离散数学（2023）作业 XX

周帛岑
221900309

2023 年 6 月 14 日

1 Problem 1

(1): 存在欧拉回路：b→a→e→b→f→e→i→f→g→j→h→g→c→h→d→c→b

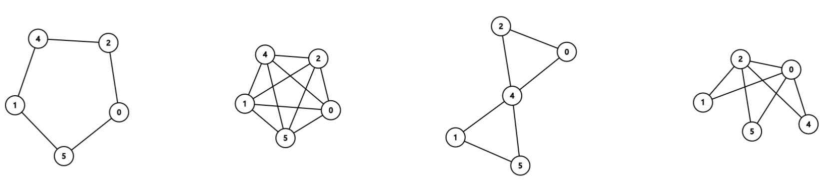
(2): 不存在欧拉回路，存在欧拉通路，i→e→a→i→f→e→b→a→f→g→d→c→h→d→j→c→b

2 Problem 2

(1): 解：由于欧拉图的所有点的度数均为偶数，故当 m，n 均为偶数时，此时为欧拉图

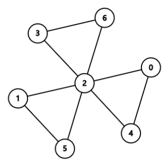
(2): 除 m，n 均为偶数这一情况外，当 m，n 中有且仅有一个取 2，另一个为奇数时，或 m，n 均为 1 时，此时满足有且仅有两点度数为奇数，存在欧拉通路

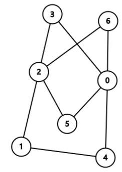
3 Problem 3



4 Problem 4

反驳：下面两图中，顶点数与边数均相同，但显然不同构

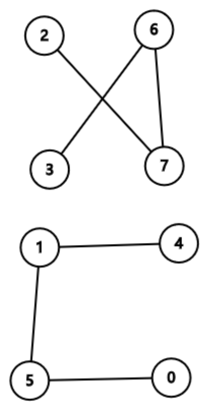




5 Problem 5

(1)：由题可知，G 中存在欧拉通路，则 G 中有两个奇度顶点或无奇度顶点，又若 G 的顶点数为奇数，则完全图中，G 的顶点度为偶数，故 $\overline{G}$ 中的顶点中有两个奇度顶点或无奇度顶点又 $\overline{G}$ 为连通图，故 $\overline{G}$ 中有欧拉回路

(2): 反驳:



对于如下两图，其互为补图，且 G 存在欧拉通路，$\overline{G}$ 连通且也存在欧拉通路

6 Problem 6

证：首先证明其为连通图：先证明 L(G) 是连通的：对于任意的 e_1, e_2，分别取它们的端点 u_1, u_2，由于 G 是连通图，故一定存在从 u_1 到 u_2 的路径，故 L(G) 中 e_1, e_2 是连通的。

下证其为欧拉图：对于该 r-正则图而言，其每一条边与其链接的两个顶点的剩余边构成条件 2

故在 L（G）中该条边所对应的点一共与 2(r-1) 个顶点相连，度数为一偶数

同理，该图中任意一点的度数均为 2(r-1)，为一个偶数，故该图的所有顶点度均为偶数，故为一个欧拉图

7 Problem 7

证：由题可知，图中点的个数至少为 3 个，且此时为 C_3

不妨再向图中加入一个点 D 与 ABC 中的某点相连，不妨设为 A，为满足友谊图条件，须将 D 与 B,C 中一点相连 (显然此时不满足条件)

或再加入一个点 E, 使 ADE 再形成一个 3 子图，此时我们得到了一个具有两个 3 子图的风车图

对于这个风车图，若我们不在 A 上添加新点，且不以加入 D 的方式加入新点，易证这样无法形成友谊图

故形成的友谊图一定是具有 n 个 3 子图的风车图

显然，风车图中的每一个顶点度均为偶数，故为欧拉图