95

ghw1 221900371

221900371 蒋鹏

2023 年 5 月 17 日

Problem1:

假设此无向图 G 有 n 个顶点，可知若其要是简单图，则任意一个顶点的度要小于等于 n-1. 因为当一个点的度大于等于 n 时，其与其余 n-1 个顶点连成 n-1 条边，多于 n-1 的边会产生重复或者自环，则不是简单图

又由于这 n 个点的度不一样，则不妨设其度分别为 n-1，n-2...0，则一个度为 0 的点与一个度为 n-1 的点矛盾，所以不可能存在无向图每个点的度不同而是简单图

Problem2:

(1)：假设图 G 有 n 个顶点，总度数为 N, 平均度为 $\frac{N}{n}$

当删去一个顶点后，设减少的度为 x，则平均度为 $\frac{N-x}{n-1}$

令 $\frac{N-x}{n-1}<=\frac{N}{n}$, 解得 x>=$\frac{N}{n}$

而一个度最大的顶点其度必然大于等于平均度，所以 x>=$\frac{N}{n}$ 一定成立 -5

所以从图中删去一个度最大的点，不会使顶点的平均度增加

(2):

同上，一个度最小的点其度必然小于等于平均度，所以 x<=$\frac{N}{n}$ 一定成立，

则 $\frac{N-x}{n-1}>=\frac{N}{n}$, 平均度不会减小

Problem3:

a): 不能，一个点度为 7 和一个点度为 0 矛盾

b): 能，一个四顶点的完全图

c): 不能.

d): 不能

Problem4:

设这 v 个顶点的度分别为 d_1 d_2 ... d_v. 且构成非递减序列

即 d_1 <= d_2 <=... <=d_v

可知每条边贡献两个度

所以 2ε=d_1+d_2+...+d_v

所以要证 δ(G)=d_1<=$\frac{d_1+d_2+...+d_v}{V}$<=$\Delta$(G)

而由于 d_1 <= d_2 <= ... <= d_v，容易得到上述不等式, 得证

Problem5:

(1): 显然对于一个平均度为 a 的图，若删去一个节点导致总度数减少数超过 a，则平均度会小于 a

所以删去的节点的度应该小于等于 $\frac{a}{2}$, 因为一条边贡献两个度。所以 G 删去一个顶点后平均度至少为 a，当且仅当 deg(x)<=$\frac{a}{2}$

(2):

反驳：若 G 是一个两节点的简单图，则不存在一个子图其最小度大于 $\frac{a}{2}$

Problem6:

反证法：假设在这种情况下，比赛最多的球队比赛了两场

若 n 为偶数，不妨分为 $\frac{n}{2}$ 组，每组之间重复比赛，则最多比赛 $\frac{n}{2}$*2=n 场，此时每支球队均比赛两场，第 n+1 场比赛会使任意球队比赛三场，则假设不成立

若 n 为奇数，将其中任意 n-1 支球队两两分组比赛，每组比赛两场，则共比赛 n-1 场，剩余两场比赛必然会使得其中一支球队比赛 3 场或以上，与假设矛盾

所以必然有一支球队比赛了至少三场

Problem7:

-10