南京大学 NANJING UNIVERSITY

奋进行动 团结奋斗 争先进位 坐言起行 应势而动

数 据 管 理 基 础

第6章 关系数据理论

（Armstrong公理系统）

智能软件与工程学院

Armstrong公理系统

- 从已知的函数依赖中可以推导出另外一些函数依赖，这就需要定义一组推理规则。**Armstrong**公理系统就是由一组函数依赖推理规则构成的公理系统。
- **Armstrong**公理系统是模式分解算法的基础，其作用是：
  - 函数依赖的推导：从一组函数依赖求得蕴涵的函数依赖
  - 关系模式的码的计算

- 函数依赖的推理规则最早出现在**1974**年W.W.Armstrong 的论文里，这些规则常被称作‘**Armstrong** 公理’。

- 最基本的推理规则只有**3**条，由这**3**条基本规则可以定义出若干条扩充规则。

6.3 数据依赖的公理系统

- 定义6.11 逻辑蕴涵
- 定义6.12 函数依赖集的闭包
- Armstrong公理系统
  - 基本规则：
    - 自反律，增广律，传递律
    - 定理6.1 基本规则的正确性
  - 扩充规则
    - 合并规则，分解规则，伪传递规则
    - 引理6.1
  - Armstrong公理系统的有效性与完备性
- 定义6.13 属性集的闭包
  - 引理6.2
  - 算法6.1 属性集闭包的计算
  - 定理6.2 Armstrong公理系统是有效的、完备的。
- 定义6.14 函数依赖集的覆盖与等价
  - 引理6.3
- 定义6.15 极小函数依赖集、最小依赖集、最小覆盖
  - 定理6.3
  - 补充算法：极小函数依赖集的计算

6.3 数据依赖的公理系统（1）

- 定义6.11 逻辑蕴涵

- 定义6.12 函数依赖集的闭包

- Armstrong公理系统
  - 基本规则：自反律，增广律，传递律
    - 定理6.1 基本规则的正确性

  - 扩充规则：合并规则，分解规则，伪传递规则
    - 引理6.1

  - Armstrong公理系统的有效性与完备性

函数依赖的逻辑蕴涵

- **[定义6.11] 逻辑蕴涵**

  对于满足一组函数依赖F的关系模式$R(U,F)$，其任何一个关系r，若函数依赖$X \to Y$都成立（即r中任意两元组r_1、r_2，若$r_1[X]=r_2[X]$，则$r_1[Y]=r_2[Y]$），则称“F逻辑蕴涵$X \to Y$”。

- 在关系模式中，“F逻辑蕴涵$X \to Y$”也可以被描述为：“从F出发根据Armstrong公理推导得到$X \to Y$”
- “F 逻辑蕴涵 $X \to Y$”可记为：$\boldsymbol{F \vDash X \to Y}$

Armstrong公理系统 - 基本规则

- 设有关系模式$R(U,F)$，U是关系模式R的属性集总体，F是U上的一组函数依赖。
- 对$R(U,F)$来说有以下的推理规则：
  - **A1 自反律 (reflexivity rule)**：若$Y \subseteq X \subseteq U$，则$X \to Y$为$F$所蕴涵。
  - **A2 增广律 (augmentation rule)**：若$X \to Y$为F所蕴涵，且$Z \subseteq U$，则$XZ \to YZ$为F所蕴涵。
  - **A3 传递律 (transitivity rule)**：若$X \to Y$及$Y \to Z$为F所蕴涵，则$X \to Z$为F所蕴涵。
- 注意：使用自反律推导得到的函数依赖均是平凡函数依赖，自反律的使用并不依赖于F。

- **定理6.1 Armstrong推理规则是正确的。**

  - 自反律、增广律、传递律是Armstrong公理中的三条基本规则
  - 只能根据函数依赖的定义来证明其正确性

A1 自反律：若 $Y \subseteq X \subseteq U$，则 $X \rightarrow Y$ 为 F 所蕴涵。

证明：

对关系模式$R(U,F)$的任一关系r中的任意两个元组 t_1, t_2 $(t_1 \in r, t_2 \in r)$

如果它们在属性集X上的值相等，即：$t_1[X] = t_2[X]$

由于Y是X的子集，即 $X \supseteq Y$

因此必有 $t_1[Y] = t_2[Y]$

证毕.

A2 增广律：若$X \to Y$为F所蕴涵，且$Z \subseteq U$，则$XZ \to YZ$为F所蕴涵。

证明：

设 $X \to Y$ 为F所蕴涵，且 $Z \subseteq U$.

对关系模式$R(U, F)$的任一关系r中的任意两个元组 t_1, t_2 $(t_1 \in r, t_2 \in r)$

如果 $t_1[XZ] = t_2[XZ]$, 则有：

$t_1[X] = t_2[X]$ ....(1)

$t_1[Z] = t_2[Z]$ ....(2)

由(1)及 $X \to Y$ 可得： $t_1[Y] = t_2[Y]$ ....(3)

由(2)及(3)可得：$t_1[YZ] = t_2[YZ]$

证毕.

A3 传递律：若$X \to Y$，$Y \to Z$为F所蕴涵，则$X \to Z$为F所蕴涵。

证明：

设 $X \to Y$ 及 $Y \to Z$ 为 F 所蕴涵

对关系模式$R(U,F)$的任一关系r中的任意两个元组 t_1, t_2 $(t_1 \in r, t_2 \in r)$

如果 $t_1[X] = t_2[X]$ ……………………………………(1)

由(1)及 $X \to Y$ 得：$t_1[Y] = t_2[Y]$ ……………………… (2)

由(2)及 $Y \to Z$ 得：$t_1[Z] = t_2[Z]$

证毕.

