2018 离散数学

1、 句子:“如果 Rob 能得到车开，他会带 Sue 去看电影”以下哪个句子与上述句子逻辑等价？

（e） 要么 Rob 得不到车，要么 Rob 将带 Sue 去看电影。

（f） 如果 Rob 带 Sue 去看电影，那么他就能得到车开。

（g） 如果 Rob 不带 Sue 去看电影，那么 Rob 得不到车开。

（h） 如果 Rob 得不到车开，他就不会带 Sue 去看电影。

2、 对 $n \in Z$，考虑下列谓词：$P(n)$: $n^2<4$. $Q(n)$: $n^3=n$. 用自然语言表示以下公式.

（a）$\forall n \in Z, P(n)$

（b）$\sim(\exists n \in Z, Q(n))$

（c）The contrapositive of $P(n) \Rightarrow Q(n)$

3、 洛杉矶警察 Klumbo 一整天在调查一起谋杀案中的 4 个嫌疑人：Adams，Benjamin，Carter，Dickens. 每个人都声称自己发案时不在现场而是在拉斯维加斯。经过调查，Klumbo 确认以下事实：

(1) If Adams went to Las Vegas, so did Benjamin.

(2) Benjamin and Carter did not both go to Los Angeles.

(3) If Carter went to Las Vegas, then Adams stayed in Los Angeles.

(4) Carter and Dickens did not both stay in Los Angeles.

(5) If Adams stayed in Los Angeles, so did Dickens.

(6) If Dickens went to Los Angeles, then Benjamin stayed in Los Angeles.

结果 Klumbo 决定释放 4 个人中的一个。他放了谁，为什么？

4、 设 S={1,2,3,4,5}. 举一个 S 上的等价关系的例子 R，有 4 个不同的等价类。并列出所有的等价类。

5、 f：A→B 是函数. 对于 B 的子集 B1，其逆像 $f^{-1}(B_1)$定义为 $f^{-1}(B_1)=\{a\in A|f(a)\in B_1\}$. 对 B 的任意子集 B_1 和 B_2 证明：$f^{-1}(B_1\cup B_2)= f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$

6、 函数 f：Z→Z 定义如下：

$$\mathrm{f(n)} = \begin{cases} n+1 & if \;\; n \geq 0 \\ n-1 & if \;\; n < 0 \;\; and \;\; n \neq -10 \\ n & if \;\; n = -10 \end{cases}$$

f 是否为一对一函数？是否为满射？为什么？

7、n 是正整数，S={1, 2, …, 2n}.

（a） 证明：S 包含子集合 S’，|S’|=n，且对 S’中任意不同元素 a 与 b，a∤b 且 b∤a.

（b） 证明：对 S 的任意子集 A，若|A|=n+1，则存在不同的 a，b 属于 A 满足 a|b。

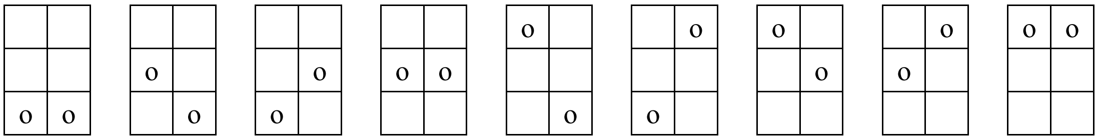
8、假设每出生一个婴儿，是女孩的概率是 0.49，并且一个家庭出生的每个孩子的性别是独立的。如果一个家庭有 5 个孩子，确定如下事件的概率：

（a） 恰好 3 个女孩

（b） 至少 1 个女孩

（c） 5 个全是男孩或者 5 个全是女孩

9、在如下的矩形框中最下面两格中各放一个硬币。此格式称为位置 1，用 P_1 表示，如下图所示。允许每次将 1 个硬币移动到上方相邻的方格。可能形成的位置有 9 个。



