85

离散数学（2023）作业 ghw01

李思钰
221900311

2023 年 5 月 15 日

1 Problem 1

该命题是错误的。
反例：考虑一个无向图 G，其中包含四个顶点 A、B、C 和 D。连接方式如下：AB、BC、CD 和 DA。每个顶点的度数分别为 2、2、2 和 2，且 G 是一个简单图，因为没有重复的边或自环。
因此，存在一个无向图 G，其中至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，但 G 仍然是简单图。

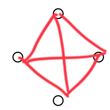
2 Problem 2

−10

a) 反驳：从图中删去一个度最大的顶点可能会使其顶点平均度增加。
假设图 G 有四个顶点 A、B、C 和 D，连接方式如下：AB、AC、AD 和 BC。每个顶点的度数分别为 3、2、2 和 1。顶点平均度为 $(3+2+2+1)/4=2$。
如果从图中删除度最大的顶点 A，那么连接 A 的三条边也会被删除，图 G 变为一个只有三个顶点 B、C 和 D 的无向图，连接方式为 BC。此时每个顶点的度数为 2、1 和 1，顶点平均度为 $(2+1+1)/3=\frac{4}{3}$，比原来的顶点平均度增加了 $\frac{1}{6}$。
因此，从图中删去一个度最大的顶点并不一定会使其顶点平均度增加。
b) 证明：从图中删去一个度最小的顶点不会使其顶点平均度减少。
假设图 G 有 n 个顶点，其中最小度数为 k。删除一个度最小的顶点后，至少会减少 k 条边。由于删除的是度最小的顶点，其他顶点的度数要么保持不变，要么减少，不会增加。因此，图 G 中剩余的顶点的总度数不会增加，而边数减少，所以顶点平均度不会减少。
因此，从图中删去一个度最小的顶点不会使其顶点平均度减少。

3 Problem 3

a) 不可以作为简单图的度序列。原因是图的度序列中不能出现负数。
b) 可以作为简单图的度序列。一个满足该度序列的简单图可以是一个正方形，其中每个顶点连接到其他三个顶点。



c) 不可以作为简单图的度序列。原因是总顶点数为 6，但是度序列中的度之和为 14，而一个简单图的度之和必须为偶数。
d) 不可以作为简单图的度序列。原因是度序列中的度值过大，最大的度为 5，但是顶点数为 4，因此无法形成一个满足该度序列的简单图。

4 Problem 4

证明:
设图 G 有 ν 个顶点和 ϵ 条边。
令 v 表示 G 中的一个顶点，则该顶点的度数为 deg(v)。
由于每条边连接两个顶点，所以每条边对应两个顶点的度数之和。
因此，所有顶点的度数之和等于 2ϵ，即

$$\sum_{v\in\nu} deg(v) = 2\epsilon$$

假设顶点 v 的度数最小，即 $\delta(G)$ 表示 G 中度最小的顶点的度。
由于 v 的度数最小，对于其他所有顶点 u，有 $deg(u) \geq deg(v)$。
因此，所有顶点的度数之和不小于 $\nu * deg(v)$，即

$$\sum_{v\in\nu} deg(v) \geq \nu \cdot deg(v)$$

结合前式有

$$2\epsilon \geq \nu \cdot deg(v)$$

除以 ν 得

$$2\frac{\epsilon}{\nu} \geq deg(v)$$

即

$$2\frac{\epsilon}{\nu} \geq \delta(G)$$

同样地，假设顶点 v 的度数最大，即 $\Delta(G)$ 表示 G 中度最大的顶点的度。
对于任意顶点 u，有 $deg(u) \leq deg(v)$。
因此，所有顶点的度数之和不大于 $\nu * deg(v)$，即

$$\sum_{v \in \nu} deg(v) \leq \nu \cdot deg(v)$$

结合前式有

$$2\epsilon \leq \nu \cdot deg(v)$$

除以 ν 得

$$2\frac{\epsilon}{\nu} \leq deg(v)$$

即

$$2\frac{\epsilon}{\nu} \leq \Delta(G)$$

综上所述，

$$\delta(G) \leq 2\frac{\epsilon}{\nu} \leq \Delta(G)$$

5 Problem 5

a) 证明：
假设 $\deg(x) \leq \frac{a}{2}$。删除顶点 x 后，顶点 x 的邻居顶点的度数减少了 $\deg(x)$。由于 $\deg(x) \leq \frac{a}{2}$，所以邻居顶点的度数至少减少了 $\frac{a}{2}$。其他顶点的度数保持不变。因此，删去顶点 x 后，剩余顶点的总度数减少不超过 $\frac{a}{2}$，平均度至少为 a。
反之，假设 G 删去一个顶点 x 后平均度至少为 a。
设 G 的顶点总数为 V，删去顶点 x 后剩余的顶点总数为 V'，删去顶点 x 后剩余顶点的总度数为 D'。
根据顶点平均度的定义，G 的顶点总度数为 aV。
由于 G 删去顶点 x 后平均度至少为 a，有：$D' \geq aV'$
将 D' 表示为顶点 x 的度数 $\deg(x)$ 和其他剩余顶点的度数之和，即 $D' = \deg(x) + D''$，其中 D'' 是其他剩余顶点的度数之和。
代入上述不等式，得：$\deg(x) + D'' \geq aV'$
由于剩余顶点总数为 V'，所以剩余顶点的总度数为 D''。
由顶点平均度的定义有：$D'' = aV' - \deg(x)$
将上式代入不等式中，得到：$\deg(x) + (aV' - \deg(x)) \geq aV'$
化简得：$aV' \geq aV'$
这说明 $\deg(x) \leq \frac{a}{2}$。
综上所述，在无自环的无向图 G 中，G 删去一个顶点 x 后平均度至少为 a，当且仅当 $\deg(x) \leq \frac{a}{2}$。

−5

b) 反驳:
存在一种特殊情况，即图 G 只有一个顶点，此时该顶点的度数为 0，小于 $\frac{a}{2}$。因此，对于一般情况，不能保证图 G 有一个最小度大于 $\frac{a}{2}$ 的子图。

6 Problem 6

证明:
假设有 n 支球队，已经比赛完了 n+1 场。
假设每支球队最多比赛了 2 场。由于每场比赛涉及两支球队，最多只能涉及 2n 支球队。
然而，已经比赛了 n+1 场，根据鸽笼原理，至少有一支球队比赛了至少 3 场。
因此，一定存在一个球队比赛了至少 3 场。

7 Problem 7

证明:
假设存在一个不包含三角形 K_3 作为子图的 n 阶图，其边数 m 满足 $m > \frac{n^2}{4}$。假设该图中的每个顶点的度数尽可能大。
由于图中不存在三角形 K_3，每个顶点的度数最多为 2，否则必然存在三个相邻的顶点形成一个三角形。
假设图中的一个顶点的度数为 d，则该顶点连接的边数为 d。
因为每个顶点的度数最多为 2，所以图中所有顶点的度数之和不超过 2n。
根据握手定理，图的边数 m 等于所有顶点的度数之和的一半，即 $m \leq (2n)/2 = n$。综上所述，如果一个不包含三角形 K_3 作为子图的 n 阶图的边数 m 满足 $m > \frac{n^2}{4}$，则必然存在一个三角形 K_3，与原假设相矛盾。
因此，原题得证。