4.1

16.

$|A1 \times A2 \times A3| = |A1| \times |A2| \times |A3| = n1 \cdot n2 \cdot n3$, So $A1 \times A2 \times A3$ has $n1 \cdot n2 \cdot n3$ elements.

18.

Project(select Employees[Department = Public Relations or Research]))[Employee ID, Last Name]

24.

No, Since $0 \notin A_1$ and $0 \notin A_2$

30.

eg.
(a) $P=\{A_1, A_2\}$, $A_1=\{x|x=6*k, k \in N\}$, $A_2=\{x|x=6*k+3, k \in N\}$
(b) $P=\{A_1, A_2\}$, $A_1=\{x|x=9*k, k \in N\}$, $A_2=\{x|x=9*k+3, k \in N\}$
$A_3=\{x|x=9*k+6, k \in N\}$

31.

$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$, $\{\{1, 2, 3\}\}$.

33. 3. There are three 2-element partitions listed in the solution to Exercise 31.

34. 7. $S(4,2) = S(3,1)+2*S(3,2)=7$, consistent.

35. 6. $S(4,3) = S(3,2)+3*S(3,3)=6$.

36. 15. According to 34, $S(4,2)=7$, so $S(5,2)= 2*S(4,2)+ S(4,1)=15$.

37.

Let $(x, y) \in A \times (B \cup C)$. Then $x \in A$, $y \in B \cup C$. Hence $(x, y) \in A \times B$ or $(x, y) \in A \times C$. Thus $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$. Let $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Then $x \in A$, $y \in B$ or $y \in C$. Hence $y \in B \cup C$ and $(x, y) \in A \times (B \cup C)$. So, $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

38.

$B \cap C=\{7\}$,

$A \times (B \cap C)=\{(1,7),(2,7),(4,7)\}$

$A \times B=\{(1,2),(1,5),(1,7), (2,2),(2,5),(2,7),(4,2),(4,5),(4,7)\}$

$A \times C=\{(1,1),(1,3),(1,7), (2,1),(2,3),(2,7), (4,1),(4,3),(4,7)\}$

$(A \times B) \cap (A \times C)= \{(1,7),(2,7),(4,7)\}$

So, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

39.

Let $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ be a partition of B. Form the set $\{B_1 \cap A, B_2 \cap A, \ldots, B_m \cap A\}$. Delete any empty intersections from this set. The resulting set is a partition of A. If $a \in A$, then $a \in B$. We know that as an element of B, a is in exactly one of the B_i and hence in exactly one of the $B_i \cap A$.

40.

即 1.证明 A×B 的每个元素属于 P 的某个集合；2.如果 Ai*Bi 和 Aj*Bj 是 P 中不同的元素，那么 Ai*Bi ∩ Aj*Bj=∅。

对于任意（a_p,b_q）∈A×B, 由于 P_1 是 A 的一个划分，则存在 $A_i(1 \leqslant i \leqslant k)$，使得 $a_p \in A_i$，同理存在 B_j（$1 \leqslant j \leqslant m$)，使得 $b_q \in B_j$，所以，对于任意（a_p,b_q）∈A×B，存在 $A_i \times B_j$，使得（a_p,b_q）$\in A_i \times B_j$

假设存在（a_p,b_q）$\in A_i \times B_j$ 且（a_p,b_q）$\in A_r \times B_s$ ($1 \leqslant i,r \leqslant k$, $1 \leqslant j ,s \leqslant m$，$i \neq r$ or $j \neq s$)

则 $a_p \in A_i$，且有 $a_p \in A_r$, 这与 P1 是 A 的划分相矛盾，因此并没有元素同时属于任意两个不同的 $A_i \times B_j$，$A_r \times B_s$

综上，$P = \{A_i \times B_j, 1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant m\}$是 $A \times B$ 的划分。

4.2

20.

