离散数学（2023）作业 10

周帛岑
221900309

2023 年 3 月 29 日

1 Problem 1

解:

a):P(A|B) = $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ = $\frac{1}{3}$

b):P(B|A) = $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ = $\frac{1}{5}$

c): 由题可知，P(A∪B) = P(A)+P(B)-P(A∩B) = 0.7

又 P(A∪B∩A) = P(A) = 0.5，故 P (A|A∪B) = $\frac{P(A\cup B\cap A)}{P(A\cup B)}$ = $\frac{5}{7}$

d): 由题可知 P(A∩B∩A) = P(A∩B) = 0.1

故 P (A|A∩B) = $\frac{P(A\cap B\cap A)}{P(A\cap B)}$ = 1

e): 由题可知,P (A|A∪B∩(A∩B)) = P(A∩B) = 0.1

故 P (A∩B|A∪B) = $\frac{P(A\cap B\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}$ = $\frac{1}{7}$

2 Problem 2

解：不妨设头像朝上为 0，头像朝下为 1，从左到右分别代表 1-3 次抛掷，我们可以将结果与 01 位串对应，设所有的情况构成的集合为 A

则 A = {000,001,010,011,100,101,110,111}

a):E_1 = {100,101,110,111}，E_2 = {000,001,100,101} $E_1 \cap E_2$ = {100,101}

P(E_1) = $\frac{|E_1|}{|A|}$ = 0.5 P(E_2) = $\frac{|E_2|}{|A|}$ = 0.5 P($E_1 \cap E_2$) = $\frac{|E_1\cap E_2|}{|A|}$ = 0.25 = P(E_1)×P(E_2)

故为独立的

b):E_1 = {100,101,110,111}，E_2 = {001,010,100} $E_1 \cap E_2$ = {100}

$\mathrm{P}(E_1) = \frac{|E_1|}{|A|} = 0.5 \quad \mathrm{P}(E_2) = \frac{|E_2|}{|A|} = \frac{3}{8} \quad \mathrm{P}(E_1 \cap E_2) = \frac{|E_1 \cap E_2|}{|A|} = \frac{1}{8} \neq \mathrm{P}(E_1) \times \mathrm{P}(E_2)$

故不为独立的

c):$E_1 = \{010,011,110,111\}$，$E_2 = \{001,010,100\}$ $E_1 \cap E_2 = \{010\}$

$\mathrm{P}(E_1) = \frac{|E_1|}{|A|} = 0.5 \quad \mathrm{P}(E_2) = \frac{|E_2|}{|A|} = \frac{3}{8} \quad \mathrm{P}(E_1 \cap E_2) = \frac{|E_1 \cap E_2|}{|A|} = \frac{1}{8} \neq \mathrm{P}(E_1) \times \mathrm{P}(E_2)$

故不为独立的

3 Problem 3

解：设取从某个厂中取产品的概率为 P(x),(x∈{甲，乙，丙})

由题意，$\mathrm{P}(甲) = \frac{5}{5+2+3} = 0.5$,$\mathrm{P}(乙) = \frac{3}{5+2+3} = 0.3$,$\mathrm{P}(丙) = \frac{2}{5+2+3} = 0.2$

则取到次品的概率 R 为

$\mathrm{R} = 0.5 \times (1\text{-}0.95) + 0.3 \times (1\text{-}0.96) + 0.2 \times (1\text{-}0.98) = 0.041$

4 Problem 4

解：不妨设从 X 中取出某数概率为 A(X)，从 Y 中取出某数概率为 B(Y)

$\mathrm{P}(1 \cap 2) = \mathrm{P}(\mathrm{A}(1)) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}(1)) = \frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(1 \cap 3) = \mathrm{P}(\mathrm{A}(1)) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}(2)) = \frac{1}{9}$

$\mathrm{P}(1 \cap 3) = \mathrm{P}(\mathrm{A}(1)) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}(3)) = \frac{1}{18}$

三式分别相除，得

则 $\mathrm{P}(\mathrm{B}(1)) : \mathrm{P}(\mathrm{B}(2)) : \mathrm{P}(\mathrm{B}(3)) = 3 : 2 : 1$

即 $\mathrm{P}(\mathrm{B}(1)) = \frac{P(B(3))}{P(B(3))+P(B(2))+P(B(1))} = \frac{1}{2}$

故 $\mathrm{P}(\mathrm{A}(1)) = \frac{1}{3}$

又 $\mathrm{P}(2 \cap 1) = \mathrm{P}(\mathrm{A}(2)) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}(1)) = \frac{1}{3}$

则 $\mathrm{P}(\mathrm{A}(2)) = \frac{2}{3}$

故 $\mathrm{P}(\mathrm{A}(2)) \cap \mathrm{P}(\mathrm{B}(2)) = \mathrm{P}(\mathrm{A}(2)) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}(2)) = \frac{1}{6}$ 即 $\mathrm{a} = \frac{1}{6}$

故 $\mathrm{P}(\mathrm{A}(2) \cap \mathrm{P}(\mathrm{B}(3)) = \mathrm{P}(\mathrm{A}(2) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}(3)) = \frac{1}{9}$ 即 $\mathrm{b} = \frac{1}{9}$

