80

离散数学作业 16

王铃

221900318

2023 年 5 月 3 日

1 problem 1

(1) 不一定　　(2) 是
(3) 不是　　(4) 不是

2 problem 2

证明:
由题可知，$N(a)$ 为 G 的子集，所以 $N(a)$ 是可结合的。
设 $x, y \in N(a)$, 则有 $xya = xay = axy$, 所以可得 $xy \in N(a)$, 所以 $N(a)$ 是封闭的。
同时 e 为 G 上单位元，且 $ea = ae = a$, 所以 $e \in N(a)$，并且 $ex = xe = x, x \in N(a)$, 所以 e 也是 $N(a)$ 的单位元.
又由于 $xx^{-1} = e, x \in N(a), e \in N(a)$, 所以 $x^{-1} \in N(a)$, 所以 $N(a)$ 是可逆的。
综上，$N(a)$ 是 G 的子群。得证。

3 problem 3

证明:
令 $xHx^{-1} = M$.
首先，由于 G 的封闭性，集合 M 是集合 G 的子集。

其次，设 $h_1,h_2 \in H$，则 $xh_1x^{-1} \in M, xh_2x^{-1} \in M$, 且 $h_1h_2 \in H$, 所以 $xh_1x^{-1}xh_2x^{-1} = xh_1h_2x^{-1} \in M$, 所以，$M$ 是封闭的。
设 $h_1,h_2,h_3 \in H$, 则 $(xh_1x^{-1}xh_2x^{-1})xh_3x^{-1} = xh_1h_2x^{-1}xh_3x^{-1} = xh_1h_2h_3x^{-1} = xh_1x^{-1}xh_2h_3x^{-1} = xh_1x^{-1}(xh_2x^{-1}xh_3x^{-1})$，所以 M 是可结合的。
设 e 为 G 中的单位元，则由题可知 $e \in H$, 所以，$\forall h \in H, xhx^{-1}xex^{-1} = xex^{-1}xhx^{-1} = xhx^{-1}$, 且 $xex^{-1} = e$, 所以 M 中有单位元 e.
由于 H 是 G 的子群，所以 $\forall h \in H, h^{-1} \in H$, 且 $xhx^{-1}xh^{-1}x^{-1} = xh^{-1}x^{-1}xhx^{-1} = e$，所以 M 中的每一个元素都有逆元。
综上，M 是 G 的子群。得证。

4 problem 4

证明:
假设 H 与 K 的交集的元素不止单位元，则存在一个元素 a 同时属于 H 和 K.
则：$a^r = e, a^s = e$，设 $r <= s$, 则 $r|s$, 这与 r,s 互素矛盾，假设错误，原结论成立，得证。

5 problem 5

证明:
设这个二阶元为 a,$\forall x \in G$,$(xax^{-1})(xax^{-1}) = e$, 所以 xax^{-1} 是一个一阶元或者是一个二阶元。若 xax^{-1} 是一阶元，则 $xax^{-1} = e$,$xa = x$, 由消去律可得 $a = e$, 这与 a 是二阶元矛盾，所以 xax^{-1} 是二阶元。又 a 是 G 的唯一的二阶元，所以 $a = xax^{-1}$, 所以 $ax = xa$，所以结论成立, 得证.

6 problem 6

−10

7 problem 7

证明:

设 $\forall h_1 \in H$, $gh_1 = gh_1g^{-1}g \in Hg$, 所以 $gH \subseteq Hg$, 同理,$h_1g = gg^{-1}h_1g \in gH$,$Hg \subseteq gH$, 所以 $gH = Hg$, 得证。

8 problem 8

−10