60

作业二十二 221900353 方志轩

fzx947766

May 2023

1 problem1

-10

2 problem2

矩阵 D 是该图的拉普拉斯矩阵，也称为度数矩阵。 计算 -5

3 problem3

-10

4 problem4

对于一个具有 4 个顶点的非同构简单图，如果它包含 C_3，则必须存在一个三元组 (u, v, w)，它们两两相邻，形成一个三角形。这样的三元组共有 $43 = 4$ 种可能，因此对于每个三元组，我们可以选择是否将 u 和 w 相邻，共有 2 种可能。因此，共有 $4 \times 2 = 8$ 种具有 4 个顶点且包含 C_3 的非同构简单图。

对于一个具有 4 个顶点的非同构简单图，如果它没有孤立点，则必须满足以下两个条件之一： -10

所有顶点的度数均为 2; 有一个顶点的度数为 3，其余顶点的度数均为 1。针对第一种情况，共有 2 种：针对第二种情况，我们可以选择度数为 3 的顶点，共有 4 种选择，然后将其与另外两个顶点相邻，共有 2 种可能。因此，共有 $4 \times 2 = 8$ 种具有 4 个顶点且没有孤立点的非同构简单图。

因此，共有 $2 + 8 = 10$ 种具有 4 个顶点且没有孤立点的非同构简单图。

对于一个具有 4 个顶点的非同构简单图，如果它是二部图，则必须满足以下两个条件之一：所有顶点可以被染成两种颜色，使得每条边的两个端点的颜色不同；图中不存在奇环。针对第一种情况共有 3 种：针对第二种情况，我们可以列举所有可能的图形式。由于图中不存在奇环，因此图中的度数必须为偶数。由于图中共有 8 条边，因此度数的可能取值为 $(2,2,2,2)$ 和 $(1,3,1,3)$。对于前一种情况，所有顶点可以被染成两种颜色，形成一个二部图。对于后一种情况，不存在任何一种染色方式可以使得图中不存在奇环。因此不存在度数为 $(1,3,1,3)$ 的非同构简单图。

因此，共有 $3+1=4$ 种具有 4 个顶点且是二部图的非同构简单图。

5 problem5

设 G 是自补图，n 是 G 的顶点数，m 是 G 的边数。由于 G 与 $\overline{G}$ 是同构的，因此 G 中有 $n2-m$ 条边。

根据定义，自补图 G 中的每个顶点都恰好与 $n-1-\deg(v)$ 个顶点相邻，其中 $\deg(v)$ 是顶点 v 的度数。因此，G 的度数序列为 $(n-1-\deg(v),\ldots,n-1-\deg(v))$。同时，$\overline{G}$ 中每个顶点都恰好与 $\deg(v)$ 个顶点相邻，因此 $\overline{G}$ 的度数序列也为 $(\deg(v),\ldots,\deg(v))$。

根据握手定理，G 中所有顶点的度数之和等于 $2m$，而 $\overline{G}$ 中所有顶点的度数之和等于 $n2-m$。因此：

$$\sum_{v\in G}(n-1-\deg(v))=2m \quad and \quad \sum_{v\in\overline{G}}\deg(v)=n2-m$$

化简得到：

$$n^2-2(n-1)\sum_{v\in G}\deg(v)+\sum_{v\in G}\deg(v)^2=2mn$$

因为 G 是自补图，所以 G 和 $\overline{G}$ 中的度数序列是相同的，即 $\deg(v)+\deg(v')=n-2$ 对所有 $v,v'\in G$ 成立。因此：

$$\sum_{v\in G}\deg(v)=\frac{n(n-1)}{4} \quad and \quad \sum_{v\in G}\deg(v)^2=\frac{n(n-1)(n-3)}{4}$$

代入上面的式子，得到：

$$n(n-1) = 8m \quad \Rightarrow \quad n^2 - n - 8m = 0$$

解这个二次方程，得到：

$$n = \frac{1 + \sqrt{1 + 32m}}{2}$$

因为 n 是整数，所以 $1 + 32m$ 必须是完全平方数。设 $1 + 32m = k^2$，则：

$$k^2 - 8(2m+1) = 1$$

这是一个典型的 Pell 方程，它的最小正整数解是 $(k_0, 2m+1) = (9, 1)$。所有正整数解 $(k, 2m+1)$ 可以通过递推公式 $k_{n+1} = 9k_n - 64(2m+1)$ 和 $2m+1_{n+1} = -4k_n + 29(2m+1)$ 来得到。因此，$n = k^2 - 1$ 必须是 $8m+1$ 或 $8m+2$。

如果 $n = k^2 - 1$ 是 $8m+2$，则 $n \equiv 2 \pmod 8$，因此 $n^2 \equiv 4 \pmod 8$，矛盾。因此 $n = k^2 - 1$ 必须是 $8m+1$，即 $n \equiv 0, 1 \pmod 4$。

综上所述，若图 G 是自补图，则其顶点数 V 满足 $V \equiv 0, 1 \pmod 4$。

6 problem6

1. 对于同构不变量 $n(G) = 5, m(G) = 5$，我们可以构造两个不同构的图：图 G_1：K_5 中的一个三角形和一个不与三角形相邻的顶点。图 G_2：一个五元环加上一条连接相邻两个顶点的边。这两个图的子图中最大的完全图都是 K_3，但是它们并不同构。

2. 对于同构不变量 $\deg(G) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$，我们可以构造两个不同构的图：图 G_1：一个长度为 3 的链和一个长度为 4 的链的连接点。图 G_2：一个长度为 3 的链和一个长度为 2 的链的连接点，再加上一条连接两个长度为 2 的链的边。这两个图的度序列都是 $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$，但是它们并不同构。

?

