9.4

6. Yes; Abelian; identity is -2; a^{-1} is $-a-4$.

8. Yes; Abelian; identity is 0; a^{-1} is $-\dfrac{a}{a+1}$.

12.

乘法表：

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2	f_6	f_5
f_4	f_4	f_3	f_6	f_5	f_1	f_2
f_5	f_5	f_6	f_2	f_1	f_4	f_3
f_6	f_6	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1

证明要点：

1) 如上表所示， $\forall f_a, f_b, f_c \in G, (f_a \circ f_b) \circ f_c = f_a \circ (f_b \circ f_c)$

2) $e = f_1$

3) 如上表所示， $\forall f_i \in G$，有且仅有一个 f_i^{-1},使得 $f_i \circ f_i^{-1} = e$.

18.

$\forall a \in G, a^2 = e$， $\because a * a^{-1} = e$， $\therefore a = a^{-1}$

$\therefore \forall a, b \in G,\quad a*b = a^{-1}*b^{-1} = (b*a)^{-1} = b*a$

$\therefore$ G is Abelian.

19.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
f_2	f_2	f_3	f_4	f_1	f_8	f_7	f_5	f_6
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2	f_6	f_5	f_8	f_7
f_4	f_4	f_1	f_2	f_3	f_7	f_8	f_6	f_5
f_5	f_5	f_7	f_6	f_8	f_1	f_3	f_2	f_4
f_6	f_6	f_8	f_5	f_7	f_3	f_1	f_4	f_2
f_7	f_7	f_6	f_8	f_5	f_4	f_2	f_1	f_3
f_8	f_8	f_5	f_7	f_6	f_2	f_4	f_3	f_1

21. Consider the sequence $e, a, a^2, a^3, \ldots$. Since G is finite, not all terms of this sequence can be distinct; that is, for some $i \leq j$, $a^i = a^j$. Then $(a^{-1})^i a^i = (a^{-1})^i a^j$ and $e = a^{j-i}$. Note that $j - i \geq 0$.

24.

(1) $e^2 = e$，所以G的单位元$e \in H$；

(2) 如果$a,b \in H$，$(ab)^2 = abab = aabb = ee = e \Rightarrow ab \in H$；

(3) 如果$a \in H$，那么$a^2 = e = a * a^{-1} \Rightarrow a^{-1} = a \therefore a^{-1} \in H$；

(1),(2),(3) $\Rightarrow H$是G的一个子群。

26.

(1) G的单位元e，$ea = ae$，$\therefore e \in H_a$；

(2) 如果$x, y \in H$，那么$xa = ax,\ ya = ay$，因此$(xy)a = x(ya) = x(ay) = (xa)y = a(xy)$ $\Rightarrow xy \in H_a$；

(3) 如果$x \in H_a$，x在G中的逆元x^{-1}，满足$x^{-1}a = x^{-1}(ax)x^{-1} = x^{-1}(xa)x^{-1} = ax^{-1}$ $\therefore x^{-1} \in H_a$；

(1),(2),(3) $\Rightarrow H_a$是G的一个子群。

28.

(a) 1) H和K是G的子群$\therefore e \in H, e \in K \Rightarrow e \in H \cap K$

2) 若$a,b \in H \cap K$，则$a,b \in H$，$a,b \in K \Rightarrow ab \in H,\ ab \in K \Rightarrow ab \in H \cap K$

3) 若$a \in H \cap K$，则$a \in H$，$a \in K \Rightarrow a^{-1} \in H,\ a^{-1} \in K \Rightarrow a^{-1} \in H \cap K$

1),2),3) $\Rightarrow H \cap K$是G的一个子群。

(b) 若$a \in H, a \notin K$且$b \notin H, b \in K$，则$a,b \in H \cup K$,但$ab \notin H \cup K$，$\therefore H \cup K$不一定是G的一个子群。

29. $\{f_1\}$, $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, $\{f_1, f_3, f_5, f_6\}$, $\{f_1, f_3, f_7, f_8\}$, $\{f_1, f_5\}$, $\{f_1, f_6\}$, $\{f_1, f_3\}$, $\{f_1, f_7\}$, $\{f_1, f_8\}$.

