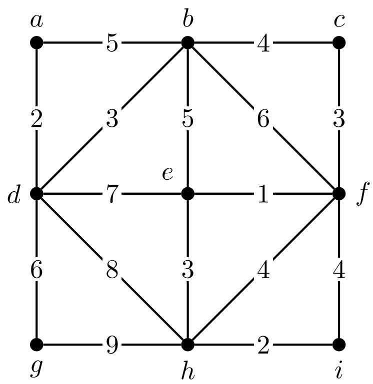
离散数学-图论作业 8 生成树

如无特意说明，以后各题只考虑有限个点的图。

Problem 1

分别用普林（Prim）算法和克鲁斯卡尔（Kruskal）算法求所给带权图的最小生成树。（按顺序写出选取的边及总的权值即可）



答案： 最小生成树权值应为 24。

Prim 选边序列：$(a,d),(d,b),(b,c),(c,f),(f,e),(e,h),(h,i),(d,g)$

Kruskal 选边序列：$(e,f),(a,d),(h,i),(b,d),(c,f),(e,h),(b,c),(d,g)$

Problem 2

证明或反驳：每条边权重均不相同的带权图

1) 有唯一的最小生成树。

2) 有唯一的“次小生成树”满足，存在一最小生成树的权值小于等于该树，且其他生成树的权值均大于等于该树。

答案：

1) 反证，记不同的最小生成树 T,T' 边集按权重从小到大排序为 $T=\{e_1,e_2,\ldots,e_{n-1}\},T'=\{e'_1,e'_2,...,e'_{n-1}\}$。

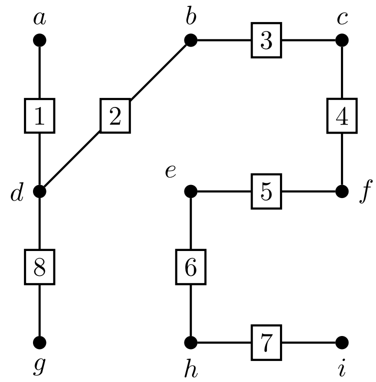


Figure 1: *

Prim

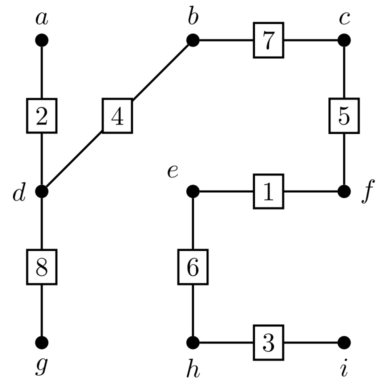


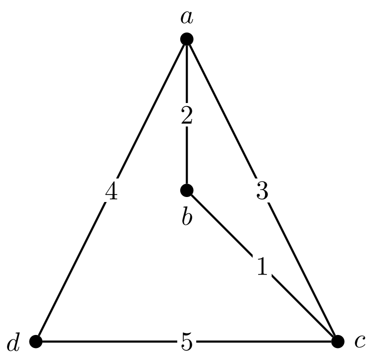
Figure 2: *

Kruskal

因为 $T \neq T'$，必存在最小的 $k < n$ 使得 $e_k \neq e'_k$，不妨令 $w(e'_k) < w(e_k)$，将 e'_k 加入 T，得到的 $T + e'_k$ 中有一个包含 e'_k 的圈 C，因为 $\{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, e'_k\} = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_k\} \subseteq T'$ 无环，所以存在 $t > k.e_t \in C$，删去 e_t 得到 G 的另一个生成树 $T + e'_k - e_t$，$w(T + e'_k - e_t) = w(T) + w(e'_k) - w(e_t) < w(T) + w(e'_k) - w(e_k) < w(T)$，与 T 是 G 上的最小生成树矛盾。

2) 反驳，如下图

最小生成树 $\{(a,b),(b,c),(a,d)\}$，次小生成树 $\{(b,c),(a,c),(a,d)\}$ 和 $\{(a,b),(b,c),(c,d)\}$



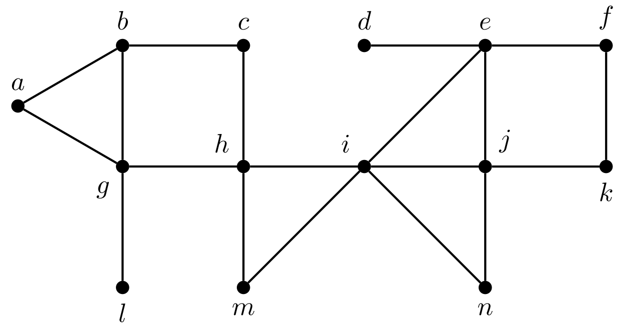
Problem 3

令 G 为一无向带权连通图，假设图中存在一个回路. 试证明：在此回路上若存在一条边 e 其权值严格大于此回路上的其它各边，则 e 不在 G 的任何最小生成树中。

答案： 不妨假设该回路 C 是顶点不重复的简单回路，设 $e = uv$。以下使用反证法来证明 e 不在任何最小生成树中，假设 T 是包含 e 的最小生成树。$T - \{e\}$ 必含两个连通分支，设为 $T1, T2$。$C - \{e\}$ 是图 G 中的 uv-通路，其中必有一边满足其两个端点 x,y 分别在 $T1, T2$ 中，设其为 e'。$T' = T - \{e\}\ \{e'\}$，显然 T' 是生成树。因 e 的权重大于 e' 的权重，T' 的权重比 T 更小，矛盾。所以，e 不在任何最小生成树中。

Problem 4

用深度优先搜索和广度优先搜索来构造下图的生成树。选择 a 作为这个生成树的根，并假定顶点都以字母顺序来排序。



答案： DFS：$\to a, a \to b, b \to c, c \to h, h \to g, g \to l, h \to i, i \to e, e \to d, e \to f, f \to k, k \to j, j \to n, i \to m$

BFS：$\to a, a \to b, a \to g, b \to c, g \to h, g \to l, h \to m, h \to i, i \to e, i \to j, i \to n, e \to d, e \to f, j \to k$

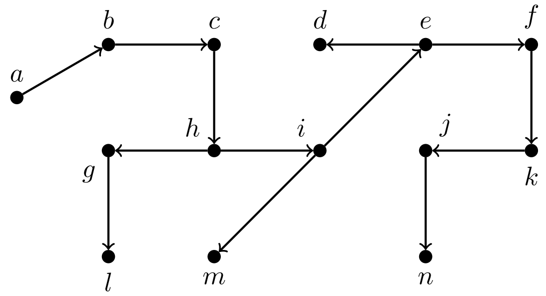


Figure 3: *

DFS

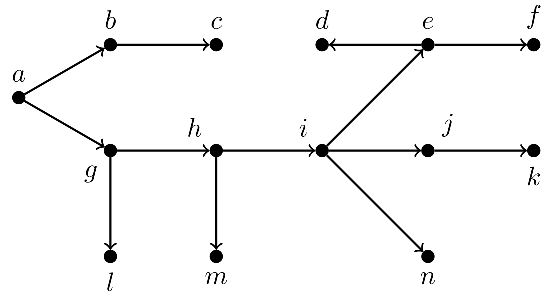


Figure 4: *

BFS