离散数学-图论作业 5 哈密尔顿图

Problem 1

对哪些 m 和 n 值来说，完全二部图 $K_{m,n}$ 具有哈密尔顿回路?

答案: $m = n \geq 2$ (若额外回答出 $m = 0$ 且 $n = 1$、$m = 1$ 且 $n = 0$ 可算作正确)

Problem 2

证明或反驳: 如果二部图 G 是 H 图，那么必有偶数个顶点

答案: 由于图 G 的边全部在二部图的左右两边（X,Y）之间，如果 G 有哈密尔顿圈 C，则 G 中所有顶点全在 C 上，且必定是 X 的点和 Y 的点交替在 C 上出现，因此 G 必有偶数个顶点

Problem 3

若简单图 G 满足 $V(G) \geq 3$ 且 $\delta(G) \geq \frac{V(G)-1}{2}$，证明或反驳:

a) G 一定存在哈密尔顿回路。

b) G 一定存在哈密尔顿通路。

答案:

a) 反驳，考虑两个通过割点相连的 K_3。

b) 证明，根据 Ore 定理的推论，对 G 中任意不相邻的顶点对 u, v 均满足 $d(u) + d(v) \geq n - 1$，因此 G 一定存在哈密尔顿通路。

Problem 4

底图是完全图的有向图称为竞赛图，试证明一个竞赛图含有哈密尔顿回路的充分必要条件是该图为强连通图。

答案: 必要性：若竞赛图有哈密尔顿回路，显然该图是强连通的。
充分性：假设该竞赛图有 k 个顶点，考虑图中的一条哈密尔顿通路 v_1,v_2,...,v_k，由于强连通性，一定存在某个

顶点 v_i，有 v_i 指向 v_1，从而存在回路 $v_1,v_2,...,v_i,v_1$。下面考虑递归的将包含哈密尔顿通路上前 i 个顶点的回路扩大，直到该回路包含所有 k 个顶点。我们考虑这条哈密尔顿通路上第 $i+1$ 个顶点 v_{i+1}，分以下三种情况：

1）v_{i+1} 指向 v_1，则存在包含哈密尔顿通路上前 $i+1$ 个顶点的回路 $v_1,v_2,...,v_i,v_{i+1},v_1$；

2）$v_1,v_2,...,v_j(0<j<i)$ 均指向 v_{i+1}，且 v_{i+1} 指向 v_{j+1}，则存在包含哈密尔顿通路上前 $i+1$ 个顶点的回路 $v_1,v_2,...,v_j,v_{i+1},v_{j+1},...,v_i,v_1$。我们对回路上除 v_{i+1} 以外的顶点重新编号，使回路中 v_{i+1} 指向的顶点变为 v_1，其他顶点按照回路顺序分别为 $v_2,...,v_i$，从而使回路保持 $v_1,v_2,...,v_i,v_{i+1},v_1$ 的形式；

3)$v_1,v_2,...,v_i$ 均指向 v_{i+1}，由强连通性可知，一定存在满足 $i+1<m\leq k$ 的 m，使得 v_m 指向 $v_1,v_2,...,v_i$ 中的某个顶点 v_j。若 $j=1$，则存在包含哈密尔顿通路上前 m 个点的回路 $v_1,v_2,...,v_m,v_1$，否则存在包含哈密尔顿通路上前 m 个点的回路 $v_1,v_2,...,v_{j-1},v_{i+1},v_{i+2},...,v_m,v_j,v_{j+1},...,v_i,v_1$。同样我们对回路上除 v_m 以外的顶点重新编号，使回路中 v_m 指向的顶点变为 v_1，其他顶点按照回路顺序分别为 $v_2,...,v_{m-1}$，从而使回路保持 $v_1,v_2,...,v_m,v_1$ 的形式；

综上，对于包含哈密尔顿通路上前 i 个顶点的回路，我们总能构造出一个包含哈密尔顿通路上前 m 个顶点的回路，使 $m>i$。递归进行上述步骤，即可构造出包含所有 k 个顶点的哈密尔顿回路，证毕。

Problem 5

考虑在 11 天安排 11 门课程的考试（每天考 1 门课），使得同一位老师所任的任意两门课程考试不排在接连的两天中，试证明如果没有老师担任多于 6 门课程，则符合上述要求的考试安排总是可能的。

答案： 设 G 为具有 11 个顶点的图，每个顶点对应于一门课程考试，如果这两个顶点对应的课程考试是由不同教师担任的，那么这两个顶点之间有一条边，因为每个教师所任课程数不超过 6，故每个顶点的度数至少是 5，任两个不相邻结点的度数之和至少是 10，根据 Ore 定理的推论，G 总是包含一条哈密尔顿通路，得证。

