100

离散数学（2023）作业

王奕凯
221900395

2023 年 5 月 14 日

1 Problem 1

根据 Havel-Hakimi 定理证明,不妨设有 n 个顶点,每个顶点的度按照由大到小的顺序排成 d1,d2,·,dn,
因为每个顶点的度数都不相同，所以 d1≥n, 否则 dn<0
又因为如果 d1≥n, 则 d1 大于 (d2,·,dn) 的长度，不能构成简单群
所以解出 d1 无解，所以若无向图 G 至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，则 G 不是简单图

2 Problem 2

不妨设 G 有 m 条边, 有 n 个顶点, 则由握手定理可以得到: $\sum_{i=1}^{n} d(vi)$=2m, 顶点平均度为 a=$\frac{2m}{n}$
a 正确
删去一个度最大的顶点 A, 因为 A 是最大的顶点，所以 d(A)≥a, 此时也就相当于删去了 d(A) 条以 A 为端点的边
此时平均度为 $\frac{2(m-d(A))}{n-1}$，因为 d(A)≥a，所以 $\frac{2(m-d(A))}{n-1} \leq \frac{an-2a}{n-1}$ <a, 所以不会使其顶点平均度增加
b 错误
不妨一三角形作为例子，三角形三个顶点的度都等于 2，删去一个顶点后，平均度就变成了 $\frac{2}{2}$=1,
所以平均度减少，所以从图中删去一个度最小的顶点会使其顶点平均度减少，所以 b 错误

3 Problem 3

a 不可图
由 Havel-Hakimi 定理可以化简成 5，4，3，2，1，0，-1 是否可图，易知这是不可图的
b 可图

长方形再加上两条对角线

c 不可图

由 Havel-Hakimi 定理可以化简成 0，0，-1，-1 是否可图，易知这是不可图的

d 不可图

5 大于长度 (4,3,2,2), 所以不可图

4 Problem 4

首先因为 ξ(G) 是度最小的顶点的度，Δ(G) 是度最大的顶点的度，所以 $\xi(G) \leq \Delta(G)$

如果每个顶点的度都相等，如三角形，长方形，此时 $\xi(G)= \frac{2\epsilon}{\upsilon}=\Delta(G)$

当每个顶点的度都不相等, 那么一定有最大的和最小的。因为至少有 $\xi(G)<\Delta(G)$, 所以有 $\Delta(G)\times \upsilon > \Delta(G)+\xi(G)+d(1)+\cdots+d(n)$

也就是 $\frac{2\epsilon}{\upsilon}<\Delta(G)$

同理可得：$\xi(G) <\frac{2\epsilon}{\upsilon}$

所以综上所述：$\xi(G)\leq \frac{2\epsilon}{\upsilon} \leq \Delta(G)$

5 Problem 5

a

是正确的

设总共有 n 个点，m 条边. 由握手定理得，$\sum_{i=1}^{n} d(vi)$=2m, 又因为顶点平均度为 a，所以 an=2m

删掉一个点 A 后，同时也就相当于删去了与 A 相连的 d(A) 条边, 此时有 n-1 个点，m-d(A) 个边

则平均度为 $\frac{2(m-d(A))}{n-1}=\frac{an-2d(A)}{n-1} \geq$a, 解得 d(a)$\leq\frac{a}{2}$

b 是正确的

首先考虑子图 G 的最小度的顶点 A，如果 A 的度 $>\frac{a}{2}$, 则 G 的最小度大于 $\frac{a}{2}$ 的子图就是自己

如果 A 的度 $\leq \frac{a}{2}$, 那么我们删除顶点 A 得到的图 B 的平均度 $\geq$ a, 对 B 中的最小度的顶点同样分类讨论，不断的递归下去

设已经删除了 n-b 个度小于等于 $\frac{a}{2}$ 的顶点，此时 $\sum_{i=1}^{b} d(vi)\geq$ na-$\frac{a}{2}$(n-b)

(na-$\frac{a}{2}$(n-b))/b=$\frac{a}{2}+\frac{an}{2b} \geq \frac{a}{2}$, 所以此时的图就是 G 的最小度大于 $\frac{a}{2}$ 的子图

所以得证

6 Problem 6

不妨把每支球队看成点，把比赛看作边

则由握手定理可以得到：$\sum_{i=1}^{n} d(vi)$=2n+2

每支球队的度就是他们比赛的场次

如果每支球队都比赛了两场，那么 $\sum_{i=1}^{n} d(vi)$=2n<2n+2, 所以一定有一只球队比赛了三场

7 Problem 7

如果没有 K3，则说明一条边上的两个端点没有公共的相邻点，也就是 i 的相邻点和 j 的相邻点没有交集，所以 d(i)+d(j)≤n,$\sum_{i,j\in E} d(i) + d(j) \leq$ n|E|, 又因为每个 di 被计算了 di 次，所以 $\sum_{i,j\in E} d(i) + d(j)$=$\sum_{i\in E} d(i)^2$

由柯西不等式得：$\sum_{i\in E} d(i)^2 \geq (\sum_{i\in E} d(i))^2/n = 4E^2/n$

$|E|$≤$\frac{n^2}{4}$, 当且仅当 di=di 时等号成立