83

离散数学（2023）作业图论

关宇聪
221900415

2023 年 5 月 16 日

1 Problem 1

设 G 是 n 阶无向简单图，图 G 中各个顶点的度数最多为 n-1，因此图 G 中各个顶点的度数只可能是 0，1，2，⋯，n-1，但是因为有一个为 n-1，所以不可能有 0，
故图 G 中各点度数不相同，一共有 n-1 种，而图 G 仅有 n 个顶点，所以由鸽笼原理可知. 图 G 中必有两个顶点的度数是相同的
因此若无向图 G 至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，则 G 不是简单图。

2 Problem 2

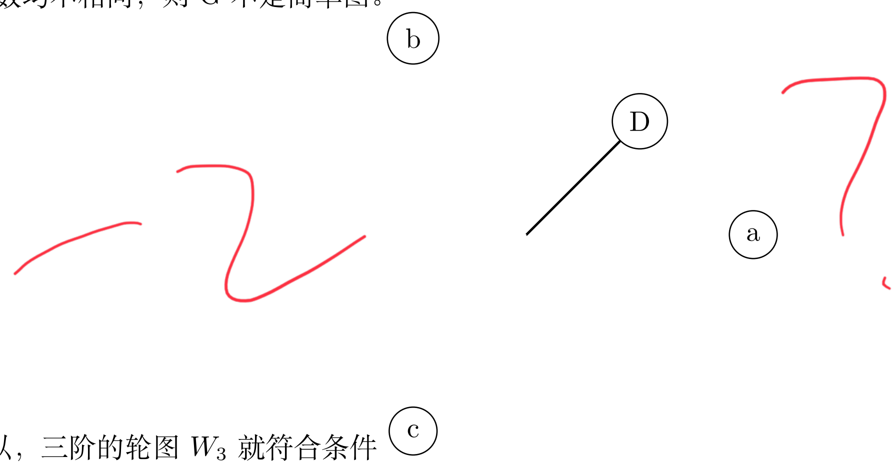
（1）假设从图中删去一个度最大的顶点会使其顶点平均度增加，设该图有 m 个顶点，最大点为 v_m 那么 $\sum_{i=0}^{m} deg(v_i)/m < \sum_{i=0}^{m-1} deg(v_i)/(m-1)$，计算得 $deg(v_m) < \sum_{i=0}^{m-1} /(m-1)$，即这个最大值小于其他 m-1 个元素的平均值，而我们知道在其他 m-1 个元素中一定有元素大于等于这个平均值，所以 v_m 不是最大的顶点，故矛盾，所以从图中删去一个度最大的顶点不会使其顶点平均度增加
（2）假设从图中删去一个度最小的顶点会使其顶点平均度减少，设该图有 m 个顶点，最小点为 v_m 那么 $\sum_{i=0}^{m} deg(v_i)/m > \sum_{i=0}^{m-1} deg(v_i)/(m-1)$，计算得 $deg(v_m) > \sum_{i=0}^{m-1} /(m-1)$，即这个最小值大于其他 m-1 个元素的平均值，而我们知道在其他 m-1 个元素中一定有元素小于等于这个平均值，所以 v_m 不是最小的顶点，故矛盾，所以从图中删去一个度最小的顶点不会使

-5

其顶点平均度减少

3 Problem 3

(a)a 不能作为简单图的度序列，因为若无向图 G 至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，则 G 不是简单图。



(b) 可以，三阶的轮图 W_3 就符合条件
(c) 不可以，如果为 5，4，2，1，1,1, 那么有一个点和其他五个点相连，一个点和其他四个点相连，那么最多有 1 个 1，不可能有三个一，不成立。
(d) 不可以，一共五个点，若有度为 5 的点，那么必有环或多重边，不是简单图

4 Problem 4

$\delta(G)$ 为最小度，则 $deg(v_i) >= \delta(G)$, 那么 $\sum_{i=1}^{m} deg(v_i) >= m * \delta(G)$, 则 $\delta <= \frac{2\varepsilon}{V}$，同理 $\frac{2\varepsilon}{V} <= \Delta(G)$

5 Problem 5

(1) 先证必要性：当 deg(x)<=a/2,G 删去顶点 x 后平均度 $a' >= (ma-a/2)/(m-1) = \frac{a(2m-1)}{2m-2} > a$，得证
再证充分性：G 删去一个顶点 x 后平均度 (ma-x)/(m-1)>=a, 解得 x<=a/2, 得证当且仅当。

(2) 假设 G 中没有一个最小度大于 a/2 的子图，那么每个子图的最小度都小于 a/2，那么对于单点子图，每一个 G 中的点的度都小于 a/2，所以这意味着 G 中所有顶点的度数都不大于 a/2。

然而，这与 G 的平均度为 a 矛盾。因此，我们的假设不成立，即 G 必定存在一个最小度大于 a/2 的子图。

6 Problem 6

有 n 支球队 (n 4)，已经比赛完了 n+1 场，假设所有球队最多比赛了 2 场，那么 n 个点最多有 n 条线，此时围成一个 cycle，即一共只打了 n 场比赛，这与比赛了 n+1 场矛盾，故至少有一个为三。

7 Problem 7

当 n=1，2 时，显然成立假设当 n=k 时成立，来考虑 n=k+1 的情况；不包含三角形 K3 作为子图的 n 阶图, 即不存在三个点两两连接，

-10