100

离散数学（2023）作业 17

221900329 任益驰

2023 年 5 月 1 日

1 Problem1

A 不是, 不一定满足封闭性
B 是
C 不是，不含单位元
D 不是，不含单位元

2 Problem2

显然，e∈G∧ea=ae,e∈N(a),N(a) 是 G 的非空子集
具有单位元
∀x,y,z∈N(a)→x,y,z∈G
显然 $(xy)z = x(yz)$, 满足结合律
xy∈G,xya=xay=axy→xy∈N(a), 满足封闭性
ea=ae↔xx^{-1}a=axx^{-1} =xax^{-1} ↔x^{-1}a=ax^{-1}
x^{-1} ∈G∧x^{-1}a=ax^{-1},x^{-1} ∈N(a),∀x∈N(a), 有逆元素 x^{-1} ∈N(a)
N(a) 关于 G 的运算构成群，是 G 的子群

3 Problem3

H 是 G 的子群，H 是 G 的非空子集，显然 xHx^{-1} 是 G 的非空子集
x∈G,x^{-1} ∈G,$e = xx^{-1} = x^{-1}x$
$\forall xhx^{-1} \in xHx^{-1}$
$exhx^{-1} = xx^{-1}xhx^{-1} = xhx^{-1}$,$xhx^{-1}e = xhx^{-1}xx^{-1} = xhx^{-1}$, 有单位元

$\forall xh_1x^{-1}, xh_2x^{-1}, xh_3x^{-1} \in xHx^{-1}$,$h_1, h_2, h_3 \in$H
$(xh_1x^{-1}xh_2x^{-1})xh_3x^{-1} = xh_1x^{-1}(xh_2x^{-1}xh_3x^{-1}) = xh_1h_2h_3x^{-1}$, 满足结合律
$xh_1x^{-1}xh_2x^{-1} = xh_1h_2x^{-1}$, 显然 $h_1h_2 \in$H,$xh_1h_2x^{-1} \in xHx^{-1}$, 满足封闭性
H 是子群，$\forall h \in H, \exists h^{-1} \in H, hh^{-1} = h^{-1}h = e$
$\forall xhx^{-1} \in xHx^{-1}, \exists xh^{-1}x^{-1} \in xHx^{-1}$,$xhx^{-1}xh^{-1}x^{-1} = xh^{-1}x^{-1}xhx^{-1} = e$
$\forall xhx^{-1} \in xHx^{-1}$, 有逆元素
xHx^{-1} 是 G 的子群

4 Problem4

显然，$e \in H, e \in K$,$e \in H \cap K$,$H \cap K$ 是 H，K 的非空子集，有单位元
∀a,b,c∈ $H \cap K$
显然 (ab)c=a(bc), 满足结合律
ab∈H 且 ab∈K,ab∈ $H \cap K$, 满足封闭性
a∈H,$\exists a^{-1}$ ∈H,$aa^{-1} = a^{-1}a = e$
a∈K,$\exists a^{-1}$ ∈K,$aa^{-1} = a^{-1}a = e$
所以 ∀a∈ $H \cap K$,$\exists a^{-1} \in H \cap K$, 有逆元素
$H \cap K$ 既是 H 的子群，又是 K 的子群
由拉格朗日定理，$H \cap K$ 的阶数是 r 和 s 的公因数，即 1
$H \cap K = \{e\}$

5 Problem5

假设唯一的二阶元为 a, 存在不为二阶元的 b，使得 ab≠ba
即 $b^{-1}ab \neq$a,$b^{-1}ab \in$G
$b^{-1}abb^{-1}ab = e$,$b^{-1}ab$ 是不等于 a 的二阶元
与条件矛盾，假设错误
原命题得证

6 Problem6

设 g 的阶数 m,h 的阶数 n

由 gh=hg,(gh)$^{mn} = g^{mn}h^{mn} = (g^m)^n(h^n)^m = e$

假设存在另一个数 s 满足 (gh)$^s = e$, 需证明 mn|s

$(gh)^{ms} = (g^m)^s h^{ms} = e$,$h^{ms} = e$,n|ms

gcd$(m, n) = 1 \rightarrow n \mid s$

同理，$m \mid s$, 所以 $mn \mid s$

所以 gh 的阶数 mn,$\mid gh \mid = \mid g \mid\mid h \mid$

7 Problem7

$\forall g \in G, \forall h \in H : ghg^{-1} \in H, gh \in Hg \rightarrow gH \subseteq Hg$

同理可得 $Hg \subseteq gH$

所以 $\forall g \in G, gH = Hg$

8 Problem8

1∼ $p-1$ 构成 p 的完全剩余系

当 p=a, 显然 $a^p \equiv p(\mod p)$

当 p≠a,gcd$(p, a) = 1$,a 依次乘上 1∼ $p-1$ 也构成 p 的完全剩余系

$1 \times 2 \times ... \times p-1 \equiv a \times 2a \times ... \times (p-1)a(\mod p)$

$a^{p-1} \equiv 1(\mod p)$

$a^p \equiv a(\mod p)$

综上，对任意素数 p 和任意整数 a，$a^p \equiv a(\mod p)$