3. 数学归纳法 (3-induction)

姓名： 鲁权锋　　**学号：** 201830168

评分： 19.5'　　**评阅：** 肖江

2021 年 3 月 25 日

请独立完成作业，不得抄袭。 若得到他人帮助, 请致谢。 若参考了其它资料，请给出引用。 鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1　作业（必做部分）

题目 1 (相识关系 [4 分] ⋆⋆)
假设有 $2n+1$ 个人。对于任意 n 个人构成的一个小组, 都存在一个人 (不属于这个小组) 与这 n 个人都相识 (假设 “相识” 是相互的)。
请证明, 存在一个人, 他/她认识其它所有 $2n$ 个人。

3.5'
在归纳步骤中使用归纳假设时，需要更加严谨的说明

证明:
首先将这 $2n+1$ 个人分成两部分:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \qquad (1)$$

$$B_1, B_2, \ldots, B_n, B_{n+1} \qquad (2)$$

由题设条件，在第二部分中必然存在一个人，他认识第一部分的所有人。

因此，可以将问题转化为:

在这 $2n+1$ 个人中，必然存在 $n+1$ 个人，他们互相认识。(因为这 $n+1$ 个人中每个人都认识，而这里面必然有一个人认识 (1) 中的所有人，也即必然有一个人认识其他所有 $2n$ 个人。)

下面对自然数 n(≥ 1) 作归纳。

(i) 基础步骤:

$n=1$ 时，设该 3 个人分别为 A,B,C。对于 A（这个仅此一人小组），都存在一个人认识他 (题设)，不妨设这个人为 B。

因此，必然存在两个人（A 和 B），他们互相认识。则 $n=1$ 时成立。

(ii) 归纳假设:

假设 $n=k$ 时，在 $2k+1$ 个人中，存在 $k+1$ 个人，他们互相认识。

(iii) 归纳步骤:

$n=k+1$ 时，由 (ii)，在 $2(k+1)+1=(2k+3)$ 个人中，存在 $k+1$ 个人，他们互相认识（设该群体为 M)。则对于 M，在另外的 $k+2$ 个人中，必存在一个人 (设为 D)，他认识 M 中所有人（题设条件)。但 M 里的人互相认识，而 D 又认识 M 中所有人，因此，这 $k+2$ 个人，他们互相认识。

此即在这 $(2k+3)$ 个人中，存在 $(k+1)+1$ 个人，他们互相认识。

由归纳原理，得知在这 $2n+1$ 个人中，必然存在 $n+1$ 个人，他们互相认识。而这 n 个人中必然存在一个人，认识另外所有 n 个人。因此，必然存在一个人，他认识其他所有 2n 个人。

证毕。

□

题目 2 (邮资问题 [6 分] ⋆⋆)

6'

请证明, 只用 4 分与 5 分邮票, 就可以组成 12 分及以上的每种邮资。

(或者: 每个不小于 12 的整数都可以写成若干个 4 或 5 的和。)

证明:

设 $P(n)$ 表示整数 n 可以写成若干个 4 或 5 的和。则可以将原命题简化为：证 $n \geq 12$ 时，$P(n)$ 成立。

下面对 $P(n)$，对自然数 n($n \geq 12$) 做强归纳。

(1) 基础步骤：

$n = 12$ 时，

$$12 = 4+4+4 \qquad 13 = 4+4+5 \qquad 14 = 4+5+5 \qquad 15 = 5+5+5$$

因此 $P(12) \wedge P(13) \wedge P(14) \wedge P(15)$ 成立。

(2) 归纳假设：

假设 $n = k$ 时，$P(k-3)$, $P(k-2)$, $P(k-1)$, $P(k)$ 均成立。

(3) 归纳步骤：

由 (2) 知，$P(k)$，$P(k-1)$，$P(k-2)$，$P(k-3)$ 成立。又

$$k+1 = (k-3)+4, \qquad k+2 = (k-3)+4, \qquad k+3 = (k-1)+4, \qquad k+4 = (k)+4$$

因此 $P(k+1)$, $P(k+2)$,$P(k+3)$,$P(k+4)$ 均成立。

由归纳原理，知对于自然数 n($n \geq 12$)，$P(n)$ 均成立。

即每个不小于 12 的整数都可以写成若干个 4 或 5 的和。

也即只用 4 分与 5 分邮票, 就可以组成 12 分及以上的每种邮资。

□

题目 3 (结合律 [4 分] ⋆⋆)

设 $*$ 是一个满足结合律的二元运算符, 即

4'

$$(a*b)*c = a*(b*c).$$

请证明, $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$ ($n \geq 3$) 的值与括号的使用方式无关。

证明:

对自然数 n($n \geq 3$) 作强归纳。

(i) 基础步骤：

$n = 3$ 时，由题设，即

$$(a*b)*c = a*(b*c). \qquad (*)$$

得

$$(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3).$$

显然，$a_1 * a_2 * a_3$ 的值与括号的使用方式无关。

(ii) 归纳假设：

假设 $n = 4, 5, \ldots, k-1, k$ 时，命题成立，即

$a_1 * a_2 * \cdots * a_4$，$a_1 * a_2 * \cdots * a_5$，…，$a_1 * a_2 * \cdots * a_{k-1}, a_1 * a_2 * \cdots * a_k$ 的值与括号的使用方式无关。

(iii) 归纳步骤：

$n = k+1$ 时，

首先，由 (ii)，当一个或多个括号加在 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 的内部及两侧时，对式子的值不影响。特别地，有

$$(a_1 * a_2 * \cdots * a_k) = a_1 * a_2 * \cdots * a_k \qquad (**)$$

下面重点讨论括号加在 a_k 和 a_{k+1} 两侧和加在 a_i $(2 \leq i \leq (k-1)$, i 为正整数) 和 a_{k+1} 两侧的情况。

(1) 括号加在 a_k 和 a_{k+1} 两侧.

