9.1

5. No
6. No
7. No
8. Yes
15. Commutative, associative.
16. not commutative; not associative
17. Commutative, associative.
18. Commutative, associative.
19. Commutative; not associative
20. a*a=GCD(a,a)=a, 故具有幂等性质
22.

*	a	b	c
a	b	c	a
b	c	b	a
c	a	a	c

25. (a) a, a. (b) c, b. (c) c, a. (d) Neither
27.

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	d	c	d
d	d	c	c	d

28. n^{n^2}

29. $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ commutative operations.

32. 证明(A, ≤)是一个偏序集

1. 自反性

有 a=a*a,可知 a≤a, 故满足自反性

2. 反对称性

若 a≤b, 且 b≤a, 则有 b=a*b, 且 a=b*a, 又因为*满足交换律,所以 a*b=b*a,所以 a=b，故满足反对称性

3. 传递性

若有 a≤b, b≤c, 则有 b=a*b, c=b*c, 则有 c=(a*b)*c, 又因为*满足结合律，故 c=a*(b*c), c=a*c, 即 a≤c

所以（A，≤）是一个偏序集
a*b=(a*a)*b=a*(a*b)，故有 a≤a*b
同理有 b≤a*b
所以 a*b 是 a,b 的上界
任取 a,b 的上界 c
则有 a≤c，b≤c
则有 c=a*c，c=b*c
所以 c=a*(b*c)=(a*b)*c
即 a*b≤c
故 a*b 的 a，b 的最小上界
即 LUB(a,b)=a*b

9.2

6. 半群，交换半群

8. 幺半群（单位元 1），交换半群
10. 幺半群（单位元 I），交换半群
14. 幺半群（单位元 2），交换半群
18. 不是半群
21.

Let $f_1(a) = a$, $f_1(b) = a$; $f_2(a) = a$, $f_2(b) = b$; $f_3(a) = b$, $f_3(b) = a$; $f_4(a) = b$, $f_4(b) = b$. These are the only functions on S. It is not commutative.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1	f_3	f_2	f_1
f_4	f_1	f_4	f_4	f_4

22.

U	∅	{a}	{b}	{a, b}
∅	∅	{a}	{b}	{a, b}
{a}	{a}	{a}	{a, b}	{a, b}
{b}	{b}	{a, b}	{b}	{a, b}

{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}

26.

设（S,∗）的两个子半群分别为（S1,∗）和（S2,∗）, 设 S1∩S2=S3.
对任意 a1, a2∈S3, a1∗a2∈S1, a1∗a2∈S2, 所以 a1∗a2∈S1∩S2=S3, 所以∗在 S3 上封闭，是子半群。

27.

By Exercise 26, we need only check that $e \in S_1 \cap S_2$. But $e \in S_1$ and $e \in S_2$, because each is a submonoid of $(S, *)$.

31.

Let $x, y \in S_1$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x *_1 y) &= g(f(x *_1 y)) \\ &= g(f(x) *_2 f(y)) \\ &= g(f(x)) *_3 g(f(y)) \\ &= (g \circ f)(x) *_3 (g \circ f)(y).\end{aligned}$$

Hence $g \circ f$ is a homomorphism from $(S_1, *_1)$ to $(S_3, *_3)$.

32. 由 31 可知 g。f 是 S1->S3 的一个同态，又有 f:S1->S2, g:S2->S3 是都是同构。于是有 S1 到 S2 中元素是一一对应的，S2 到 S3 的元素是一一对应的。可得 S1 到 S3 中的元素也是一一对应的，所以有 g。f 是 S1->S3 的一个同构。

35.

Let $x, y \in \mathbb{R}^+$. $\ln(x * y) = \ln(x) + \ln(y)$ so ln is a homomorphism. Suppose $x \in \mathbb{R}$. Then $e^x \in \mathbb{R}^+$ and $\ln(e^x) = x$ so ln is onto $\mathbb{R}^+$. Suppose $\ln(x) = \ln(y)$; then $e^{\ln(x)} = e^{\ln(y)}$ and $x = y$. Hence ln is one to one and an isomorphism between $(\mathbb{R}^+, \times)$ and $(\mathbb{R}, +)$.

