100

离散数学（2023）作业 XX

周帛岑
221900309

2023 年 5 月 15 日

1 Problem 1

证：不妨假设一共有 n 个顶点

不妨假设其为简单图

考虑到若有一个顶点的度 $\geq$n，则一定存在自环或有两条边的顶点集相同且包含这个顶点

此时度为 0，1，2，3......n-1

此时考虑度为 n-1 的顶点，由于度为 0 的顶点存在，显然，其也存在自环或有两点边的顶点集相同且包含这个顶点

与其为简单图相矛盾

故假设不成立，其不为简单图

2 Problem 2

(1): 不妨假设总度为 x，该条边的度为 y，一共有 n 个顶点

由题可知, 删除这一顶点后总度为 x-y-z，其中 0≤z≤y, 我们假设其为简单图，则 y = z

删除后的顶点平均度为 $\frac{x-2y}{n-1}$

假设 $\frac{x-2y}{n-1} \geq \frac{x}{n}$

我们可以解得 y $\leq \frac{x}{2n}$，（对于非简单图，有 y $\leq \frac{x}{kn}$，1≤z≤2）而平均度为 $\frac{x}{n}$

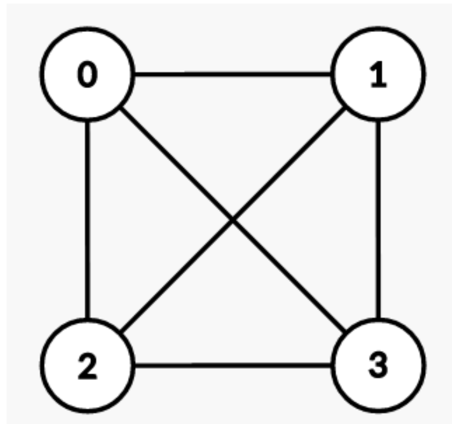
由定义，y 是所有顶点的度中最大的，显然大于 $\frac{x}{n}$，则这样的 y 不存在，命题得证

(2): 同理，我们依旧可以解得 y $\geq \frac{x}{2n}$，（对于非简单图，有 y $= \frac{x}{kn}$，1≤z≤2），此时 y 为最小度, 可以满足上述条件，故该命题是错误的

3 Problem 3

(1): 无法画出。由 problem 1 可知

(2):



(3): 由题可知，一共六个顶点，其中一个与其余 5 个均相连，其中有三个顶点的度为一，即他们仅与该顶点相连

考虑另一个度为四的顶点，去除度为五的顶点，其还需与三个顶点相连，而剩余四个顶点中有三个度为 1，产生矛盾，故无法画出

(4): 同 (3): 当我们进行到度为三的顶点时，会产生一样的矛盾，故无法画出

4 Problem 4

证：由题可知，$2\epsilon = \sum_{i=1}^{n} d(v_i)$, 即为所有的度之和，我们不妨将所有度按从大到小排成一个序列：$\Delta(G)$,$\alpha(G)$......$\delta(G)$

$2\epsilon = \Delta(G) + \alpha(G) + ... + \delta(G)$

$\frac{2\epsilon}{\nu} = \frac{\Delta(G)}{\nu} + \frac{\alpha(G)}{\nu} + ... + \frac{\delta(G)}{\nu} \leq \frac{\Delta(G)}{\nu} + \frac{\Delta(G)}{\nu} + ... + \frac{\Delta(G)}{\nu} = \Delta(G)$

同理，$\frac{2\epsilon}{\nu} = \frac{\Delta(G)}{\nu} + \frac{\alpha(G)}{\nu} + ... + \frac{\delta(G)}{\nu} \geq \frac{\delta(G)}{\nu} + \frac{\delta(G)}{\nu} + ... + \frac{\delta(G)}{\nu} = \delta(G)$

故命题得证

5 Problem 5

(1): 证：由题可知，假设一共有 n 个顶点

我们知道删除后的顶点平均度为 $\frac{x-2deg(x)}{n-1}$, 且 $\frac{na-2deg(x)}{n-1} \geq \frac{na}{n}$ = a

于是我们可以解得 deg(x) $\le \frac{a}{2}$, 命题得证

(2): 证：由题可知,，不妨设一共 n 个顶点，我们删去所有度小于 $\frac{a}{2}$ 的顶点

此时，整个图的平均度大于 a，而其余顶点的度此时不变或减少，则此时若仍存在度小于 $\frac{a}{2}$ 的顶点，则其度平均值不大于 a，与 (1) 中结论相悖，故命题得证

6 Problem 6

证：由题可知，我们不妨假设此时所有球队最多比赛两场，此时总度为 2n，而一共有 n+1 条边，根据握手定理，总度数应该为 2n+2，与假设矛盾，所以假设不成立

命题得证

7 Problem 7

证：由题可知，任取三个顶点，由这三个顶点连线形成的度小于等于 4，而这样的取法一共 $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$，而此时每一对顶点都被重复取了 (n-2) 次，对于这一对顶点，我们也相当于计算了两倍，则总度数小于等于 $\frac{n(n-1)}{3}$，根据握手定理，一共有 $\frac{n(n-1)}{6}$ 条边

假设 $\frac{n(n-1)}{6} \le \frac{n^2}{4}$, 解得 n 恒成立

故原命题得证

8 Problem 8

9 Problem 9

10 Problem 10