Armstrong公理系统 - 扩充规则

- 根据A1自反律、A2增广律、A3传递律这三条推理规则可以得到下面三条推理规则（扩充规则）：
  - 合并规则 (union rule)：
    若 $X \to Y$ 及 $X \to Z$，则 $X \to YZ$.
  - 分解规则 (decomposition rule)：
    若 $X \to Y$ 及 $Z \subseteq Y$，则 $X \to Z$.
  - 伪传递规则 (pseudo transitivity rule)：
    若 $X \to Y$ 及 $WY \to Z$，则 $XW \to Z$.

- 接下来，我们使用前面的三条基本规则来证明扩充规则。
- 也可以根据函数依赖的定义来证明扩充规则（证明规则推导结果函数依赖的成立）

合并规则 (union rule)：若 $X \to Y$，$X \to Z$，则 $X \to YZ$.

证明：

- **使用增广规则A2可作如下推导：**
  - **由 $X \to Y$ 可得：$XX \to XY$ 即 $X \to XY$ ………………(1)**
  - **由 $X \to Z$ 可得：$XY \to YZ$ ………………………………(2)**
- **由(1), (2)根据传递规则A3可得：$X \to YZ$**

证毕.

分解规则 (decomposition rule)：若 $X \rightarrow Y$， $Z \subseteq Y$，则 $X \rightarrow Z$.

证明：

- **由 $Z \subseteq Y$ 及自反规则A1可得：** $Y \rightarrow Z$
- **由 $X \rightarrow Y$, $Y \rightarrow Z$, 根据传递规则A3得：** $X \rightarrow Z$

证毕.

伪传递规则 (pseudo transitivity rule)：若 $X \to Y$， $WY \to Z$，则 $XW \to Z$.

证明：

- **使用增广规则 A2，由 $X \to Y$ 可得：**

  $WX \to WY$ **..................................(1)**

- **使用传递规则 A3，由 (1) 及 $WY \to Z$ 可得：**

  $XW \to Z$

证毕.

引理 6.1

- **引理6.1**

  $X \rightarrow A_1 A_2 \ldots A_k$ 成立的充分必要条件是 $X \rightarrow A_i$ 成立$(i = 1,2,\ldots,k)$。

  - 可以根据**Armstrong**公理中的合并规则和分解规则来证明引理**6.1**（证明过程略）

- **[课后思考]**

  不使用**Armstrong**公理中的基本推导规则，根据函数依赖的定义来给出合并规则、分解规则、伪传递规则的证明。

函数依赖集的闭包

- **[定义6.12] 函数依赖集F的闭包（F^+）**

  在关系模式$R(U, F)$中，为F所逻辑蕴涵的函数依赖的全体叫作F的闭包，记为F^+。

- 函数依赖集F闭包的定义，可表示为：

$$F^+ = \{ X \to Y \mid F \vDash X \to Y \}$$

Armstrong公理系统的 有效性 与 完备性

- 人们把自反律、增广律和传递律合称为**Armstrong**公理系统。
- **Armstrong**公理系统是有效的、完备的。
  - 有效性：由F出发根据**Armstrong**公理推导出来的每一个函数依赖一定在闭包F^+中；
  - 完备性：闭包F^+中的每一个函数依赖，必定可以由F出发根据**Armstrong**公理推导出来。
- 根据函数依赖集闭包的定义，可以说明**Armstrong**公理的有效性；但要证明**Armstrong**公理的'完备性'，首先需要解决：如何判定一个函数依赖$X \rightarrow Y$是否属于"由F根据**Armstrong**公理推导出来的函数依赖的集合"，即判断 $X \rightarrow Y \in \boldsymbol{F}^+$ 是否成立？
  - 方法一：首先计算F^+，然后判断 $X \rightarrow Y \in \boldsymbol{F}^+$ 是否成立？
  - 方法二：引入属性集闭包$\boldsymbol{X_F}^+$的概念并计算之，然后判断$\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{X_F}^+$是否成立？

6.3 数据依赖的公理系统（2）

- 函数依赖集闭包F^+的计算是一个NP问题！
  - 函数依赖集闭包的计算示例

- 定义6.13 属性集的闭包
  - 引理6.2
  - 算法6.1 属性集闭包的计算
  - 定理6.2 Armstrong公理系统是有效的、完备的

函数依赖集闭包F^+的计算示例（1）

❑ **[例] 计算函数依赖集 $F=\{A\to B, B\to C\}$ 的闭包 F^+.**

解： F中的所有函数依赖都是其闭包中的元素，即：$A\to B\in F^+$， $B\to C\in F^+$

➢ 根据自反律，下述函数依赖也是其闭包F^+中的元素：

A→A	B→B	C→C
AB→A	AB→B	AB→AB
AC→A	AC→C	AC→AC
BC→B	BC→C	BC→BC
ABC→A	ABC→B	ABC→C
ABC→AB	ABC→AC	ABC→BC
ABC→ABC		

（注：利用‘自反律’可推导得到F^+中的所有‘平凡函数依赖’）

函数依赖集闭包F^+的计算示例（2）

$F^+ = \{ A \to B, B \to C, A \to A, B \to B, C \to C, AB \to A, \ldots\ldots \}$

