

# 离散数学 (2023) 作业 XX

周帛岑

221900309

2023 年 4 月 26 日

## 1 Problem 1

(1): 解: 由运算表可知, 一共有  $n^2$  个位置, 每一位都有  $n$  种选择, 故一共有  $n^3$  种二元运算

(2): 解: 由运算表可知, 可交换的二元运算关于对角线对称, 每一位都有  $n$  种选择, 故一共有  $n \times (\frac{n^2-n}{2} + n) = \frac{n^3+n^2}{2}$  种二元运算

(3): 解: 由运算表可知, 幂等的二元运算对角线元素固定, 剩下每一位都有  $n$  种选择, 故一共有  $n \times (n^2 - n) = n^3 - n^2$  种二元运算

(4): 解: 由运算表, 不满足幂等的对角线元素安排一共  $n^2 - 1$  种, 不满足可交换的其余元素安排一共有  $\frac{n^3-n^2}{2}$  种。故一共有  $(n^2 - 1) \times \frac{n^3-n^2}{2}$  种

## 2 Problem 2

(1): 解:  $S = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

(2): 解:

	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,0)	(1,1)	(1,1)
(0,1)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(1,0)	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(1,1)
(1,1)	(0,0)	(1,1)	(0,0)	(1,1)

单位元为 (0,1), 右零元为 (0,0) 和 (1,1), 无左零元, (0,1) 和 (1,0) 的零元分别为其自身

### 3 Problem 3

(1): 不能, 不妨设  $a$  为最大元, 则  $a+a$  一定不在  $A$  内

(2): 能, 分别取  $a, b, c=-1, 0, 1$ , 则此时对于乘法运算封闭

### 4 Problem 4

(1): 封闭

(2): 不封闭

(3): 封闭

(4): 不封闭

(5): 封闭

(6): 封闭

(7): 不封闭

(8): 不封闭

(9): 不封闭

### 5 Problem 5

(1):  $f_1$  为可交换, 可结合的, 不为幂等的

$f_2$  不为可结合, 幂等, 可交换的,

$f_3$  为可交换, 可结合, 幂等的

$f_4$  为可交换, 不为可结合, 幂等的

(2):  $f_1$  的单位元为 1, 零元为 0, 每一个元素的逆元为其倒数

$f_2$  的右单位元为 0, 无左单位元, 无零元, 没有逆元

$f_3$  无单位元, 无零元, 无逆元

$f_4$  的单位元为 0, 无零元, 每一个元素的逆元为其相反数

(3):

	a	b
a	b	b
b	a	a

## 6 Problem 6

(1): 能。满足交换律，不满足结合律，无单位元，零元为 1

(2): 不能

(3): 能。满足交换律和结合律，单位元为 1，零元为 10

(4): 能。不满足交换律和结合律，无单位元和零元

## 7 Problem 7

(1): 2, 4 均在其中，但 6 不在其中，故不构成子代数

(2): 构成

(3): 2, 3 均在其中，但 5 不在其中，故不构成子代数

(4): 2, 15 均在其中，但 17 不在其中，故不构成子代数

(5): 构成

## 8 Problem 8

(1): 单位元为 a, 无零元, 子代数为 {a,b}

(2):

o	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	a	a	a	a
c	a	a	a	a
d	a	a	a	a

## 9 Problem 9

(1): 证: 对于  $\oplus$ , 有  $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ , 则  $f(a \oplus (b \oplus c)) = f((a \oplus b) \oplus c)$

$\odot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	a	a	a	a
c	a	a	a	a
d	a	a	a	a

由  $f(x \oplus y) = f(x) \odot f(y)$

即  $f(a) \odot f(b \oplus c) = f((a \oplus b)) \odot f(c)$

即满足结合律

(2): 证: 对于  $\oplus$ , 有  $a \oplus e = e \oplus a = a$ , 则  $f(a \oplus e) = f(e \oplus a) = f(a)$

由  $f(x \oplus y) = f(x) \odot f(y)$

即  $f(a) \odot f(e) = f(e) \odot f(a) = f(a)$

即  $f(e)$  是  $(B, \odot)$  的单位元.

(3): 证: 对于  $\oplus$ , 有  $a \oplus b = b \oplus a = e$ , 则  $f(a \oplus b) = f(b \oplus a) = f(e)$

由  $f(x \oplus y) = f(x) \odot f(y)$

即  $f(a) \odot f(b) = f(b) \odot f(a) = f(e)$

即在  $(B, \odot)$  中  $f(a)$  是  $f(b)$  的逆元.