离散数学（2023）作业 12

周帛岑
221900309

2023 年 4 月 5 日

1 Problem 1

解：

A×A = {(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)}

(1): 由于 ∅ 为任何集合的子集，所以正确

(2):A 中元素只有 a,b,c 三种，不含 {a,c}，故错误

(3): 由前面计算的 A×A 可知，{a,b} 不是 A×A 中的元素，故错误

(4): 由前面计算的 A×A 可知，(c,c) 是 A×A 中的元素，故正确

2 Problem 2

证：

不妨令 $\mathrm{A} = \{\mathrm{a}_1, a_2, a_3\text{…………}\}$ $B = \{b_1, b_2, b_3\text{…………}\}$

$\mathrm{A} \times \mathrm{A} = \{(\mathrm{a}_1, a_1), (a_1, a_2)\text{……}(a_2, a_1), (a_2, a_2)\text{……}(a_3, a_1), (a_3, a_2)\text{………………}\}$

$\mathrm{B} \times \mathrm{B} = \{(\mathrm{b}_1, b_1), (b_1, b_2)\text{……}(b_2, b_1), (b_2, b_2)\text{……}(b_3, b_1), (b_3, b_2)\text{………………}\}$

又 A × A = B × B

我们注意到这两个集合中都有类似 (n,n)(即序偶前后元素相同) 的元素，故这样的序偶也会存在一一对应的关系，即对于 $\forall a_i$∈A, 总存在唯一的 b_j∈B, 有 $a_i = b_j$

又 A × A = B × B，我们可以得到 A,B 基数相同

故 A = B

3 Problem 3

证:

不妨令 A $= \{\mathrm{a}_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\}$ $B = \{b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

A $\times$ B $= \{(\mathrm{a}_1, b_1), (a_1, b_2) \ldots\ldots (a_2, b_1), (a_2, b_2) \ldots\ldots (a_3, b_1), (a_3, b_2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

B $\times$ A $= \{(\mathrm{b}_1, a_1), (b_1, a_2) \ldots\ldots (b_2, a_1), (b_2, a_2) \ldots\ldots (b_3, a_1), (b_3, a_2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

观察上述两集合我们得知，对于 A $\times$ B，属于 A 的元素在序偶中处于第一位，对于 B $\times$ A，属于 A 的元素在序偶中处于第二位。

故如果 A $\times$ B = B $\times$ A, 即对于 $\forall a_i \in$A, 总存在 $b_j \in$B, 有 $a_i = b_j$，且由集合的定义，每一个 a_i 均不同，|B|≥|A|, 同理，我们也可以得到 |A|≥|B|, 即 |B| = |A|, 又 A 与 B 中的元素一一对应，故 A = B

反之，若 A ≠ B, 存在 a_i，其在 B 中找不到相同元素，此时 A $\times$ B 中的 (a_i, XX) $B\times$ A 的元素对应，或存在 b_j，其在 A 中找不到相同元素, 此时 B $\times$ A 中的 (b_j, XX) $A\times$ B 的元素对应.

综上，命题得证

4 Problem 4

(1): 解：由题可知，$R^{-1} = \{$(a,b)|b 整除 a$\}$

(2): 解：由题可知，$\overline{R} = \{$(a,b)|b mod a $\neq 0\}$

5 Problem 5

(1): 解;

A∪B = {<1, 2>,<1, 3>, <2, 4>, <3, 3>, <4, 2>}

A∩B = {<2, 4>}

(2): 解:

dom A = {1,2,3}

dom B = {1,2,4}

dom (A∪B) = {1,2,3,4}

(3): 解:

ran A = {2,3,4}

ran B = {2,3,4}

ran (A∩B) = {4}

(4): 解:

A-B = {(1,2),(3,3)}

则 fld (A-B) = {1,2,3}

6 Problem 6

解:

由题可知，我们求 R 与 S 的复合

由复合关系的定义，S ∘ R = {(1,1),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,2)}

7 Problem 7

(1): 解: 由题可知，R_1∪R_2 = {(a,b)|a ≡ b(mod 3) 或 a ≡ b(mod 4)}

(2): 解: 由题可知，由于 3 与 4 互质，R_1∩R_2 = {(a,b)|a ≡ b(mod 12)}

(3): 解: 由题可知，由于 3 与 4 互质，R_1-R_2 = {(a,b)|a ≡ b(mod 3) 但 a ≠ b(mod 4)}

(4): 解: 由题可知，由于 3 与 4 互质，R_2-R_1 = {(a,b)|a ≡ b(mod 4) 但 a ≠ b(mod 3)}

(4): 解: 由题可知，由于 3 与 4 互质，R_2⊕R_1 = {(a,b)|a ≡ b(mod 4) 或 a ≡ b(mod 3) 但 a ≠ b(mod 12)}

8 Problem 8

a):

解: 由题可知，取 A ={a,b,c,d}

则 A×A 中一共 A_4^2 = 12 个元素

由关系的定义，一共有 2^{12}+1 = 4097 种关系

b):

排除 (a,a),A×A 中一共 A_4^2-1 = 11 个元素

由关系的定义，一共有 2^{11} = 2048 种关系

9 Problem 9

(1): 证:

不妨假设 $\forall(x,y)\in(R_1\cup R_2)^{-1}$

则 $(y,x)\in R_1\cup R_2$

则 $(y,x)\in R_1$ 或 $(y,x)\in R_2$

即 $(x,y)\in(R_1)^{-1}$ 或 $(x,y)\in(R_2)^{-1}$

即 $(\mathrm{R}_1\cup R_2)^{-1}=(R_1)^{-1}\cup(R_2)^{-1}$

(2): 证:

不妨假设 $\forall(x,y)\in(R_1\cap R_2)^{-1}$

则 $(y,x)\in R_1\cap R_2$

则 $(y,x)\in R_1$ 且 $(y,x)\in R_2$

即 $(x,y)\in(R_1)^{-1}$ 且 $(x,y)\in(R_2)^{-1}$

即 $(\mathrm{R}_1\cup R_2)^{-1}=(R_1)^{-1}\cap(R_2)^{-1}$

10 Problem 10