1. 必要性

假设 $R(A1 \cap A2) = R(A1) \cap R(A2)$，

则 $R(a) \cap R(b)=R(a \cap b)$，因为 $a \neq b$,所以 $R(a) \cap R(b)=R(a \cap b)=R(\varnothing)=\{\ \}$

反证法：假设 $R(a) \cap R(b) \neq \{\ \}$，则设 $x \in R(a) \cap R(b)$，因为 $R(a) \cap R(b)=R(a \cap b)$，所以 $x \in R(a \cap b)$，这与 $a \cap b=\varnothing$,矛盾，即证结论。

2.充分性

任取 $y \in R(A_1 \cap A_2)$,则存在 $x \in A_1 \cap A_2$ 满足 xRy，又有 $x \in A_1$, $x \in A_2$,所以 $y \in R(A_1)$且 $y \in R(A_2)$，所以 $y \in R(A_1) \cap R(A_2)$，所以 $R(A_1 \cap A_2) \subseteq R(A_1) \cap R(A_2)$。

任取 $y \in R(A_1) \cap R(A_2)$，则有 $y \in R(A1)$且 $y \in R(A2)$，假设 $a \in A1$, $b \in A2$, 使得 $y=R(a)$,且 $y=R$（b），若 $a \neq b$, 则 $R(a) \cap R(b) = \{\ \}$， 这与 $y \in R(A_1)$且 $y \in R(A_2)$矛盾，所以 $a=b$, 所以 $a \in A1 \cap A2$，$y \in R(A_1 \cap A_2)$, 所以 $R(A_1) \cap R(A_2) \subseteq R(A_1 \cap A_2)$

所以 $R(A1 \cap A2) = R(A1) \cap R(A2)$

综上，结论得证。

25.

$R = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 1), (5, 4)\}.$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

26.

R={(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (4,1), (4,4), (4,5)}

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

28.

vertex	1	2	3	4	5
in-degree	1	2	2	2	1
out-degree	3	2	0	3	0

32.

对 M_R 中的每一行以及每一列，若这一行或列对应的点不属于 B,则删除这一行或列，剩余的矩阵即为 R 在 B 上的矩阵。

34.

(a)$R(a_k)=\{a_q|m_{kq}=1, n\geqslant q\geqslant 1\}$

(b)$R(\{a_i, a_j, a_n\})=\{a_q|m_{iq}=1$ or $m_{jq}=1$ or $m_{nq}=1, n\geqslant q\geqslant 1\}$

36.

|S|=3*2=6

则 S 上的关系有 2^6=64 种

4.3

18.

设$M_{R\cup S}=[a_{ij}]$, $M_R \vee M_S=[b_{ij}]$

a_{ij}=1 当且仅当(a_i, a_j)∈ R U S

b_{ij}=1 当且仅当(b_i, b_j)∈ R 或(b_i, b_j)∈ S ,即(b_i, b_j)∈ R U S

所以a_{ij}=1 当且仅当b_{ij}=1

所以 $M_{R\cup S} = M_R \vee M_S$

19.

$x_i\ R^*\ x_j$ if and only if $x_i = x_j$ or $x_i\ R^n\ x_j$ for some n. The i, jth entry of $\mathbf{M}_{R^*}$ is 1 if and only if $i = j$ or the i, jth entry of $\mathbf{M}_{R^n}$ is 1 for some n. Since $R^\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$, the i, jth entry of M_{R^*} is 1 if and only if $i = j$ or the i, jth entry of $\mathbf{M}_{R^\infty}$ is 1. Hence $\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{I}_n \vee \mathbf{M}_{R^\infty}$.

20. 1，2，4，3，5，6，4.

21. 1，7，5，6，7，4，3.

27.

$$M_R \cdot M_R = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{matrix}$$

结合有向图可看出矩阵$M_R.M_R$表示 i 到 j 距离为 2 的道路条数。

设M_k=[x_{ij}], M_k在位置(i ,k)上为 1， x_{ik} = 1, M_k在位置(k ,j)上为 1, x_{kj}=1,设 $M_R.M_R$=[m_{ij}]

m_{ij}=$\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\ .x_{kj}$,当x_{ik}=x_{kj}=1 时，i 到 j 有一条距离为 2 的道路。

所以$M_R.M_R$表示距离为 2 的道路条数。

28.

$(M_R)^n$表示在关系 R 的有向图中长度为 n 的道路条数。

证明：设 P(n)是断言，对于 n>=2,上面命题成立。

基础步骤，由 27 题证明知，P(2)为真。

归纳步骤，现在证明：若 P(k)为真，则 P(k+1)为真 （k>=2）

P(k)为真，即$(M_R)^k$表示在 R 的有向图上长度为 k 的道路条数。

设$(M_R)^k$=[m_{ij}] , M_R = [n_{ij}] , $(M_R)^{k+1}$=[x_{ij}]

则$x_{ij} = \sum_{p=1}^{t} m_{ip} \,.\, n_{pj}$ (t 为矩阵M_R的宽度)

$m_{ip} \,.\, n_{pj}$表示 i 经过长度为 k 的道路到达 p，再从 p 经过长度为 1 的道路到达 j 的道路条数。

所以 x_{ij}表示所有在 R 的有向图上长度为 k+1 的道路条数。

命题得证。

30.