设 $(a_1 * a_2 * \cdots * a_{k-1})$ 的运算结果为 A.

则加括号前表示为

$$A * a_k * a_{k+1}$$

结合 $(**)$ 式, 也即

$$(A * a_k) * a_{k+1} \qquad [\mathbf{1}\ ]$$

加括号后表示为

$$A * (a_k * a_{k+1}) \qquad [\mathbf{2}\ ]$$

又根据题设，也即 $(*)$ 式，可知上面两式相等。

因此，括号加在 a_k 和 a_{k+1} 两侧时，$a_1 * a_2 * \cdots * a_{k+1}$ 的值与括号的使用方式无关。

(2) 括号加在 a_i $(2 \leq i \leq (k-1)$, i 为正整数) 和 a_{k+1} 两侧.

设 $(a_1 * a_2 * \cdots * a_{i-1})$ 的运算结果为 B.

$(a_i * a_{i+1} * \cdots * a_k)$ 的运算结果为 C.

加括号前的式子表示为

$$B * C * a_{k+1}$$

结合 $(**)$ 式, 也即

$$(B * C) * a_{k+1} \qquad [\mathbf{3}\ ]$$

加括号后表示为

$$B * (C * a_{k+1}) \qquad [\mathbf{4}\ ]$$

再根据 (ii) 和题设，即 $(*)$ 式，可知上面两式也相等。

因此，括号加在 a_i $(2 \leq i \leq (k-1)$, i 为正整数) 和 a_{k+1} 两侧时，$a_1 * a_2 * \cdots * a_{k+1}$ 的值与括号的使用方式无关。

综上，由归纳原理，得 $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$ $(n \geq 3)$ 的值与括号的使用方式无关。

□

题目 4 (数数 [6 分] ⋆⋆⋆)

令 T_n 表示相邻位数字不相同的 n 位数的个数, E_n 表示相邻位数字不相同的 n 位数偶数的个数, O_n 表示相邻位数字不相同的 n 位数奇数的个数。

规定: 以上所有的 n 位数仅考虑不以 0 开头的数字。例如, $E_1 = 4$。

请给出 T_n, E_n, O_n 的计算公式。

解答：
易知 $E_1 = 4 \qquad O_1 = 5 \qquad T_1 = E_1 + O_1 = 9.$ 6'

设 $P(n)$ 表示相邻位数字不相同的 n 位数。 $(*)$

(i) 先计算 T_n。

可以想到，所有的 $P(n)$ 可以视为所有的 $P(n-1)$ 全部向左移一位，再在原来的个位上补上满足一个条件 A 的数。而这个条件 A 为：不与原来 $P(n-1)$ 的个位数相同。

不妨将该操作记为“补个位”。 $(**)$

这个变换操作即

$$A_nA_{n-1}A_{n-2}\ldots A_1 \to A_nA_{n-1}A_{n-2}\ldots A_1X$$

其中 A_i 表示 $P(n)$ 第 i 位上（从个位开始是第一位）的数, X 表示在个位新补入的数，且 $X \neq A_1$.

因此，对于每一个 $P(n-1)$，均有 9 种补个位的方法（在 $0 \sim 9$ 中除去一个与原先个位数相同的数）.

据此可得递推式：

$$T_n = 9 \times T_{n-1}$$

又 $\qquad T_1 = 9$，结合两式可算得：

$$T_n = 9^n$$

(ii) 下面讨论 O_n 和 E_n.

结合 (i) 中的“补个位原则”，可知，当 $P(n-1)$ 为奇数时，通过“补个位”，可以产生 4 个奇数的 $P(n)$ 和 5 个偶数的 $P(n)$。(因为 $P(n-1)$ 的个位数是奇数，因此只能补上 4 个奇数或者 5 个偶数)

同理，当 $P(n-1)$ 为偶数时，通过“补个位”，可以产生 5 个奇数的 $P(n)$ 和 4 个偶数的 $P(n)$。

因此可得递推式：

$$O_n = 4 \times O_{n-1} + 5 \times E_{n-1}$$
$$E_n = 4 \times E_{n-1} + 5 \times O_{n-1}$$

再结合 $E_1 = 4 \qquad O_1 = 5$，可算得：

$$O_n = \begin{cases} \frac{9^n-1}{2} + 1 & \text{当 n 为奇数.} \\ \frac{9^n-1}{2} & \text{当 n 为偶数.} \end{cases}$$

$$E_n = \begin{cases} \frac{9^n-1}{2} & \text{当 n 为奇数.} \\ \frac{9^n-1}{2} + 1 & \text{当 n 为偶数.} \end{cases}$$

---

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用“教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$