95

离散数学（2023）ghw1

谢庆轩
221900325

2023 年 5 月 15 日

1 Problem 1

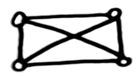
证明：假设 G 是简单图，记其度最大的顶点为 $g, deg(g) = n$，则有 n 个顶点各自通过一条边与之相连，由于图中顶点的度均不相同，这些顶点的度数应当分别为 $1, 2, ..., n-1$，然而总共有 n 个顶点，由鸽巢原理可知必有两顶点度数相同，矛盾，故 G 不是简单图

2 Problem 2

记总度数为 S_n，最大度数为 a_{max}，最小度数为 a_{min}
a) 此处令 $S_n = a_{max} + S_{n-1}$ 只需证 $\frac{S_n}{n} \geq \frac{S_{n-1}}{n-1}$，即证 $(n-1)a_{max} \geq S_{n-1}$，因为 $a_{max} \geq a_i$，所以 $(n-1)a_{max} \geq S_{n-1}$ 成立，故从图中删去一个度最大的顶点不会使其顶点平均度增加，得证
b) 此处令 $S_n = a_{min} + S_{n-1}$ 只需证 $\frac{S_n}{n} \leq \frac{S_{n-1}}{n-1}$，即证 $(n-1)a_{min} \leq S_{n-1}$，因为 $a_{min} \leq a_i$，所以 $(n-1)a_{min} \leq S_{n-1}$ 成立，故从图中删去一个度最小的顶点不会使其顶点平均度减少，得证 -5

3 Problem 3

a) 否，各顶点度数各不相同
b) 是，



$c)$ 否，度数为 $5, 4, 2$ 的三个顶点相连至少会多出 6 条边需要不同顶点对应，然而只剩下 3 个度数为 1 的顶点
$d)$ 否，度数为 5 的点需要五个不同的顶点与之相连，然而只剩下 4 个不同的顶点

4 Problem 4

证明：因为 $\sum_{i=1}^{\nu} \nu_i = 2\varepsilon$，又 $\nu\delta(G) \leq \sum_{i=1}^{\nu} \nu_i \leq \nu\Delta(G)$，所以 $\delta(G) \leq \frac{2\varepsilon}{\nu} \leq \Delta G$，得证

5 Problem 5

$a)$ 证明：记图 G 中有 n 个顶点，则由 $\frac{na-2deg(x)}{n-1} \geq a$，求解可得 $deg(x) \leq \frac{a}{2}$；由 $deg(x) \leq \frac{a}{2}$，代入可得 $\frac{na-2deg(x)}{n-1} \geq a$。综上，$G$ 删去一个顶点 x 后平均度至少为 a，当且仅当 $deg(x) \leq \frac{a}{2}$，得证
$b)$ 证明：若当前图的最小度小于等于 $\frac{a}{2}$，则删去该最小度的顶点，可知图的顶点平均度不会减少，重复执行，直到最小度的点大于 $\frac{a}{2}$，此时剩下的便是 G 的一个最小度大于 $\frac{a}{2}$ 的子图，得证

6 Problem 6

证明：队伍可看作顶点，比赛关系可看作边，于是此题可转化为 n 个顶点和 $n+1$ 条边构成的无向图。假设没有球队比赛了至少 3 场，则任意一点度数小于等于 2，即 $\forall \nu_i \in G, \sum_{i=1}^{n} deg(\nu_i) \leq 2n$，这与 $\sum_{i=1}^{n} deg(\nu_i) = 2(n+1)$ 矛盾，故一定有一个球队比赛了至少三场，得证

7 Problem 7

证明：记该图为 G，因为该图不含 K_3 作为子图，所以对任意相邻的两点 x, y，二者邻接点集的交集为空，于是 $deg(x)+deg(y) \leq n$，可得 $\sum_{\{x,y\}\in G} deg(x) + deg(y) \leq \sum_{\{x,y\}\in G} n = nm$，又 $\sum_{\{x,y\}\in G} deg(x) + deg(y) = \sum_{x\in V(G)} deg^2(x)$，所以 $nm \geq \sum_{x\in V(G)} deg^2(x) \geq \frac{1}{n}(\sum_{x\in V(G)} deg(x))^2 = \frac{4m^2}{n}$，即 $m \leq \frac{n^2}{4}$，得证