100

离散数学（2023）作业 21 - 图的基本概念

万鹏举
221900342

2023 年 5 月 12 日

1 Problem1

原命题正确，下证：
假设改图一共有 i 个点，由于点的度数各不相同，则最大度数的点至少为 i-1，
当最大度数为 i-1，则所有点度数依次为 0,1,⋯⋯,i-2.
假设改图是简单图，为保证最大度数点为 i-1，它与其他 i-1 个点必须都有边相连，
这与最小度数点为 0 相悖，假设错误，G 不可能是简单图。
当最大度数大于 i-1, 则该点与其他 i-1 直接有超过 i-1 条边，
由鸽笼原理，必有两点之间存在超过 1 条边的情况，故不是简单图。
综上所述，证明原命题是正确的。

2 Problem2

a 是正确的，b 是错误的，下证：
(a) 假设一共有 m 个点，平均度为 n，则共有 mn/2 条边，
删去度最大的定点 (假设度数为 k>n) 后，则减去了 k 条边，
此时共有 mn/2-k 条边，平均度数为 (mn-2k)/(m-1)<n,
即一定不增加，原命题成立。
(b) 假设一共有 m 个点，平均度为 n，则共有 mn/2 条边，
删去度最小的定点 (假设度数为 l<n) 后，则减去了 l 条边，
此时共有 mn/2-l 条边，平均度数为 (mn-2l)/(m-1)，它与 n 大小，取决于 l 与 n 的关系，
即不一定不减少，原命题错误。
反例：abc 互相连接，d 只于 a 连接，删去 d，平均度从 2 变成 2

3 Problem3

(a) 不构成，由 problem1 可知，不构成简单图。
(b) 构成，写一个“口”，在里面花一个 ×，以“口”的四个端点作为四个顶点
(c) 不构成，假设；六个点依次记作 abcdef，若为简单图，
则 a 与 bcdef 相连，b 除 a 外与 cdef 中三个点相连，
则此时在 cdef 已有三个点度数为 2，与条件矛盾，舍去。
(d) 不构成，由鸽笼原理可知，度数为 5 的点与其他四点中至少一点之间有超过 1 条边

4 Problem4

假设 $\Delta(G) < 2\varepsilon/\nu$, 则有
总度数 $\leq \nu \times \Delta(G) < \nu \times 2\varepsilon/\nu = 2\varepsilon$
而由已学知识可知总度数 $=2\varepsilon$，故假设错误，$2\varepsilon/\nu \leq \Delta(G)$
同理可证，$\delta(G) \leq 2\varepsilon/\nu$.

5 Problem5

（1）假设一共有 m 个点，平均度为 a，则共有 ma/2 条边，
删去某定点 (假设度数为 l) 后，则减去了 l 条边，
此时共有 mn/2-l 条边，平均度数为 (mn-2l)/(m-1)，
(ma-2l)/(m-1)≥a, 解得 l≤a/2.
(2) 原命题成立，下证：
假设一共有 m 个点，平均度为 n，则共有 mn/2 条边，
找到度最小定点，若其度数大于 a/2，则此时改图复合条件。
否则，删去度最小的定点 (假设度数为 l) 后，则减去了 l 条边，
此时共有 mn/2-l 条边，平均度数为 (ma-2l)/(m-1)，
又 l≤a/2，则有 (ma-2l)/(m-1)≥a,
如此进行，总能找到符合条件的子图。故成立。

6 Problem6

由题，可抽象为有 n 个顶点，n+1 条边的无向图，
则说明有 2n+2 个度，由鸽笼原理，至少有两个顶点的度数大于等于 3，
即一定有一只球队踢了至少 3 场比赛。

7 Problem7

假设 n 为偶数，

基础步骤：当 n=2 时，显然成立

归纳步骤：假设当 n=2k 时成立，当 n=2k+2 时，

找到相连的两点 a,b，除去两点及其连线，得到 2k 阶图，最多有 k^2 条边，

假设 a 与其中 l 个点相连，由于不存在三角形，则 b 最多与另外 2k-l 个点相连，

则最多有 $k^2 + l + (2k - l) + 1 = k^2 + 2k + 1 = (2k + 2)^2/4$ 条边。

归纳成立，证明原命题正确。

当 n 为奇数时，上述过程同理可证。

综上所述，原命题成立。