30.

G是一个阿贝尔群$\therefore \forall a,b \in G,\ a * b = b * a$

$$\therefore\ f(ab)=(ab)^n=(ab)(ab)(ab)^{n-2}=a(ab)b(ab)^{n-2}=a^2b^2(ab)^{n-2}$$
$$=a^2(b^2a)b(ab)^{n-3}=a^2(ab^2)b(ab)^{n-3}=a^3b^3(ab)^{n-3}$$
$$=\cdots=a^nb^n=f(a)f(b)$$

$\therefore$函数 $f:G\to G$ 是一个同态。

31. $|xy|=|x|\cdot|y|$. Thus $f(xy)=f(x)f(y)$.

32.

$\forall a,b\in G,\ f(a*b)=e=e*e=f(a)*f(b)$

$\therefore$函数 $f:G\to G$ 是一个同态。

33. Suppose $f: G\to G$ defined by $f(a)=a^2$ is a homomorphism. Then $f(ab)=f(a)f(b)$ or $(ab)^2=a^2b^2$. Hence $a^{-1}(abab)b^{-1}=a^{-1}(a^2b^2)b^{-1}$ and $ba=ab$. Suppose G is Abelian. By Exercise 37, $f(ab)=f(a)f(b)$.

34.

充分性：

设 G 是阿贝尔群，$\forall a,b\in G,\ a*b=b*a$

$f(ab)=(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}=a^{-1}b^{-1}=f(a)f(b)$

再证单射与满射(略) $\Rightarrow f:G\to G$ 是一个同态

必要性：

设 $f:G\to G$ 是一个同态，$\forall a,b\in G,\ f(ab)=(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}=f(a)f(b)=a^{-1}b^{-1}$

即，$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}=a^{-1}b^{-1}\Rightarrow ab=(a^{-1}b^{-1})^{-1}=ba$

$\Rightarrow G$ 是阿贝尔群

35. Let $x, y\in G$. $f_a(xy)=axya^{-1}=axa^{-1}aya^{-1}=f_a(x)f_a(y)$. f_a is a homomorphism. Suppose $x\in G$. Then $f_a(a^{-1}xa)=aa^{-1}xaa^{-1}=x$ so f_a is onto. Suppose $f_a(x)=f_a(y)$, then $axa^{-1}=aya^{-1}$. Now $a^{-1}(axa^{-1})a=a^{-1}(aya^{-1})a$ and $x=y$. Thus f_a is one to one and an isomorphism.

36.

设 f:G->Z_6，f(a^x)=x

若 f(a^j)=f(a^i),则[i]=[j]，所以 a^i=a^j，是单射

对任意[i]∈Z_6，总有 $f(a^i)=i$
$f(a^j)*f(a^i)=[i]+[j]=[(i+j)\bmod 6]$
$f(a^i*a^j)=[(i+j)\bmod 6]= f(a^j)*f(a^i)$
所以 G，Z_6是同构

37. (Outline) Basis step: $n = 1$ P(1): $(ab)^1 = a^1b^1$ is true.
Induction step: LHS of P($k+1$): $(ab)^{k+1} = (ab)^k ab = a^kb^kab = a^kab^kb = a^{k+1}b^{k+1}$
RHS of P($k+1$).

38.
对任意 a，b 属于 G，ax=b，ya=b 都有唯一解，b 只在第 a 行出现一次，且只在第 a 列出现一次。故每个元素在每行每列恰好出现一次。

39. One table is

$*$	a	b	c
a	b	a	c
b	c	b	a
c	a	c	b

$*$ has no identity element.

9.5

1.

