

离散数学-第七次作业

Problem 1

计算下列集合的基数.

(1) $A = \{x, y, z\}$

(2) $B = \{x | x = n^2 \wedge n \in N\}$

(3) $C = \{x | x = n^{109} \wedge n \in N\}$

(4) $B \cap C$

(5) $B \cup C$

(6) 平面上所有的圆心在 x 轴上的单位圆的集合.

Problem 2

设 A, B 为可数集, 证明:

(1) $A \cap B$ 是可数集;

(2) $A \times B$ 是可数集.

Problem 3

确定下列各集合是否是有限的、可数无限的或不可数的。对那些可数无限集合，给出在自然数集合和该集合之间的一一对应。

- a) 大于 10 的整数
- b) 奇负整数
- c) 绝对值小于 1 000 000 的整数
- d) 0 和 2 之间的实数
- e) 集合 $A \times \mathbb{Z}^+$ 这里 $A = \{2, 3\}$
- f) 10 的整数倍

Problem 4

如果 A 是不可数集合而 B 是可数集合，那么 $A - B$ 一定是不可数的吗？

Problem 5

假设 A 是可数集合。证明如果存在一个从 A 到 B 的满射函数 f ，则 B 也是可数的。

Problem 6

证明：如果 A 和 B 是集合且 $A \subseteq B$ ，则 $|A| \leq |B|$ 。

Problem 7

设 $A = \{a, b, c\}$ ， $B = \{0, 1\}^A$ ，由定义证明 $\mathcal{P}(A) \approx \{0, 1\}^A$ 。

Problem 8

证明二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的实数解的集合是可数的，其中 a 、 b 和 c 都是整数。

Problem 9

设 A, B, C 为集合, 其满足 $A \cap B = A \cap C = \emptyset$ 且 $B \approx C$, 试证明: $A \cup B \approx A \cup C$

Problem 10

令 $\{1, 2, 3\}^\omega$ 为所有仅由数字 1, 2 或 3 构成的无限长的序列的集合。证明该集合不可数。