5 Problem 5

解：设是否感染为事件 A(x), 其中 x = 0 为未感染，x = 1 为已感染, 其中 P(A(1)) = 0.04

设是否为阳性为事件 B(x), 其中 x = 0 为不为阴性，x = 1 为阳性

a): 由没感染禽流感的人中有 2% 的人禽流感检测呈阳性, 感染了禽流感的人中有 97% 的人禽流感检测呈阳性。故 P(B(1)) = P(A(0))×0.02+P(A(1))×0.97 = 0.058

则禽流感检测呈阳性的人真的感染了禽流感病毒的概率为 $Q_1 = \frac{P(A(1))\times 0.97}{0.058} \approx 0.669$

b): 由 a) 可知，禽流感检测呈阳性的人没有感染禽流感病毒的概率为 $Q_2 = \frac{P(A(0))\times 0.02}{0.058} \approx$ 0.331

c): 由没感染禽流感的人中有 98% 的人禽流感检测不呈阳性, 感染了禽流感的人中有 3% 的人禽流感检测不呈阳性。且 P(B(0)) = 1-P(B(1)) 故 P(B(0)) = P(A(0))×0.02+P(A(1))×0.97 = 0.942

则禽流感检测呈阴性的人感染了禽流感病毒的概率为 $Q_3 = \frac{P(A(1))\times 0.03}{0.942} \approx 0.001274$

d): 由 c) 可知，禽流感检测呈阴性的人没有感染禽流感病毒的概率为 $Q_4 = \frac{P(A(0))\times 0.98}{0.942} \approx$ 0.998726

6 Problem 6

解：

由题可知，每一次扔骰子是独立的且扔出 6 的概率为 p = $\frac{1}{6}$

故扔 10 次后出现六的次数的方差 D 满足 D = np(1-p) = $\frac{25}{18}$

7 Problem 7

解：从 20 件样品中抽取 5 件共有 $C_{20}^5 = 15504$ 种情况

其中抽到一件或零件次品的事件共 $C_{16}^4 \times C_4^1 + C_{16}^5 = 11648$ 种情况

故会被拒绝的概率为 1 - $\frac{11648}{15504}$≈0.2487

期望值 E = $1\times\frac{C_{16}^4\times C_4^1}{15504} + 2\times\frac{C_{16}^3\times C_4^2}{15504} + 3\times\frac{C_{16}^2\times C_4^3}{15504} + 4\times\frac{C_{16}^1\times C_4^4}{15504} = 1$

方差 D = $(0-1)^2\times\frac{C_{16}^5}{15504} + (1-1)^2\times\frac{C_{16}^4\times C_4^1}{15504} + (2-1)^2\times\frac{C_{16}^3\times C_4^2}{15504} + (3-1)^2\times\frac{C_{16}^2\times C_4^3}{15504} + (4-1)^2\times\frac{C_{16}^1\times C_4^4}{15504} = \frac{12}{19}$

8 Problem 8

解:

n = 2 时，不妨按顺序将其设为玩家 A, 玩家 B,(A 先开枪)。A 获胜的概率为 $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

即 B 获胜的概率 P(B) 为 $1\text{-}P(A) = \frac{1}{2}$

此时是公平的

n = 3 时，不妨按顺序将其设为玩家 A, 玩家 B, 玩家 C,(A 先开枪)。A 获胜的概率为 $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

同理，$P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$

此时是公平的

n = 4 时，不妨按顺序将其设为玩家 A, 玩家 B, 玩家 C, 玩家 D,(A 先开枪)。A 获胜的概率为 $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

而 D 获胜的概率为 $P(D) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P(D) \neq P(A)$。故不公平

n = 5 时，不妨按顺序将其设为玩家 A, 玩家 B, 玩家 C, 玩家 D, 玩家 E,(A 先开枪)。A 获胜的概率为 $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

而 D 获胜的概率为 $P(D) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P(D) \neq P(A)$。故不公平

9 Problem 9

解：由题可知，这个人说真话的概率为 $\frac{2}{3}$, 故这个骰子真为 4 点的概率为 $\frac{2}{3}$

10 Problem 10

解：由题可知，每一组连续座位对被取到的概率为 $\frac{25}{100} \times \frac{24}{99}$

每一个连续座位对的期望值为 $1 \times \frac{25}{100} \times \frac{24}{99}$

由于一共有 99 个连续座位对，每一个座位对被取到的期望值都相同，为 $1 \times \frac{25}{100} \times \frac{24}{99}$

故期望值为 $1 \times \frac{25}{100} \times \frac{24}{99} \times 99 = 6$

11 Problem 11

证：由算数基本定理，我们设这个数为 n，且 n = $q_1^{a1} \cdot q_2^{a2} \cdot \cdots\cdots\cdots\cdots \cdot q_n^{an}$

则 $n^2 = q_1^{2a1} \cdot q_2^{2a2} \cdot \cdots\cdots\cdots\cdots \cdot q_n^{2an}$

设 m 为 n^2 的一个因子，对于每一个 q_i^{2ai}(1≤i≤n), 其在 m 中均有（2ai+1）种存在可能，故 m 一共有 $\prod_{k=1}^{n}$(2ai+1) 个，而 ∀ i ∈[1,n],(2ai+1) 为一个奇数，故 m 一共奇数个，