离散数学（2023）作业 13

周帛岑
221900309

2023 年 4 月 5 日

1 Problem 1

(1): 解：

由于 a 不可能比 a 高，即 $(a,a) \notin R$, 故不满足自反性

如果 a 比 b 高，则 b 一定不比 a 高，故不满足对称性

由于 $(a,a) \notin R$, 故不是反对称的

若 a 比 b 高，b 比 c 高，显然，a 比 c 高。即 $(a,b) \in R$，且 $(b,c) \in R$，则 $(a,c) \in R$。满足传递性

(2): 解：

由于 a 一定与 a 同名，即 $(a,a) \in R$, 故满足自反性

如果 a 与 b 同名，则 b 与 a 同名，故满足对称性

由对称性的证明，a 与 b 可以不相同，故不满足反对称性

若 a 与 b 同名，b 与 c 同名，显然，a 与 c 同名。即 $(a,b) \in R$，且 $(b,c) \in R$，则 $(a,c) \in R$。满足传递性

(3): 解：

由于 a 一定与 a 在同一天出生，即 $(a,a) \in R$, 故满足自反性

如果 a 与 b 在同一天出生，则 b 与 a 在同一天出生，故满足对称性

由对称性的证明，a 与 b 可以不相同，故不满足反对称性

若 a 与 b 在同一天出生，b 与 c 在同一天出生，显然，a 与 c 在同一天出生。即 $(a,b) \in R$，且 $(b,c) \in R$，则 $(a,c) \in R$。满足传递性

(4): 解：

由于 a 一定与 a 有共同的祖父母，即 (a,a)∈R, 故满足自反性

如果 a 与 b 有共同的祖父母，则 b 与 a 有共同的祖父母，故满足对称性

由对称性的证明，a 与 b 可以不相同，故不满足反对称性

若 a 与 b 有共同的祖父母, b 与 c 有共同的祖父母, 显然, a 与 c 有共同的祖父母。即 (a,b)∈R, 且 (b,c)∈R，则 (a,c)∈R。满足传递性

2 Problem 2

解：对于我们所取的 b，不一定存在这样的 c 使 (b,c)∈R，即不一定存在 (c,b)∈R, 即不一定存在 (b,b)∈R, 又 b∈R, 即我们无法证明 ∀x∈A, 有 (x,x)∈R

3 Problem 3

证：不妨先假设集合 A 上的关系 R 是自反的，

即 ∀ a ∈A, (a,a) ∈ R

即 (a,a) ∈ R^{-1}

则对于 ∀ a ∈A, (a,a) ∈ R^{-1}，关系 R^{-1} 也是自反的

下面假设集合 A 上的关系 R^{-1} 也是自反的，

即 ∀ a ∈A, (a,a) ∈ R^{-1}

即 (a,a) ∈ R

则对于 ∀ a ∈A, (a,a) ∈ R，关系 R 也是自反的

综上，命题得证

4 Problem 4

解：对称性：

由于加法具有可交换律，a+b = b+a, 故若 (a,b)∈R, 则 (b,a)∈R，具有对称性

5 Problem 5

证：

我们使用数学归纳法, 当 n = 1 时，由题设，R 是自反的，故成立

不妨假设 n = k 时 R^k 是自反的

则当 n = k+1 时，对于 $\forall$(a,c)$\in R^{k+1}$,$\exists$b$\in$A，(a,b)$\in$R,(b,c)$\in R^k$

由于 R^k 和 R 都是自反的，故 (b,a)$\in$R,(c,b)$\in R^k$

由结合律，$R^{k+1} = \mathrm{R} \circ R^k = \mathrm{R} \circ \mathrm{R} \circ \mathrm{R} \circ \cdots\cdots \circ \mathrm{R} = (\mathrm{R} \circ \mathrm{R} \circ \mathrm{R} \circ \cdots\cdots) \circ \mathrm{R} = R^k \circ \mathrm{R}$

故 (c,a)$\in R^{k+1}$

故具有自反性

6 Problem 6

(1):$R_1 \cup R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) :$\mathrm{R}_1 \cap R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(3):$R_1 \circ R_2 = R_1 \otimes R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(4):$R_1 \circ R_1 = R_1 \otimes R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(5): 由 的定义，$R_1 R_1 = R_1 \cup R_2$ - $R_1 \cap R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7 Problem 7

(1): 对应 01 矩阵为：$R^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$R^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(5)}$ 即为所求

(2): 对应 01 矩阵为: $R^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(5)}$ 即为所求

(3): 对应 01 矩阵为: $R^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(5)}$ 即为所求

(4): 对应 01 矩阵为: $R^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$R^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathrm{R}^{(5)}$ 即为所求

8 Problem 8

证：由定义可知，$\forall$x$\in Z^+$,x+x = x+x, 故 (x,x) 在 R 中，自反性得证

又若 (a,b) 和 (c,d) 在 R 中，此时 a+d = b+c。对于 (b,a) 和 (d,c)，此时有 b+c = a+d 故

(b,a) 和 (d,c) 也在 R 中，对称性得证

对于 (a,b) 我们首先讨论 a = b, 由自反性得知，I_A⊆R, 故此时满足传递性。若 a≠b, 由对称性，我们知道 (b,a),(a,a) 均在 R 中 (由自反性和对称性)，即此时也满足传递性

综上，R 为等价关系

9 Problem 9

(1): 解：r(R) = {<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<e,e>,<e,f>,<f,f>}

sr(R) = {<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>,<c,a>,<c,c>,<d,d>,<e,e>,<e,f>,<f,e>,<f,f>}

sr(R) 的关系矩阵为：$R^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

由 warshall 算法，t(s(r(R))) 的关系矩阵 R^* 为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2):A/R^* = {{<a,a>},{<b,b>},{<c,c>},{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>},{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,b>,

<b,c>,<c,a>,<c,b>,<c,c>},{<d,d>},{<e,e>},{<f,f>},{<e,e>,<e,f>,<f,e>,<f,f>}}

10 Problem 10

n 个元素的集合中，满足对称且前后元素不同的有序对一共 $\frac{n(n-1)}{2}$ 对，I_n 一共 n 个元素，且 n 个元素的集合一共有 2^{n^2} 个

a): 解：要满足对称性，则对称且前后元素不同的有序对同时出现且可以任取 (即有均出现均不出现两种情况)，I_n 中的元素均任取

即共有 $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \times 2^n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 个

b): 解: 要满足反对称性, 则对称且前后元素不同的有序对一定不同时出现 (一共有均不出现, 两者分别出现三种情况), 且 I_n 中的元素任取

即共有 $3^{\frac{n(n-1)}{2}} \times 2^n$ 个

c): 解: 非对称性与对称性互斥,

一共有 2^{n^2}-$2^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}(2^{\frac{n(n-1)}{2}} - 1)$ 个

d): 解: 要满足反自反性, 则 I_n 中的元素均不取,

即共有 2^{n^2-n} 个

e): 解: 要满足对称性, 则对称且前后元素不同的有序对同时出现且可以任取 (即有均出现均不出现两种情况), 且 I_n 中的元素全取

即一共 $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 个

f): 解: 要满足自反性, 则 I_n 中的元素均取,

即共有 2^{n^2-n} 个

故既不自反也不反自反的一共 2^{n^2}-2^{n^2-n}-$2^{n^2-n} = 2^{n^2-n+1}(2^{n-1} - 1)$ 个