离散数学（2023）作业 08

周帛岑
221900309

2023 年 4 月 2 日

1 Problem 1

a): 不妨假定所有偶数构成的集合为 A

递归定义的第一部分：2∈A

递归定义的第二部分，N∈A 当且仅当 (N-2)∈A

b): 不妨假定所有整系数多项式的集合为 B

递归定义的第一部分：∀ k ∈ Z, ∀ i ∈ Z^+, $k \cdot a_i = b_{ik}$∈ B

递归定义的第二部分，c∈B 当且仅当 c 能写作 b_{ik} 的和

c): 不妨假定所有 3 的正整数次幂的集合为 C

递归定义的第一部分：1∈C

递归定义的第二部分，N∈A 当且仅当 N/3∈A

订正：a),b),C) 中均存在问题

a): 不妨假定所有偶数构成的集合为 A

递归定义的第一部分：2∈A

递归定义的第二部分，若 N∈A 则 (N+2)∈A

b):

递归定义的第一部分：设 a_0,a_1,a_2⋯⋯⋯⋯a_n∈$\mathbb{Z}$

a_0+a_1x+a_2x^2⋯⋯⋯⋯a_nx^n∈B

递归定义的第二部分，若 m∈B,n∈B, 则 m+n，m-n，m*n，m/ninB

c): 不妨假定所有 3 的正整数次幂的集合为 C

递归定义的第一部分：3∈C

递归定义的第二部分，若 N∈C 则 3N∈C

2 Problem 2

证：我们已知当 n 取 0 时，结果为 0 可以被 3 整除，

由于 $n^3 - n$ 为一个奇函数，若能证明 n 取正整数时成立，则 n 取负整数时也成立

假定当 n 取 k 时，$n^3 - n$ 成立，

下证 n 取 k+1 时成立

n 取 k+1 时，原式 $= k^3 + 3k^2 + 2k = k^3 - k + 3k^2 + 3k$

又 $k^3 - k$ 可以被 3 整除且 $3k^2 + 3k$ 可以被 3 整除，故 n 取 k+1 时也成立

故 n 取自然数时，命题得证，又 $n^3 - n$ 为奇函数，故则 n 取负整数时也成立

综上，命题得证

3 Problem 3

证：显然，当 n 取 1 时，平面被分为了 2 个区域

不妨假设当 n 取 k 时，平面被分为了 2k 个区域

当 n 取 k+1 时，相当于在 n 条直线的基础上再加上一条直线。这条直线一定落在某两条直线间。使这两条直线间的两个区域变为 4 个，此时区域总数 +2，共有 2k+2 = 2(k+1) 个区域，满足假设。

综上，原命题成立

4 Problem 4

a): 证：

由 m = 1+1+⋯⋯⋯⋯+1(共 m 个 1) , 且 1 为最小的正整数，故数 m 最多可以用 m 个数字来表示，且此时用来表示的数全为 1。

故我们无法找出用 m+1，m+2⋯⋯个数字表示 m 这个数的表示方法，故 P$_{m,m} = P_m$

b): 证：

显然，当 m 或 n 取 1 时，P$_{m,n} = 1$

当 m < n 时，由 a) 可知，$P_{m,n} = P_{m,m}$

当 m = n > 1 时，由 a) 可知，m = 1+1+⋯⋯⋯⋯+1(共 m 个 1)，故用 m 个数表示数字 m 的方法有且仅有全为 1 这一种，故 $P_{m,m} - P_{m.m-1} = 1$，$P_{m,m} = 1 + P_{m.m-1}$

当 m > n > 1 时，不妨讨论我们使用且仅使用 n 个数表示 m 这种情况

m = (m+1-n)+1+⋯⋯+1(n-1) 个 1 -n+1，若我们将其最多分为 n 份，且保证拆分中最大值唯一，除了其中最大的一份外与原 m 的拆分中的 1 相加，我们就构造出了所有用 n 个数表示 m 的方式。而这样的分法相当于用 n 个数表示 m-n 并在最大值（可以不唯一）上加上 1，故一共有 $P_{m-n,n}$ 种，故 $P_{m,n} = P_{m,n-1} + P_{m-n,n}$

c): 证: $P_5 = P_{5,5} = 1+P_{5,4} = 1+P_{5,3}+P_{1,4} = 1+P_{5,2}+P_{2,3}+P_{1,4} = 1+P_{5,1}+P_{3,2}+P_{2,2}+P_{1,4} = 1+1+P_{3,1}+P_{1,2}+P_{2,2}+P_{1,4} = 1+1+P_{3,1}+P_{1,2}+P_{2,1}+1+P_{1,4} = 7$

$P_6 = P_{6\,6} = 1+P_{6,5} = 1+P_{6,4}+P_{1,5} = 1+P_{6,3}+P_{2,4}+1 = 1+P_{6,2}+P_{3,3}+P_{2,4}+P_{1,5} = 1+P_{6,1}+P_{4,2}+P_{3,3}+P_{2,4}+P_{1,5} = 1+1+P_{4,2}+P_{3,3}+P_{2,4}+P_{1,5} = 1+1+P_{4,1}+P_{2,2}+1+P_{3,2}+P_{2,2}+1 = 2+1+1+P_{2,1}+1+P_{3,1}+P_{1,2}+P_{2,1}+1 = 11$

