6. 集合: 函数 (6-function)

姓名： 鲁权锋　　**学号：** 201830168

评分： 9.5　　**评阅：** 肖江

2021 年 4 月 15 日

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1　作业（必做部分）

题目 1 (等价关系 [3 分] ⋆⋆)
设 R 是 X 上的等价关系。请证明,

$$\forall a, b \in X. \, ([a]_R = [b]_R \leftrightarrow aRb).$$

证明：　　3

(i) 先证 $\forall a, b \in X. \, (aRb \to [a]_R = [b]_R)$.
因为 R 是等价关系，首先 $aRb = bRa$　　(1),
对任意 x,

$$\begin{aligned} x \in [a]_R &\iff xRa \\ &\iff xRb \ (by(1)) \\ &\iff x \in [b]_R \end{aligned}$$

即 $[a]_R = [b]_R$。

(ii) 下面证 $[a]_R = [b]_R \to aRb$.
对任意 x,

$$\begin{aligned} x \in [a]_R &\iff xRa \\ &\iff aRx(\text{对称性}) \qquad (2) \end{aligned}$$

又 $[a]_R = [b]_R$, 故有

$$x \in [b]_R \iff xRb \qquad (3)$$

又因为 a, b 具有传递性，结合 (2)(3), 必有

$$aRx \wedge xRb \Longrightarrow aRb$$

此即 $[a]_R = [b]_R \to aRb$。

综上,

$$\forall a, b \in X. \ ([a]_R = [b]_R \leftrightarrow aRb). \qquad \square$$

题目 2 (函数与等价关系 [7 = 3 + 4 分] ⋆⋆⋆)
设 $f : X \to Y$ 是满射。定义 X 上的二元关系 R 为 $(x, y) \in R$ 当且仅当 $f(x) = f(y)$。请证明,

(1) R 是 X 上的等价关系。

(2) 定义 $h \subseteq (X/R) \times Y$ 为 $h([x]_R) = f(x)$。请证明, h 是从商集 X/R 到 Y 的函数, 且是满射。

证明:
(1)

3 + 3.5
红线部分符号写的不大对

(i) 自反性:
对任意的 x, 因为 $f : X \to Y$, 必有 $f(x) = f(x)$, 又

$$f(x) = f(x) \leftrightarrow (x, x) \in R$$

因而 R 在 X 上是自反的。
(ii) 对称性:
对任意有序对 (x, y),

$$\begin{aligned} (x, y) \in R &\leftrightarrow f(x) = f(y) \\ &\leftrightarrow f(y) = f(x) \\ &\leftrightarrow (y, x) \in R \end{aligned}$$

因而 R 在 X 上是对称的。
(iii) 传递性:
对任意有序对 (x, y), (y, z),

$$\begin{aligned} &(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \\ &\leftrightarrow (f(x) = f(y)) \wedge (f(y) = f(z)) \\ &\to f(x) = f(z) \\ &\leftrightarrow (x, z) \in R \end{aligned}$$

因而 R 在 X 上是传递的。
综上, 结合 (i) (ii) (iii), R 是 X 上的等价关系。

(2)
(2.1) 下面先证明: h 是从商集 X/R 到 Y 的函数。
(i) 存在性:
首先因为 $f : X \to Y$, 对于任意 x,

$$x \in X \iff \exists b \in Y. \ f(x) = b \qquad (*)$$

对任意 a,

$$\begin{aligned}
& a \in (X/R) \\
& \iff \exists x \in X.\ a \in [x]_R \\
& \iff \exists x \in X.\ h(a) = f(x) \qquad (\text{h 的定义}) \\
& \implies \exists b \in Y.\ h(a) = b \qquad (\text{根据}(*))
\end{aligned}$$

此即 $\forall a \in (X/R).\ \exists b \in Y.\ (a,b) \in h.$
(ii) 下面用反证法说明唯一对应性:
对任意的 $a \in (X/R)$,
假设 $\exists b_1, b_2 \in Y.\ b_1 \neq b_2$, 使得 $h(a) = b_1 \wedge h(a) = b_2$ 成立.
又 $\exists x \in X.\ h(a) = f(x)$ (h 的定义)
必有 $f(x) = b_1 \wedge f(x) = b_2$, 而这与 $(x, b_1) \in f, (x, b_2) \in f$ 的定义矛盾!
此即 $\forall b_1, b_2 \in Y.\ (a, b_1) \in h \wedge (a, b_2) \in h \implies b_1 = b_2$

结合 $(i)(ii)$ 可知，h 是从商集 X/R 到 Y 的函数。

(2.2) 下面证明 h 是从商集 X/R 到 Y 的满射。
首先对于任意的 $x \in X/R$, 根据等价类“不空”的性质，必有:

$$[x]_R \iff x \in [x]_R \qquad (**)$$

对任意 b,

$$\begin{aligned}
& b \in Y \\
& \iff \exists a \in X.\ f(a) = b \qquad (f : X \to Y \text{是满射}) \\
& \iff \exists a \in X.\ h([a]_R) = b \qquad (\text{h 的定义}) \\
& \implies \exists a \in (X/R).\ h(a) = b \qquad (\text{根据}(**))
\end{aligned}$$

此即 $\forall b \in Y.\ (\exists a \in (X/R).\ h(a) = b)$，即 h 是从商集 X/R 到 Y 的满射。 $\square$
