

离散数学 (2023) 作业 04

周帛岑

221900309

2023 年 3 月 6 日

1 Problem 1

证:

- a) 中, 左侧集合有三个元素, 右侧集合有四个元素, 故不相等
- b) 中, 左侧集合中存在相同元素, 消去后与右侧想通过, 故相等。
- c) 中, 左侧集合有二个元素, 右侧集合有一个元素, 故不相等
- d) 中, 左侧集合中有四个元素, 右侧集合中有三个元素, 故不相等。

2 Problem 2

解:

- a) 为 \emptyset 的幂集
- b) 为 a 的幂集
- c) 中元素只有三个, 而幂集元素个数, 为 2^n , n 为原集合元素个数, 故不为某个集合的幂集
- d) 为 a, b 的幂集

3 Problem 3

解:

- a): $\{x|x \neq 0\}$
- b): \emptyset
- a): $\{x|x \neq 0 \text{ 且 } x \neq 1\}$

4 Problem 4

不妨令 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_m\}$ 则 A 中所有元素均在 B 中, 即有 $A \subseteq B$ (1) $\forall a_i (i = 1, 2, \dots, n), a_i$ 均在 B 中, 故两者的并集为 B

(2) 证: $\forall a_i (i = 1, 2, \dots, n), a_i$ 均在 B 中, 且 $\forall a_j (j = n+1, \dots, m), a_j$ 均不在 A 中, 故两者的交集为 A

5 Problem 5

解:

a): 不能, 令 C 为一不为空集的集合, 取 A, B 为 C 的两不同子集, 则 $A \cup C = C, B \cup C = C$, 两者相等, 但 $A \neq B$

b) 不能, 令 C 为 \emptyset , 任取 A, B , 则 $A \cup C = \emptyset, B \cup C = \emptyset$, 两者相等, 但 $A \neq B$

c) 可以:

$$\begin{aligned} A &= A \cap (A \cup C) \\ &= A \cap (B \cup C) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ &= (A \cap B) \cup (B \cap C) \\ &= B \cap (A \cup C) \\ &= B \cap (B \cup C) \\ &= B \end{aligned}$$

6 Problem 6

证:

对于 $A \subseteq B$

根据子集的定义, 有 $A = A \cap B$, 取补集, 并应用德·摩根定律得, $\overline{A} = \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 根据并集的定义, 我们有 $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

对于 $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, 我们同理可证得有 $A \subseteq B$, 即原命题得证

7 Problem 7

证:

a):

由对称差的定义, $A \oplus A$ 为属于 A 或属于 A 但是不属于 $A \cap A$ 的元素, 又 $A \cap A = A$, 故 $A \oplus A$ 中的元素既属于 A 但又不属于 A , 只有 \emptyset 满足条件

b):

由对称差的定义, $A \oplus U$ 为属于 A 或属于 U 但是不属于 $A \cap U$ 的元素. 又 $A \cap U = A$, 故 $A \oplus U$ 为全集 U 中去除 A 以外的部分, 根据补集的定义, 即 \bar{A}

8 Problem 8

a):

由并集的定义, $A_i \cup A_{i+1} = A_{i+1}$, 则原式等于 $A_n = \{\dots, -2, -1, 0, 1, \dots n\}$

b):

由交集的定义, $A_i \cap A_{i+1} = A_i$, 则原式等于 $A_1 = \{\dots, -2, -1, 0, 1\}$

9 Problem 9

证:

根据有限集的定义, 我们可以数出 A, B 中的元素个数, 不妨设 A 中有 m 个元素, B 中有 n 个元素, A 与 B 中有 a 个相同元素, 则 $A \cup B$ 中有 $m+n-a$ 个元素, 根据有限集的定义, 我们可以数出 $A \cup B$ 中的元素个数, 并且这个结果为一个非负整数, 故 $A \cup B$ 为有限集

10 Problem 10

解:

a): $\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$

b): $\{\emptyset\}$

c): $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

d): $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$