100

离散数学（2023）作业图论 2

艾睿
221900317

2023 年 5 月 16 日

1 Problem1

(1) : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2): 见图 $P1_{(2)}$（第 2 页）

2 Problem2

(1):

a):B= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,A= $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,D= $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b):B= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,A= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,D= $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2):D 为原图的度矩阵，$x_{ij} \in B \times B^T$ 表示 i 所含的边中与 j 相连的数

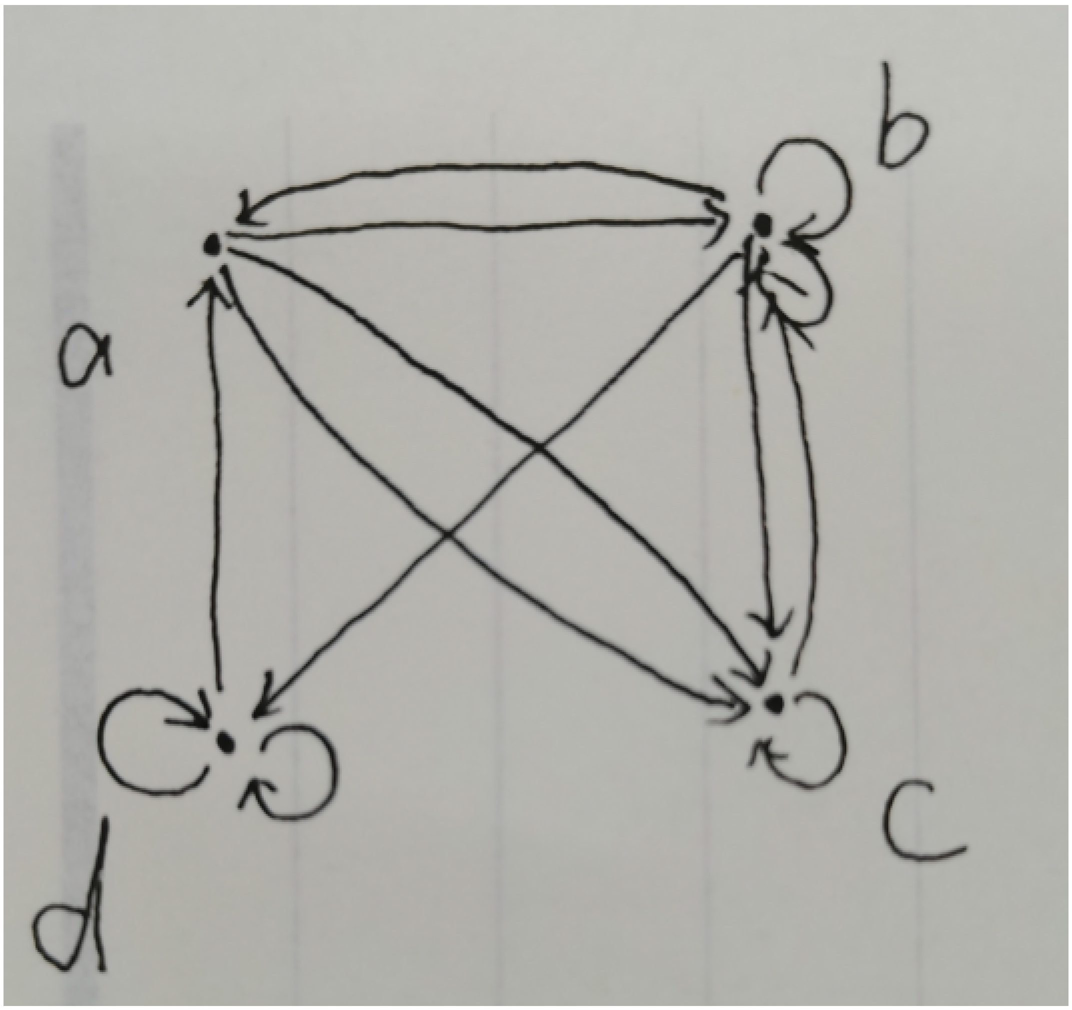

图 1: $P1_{(2)}$

量，统计了自身，而 A 表示顶点 i 与顶点 j 相连的边的数量，没有统计自身，所以得到的结果即为，自身所含的边的数量，即自身度数

3 Problem3

证明：两图具有相同的边数和点数，此时定义一个双射函数 f 为 $f(a) = A, f(b) = F, f(c) = D, f(d) = G, f(e) = C, f(f) = H, f(g) = B, f(h) = E$, 此时这个函数保证了两图间的顶点间的相邻一一对应关系，所以得证可以同构

