100

离散数学图论第一次作业

赵F博

2023 年 4 月 26 日

1 Problem 1

假设 G 是简单图，当 G 有 n 个顶点 ($n \geq 2$) 时，每个定点的度数只能在 0,1,...n-1 中取
当至少两个点度数均为 0 时，存在度数相同的顶点；当只有一个顶点度数为 0 时，没有点可以取到 n-1 的度数，由鸽笼原理，必有两个点度数一致，存在度数相同的顶点
有 n 个顶点时，各顶点度数均不相同，由上述讨论可知，只能 n=1 时成立,G 不存在两个及以上的顶点
所以若无向图 G 至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，则 G 不是简单图。

2 Problem 2

2.1 1)

成立，假设原图的平均度数为 θ，顶点数为 n，最大度为 x，修改后的图平均度为 θ'，顶点数为 n-1，原图损失了 2x 的总度数
$(n-1)\theta' + 2x = n\theta$
$\theta - \theta' = \frac{2x-\theta}{n-1}$ $2x - \theta \geq 0$ 所以原图平均度不会增加

2.2 2)

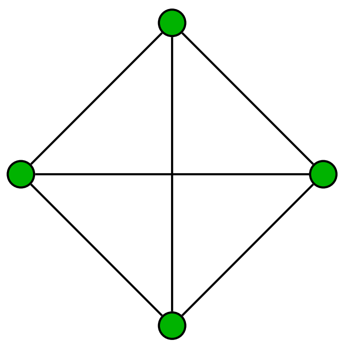
不成立，对于一个完全图,n 个顶点，删去前度数均为 n-1，删去后度数为 n-2

3 Problem 3

3.1 (1)

由第一问可知，8 个顶点，度数各不相同的简单图并不存在

3.2 (2)



3.3 (3)

不存在, 度数为 5 的点与其他 5 个点之间均存在连线, 导致 3 个度为 1 的点不再有其他连线, 导致不存在度数为 4 的点

3.4 (4)

不能, 简单图最大度不能为顶点个数,

4 Problem 4

υ 个顶点的度均为 $\epsilon(G) = \delta(G)$ 时, $2\epsilon = \upsilon \cdot \epsilon(G) = \upsilon \cdot \delta(G)$ 所以顶点度数相同时取等

不相同时, 最大值显然大于平均度，最小值显然小于平均度

5 Problem 5

5.1 (1)

假设原图的平均度数为 θ, 顶点数为 n, 顶点 x 的度数为 x，修改后的图平均度为 θ', 顶点数为 n-1, 原图损失了 2x 的总度数
$(n-1)\theta' + 2x = n\theta$
要想使原图平均度增加, 则 $\theta - \theta' = \frac{2x-\theta}{n-1} \leq 0$, 则 $2x - \theta \leq 0$, 即 $deg(x) \leq \frac{a}{2}$

5.2 (2)

删去一个现在的最小度顶点 x, 若平均度减少, 由 (1) 知, 则 deg(x)$\geq \frac{a}{2}$, 其自身就满足结论; 若平均度不变甚至增加, 则说明 $deg(x) \geq \frac{a}{2}$, 此时我们将其删去, 并重复这种判断, 则我们可以在顶点全部删完之前, 找到一个这样的最小度小于 $\frac{a}{2}$ 的点，且我们容易得到其为最开始的图的子图 (平均度最后一定会减为 0), 得证

6 Problem 6

n 个球队为 n 个顶点, 每条边表示两队之间举行过比赛。举行过 n+1 场比赛, 则总度数为 2(n+1)
假设没有队伍进行过三场及以上的比赛, 则令其他所有队伍只进行过两场比赛, 则总度数为 2n，还需要某两个队伍之间再进行一次比赛才能度数为 2(n+1), 得证

7 Problem 7

取度最大的顶点 u,N(u) 中顶点两两之间无边, 且顶点的度数不超过 n-$\delta(G)$, 于是:
$2m = \Sigma_{v\in V(G)} = 1 \cdot \delta(G) + \Sigma_{v\in N(u)} deg(v) + \Sigma_{v\in (V(G)(u))} deg(v) \leq \delta(G) + \delta(G)(n-\delta(G)) + (n-\delta(G)-1)\delta(G) = 2(n-\delta(G))\delta(G) \leq 2 \cdot \frac{n^2}{4}$, 所以 $m \leq \frac{n^2}{4}$