离散数学（2023）作业 XX

周帛岑
221900309

2023 年 5 月 23 日

1 Problem 1

(1):

对于 f(a+b) 与 f(a)×f(b) 若 a，b 均为偶数，则 a+b 为偶数，此时结果相同

若 a，b 一奇一偶，则 a+b 为奇数，乘积也为-1，此时结果相同

若 a，b 均为奇数，则 a+b 为偶数，此时结果相同

故为同态，又这个函数显然为单射而不为满射，故为单同态

f(G_1) = {1,-1}

(2):

对于 f(a)×f(b), 原式 = (cos a + i sin a)×(cos b + i sin b) = cos (a+b) + i sin (a+b)

故 f(a+b) = f(a)×f(b)

为同态，又这个函数显然为单射而不为满射，故为单同态

f(G_1) = {cos a + i sin a|a∈Z}

订正：

第一小题中出现问题，不为单同态：

(1):

对于 f(a+b) 与 f(a)×f(b) 若 a，b 均为偶数，则 a+b 为偶数，此时结果相同

若 a，b 一奇一偶，则 a+b 为奇数，乘积也为-1，此时结果相同

若 a，b 均为奇数，则 a+b 为偶数，此时结果相同

故为同态，又这个函数不为单射而且不为满射

故既不为单同态也不为满同态

f(G_1) = {1,-1}

2 Problem 2

(1): 解：由题可知，ker f 中有且仅有为 G 中的单位元，故 ker f 构成一个子群

(2): 解：由题可知，img f 显然满足封闭性，且 $G^,$ 中的单位元在该 img f 中，且每一元素的逆元均在其中，故 img f 构成一个子群

3 Problem 3

证：由题意得，存在 x∈G, 有 G = <a> 由于两群同态，则 f(a^n) = f(a)*f(a)⋯⋯⋯⋯*f(a), 故 f(a) 可以表示群 $G^,$, 故 $G^,$ 也为循环群

4 Problem 4

证：由题意得，不妨设 a 的阶为 n，即 a^n = e 由于两群同态，则 f(a^n) = f(a)*f(a)⋯⋯⋯⋯*f(a), 故 f(a) 可以表示群 $G^,$, 故 $G^,$ 也为循环群

5 Problem 5

证：由题可知，不妨设这个三阶群为 G

又拉格朗日定理，G 中只存在一阶或三阶元，且显然不能均为一阶元，故 G 中元素可以表示为：{e,a,a^k}

显然，<a> 为一个循环群

6 Problem 6

证：由题可知，C_n 的每一个元素均能生成一个子群 C_m，且这些子群为循环群

对正整数 m，欧拉函数的结果 ϕ(m) 为 C_m 的生成元的个数

又 C_n 生成的子群相当于对 C_n 进行的一个划分

即所有的 C_m 构成 C_n

对于 C_n，其每一个元素均为生成元，且所有的 C_m 构成 C_n

故 C_m 中生成元的总和即为 n

7 Problem 7

证：不妨令这个 p 阶群为 G

由拉格朗日定理，我们得知 G 中只存在一阶或 p 阶元，且群中只能存在一个一阶元

设任意 a∈G 且 a≠e

故 G 中元素可以表示为：{e,a,a^k......a^m}

故 G = <a>

8 Problem 8

证：由题可知。正整数加群可以由 1 生成，而有理加群不能有限生成，故两者不同构

下面证明有理数加群不能有限生成：

不妨假设其能有限生成，即存在一个生成元 a，任意有理数均可以表示为 a 的倍数

而我们知道 a/2 显然也在有理数群中，这与我们的假设相矛盾，故假设不成立

有理数加群不能有限生成