4 Problem4

1): 因为顶点相同，那么我们只需保证边数不一致即可，那么简单图中包含 C_3 的图的四顶点图考虑最后一个顶点的度数即可，可取 0，1，2，3，4，所以有四个

2): 策略同 1)，没有孤立点则没有度数为 0 的点，那么我们此时对一个度为 (3,3,3,3) 的完全图进行删减边（即对两个度-1），则可以得到（3，3，2，2），在删减得到（3，3，1，1）（不存在舍去），（2，2，2，2），（3，2，2，1），在删减得到（2，2，1，1），（3，1，1，1），最后删减只能得到（1，1，1，1），及最后统计得到总计 7 种。

3): 首先没有边的图一种，然后划分为一个顶点，与三个顶点的二分图，产生的不同构图有三种，在划分为两个两个顶点的集合的图，产生不同构（包括不同构与之前的）的图有 3 种，总计 7 种

5 Problem5

证明：令 G 为 n 顶点图，函数 E(map) 为表示图中边的数量的函数，那么我们可以得到 $E(G) + E(G') = \frac{n(n-1)}{2}$, 因为由题意我们知道二者同构，所以总有 $E(G) = E(G') = \frac{n(n-1)}{4}$, 边数是个整数，那么总有 $nmod4 = 0or(n-1)mod4 = 0 \leftrightarrow n \equiv 0, 1(mod4)$，得证

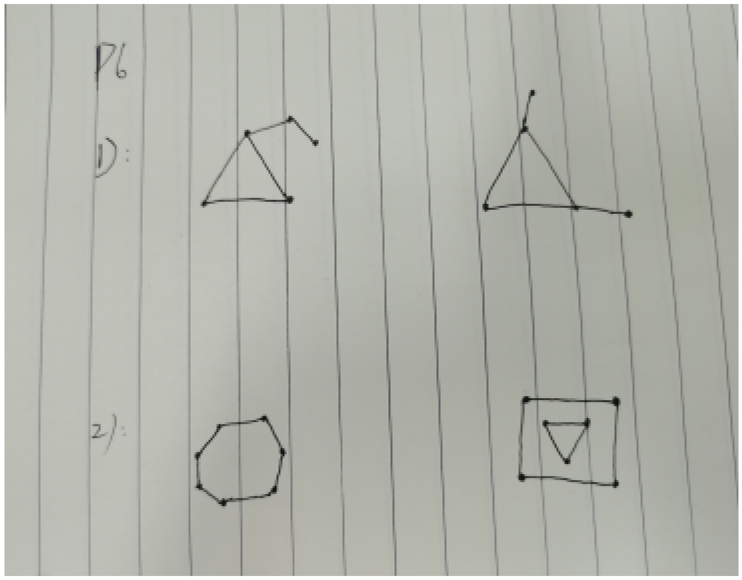

图 2: P6

6 Problem6

详见图 P6:(上方)

7 Problem7

正则图：各个顶点的度均相同的简单无向图，度为 k，则称为 k 正则图

证明：围长为 4 的正则图那么至少有度为 2 的点，所以 k 大于等于 2，数学归纳法证明：k=2 时，有且仅有一个 C_4 满足条件，符合假设，假设 k 为 2 到 m 时均满足假设，那么现在 k=m+1 时，在之前的图，我们找到一对相连点，则其中一个点连接其余 2m 个点中的 m 个，剩下的点连接其余 m 个点，那么则满足回路为长最短为 4，且度为 k+1，因为作图时对唯一的图作图，且先前图中的每一个点性质一样，即对额外的一对点性质一样，所以显然做出的图唯一。（如果两点不连接，那么其中一个点需对之前的图中的 m+1 个点连接，而为了确保性质，剩下的点只能连接被先前点剩下的 m-1 个点，此时不可能做出图）