

65

离散数学 (2023) 作业 17

艾睿

221900317

2023 年 5 月 3 日

1 Problem1

A. 是 B. 是 C. 不是 D. 不是

2 Problem2

有题易得 $N(a)$ 为 G 的子集, 封闭性: 设 $\forall x, y \in N(a), xya = x(ya) = xay = (xa)y = axy \rightarrow xy \in N(a)$, 单位元令 e 为 G 的单位元, 那么易得 e 也为 $N(a)$ 的单位元, 可逆性: e 在 $N(a)$ 内, 那么总 $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$, 所以得正, $\forall x \in N(a), \exists x^{-1} \in N(a)$

3 Problem3

由于 G 为群, 所以易得 xHx^{-1} 为集合 G 的子集封闭性: 若此时存在 $h1, h2 \in xHx^{-1}$, 那么总有 $xh1x^{-1}xh2x^{-1} = xh1h2x^{-1}$, 所以得到 $h1h2 \in H$, 所以封闭性得证单位元素: 令 e 为 G 中的单位元, 所以 $e \in H$, 那么 $xhx^{-1}xex^{-1} = xhex^{-1}$, 所以 $he = h \rightarrow xex^{-1}$ 为右单位元, 同理可证其为左单位元, 所以单位元存在结合律易得, 逆元: H 是子群, 所以 $\forall x \in H, \exists x^{-1} \in H$, 又由于 xHx^{-1} 的定义, 所以一定有逆元存在

4 Problem4

假设又 a 元素 $a \neq e, a \in H \wedge a \in K$, 那么有 $a^r = a^s = e \rightarrow r|s$, 与题设不符, 所以得证

5 Problem5

令 y 为这样的二阶元, 所以 $\forall x \in G, xyx^{-1}xyx^{-1} = xyyx^{-1} = e$, 所以 xyx^{-1} 为单位元, 一阶或者二阶, 若为一阶则 $xyx^{-1} = e \rightarrow xx^{-1} = e \rightarrow xy = x$, 得出 y 为一阶, 不符, 所以 xyx^{-1} 为二阶单位元, 即 $xyx^{-1} = y = yxx^{-1} = xx^{-1}y \rightarrow xy = yx$, 得证

30