95

离散数学（2023）作业 ghw1-图的基本概念

黄海锋
221900374

2023 年 5 月 16 日

1 Problem 1

假设 G 是 n(n>1) 阶简单图，则顶点最高度数为 n-1. 所以与该点相邻的点 (剩下的 n-1 点) 的度数至少为 1，若各顶点的度数不同，则剩下的情况为 1，2，3. . . ,n-2. 剩下 n-1 个点，n-2 种情况。由鸽巢定理可知，必有两个顶点的度数相等，与题目矛盾。

-5

2 Problem 2

(1) 一个度最大的顶点的度数大于等于平均度。若相等，则删去这个点之后，平均度不变；若大于，则删去这个点之后，平均度减小。
(2) 一个度最小的顶点的度数小于等于平均度。若相等，则删去这个点之后，平均度不变；若小于，则删去这个点之后，平均度增大。

3 Problem 3

a) 不可能，因为一共 8 个顶点，度数为 7 的顶点必然与剩下的 7 个顶点相邻，所以剩下 7 的点的度数至少为 1，所以不存在度数为 0 的点。
b) 存在：图 1

c) 不可能。因为一共 6 个点，度数为 5 的顶点必然与剩下的 5 个顶点相邻，度数为 4 的点会和除了度数为 5 的顶点的 4 个点中的 3 个点相邻，故只有一个点的度数可能为 1
d) 不可能，因为一共 5 个顶点，度数最多为 4

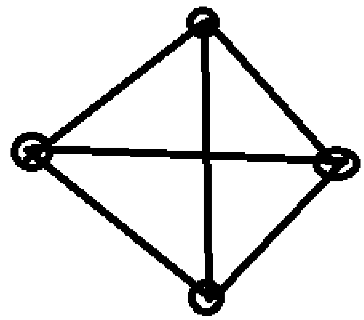

图 1: b

4 Problem 4

由握手定理可知，$2\xi = \sum_{v\in V} deg(v)$, 所以 $\frac{2\xi}{v} = \frac{\sum_{v\in V} deg(v)}{v}$, 显然 $\delta(G) \leq \frac{2\xi}{v} \leq \Delta(G)$

5 Problem 5

a) 假设一共有 n 个点，则边数为 $\frac{na}{2}$, 删去 x 之后，还有 $\frac{na}{2} - deg(x)$ 条边。此时，平均度为 $2\times(\frac{na}{2} - deg(x))$. 所以只需解不等式 $\frac{2\times(\frac{na}{2}-deg(x))}{2} \geq a$, 解得 $\frac{a}{2} \geq deg(x)$

b) 由 (a) 可知，G 若分成 2 个子图的话，必然有一个字图含有 x，则留下另一个子图看里面是否

还有 x，若无 x 则可以得到一个最小度大于 $\frac{a}{2}$ 的子图。因为 G 删去 x 的平均度至少是 a，显然存在一个子图不含 x。

6 Problem 6

构造简单图 G 模型：将球队看成顶点，两支球队比了一场则连在一起。所以总度数为 2(n+1), 一共 n 只球队，由鸽巢定理可知，一定有一个队伍比了至少 3 场。

7 Problem 7

假设存在一个 n 阶图 G，它不包含三角形 K3 作为子图且其边数 m 满足 $m > \frac{n^2}{4}$. 对于任意一点 x，最大度数为 n-1; 所以最大边数为 $\frac{n(n-1)}{2}$, 将 $m = \frac{n(n-1)}{2}$ 代入 $m > \frac{n^2}{4}$, 解得 $n < 4$. 显然 1，2，3 阶都不满足，所以假设不正确。故任意 n 阶图，不包含三角形 K3 作为子图且其边数 m 满足 $m \geq \frac{n^2}{4}$