10. 图论: 树 (10-trees)

姓名: 鲁权锋　**学号:** 201830168

评分: 18　**评阅:** F

2021 年 5 月 13 日

请独立完成作业，不得抄袭。 若得到他人帮助, 请致谢。 若参考了其它资料，请给出引用。 鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1　作业（必做部分）

题目 1 ([4 分] ⋆⋆)
设 T 是树且每个顶点的度数要么为 1, 要么为 k。请证明 [1] [2]:

$$n(T) = \ell(k-1) + 2, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

[1] 我们经常使用 $n(G)$ 表示 G 的顶点数。
[2] 提示: 关于顶点度数, 我们有什么定理可用?

证明:
设该树 T 顶点个数为 n，其中有 a 个度数为 K 的顶点，b 个度数为 1 的顶点。
因为顶点为 n 的树共有 $n-1$ 条边，因此总顶点度数为 $2n-2$, 因此必有

4

$$ak + b = 2n - 2 \qquad (1)$$
$$n(T) = 2n - 2 \qquad (2)$$
$$a + b = n \qquad (3)$$

将 (3) 代入 (1)，消去 b, 有

$$n = a(k-1) + 2 \qquad (4)$$

将 (4) 代入 (2), 有

$$n(T) = 2a(k-1) + 2$$

最后令

$$\ell = 2a, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

即得所求:

$$n(T) = \ell(k-1) + 2, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$ □

题目 2 ([4 分] ⋆⋆⋆)
给定无向图 G。请证明: G 是树当且仅当 G 没有 loop 且 G 有唯一的生成树。

证明：

(1) 首先证明：G 是树 $\Longrightarrow$ G 没有 loop 且 G 有唯一的生成树。

(*i*) 因为 G 是树, 故 G 没有环，因此 G 必然没有 loop.

(*ii*) 因为 G 是树, 故 G 必然存在一个生成树（G 本身）。

假设 G 至少存在两个生成树。

4

那么在 G 中至少存在两个顶点（不妨设为 a, b），它们之间至少存在 2 条路径将它们联通。

但 a, b 同时也是 G 上的顶点，又因为 G 是树，且树的任意两个顶点间只会存在一条路径来联通，因此产生矛盾。

故假设不成立，G 有且仅有一个生成树。

(2) 接下来证明：G 是树 $\Longleftarrow$ G 没有 loop 且 G 有唯一的生成树。

(*i*) 因为 G 有唯一生成树，故 G 是联通的 (connected)。

(*ii*) G 是无向图，故 G 是无向的 (undirected)。

(*iii*) 因为 G 存在唯一生成树，因此任意两个顶点之间不存在多条联通路径（否则会有多个生成树），此即任意两个顶点之间都不存在环。

又因为 G 没有 loop。因此 G 是无环的 (acyclic)。

因此 G 是树。

综上，有： G 是树当且仅当 G 没有 loop 且 G 有唯一的生成树。

□

题目 3 ([4 分] ⋆⋆⋆)