根据已经找到的闭包成员，使用推理规则可以发现新的闭包成员：

- 由A→B, B→C及传递律可得：A→C
- 由A→B, A→C及合并规则可得：A→BC

- 由A→B及增广律可得：A→AB， AC→BC， AC→ABC
- 由B→C及增广律可得：AB→AC， B→BC， AB→ABC
- 由A→C及增广律可得：A→AC， AB→BC
- 由A→BC及增广律可得：A→ABC

- 由AB→B, B→C及传递律可得：AB→C
- 由AC→A, A→B及传递律可得：AC→B
- 由AC→B及增广律可得：AC→AB

函数依赖集闭包F^+的计算示例（3）

- 综合以上结果，F = { A→B, B→C }的闭包计算结果如下：

F^+ = { A→B, B→C,

A→A, B→B, C→C,

AB→A, AB→B, AB→AB,

AC→A, AC→C, AC→AC,

BC→B, BC→C, BC→BC,

ABC→A, ABC→B, ABC→C,

ABC→AB, ABC→AC, ABC→BC,

ABC→ABC,

A→C, A→BC,

A→AB, AC→BC, AC→ABC,

AB→AC, B→BC, AB→ABC,

A→AC, AB→BC,

A→ABC,

AB→C, AC→B, AC→AB }

函数依赖集闭包F^+的计算示例（4）

- 按照决定因素调整排列次序后结果如下：

F^+ = {

A→A, A→B, A→C, A→AB, A→AC, A→BC, A→ABC,

B→B, B→C, B→BC,

C→C,

AB→A, AB→B, AB→C, AB→AB, AB→AC, AB→BC, AB→ABC,

AC→A, AC→B, AC→C, AC→AB, AC→AC, AC→BC, AC→ABC,

BC→B, BC→C, BC→BC,

ABC→A, ABC→B, ABC→C, ABC→AB, ABC→AC, ABC→BC,
ABC→ABC

}

属性集闭包（1）

- **定义6.13** 设F为属性集U上的一组函数依赖，$X \subseteq U$，

  $$X_F^+ = \{ A \mid X \to A \text{ 能由}F\text{根据}Armstrong\text{公理导出}, A \in U \}$$

  X_F^+ 称为**属性集X关于函数依赖集F的闭包**。

  - "$X \to A$ 能由F根据$Armstrong$公理导出" 即 "F逻辑蕴涵$X \to A$"，可表示为：$F \vDash X \to A$

  - 属性集X关于函数依赖集F的闭包定义可简化表示如下：

    $$X_F^+ = \{ A \mid A \in U \text{ 且 } F \vDash X \to A \}$$

- 这样，判定一个函数依赖 $X \to Y$ 是否属于"由F根据**Armstrong**公理推导出来的函数依赖的集合"，就可以被转化成判断$Y \subseteq X_F^+$是否成立。
  - 如果 $Y \subseteq X_F^+$ 则 $F \vDash X \to Y$ 成立
  - 如果 $Y \not\subseteq X_F^+$ 则 $F \vDash X \to Y$ 不成立

属性集闭包（2）

- **[引理6.2]** 设F为属性集U上的一组函数依赖，X、$Y \subseteq U$，$X \to Y$能由F根据Armstrong公理导出的充分必要条件是$Y \subseteq X_F^+$.

- 引理6.2的用途：
  - 判定$X \to Y$是否能由F根据Armstrong公理导出的问题
  - 就转化为：求出X_F^+，然后判定Y是否为X_F^+的子集的问题
    - 即：判断$Y \subseteq X_F^+$是否成立
  - 描述性证明如下：
    - 假设Y是由$A_1, A_2, ..., A_k$等k个属性组成的属性集
    - 由引理6.1可知："$X \to A_1A_2...A_k$成立"的充分必要条件是"$X \to A_i$成立$(i = 1,2, ..., k)$"
    - "$X \to A_i$ 成立$(i = 1,2, ..., k)$" 的充分必要条件是 "$A_i \in X_F^+$成立 $(i = 1,2, ..., k)$"，即：$A_1A_2...A_k \subseteq X_F^+$

算法6.1：求属性集 $X\ (X \subseteq U)$ 关于U上的函数依赖集F的闭包X_F^+

- 输入：函数依赖集F，属性集X
- 输出：属性集闭包 X_F^+

① 令$X^{(0)} = X$，$i = 0$

② 求Y，这里$Y = \{ A \mid (\exists V)(\exists W)(V \rightarrow W \in F \wedge V \subseteq X^{(i)} \wedge A \in W)\}$.

③ $X^{(i+1)} = Y \cup X^{(i)}$.

④ 判断 $X^{(i+1)} = X^{(i)}$ 是否成立?

⑤ 若 $X^{(i+1)} = X^{(i)}$ 成立 或 $X^{(i)} = U$ 成立，则$X^{(i)}$就是X_F^+，算法终止。

⑥ 若否，则 $i = i + 1$，返回第②步。

属性集闭包的计算示例

- **[例6.11]** 已知关系模式$R(U,F)$，其中：$U=\{A,B,C,D,E\}$，
  $F=\{AB\rightarrow C, B\rightarrow D, C\rightarrow E, EC\rightarrow B, AC\rightarrow B\}$。求$(AB)_F^+$.

