80

离散数学 17

221900371 蒋鹏

2023 年 5 月 3 日

Problem1:

A 不一定是 G 的子群，因为其不一定满足封闭性，对于 x∈H,y∈K, 不一定有 xy∈H∪K

B 是 G 的子群

C,D 一定不是 G 的子群，因为其不含有单位元素

Problem2:

要证明 N(a) 是 G 的子群，显然 N(a) 为 G 的子集

由子群的判定定理一，只需证明:

(1): 对于 ∀x,y∈N(a),xy∈N(a) 也成立

(2):∀x∈N(a), 有 x^{-1}∈N(a)

先证明 1：因为 x，y∈N(a), 所以有 xa=ax，ya=ay, 又因为 xa=ax，所以 xay=axy，而 xay=xya，所以有 xya=axy，所以 xy∈N(a) 成立得证

证明 2:∀x∈N(a), 有 xa=ax, 所以有 a=x^{-1}ax, 所以有 ax^{-1}=x^{-1}axx^{-1}=x^{-1}a 则 2 也得证, 综上原命题得证

Problem3:

运用子群的判断定理一:

(1) 证明 ∀xhx^{-1},xkx^{-1}∈xHx^{-1}, 有 xhkx^{-1}∈xHx^{-1}

xhx^{-1}xkx^{-1}=xhkx^{-1}，而 H 是 G 的子群，所以对于 ∀h,k∈H, 有 hk∈H 成立，所以有 xhkx^{-1}∈xHx^{-1} 成立

(2) 证明 ∀xhx^{-1}∈xHx^{-1},$(xhx^{-1})^{-1}$∈xHx^{-1}

可以构造出 $(xhx^{-1})^{-1}$=x$h^{-1}x^{-1}$
因为 h∈H,H 为 G 的子群，所以有 h^{-1}∈H, 所以 x$h^{-1}x^{-1}$∈xHx^{-1}
得证

Problem4:
反证法：假设 H∪K≠$\{e\}$
则存在元素 a，a≠e, 且 a∈H,a∈K
因为 H，K 分别为 G 的 r，s 阶子群
所以 a^r=a^s=e
根据贝祖定理，存在整数 p，q 使得 pr+qs=1
所以 a=a^{pr+qs}=$(a^r)^p(q^s)^q$=e, 与假设矛盾，所以 H∪K=$\{e\}$ 一定成立

Problem5:
设该二阶元为 a，则 a^2=e
假设存在元素 b∈G,ab=ba 不成立，即 a≠b^{-1}ab
由于 b^{-1}abb^{-1}ab=e
所以 b^{-1}ab 也是二阶元，且与 a 不等，这与只有一个二阶元 a 条件矛盾，所以必有 b^{-1}ab=a，即 ab=ba 成立
即 a 对于任意元素可交换

Problem6:
设 |g|=r，|h|=s，gcd（r，s）=1
g^r=h^s=e
所以 gh^{rs}=e
需要证明 |gh|=|g||h|=rs
设 |gh|=n, 则有 gh^n=e, 一定有 n|rs
又因为 gcd(r,s)=1, 所以 n=rs 或 n=1
当 n=rs 时，则原式得证
当 n=1 时，有 gh=e=hg=hg^r=e
所以 g^{r-1}=e,g=e

同理，gh^s=e,h=e

此时显然有 |hg|=|h||g|

综上得证

-20