	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$
$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$
$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{0})$
$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$
$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$
$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{0})$
$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{2})$	$(\bar{1},\bar{0})$	$(\bar{1},\bar{1})$	$(\bar{0},\bar{2})$	$(\bar{0},\bar{0})$	$(\bar{0},\bar{1})$

2.设 a_1,a_2∈G，b_1,b_2∈G'，因为 G，G'是阿贝尔群，所以 $a_1*a_2= a_2*a_1$，$b_1*b_2= b_2*b_1$，
（a_1,b_1）*（a_2,b_2）=(a_1*a_2, b_1*b_2)

$(a_2, b_2)*(a_1, b_1) = (a_{2*}a_1, b_{2*}b_1) = (a_{1*}a_2, b_{1*}b_2) = (a_1, b_1)*(a_2, b_2)$
所以 G*G’是一个阿贝尔群。

3. Define $f: G_1 \to G_2$ by $f((g_1, g_2)) = (g_2, g_1)$. By Exercise 4, Section 9.3, f is an isomorphism.

6.
对任意（a,b）∈Z*Z，a+b∈Z, 故 f 处处有定义
$f((a,b)*(a',b')) = f(a+a',b+b') = a+b+a'+b'$
$f(a,b)*f(a',b') = a+b+a'+b'$
故 $f((a,b),(a',b')) = f(a,b)+f(a',b')$
所以 Z*Z→Z 是一个同态
12.
(a)G 的单位元为 1 且 1∈H
任取 a，b∈H, ab=±1，ab∈H
$1^{-1}=1$, $(-1)^{-1}=-1$，故 H 是 G 的子群
（b）
对 G 中各个元素
1H=H, -1H=H, iH={i, -i}≠H, -iH={i, -i}≠H
故左陪集为 H
18.
若 a∈H, 则 aH=H
$f_1H=f_2H=f_3H= g_1H=g_2H=g_3H$
故所有左陪集为 H
22.
充分性:
对任意 a∈G, $a^{-1}Na=N$, 则 $a(a^{-1}Na)=aN$, Na=aN, 所以 N 是正规子群
必要性:
若 N 是正规子群，对任意 a∈G，有 Na=aN，$a^{-1}Na= a^{-1}aN=N$,
所以 N 是 G 的一个正规子群, 当且仅当对所有 a∈G, $a^{-1}Na=N$
26.
先证 H 是一个子群，对 G 中单位元 e, 对所有 a∈G, ea=ae, 故 e∈H
任取 x,y∈H, 对所有 a∈G, 有 xa=ax, ya=ay, 则 axy=xay=xya, 故 xy∈H
任取 x∈H, 对所有 a∈G, 有 xa=ax, $x^{-1}a=x^{-1}axx^{-1}=x^{-1}xax^{-1}=ax^{-1}$, 故 x^{-1}∈H
所以 H 是一个子群
对任意 m∈G, 有对任意 x∈H, 有 mx=xm, 则 mH=Hm, 故 H 是 G 的一个正规子

群。

27. Suppose $f_a(h_1) = f_a(h_2)$. Then $ah_1 = ah_2$ and $a^{-1}(ah_1) = a^{-1}(ah_2)$. Hence $h_1 = h_2$ and f_a is one to one. Let $x \in aH$. Then $x = ah$, $h \in H$ and $f_a(h) = x$. Thus f_a is onto and since it is everywhere defined as well, f_a is a one-to-one correspondence between H and aH. Hence $|H| = |aH|$.

28.
由 9.4 28， 知 H∩K 是 G 的子群，
因为 H,K 是 G 的子群，对任意 h∈H,任意 a∈G, 有 ah=ha,
同理有任意 k 属于 K, ak=ka.
对任意 m∈H∩K, 任意 a∈G 都有 am=ma
所以 H∩K 是 G 的正规子群

29. Suppose $f(aH) = f(bH)$. Then $Ha^{-1} = Hb^{-1}$ and $a^{-1} = hb^{-1}$, $h \in H$. Hence $a = bh^{-1} \in bH$ so $aH \subseteq bH$. Similarly, $bH \subseteq aH$ so $aH = bH$. This means f is one to one. If Hc is a right coset of H, then $f(c^{-1}H) = Hc$ so f is also onto.