给定无向连通图 G 与 G 中的某条边 e。请证明：e 是桥 (bridge [3]) 当且仅当 e 属于 G 的每个生成树。

[3] bridge 也称为 cut-edge (割边)。

证明：

2

(1) 首先证明：e 是桥 (bridge) $\Longrightarrow e$ 属于 G 的每个生成树。

不妨设 e 相邻两边的顶点分别是 a, b。假设 e 不属于 G 中的每个生成树。不失一般性，设 e 不属于 G 中的生成树 T。

又因为 a, b 在无向连通图中，因此 a, b 之间必然至少存在另外的一条路径 e_1，它属于 T。

但此时，a, b 之间至少存在两条路径使 a, b 相联通，而这与 e 是桥矛盾，故假设不成立。

因此，e 属于 G 中的每个生成树。

(2) 接下来证明：e 是桥 (bridge) $\Longleftarrow e$ 属于 G 的每个生成树。

因为 e 属于树，又因为树的每一条边都是桥，因此 e 是桥。

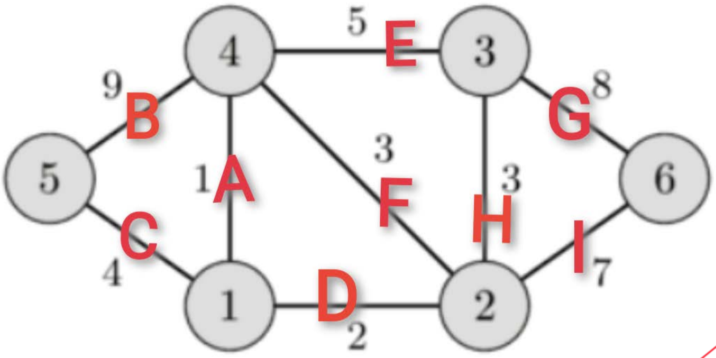
综上，e 是桥 (bridge) 当且仅当 e 属于 G 的每个生成树。

□

题目 4 ([4 = 2 + 2 分] ⋆⋆)

请分别使用 Kruskal 算法与 Prim 算法 (从顶点 1 开始) 给出下图的最小生成树 [4] 要求给出顶点添加的顺序 (在有多种选择时, 优先选择编号较小的顶点)。

[4] 以后你会明白, Kruskal 算法与 Prim 算法的难度不在算法本身, 而在于搞清楚哪个是哪个。



4

证明:

(1)Kruskal 算法:

A$\rightarrow D \rightarrow H \rightarrow C \rightarrow I$

(2)Prim 算法:

A$\rightarrow D \rightarrow H \rightarrow C \rightarrow I$

题目 5 ([4 分] ⋆⋆⋆⋆)

设 G 是无向连通带权图, T 是 G 的一个最小生成树。

请证明: T 是 G 的唯一最小生成树当且仅当对于不在 T 中的每一条边 e, e 的权重大于 $T+e$ 所产生的圈中其它每条边的权重。

证明:

(1) 首先证明: T 是 G 的唯一最小生成树 $\Longrightarrow$ 对于不在 T 中的每一条边 e, e 的权重大于 $T+e$ 所产生的圈中其它每条边的权重。

构造一个边的集合（$T+e$ 所产生的圈去掉 e 的边集）

$$E = \{\epsilon | \epsilon \in T \wedge \epsilon \in (T + \{e\})\}$$

4

设 e_1 是 E 中权值最大的元素。

可以构造一个除 T 之外权值最小的生成树:

$$T_1 = T + \{e\} - \{e_1\}$$

又因为 T 是 G 的唯一最小生成树, 因此必有 $\omega(T_1) > \omega(T)$, 代入上式, 即得 $\omega(e) > \omega(e_1)$. 又因为 e_1 是 E 中权值最大的元素, 因此 e 的权重大于 $T+e$ 所产生的圈中其它每条边的权重。

(2) 接下来证明: T 是 G 的唯一最小生成树 $\Longleftarrow$ 对于不在 T 中的每一条边 e, e 的权重大于 $T+e$ 所产生的圈中其它每条边的权重。

同理, 设 $T+e$ 所产生的圈去掉 e 的边集为 E_1:

$$E_1 = \{\epsilon | \epsilon \in T \wedge \epsilon \in (T + \{e\})\}$$

设 e_2 是 E_1 中权值最大的元素。

根据题设, 有 $\omega(e) > \omega(e_2)$ $\quad (*)$

因此可以构造出一个除了 T 之外权值最小的生成树:

$$T_2 = T + \{e\} - \{e_2\}$$

根据 $(*)$ 式, 即得 $\omega(T_2) > \omega(T)$, 故 T_2 不是最小生成树。

因此, T 是 G 的唯一最小生成树。

综上, T 是 G 的唯一最小生成树当且仅当对于不在 T 中的每一条边 e, e 的权重大于 $T+e$ 所产生的圈中其它每条边的权重。

□

题目 6 ([−10 分])


MATT DAMON IS JASON BOURNE
THE BOURNE IDENTITY
THEY SHOULD HAVE LEFT HIM ALONE
MATT DAMON IS JASON BOURNE
THE BOURNE SUPREMACY
JULY.23.2004
MATT DAMON
THE BOURNE ULTIMATUM
THIS SUMMER BOURNE COMES HOME