Problem 6

考虑 $M\times N$ 的网格，以其中的方格作为点集，任意两个点之间有边当且仅当对应的两个方格相邻，构成图 G。

a) 当 N 是偶数且 $M>1$ 时，给出一种哈密尔顿回路的构造方法。

b) 当 N 和 M 都是大于 1 的奇数时，证明此时 G 没有哈密尔顿回路。

答案：

a) 当 N 是偶数且 $M>1$ 时，有如下方法 $f: M\times N->M\times N$ 可生成回路:

> 设当前位置为 (i,j)，回路中下一个点的位置为 $f(i,j)$
>
> **if** $i=1\wedge j\leq N$ **then**
>
> $f(i,j)=(i,j+1)$
>
> **else if** $2|j$ **then**
>
>   **if** $i<N$ **then**
>
> $f(i,j)=(i+1,j)$
>
>   **else**

$f(i,j) = (i, j-1)$

else

if $j > 1 \wedge i > 2$ **then**

$f(i,j) = (i-1, j)$

else

$f(i,j) = (i, j-1)$

所得回路：$(1,1) \to (1,2) \to \ldots \to (1,N) \to (2,N) \to \ldots \to (M,N) \to (M,N-1) \to (M-1,N-1) \to \ldots \to (2,N-1) \to (2,N-2) \to \ldots \to (M,2) \to (M,1) \to \ldots \to (2,1) \to (1,1)$

b) 证明：不妨记图中顶点为 $V = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,N),(2,1),\ldots,(M,N)\}$。当 N 和 M 都是大于 1 的奇数时，总方格数为奇数。令 $g(i,j) = (2|i) \oplus (2|j)$（异或），易见每条边的两个端点 g 值都不同。假设存在 G 的哈密尔顿回路 H，删去其第一条边可得哈密尔顿通路 H'，H' 上点的序列中 g 的值都是 $True, False$ 交错出现的，由 G 有奇数个点知 H' 起点和终点的 g 值必相同，即它们之间无边，矛盾。

Problem 7

简单图 G 满足 $|G| > 2$，令 m 为 G 的边数，n 为 G 的顶点数。试证明：如果 $m > C_{n-1}^2 + 1$，则 G 一定存在哈密尔顿回路。（提示：可使用数学归纳法证明）

答案:

Basis $n = 3$ 时，结论显然成立。

I.H. 假设 $n < k$ 时 G 存在哈密尔顿回路。

I.S. 当 $n = k$ 时，G 的补图 $\bar{G}$ 的边数 $|E(\bar{G})| < C_n^2 - C_{n-1}^2 - 1 = n-2$, 这就意味着 $\bar{G}$ 至少有一个节点的度数为 0 或 1。不妨设这个节点为 v。

A 度数为 1 的情况：$d(v) = n-2$，在 G 中删除 v 后得到 G'，此时 G' 的边数满足归纳条件足 $|E(G')| > C_{n-2}^2 + 1$，存在哈密尔顿回路 C。由于 v 跟 G' 中 $n-2$ 个顶点相连，总可以取其中的在 C 中相邻的顶点 u 和 w，将 $u-w$ 改成 $u-v-w$ 便得到 G 上的哈密尔顿回路。

B 度数为 0 的情况：$d(v) = n-1$。在图 G 中删除 v 得到 G'，下面对 G' 分情况讨论 (注意 G' 有 $n-1$ 个顶点)：

(1) 如果 G' 是完全图，G' 一定存在哈密尔顿回路。由于 v 与 G' 中的点均相连，不妨取其中的相邻的顶点 u 和 w，将 $u-w$ 改成 $u-v-w$ 便得到 G 上的哈密尔顿回路。

(2) 如果 G' 不是完全图，我们向其中加入一条边 e，对于 $G' + \{e\}$ 满足 $|E(G' + \{e\})| > C_{n-1}^2 + 1 - (n-1) + 1 = C_{n-2}^2 + 1$，由归纳假设，$G' + \{e\}$ 中存在哈密尔顿回路。不妨设此回路为 C：

a) 如果 C 中不包含 e，则我们可以通过 (1) 的方式获得 G 的哈密尔顿回路；

b) 如果 C 中包含 e，将 e 从 C 中删除得到一条哈密尔顿通路，类似的，将 v 和 e 的两个端点相连便是一条哈密尔顿回路。