

100

离散数学 (2023) 作业 17: 群的结构: 子群和群的分解

张程涵

221900333

2023 年 5 月 2 日

1 Problem 1

A 不是; $\exists a \in H, a \notin K; \exists b \in K, b \notin H; b^{-1} \in K, b^{-1} \notin H$, 则 $ab \in H \cup K$, 不妨假设 $ab \in K$, 则 $a = abb^{-1}, ab, b^{-1} \in K$, 所以 $a \in K$, 矛盾, 若 $ab \in H$ 也同样矛盾, 所以不是子群。

B 是; 单位元 $e \in H, e \in K$, 所以 $H \cap K$ 为 G 的非空子集, 任取其中元素, 都在 H 和 K 中, 都构成群, 所以是该系统的子群。

C 不是; 单位元 $e \in H, e \in K$, 所以 $e \notin K-H$, 所以无单位元, 不构成群, 所以不是子群。

D 不是; 单位元 $e \in H, e \in K$, 所以 $e \notin H-K$, 所以无单位元, 不构成群, 所以不是子群。

2 Problem 2

$\forall x, y \in N(a), ex = xe = x$, 所以 $N(a)$ 有单位元; $(xy)x = x(yx) = x(xy), zx = xz, z = xy \in N(a)$, 封闭; $a^{-1}a = aa^{-1} = e$, 每个元素都有逆元, 构成群, 所以 $N(a)$ 是 G 的子群。

3 Problem 3

设 $a = xh_1x^{-1}, b = xh_2x^{-1}$, 因为 H 是 G 的子群, 则 $h_1h_2^{-1} \in H, ab^{-1} = xh_1x^{-1}xh_2^{-1}x^{-1} = xh_1h_2^{-1}x^{-1} \in xHx^{-1}$, 所以是 G 的子群。

4 Problem 4

$H \cap K$ 是 H, K 的子群, 所以 $|H|=r, |K|=s$ 都能被 $|H \cap K|$ 整除, 且 r, s 互质, 所以 $|H \cap K|=1$, 所以 $H \cap K = \{e\}$

5 Problem 5

设该二阶元为 x , $xyx^{-1}xyx^{-1} = yxy^{-1}yxy^{-1} = yxy^{-1} = yey^{-1} = e$, 所以 $|yxxy^{-1}| = |x| = 2$, 因为 x 唯一, 所以 $x = yxy^{-1}$, 所以 $xy = yx$, 所以该元素与 G 中任意元素可交换。

6 Problem 6

设 $|g| = m$, $|h| = n$, $\gcd(m, n) = 1$, 因为 $gh = hg$, 所以 $gh^{mn} = g^{mn}h^{mn} = e$, 且 mn 仅可被 m , n 整除, $gh^m, gh^n \neq e$, 所以 $|gh| = |hg| = mn = |g||h|$, 成立。

7 Problem 7

因为 H 为正规陪集, 所以 $\forall g \in G, \forall h \in H, ghg^{-1} \in H$, 即 $gHg^{-1} = H$, 所以 $gH = Hg$, 成立。

8 Problem 8

设 $|n| = p, n^p = e = 1$, 在题设集合中, $|Z_n^*| = n^p - n$, 所以 $n^p - n \mid p, a^p \equiv a \pmod{p}$