离散数学（2023）作业 02 - 谓词逻辑

离散数学教学组

Problem 1

选择一阶逻辑语言，并将下列语句转换成一阶语句。你认为这些语句构成的推理有错误吗？为什么？

1. 如果存在着存在着的鬼，则鬼存在；
2. 存在着的鬼当然存在；
3. 鬼存在。

Problem 2

假定一阶语言中有二元函数符号 $+$ 和 $\cdot$，分别用来表示“加法”和“乘法”；常数符号 $1, 2, 3, 4$ 分别表示数字一、二、三、四。再假定变元的论域都是整数。

1. 将下列一阶语言的公式转换成中文语句：
$$\forall x\, (\exists m\, (x = 2 \cdot m + 1) \to \exists n\, (x \cdot x = 2 \cdot n + 1));$$
2. 将下列中文语句转换成该一阶语言的公式：“没有形如 $4k + 3$ 的整数是平方和”。

Problem 3

在数学分析中，极限的定义如下：$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ 当且仅当

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \mathbb{R})\,[0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - l| < \epsilon]$$

那么，$\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq l$ 该如何用这种一阶语言表达？

Problem 4

在线性代数中，称向量组 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ 线性相关的，如果

$$(\exists c_1 \in \mathbb{R})(\exists c_2 \in \mathbb{R}) \cdots (\exists c_n \in \mathbb{R})\,[(c_i\text{不全为零}) \wedge (\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}_i = 0)].$$

请试着写出向量组 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ 线性无关的定义。

Problem 5

找出变元 x、y 和 z 的一个公共论域，使语句 $\forall x \forall y((x \neq y) \to \forall z((z = x) \vee (z = y)))$ 为真，再找出另外一个论域使其为假。

Problem 6

将下列逻辑式转化为前束范式。

1. $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \vee A$，其中 A 是不涉及任何变量的命题；
2. $\neg(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$；
3. $\exists x P(x) \to \exists x Q(x)$。

Problem 7

证明两个语句 $\neg\exists x\forall y P(x,y)$ 和 $\forall x\exists y\neg P(x,y)$ 是逻辑等价的，这里两个 $P(x,y)$ 第一个变元的量词具有相同的论域，两个 $P(x,y)$ 第二个变元的量词也具有相同的论域。

Problem 8

下列语句的真值是什么？

1. $\exists !x P(x) \to \exists\, x P(x)$
2. $\exists !x \neg P(x) \to \neg\forall\, x P(x)$
3. $\forall\, x P(x) \to \exists !x P(x)$

Problem 9

证明下列逻辑等价式，其中 x 在 A 中不作为自由变元出现。假设论域非空。

1. $(\forall x\, P(x)) \vee A \equiv \forall\, x(P(x) \vee A)$
2. $(\exists x\, P(x)) \vee A \equiv \exists\, x(P(x) \vee A)$

Problem 10

如果每个变量的论域都为实数集合，判断下列各语句的真值。

1. $\exists\, x(x^2 = 2)$
2. $\exists\, x(x^2 = -1)$
3. $\forall\, x(x^2 + 2 \geq 1)$
4. $\forall\, x(x^2 \neq x)$