离散数学（2023）作业 03 - 证明方法

周帛岑

221900309

2023 年 3 月 16 日

1 Problem 1

证：

1.$\forall x(P(x) \vee Q(x))$ 题设

2.$\exists x(\neg P(x))$ 题设

3.$\forall x Q(x)$ 1,2

4.$\forall x(\neg Q(X) vee S(x))$ 题设

5.$\forall x S(x)$ 3,4

6.$\forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$ 题设

7.$\forall x(\neg R(x) \vee \neg S(x))$ 6,7

8.$\forall x(\neg R(x))$ 5,7

9$\exists x(\neg R(x))$ 8

订正：

证：

1.$\forall x(P(x) \vee Q(x))$ 题设

2.$\exists x(\neg P(x))$ 题设

3.$\neg(\forall x P(x))$ 德 · 摩根定律 2

4.$\forall x Q(x)$ 化简律 1,2

5.$\forall x(\neg Q(X) \vee S(x))$ 题设

6.$\forall x S(x)$ 化简律 3,4

7.$\forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$ 题设

8.$\forall x(\neg R(x) \vee \neg S(x))$ 逻辑等价式 6

9.$\forall x(\neg R(x))$ 化简律 5,7

10$\exists x(\neg R(x))$ 存在生成 8

2 Problem 2

证:

1.∀x(P(x)→(Q(x)∧S(x))) 题设

2.∀x(¬P(x)∨(Q(x)∧S(x))) 1

3.∀x(P(x)∧R(x)) 题设

4.∀xP(x) 3

5.∀xR(x) 3

6.∀x(Q(x)∧S(x)) 2,4

7.∀xS(x) 6

8.∀x(S(X)∧R(x)) 5,7

订正：

证:

1.∀x(P(x)→(Q(x)∧S(x))) 题设

2.∀x(¬P(x)∨(Q(x)∧S(x))) 逻辑等价式 1

3.∀x(P(x)∧R(x)) 题设

4.∀xP(x) 化简律 3

5.∀xR(x) 化简律 3

6.∀x(Q(x)∧S(x)) 化简律 2,4

7.∀xS(x) 化简律 6

8.∀x(S(X)∧R(x)) 合取律 5,7

3 Problem 3

证：

不妨假设 x 为奇数，y 为偶数，则 x^2 $x \cdot y$ y^2 $x \cdot y + y^2$ $x^2 - (x \cdot y + y^2)$
x y x^2 $x \cdot y$ y^2 $x^2 - x \cdot y$

订正：由题可知，x，y 一奇一偶，则 x · y 为偶数，$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ 为奇数，原式等价于一个奇数减去一个偶数，也为奇数

4 Problem 4

证：

不妨假设 min（a,b,c）= a, 则左侧等于 a，右侧等价于 min（a，c）等于 a。即左侧与右侧等价

假设 min(a,b,c) = b, 则左侧等价于 min(a,b) = b，右侧等价于 min(b,c) = b 即左侧与右侧等价
假设 min(a,b,c) = c, 则左侧等价于 min(a,c) = c，右侧等价于 c，即左侧与右侧等价

5 Problem 5

证:
不妨假设存在 n = 4m+3 = x$^2 + y^2$ n x y $x = 2a$ $y = 2b+1$ a b
$4m-2 = 4a^2+4b^2+4b$, $2m-1 = 2a^2+2b^2+2b$

订正：不妨假设存在 $n = 4m+3 = x^2+y^2$。由 n 为奇数，则 x 与 y 奇偶性相反，不妨假设 x = 2a ，y = 2b+1，其中 a，b 均为自然数
则原式可化为 $4m-2 = 4a^2+4b^2+4b$, 即 $2m-1 = 2a^2+2b^2+2b$
观察该式子，左侧为一奇数，右侧为一偶数，故该假设不成立，原命题得证