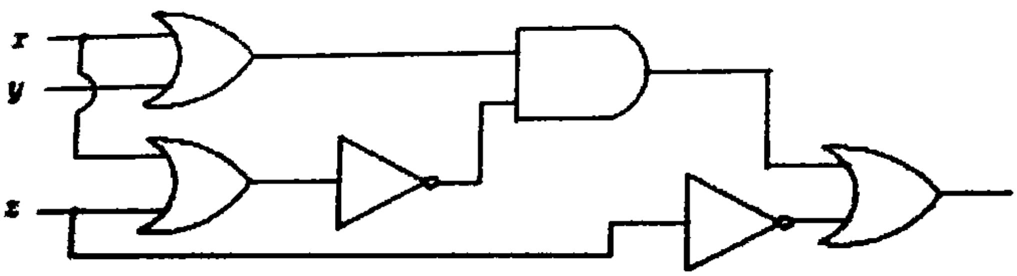
P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8 P_9

设 S={P_1, P_2，…，P_9}. 定义 S 上的关系≺: 如果达到位置 P_i 前必须先达到 P_i，则 P_i≺P_i。

证明:（S，≺）是偏序集。画出它的 Hasse 图。它是格吗？

10、设 S 是有限集合，$|S|=n\geq 2$。假设 R 是 S 上的等价关系。对任意的 $x\in S$，$n_x=|\{y\in S|(x,y)\in R\}|$. 若函数 f：$S\to\{1,2,\ldots,n\}$定义为 $f(x)=n_x$，$x\in S$。证明：如果 R 是等价关系，则 f 不可能是双射。

11、写出与如下组合电路对应的布尔表达式，并在每个逻辑门上标出其输出。



12、假设 P 是联通图 G 中的最长路。若 P 是 uv-路，证明 u 不是图中的割点。

13、假设 G 是联通带权图，T 是 G 的最小生成树。证明：T 是唯一最小生成树当且仅当 G 中任一不在 T 中的边 e 的权大于回路 T+e 中任何其它边的权。

14、Q 是有理数集，定义 Q 上的运算*为：a*b=a+b-ab（a，b∈Q，等号右边为普通算术运算）

（a）计算：（i）3*4；（ii）2*（-5）；（iii）7*（1/2）

（b）（Q，*）是否为半群？可交换吗？

（c）*的单位元是什么？

（d）Q 中什么元素有逆元素？逆元素是什么？

15、G 是可交换群，n 是给定的正整数。定义函数 f：G→G 为 f（a）=a^n。证明 f 是 G 上的同态映射。

2016 离散数学

1、(10 分)阿拉丁在山洞中发现两个柜子 A 和 B. 他知道每个柜子中要么是无价的珍宝要么是致命的机关.

柜子 A 上写着:“这两个柜子中至少有一个装着珍宝.”

柜子 B 上写着:“柜子 A 里是致命的机关.“

阿拉丁知道这两句话要么都对，要么都错.

问阿拉丁是否可以安全地打开装着珍宝的柜子？如果可以，该选哪个柜子？

2、(10 分)安妮从 11 到 21 的自然数中选 8 个不同的数. 试证明他选的数中必有两个数中必有两个数其和为 30.

3、(12 分)设 A 为一非空集合，f 是一个以 A 为定义域的函数. 定义 A 上的关系 R 为所有满足 $f(x)=f(y)$ 的有序对 (x,y) 的集合.

(a) 证明 R 是 A 上的一个等价关系.

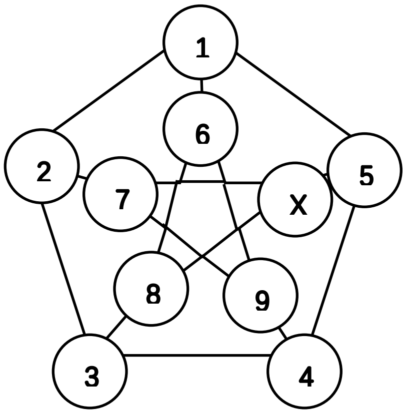
(b) 试描述 R 下的各个等价类.

4、（12 分）（a）试证明若（A，R）是一个偏序集，则（A，R^{-1}）也是一个偏序集.

