

# 离散数学作业 Problem set 20

## Problem 1

对以下各小题给定的群  $G_1$  和  $G_2$ ，以及  $f : G_1 \rightarrow G_2$ ，说明  $f$  是否为群  $G_1$  到  $G_2$  的同态，如果是，说明是否为单同态、满同态和同构。求同态像  $f(G_1)$ 。

- (1)  $G_1 = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ ,  $G_2 = \langle \mathbb{R}^*, \cdot \rangle$ , 其中  $\mathbb{R}^*$  为非零实数集合， $+$  和  $\cdot$  分别表示数的加法和乘法。

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 是偶数} \\ -1 & x \text{ 是奇数} \end{cases}$$

- (2)  $G_1 = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ ,  $G_2 = \langle A, \cdot \rangle$ , 其中  $+$  和  $\cdot$  分别表示数的加法和乘法,  $A = \{x | x \in \mathbb{C} \wedge |x| = 1\}$ , 其中  $\mathbb{C}$  为复数集合。

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow A, f(x) = \cos x + i \sin x$$

## Problem 2

令  $G, G'$  为群，函数  $f : G \rightarrow G'$  是一个群同态。证明：

- (1)  $\ker f = \{x \in G | f(x) = e\}$  是  $G$  的子群
- (2)  $\text{img } f = \{x \in G' | \exists g \in G, f(g) = x\}$  是  $G'$  的子群

### Problem 3

设  $G_1$  为循环群,  $f$  是群  $G_1$  到  $G_2$  的同态, 证明  $f(G_1)$  也是循环群。

### Problem 4

设  $\phi$  是群  $G$  到  $G'$  的同构映射,  $a \in G$ , 证明:  $a$  的阶和  $\phi(a)$  的阶相等。

### Problem 5

证明: 三阶群必为循环群。

### Problem 6

我们记  $n$  阶循环群为  $C_n$ , 欧拉函数  $\phi(m)$  定义为与  $m$  互素且不大于  $m$  的正整数的个数, 考虑以下三个事实

对正整数  $m$ , 欧拉函数的结果  $\phi(m)$  为  $C_m$  的生成元的个数

$C_n$  的每个元素均生成  $C_n$  的一个子群

$C_n$  的每个子群均是一个循环群  $C_m$ , 且  $m \mid n$

证明著名的公式

$$\sum_{m>0, m|n} \phi(m) = n$$

### Problem 7

设  $p$  是素数, 证明每一个  $p$  阶群都是循环群, 且以每一个非单位元的元素作为它的生成元。

## Problem 8

证明：整数加群  $\mathbb{Z}$  不与有理数加群  $\mathbb{Q}$  同构。