解：

- $X^{(0)}=AB$
- 计算$X^{(1)}$：
  - 逐一扫描集合F中的各个函数依赖，寻找左部为$X^{(0)}$的子集的函数依赖；
  - 得到两个函数依赖：$AB\rightarrow C$，$B\rightarrow D$. 于是：$Y=\{C,D\}$
  - 于是：$X^{(1)}=Y\cup X^{(0)}=\{A,B,C,D\}$
- 因为$X^{(1)}\neq X^{(0)}$，所以计算$X^{(2)}$：
  - 逐一扫描集合F中的各个函数依赖，寻找左部为$X^{(1)}$的子集的函数依赖；
  - 得到两个函数依赖：$C\rightarrow E$，$AC\rightarrow B$. 于是：$Y=\{B,E\}$
  - 于是：$X^{(2)}=Y\cup X^{(1)}=\{A,B,C,D,E\}$
- 因为$X^{(2)}$已等于全部属性集合U，所以 $(AB)_F^+=X^{(2)}=\{A,B,C,D,E\}$.

Armstrong公理系统的有效性与完备性

- 有效性与完备性的含义
  - **有效性**：由F出发根据**Armstrong**公理推导出来的每一个函数依赖一定在F^+中；
  - **完备性**：F^+中的每一个函数依赖，必定可以由F出发根据**Armstrong**公理推导出来。

- [定理6.2] Armstrong公理系统是有效的、完备的。

- **Armstrong**公理的完备性及有效性说明:
  - "导出"与"蕴涵"是两个完全等价的概念
  - F^+：为F所逻辑蕴涵的函数依赖的全体（定义6.12）
  - 可以等价地说成：由F出发借助**Armstrong**公理导出的函数依赖的集合

- 定义6.14 函数依赖集的覆盖 & 等价
  - 引理6.3
- 定义6.15 极小函数依赖集、最小依赖集、最小覆盖
  - 定理6.3

函数依赖集的覆盖与等价

- **函数依赖集的覆盖**
  - 设一个关系模式R，F和G是R上的两个函数依赖集，如果F逻辑蕴涵G中的所有函数依赖，则称：F覆盖G（或称 F是G的覆盖）
  - 如果F覆盖G，则 $G \subseteq F^+$

- [定义6.14] **函数依赖集的等价**

  如果两个函数依赖集的闭包相等（即 $F^+ = G^+$），则称F与G等价。

- [引理6.3] $F^+ = G^+$ 的充分必要条件是 $F \subseteq G^+$ 和 $G \subseteq F^+$.
  - 引理6.3表明，两个函数依赖集相互等价的充分必要条件是它们相互覆盖。即：

    "F与G等价" 的充分必要条件是 "F覆盖G 且 G覆盖F"

极小函数依赖集（最小依赖集、最小覆盖）

- [定义6.15] 如果函数依赖集F满足下列条件，则称F为一个**极小函数依赖集**，亦称为**最小依赖集**或**最小覆盖**。
  ① F中任一函数依赖的右部仅含有一个属性；
  ② F中不存在这样的函数依赖$X \rightarrow A$，使得F与$F-\{X \rightarrow A\}$等价；
  ③ F中不存在这样的函数依赖$X \rightarrow A$，X有真子集Z使得
  $F-\{X \rightarrow A\} \cup \{Z \rightarrow A\}$与$F$等价。

- 其中：
  - 条件①并不是必须的，只是为了方便对条件②和③的检查；
  - 条件②表明，在极小函数依赖集F中，不允许存在冗余的函数依赖（可以由F中的其他函数依赖导出）；
  - 条件③表明，在极小函数依赖集F中，不允许存在部分函数依赖。

极小函数依赖集的计算

- [例6.12] 考察6.1节中的关系模式S(U,F)，其中：

  $$U = \{Sno, Sdept, Mname, Cno, Grade\},$$

  F 和 $\boldsymbol{F}^{'}$ 是该关系上的两个函数依赖集

  - $F = \{\ Sno \to Sdept, Sdept \to Mname, (Sno, Cno) \to Grade\ \}$
  - $\boldsymbol{F}^{'} = \{ Sno \to Sdept, Sno \to Mname, Sdept \to Mname, (Sno, Cno) \to Grade, (Sno, Sdept) \to Sdept\ \}$

- F 是最小覆盖，$\boldsymbol{F}^{'}$ 不是最小覆盖，因为：
  - $\boldsymbol{F}^{'} - \{Sno \to Mname\}$ 与 $\boldsymbol{F}^{'}$ 等价
  - $\boldsymbol{F}^{'} - \{(Sno, Sdept) \to Sdept\}$ 也与 $\boldsymbol{F}^{'}$ 等价

定理6.3

- **[定理6.3] 每一个函数依赖集F均等价于一个极小函数依赖集F_m。此F_m称为F的最小依赖集。**
- 证：构造性证明，分三步对F进行“极小化处理”，找出F的一个最小依赖集。

① 逐一检查F中各函数依赖FD_i：$X \to Y$，若$Y = A_1A_2...A_k$，$k \geq 2$，则用$\{X \to A_j \mid j = 1,2,...,k\}$来取代$X \to Y$。
   - 引理6.1保证了F变换前后的等价性

② 逐一检查F中各函数依赖FD_i：$X \to A$，令$G = F - \{X \to A\}$，若$A \in \boldsymbol{X}_G^+$，则从F中去掉此函数依赖。
   - 由于F与G 等价的充要条件是$A \in \boldsymbol{X}_G^+$，因此F变换前后是等价的。

③ 逐一取出F中各函数依赖FD_i：$X \to A$，设$X = B_1B_2...B_m$，$m \geq 2$，逐一考查$B_i\ (i = 1,2,...,m)$，若$A \in (X - B_i)_F^+$，则以$(X - B_i) \to \boldsymbol{A}$取代$X \to \boldsymbol{A}$。
   - 由于F与$F - \{X \to A\} \cup \{Z \to A\}$等价的充要条件是$A \in \boldsymbol{Z}_F^+$，其中$Z = (X - B_i)$。

