离散数学（2023）作业 XX

周帛岑

221900309

2023 年 5 月 10 日

1 Problem 1

(1): 解：由运算表可知，一共有 n^2 个位置，每一位都有 n 种选择，故一共有 n^3 种二元运算

(2): 解：由运算表可知，可交换的二元运算关于对角线对称，每一位都有 n 种选择，故一共有 n×($\frac{n^2-n}{2}$+n) = $\frac{n^3+n^2}{2}$ 种二元运算

(3): 解：由运算表可知，幂等的二元运算对角线元素固定，剩下每一位都有 n 种选择，故一共有 n×$(n^2-n) = n^3 - n^2$ 种二元运算

(4): 解：由运算表，不满足幂等的对角线元素安排一共 $n^2 - 1$ 种，不满足可交换的其余元素安排一共有 $\frac{n^3-n^2}{2}$ 种。故一共有 $(n^2 - 1)$×$\frac{n^3-n^2}{2}$ 种

订正：每一问均有错误：

(1): 解：由运算表可知，一共有 n^2 个位置，每一位都有 n 种选择，故一共有 n^{n^2} 种二元运算

(2): 解：由运算表可知，可交换的二元运算关于对角线对称，每一位都有 n 种选择，故一共有 nn$^2 - n_{\frac{}{2}}$+n = $n^{\frac{n^2+n}{2}}$ 种二元运算

(3): 解：由运算表可知，幂等的二元运算对角线元素固定，剩下每一位都有 n 种选择，故一共有 n^{n^2-n} 种二元运算

(4): 解：由容斥原理，一共有 n^{n^2}−n$^{\frac{n^2+n}{2}}$ - n^{n^2-n} + $n^{\frac{n^2-n}{2}}$ 种

2 Problem 2

(1): 解：S = {(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)}

(2): 解：

单位元为 (0,1), 右零元为 (0,0) 和 (1,1)，无左零元，(0,1) 和 (1,0) 的零元分别为其自身

	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,0)	(1,1)	(1,1)
(0,1)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(1,0)	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(1,1)	(0,0)	(1,1)	(0,0)	(1,1)

订正：两问均出错：(1):

$f_0 : f_0(0) = 0, f_0(1) = 0$

$f_1 : f_1(0) = 0, f_1(1) = 1$

$f_2 : f_2(0) = 1, f_2(1) = 0$

$f_3 : f_3(0) = 1, f_3(1) = 1$

(2):

$\circ$	f_0	f_1	f_2	f_3
f_0	f_0	f_0	f_3	f_3
f_1	f_0	f_1	f_2	f_3
f_2	f_0	f_2	f_1	f_3
f_3	f_0	f_3	f_0	f_3

单位元为 f1

f0 和 f3 均为右零元

f1 和 f2 互为逆元

3 Problem 3

(1): 不能，不妨设 a 为最大元，则 a+a 一定不在 A 内

(2): 能，分别取 a，b，c=-1，0，1，则此时对于乘法运算封闭

4 Problem 4

(1)：封闭

(2)：不封闭

(3)：封闭

(4)：不封闭

(5)：封闭

(6)：封闭

(7)：不封闭

(8)：不封闭

(9)：不封闭

订正：(5) 有错

应该为不封闭

5 Problem 5

(1):f_1 为可交换, 可结合的，不为幂等的

f_2 不为可结合，幂等，可交换的,

f_3 为可交换, 可结合，幂等的

f_4 为可交换, 不为可结合，幂等的

(2):f_1 的单位元为 1，零元为 0，每一个元素的逆元为其倒数

f_2 的右单位元为 0，无左单位元，无零元，没有逆元

f_3 无单位元，无零元，无逆元

f_4 的单位元为 0，无零元，每一个元素的逆元为其相反数

(3):

	a	b
a	b	b
b	a	a

订正：2 中有问题

(2):f_1 的单位元为 1，零元为 0，每一个元素的逆元为其倒数

f_2 无单位元，无零元，没有逆元

f_3 无单位元，无零元，无逆元

f_4 无单位元，无零元，没有逆元

6 Problem 6

(1): 能。满足交换律，不满足结合律，无单位元，零元为 1

(2): 不能

(3): 能。满足交换律和结合律，单位元为 1，零元为 10

(4): 能。不满足交换律和结合律，无单位元和零元

订正：(1),(4) 中出现问题：

(1): 能。满足交换律，满足结合律，无单位元，零元为 1

(4): 不能

7 Problem 7

(1)：2，4 均在其中，但 6 不在其中，故不构成子代数

(2): 构成

(3):2，3 均在其中，但 5 不在其中，故不构成子代数

(4):2，15 均在其中，但 17 不在其中，故不构成子代数

(5): 构成

订正：(1) 中出现问题：

(1): 构成

8 Problem 8

(1): 单位元为 a，无零元，子代数为 {a,b}

(2):

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	a	a	a	a
c	a	a	a	a
d	a	a	a	a

订正：第 2 问中出现问题：

其中 x 为 a，b，c，d 中的任意一个

∘	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	a	a	x	x
c	a	x	x	a
d	a	x	a	x

∘	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	x	a	x
c	c	a	x	a
d	d	x	a	x

9 Problem 9

(1): 证：对于 $\oplus$, 有 $a\oplus(b\oplus c) = (a\oplus b)\oplus c$，则 $f(a\oplus(b\oplus c)) = f((a\oplus b)\oplus c)$

由 $f(x\oplus y) = f(x)\odot f(y)$

即 $f(a)\odot f(b\oplus c) = f((a\oplus b))\odot f(c)$

即满足结合律

(2): 证：对于 $\oplus$, 有 $a\oplus e = e\oplus a = a$，则 $f(a\oplus e) = f(e\oplus a) = f(a)$

由 $f(x\oplus y) = f(x)\odot f(y)$

即 $f(a)\odot f(e) = f(e)\odot f(a) = f(a)$

即 f (e) 是 (B, $\odot$) 的单位元.

(3): 证：对于 $\oplus$, 有 $a\oplus b = b\oplus a = e$，则 $f(a\oplus b) = f(b\oplus a) = f(e)$

由 $f(x\oplus y) = f(x)\odot f(y)$

即 $f(a)\odot f(b) = f(b)\odot f(a) = f(e)$

即在 (B, $\odot$) 中 f (a) 是 f (b) 的逆元.