100

离散数学（2023）作业 17

谢庆轩
221900325

2023 年 5 月 2 日

1 Problem 1

A. 不是
B. 是
C. 不是
D. 不是

2 Problem 2

证明：$\forall x, y \in N(a)$，有 $xa = ax, ya = ay$，所以 $(xy)a = x(ya) = x(ay) = (xa)y = (ax)y = a(xy)$，即 $\forall x, y \in N(a), xy \in N(a)$，故 $N(a)$ 是 G 的子群，得证

3 Problem 3

证明: 因为 H 是 G 的子群, 所以 $\forall a, b \in H, ab^{-1} \in H$，又 $xax^{-1}, xb^{-1}x^{-1} \in xHx^{-1}$，可得 $xax^{-1}xb^{-1}x^{-1} = xaeb^{-1}x^{-1} = x(ab^{-1})x^{-1} \in xHx^{-1}$，故 xHx^{-1} 是 G 的子群，得证

4 Problem 4

证明：假设 $H \cap K \neq \{e\}$，则 $H \cap K$ 一定不为一阶子群，记其为 $k(k > 1)$ 阶，则 $k \mid r, k \mid s$，那么 $gcd(r, s) = k$，与 r, s 互素矛盾，故 $H \cap K = \{e\}$，得证

5 Problem 5

证明：记 a 为 G 中的二阶元，假设 $\exists x \in G, ax \neq xa$，则 $xax^{-1} \in G$ 且 $xax^{-1} \neq a$，有 $(xax^{-1})^2 = xax^{-1}xax^{-1} = xa^2x^{-1} = xx^{-1} = e$，与二阶元唯一矛盾，故若 G 中只有一个二阶元，则这个二阶元一定与 G 中所有元素可交换，得证

6 Problem 6

证明：因为 $gh = hg$，所以 $(gh)^k = g^k h^k$(k为正整数)，故 $|gh|$ 应为 $lcm(|g|, |h|) = \frac{|g||h|}{gcd(|g||h|)} = |g||h|$，得证

7 Problem 7

证明：$\forall g \in G, \forall h \in H, gh \in gH$，有 $ghg^{-1}g \in Hg$，又 $ghg^{-1}g = gh$，所以 $\forall g \in G, h \in H, gh \in gH$ 且 $gh \in Hg$，即 $\forall g \in G, gH = Hg$，得证

8 Problem 8

证明：a 为 p 的倍数时，$a^p \equiv a \pmod p$ 显然成立；a 不为 p 的倍数时，$\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, ..., p-1\}, |\mathbb{Z}_p^*| = p-1$，则其中任意元素 $a, \langle a \rangle = \{a^k | k \in \mathbb{Z}_{ord(a)}\}$ 为 $\mathbb{Z}_p^*$ 的子群，阶数为 $ord(a)$，所以 $ord(a) \mid (p-1)$，又因为 $a^{ord(a)} \equiv 1 \pmod p$，所以 $a^{p-1} \equiv a^{ord(a)} \equiv 1 \pmod p$，即 $a^p \equiv a \pmod p$，得证