93

# 离散数学作业 ghw1

王铃

221900318

2023 年 5 月 16 日

## 1 problem 1

证明：假设 $G$ 是有 $n$ 个顶点的简单图，则不难看出 $G$ 中顶点的度小于等于 $n-1$，由于 $G$ 中各个顶点的度均不相同，所以 $G$ 中顶点的度分别为 $n-1, n-1, \ldots, 1, 0$, 而其中一个顶点与其他所有点相邻，一个顶点不与任何点相邻，矛盾，所以假设不成立，所以当各顶点度数均不相同时，$G$ 不是简单图，得证。

## 2 problem 2

设 $\frac{2\varepsilon}{\gamma}$ 为 $G$ 的顶点平均度，$(G)$ 为度最大的顶点的度，$\delta(G)$ 为度最小的顶点的度。

(a) 由于 $2\varepsilon\gamma \leq \Delta(G)\gamma$, 所以 $2\varepsilon\gamma - \Delta(G) \leq 2\varepsilon\gamma - 2\varepsilon$，所以 $\frac{2\varepsilon-\Delta(G)}{\gamma-1} \leq \frac{2\varepsilon}{\gamma}$，所以顶点平均度不会增加，得证。

(b) 由于 $2\varepsilon - 2\gamma \leq 2\varepsilon\gamma - \delta(G)$, 完全同理可得 $\frac{2\varepsilon}{\gamma} \leq \frac{2\varepsilon-\delta(G)}{\gamma-1}$, 所以顶点平均度不会减少，得证。

−5

## 3 problem 3

(a) 不能。一共八个顶点，可以看出度数最大的顶点与其余各顶点都邻接，而存在一个孤立点，这与前面矛盾，所以不能构成一个简单图。

图?

-2

(b) 可以。(c) 不能。若能构成简单图，则由于有两个顶点的度数为 4,5，即剩余四个顶点中有三个与这两个顶点邻接，即剩余四个顶点中至少有三个顶点的度不小于 2，与题目矛盾，所以不能。
(d) 不能。度数之和为边数的两倍，为偶数，而这里为奇数，所以不能。

# 4 problem 4

证明：由握手定理可知：$2\varepsilon$ 即为图 $G$ 中所有顶点的度的和。当每个顶点的度相同时，$\delta(G) = \Delta(G) = \frac{2\varepsilon}{\gamma}$, 此外，由于存在度数大于 $\delta(G)$ 的顶点，所以 $\frac{2\varepsilon}{\gamma} > \delta(G)$，由于存在度数小于 $\Delta(G)$ 的顶点，所以 $\frac{2\varepsilon}{\gamma} < \Delta(G)$, 所以，$\delta(G) \leq \frac{2\varepsilon}{\gamma} \leq \Delta(G)$, 得证。

# 5 problem 5

(a) 证明：设 $G$ 中有 $n$ 个顶点。令 $deg(x) = b$。当 $b \leq \frac{a}{2}$ 时，新的平均度 $a^{'} = \frac{na-2b}{n-1}$，所以 $a \leq a^{'}$，即删去顶点 $x$ 后平均度至少为 $a$. 若删去顶点 $x$ 后平均度至少为 $a$，由于没有自环，删去 $x$ 后总边数为 $\frac{na}{2} - b$，所以在此基础上求平均度有 $a^{'} = \frac{2\times(\frac{na}{2}-b)}{n-1}$，且 $a \leq a^{'}$，解不等式即可得 $b \leq \frac{a}{2}$，即：$deg(x) \leq \frac{a}{2}$, 得证。
(b) 可利用 (a)，不断删去 $G$ 中度小于等于 $\frac{a}{2}$ 的点，得到的子图就是最小度大于 $\frac{a}{2}$ 的子图。

# 6 problem 6

证明：首先，构造一个图模型，其中每支球队为一个顶点，两支球队之间进行了比赛则在这两只球队对应的顶点间存在一条边，由题意容易知道这是一个简单图 $G$。其次若每个顶点的度都相同，则边的总数为 $\frac{nx}{2}$，为 $n$ 的倍数，这与边的总数为 $n+1$ 矛盾，所以不是所有的顶点的度都相同。令 $a$ 为 $G$ 的顶点平均度，可知 $a = \frac{2\times(n+1)}{n} > 2$，所以一定存在一个顶点的度大于 2，即至少为 3. 所以一定由一支球队比赛了至少 3 场。

## 7 problem 7

证明: 当 $n = 3$ 时, $m = 2 \leq \frac{9}{4}$ 成立。假设当 $n = k$ 时结论成立, 即 $m \leq \frac{k^2}{4}$, 则当 $n = k + 1$ 时，即在原来的图中增加一个顶点时，增加的边 $\Delta(m) \leq \frac{k}{2}$, 所以 $m' = m + \Delta(m) \leq \frac{k^2}{4} + \frac{k}{2} < \frac{(k+1)^2}{4}$, 即 $m' \leq \frac{(k+1)^2}{4}$，所以结论成立。