“离散数学”课堂练习

（2014 年 11 月 14 日）

参考答案

1. 试定义谓词，符号化下面的命题并推证其结论：

“每个大学生不是文科生就是理科生，有的大学生是优等生，小张不是理科生，但他是优等生，因而如果小张是大学生，他就是文科生。”

参考解答： 1、定义谓词：$G(x)$: x是大学生，$S(x)$: x是理科生，$L(x)$: x是文科生，

$E(x)$: x是优等生. 则上述描述可符号化如下子句（c代表小张）：

$$(\forall x)\big(G(x) \rightarrow L(x) \vee S(x)\big), (\exists x)\big(G(x) \wedge E(x)\big), \neg S(c) \vdash E(c) \Rightarrow G(c) \rightarrow L(c)$$

2、推理过程如下：

(1) $G(c)$ (Premise)

(2) $(\forall x)(G(x) \rightarrow L(x) \vee S(x))$ (Premise)

(3) $G(c) \rightarrow L(c) \vee S(c)$ (UI from 2)

(4) $L(c) \vee S(c)$ (MP from 3)

(5) $\neg S(c)$ (Premise)

(6) $L(c)$ (DS from 4)

(7) $G(c) \rightarrow L(c)$ (from 4,5)

2. 试证明下式永真：$(\boldsymbol{p} \rightarrow \neg \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{r} \rightarrow \boldsymbol{q}) \rightarrow (\boldsymbol{r} \rightarrow \neg \boldsymbol{p})$.

证明：

方法一：真值表：

$A=(p\to\neg q)\wedge(r\to q)\to(r\to\neg p)$的真值表

p	q	r	$p\to\neg q$	$r\to q$	$r\to\neg p$	A
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1

方法二：命题逻辑等值演算

$$
\begin{aligned}
&(p\to\neg q)\wedge(r\to q)\to(r\to\neg p)\\
\Leftrightarrow&(\neg p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\to(\neg p\vee\neg r)\\
\Leftrightarrow&(p\wedge q)\vee(\neg q\wedge r)\vee\neg p\vee\neg r\\
\Leftrightarrow&((p\wedge q)\vee\neg p)\vee((\neg q\wedge r)\vee\neg r)\\
\Leftrightarrow&(\neg p\vee q)\vee(\neg q\vee\neg r)\\
\Leftrightarrow&\neg p\vee(q\vee\neg q)\vee\neg r\\
\Leftrightarrow&1
\end{aligned}
$$

方法三：主析取范式法

$$
\begin{aligned}
&(p\to\neg q)\wedge(r\to q)\to(r\to\neg p)\\
\Leftrightarrow&(\neg p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\to(\neg p\vee\neg r)\\
\Leftrightarrow&(p\wedge q)\vee(\neg q\wedge r)\vee\neg p\vee\neg r\\
\Leftrightarrow&(m_6\vee m_7)\vee(m_1\vee m_5)\vee(m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3)\vee(m_0\vee m_2\vee m_4\vee m_6)\\
\Leftrightarrow&m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7
\end{aligned}
$$

由于原式的主析取范式含全部8个极小项，为重言式，故推理正确.

3. 设R是集合A上任意自反且传递的二元关系，试证明：$R\circ R=R$.

证明：因为R是A上的传递关系，故$R\circ R\subseteq R$，只需证$R\subseteq R\circ R$即可：

$$\forall(a,b)\in R\Longrightarrow\quad(a,a)\in R\ \wedge\ (a,b)\in R\quad\Longrightarrow\quad(a,b)\in R\circ R$$

证毕. 注意该命题的逆命题并不成立.

4. 证明：对于所有集合A，B，C，有：

$$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)\text{ 当且仅当 }C\subseteq A.$$

证明：

必要性：$\forall x\in C\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup C\quad\Rightarrow x\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow x\in A\Rightarrow C\subseteq A$;

充分性：$C\subseteq A\Rightarrow A\cup C=A\quad\Rightarrow(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)=A\cap(B\cup C)$.

证毕.

5. 试求定义在一个n元集合上的不同二元关系的总数.

