{2020}{n+1}\right) = 4040$.

二、当 $x_0 = k\,(k\in\mathbb{Z})$ 时，$f(x_0) = 0$, f 连续.

当 $x_0 \neq k\,(k\in\mathbb{Z})$ 时，取有理数序列 $\{x_{n,1}\}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n,1} = x_0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{n,1}) = \sin\pi x_0$; 取无理数序列 $\{x_{n,2}\}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n,2} = x_0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{n,2}) = 0$. 故函数在 $x = x_0$ 处不连续，且为第二类间断点.

三、解：当$a \neq -\dfrac{1}{2}$时，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)+a\ln(1+x^2)}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)\cos x + \frac{2ax}{1+x^2}}{2x} = \frac{1}{2}+a \neq 0.$$

当$a = -\dfrac{1}{2}$时，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{x^4} &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)\cos x - \frac{x}{1+x^2}}{4x^3}\\ &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)\cos^2 x - \sin(\sin x)\sin x + \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}}{12x^2}\\ &\overset{\frac{0}{0}}{=} -\frac{1}{12}+\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\sin x)\cos^3 x - \cos(\sin x)\sin 2x + \frac{6x-2x^3}{(1+x^2)^3}}{24x} = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

因此，$a \neq -\dfrac{1}{2}$时无穷小主部为$\left(\dfrac{1}{2}+a\right)x^2$; $a = -\dfrac{1}{2}$时无穷小主部为$\dfrac{1}{24}x^4$.

四、$f'''(2) = 2e^3$.

五、$f(x) = x + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$, 因此 $f'(x) = \dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$;

当 $n > 1$ 时，$f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{2}\left[\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}+\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$.

六、解法一：若在 $[0,1]$ 上，$f(x)$ 不恒为零，设 $|f(x)|$ 在 $x_0 \in (0,1]$ 处达到最大值. 由中值定理，存在 $\xi \in (0,x_0) \subset (0,1]$, 使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0}$. 从而

$$|f'(\xi)| = \frac{|f(x_0)|}{x_0} \geqslant |f(x_0)| > \frac{1}{2}|f(x_0)| \geqslant \frac{1}{2}|f(\xi)|.$$

因此假设不真，结论成立.

解法二：由中值定理，有 $f(x) = f(x)-f(0) = xf'(\xi_1)$, $0 < \xi_1 < x$. 由 $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}|f(x)|$, 得到

$$|f(x)| = |xf'(\xi_1)| \leqslant \frac{1}{2}x|f(\xi_1)| \leqslant \frac{1}{2}|f(\xi_1)|.$$

在 $[0,\xi_1]$ 上再用拉格朗日中值定理，得 $f(\xi_1) = \xi_1 f'(\xi_2)$, $0 < \xi_2 < \xi_1$. 因此$|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}|f(\xi_1)| \leqslant \dfrac{1}{4}|f(\xi_2)|$. 类似地，在 $[0,\xi_2],\cdots,[0,\xi_n]$ 上继续用拉格朗日中值定理，最终得到：

$$|f(x)| \leqslant \frac{f(\xi_n)}{2^n} \leqslant \frac{M}{2^n}.$$

其中 M 为函数 $|f(x)|$ 的上界. 令 $n\to\infty$ 即得.