6 Problem 6

$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$
证:
若 x+y<0, 则上式显然成立，不妨假设 x+y≥0。
已知 (x-y)$^2 = x^2-2xy+y^2$≥0
→2x$^2+2y^2$≥x$^2+y^2+2xy$
→$\frac{2x^2+2y^2}{4} \geq \frac{x^2+y^2+2xy}{4}$
左右取根号得 $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$

订正：删去前文的不妨假设:

已知 (x-y)$^2 = x^2-2xy+y^2$≥0

→2x$^2+2y^2$≥x$^2+y^2+2xy$

→$\frac{2x^2+2y^2}{4} \geq \frac{x^2+y^2+2xy}{4}$

左右取根号得 $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$

7 Problem 7

证:
化简原方程，有 ax = c-b 不妨假设存在 x_1 和 x_2 且 x_1 不等于 x_2, 使上式成立, 则对于原方程，有 ax_1 = c-b 以及 ax_2= $c-b$ 又 a 不等于0 x$_1$ = $\frac{c-b}{a}$ 以及 $x_2 = \frac{c-b}{a}$，故 x$_1$ = x_2

订正：结论需说清楚：

化简原方程，有 ax = c-b 不妨假设存在 x_1 和 x_2 且 $x_1 \neq x_2$，使上式成立，则对于原方程，有 ax_1 = c-b 以及 $ax_2 = c-b$ 又 a 不等于0，则有$x_1 = \frac{c-b}{a}$ 以及 $x_2 = \frac{c-b}{a}$，此时有 $x_1 = x_2$故假设不成立，原命题正确。

8 Problem 8

证：

显然，对于 ∀x,∃a,b，且 a，b∈ℤ，使得 a≥x≥b

则显然，取 n 为 a，ϵ 为 a-x，则上式成立，不妨假设这样的 n 和 ϵ 不不唯一，即存在 $_{1,2}$,ϵ_1,ϵ_2 使原式成立，又 a≥x≥b，要使 x+ϵ_i(i=1,2)=n，且 ϵ_i(i=1,2)<1，此时 n 一定取 a，ϵ = a-x 也唯一存在，故原命题得证

订正：

先证明存在性，假设 x 为整数，此时 n 取 x，ϵ 取 x 即可

假设 x 不为整数，显然，对于 ∀x,∃a,b，且 a，b∈ℤ，使得 a>x>b。取 n = b，ϵ = b-x。此时原式成立

下证唯一性：

不妨假设这样的 n 和 ϵ 不唯一，即存在 n_1,n_2,ϵ_1,ϵ_2($n_1 \neq n_2$,$\epsilon_1 \neq \epsilon_2$) 使原式成立，即 x = n_1-ϵ_1 = n_2-ϵ_2

即 n_1-n_2 = ϵ_1-ϵ_2

又 n_1,n_2 均为整数，$|n_1$-$n_2| \geq 1$，且 $|\epsilon_1$-$\epsilon_2| \leq 1$，这与两式相等矛盾，故假设不成立

故唯一性得证

9 Problem 9

证：

我们先证明关于 x 无整数解，化简原式，得 $2x^2 = 14 - 5y^2$，$y^2 \geq 0$,$x^2 \geq 0$，故 $14-5y^2 \geq 0$,y 只取 0，1，-1. 分别带入，显然，x 无整数解。

对于 y，有 $5y^2 = 14 - 2x^2$， x 0 1 2 −1 −2 y

综上，原命题得证

订正：

我们先证明关于 x 无整数解，化简原式，得 $2\mathrm{x}^2 = 14 - 5y^2$，$y^2$≥0,$\mathrm{x}^2$≥0，故 14-5$\mathrm{y}^2$≥0,y 只取 0，1，-1. 分别带入，显然，x 无整数解。

对于 y，有 $5y^2 = 14 - 2x^2$, 同理，x 只为 0，1，2，-1，-2，分别带入，显然，关于 y 无整数解。

综上，原命题得证

10 Problem 10

证：取 x 为 2，y 为 $\log_2 e$，显然 $\mathrm{x}^y = 2^{\log_2 e} = \mathrm{e}$ 为无理数，则原命题成立