5 Problem 6

a): 证:

设 s 的第 k 位上的数为 s_{k-1} $m(k)$ s k

设 s 一共 n 位

m(1) = S_0

m(s) = min(m(s-1),s_{n-1})

b): 证:

基础步骤: 我们不妨令 P（t）为 m(s ·t) = min(m(s), m(t))，又 P(λ) 为 m(s · λ) = m(s)，又 min(m(s), m(λ)) = min(m(s)) = m(s), 故 P(λ) 成立

递归步骤，不妨假定 P(t) 为真，下面证明 P(t · a) 为真

m(s · t · a) = min(m(s) · m(t · a)) 注意到 m(s) 的递归定义，m(t · a) = min(m(t),m(a))

即 m(s · t · a) = min(m(s)m(t),m(a))

命题得证

订正: a) 中出现问题

a): 证:

基础步骤:

设非空字符串 s 从左往右首位数为 $num(s)$, $s^{'}$ 表示 s 去除首位数之后的字串

strlen(s) 表示 s 的长度

递归步骤:

$$m(s)=\begin{cases} num(s) & strlen(s)=1 \\ min\{num(s),m(s^{'})\}, & strlen(s)\geq 2 \end{cases}$$

6 Problem 7

证:

当 n = 1 时, $\lim_{x\to\infty}\frac{(lnx)^1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

假设 n = k 时有 $\lim_{x\to\infty}\frac{(lnx)^k}{x}=0$

当 n = k+1 时

$\lim_{x\to\infty}\frac{(lnx)^{k+1}}{x}=$ （k+1） $\lim_{x\to\infty}\frac{(lnx)^k}{x}$ （洛必达法则） = 0

故原命题得证

7 Problem 8

证:

不妨令这个命题为 P(n)

基础步骤: 对于 P(2), 显然, 2 是一个质数, 满足条件

递归步骤: 我们不妨假定 P(3)⋯⋯⋯⋯P(k) 均成立。下面证明 P(k+1) 也成立

若 k+1 为一个质数, 此时结论显然, 若 k+1 为一个合数且 k+1 = a · b

a 和 b 显然为 2 到 k 上的某两个数, 由于这些数满足 P(n), 即 a, b 均要么为素数要么 2 个或以上的质数的积. 并且这些质因子按大小排列之后, 写法仅有一种方式

故 P(k+1) 此时一定可以写成 2 个或以上的质数的积. 并且这些质因子按大小排列之后, 写法仅有一种方式

8 Problem 9

1) i):

基础步骤: 当 n 取 1 时, $\sum_{k=1}^{1}k^1=1=\frac{1(2)}{2}$

递归步骤：假设当 n 取 l 时 $\sum_{k=1}^{l} k^1 = 1 = \frac{l(l+1)}{2}$

当 n 取 l+1 时，$\sum_{k=1}^{l+1} k^1 = \sum_{k=1}^{l} k^1 + (l+1)^2 = \frac{l(l+1)}{2} + \frac{2(l+1)}{2} = \frac{l^2+3l+2}{2} = \frac{(l+1)(l+2)}{2}$

故原命题成立

ii)：

基础步骤：当 n 取 1 时，$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1(2)(3)}{6}$

递归步骤：假设当 n 取 l 时 $\sum_{k=1}^{l} k^2 = 1 = \frac{l(l+1)(2n+1)}{6}$

当 n 取 l+1 时，$\sum_{k=1}^{l+1} k^2 = \sum_{k=1}^{l} k^2 + (l+1)^2 = \frac{l(l+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(l+1)^2}{6} = \frac{2l^3+9l^2+13n+6}{6} = \frac{(l+1)(l+2)(2(n+1)+1)}{6}$

故原命题成立

2):

订正：当时 2) 未能想出证明方法

2):

证：我们采用数学归纳法

当 n = 1 时，$\sum_{k=1}^{n} k^1 = 1 = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n^2+n)}{2}$满足题意

不妨假设 n = m 时成立，$\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的最高项此时为关于 n 的 m+1 阶多项式

则当 n = m+1 时，$\sum_{k=1}^{n} k^{m+1} = (n-(n-1))^{m+1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + (n-1)^{m+1} + n^{m+1}$

其中的每一项均可以提出一个 n^{m+1}

又一共存在 n 项，故我们从中提出了 n 个 n^{m+1}，$n \times n^{m+1} = n^{m+2}$ 故最高项为关于 n 的 m+2 次多项式

下面证明不存在 m+3 次或更高次的多项式：

由 n = m 时原式成立，即 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的最高项此时为关于 n 的 m+1 阶多项式

即 n×$\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的最高项此时为关于 n 的 m+2 阶多项式

又 n×$\sum_{k=1}^{n} k^m > \sum_{k=1}^{n} k^{m+1}$

在 n 取足够大时，若 $\sum_{k=1}^{n} k^{m+1}$ 存在 m+3 或更高次项，上式不能成立，故不存在 m+3 次或更高次的多项式，最高次项为 m+2 次

综上，命题得证