离散数学（2023）作业 XX

周帛岑
221900309

2023 年 5 月 30 日

1 Problem 1

证：若 $m \neq n$, 不妨设 $m > n$, 此时我们若选取 m 的某个点，其必先遍历完 n 中的所有点，此时 m 中仍有至少两个点未被遍历，而 m 点之间并不相邻，故无哈密尔顿回路。

若我们选取 n 的某个点，显然也无法构成哈密尔顿回路，故只有当 $m = n$ 时，可能存在哈密尔顿回路。

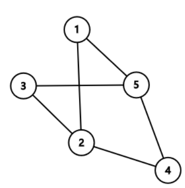
又当 $m = n$ 时，我们随意取 m 中某点，按 m，n，m..... 的顺序遍历，其会在某一 n 点处完成遍历，又 m 中任意点会与 n 中的每一点相连，故其可以回到最初的 m 点，可以构成哈密尔顿回路

2 Problem 2

证：由 problem 1 可知，m 一定等于 n，故总顶点数为 2m 一定为偶数

3 Problem 3

a): 反驳



上图满足题设条件，但并不存在哈密尔顿回路

b): 证明，由 Dirac 定理可知，当 $\delta(G)\geq\frac{V(G)}{2}$ 时，存在哈密尔顿回路不妨将现在图中度最小的两点相连，此时满足 Dirac 定理，故若去掉这条边，其无法构成一个哈密尔顿回路，但会存在一个哈密尔顿通路，其为之前的哈密尔顿回路去掉从起点到最后一个点的边构成

4 Problem 4

必要性：由题可知，若其具有哈密尔顿回路，则可以不重复的遍历每一个顶点，所以存在一条回路使每一个顶点在这条有向回路上，故这张图是强连通图

充分性：由题可知，若其为强连通图，且其底图为完全图，故一定存在 1→2→3......→n→1 的回路，即存在这样一个哈密尔顿回路

5 Problem 5

解：不妨将 11 门考试作为顶点，若任意两门考试间有相同老师任教，则对应顶点有边相连。

取这张图的补图，我们知其补图中每个顶点的度数至少为 (11 - 1)-(6 - 1) = 5

根据 Dirac 定理，$\delta(G)\geq\frac{10}{2}=5$, 故此时这样的补图可以形成一个哈密尔顿回路，故可以不重复的遍历完每一个顶点（安排考试）

命题成立

6 Problem 6

a)：若 n 为 2，显然

假设 n > 2, 选取 M×N 四边形一端点，沿着四边形的边走到对角线，进入下一条边遇到第一个顶点时离开这条边

此时进入一个 (M-2)×(N-2) 的四边形，N-2 > 2, 则同理不断重复，直至 N - K 2。若 N-2 = 2，则绕最小的四边形一周，直到下一个顶点是初始顶点时回到上一个四边形的边上。若 N-2 = 1 同理，此时再绕完剩下半圈，此时即构造出了一个哈密尔顿回路。

b): 最小此时为 3×3, 我们可以通过遍历，验证 3×3 图中没有哈密尔顿回路。

若 M 或 N 大于 3，此时我们总可以将其变为数个 3×3 图有公共边的结合图，故此时也一定没有哈密尔顿回路

7 Problem 7

证：$C_n^2 + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$

又总边数 $\times 2$ = 总度数，故总度数为 (n-1)(n-2) + 2 > n^2 - 3n + 4

由完全图总度数为 n^2 - n，故一共相差度数小于 2n-4，即 n-2 条边

又 n 顶点完全图中任意去掉最多 n-3 条边，又任意两点度之和为 2n-2，2n-2 - (n-3) = n+1

满足 ore 定理，故存在哈密尔顿回路