画图 −5

7 problem7

设 G 是围长为 4 的 k 正则图，n 是 G 的顶点数，m 是 G 的边数。因为 G 是 k 正则图，所以 $m = \frac{kn}{2}$。

设 v 是 G 中一个顶点。根据定义，G 的围长为 4，说明 v 与距离 2 的顶点之间必须存在一条边。因为 G 是 k 正则图，所以 v 有 k 条边，其中一条边连接到一个距离 2 的顶点，另外 $k-1$ 条边连接到其他 $k-1$ 个顶点。因此，G 中距离 2 的顶点数为 kv。

设 S 是 G 中距离 2 的所有顶点组成的集合。由于 G 是围长为 4 的图，说明 S 中的任意两个顶点之间必须距离为 2 或 4。因此，$G[S]$ 中没有 K_4 子图。根据 Turán 定理，$G[S]$ 中最多有 $\lfloor \frac{(k-2)n^2}{2k^2-4k+3} \rfloor$ 条边。因为 G 是 k 正则图，S 中每个顶点的度数都是 $k-1$，因此 $G[S]$ 中边的条数等于 $|S|(k-1)/2$。将这个等式代入 Turán 定理，得到：

$$|S| \leq \frac{2(k-2)n^2}{(2k-4k+3)(k-1)} = \frac{2(n^2-2kn)}{(k-2)(2k-3)}$$

因为 G 是 k 正则图，所以 $|S| = kv$。代入上面的不等式，得到：

$$kv \leq \frac{2(n^2-2kn)}{(k-2)(2k-3)} \quad \Rightarrow \quad n^2 \geq (k-2)(2k-3)kv + 2kn$$

因为 G 是围长为 4 的图，所以 G 中至少存在一个长度为 4 的简单回路。设 C 是 G 中长度为 4 的简单回路，u 是 C 上的一个顶点。因为 G 是 k 正则图，所以 u 与 $2k-2$ 个顶点相邻，其中 $k-1$ 个顶点在 C 上，另外 $k-1$ 个顶点在 C 外。这 $2k-2$ 个顶点必须被分成若干组，每组中的顶点距离至少为 2（否则就会形成长度为 3 的简单回路）。因此，G 中距离 2 的顶点数至少为 $2k-2$。

结合上面的不等式，得到：

$$n^2 \geq (k-2)(2k-3)(2k-2) + 4k^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 \geq 4k^2$$

因此，$n \geq 2k$。

接下来，我们需要证明在同构意义下，围长为 4 且有 $2k$ 个顶点的正则图只有一种。设 G 和 H 是两个围长为 4 且有 $2k$ 个顶点的正则图。由于 G 和 H 是正则图，它们的度序列相同，因此它们同构当且仅当它们的邻接矩阵相同。

设 A_G 和 A_H 是 G 和 H 的邻接矩阵，v 是 G 中的一个顶点。由于 G 的围长为 4，v 与距离为 2 的顶点之间必须存在一条边，因此 v 的邻居中必须有至少两个距离为 2 的顶点。设 u_1 和 u_2 是 v 的距离为 2 的两个邻居，w_1 和 w_2 是 u_1 和 u_2 的另外两个距离为 2 的邻居。因为 G 是正则图，所以 u_1 和 u_2 的邻居必须包含 w_1 和 w_2，否则 G 中将存在长度为 3 的简单回路。因此，A_G 中必须存在一个 4×4 的子矩阵，其中第一行和第一列分别是 v, u_1, u_2, w_1，其余元素均为 0。因为 G 是 k 正则图，所以这个 4×4 的子矩阵的每一行和每一列都有 $k-1$ 个 1。因此，A_G 中必须存在一个 4×4 的子矩阵，其中第一行和第一列分别是 v, u_1, u_2, w_1，其余元素均为 1。

同样，A_G 中还必须存在一个 4×4 的子矩阵，其中第一行和第一列分别是 v, u_1, u_2, w_2，其余元素均为 1。因此，A_G 中必须存在一个 6×6 的子矩阵，其中前两行和前两列分别是 v, u_1, u_2, w_1, w_2，其余元素均为 0。因为 G 是 k 正则图，所以这个 6×6 的子矩阵的每一行和每一列都有 $k-1$ 个 1。因此，A_G 中必须存在一个 6×6 的子矩阵，其中前两行和前两列分别是 v, u_1, u_2, w_1, w_2，其余元素均为 1。

同样的方法可以得到 A_H 中也存在一个 6×6 的子矩阵，其中前两行和前两列分别是 v, u_1, u_2, w_1, w_2，其余元素均为 1。因此，A_G 和 A_H 中都存在一个 6×6 的子矩阵，其中前两行和前两列分别是 v, u_1, u_2, w_1, w_2，其余元素均为 1。因此，A_G 和 A_H 中存在相同的 6×6 子矩阵，因此它们同构。因此，围长为 4 且有 $2k$ 个顶点的正则图在同构意义下只有一种。