12. 图论: 匹配与网络流 (12-matching-flow)

姓名： 鲁权锋　　**学号：** 201830168

评分： 20　　**评阅：** 肖江

2021 年 5 月 28 日

请独立完成作业，不得抄袭。 若得到他人帮助, 请致谢。 若参考了其它资料，请给出引用。 鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1　作业（必做部分）

题目 1 ([5 = 2 + 3 分] ⋆⋆)
设 $G = (X, Y, E)$ 是一个 k-正则 $(k > 0)$ 二部图。请证明:

(1) $|X| = |Y|$;

(2) G 有一个 X-完美匹配。

证明：
(1) 设 $|X| = a, |Y| = b$。

因为 G 是 k-正则二部图，在点集合 X 里，每个点都会和集合 Y 上的点连 k 条边，因此从集合 X 连到集合 Y 有 ak 条边。

同理，从集合 Y 连到集合 X 有 bk 条边。

又因为 G 是二部图，因此集合 X 和集合 Y 内部的点并没有边相连。因此，必然有 $ak = bk$，又 $(k > 0)$，得 $a = b$，也即 $|X| = |Y|$。

(2) 不妨设集合 X 和集合 Y 均有 m 个点，则 G 有 $k \times \frac{m+m}{2} = mk$ 条边。

接下来，我们来寻找 G 的最小点覆盖。

首先，该点覆盖大小至少 $\geqslant m$.

这是因为每个点最多覆盖 k 条边，又因为 G 有 mk 条边，因此至少需要 $\frac{mk}{k} = m$ 个点才能构成点覆盖。

下面给出点的个数为 m 的点覆盖。

将集合 X 里的所有点（一共 m 个）全部选择即可作为该点覆盖。

因为在二部图 G 中，集合 X 内部任意两点间均不存在边，因此，这 m 个点里并不会重复“覆盖”某同一条边。因此，这 m 个点一共可以覆盖 mk 条边，而这也是 G 的边数。

因此，G 有一个点的个数为 m 的最小点覆盖。

由强对偶定理，G 存在一个最大值是 m 的最大匹配，又 $|X| = m$，即 G 有一个 X-完美匹配。

□

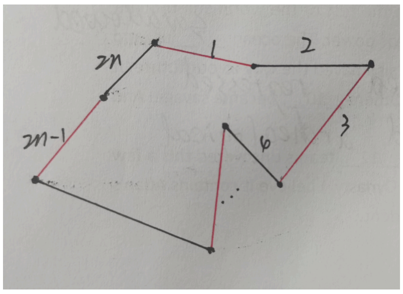
题目 2 ([5 分] ★★★)
设 $G = (V, E)$ 是含有 $2n$ 个顶点的简单图，且 $\delta(G) \geq n + 1$。
请证明：G 有完美匹配 [1]。(提示：考虑使用图论第一讲中的定理。)

[1] 对于任意图，完美匹配是 cover 了所有顶点的匹配。

证明：
因为 G 是个含有 $2n$ 个顶点的简单图，且 $\delta(G) \geq n + 1$，因此 G 是哈密尔顿图。

因此，G 含有一条长度为 $2n$ 的哈密尔顿路径，而这条哈密尔顿路径覆盖了所有的 $2n$ 个点。

不妨给这条哈密尔顿路径编上标号：以某个点作为起点，按顺时针方向（相对于 G 所在的平面）给这条哈密尔顿路径的每一条边按自然数顺序一个标号（1，2，3，. . . ，2n-1,2n）(如图所示)



我们取其中所有标号为奇数的边（不妨设这些边构成边集 E），即可构成完美匹配：

G 的每个点都覆盖了，而且每个点都只被 E 里的边覆盖一次，即 E 的每条边都不存在共同的顶点。

综上，G 有完美匹配，E 就是其中一个构造。

$\square$

题目 3 ([5 分] ★★★★)
请证明：每个二部图 G 都有一个大小 $\geq e(G)/\Delta(G)$ 的匹配 [2]。(提示：使用 König-Egerváry 定理。)

[2] $e(G)$ 表示 G 的边数。

证明：
由 König-Egerváry 定理，要证明每个二部图 G 都有一个大小 $\geq e(G)/\Delta(G)$ 的匹配，只需证每个二部图 G 的最小点覆盖的大小都 $\geq e(G)/\Delta(G)$。

设 $e(G) = a, \Delta(G) = b$.

每个点最多能覆盖 b 条边，因此，至少需要 $\frac{a}{b} = \frac{e(G)}{\Delta(G)}$ 个点，才能构成点覆盖。

也即 G 的最小点覆盖的大小 $\geq e(G)/\Delta(G)$。

综上，每个二部图 G 都有一个大小 $\geq e(G)/\Delta(G)$ 的匹配。

$\square$

题目 4 ([5 分] ★★)
设 Y 为集合，$\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ 为包含 m 个集合的集合，其中 $A_i \subseteq Y$ (对 $1 \leq i \leq m$)。$\mathcal{A}$ 的相异代表系 (System of Distinct Representatives; SDR) 是 Y 中 m 个不同元素 $a_1, \ldots, a_m$ 构成的集合，其中 $a_i \in A_i$ (对 $1 \leq i \leq m$)。
请证明：$\mathcal{A}$ 有 SDR 当且仅当

$$\forall S \subseteq \{1, \ldots, m\}. \left|\bigcup_{i \in S} A_i\right| \geq |S|.$$

证明：
通过集合 Y 和集合 $\mathcal{A}$ 的关系，我们可以构造出一个等价的二部图 $G=(M,N,E)$：

每一个集合 A_i ($1 \le i \le m$) 可以视为集合 M 的顶点 (不妨记为 M_i($1 \le i \le m$)), 集合 Y 的所有元素可以视为集合 N 的顶点 (不妨记为 N_i, 其中 $N_i = i$) (也即用该顶点的值作为它的下标)。

当 A_i ($1 \le i \le m$) 和集合 Y 的某些元素相等时，那么点 M_i 将会和集合 N 中相应的顶点存在边（比如 $A_3 = \{1,2,4\}$, 那么点 M_3 将会和点 N_1, N_2, N_4 相连)。

除此之外再无其他的边（也就是说集合 M 的顶点之间无边相连，集合 N 也如此，这也确保了 G 是个二部图)。

那么，$\mathcal{A}$ 有 SDR 可以等价为集合 M 中所有的点都会和集合 N 的点存在匹配，也即等价于上述构造的二部图 G 有 M-完美匹配.

$$\forall S \subseteq \{1,\ldots,m\},$$

$\left|\bigcup_{i\in S} A_i\right|$ 可以等价于集合 Y 上能和集合 $A=\{M_i | i \in S\}$ 存在匹配的点数，也即

$$\left|\bigcup_{i\in S} A_i\right| = |N_G(A)|$$

因此式子

$$\forall S \subseteq \{1,\ldots,m\}.\ \left|\bigcup_{i\in S} A_i\right| \ge |S|.$$

可以等价为

$$\forall W \subseteq M.\ |W| \leqslant |N_G(W)|$$

又因为二部图 G 有 M-完美匹配当且仅当

$$\forall W \subseteq M.\ |W| \leqslant |N_G(W)|$$

因此，$\mathcal{A}$ 有 SDR 当且仅当

$$\forall S \subseteq \{1,\ldots,m\}.\ \left|\bigcup_{i\in S} A_i\right| \ge |S|.$$

□