离散数学第十七次作业-群的结构：子群与群的分解

Problem 1

设 H,K 是群 $\langle G, \circ \rangle$ 的子群, 下面哪些代数系统是 $\langle G, \circ \rangle$ 的子群?

A. $\langle H \cup K, \circ \rangle$ B. $\langle H \cap K, \circ \rangle$ C. $\langle K - H, \circ \rangle$ D. $\langle H - K, \circ \rangle$

Problem 2

设 G为群, a 是 G中给定元素, a 的正规化子 $N(a)$ 表示 G中与 a 可交换的元素构成的集合, 即 $N(a) = \{x \mid x \in G \wedge xa = ax\}$. 证明: $N(a)$ 是 G的子群.

Problem 3

设 H是群 G的子群, $x \in G$, 令 $xHx^{-1} = \{xhx^{-1} \mid h \in H\}$, 证明: xHx^{-1} 是 G的子群, 称为 H的共轭子群.

Problem 4

设 H和 K分别为群 G的 r, s 阶子群, 若 r 与 s 互素, 证明: $H \cap K = \{e\}$.

Problem 5

证明: 若 G 中只有一个 2 阶元, 则这个 2 阶元一定与 G 中所有元素可交换.

Problem 6

证明: 在群 G中, 如果 $g, h \in G$ 满足 $gh = hg$, 并且 $\gcd(|g|, |h|) = 1$, 那么 $|gh| = |g||h|$.（提示: 令 $N = |gh||g|$, 使用阶的性质和交换律）

Problem 7

（正规子群与陪集）设群 G 有子群 H, H 是正规子群当且仅当

$$\forall g \in G, \forall h \in H : ghg^{-1} \in H.$$

证明: 若子群 H 为正规子群, 则左右陪集相等. 即证 $\forall g \in G, gH = Hg$.

Problem 8

证明: 使用阶的概念证明费马小定理. 即对素数 p 和任意整数 a, 均有 $a^p \equiv (\operatorname{mod} p)$. (提示: 考虑集合 $\mathbb{Z}_n^* := \{[m]_n \in \mathbb{Z}_n \mid \gcd(m,n)=1\}$ 在乘法下构成的群. 使用拉格朗日定理的拓展: 元素的阶和群的阶之间的关系)