离散数学（2023）作业 XX

周帛岑
221900309

2023 年 5 月 10 日

1 Problem 1

解：注意到，$8 = 2^3$

则对于 8 阶群，一共有 $Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2$, $Z_2 \oplus Z_4$, Z_8 三个 abel 群

对于非 abel 群，由其为 8 阶群，根据拉格朗日定理，我们得知一定存在一个四阶元素，我们不妨取其为 a

再取一个 b∉<a>, 根据拉格朗日定理，每个左陪集与相应的子群等势

我们有 G = <a>∪<a>b

则 b^2 = e 或 $b^2 = a^2$

又 b^{-1}<a>b = a 或 a^3, 且显然 b^{-1}<a>b ≠ a 否则 a 与 b 可交换，不满足条件

此时 b^{-1}<a>b = a^3 且 b^2 = e 或 $b^2 = a^2$

于是我们构造这样两个群：

{a,b|$a^4 = b^2 = e$} {a,b|$a^4 = e$ 且 $a^2 = b^2$}

故我们找到了这样的 5 个群

2 Problem 2

解：我们只需找到对应对应元素在对应剩余加群的阶数的 lcm 即为所求阶数

(1): 阶数分别为：4，3，LCM(4,3)=12

(2): 阶数分别为：5，3，6，LCM(5,3,6)=30

(3): 阶数分别为：5，5，5，LCM(5,5,5)=5

(3): 阶数分别为：5，3，10，LCM(5,3,10)=30

3 Problem 3

证：结论错误：

我们不妨假设 G = $\mathbb{Z}_2$, H = $\mathbb{Z}_4$, K = $\mathbb{Z}_3$.

即 G × K ≅ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

H × K ≅ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$

显然这两个群与 $\mathbb{Z}_6$ 同构

但是显然此时 G 与 H 不同构 (H 中有 4 阶元素而 G 中并没有)

故这一假设不成立

4 Problem 4

(a): 解:由题可知:A_4 中一共有 (1),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243) 这些元素 (S_4 中的偶置换)

对于任意 s∈S_4 显然有 $s^{-1}A_4$s = A_4(对 A_4 进行了偶置换，结果仍为偶置换)

故 A_4 为 S_4 的正规子群

S_4/A_4	A_4	$(1\ 2)A_4$
A_4	A_4	$(1\ 2)A_4$
(1 2)	$(1\ 2)A_4$	A_4

(c): 解：不是，由 D_4 中元素个数一共 4 个，无法由某一个或几个奇变换类或偶变换类表示，所以不为 S_4 的正规子群

5 Problem 5

证：由题可知 o(H) = p 且 p 为素数且 H 为 G 的正规子群

即对任意 g∈G,g^{-1}Hg = H

由 o(G) = p^2，由拉格朗日定理，G 中只有 1，p，p^2 阶元素

且 H 中没有 p^2 阶元素，当 g 取 p^2 阶元素，又 g^{-1}Hg = H,

则必有 Hg = gH，否则与条件矛盾

由是我们可以得知 G 为一个 abel 群

6 Problem 6

证：由题可知 G 只有 H 一个 k 阶子群

定义 H(g) = g^{-1}Hg

取 h1h2 ∈H ，取 g^{-1}h1g = g^{-1}h2g ∈ H，

由于 $h1h2^{-1}$∈H, 我们有 g^{-1}h1g $(g^{-1}h2g)^{-1}$ = $g^{-1}h1h2^{-1}$ ∈ H(g)

由于消去律我们有 h1 = h2

故 |H(g)| = k , 又因为 H 是 G 中唯一的 k 阶子群, 所以 H(g)=H

即 ∀g∈G g^{-1}Hg ∈ H 所以 H 是 G 的正规子群

7 Problem 7

8 Problem 8

(b):$\phi(a\times$b)=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a\times b & 1 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$=$\phi(a)\times\phi(b)$

故满足同态，核为 {1}

(d):$\phi\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right)$ = (a$_1a_2+b_1c2)(c_1b_2+d_1d_2)$ - $(a_1b_2+b_1d2)(c_1a_2+d_1b-2)$

$= (a_1d_1-b_1c_1)(a_2d_2-b_2c_2) = \phi\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right)\phi\left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right)$

故满足同态，核为核为 {$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$|ad-bc = 1}

(e):$\phi\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = b_1+b_2 = \phi\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right)+\phi\left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right)$

故满足同态，核为核为 {$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$}