- 最后剩下的F就一定是极小依赖集。因为对F的每一次“改造”都保证了改造前后的两个函数依赖集等价，因此剩下的F与原来的F等价。（证毕）

极小函数依赖集的不唯一（1）

- 定理6.3的证明过程
  - 是求F极小函数依赖集的过程
  - 也是检验F是否为极小函数依赖集的一个算法
  - 若改造后的F与原来的F相同，说明F就是一个最小依赖集

- [例6.13] $F = \{A \to B, B \to A, B \to C, A \to C, C \to A\}$
  - F的最小依赖集：$F_{m1} = \{A \to B,\ B \to C,\ C \to A\}$
  - F的最小依赖集F_m不一定是唯一的，它与对各函数依赖FD_i及$X \to A$中X各属性的处置顺序有关。
  - F_{m1}、F_{m2}都是F的最小依赖集：
    - $F_{m1} = \{A \to B, B \to C, C \to A\}$
    - $F_{m2} = \{A \to B, B \to A, A \to C, C \to A\}$

函数依赖集的等价 与 极小函数依赖集（1）

- **[例]** $F = \{ B \rightarrow CD,\ AD \rightarrow E,\ B \rightarrow A \}$

  $G = \{ B \rightarrow CDE,\ B \rightarrow ABC,\ AD \rightarrow E \}$

  请问：

  1. **F与G是否等价？**
  2. **计算G的极小函数依赖集**

- **对于第1小题，可以有两种证明办法：**

  ① **使用Armstrong公理系统的推导证明**

  ② **使用属性集闭包计算算法的证明**

- **对于第2小题，由于F与G相互等价，可以很容易判断“F是G的最小覆盖”**

（按照最后补充的极小函数依赖集计算算法，需要将B→CD和B→A合并为一个函数依赖：B→ACD）

函数依赖集的等价 与 极小函数依赖集（2）

F: { (f_1) B→CD　　(f_2) AD→E　　(f_3) B→A }

G: { (g_1) B→CDE　　(g_2) B→ABC　　(g_3) AD→E }

例8-10：(证法1)

- F 是否逻辑蕴涵 G 中的所有函数依赖？
  - F 是否逻辑蕴涵 g_1?

    1) 由 f_1、f_3 和合并规则可以得到：① $B \rightarrow ACD$

    2) 由 f_2 和增广规则可以得到：② $CDAD \rightarrow CDE$

    可以将②简写为：③ $ACD \rightarrow CDE$

    3) 由 ①、③ 和传递规则可以得到 g_1

函数依赖集的等价 与 极小函数依赖集（3）

F: { (f_1) B→CD　　(f_2) AD→E　　(f_3) B→A }

G: { (g_1) B→CDE　　(g_2) B→ABC　　(g_3) AD→E }

例8-10：(证法1) (续)

- F 是否逻辑蕴涵 g_2?

  1) 由 f_1 和分解规则可以得到：① $B \to C$

  2) 由 ①、f_3 和合并规则可以得到：② $B \to AC$

  3) 由 ② 和增广规则可以得到 g_2

- g_3 本身就是 F 中的函数依赖.

所以，F 逻辑蕴涵 G 中的所有函数依赖。

函数依赖集的等价 与 极小函数依赖集（4）

F: { (f_1) B→CD　　(f_2) AD→E　　(f_3) B→A }

G: { (g_1) B→CDE　　(g_2) B→ABC　　(g_3) AD→E }

例8-10：(证法1) (续)

- G 是否逻辑蕴涵 F 中的所有函数依赖？
  - G 是否逻辑蕴涵 f_1?
    - 由 g_1 和分解规则可以得到：(f_1) $B \rightarrow CD$
  - f_2 本身就是 G 中的函数依赖.
  - G 是否逻辑蕴涵 f_3?
    - 由 g_2 和分解规则可以得到：(f_3) $B \rightarrow A$

所以，G 逻辑蕴涵 F 中的所有函数依赖。

综上所述，F逻辑蕴涵G中的所有函数依赖，G也逻辑蕴涵F中的所有函数依赖，所以，F和G是等价的。

函数依赖集的等价 与 极小函数依赖集（5）

F: { (f_1) $B \to CD$　　(f_2) $AD \to E$　　(f_3) $B \to A$ }

G: { (g_1) $B \to CDE$　　(g_2) $B \to ABC$　　(g_3) $AD \to E$ }

例8-10：(证法2)

- F 是否逻辑蕴涵 G 中的所有函数依赖？
  - 只要计算属性B在F上的属性集闭包
    - 初始值：$\{B\}_F^+ = \{B\}$
    - 第一遍：$\{B\}_F^+ = \{B, C, D, A\}$
    - 第二遍：$\{B\}_F^+ = \{B, C, D, A, E\}$
    - 第三遍：$\{B\}_F^+ = \{B, C, D, A, E\}$
  - 因此可以推理得到：F逻辑蕴涵 g_1 和 g_2

函数依赖集的等价 与 极小函数依赖集（6）

F: { (f_1) B→CD　　(f_2) AD→E　　(f_3) B→A }

G: { (g_1) B→CDE　　(g_2) B→ABC　　(g_3) AD→E }

例8-10：(证法2) (续)

- G 是否逻辑蕴涵 F 中的所有函数依赖？
  - 只要计算属性B在G上的属性集闭包
    - 初始值：$\{B\}_G^+ = \{B\}$
    - 第一遍：$\{B\}_G^+ = \{B, C, D, E, A\}$
    - 第二遍：$\{B\}_G^+ = \{B, C, D, E, A\}$
  - 因此可以推理得到：G逻辑蕴涵 f_1和 f_3