30.
设 G_2 的单位元是 e_2, $\ker(f)=((g_1, e_2)|g_1 \in G_1)$

31. Consider $f(aba^{-1}b^{-1}) = f(a)f(b)f(a^{-1})f(b^{-1}) = f(a)f(a^{-1})f(b)f(b^{-1}) = f(a)(f(a))^{-1}f(b)(f(b))^{-1}$ (by Theorem 5, Section 9.4) $= ee = e$. Hence $\{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \text{ in } G_1\} \subseteq \ker(f)$.

32.
设任意 a,b∈G, 因为 G 是阿贝尔群，所以 a*b=b*a,
[a]*[b]=[a*b]=[b*a]=[b]*[a]
所以 G/N 是一个阿贝尔群

33. Let $a \notin H$. The left cosets of H are H and aH. The right cosets are H and Ha. $H \cap aH = H \cap Ha = \{\ \}$ and $H \cup aH = H \cup Ha$. Thus $aH = Ha$. Since $a \in H \Rightarrow aH = H$, we have $xH = Hx\ \forall x \in G$. H is a normal subgroup of G.

34

由于 H,N 是 G 的子群，容易得出，H∩N 是 H 的一个子群。

由于 N 是 G 的一个正规子群，则有 a∈G 使得 aN={an|n∈N},Na={na|n 属于 N}，有 aN = Na，

因为 H 是 G 的子群，对于 a∈H，也有 aN = Na,由于 H∩N∈N，

于是对于 a∈H，有 aM = Ma　aM={am|m∈H∩N},Ma={ma|m 属于 H∩N}

35

Suppose $f: G \to G'$ is one to one. Let $x \in \ker(f)$. Then $f(x) = e' = f(e)$. Thus $x = e$ and $\ker(f) = \{e\}$. Conversely, suppose $\ker(f) = \{e\}$. If $f(g_1) = f(g_2)$, then $f(g_1 g_2^{-1}) = f(g_1) f(g_2^{-1}) = f(g_1)(f(g_2))^{-1} = f(g_1)(f(g_1))^{-1} = e$. Hence $g_1 g_2^{-1} \in \ker(f)$. Thus $g_1 g_2^{-1} = e$ and $g_1 = g_2$. Hence f is one to one.

37

Since H is a subgroup of G, the identity element e belongs to H. For any $g \in G$, $g = g * e \in gH$, so every element of G belongs to some left coset of H. If aH and bH are distinct left cosets of H, this means that $aH \cap bH = \{\ \}$. Hence the set of distinct left cosets of H forms a partition of G.

9.6

7

This is a ring from Exercise 1. An example of zero divisors are the matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8
Z10 中有一对零因子 2 和 5

26
一个环 R，如果 R 中存在元素 a,b 使得 a!=0,b!=0 且 a*b=0,则 R 有零因子
证明一个域不能有任何零因子
假设一个域 R 中存在一对零因子 a,b(a!=0,b!=0),则 a*b=0
根据域的性质有(a+c)*b = (a*b)+(c*b) = c*b,由于群的右消去性质，则有 a+c = c ,则 a=0，与假设矛盾。
所以一个域不存在任何零因子

27
The set of units must contain all nonzero elements of R.

28
若 n 不是一个素数，则除了它本身和 1 之外，至少还存在一个元素 p（1<p<n）使得 GCD(p , n)=p!=1,则 p 不存在乘法逆元,
所以如果 n 不是一个素数，则 Zn 不是一个域。

29
The statement $\mathbb{Z}_n$ is a field implies n is prime is proven in Exercise 28. The converse is shown by using Theorem 4(a), Section 1.4. Any $a \in \mathbb{Z}_n$ is relatively prime to n so we have $1 = sa + tn$ for some integers s, t and $\overline{s}$ is the multiplicative inverse of a.