离散数学-图论作业 3 图的连通性

如无特意说明，以后各题只考虑有限个点的图。

Problem 1

证明：简单图 G 是二部图，当且仅当 G 没有包含奇数条边的简单回路。

答案： 证明：

必要性：设 G 是偶图，设两个不相交的非空顶点集合为 A 和 B。若 G 存在回路 c，设 c 的起点属于 A，则从 A 出发时通路在奇数步后停在 B，在偶数步后停在 A。所以回路 c 的长度必为偶数。

充分性：若所有的回路长度都为偶数，要证图 G 是偶图。假设 G 是连通图，若不连通，则每次仅考虑一个连通分支。设 v 是图的一个顶点，设 A 是有从 v 出发奇数长度通路的所有顶点的集合，设 B 是有从 v 出发偶数长度通路的所有顶点的集合。由于这个分支是连通的，所以每个顶点都属于 A 或 B。没有顶点同时属于 A 和 B，若假设存在一个顶点 v' 同时属于 A 和 B，则从 v 到 v' 的奇长度通路，加上 v' 到 v 的偶长度通路，就得到一个奇回路，与前提矛盾。因此，顶点集合划分成两个部分。要证每条边的端点都在不同的部分中，假设 (x, y) 是一条边，$x \in A$，则从 v 到 x 的奇长度通路加上 (x, y) 就产生从 v 到 y 的偶长度通路，所以 $y \in B$。同理可证 $x \in B$ 的情况。

综上所述可得 G 是二部图。

Problem 2

证明：$\kappa(G) = 1$ 的 r-正则图 G，若 $r > 1$，总满足 $\lambda(G) \leq \frac{r}{2}$。($\lambda(G)$ 表示 G 的边连通度)

答案： 考虑 G 的割点 v，$G - v$ 至少有 2 个连通分量 C_1, C_2，其中至少一个与 v 相连的边数量不超过 $\frac{r}{2}$，这些边构成 G 的一个割边集，于是 $\lambda(G) \leq \frac{r}{2}$。

Problem 3

设图 G 是 2-连通图，依次证明以下结论（提示：在边上插入一个顶点，证明新图仍然 2-连通）：

a）G 中任意一顶点和任意一边共圈

b）G 中任意两边共圈

答案：

a) 证明：任取 G 中的一个点 u 和一条边 (v,w)，讨论 u 和 (v,w) 的两种情况

- 第一种：如果 u 是 (v,w) 的一个端点，那么只需要证明 (v,w) 在一个圈里即可，因为 vw 共圈，所以 vw 之间必然有不止一条路径，取出一条不是 (v,w) 边的路径，和 (v,w) 组成一个圈即可
- 第二种：如果 u 不是 (v,w) 的一个端点，在 (v,w) 上插入一个顶点 u' 成为 G', 可以证明 G' 仍是 2 连通的：
  - 首先 v,w 不是 G' 的割点，因为 u' 可通过 v,w 两种方式到达其他点；
  - 其次 u' 也不是 G' 的割点，因为 $\kappa' \geq \kappa \geq 2$，所以 (v,w) 并不是 G 的割边，因此 u' 也不是 G' 的割点；
  - 另外其他点都不是割点，和 u' 的加入无关。

  那么 u 和 u' 在 G 中共圈，如果 u' 在一个圈上，那么必然有两条边与之相连，而连接 u' 的只有两条边，即 (v,u') 和 (w,u')，所以该圈必经过 (v,w)，证毕

b) 证明：任取两条边 $(u_1,u_2),(v_1,v_2)$，讨论 (u_1,u_2) 和 (v_1,v_2) 的两种情况

- 第一种：如果两条边有交点，例如 $u_2 = v_1$, 那么由第一问可得，u_1 和 (v_1,v_2) 共圈，将这个圈中 u_1 到 $u_2(v_1)$ 的路径替换成 (u_1,u_2) 即可
- 第二种：如果两条边没有交点，在 (u_1,u_2) 中间插入一个顶点 u 成为 G', 类似于第一问的证明，此时 G' 仍为 2-连通图