同样可以证明，F逻辑蕴涵G中的所有函数依赖，G也逻辑蕴涵F中的所有函数依赖，所以，F和G是等价的。

【补充算法】寻找与函数依赖集 F 等价的极小函数依赖集

- 输入：函数依赖集F
- 输出：与F等价的极小函数依赖集G
- 算法（核心计算任务）

① 消除F中的部分函数依赖（如果存在部分函数依赖，则需要将其简化为完全函数依赖）

② 消除冗余的函数依赖（如果存在一个函数依赖X→Y，能够被从F中的其他函数依赖中推导得到，那么需要从F剔除X→Y）

- 其中，步骤①和步骤②的检查顺序可以对调，但必须保证最终的计算结果中没有冗余的函数依赖！
- 具体计算过程如下(next slide)

【补充算法】寻找与函数依赖集 F 等价的极小函数依赖集 G

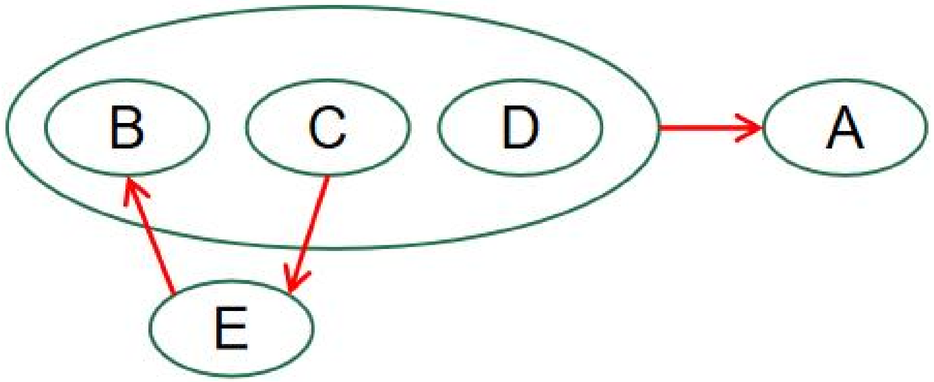
1. 令 G = F
   - 将 G 中每一个形如 $X \to (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ 的函数依赖替换为如下一组依赖因素为单个属性的函数依赖：$X \to A_1,\ X \to A_2,\ \ldots,\ X \to A_n$

2. 对 G 中的每一个函数依赖 $X \to A$ 作如下的处理：
   - 对决定因素 X 中的每一个属性 B 作如下处理：
     1) 计算属性集的闭包 $(X - B)_G{}^+$；
     2) 如果 $A \in (X - B)_G{}^+$，则用新的函数依赖 $(X - B) \to A$ 替换原来的函数依赖 $X \to A$；

3. 对 G 中的每一个函数依赖 $X \to A$ 作如下处理：
   1) 令 $N = G - \{ X \to A \}$；
   2) 计算属性集的闭包 $X_N{}^+$；
   3) 如果 $A \in X_N{}^+$，那么从G中删去函数依赖 $X \to A$；

4. 将 G 中每一组形如 $X \to A_1,\ X \to A_2,\ \ldots,\ X \to A_n$(决定因素相同)的函数依赖合并为一个函数依赖：$X \to (A_1, A_2, \ldots, A_n)$

❑ 设有如下图所示的函数依赖集 $M = \{C \rightarrow E, E \rightarrow B, BCD \rightarrow A\}$



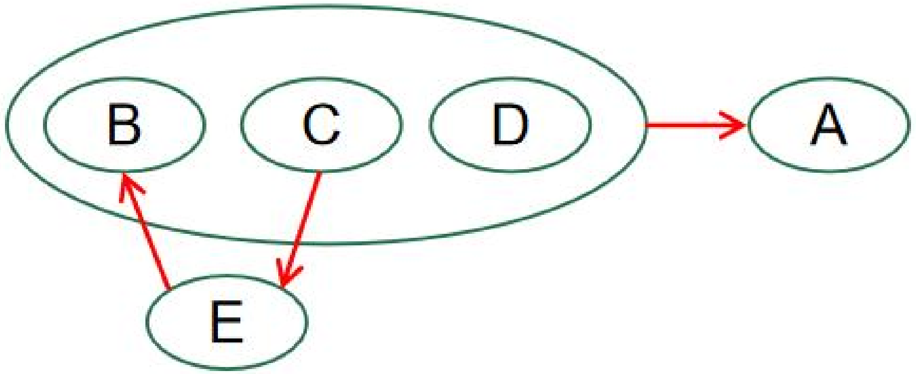
其中：$BCD \rightarrow A$ 是一个部分函数依赖！(决定因素中的属性B是多余的，可以将其简化为 $CD \rightarrow A$)