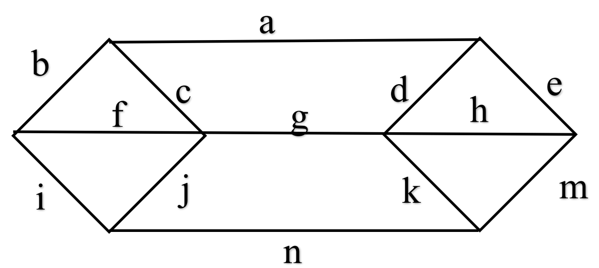
（b）试证明一个 10 个元素的格不可能是一个有补分配格.

5、（12 分）（a）今有 n 个顶点的简单图 G，已知其无环，但未必连通. 假设其含有 k 个连通分支. 试证明其有 n-k 条边.

（b）考虑右边的 Peterson 图. 它是否为二部图？若否，至少要删除几条边才能使其成为二部图？给出理由.



6、（12 分）（a）下图 G 有 13 条边。其各边权重列于下表中



Edge	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n
Weight	1	1	3	3	6	4	5	6	2	4	2	7	2

试用 Prim 算法找出一个 G 的最小生成树 S. 按算法中的加入顺序给出 S 的各条边.

（b）令 G 为一无向带权连通图，且假设图中存在一个回路. 试证明：在此回路上，若存在一个边 e 其权重严格大于此回路上的其他的边，则 e 不在 G 的任何最小生成树中.

7、（5 分）令 $f(x)=(x^2+5x+3)(x+2\log x)$, $x>0$. 判断以下说法对错：

（1）f（x）是 O（x^4）

（2）f（x）是 O（x^3）

（3）f（x）是 O（x^2）

（4）f（x）是 O（$x^3\log x$）

（5）f（x）是 O（$x^2\log x$）

8、（12 分）（a）试用容斥原理计算从 0000 到 9999 中随机选择一个数，其至少含有一个数字“1”的概率.

（b）某次考试由一些四选一的选择题构成. 学生要么真会，要么随机勾选. 假设某学生有 60%的题是真会. 若该生第一题答案正确，她这题真会的概率是多少？

9、（15 分）（a）设（M，∘）和（N，*）为半群. 试证明笛卡尔积 M×N 在运算 • 下也是一个半群，其中（m_1，n_1）•（m_2，n_2）:= （$m_1∘m_2$，n_1*n_2）；若 M 和 N 都是单元半群，其单位元分别为 e_M 和 e_N，则 M×N 亦是以（e_M，e_N）为单位元的单元半群.

（b）以上讨论可推广至任意有限多个半群 M_1，…，M_n：我们可定义直和 M=$\oplus_{i=1}^{n}M_i$，也就是相应集合的笛卡儿积，运算定义为及各分量上分别做运算；若各 M_i 均为单元半群，则 M 也是单元半群. 进而，推广至无限个半群$\{M_i\}_{i\in I}$，其下标集合为 I，我们可在笛卡儿积$\Pi_{i\in I}M_i$ 上类似地定义一个半群结构，且若各 M_i 均为单元半群（单位元为 e_i），则上述结构$\Pi_{i\in I}M_i$（称为直积）也是一个以 I-元组（e_i）$_{i\in I}$ 为单位元的单元半群（注意 I 是无限集合，这个元组“无限长”）. 若各 M_i 均为单元半群，可定义直和$\oplus_{i=1}M_i$，为直积$\Pi_{i\in I}M_i$ 的一个子单元半群，其元素为满足下列条件的 I-元组（$m_i\in M_i$）$_{i\in I}$：除有限个 i 之外，对于其他的 i 都必须有 $m_i= e_i$.

试证明：正整数及其乘法构成的单元半群（$\mathbb{Z}^+$, •）同构于可数无限个自然数及其加法单元半群（$\mathbb{N}^+$, •）. [提示：考虑所有素数的集合 P，这是一个可数无限集. 证明（$\mathbb{Z}^+$, •）≅ $\oplus_{p\in P}$（$\mathbb{N}$, +）即可.]