离散数学（2023）作业 XX

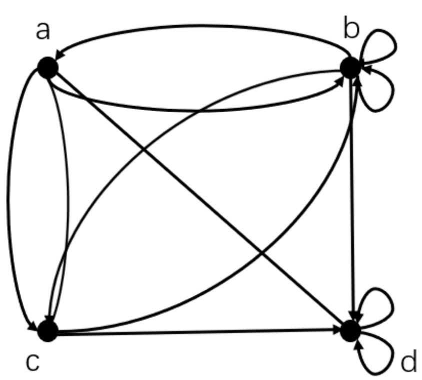
周帛岑
221900309

2023 年 5 月 30 日

1 Problem 1

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2):



2 Problem 2

a):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

b):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(2): 度矩阵。由关联矩阵的定义我们得知，关联矩阵与其转置的乘积为顶点 i 和顶点 j 均有边指向的那些顶点的个数构成的矩阵，且 A 为顶点 i 和顶点 j 均有边指向那些顶点的个数的矩阵，且 i≠j，两者相减指向某一点的边的个数构成的矩阵，既为度矩阵

3 Problem 3

下左图的邻接矩阵为:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

下右图的邻接矩阵为:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

下右图的补图邻接矩阵为: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

经过正交变换 (行列同时变换)

可以将该补图的邻接矩阵变为与下左图邻接矩阵完全相同的形式，于是两图同构

4 Problem 4

(1): 只包含一个 $\mathrm{C}_3 : 4{\times}3 = 12$

包含二个 $\mathrm{C}_3 : 6$

包含四个 $\mathrm{C}_3 : 1$

一共 19 种

(2): 四个顶点构成的简单图一共 $2^6 = 64$

有一个孤立点: 4 种

由两个孤立点: 6 种

有三个孤立点: 4 种

有四个孤立点: 1 种

故无孤立点的一共 49 种

(3): 形似 $\mathrm{K}_{1,3} : 4$

形似 $\mathrm{K}_{2,2} : 6$

故一共 10 种

订正: 未考虑到同构，故出现问题，

解:

(1):4 种

(2):7 种

(3):7 种

5 Problem 5

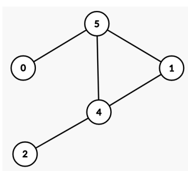
由题可知，G 与 $\overline{G}$ 的边数相同，且两者之和构成完全图，故 n(n-1)/2 为偶数

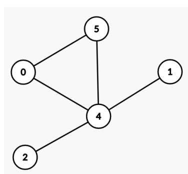
显然，当 $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$ 或 $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$ 时，此时 n(n-1)/2 不为偶数

故若满足题设，则图 G 的顶点数 ν 满足 $\nu \equiv 0, 1\ (\mathrm{mod} 4)$。

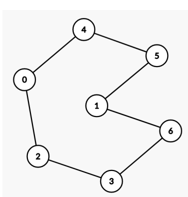
6 Problem 6

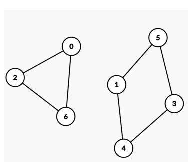
(1):





(2):





7 Problem 7

证：对于任意顶点，我们都要伸出 k 条边，使其满足度为 k，而由于围长为 4，所以这 k 个点间不能相连，每一个点都要与额外的 k-1 个点相连，假设这剩余的 k-1 个点都与这 k 个点相连，此时顶点总数达到最少，为 2k

下证唯一性：

显然，对于给定的顶点 a，其邻接的 k 个顶点固定（为互不相连的 k 个）。而剩余 k-1 个顶点被这 k 个中的每一个邻接，故也为固定的。

故这样的图只有一种