❑ 要得到上述结论，我们需要做以下的证明：

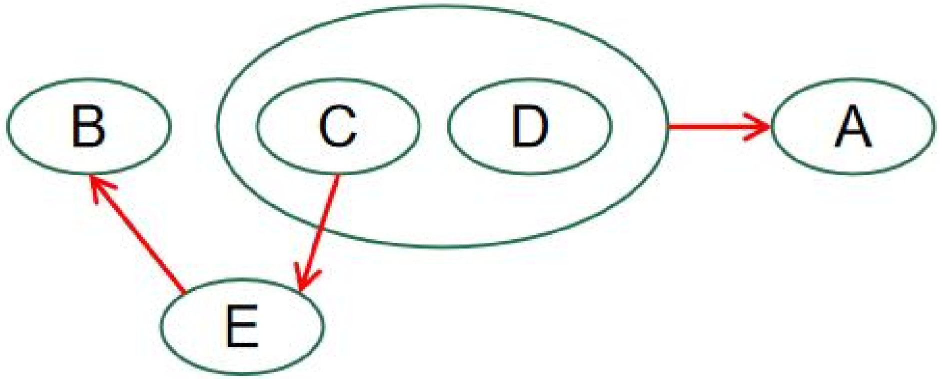
① 用 $CD \rightarrow A$ 替换 $BCD \rightarrow A$，从而得到一个新的函数依赖集

$$N = \{C \rightarrow E, E \rightarrow B, CD \rightarrow A\}$$

② 证明：$M^+ = N^+$ **(next slide)**



$$M = \{ C \to E, \\ E \to B, \\ BCD \to A \}$$



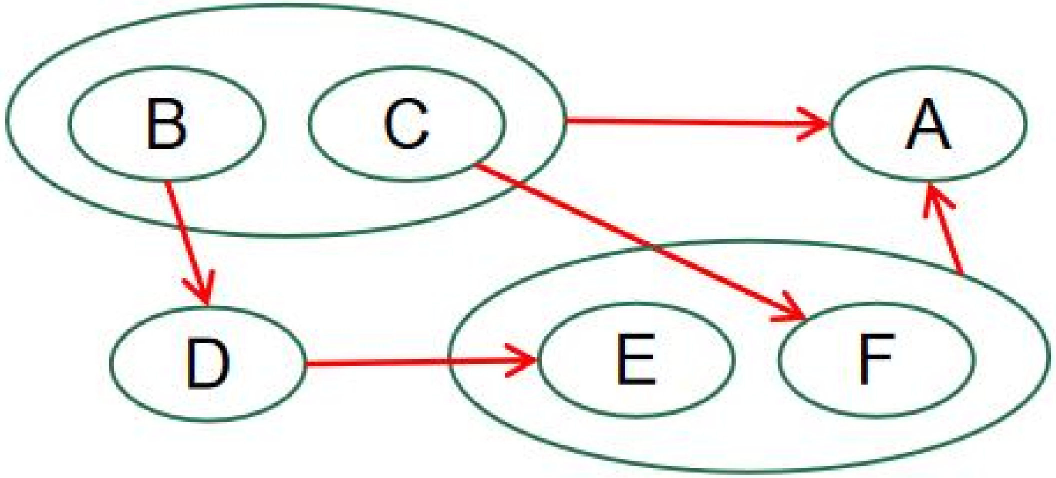
$$N = \{ C \to E, \\ E \to B, \\ CD \to A \}$$

要证明 $\boldsymbol{M}^+ = \boldsymbol{N}^+$，只需要证明“M逻辑蕴涵$CD \to A$ 且 N逻辑蕴涵$BCD \to A$”，具体思路如下：

$$\boldsymbol{M}^+ = \boldsymbol{N}^+? \Rightarrow \begin{cases} M \vDash CD \to A? \Rightarrow \boldsymbol{A} \in \{\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}\}_{\boldsymbol{M}}^+? \\ N \vDash BCD \to A? \Rightarrow \text{EASY} \end{cases}$$

