85

离散数学（2023）作业 17 - 子群与群的分解

潘智杰

221900313

2023 年 5 月 3 日

1 Problem 1

a,$(H \bigcup K, \circ)$ 不一定是子群。 -5

b,$(H \bigcap K, \circ)$ 是子群。

c,$(K - H, \circ)$ 是子群。

d,$(H - K, \circ)$ 是子群。

2 Problem 2

证明：ea = ae =e, 则 $e \in N(a)$,N(a) 非空 $\forall b, c \in N(a), \because ba = ab, ca = ac,$ 且 $b, c \in G$

$\therefore ba = ab$

$bea = ab$

$b(c^{-1}c)a = ab$

$bc^{-1}(ca) = ab$

$bc^{-1}ac = ab$

$bc^{-1}a = abc^{-1}$

故 $bc^{-1} \in N(a)$, 故 N(a) 是 G 的子群。

3 Problem 3

$\because xe^{-1}x = xx^{-1} = e, \therefore e \in xHx^{-1}, xHx^{-1}$ 非空

$\forall a, b(a, b \in H$ 且 $xax^{-1}, xbx^{-1} \in xHx^{-1})$

$xax^{-1}(xbx^{-1})^{-1}$

$= xax^{-1}(xb^{-1}x^{-1})$

$= xa(x^{-1}x)b^{-1}x^{-1}$
$= xab^{-1}x^{-1}$
因为 H 是 G 的子群，显然 $ab^{-1} \in H$, 则 $xab^{-1}x \in xHx^{-1}$, 故 xHx^{-1} 是 G 的子群。

4 Problem 4

证明：因为 H,K 是 G 的子群，则 $e \in H, e \in K, \therefore e \in H \bigcap K$
下面证明 $H \bigcap K$ 是 H,K 的子群。
$\because H \bigcap K \subseteq H, H \bigcap K \subseteq K, e \in H \bigcap K, \therefore H \bigcap K$ 是非空子集。
$\forall a, b \in H \bigcap K$, 易知 $a \in H, a \in K, b \in H, b \in K$, 又因为 H，K 是 G 的子群，$ab^{-1} \in H, ab^{-1} \in K, \therefore ab^{-1} \in H \bigcap K$, 故 $H \bigcap K$ 是 H,K 的子群。
由拉格朗日定理，$|H| = |H \bigcap K| * |H : H \bigcap K|$ 设 m 为 $|H \bigcap K|$ 的阶数，则 m 是 r 的因子，同理 m 是 s 的因子，因为 gcd（r，s）=1，故 m=1，故 e 是其唯一元素。故 $H \bigcap K = \{e\}$

5 Problem 5

a 是 G 中唯一的二阶元，即 aa=e，若 $\forall b \in G, ab = ba$, 即：a 是唯一二阶元，$\forall b \in G, bab^{-1} = a$
假设 $\exists b \in G, bab^{-1} \neq a, \because bab^{-1}bab^{-1} = ba(b^{-1}b)ab^{-1} = baab^{-1} = beb^{-1} = e$
故 bab^{-1} 是 G 的另一个二阶元，矛盾，故假设不成立。故 $\forall b \in G, ab = ba$

6 Problem 6

设 |g|=r,|h|=s,|gh|=m, 故 $g^r = e, h^s = e, (gh)^m = e$
不妨令 $((gh)^m)^r = e$
$(gh)^{mr} = e$
因为 gh = hg，满足交换律，
故 $g^{mr}h^{mr} = e$
$(g^r)^m h^{mr} = e$
$h^{mr} = e$
因为 gcd(r,s) = 1, 故 m 是 s 的倍数，使得 $(h^m)^r = e^r = e$
同理可证：m 是 r 的倍数。由阶数的定义可知 m 是 r，s 的最小公倍数，故 m= rs。
即：$|gh| = |g||h|$

7 Problem 7

对于 $\forall g \in G, gH = \{gh|h \in H\}$, 因为 H 是正规子群，则若存在 $h_1 \in H$, 必有 $gh_1g^{-1} \in H$ 故若 $gh_1 \in gG$, 在右陪集中必有 $(gh_1g^{-1}g = gh_1(g^{-1}g) = gh_1 \in Hg$ 故 $\forall gh \in gH$ 必有 $gh \in Hg, \therefore gH = Hg$

8 Problem 8

-10