

# 离散数学 (2023) 作业 XX

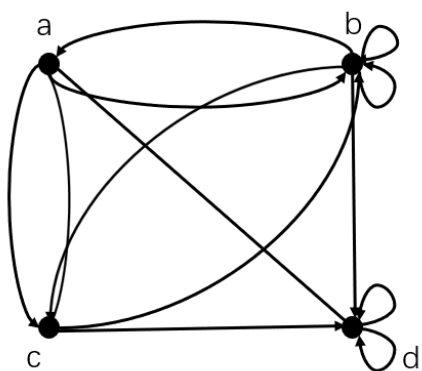
周帛岑  
221900309

2023 年 5 月 16 日

## 1 Problem 1

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2):



## 2 Problem 2

a):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

b):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(2): 度矩阵。由关联矩阵的定义我们得知，关联矩阵与其转置的乘积为顶点  $i$  和顶点  $j$  均有边指向的那些顶点的个数构成的矩阵，且  $A$  为顶点  $i$  和顶点  $j$  均有边指向那些顶点的个数的矩阵，且  $i \neq j$ ，两者相减指向某一点的边的个数构成的矩阵，既为度矩阵

### 3 Problem 3

下左图的邻接矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

下右图的邻接矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

下右图的补图邻接矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

经过正交变换 (行列同时变换)

可以将该补图的邻接矩阵变为与下左图邻接矩阵完全相同的形式，于是两图同构

## 4 Problem 4

(1): 只包含一个  $C_3$  :  $4 \times 3 = 12$

包含二个  $C_3$  : 6

包含四个  $C_3$  : 1

一共 19 种

(2): 四个顶点构成的简单图一共  $2^6 = 64$

有一个孤立点: 4 种

由两个孤立点: 6 种

有三个孤立点: 4 种

有四个孤立点: 1 种

故无孤立点的一共 49 种

(3): 形似  $K_{1,3}$  : 4

形似  $K_{2,2}$  : 6

故一共 10 种

## 5 Problem 5

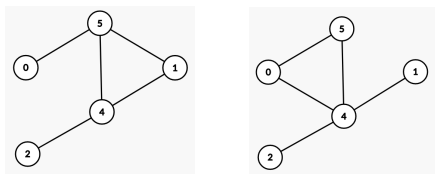
由题可知,  $G$  与  $\overline{G}$  的边数相同, 且两者之和构成完全图, 故  $n(n-1)/2$  为偶数

显然, 当  $n \equiv 2(\text{mod } 4)$  或  $n \equiv 3(\text{mod } 4)$  时, 此时  $n(n-1)/2$  不为偶数

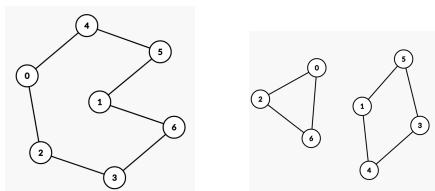
故若满足题设，则图  $G$  的顶点数  $\nu$  满足  $\nu \equiv 0, 1 \pmod{4}$ 。

## 6 Problem 6

(1):



(2):



## 7 Problem 7

证：对于任意顶点，我们都要伸出  $k$  条边，使其满足度为  $k$ ，而由于围长为 4，所以这  $k$  个点间不能相连，每一个点都要与额外的  $k-1$  个点相连，假设这剩余的  $k-1$  个点都与这  $k$  个点相连，此时顶点总数达到最少，为  $2k$

下证唯一性：

显然，对于给定的顶点  $a$ ，其邻接的  $k$  个顶点固定（为互不相连的  $k$  个）。而剩余  $k-1$  个顶点被这  $k$  个中的每一个邻接，故也为固定的。

故这样的图只有一种