82

离散数学（2023）作业 21

张波
221900326

2023 年 5 月 17 日

1 Problem 1

反驳。这个命题是错误的。下面是一个反例：

考虑一个无向图 G，它有 5 个顶点，边集为 1,2, 2,3, 3,4, 4,5, 5,1, 2,4 。可以验证该图中每个顶点的度数都不相同，但是它是一个简单图，因为它没有重边和自环。

因此，这个命题不成立。

2 Problem 2

-5

a) 反例：考虑有 4 个顶点的图 G，度数分别为 $1,2,3,3$，平均度为 2.25。删去度数为 3 的顶点后，得到一个度数分别为 $1,2,3$ 的图 G'，平均度为 2，显然平均度增加了。

b) 反例：考虑有 5 个顶点的图 G，度数分别为 $1,2,3,4,4$，平均度为 2.8。删去度数为 1 的顶点后，得到一个度数分别为 $2,3,4,4$ 的图 G'，平均度为 3.25，显然平均度减少了。

3 Problem 3

a) 不行。因为这个度序列的顶点数是 8，而它的最大度数为 7，这意味着它至少有一条边连接到另一个度数为 7 的顶点，但是没有这样的顶点存在。

b) 可以。一个简单图的度序列为 3,3,3,3 可以由四个顶点组成，其中每个顶点的度数都为 3，可以构造一个正方形。

-2 图?

c) 可以。一个简单图的度序列为 5,4,2,1,1,1 可以由六个顶点组成，其中度数为 5 的顶点连接到其余所有顶点，度数为 4 的顶点连接到其余四个顶点，而度数为 1 或 2 的顶点只连接到度数为 5 的顶点。

-3

-3

d) 可以。一个简单图的度序列为 5,4,3,2,2 可以由五个顶点组成，其中度数为 5 的顶点连接到其余四个顶点，度数为 4 的顶点连接到其余三个顶点，而度数为 3 或 2 的顶点连接到度数为 5 的顶点和度数为 4 的顶点。

4 Problem 4

对于无向图 G，其所有顶点度数之和等于 $2E$，即：

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = 2E$$

度数的最小值和最大值分别为 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$，则有：

$$\delta(G) \leq \frac{\sum_{v\in V} \deg(v)}{V} = \frac{2E}{V} \leq \frac{\sum_{v\in V} \deg(v)}{V} = \Delta(G)$$

其中第一个不等式成立是因为 $\delta(G)$ 是所有度数中的最小值，因此 $\sum_{v\in V} \deg(v) \geq \delta(G)V$；第二个不等式成立是因为 $\Delta(G)$ 是所有度数中的最大值，因此 $\sum_{v\in V} \deg(v) \leq \Delta(G)V$。最后一个等式成立是因为所有顶点的度数之和等于 $2E$。因此：

$$\delta(G) \leq \frac{2E}{V} \leq \Delta(G)$$

5 Problem 5

a) 设 G 中共有 n 个顶点，删去顶点 x 后，仍然有 $n-1$ 个顶点。设删去顶点 x 后，其余 $n-1$ 个顶点的度数之和为 S。则根据顶点平均度的定义有：

$$a = \frac{2E}{n} = \frac{2(S+\deg(x))}{n-1}$$

化简得：

$$\deg(x) = \frac{2a(n-1)-2S}{2} = a(n-1) - \frac{S}{2}$$

由于顶点 x 的度数为非负整数，因此有：

$$\deg(x) \geq 0 \Rightarrow S \leq an$$

将 $S \leq an$ 代入上式得：

$$\deg(x) \leq a(n-1) - \frac{an}{2} = a\left(\frac{n}{2}-1\right)$$

当且仅当 $\deg(x) \leq \frac{a}{2}$ 时，有：

$$\deg(x) \leq a\left(\frac{n}{2}-1\right) \leq a(n-2) \Rightarrow \frac{2S}{n-1} \geq a$$

即删去顶点 x 后，平均度至少为 a。

b) 反驳。取 n 个顶点构成一个 n 阶星形图，其中中心顶点的度为 $n-1$，其余顶点的度均为 1。该图的顶点平均度为：

$$a = \frac{2(n-1)+n-2}{n} = \frac{3n-4}{n}$$

−5

取 $n=3$，则 $a=\frac{5}{3}>\frac{3}{2}$。然而该图没有最小度大于 $\frac{a}{2}=\frac{5}{6}$ 的子图。

6 Problem 6

假设所有队伍最多只打了 2 把，则最最多进行了 n 场比赛，而进行了 n+1 场比赛，则假设错误，至少有一个队伍进行了 3 场比赛

7 Problem 7

当 $n=1,2$ 时，显然成立。

假设当 $n=k$ 时结论成立，考虑 $n=k+1$ 时的情况。如果 G 不包含 K_3 作为子图，那么 G 中所有顶点的度数必须小于等于 $2k-1$。因为如果某个顶点 v 的度数大于 $2k-1$，那么 v 连接的两个顶点和 v 形成了一个 K_3。所以，G 中所有顶点的度数之和必须小于等于 $2nk$，即：

$$\sum_{i=1}^{k+1} d_i \leq 2nk$$

$\sum_{i=1}^{k+1} d_i = 2m$，所以 $2m \leq 2nk$，即 $m \leq \frac{n^2}{4}+n-1$。因为 $n \geq 3$，所以 $\frac{n^2}{4}+n-1 \leq \frac{n^2}{4}$，即 $m \leq \frac{n^2}{4}$，证毕。