解：

方法一：将每个二元关系看做一个关系矩阵，因为无任何限制，因此，关系矩阵的个数即为二元关系的个数。关系矩阵为$n\times n$个元素，每个元素只能取0或者1，因此关系矩阵的总数为2^{n^2}个，这表明定义在n元集上的二元关系总数为2^{n^2}.

方法二：设n元集为A，因为任何二元关系皆为$A\times A$之子集，而$|A\times A|=n^2$故所有定义在n元集A上的二元关系的总数等于$A\times A$之子集的总数，即$|P(A\times A)|=2^{n^2}$.

6. 请给出集合$\{a,b,c,d,e\}$上包含关系$\{(a,b),(a,c),(d,e)\}$的最小等价关系（*i.e.* 上述关系的“等价闭包”）.

解：这个最小等价关系为：$\{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (d, e), (e, d), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$

7. 设B为布尔代数，试证明：

(1) $(\forall a_1,a_2,\cdots,a_n\in B)((a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n)'=a_1'\wedge a_2'\wedge\cdots\wedge a_n')$

(2) $(\forall x,y\in B)(x\preccurlyeq y\Leftrightarrow y'\preccurlyeq x')$

其中x'表示x之补元.

(1) 证明:

对n实施数学归纳法。当$n=2$时,等式成立(德摩根律),

I.H. $n=k$时命题成立,则

I.S.

$$(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_{k+1})' = \big((a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k) \vee a_{k+1}\big)'$$
$$= (a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k)' \wedge a_{k+1}'$$
$$= (a_1' \wedge a_2' \wedge \cdots \wedge a_k') \wedge a_{k+1}'$$
$$= a_1' \wedge a_2' \wedge \cdots \wedge a_k' \wedge a_{k+1}'$$

(2) 证法一:

证:

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x' \vee y' = x'(\text{de Morgen}) \Leftrightarrow y' \preccurlyeq x'$$

证法二: $(\forall x, y \in B) x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow (x \wedge y)' = x \Leftrightarrow x' \vee y' = x' \Leftrightarrow y' \preccurlyeq x'$.

□

8. 一逻辑学家误入某部落,被拘于牢狱,部落酋长是一位逻辑爱好者,他对逻辑学家说:“今有两门,一为自由,二为死亡,你可以任意开启一门。今加派两名卫兵负责解答你所提的任何问题。遗憾的是,此两卫兵中一名天性诚实,一名总是说谎。你的生死就看你的智慧了。”逻辑学家沉思片刻,即向一卫兵问了一个问题,得到答案后从容开门而去。该逻辑学家问了一个怎样的问题?请简要分析.

解:

逻辑学家手指某一门问其中一名战士说:“这扇门是死亡之门,另外一名战士将回答‘是’,对吗?”. 当被问战士回答“对”,则逻辑学家开启所指的门离去。当被问战士回答“否”,则逻辑学家开启另一门离去.简要分析如下:

设命题变元 P:被问战士是诚实人;

Q:被问战士的回答是“是”;

R:另一战士的回答是“是”;

S:这扇门是死亡门.

故有真值表:

P	Q	R	S
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	T	T

观察真值表可知:$S \Leftrightarrow \neg Q$。即被问人回答“是”时,此门不是死亡之门;否则是死亡之门.

9. (选人问题)

a) n个人排成一列,从中选出k个人$(n > 2k)$,使得选出的人在原队列中不相邻,共有多少种选法?

b) n个人坐成一圈,从中选出k个人$(n > 2k)$,使得选出的人在原圈子中不相邻共有多少种选法?

解:

(a) 可反过来想:把 k 个人插回到 n-k 个人的队列中,要使得插回的人不相邻,则共有 n-k+1 个合法位置,于是共有$\binom{n-k+1}{k}$种选法。

(b) 有多种方法,结果可写成下列任何一种形式:

$$\begin{aligned}\frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1} &= \binom{n-k+1}{k} - \binom{n-k-1}{k-2} \\ &= \binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k}{k} \\ &= 2\binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k-1}{k}\end{aligned}$$