

离散数学 (2023) 作业 XX

周帛岑

221900309

2023 年 5 月 10 日

1 Problem 1

(1):

对于 $f(a+b)$ 与 $f(a) \times f(b)$ 若 a, b 均为偶数, 则 $a+b$ 为偶数, 此时结果相同

若 a, b 一奇一偶, 则 $a+b$ 为奇数, 乘积也为-1, 此时结果相同

若 a, b 均为奇数, 则 $a+b$ 为偶数, 此时结果相同

故为同态, 又这个函数显然为单射而不为满射, 故为单同态

$$f(G_1) = \{1, -1\}$$

(2):

对于 $f(a) \times f(b)$, 原式 $= (\cos a + i \sin a) \times (\cos b + i \sin b) = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$

故 $f(a+b) = f(a) \times f(b)$

为同态, 又这个函数显然为单射而不为满射, 故为单同态

$$f(G_1) = \{\cos a + i \sin a | a \in \mathbb{Z}\}$$

2 Problem 2

(1): 解: 由题可知, $\ker f$ 中有且仅有为 G 中的单位元, 故 $\ker f$ 构成一个子群

(2): 解: 由题可知, $\text{img } f$ 显然满足封闭性, 且 G 中的单位元在该 $\text{img } f$ 中, 且每一元素的逆元均在其中, 故 $\text{img } f$ 构成一个子群

3 Problem 3

证：由题意得，存在 $x \in G$ ，有 $G = \langle a \rangle$ 由于两群同态，则 $f(a^n) = f(a) * f(a) \cdots \cdots * f(a)$ ，故 $f(a)$ 可以表示群 G' ，故 G' 也为循环群

4 Problem 4

证：由题意得，不妨设 a 的阶为 n ，即 $a^n = e$ 由于两群同态，则 $f(a^n) = f(a) * f(a) \cdots \cdots * f(a)$ ，故 $f(a)$ 可以表示群 G' ，故 G' 也为循环群

5 Problem 5

证：由题可知，不妨设这个三阶群为 G

又拉格朗日定理， G 中只存在一阶或三阶元，且显然不能均为一阶元，故 G 中元素可以表示为： $\{e, a, a^k\}$

显然， $\langle a \rangle$ 为一个循环群

6 Problem 6

证：由题可知， C_n 的每一个元素均能生成一个子群 C_m ，且这些子群为循环群

对正整数 m ，欧拉函数的结果 $\phi(m)$ 为 C_m 的生成元的个数

又 C_n 生成的子群相当于对 C_n 进行的一个划分

即所有的 C_m 构成 C_n

对于 C_n ，其每一个元素均为生成元，且所有的 C_m 构成 C_n

故 C_m 中生成元的总和即为 n

7 Problem 7

证：不妨令这个 p 阶群为 G

由拉格朗日定理，我们得知 G 中只存在一阶或 p 阶元，且群中只能存在一个一阶元

设任意 $a \in G$ 且 $a \neq e$

故 G 中元素可以表示为： $\{e, a, a^k, \dots, a^m\}$

故 $G = \langle a \rangle$

8 Problem 8

证：由题可知。正整数加群可以由 1 生成，而有理加群不能有限生成，故两者不同构

下面证明有理数加群不能有限生成：

不妨假设其能有限生成，即存在一个生成元 a ，任意有理数均可以表示为 a 的倍数

而我们知道 $a/2$ 显然也在有理数群中，这与我们的假设相矛盾，故假设不成立

有理数加群不能有限生成