(a) 通过基础步骤证明在长度为 2 的情况下，断言是正确的。$M_R^2 = M_R \circ M_R$

然后归纳步骤中扩展到已知$M_R^k = M_R \circ M_R \circ \ldots \circ M_R$(k 个因子成立)

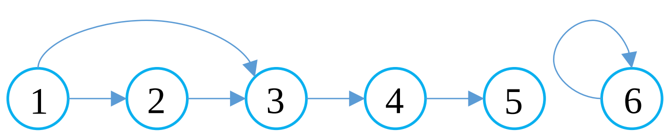
去证明$M_R^{k+1} = M_R \circ M_R \circ \ldots \circ M_R$(k+1 个因子成立)

(b) 中心思想是如果$y_{is} = 1$和$m_{sj} = 1$,则$x_{ij} = 1$

31.

Suppose each vertex has out-degree at least one. Choose a vertex, say v_i. Construct a path R $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots$. This is possible since each vertex has an edge leaving it. But there are only a finite number of vertices so for some k and j, $v_j = v_k$ and a cycle is created.

32.



33.

The essentials of the digraph are the connections made by the arrows. Compare the arrows leaving each vertex in turn to pairs in R with that vertex as first element.

4.4

	reflexive	irreflexive	symmetric	asymmetric	antisymmetric	transitive
14.	√	×	√	×	×	×
16.	√	×	√	×	×	√
18.	×	×	√	×	×	×
20.	√	×	√	×	×	√
22.	√	×	√	×	×	√

31.

Let R be transitive and irreflexive. Suppose $a\ R\ b$ and $b\ R\ a$. Then $a\ R\ a$ since R is transitive. But this contradicts the fact that R is irreflexive. Hence R is asymmetric.

32.

Transitive.

If R on A is transitive, suppose aRb, bRc, cRd, dRe, then aRc, cRe.

If aRb, bRc, then aR^2c; Similarly, if cRd, dRe, then cR^2e; If aRc, cRe, then aR^2e.

Therefore, if aR^2c, cR^2e, then aR^2e.

Therefore, R^2 is transitive.

33.

Let $R \neq \{\ \}$ be symmetric and transitive. There exists $(x, y) \in R$ and $(y, x) \in R$. Since R is transitive, we have $(x, x) \in R$, and R is not irreflexive.

34.

If R on A is symmetric, suppose aRb, bRc, then bRa, cRb.

If aRb, bRc, then aR^2c; Similarly, if bRa, cRb, then cR^2a;

Therefore, if aR^2c, then cR^2a.

Therefore, R^2 is symmetric.

35.

(Outline) Basis step: $n = 1$ P(1): If R is symmetric, then R^1 is symmetric is true.
Induction step: Use P(k): If R is symmetric, then R^k is symmetric to show P($k+1$). Suppose that $a\ R^{k+1}\ b$. Then there is a $c \in A$ such that $a\ R^k\ c$ and $c\ R\ b$. We have $b\ R\ c$ and $c\ R^k\ a$. Hence $b\ R^{k+1}\ a$.

36. $A = \mathbb{Z}^+$, aRb if and only if $a = b$.

38.

(a) $\{(a,b),(b,c),(a,c)\}$
(b) $\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$

40.

Let p: R is transitive, q: for all $n \geq 1$, $R^n \subseteq R$.

1. Prove $p \Rightarrow q$ is true.
用归纳法证.

2. Prove $q \Rightarrow p$ is true.
用反证法证.

4.5

19.

(a) R is reflexive because $a^2 + b^2 = a^2 + b^2$. R is clearly symmetric. R is transitive because if $a^2+b^2 = c^2+d^2$ and $c^2 + d^2 = e^2 + f^2$, certainly $a^2 + b^2 = e^2 + f^2$.

(b) The equivalence classes of A/R are circles with center at (0, 0), including the circle with radius 0.

20.

