微积分 I (第一层次)期中试卷 (2019.11.16)

一、计算下列各题（每题6分，共48分）

1. 用$\varepsilon-\delta$语言证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-\sin^3 x}=1$.

2. 用$\varepsilon-N$语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}=1$.

3. 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+5}\sin x}+(\arctan x)^{\tan x}$ 的一阶导数和微分。

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$， 其中 $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 讨论函数$f(x)$在$x=0$处的可微性.

6. 设$x_1>0$, $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$. 证明数列$\{x_n\}$收敛，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

7. 设$f(x)=x\ln(1+x)+\cos x+ax^2+bx+c=o(x^2)$, 求$a$, b, c的值. 若以x为基准无穷小，求$f(x)$关于x的无穷小阶数和无穷小主部。

8. 设函数$y(x)$由如下参数方程定义: $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\operatorname{arccot} t+\ln(1+t^2).\end{cases}$ 试求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

二、(10分）确定函数$f(x)$的间断点，并说明是哪种类型的间断点。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}, & x\neq 0, x\neq 1,\\ 0, & x=0,\\ \sin 1, & x=1.\end{cases}$$

三、(10分）设函数$f(x)$在$[a,b]$上可微，且导函数$f'(x)$严格单调递增. 若$f(a)=f(b)$, 证明对一切$x\in(a,b)$, 有$f(x)<f(a)=f(b)$.

四、(10分) 求由方程$\mathrm{e}^{x+y}-xy-\mathrm{e}=0$确定的曲线在点$(0,1)$处的切线和法线方程。

五、(12分) 设$f(x)$在$[a,b]$上可导，且$f'(x)\neq 0$, 又$f(a)=1$, $f(b)=0$, 证明

(1) 存在$\xi_1\in(a,b)$, 使得$f(\xi_1)=\dfrac{4}{5}$;

(2) 存在ξ_2, $\xi_3\in(a,b)$ $(\xi_2\neq\xi_3)$, 使得 $\dfrac{1}{f'(\xi_2)}+\dfrac{4}{f'(\xi_3)}=5(a-b)$.

六、(10分) 设$f(x)=|x|^n g(x)$, 其中n为奇数，$g(x)$有n阶导数. 在什么条件下$f(x)$在$x=0$处有n阶导数？

微积分 I (第一层次)期中试卷(2020.11.21)

一、计算下列各题（每题6分，共48分）

1. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{x}=1$.

2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}\right)=0$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}\sin x, & x>0, \\ x, & x\leqslant 0. \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

4. 设 $0<x_1<1$, 且 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n\,(n\geqslant 1)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限并求该极限.

5. 求由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}=\ln 2$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数.

6. 求曲线 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\sin 2t \\ y=\mathrm{e}^t\cos t \end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线和法线方程.

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

8. 已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}\left(\arctan\frac{2020}{n-1}-\arctan\frac{2020}{n+1}\right)$ 是不为零的常数, 求 α 以及该极限值.

二、（10分）确定以下函数的间断点，并说明是哪种类型的间断点.

$$f(x)=\begin{cases} \sin\pi x, & x\text{ 为有理数}, \\ 0, & x\text{ 为无理数}. \end{cases}$$

三、（12分）当 $x\to 0$ 时，求 $1-\cos(\sin x)+a\ln(1+x^2)$ 的无穷小阶数和无穷小主部.

四、（10分）设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$, $f(2)=1$, 计算 $f'''(2)$.

五、（10分）设 $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$, 求 $f(x)$ 的各阶导函数.

六、（10分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且 $f(0)=0$, $|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x)|$. 证明：在 $[0,1]$ 上，$f(x)\equiv 0$.

微积分 I（第一层次）期中试卷 2021.11.20

一、简答题（每题 6 分，共 48 分）

1. 用定义证明：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=4.$

2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{1-\cos x}.$

3. 以 x 为基准无穷小，当 $x\to 0$ 时，求 $5^x-1-\ln(1+x\ln 5)$ 的无穷小主部.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\arctan x+\mathrm{e}^y+xy=0$ 给出，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$

5. 设 $x_1\in\mathbb{R}$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\sin x_n$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n.$

6. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 确定，求 $t=1$ 对应点处的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}.$

7. 设 $y=(x^2+3x+1)\mathrm{e}^{-x}$，求 $y^{(99)}.$

8. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+a_3^x+a_4^x}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 $a_i>0,\ i=1,2,3,4.$

二、（10分）求函数 $f(x)=\dfrac{|x-1|\tan(x+2)}{x^2+x-2}$ 的间断点，并说明间断点的类型.

三、（10分）设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x>0, \\ 1+x^2, & x\leqslant 0, \end{cases}$

(1) 讨论 $f(x)$ 的连续性; (2) 求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

四、（8分）设 $y=f\left(\dfrac{2x-1}{1-3x}\right)\mathrm{e}^{f(x)}$, $f'(x)=\sin x+x$, 且 $f(0)=1$. 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}.$

五、（8分）当 $x>0$ 时，证明不等式：$0<\mathrm{e}^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}<x(\mathrm{e}^x-1).$

六、（8分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$|f''(x)|\leqslant M$ 且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值.
证明：$|f'(0)|+|f'(1)|\leqslant M.$

七、（8分）证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}=\mathrm{e}.$