  由第一问结论，u 和 (v_1,v_2) 共圈，同理可以推出 (u_1,u_2) 和 (v_1,v_2) 共圈

Problem 4

证明：G 是 2-边连通图当且仅当 G 中任意两个顶点之间至少有两条不含公共边的通路。
（提示：证明过程中可使用 Whitney 定理，但需注意和本题的差异）

答案：证明：

- 若 G 中任意两顶点都至少有两条边不重道路连接，显然对任意 $e \in E(G)$，$G - e$ 是连通的，故 G 为 2-边连通的。
- 若 G 是 2-边连通的，则 G 无割边。把 G 分解成块，块与块之间以 G 中的割点互相连接。设 u,v 是 G 中任意两顶点。分两种情况：
  - 若 u,v 同属于 G 的某一块，则由 Whitney 定理知，结论成立。

- 若 u, v 属于 G 的不同块，设 $B_1, B_2, ..., B_n$ 是 G 的块，其中块 B_i 与块 B_{i+1} 以割点 V_i 相互连接且 $|v(B_i)| \geq 3$。不妨设 $u \in B_1$，$v \in B_n$。由之前的证明可知，在 B_1 中存在两条由 u 到 v_1 的不相交的路 P_{11}, P_{12}；同理在 B_i 中存在两条由 v_{i-1} 到 v_i 的不相交的路 P_{i1}, P_{i2}；在 B_n 中存在两条由 v_{n-1} 由 v 的不相交的路 P_{n1}, P_{n2}。于是我们找到两条 u 到 v 的边不相交的路：$P_{11} \cup P_{21} \cup ... \cup P_{n1}$ 和 $P_{12} \cup P_{22} \cup ... \cup P_{n2}$。

Problem 5

证明：若 G 是 k-连通图，从 G 中任意删除 k 条边，最多得到 2 个连通分支。

答案： 证明：首先，假设图的边连通度为 r，有 $r \geq k$；其次，易知一条边最多连接两个连通分支，任意去掉一条边，只可能使连通分支数增加 0 个或者 1 个。考虑到边连通度 $r \geq k$，因此删除任意 $k-1$ 条边后依然连通，即 1 个连通分支。删除第 k 条边之后，原图最多为 2 个连通分支。

Problem 6

证明：设 G 是一个简单图，k 是一个自然数，若 $\delta(G) \geq \frac{v+k-2}{2}$, 则 G 是 k-连通的。

答案： 证明：用反证法. 假如 G 不是 k-连通的, 则 G 的连通 $\kappa < k$, 即存在 G 的点割集 S, 使得 |S|<k, 且 G-S 不连通。

因 G-S 有 v-|S| 个顶点, 且至少有两个连通分支, 故必有 G-S 的某个连通分支 G' 含有不超过 $\frac{v-|S|}{2}$ 个顶点。

注意到 G' 中任一个顶点只可能与 G' 内的点及 S 中的点相邻, 因而其在 G 中的顶点度 $\frac{v-|S|}{2} - 1 + |S| = \frac{v+|S|-2}{2}$。结合 |S|<k, 这意味着 $\delta(G) \leq \frac{v+|S|-2}{2} < \frac{v+k-2}{2}$, 与定理条件矛盾。

证毕.

Problem 7

设 n 阶图 G 的边数为 m，试证明：若 $m > C_{n-1}^2$，则 G 为连通图。

答案： 证明：假设 G 不连通，有 2 个或以上连通分支。(2 分)
设其中一个连通分支中顶点数为 $n_1 \geq 1$，其余顶点数为 $n_2 \geq 1$，$n_1 + n_2 = n$，$m \leq C_{n_1}^2 + C_{n_2}^2$ （4 分）
可以验证：$C_{n_1}^2 + C_{n_2}^2 \leq C_{n-1}^2$，即 $n_1(n_1-1) + n_2(n_2-1) \leq (n-1)(n-2)$ （4 分）
验证中用到关键等式：$0 \leq (n1-1)(n2-1)$
因此 $m \leq C_{n-1}^2$，矛盾。所以 G 为连通图。