首先选择一个元素 a, R(a) = {a, b ,c ,e }
再选择在 A 中但不在 R(a)中的一个元素 d, R(d) = {d}
R(a)并 R(d) = A

所以 A/R = {{a ,b ,c ,e } , {d}}

22.

(a)

证自反性。 因为 a+b = a + b , 所以(a ,b)R(a ,b)， 自反性成立;

证对称性。 若有(a,b)R(c,d) 则 a+b = c+d 则同时有(c,d)R(a,b)成立。即对称性成立;

证传递性。 若有(a,b)R(c,d) 且(c,d)R(e,f) 则 a+b=c+d=e+f， 则(a,b)R(e,f)成立，传递性成立。

综上，关系 R 是一个等价关系。

(b)取 A 中元素(1,1) ,R(1,1) = {(1,1)}

取 A 中元素(1,2) ,R(1,2) = {(1,2),(2,1)}

取 A 中元素(1,3) ,R(1,3) = {(1,3),(3,1),(2,2)}

取 A 中元素(1,4) ,R(1,4) = {(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)}

取 A 中元素(2,4) ,R(2,4) = {(2,4),(4,2),(3,3)}

取 A 中元素(3,4) ,R(3,4) = {(3,4),(4,3)}

取 A 中元素(4,4) ,R(4,4) = {(4,4)}

A/R = {R(1,1),R(1,2),R(1,3),R(1,4),R(2,4),R(3,4),R(4,4)}={{(1,1)},{(1,2),(2,1)}, {(1,3),(3,1),(2,2)}, {(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)}, {(2,4),(4,2),(3,3)}, {(3,4),(4,3)}, {(4,4)}}

23.

Let R be reflexive and circular. If $a\ R\ b$, then $a\ R\ b$ and $b\ R\ b$, so $b\ R\ a$. Hence R is symmetric. If $a\ R\ b$ and $b\ R\ c$, then $c\ R\ a$. But R is symmetric, so $a\ R\ c$, and R is transitive.

Let R be an equivalence relation. Then R is reflexive. If $a\ R\ b$ and $b\ R\ c$, then $a\ R\ c$ (transitivity) and $c\ R\ a$ (symmetry), so R is also circular.

24.

因为对 A 上任意元素 a，有 a R1 a ， a R2 a ,所以有 a R1∩R2 a ,即 R1∩R2 在 A 上自反性成立。

对 A 上任意元素 a，b, 有 a R1 b , a R2 b ,并且均有 b R1 a, b R2 a 即对于 a R1∩R2 b 均有 b R1∩R2 a , 即 R1∩R2 在 A 上对称性成立。

对 A 上任意元素 a，b，c ,有 a R1 b, b R1 c , a R2 b ,b R2 c ,并且均有 a R1 c, a R2 c 。即对于 a R1∩R2 b , b R1∩R2 c ， 均有 a R1∩R2 c。即 R1∩R2 在 A 上传递性成立。

即如果 R1,R2 是在集合 A 上的等价关系，则 R1∩R2 也是集合 A 上的一个等价关系。

27.

If z is even (or odd), then $R(z)$ is the set of even (or odd) integers. Thus, if a and b are both even (or odd), then $R(a)+R(b) = \{x \mid x = s+t, s \in R(a), t \in R(b)\} = \{x \mid x \text{ is even}\} = R(a+b)$. If a and b have opposite parity, then $R(a)+R(b) = \{x \mid x = s+t, s \in R(a), t \in R(b)\} = \{x \mid x \text{ is odd}\} = R(a+b)$.

28.

(12 题中的等价关系：A∈ Z^+x Z^+ (a,b) R (c,d) 当且仅当 b=d)

设 a = (m,k1) b=(p,k2)

R(a) = {(1,k1),(2,k1),(3,k1)……}

R(b) = {(1,k2),(2,k2),(3,k2)……}

由于定义 R(a)+R(b) = { x |x=s+t,s∈ R(a),t∈ R(b)}

所以 R(a)+R(b) = { (2,k1+k2),(3,k1+k2),(4,k1+k2)……}

而 a+b = (m+p,k1+k2)

所以 R(a+b) = R(a)+R(b)

29.

$(1,2)\ R\ (2,4)$ and $(1,3)\ R\ (1,3)$, but $((1,2)+(1,3))\ \not R\ ((2,4)+(1,3))$ so the set $R((a,b))+R((a',b'))$ is not an equivalence class.