离散数学（2023）作业 03 - 证明方法

周帛岑
221900309

2023 年 3 月 2 日

1 Problem 1

证：
1.∀x(P(x)∨Q（x）)　　题设
2.∃x(¬P(x))　　题设
3.∀xQ（x）　　1,2
4.∀x(¬Q(X)veeS（x）)　　题设
5.∀xS(x)　　3,4
6.∀x(R(x)→¬S(x))　　题设
7.∀x(¬R(x)∨¬S(x))　　6,7
8.∀x(¬R(x))　　5,7
9∃x(¬R(x))　　8

2 Problem 2

证:
1.∀x(P(x)→(Q(x)∧S(x)))　　题设
2.∀x(¬P(x)∨(Q(x)∧S(x)))　　1
3.∀x(P(x)∧R(x))　　题设
4.∀xP(x)　　3
5.∀xR(x)　　3
6.∀x(Q(x)∧S(x))　　2,4
7.∀xS(x)　　6
8.∀x(S(X)∧R(x))　　5,7

3 Problem 3

证:
不妨假设 x 为奇数，y 为偶数，则 x^2 $x \cdot y$ y^2 $x \cdot y + y^2$ $x^2 - (x \cdot y + y^2)$
x y x^2 $x \cdot y$ y^2 $x^2 - x \cdot y$

4 Problem 4

证:
不妨假设 min（a,b,c）= a, 则左侧等于 a，右侧等价于 min（a，c）等于 a。即左侧与右侧等价
假设 min(a,b,c) = b, 则左侧等价于 min(a,b) = b，右侧等价于 min(b,c) = b 即左侧与右侧等价
假设 min(a,b,c) = c, 则左侧等价于 min(a,c) = c，右侧等价于 c，即左侧与右侧等价

5 Problem 5

证:
不妨假设存在 n = 4m+3 = $x^2 + y^2$ n x y $x = 2a$ $y = 2b + 1$ a b
$4m - 2 = 4a^2 + 4b^2 + 4b$, $2m - 1 = 2a^2 + 2b^2 + 2b$

6 Problem 6

$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$
证:
若 x+y<0, 则上式显然成立，不妨假设 x+y≥0。
已知 $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$
$\rightarrow 2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + y^2 + 2xy$
$\rightarrow \frac{2x^2+2y^2}{4} \geq \frac{x^2+y^2+2xy}{4}$
左右取根号得 $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$

7 Problem 7

证:
化简原方程，有 ax = c-b 不妨假设存在 x_1 和 x_2 且 x_1 不等于 x_2, 使上式成立, 则对于原方程，有 ax_1 = c-b 以及 ax_2= $c - b$ 又 a 不等于0 $x_1 = \frac{c-b}{a}$ 以及 $x_2 = \frac{c-b}{a}$，故 $x_1 = x_2$

8 Problem 8

证:

显然，对于 $\forall$x,$\exists$a,b, 且 a，b$\in\mathbb{Z}$, 使得 a$\geq$x$\geq$b

则显然，取 n 为 a，ϵ 为 a-x，则上式成立，不妨假设这样的 n 和 ϵ 不不唯一，即存在 $_1$,$_2$,ϵ_1,ϵ_2 使原式成立，又 a$\geq$x$\geq$b, 要使 x+ϵ_i(i=1,2)=n, 且 ϵ_i(i=1,2)<1, 此时 n 一定取 a，$\epsilon =$ a-x 也唯一存在，故原命题得证

9 Problem 9

证:

我们先证明关于 x 无整数解，化简原式，得 2x$^2 = 14 - 5y^2$，$y^2$$\geq$0,x^2$\geq$0，故 14-5y^2$\geq$0,y 只取 0，1，-1. 分别带入，显然，x 无整数解。

对于 y，有 5y$^2 = 14 - 2x^2$，x 0 1 2 -1 -2 y

综上，原命题得证

10 Problem 10

证：取 x 为 2，y 为 $\log_2 e$，显然 x^y =$2^{\log_2 e}$ = e 为无理数，则原命题成立