离散数学（2023）作业 14

周帛岑
221900309

2023 年 4 月 18 日

1 Problem 1

解：

(a): 不是，对于 = 关系，我们易证其不满足反对称性，即不满足偏序的三个条件之一，故不是偏序集

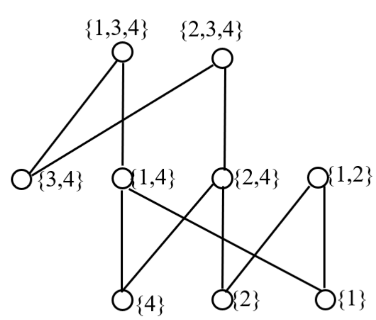
(b)：不是，对于 $\neq$ 关系，我们易证其不满足自反性，即不满足偏序的三个条件之一，故不是偏序集

(c): 是，$\forall a \in \mathbb{Z}, a \geq a$, 即满足自反性，且若 $a \geq b$, 若 $b \geq a$ iff $a = b$，故满足反对称性。且由大于等于号的性质，其具有传递性。故满足偏序的三个条件，为偏序集

(d)：不是，对于 $\nmid$ 关系，我们易证其不满足自反性，即不满足偏序的三个条件之一，故不是偏序集

2 Problem 2

解：我们先画出这样的哈塞图：



a): 由图，极大元素为 {1,3,4},{2,3,4},{1,2}

b): 由图，极小元素为 {1},{2},{4},{3,4}

c): 由图，不存在

d): 由图，不存在

e): 由图，为 {{2,4},{2,3,4}}

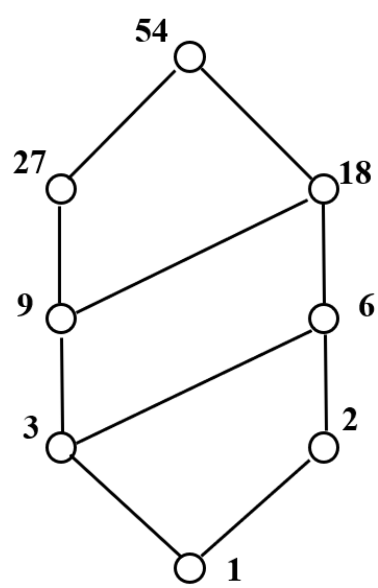
f): 由图，为 {2,4}

g): 由图，为 {3,4}

h): 由图，为 {3,4}

3 Problem 3

(1):



(2): 由图，最长链长度为 5

分别为：(1,2,6,18,54),(1,3,6,18,54),(1,3,9,18,54),(1,3,9,27,54)

(3): 解：

分别为：(2,3),(2,9),(2,27),(6,9),(6,27)

4 Problem 4

解：不妨令 A = $\{a_1,a_2......,a_n\}$

则 B 的极大元为：$\{a_2,a_3......,a_n\}$,$\{a_1,a_3......,a_n\}$,......$\{a_1,a_2......,a_{n-1}\}$

则 B 的极小元为：$\{a_1\}$,$\{a_2\}$......,$\{a_n\}$

且 B 没有最小元

5 Problem 5

证：我们采用反证法，假设既不存在大小为 m + 1 的链，也不存在大小为 n + 1 的反链

不妨假设最长的链大小为 m，最长的反链大小为 n

由哈塞图，我们可以得知，该偏序集的宽度为 n，我们不妨寻找一条长度为 n 的链，其上每一个元素均可以组成反链，我们取该元素能组成的反链中的最长反链

不妨定义以这样的方式取出的该元素的最长反链为该元素所在的层

显然，所有这条链上的每一个元素构成的层的集合包含了该偏序集的所有元素

又一共有 m 层，每一层的宽度不大于 n，

故此时元素个数一共不多于 mn 个，与一共有 mn+1 个元素矛盾

故假设不成立，原命题成立

6 Problem 6

(a): 是

(b): 不是，对于 {a,b}, 其最大下界为 a, 但是不存在最小上界，故不是

(c): 是

(d): 不是，对于 {b,c}, 其最大下界为 a, 但是不存在最小上界，故不是

(e): 不是，对于 {d,e}, 其最小上界为 a, 但是不存在最大下界，故不是】

(f): 是

7 Problem 7

对于 (a): 只有 a 和 d 互为补元

对于 (c):a 和 f 互为补元，b 的补元为 c 和 d，c 的补元为 b 和 e，d 的补元为 b 和 e，e 的补元为 c 和 d

对于 (f):a 和 f 互为补元，b 和 e 互为补元，c 没有补元，d 也没有补元

8 Problem 8

对于 (a): 不是有补格，因为并不是所有元素都存在补元，由于其为一条链，所以为分配格，综上，不满足既为有补格且为分配格，不为布尔格

对于 (c): 是有补格，因为所有元素都存在补元，由于某些元素的补元不唯一，所以不为分配格，综上，不满足既为有补格且为分配格，不为布尔格

对于 (f): 不是有补格，因为并不是所有元素都存在补元，由于存在补元的元素的补元是唯一的，所以是分配格，综上，不满足既为有补格且为分配格，不为布尔格

9 Problem 9

(1): 证：由定义，$a \wedge 0 \preceq 0$

又 $0 \preceq 0$ 且 $0 \preceq a$

所以 $0 \preceq a \wedge 0$

由有界格满足偏序关系，存在反对称性，故 $a \wedge 0 = 0$

(2): 证：由定义，$a \preceq a \vee 0$

又 $a \preceq a$ 且 $0 \preceq a$

所以 $a \vee 0 \preceq a$

由有界格满足偏序关系，存在反对称性，故 $a \vee 0 = a$

(3): 证：由定义，$a \wedge 1 \preceq 1$

又 $a \preceq 1$ 且 $a \preceq a$

所以 $a \preceq a \wedge 1$

由有界格满足偏序关系，存在反对称性，故 $a \wedge 1 = a$

(4): 证：由定义，$1 \preceq a \vee 1$

又 $1 \preceq 1$ 且 $a \preceq 1$

所以 $a \vee 1 \preceq 1$

由有界格满足偏序关系，存在反对称性，故 $a \vee 1 = 1$

10 Problem 10

证：我们有 $a \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

求证:$a \vee (b \wedge c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$

$= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c)$

$= a \vee ((a \vee b) \wedge c)$

$= a \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$

$= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c)$

$= a \vee (b \wedge c)$