- 设有如右图所示的函数依赖集

$$M = \{ B \to D,\ D \to E,\ C \to F,\ BC \to A,\ EF \to A \}$$



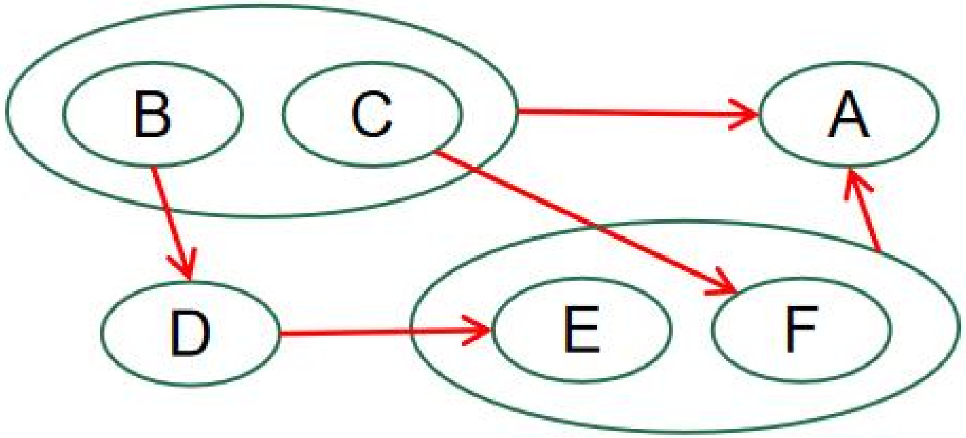
其中：$BC \to A$ 是一个冗余的函数依赖！

- 要得到上述结论，我们需要做以下的证明：

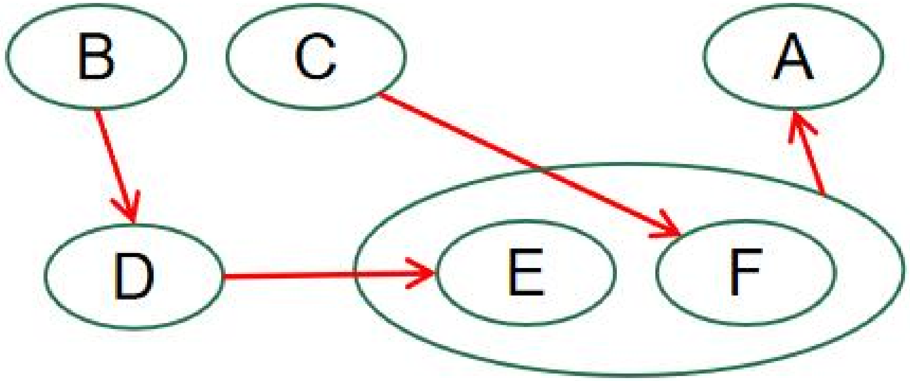
① 从M中删除 $BC \to A$，从而得到一个新的函数依赖集

$$N = \{ B \to D,\ D \to E,\ C \to F,\ EF \to A \}$$

② 证明：$M^+ = N^+$ **(next slide)**



$$M = \{\ B \to D,\ D \to E,\ C \to F,\ BC \to A,\ EF \to A\ \}$$



$$N = \{\ B \to D,\ D \to E,\ C \to F,\ EF \to A\ \}$$

因为N是M的一个子集，要证明 $\boldsymbol{M^+ = N^+}$，只需要证明“N逻辑蕴涵 $BC \to A$”，具体思路如下：

$\boldsymbol{M^+ = N^+}$ ？ ➡ $N \vDash BC \to A$? ➡ $\boldsymbol{A \in \{B, C\}_N^+}$ ？

极小函数依赖集的计算

❑ 例：计算函数依赖集 $F = \{ A \to B, B \to A, AB \to C \}$ 的最小函数依赖集。

解：本题主要是判断：

① $AB \to C$ 是否为部分函数依赖？

② 如果是部分函数依赖，那么可以将其简化为哪一个完全函数依赖？

- $F = \{ A \to B, B \to A, AB \to C \}$
  判断 $AB \to C$ 是否为部分函数依赖？如是则需要将其转化为完全函数依赖。

---

1) 从其决定因素中去掉属性B，计算 $\{ A \}_F^+$：
   $\{ A \}_F^+ = \{A, B, C\}$ 有：$C \in \{ A \}_F^+$

2) 从其决定因素中去掉属性A，计算 $\{ B \}_F^+$：
   $\{ B \}_F^+ = \{A, B, C\}$ 有：$C \in \{ B \}_F^+$

- 因此，可以用 $A \to C$ (和/或) $B \to C$ 来替换原来的 $AB \to C$，得到等价的函数依赖集 $G = \{ A \to B, B \to A, A \to C, B \to C \}$

- 在补充算法的步骤(3)中，需要消除G中冗余的函数依赖。根据对函数依赖处理顺序的不同可以得到两个不同（但也是相互等价）的最小函数依赖集：

  $G_1 = \{ A \to B, B \to A, A \to C \}$，可合并为 $\{A \to BC, B \to A\}$

  $G_2 = \{ A \to B, B \to A, B \to C \}$，可合并为 $\{A \to B, B \to AC\}$

复习思考题（1）

8. Armstrong公理系统

①请写出三条基本规则：自反律，增广律，传递律

②请写出以下两条扩充规则并证明：分解规则，合并规则

③请举例说明：利用Armstrong公理系统中的传递规则推导得到的函数依赖不一定是传递函数依赖。

9. ‘函数依赖集闭包’与‘属性集闭包’

①什么是函数依赖的逻辑蕴涵?

②什么是函数依赖集闭包?

③什么是属性集闭包？请写出属性集闭包的计算算法。

10.‘函数依赖集等价’与‘极小函数依赖集’

①请写出下列概念的定义：函数依赖集等价，极小函数依赖集

②极小函数依赖集的判定方法是什么？请写出极小函数依赖集的计算算法。

复习思考题（2）

11. 请利用Armstrong公理系统证明下面的推导过程是否成立？如果不成立，请给出具体的例子关系。

1. $\{ W \rightarrow Y, X \rightarrow Z \} \Rightarrow \{ WX \rightarrow Y \}$
2. $\{ X \rightarrow Y \}$ and $Z \subseteq Y \Rightarrow \{ X \rightarrow Z \}$
3. $\{ X \rightarrow Y, X \rightarrow W, WY \rightarrow Z \} \Rightarrow \{ X \rightarrow Z \}$
4. $\{ XY \rightarrow Z, Y \rightarrow W \} \Rightarrow \{ XW \rightarrow Z \}$
5. $\{ X \rightarrow Z, Y \rightarrow Z \} \Rightarrow \{ X \rightarrow Y \}$
6. $\{ X \rightarrow Y, XY \rightarrow Z \} \Rightarrow \{ X \rightarrow Z \}$
7. $\{ X \rightarrow Y, Z \rightarrow W \} \Rightarrow \{ XZ \rightarrow YW \}$
8. $\{ XY \rightarrow Z, Z \rightarrow X \} \Rightarrow \{ Z \rightarrow Y \}$
9. $\{ X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z \} \Rightarrow \{ X \rightarrow YZ \}$
10. $\{ XY \rightarrow Z, Z \rightarrow W \} \Rightarrow \{ X \rightarrow W \}$

复习思考题（3）

12. 设 $F = \{ A \to C, AC \to D, E \to AD, E \to H \}$，请给出 **F** 的最小函数依赖集。

13. $\boldsymbol{M} = \{ ABD \to AC, C \to BE, AD \to BF, B \to E \}$，请计算**M**的最小函数依赖集。