95

离散数学（2023）作业 ghw01

黄夏宇

221900347

2023 5 15

1 Problem 1

假设 G 为简单图，其中共有 n 个点，且各顶点度数均不相同，则每个点的度数一定为 $0, 1, 2, \cdots, n-1$，但由于存在一个点度数为 0，所以一定不存在一个点，使其度数为 $n-1$，故假设不成立，G 一定不是简单图

2 Problem 2

假设 G 中共有 n 个顶点

a: 由题意可知,$\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i)}{n} = m$ 设度数最大的点的度数为 $x >= m$, 则减去该点之后 $\frac{\sum_{i=1}^{n} -2x}{n-1} = y \rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} -2x+y}{n} = y$, 易知,$y <= m$ 成立, 即证

b: 同理如上:$\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i)}{n} = m$ 设度数最小的顶点度数为 $x <= m$, 则减去该点之后 $\frac{\sum_{i=1}^{n} -2x}{n-1} = y \rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} -2x+y}{n} = y$，易知,$y >= m$, 即证

-5

3 Problem 3

a: 否，如 $Problem1$ 中

b: 是，

c: 否, 由于总共有 6 个顶点，而有一个点度数为 5，即其与所有顶点都相连，而有 3 个点度数为 1，即只与度数为 5 的点相连，除去这四个点，不可能出现度数为 4 的顶点，所以不可能

d: 否，共有 5 个顶点，所以不可能出现度数为 5 的点

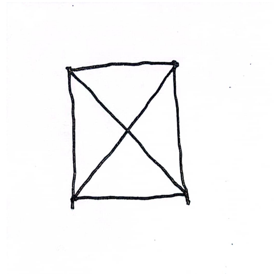

图 1: Caption

4 Problem 4

由于 $\delta(G), \Delta(G)$ 分别表示度数最小和度数最大的点的度数, 设其他点的度数之和为 x, 则有 $x + \delta(G) + \Delta(G) = 2\varepsilon$, 且 $\delta(G) \leq \frac{x}{\nu-2} \leq \Delta(G)$, 所以可知,$\delta(G) \leq \frac{2\varepsilon}{\nu} \leq \Delta(G)$

5 Problem 5

a: 证明:
设一个点的度数为 x,删去该点之后总度数会减少 2x,而平均度为 $\frac{\sum_{i=1}^{n}(deg(G_i))}{n} = a$
删去一个顶点后度数平均度至少为 $a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(deg(G_i))-x}{n-1}$ 说明该点的度数为 $\frac{a}{2}$，所以充分性得证
当 $deg(x) \leq a$, 删去该点之后，总度数减少 $m \leq a$, 则平均度数一定大于等于 a 必要性即证
b: 由于 a 为 G 的顶点平均度为 a 说明一定有顶点的度数大于等于 a, 则只需删去所有 $deg(G_i) \leq \frac{a}{2}$ 的点，得到的子图最小度一定大于 $\frac{a}{2}$

6 Problem 6

由于一场比赛有两个队伍参加，则 $n + 1$ 场比赛就需要，队伍参加总次数为 $2n + 2$ 根据鸽巢原理，可知一定有队伍参加了三场

7 Problem 7

对任意一条边其所连接的两个点的度数之和一定小于等于 n（在不构成三角形的前提下），对其他边也是如此，所以把所有边对应的度数相加 $\sum_{i=1}^{m}(deg(x)+deg(y)) \leq mn$ 通过柯西不等式，$m \leq \frac{n^2}{4}$ 即证