



离散数学第十七次作业

赵国博

2023 年 4 月 24 日

1 Problem 1

1.1 A

不妨取 $a \in H, a \notin K, b \in K, a \notin H$, 而 $ab^{-1} \notin H \cup K$

1.2 B

$\forall a, b^{-1} \in H \cap K$, 都有 $ab^{-1} \in H$ 且 $ab^{-1} \in K$, 是子群

1.3 C

$K - H$ 中没有单位元, 不是子群

1.4 D

同 C

2 Problem 2

任取 $N(a)$ 中 m, n , 满足 $ma = am, na = an, a^{-1}n = na^{-1}$
 $(mn^{-1})a = m(n^{-1}a) = m(a^{-1}n)^{-1} = m(na^{-1})^{-1} = m(an^{-1}) = man^{-1} =$
 $a(mn^{-1})$, 满足交换, $(mn^{-1}) \in N(a)$, 根据判定定理, 得证

3 Problem 3

对于任意 $x \in G$, 任取 $xmx^{-1}, xnx^{-1} \in xHx^{-1}$, $m, n \in H, (xmx^{-1})(xnx^{-1})^{-1} = x(mn^{-1})x^{-1}$, 由于 H 是 G 的子群, $mn^{-1} \in H$, 所以 $x(mn^{-1})x^{-1} \in xHx^{-1}$, 由判定定理, 得证

4 Problem 4

假设 $H \cap K$ 中除了 e 还有 a , 则 $\langle a \rangle$ 是 H 和 K 的子群, 由拉格朗日定理, $|\langle a \rangle|$ 是 $|H|$ 和 $|K|$ 的因子, 而 r 和 s 互质, 所以 $|\langle a \rangle|=1$, 即 $a=e$, 矛盾, 所以 $H \cap K = \{e\}$

5 Problem 5

设该二阶元为 $a, a = a^{-1}, a^2 = e, a \neq e$, 任取 $x \in G, (xax^{-1})(xax^{-1}) = e$, 所以 xax^{-1} 也是 2 阶元, 由于只有一个二阶元, $xax^{-1} = a, xa = ax$, 得证

6 Problem 6

, 由交换律, $(gh)^k = g^k h^k = e$, 由于 $\gcd(|g|, |h|) = 1, k$ 为 $|g|$ 和 $|h|$ 的最小公倍数, 所以 $|gh| = |g||h|$

7 Problem 7

$\forall g \in G, \forall h \in H, ghg^{-1} \in H$, 即 $\exists m, ghg^{-1} = m, gh = mg$, 即 $\forall (gh) \in gH, \exists (mg) \in Hg, gH \subseteq Hg$

同理, $Hg \subseteq gH$, 即 $gH = Hg$, 得证

— 10