离散数学 (0-Overview)

姓名： 魏恒峰　　**学号：** hfwei@nju.edu.cn

评分： 8'　　**评阅：** 肖江

2021 年 3 月 4 日

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助，请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1　作业（必做部分）

题目 1 (防疫工作, 不能大意 [4 分])
近期突发一种流感，症状极其严重，受感染的学生会无可遏制地进行编程与刷题等危险行为。假设 n^2 位学生坐在座位按 $n \times n$ 网格状排列的教室里。感染正在迅速扩散:

- 如果某学生已被感染，那么他/她就不可能痊愈了;
- 如果某学生至少与 2 个已经感染的学生座位相邻 (前、后、左、右；不包括对角)，那么该学生也会被感染。

请证明: 如果初始状态有 $< n$ 个学生感染了流感，那么至少有一个学生永远不会被感染。

解答：
首先 n 的值为 1 时命题成立。（无人感染）

下用数学归纳法证明 $n >= 2$ 时，初始至少有 n 人感染，才能使全部人感染：

1）$n = 2$ 时，若初始只有 1 人感染，则有剩 3 人未被感染；若初始 2 人感染，则将他们放在教室的对角线处则可感染所有人，故 $n = 2$ 时成立；

2）假设当 $n = k$ 时，初始至少 k 人才能感染全部人；

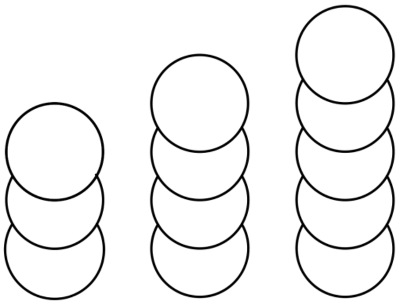
3）当 $n = k + 1$ 时，（k+1）*（k+1）的教室里，由（2）知 k 个人已使 $k \times k$ 的人（区域）感染，且该区域本身不能对教室里的其他人感染。此时若在该 $k \times k$ 的区域的对角处“放置”1 名初始被感染的学生，则可以使全教室感染。因此，（k+1）*（k+1）的教室里初始至少有（$k + 1$）人感染，才能使全部人感染。

由上用数学归纳法证得，$n >= 2$ 时，初始至少有 n 人感染，才能使全部人感染。（构造如下：当把初始状态感染了流感的学生放在教室的其中一条对角线上即可实现全教室感染）

即如果初始状态有 $< n$ 个学生感染了流感，那么至少有一个学生永远不会被感染。

2'
[如果可以从这个方向证明的话:)
第三步中，只证明了"k+1个人在(k+1)*(k+1)可以全部感染"，没有证明"k个人在(k+1)*(k+1)不可以全部感染"
"k个人在k*k中可以全部感染"不代表"k个人在(k+1)*(k+1)不能全部感染"

题目 2 (Nim Game [6 = 1 + 2 + 2 + 1 分])
Nim 是一个双人游戏 (你可以在课堂上分享的 Ludii Player 里找到它)。游戏开始时，两人面前放着几堆石头，两个玩家轮流操作，每次选择从某个石堆里拿走一块或多块石头。最后没有石头可拿的那个玩家输掉比赛。



本题将引导大家寻找该游戏的必胜策略。

考虑对石头堆里的石头个数 (二进制表示下的; 不足时高位补 0) 做异或操作 ($\oplus$)，结果称为 Nim 和。

(1) 请证明: 若 Nim 和为 0, 则任意一次移动都会导致 Nim 和不为 0。

(2) 请证明: 若 Nim 和不为 0，则必然存在一个石头堆，它的石头数大于其它所有石头堆的 Nim 和。(统一在二进制或十进制下进行大小比较)

(3) 请证明: 若游戏开始时, Nim 和不为 0，则先手有必胜策略。

(4) 在只有两堆石头的情况下，请给出某玩家有必胜策略的充要条件与他/她的必胜策略。

解答:

6'

(1) 一次拿走 n 个石头，可视为在 Nim 和的基础上对 Nim 和的二进制数值和-n 的二进制表示的数值进行异或操作。b 而一个非 0 的二进制数（设为 A）与 0 进行异或操作后，结果为 A（即结果不是 0)。因此，进行一次移动后，必然使 Nim 和不为 0。

(2) Nim 和不为 0 时，其二进制表示必然存在某一位（或者几位）为“1”，设其中最高位的“1”是第 k 位。

设一个二进制数 q，第 k 位是 1，其余位均为 0。(高位补 0)

则必存在一个石头堆的个数的二进制数值 >=q，(由异或的运算法则知，总 Nim 和第 k 位的“1”要由该石头堆来“贡献”)，而剩下石头堆 q 的 Nim 和必然 <q。

由上即得，必存在某个石头堆的石头个数大于其他所有石头堆的 Nim 和。

(3) 当玩家最后没有石头可以拿的时候会输掉比赛，即最后将石头数操作至 0 个 (Nim 值也为 0) 的玩家可赢得比赛。由 (1) 知，当 Nim 和为 0 时，下一步操作都会导致 Nim 和不为 0。因此，当游戏开始的 Nim 值不为 0 时，先手的每一步都将 Nim 和操作为 0 即可。

由 (2) 知，Nim 和不为 0 时必然有一个石头堆（设为 C）大于其他所有石头堆的 Nim 和。因此，只需操作 C，使 C 的 Nim 和与其他所有石头堆的 Nim 和相等（取走两 Nim 和之差所表示的十进制数值的石头个数即可)，则此时的石头总 Nim 和将变为 0 (相同的两个数进行异或操作后结果为 0)。

先手每一次都进行上述操作后，最终可使石头总数变为 0 (Nim 值也为 0)，从而获得胜利。

(4) 先手必胜策略的充要条件是两堆的石头个数不一样（即 Nim 值不等于 0)。

必胜策略是每一次都取石头更多（必然会出现该情况）的石头堆的石头，使操作后两石头堆的个数相等。

后手必胜策略的充要条件是两堆的石头个数一样（即 Nim 值等于 0)。

必胜策略也是每一次都取石头更多（必然会出现该情况，因为先手会破坏石头堆相等的状态）的石头堆的石头，使操作后两石头堆的个数相等。

2 订正

3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 “教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容：
  第一次写这种证明题，有想法却不知应该如何用规范性的语言描述。
- $\cdots$