4. 集合: 基本概念与运算 (4-set)

姓名: 鲁权锋　　**学号:** 201830168

评分: 20　　**评阅:**

2021 年 4 月 01 日

请独立完成作业，不得抄袭。 若得到他人帮助, 请致谢。 若参考了其它资料，请给出引用。 鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业 (必做部分)

题目 1 (相对补与绝对补 [5 分] ⋆⋆)

请证明,

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

证明:

(1) 先证第一个等号:

$$\begin{aligned}
& A \cap (B \setminus C) \\
\iff & A \cap (B \cap \overline{C}) \\
\iff & A \cap B \cap \overline{C} \\
\iff & (A \cap B) \cap \overline{C} \\
\iff & (A \cap B) \setminus C
\end{aligned}$$

(2) 对于后一个等号:

$$\begin{aligned}
& A \cap (B \setminus C) \\
\iff & A \cap (B \cap \overline{C}) \\
\iff & A \cap B \cap \overline{C} \\
\iff & (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (\emptyset) \\
\iff & (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap \overline{A}) \\
\iff & ((A \cap B) \cap \overline{C}) \cup ((A \cap B) \cap \overline{A}) \\
\iff & (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \qquad (Distributive\ Law) \\
\iff & (A \cap B) \cap (\overline{A \cap C}) \qquad (De\ Morgan's\ Law) \\
\iff & (A \cap B) \setminus (A \cap C)
\end{aligned}$$

□

题目 2 (对称差 [4 分] ★★)
请证明，

$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C).$$

证明：

4

$$
\begin{aligned}
& A \cap (B \oplus C) \\
\iff & A \cap ((B \cup C) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) \\
\iff & (A \cap (B \cup C)) \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\
\iff & ((A \cap (B \cup C)) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) \cup \emptyset \\
\iff & ((A \cap (B \cup C)) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) \cup (A \cap \overline{A}) \\
\iff & ((A \cap (B \cup C)) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})) \cup ((A \cap (B \cup C)) \cap \overline{A}) \\
\iff & ((A \cap (B \cup C))) \cap ((\overline{B} \cup \overline{C}) \cup \overline{A}) \qquad (Distributive\ Law) \\
\iff & ((A \cap (B \cup C))) \cap ((\overline{B} \cup \overline{A}) \cup (\overline{C} \cup \overline{A})) \\
\iff & ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cap (\overline{(B \cap A)} \cup \overline{(C \cap A)}) \qquad (De\ Morgan's\ Law) \\
\iff & ((A \cap B) \cup (A \cap C)) \cap (\overline{(A \cap B)} \cup \overline{(A \cap C)}) \\
\iff & (A \cap B) \oplus (A \cap C)
\end{aligned}
$$

□

题目 3 (广义并、广义交 [4 分] ★★)
请证明，

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \implies \bigcap \mathcal{F} \cap \bigcap \mathcal{G} \subseteq \bigcap (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}).$$

并举例说明，$\subseteq$ 不能换成 $=$。

证明：

4

首先，

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \iff \exists S.(S \subseteq \mathcal{F} \wedge S \subseteq \mathcal{G}) \tag{1}$$

对任意的 x，

$$\bigcap \mathcal{F} \cap \bigcap \mathcal{G} = \{x | (\forall A \in \mathcal{F}.\ x \in A) \wedge (\forall B \in \mathcal{G}.\ x \in B)\} \tag{2}$$

$$\implies \{x | (\exists S \in \mathcal{F}.\ x \in S) \wedge (\exists S \in \mathcal{G}\ x \in S)\}(by(1)(2)) \tag{3}$$

$$\implies \{x | (\exists S \in (\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}).\ x \in S)\}(by(3)) \tag{4}$$

又：

$$\bigcap (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = \{x | (\forall S \in (\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}).\ x \in S)\} \tag{5}$$

由 (4)(5) 立得

$$\bigcap \mathcal{F} \cap \bigcap \mathcal{G} \subseteq \bigcap (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}).$$

综上，有

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset \implies \bigcap \mathcal{F} \cap \bigcap \mathcal{G} \subseteq \bigcap (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}).$$

下面给出 $\subseteq$ 不能换成 $=$ 的构造：

$$\mathcal{F} = \{\{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}\} \qquad \mathcal{G} = \{\{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$$

则:

$$\bigcap \mathcal{F} = \emptyset \qquad\qquad \bigcap \mathcal{G} = \emptyset$$

故

$$\bigcap \mathcal{F} \cap \bigcap \mathcal{G} = \emptyset$$

另外

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$$

故

$$\bigcap (\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = \{1\}$$

□

又空集是任何非空集合的真子集，故 $\emptyset \subset \{1\}$

此即说明了 $\subseteq$ 不能换成 $=$。

题目 4 (广义并、广义交、德摩根律 [3 分] $\star\star\star$)

请化简集合 A:

$$A = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} (\mathbb{R} \setminus \{-n, -n+1, \cdots, 0, \cdots, n-1, n\})$$

解答:

设集合 B:

$$B = \{-n, -n+1, \cdots, 0, \cdots, n-1, n\}$$

则

$$A = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} (\mathbb{R} \setminus B)$$

$$\iff \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} (\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus B))$$

$$\iff \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} (\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \cap \overline{B}))$$

$$\iff \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} (\mathbb{R} \cap \overline{(\mathbb{R} \cap \overline{B})})$$

$$\iff \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} (\mathbb{R} \cap (\overline{\mathbb{R}} \cup B)) \qquad (De\ Morgan's\ Law)$$

3

$$\iff \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} ((\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{R}}) \cup (\mathbb{R} \cap B)) \qquad (Distributive\ Law)$$

$$\iff \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} ((\emptyset) \cup (\mathbb{R} \cap B))$$

$$\iff \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} (\mathbb{R} \cap B)$$

又

$$B \subseteq \mathbb{R}$$

故

$$(\mathbb{R} \cap B) \iff B$$

故

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} (\mathbb{R} \cap B) \iff A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} B$$

也即

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \{-n, -n+1, \cdots, 0, \cdots, n-1, n\}$$

因此，$A = Z$, 即 A 表示整数集。

题目 5 (幂集 [4 分] ⋆⋆⋆)
请证明，①

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B.$$

① 不，我有“幂集”恐惧症。

4

证明：
(1) 先证 $A = B \implies \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$：
根据幂集的定义，有 $\mathcal{P}(A) = \{X | X \subseteq A\}$，
当 $A = B$ 时

$$\mathcal{P}(A) = \{X | X \subseteq A\} = \{X | X \subseteq B\} = \mathcal{P}(B)$$

(2) 下面用反证法证 $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \implies A = B$：
假设 $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ 时 $A \neq B$.
因此，必存在一个集合 S，使得 S 不同时属于集合 A 和 B。也即：

包含

$$\exists S.(S \subseteq A \land S \subsetneq B) \lor (S \subseteq B \land S \subsetneq A)$$

$$\iff \exists S.(S \in \mathcal{P}(A) \land S \notin \mathcal{P}(B)) \lor (S \in \mathcal{P}(B) \land S \notin \mathcal{P}(A))$$

而这与 $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ 矛盾！故假设不成立。
因此，有 $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \implies A = B$。
综上，结合 (1)(2)，有

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \iff A = B. \qquad \square$$