离散数学第十三次作业-关系的性质

Problem 1

确定定义在所有人的集合上的关系 R 是否是自反的, 对称的, 反对称的和传递的, 其中 $(a,b) \in R$ 当且仅当

(1) a 比 b 高.

(2) a 和 b 同名.

(3) a 和 b 在同一天出生.

(4) a 和 b 有共同的祖父母.

答案:

(1) 反对称的, 传递的

(2) 自反的, 对称的, 传递的

(3) 自反的, 对称的, 传递的

(4) 自反的, 对称的, 传递的

Problem 2

找出下面定理证明中的错误.

"定理": 设 R 是集合 A 上的对称的和传递的关系, 则 R 是自反的.

"证明": 设 $a \in A$. 取元素 $b \in A$ 使得 $(a,b) \in R$. 由于 R 是对称的, 所以有 $(b,a) \in R$. 现在使用传递性, 由 $(a,b) \in R$ 和 $(b,a) \in R$ 可以得出 $(a,a) \in R$.

答案: 错误: 自反性要求 $(a,a) \in R$ 对 A 中所有元素都成立, 但对任意元素 $a \in A$, 并不总存在 $b \in A$ 使得 $(a,b) \in R$.

Problem 3

证明: 集合 A 上的关系 R 是自反的当且仅当其逆关系 R^{-1} 是自反的.

答案: 首先证明定理的必要条件, 即若 R 是自反的则其逆关系 R^{-1} 是自反的. 任取元素 $a \in A$, 因为 R 是自反的, 故 $(a,a) \in R$. 由逆关系 R^{-1} 的定义可知, 必有 $(a,a) \in R^{-1}$. 充分条件同理可证. 综上, 命题得证.

Problem 4

设 $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$, 定义 A 上的关系

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x + y = 10\}$$

说明 R 具有哪些性质, 并说明理由.

答案: 只有对称性. 不具有自反性, 例如 $\langle 1, 1\rangle \notin R$. 也不是反自反的, 例如 $\langle 5, 5\rangle \in R$. 因为 $\langle 1, 9\rangle, \langle 9, 1\rangle$ 都属于 R, 因此也不是反对称的. 也因此不是传递的 (否则可得出 $\langle 1, 1\rangle \in R$).

Problem 5

设 R 是集合 A 上的自反关系, 证明对所有正整数 n, R^n 也是自反的.

答案: 数学归纳法. 当 $n = 1$ 时, R^1 显然是自反的. 假设 R^k 是自反的, 其中 k 是一个正整数. 为了完成归纳步骤, 需要证明 R^{k+1} 也是自反的. 任取元素 $a \in A$, 则有 $(a, a) \in R^k$ 且 $(a, a) \in R$, 又 $R^{k+1} = R^k \circ R$, 故 $(a, a) \in R^{k+1}$, 这就证明了 R^{k+1} 也是自反的, 从而完成了证明.

Problem 6

设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的关系, 由以下矩阵表示.

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求表示下述关系的矩阵.

(1) $R_1 \cup R_2$ (2) $R_1 \cap R_2$ (3) $R_2 \circ R_1$

(4) $R_1 \circ R_1$ (5) $R_1 \oplus R_2$

答案:

(1)

$$M_{R_1 \cup R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$M_{R_1 \cap R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3)

$$M_{R_2 \circ R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(4)

$$M_{R_1 \circ R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(5)

$$M_{R_1 \oplus R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Problem 7

使用沃舍尔算法找出下面 $\{a,b,c,d,e\}$ 上的关系的传递闭包.

(1) $\{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b),(e,d)\}$

(2) $\{(b,c),(b,e),(c,e),(d,a),(e,b),(e,c)\}$

(3) $\{(a,b),(a,c),(a,e),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(d,a),(e,d)\}$

(4) $\{(a,e),(b,a),(b,d),(c,d),(d,a),(d,c),(e,a),(e,b),(e,c),(e,e)\}$

答案:

(1)

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

故传递关系闭包为 $\{(a,a),(a,c),(b,b),(b,d),(\mathsf{c},a),(c,c),(d,b),(d,d),(e,b),(e,d)\}$.

(2)

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故传递关系闭包为 $\{(b,b),(b,c),(b,e),(c,b),(c,c),(c,e),(d,a),(e,b),(e,c),(e,e)\}$.

(3)

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} W_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

故传递关系闭包为 $\{a,b,c,d\} \times \{a,b,c,d\}$.

(4)

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, W_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, W_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

故传递关系闭包为 $\{a,b,c,d\} \times \{a,b,c,d\}$.

Problem 8

设 R 是定义在正整数的有序对构成的集合上的关系, $((a,b),(c,d)) \in R$ 当且仅当 $a+d=b+c$. 证明 R 是等价关系.

答案: 1) 任意正整数的有序对 (a,b) 满足 $a+b=a+b$, 故 $(a,b)R(a,b)$, 因此 R 是自反的.

2) 假设正整数的有序对 (a,b) 和 (c,d) 满足 $(a,b)R(c,d)$, 则 $a+d=b+c$, 也即 $c+b=d+a$, 故 $(c,d)R(a,b)$, 因此 R 是对称的.

3) 假设正整数的有序对 $(a,b),(c,d)$ 和 (e,f) 满足 $(a,b)R(c,d)$ 且 $(c,d)R(e,f)$, 那么 $a+d=b+c$, 故 $d=b+c-a$, 代入 $c+f=d+e$ 中得 $c+f=b+c-a+e$, 从而 $a+f=b+e$, 故 $(a,b)R(e,f)$. 因此 R 是传递的.

综上所述, R 是等价关系.

Problem 9

设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$, R 是 A 上的关系, 且 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle e,f\rangle\}$, 设 $R^*=t(s(r(R)))$, 则 R^* 是 A 上的等价关系.

(1) 给出 R^* 的关系矩阵.

(2) 写出商集 A/R^*.

答案:

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $A/R^*=\{\{a,b,c\},\{d\},\{e,f\}\}$.

Problem 10

由 n 个元素组成的集合上, 有多少个关系是:

a) 对称的?

b) 反对称的?

c) 非对称的?

d) 反自反的?

e) 自反的和对称的?

f) 既不是自反的也不是反自反的?

答案:

a) $2^{n(n+1)/2}$

b) $2^n 3^{n(n-1)/2}$

c) $3^{n(n-1)/2}$

d) $2^{n(n-1)}$

e) $2^{n(n-1)/2}$

f) $2^{n^2}-2^{n^2-n+1}$