离散数学-第三次作业

Problem 1

用推理规则证明：如果$\forall x(P(x) \vee Q(x))$和$\forall x(\neg Q(x) \vee S(x))$，$\forall x(R(x) \to \neg S(x))$和$\exists x \neg P(x)$为真，则$\exists x \neg R(x)$为真。

答案:

步骤		推理
1	$\exists x \neg P(x)$	前提
2	$\neg P(x)$	存在示例(1)
3	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	前提
4	$P(c) \vee Q(c)$	全称示例(3)
5	$Q(c)$	(4)
6	$\forall x(\neg Q(x) \vee S(x))$	前提
7	$\neg Q(c) \vee S(c)$	全称示例(6)
8	$S(c)$	(5)(7)
9	$\forall x(R(x) \to \neg S(x))$	前提
10	$R(c) \to \neg S(c)$	全称示例（9）
11	$\neg R(c)$	拒取式(8)(10)
12	$\exists x \neg R(x)$	存在引入(11)

Problem 2

用推理规则证明：如果$\forall x(P(x) \to (Q(x) \wedge S(x)))$和$\forall x(P(x) \wedge R(x))$为真，则$\forall x(R(x) \wedge S(x))$为真。

答案:

步骤		推理
1	$\forall x(P(x) \wedge R(x))$	前提
2	$P(a) \wedge R(a)$	全称示例(1)
3	$P(a)$	简化(2)
4	$\forall x(P(x) \rightarrow (Q(s) \wedge S(x))$	前提
5	$Q(a) \wedge S(a)$	(3)(4)
6	$S(a)$	简化(5)
7	$R(a)$	简化(2)
8	$R(a) \wedge S(a)$	(6)(7)
9	$\forall x(R(x) \wedge S(x))$	全称引入(5)

Problem 3

用不失一般性的概念证明当 x 和 y 是奇偶性相反的整数时，$x^2 - x \cdot y - y^2$是一个奇整数。

答案： 不失一般性，我们假定x为偶数，即x=2m(m为整数)；y为奇数，即y=2n+1(n为整数)；那么$x^2-x\cdot y-y^2 = (2m)^2-2m\cdot(2n+1)-(2n+1)^2 = 4m^2-4mn-2m-4n^2-4n-1 = 2(2m^2-2mn-m-2n^2-2n)-1$。当x为奇数y为偶数时情形相同，所以$x^2 - x \cdot y - y^2$是一个奇整数。

Problem 4

用分情形证明法证明：对任意实数 a, b, c 有 min(a, min(b, c)) = min(min(a, b), c)。

答案： 任意实数a，b，c的取值有以下六种情况：

1. $a>b>c$: 此时 min(a,min(b,c))=min(a,c)=c; min(min(a,b),c)=min(b,c)=c，原式成立；
2. $a>c>b$: 此时 min(a,min(b,c))=min(a,b)=b; min(min(a,b),c)=min(b,c)=b，原式成立；
3. $b>a>c$: 此时 min(a,min(b,c))=min(a,c)=c; min(min(a,b),c)=min(a,c)=c，原式成立；
4. $b>c>a$: 此时 min(a,min(b,c))=min(a,c)=a; min(min(a,b),c)=min(a,c)=a，原式成立；
5. $c>a>b$: 此时 min(a,min(b,c))=min(a,b)=b; min(min(a,b),c)=min(b,c)=b，原式成立；
6. $c>b>a$: 此时 min(a,min(b,c))=min(a,b)=a; min(min(a,b),c)=min(a,c)=a，原式成立；

   因为在所有六种情形下均有min(a, min(b, c)) = min(min(a, b), c)成立，于是可得出结论，对任意实数 a, b, c，原式均成立。

Problem 5

证明所有正整数$n = 4m + 3$（m为自然数）都不能写成两个整数的平方和。

答案： 偶数的平方$(2k)^2 = 4k^2 \equiv 0 \pmod 4$；奇数的平方$(2k+1)^2 = 4(k^2+k)+1 \equiv 1 \pmod 4$。因此，任意两个整数的平方和模4的余数只可能为0或1或2，而$4m+3 \equiv 3 \pmod 4$。

Problem 6

两个实数x和y的平方均值是$\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$。通过计算不同正实数对的算术均值和平方均值，构造一个关于这两种均值的相对大小的猜想并证明之。

答案： 证明$\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \geq \frac{1}{2}(x+y)$。由$\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \geq \frac{1}{2}(x+y)$ 可推出:

$2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2$

$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

$(x-y)^2 \geq 0$

Problem 7

请证明，对于$a, b, c \in \mathbb{R}$，其中 $a \neq 0$，关于 x 的方程 ax + b = c 的解唯一。

答案： 利用反证法，假设方程存在两个不相同的解m、n,即am + b = c，an + b = c;

两式相减得 am-an=a(m-n)=0;

由于$a \neq 0$，故想要该式成立，m-n必为0，即m=n，m和n为同一个数，这与我们的假设矛盾;

所以原方程只存在唯一的解。

Problem 8

试证明对于任意实数 x，存在一个唯一的 n 和 ϵ 令 $x = n - \epsilon$，其中$n \in \mathbb{Z}$且$\epsilon \in$ [0,1)。

答案： 利用反证法，假设存在两组解(p,q)(s,t)使得原式成立，即$x = p - q$，$x = s - t$;

其中p、s为两个不同的整数，q、t为两个不同的数且均属于[0,1)（经分析可得，对于不同的两组解，不存在p、q相等而s、t不相等，或p、q不相等而s、t相等的情况）;

两式相减得 $0 = p - q - s + t$，即$p - q = s - t$;

由$s \in [0,1), (-t) \in (-1,0]$ 得 $s - t \in (-1,1)$;

即$|p-q| = |(-1,1)|$ <1

也就是说p与q的差值小于1，即二者不可能为两个不同的整数，这与我们的假设矛盾。

所以原方程只有唯一的一组解。

Problem 9

证明方程 $2x^2+5y^2=14$没有x和y的整数解。

答案： 分情况讨论。

1) 如果$|y| \geq 2$，那么$2x^2+5y^2 \geq 2x^2+20 \geq 20$，不满足方程。

2) 如果$|y| < 2$，即$y=0$，或$y=1$，或$y=-1$；当$y=0$时，$2x^2=14$；当$y=1$或$y=-1$时，$2x^2=9$；显然这两个方程没有整数解。

综上，原始方程没有x和y的整数解。

Problem 10

证明或驳斥存在一个有理数x和无理数y令x^y是无理数。

答案： 此题考察同学们查资料的能力，不需要同学们自己证出来。

设有理数$x=2$，无理数$y=\sqrt{2}$，此时$x^y=2^{\sqrt{2}}$，Gelfond–Schneider Theorem证明了$2^{\sqrt{2}}$为无理数，即存在一个有理数x和无理数y令x^y是无理数。