85

离散数学（2023）作业 22 - 图的基本概念

杨辰
221900328

2023 年 5 月 16 日

1 Problem 1

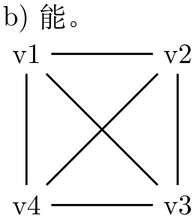
该命题正确。
证明：考虑其逆否命题。即若 G 为简单图，则至少有两个顶点度数相同。不妨设有 n 个顶点，因为是简单图，所以每个顶点的度数为 $1, 2, 3, \cdots, n-1$ 之一，共有 n 个顶点，由抽屉原理知，至少有两个顶点度数相同。所以若无向图 G 至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，则 G 不是简单图。

2 Problem 2

a) 证明：假设原图的平均度数为 a，顶点数为 n，最大度为 x，修改后的图平均度为 a', 顶点数为 n-1，可得 $(n-1)a' + 2x = na$, 所以 $a - a' = \frac{2x-a}{n-1}$, 因为 $2x - a \geq 0$, 所以 $a - a' \geq 0$, 所以原图的平均度不会增加。
b) 反驳：对于一个完全图，平均度为 $n-1$，删掉一个顶点后，平均度变为 $n-2$，平均度减少。

3 Problem 3

a) 不能。有八个顶点，所以每个顶点的度数最大为 7，而序列中有 7，即有一个顶点与其他顶点都相连，所以度数不可能为 0。
b) 能。



c) 不能。有六个顶点，所以每个顶点的度数最大为 5，而序列中有 5，并且还有 4，说明最多只有一个顶点的度数为 1，，而序列中有 3 个 1。
d) 不能。有五个顶点，所以每个顶点的度数最大为 4，而序列中有 5。

4 Problem 4

证明：由握手定理得，2ϵ=$\sum_{i=1}^{v} d(v_i)$，而 $\delta(G) \leq d(v_i) \leq \Delta(G)$，所以 $v \cdot \delta(G) \leq \sum_{i=1}^{v} d(v_i) \leq v \cdot \Delta(G)$，因此 $\delta(G) \leq \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} d(v_i) \leq \Delta(G)$，即 $\delta(G) \leq \frac{2\epsilon}{v} \leq \Delta(G)$.

5 Problem 5

a) 证明：设 G 有 V 个顶点，E 条边，由握手定理得 $\frac{2E}{V} = a$,G 删去一个顶点 x 后的平均度为 $a' = \frac{2(E-deg(x))}{V-1} \geq a$，将 $\frac{2E}{V} = a$ 带入，解得 $deg(x) \leq \frac{a}{2}$. 反之，若 $deg(x) \leq \frac{a}{2}$，则 $a' = \frac{2(E-deg(x))}{V-1} \geq \frac{aV-2\cdot\frac{a}{2}}{V-1} = \frac{a(V-1)}{V-1} = a$。
b) 反驳：按第一问所作，依次删去度数小于等于 $\frac{a}{2}$ 的顶点，所得子图的最小度数小于等于 $\frac{a}{2}$，矛盾。

−5

6 Problem 6

证明：视球队为顶点，比赛为边，如果每个球队至多赛过两场，那么 n 支球队至多赛过 2n 次，即相应的图的总度数至多为 2n，于是其边数至多为 $\frac{2n}{2} = n$ 条，即至多赛完 n 场，与题目条件已经赛过 n+1 场矛盾。故一定有一个球队比赛了至少 3 场。

7 Problem 7

证明：设 G 的顶点为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，注意到如果两点 x_i, x_j 相连，由于图中没有三角形，则 $d(x_i) + d(x_j) \leq n$，由于图 G 的边数为 |E|，而对其中每一条边都可以得到上述不等式，各个不等式相加，由于每个 $d(x_i)$ 在上述不等式中分别出现了 $d(x_i)$ 次，所以得到：

$$\sum_{i=1}^{n} d^2(x_i) \leq n|E|$$

由柯西不等式，得 $\sum_{i=1}^{n} d^2(x_i) \geq \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n} d(x_i)]^2 = \frac{1}{n}(2|E|)^2$.
由上述各式得：$n|E| \geq \frac{1}{n}(2|E|)^2 \Rightarrow |E| \leq \frac{n^2}{4}$。