离散数学（2023）作业 07

周帛岑
221900309

2023 年 3 月 14 日

1 Problem 1

(1): 显然，该集合基数可数，为 3

(2): 由与该集合与自然数集形成一个双射，故有基数为 $\aleph_0$

(3): 由与该集合与自然数集形成一个双射，故有基数为 $\aleph_0$

(4):B 中元素 n 取 N^{109}时，与 C 中元素 n 取N^2相同，其中 N 为任意自然数，故B∪C 与自然数集形成一个双射，故有基数为 $\aleph_0$

(5): 由容斥原理，B∩C = $\aleph_0$+$\aleph_0$-$\aleph_0$ = $\aleph_0$

(6): 由题意，该集合与实数集形成双射，故有基数为 $\aleph_1$

2 Problem 2

(1) 证:

由 A∩B 中的元素个数小于等于 min|A|，|B|，不妨设 A 与 B 对应的 N 的子集分别为 X,Y，故 A∩B 对应 x∩Y，也为 N 的子集

(2) 证:

不妨令 $B_i = \{(A_1, B_i), (A_2, B_i)......(A_n, B_i)\}$

$A \times B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \cdots \cdots \cup B_n$

又由定理可知，可数集的并集均可数，故 A×B 可数

3 Problem 3

解:

a): 可数无限的。对于集合中的元素，我们令 1→11,2→12⋯⋯n→10+n 可以构造出一个与自然数集的双射，故两集合此时基数相同，均为 $\aleph_0$

b): 可数无限的。对于集合中的元素，我们令 1→-1,2→-3⋯⋯n→-2n+1 可以构造出一个与自然数集的双射，故两集合此时基数相同，均为 $\aleph_0$

c): 有限的，由题意可知，我们可以数出其中的元素数量，为 200001 个

d): 不可数的，我们可以构造出一个双射，使 (0,2) 上的所有实数与实数集构成双射，故不可数

e) 可数无限的，对于集合中的元素，我们令 1→(2，1),2→(3，1)，3→(2,2),4→(3,2)⋯⋯2n-1→(2,n),2n→(3,n) 可以构造出一个与自然数集的双射，故两集合此时基数相同，均为 $\aleph_0$

f) 可数无限的, 对于集合中的元素，我们令 1→10,2→-10⋯⋯2n-1→n · 10，2n→-n · 10 可以构造出一个与自然数集的双射，故两集合此时基数相同，均为 $\aleph_0$

4 Problem 4

证：一定

不妨假设其可数，且 A-B 的基数为 |C| 即 |A|-|B| = |C|，|A| = |B|+|C| 与题设矛盾，故一定不可数

5 Problem 5

证:

由题设可知，B 中的每个元素均有 A 中元素与之对应，即有 |A|≤|B|, 又 A 为可数集合，故 B 也为可数集合

6 Problem 6

证:

由题意得，A⊆B 时，A 中的所有元素均可以在 B 中找到，由基数的定义，有 |A|≤|B|

7 Problem 7

证：$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$

又 $\{0.1\}^A$为从 A 到$\{0,1\}$的所有映射，

$\{0,1\}^A = \{\{<a,0>,<b,0>,<c,0>\},\{<a,0>,<b,0>,<c,1>\},\{<a,0>,<b,1>,<c,0>\},\{<a,0>,<b,1>,<c,1>\},\{<a,1>,<b,0>,<c,0>\},\{<a,1>,<b,0>,<c,1>\},\{<a,1>,<b,1>,<c,0>\},\{<a,1>,<b,1>,<c,1>\}\}$

由两集合元素个数相同，均为 8，我们可依次将两集合中的元素对应，从而构成一个双射，则原命题得证

8 Problem 8

解：

由题可知，该二次方程的解为 $\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2b}\}\cup\{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2b}\}$

对于任意 a，b，c，我们均可以使 $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2b}$与a,b,c 构成双射，且由于 {a,b,c} 显然为可数无限集合，则

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2b}\text{为可数无限集合}$$

同理，

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2b}\text{为可数无限集合}$$

故两集合的并集也为可数集合

原命题得证

9 Problem 9

证：

由题可知，我们可以构造一个映射，使 B 与 C 中元素一一对应起来。

且 A 与 B 或 C 中并不存在相同元素，于是我们构造这样一个映射：

A∪B 中属于 B 的元素一对一的与 A∪C 中属于 C 的元素对应，A∪B 中属于 A 的元素映射到 A∪C 中属于 A 的那一唯一相同元素

此时我们构造了一个从 A∪B 到 A∪C 的一对一的映射，这个映射显然是双射，故有原命题成立

10 Problem 10

证:

不妨假设这样的序列为可数的，我们可以将其全部列举出来:

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots, a_n$

$b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\ldots, b_n$

$c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots\ldots, c_n$

$d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots\ldots, d_n$

$e_1, e_2, e_3, e_4, \ldots\ldots, e_n$

……………………

其中这个数阵的每个数字都只能在 1，2，3 中取

我们可以找到这个序列的对角线，不妨取 $a_1 1 \neq a_1, b_1 1 \neq b_1, c_1 1 \neq c_1$…………

于是我们构造出了一个新的序列，且这个数列的任一列均与其他某一列不重复，即这一序列与所有已经列举出的数阵中的序列均不相同，但假设为我们已经列举出了所有序列，这一结果与假设矛盾，故我们无法将这样的序列全部列出，故其不可数。