36.

（1）A1 是 a=a1∗a2∗⋯∗ak(a1, a2⋯ak∈A)组成的集合(用 A1 代表 $\hat{A}$)，所以 A1∈S

设$a_m = a_{n1} * a_{n2} * \dots * a_{nk}$， $a_p = a_{q1} * a_{q2} * \dots * a_{qk}$，$a_m * a_p \in$ A1, 所以 A1 是封闭的。

所以 A1 是（S,∗）的一个子半群。

（2）若从 A1 中去除任一元素$a_x = a_{y1} * a_{y2} * \ldots * a_{yk}$, 设 b=$a_{y1} * a_{y2} * \ldots * a_{ym}$, c=$a_{y（m+1）} * a_{y（m+2）} * \ldots * a_{yk}$则 b*c=a ∉ A1, 则 A1 不在封闭，所以 A1 是包含 A 的（S,∗）的最小子群。

9.3

2.

由定理 1 可知，如果$(S,*)$和$(T,*')$是半群，那么$(S\times T,*'')$是半群，其中$(s_1,t_1)*''(s_2,t_2)=(s_1*s_2,t_1*'t_2)$；因此，

$\forall(s,t)\in S\times T$, $(e_s,e_t)*''(s,t)=(e_s*s,e_t*'t)=(s,t)=(s*e_s,t*'e_t)=(s,t)*''(e_s,e_t)$

所以，(e_s,e_t)是$S\times T$的单位元，$S\times T$也是一个幺半群。

4.

证明要点：

1、定义函数$f:S\times T\to S\times T$， $f(s,t)=(t,s)$；

2、证明f单射，略

3、证明f满射，略

4、证明同构，

$f((s_1,t_1)*''(s_2,t_2))=f((s_1*s_2,t_1*'t_2))=(t_1*'t_2,s_1*s_2)=(t_1,s_1)*'''(t_2,s_2)=f((s_1,t_1))*'''f((s_2,t_2))$

8. Yes

10. Yes

14. Yes

16. Yes

18.

设$(S,*)$上的两个同余关系分别为R_1,R_2。显然R_1,R_2为等价关系。由 4.7 定理 5 可知$R_1\cap R_2$为等价关系。$\forall a,b,a',b'\in S$，若$a\ R_1\cap R_2\ a'$， $b\ R_1\cap R_2\ b'$，则

$$\left.\begin{matrix} a\ R_1\ a',b\ R_1\ b'\Rightarrow(a*b)\ R_1\ (a'*b') \\ a\ R_2\ a',b\ R_2\ b'\Rightarrow(a*b)\ R_2\ (a'*b') \end{matrix}\right.\Rightarrow(a*b)R_1\cap R_2(a'*b')$$, 因此$R_1\cap R_2$是同余关系。

23.

$S/R = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$,
$[a] = \{z \mid z = 5k + a, k \in \mathbb{Z}\}, a = 0, 1, 2, 3, 4.$

⊕	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]

24.

(a) S/R={[a],[c]}, [a]={a,b},[c]={c,d}.

⊛	[a]	[c]
[a]	[a]	[c]
[a]	[c]	[a]

(b) $f_R(a) = [a] = f_R(b)$，$f_R(c) = [c] = f_R(d)$

26.

(a) $\forall a,b \in A^*$, 设 $f(a) = m, f(b) = n$， 则 $f(a \cdot b) = m + n = f(a) + f(b)$， 得证；
(b) 证明要点：
  1) 证明 R 的等价性(自反，对称，传递)；
  2) 证明同余：设 aRa', bRb'，由 $f: A^* \to N$ 是同态，$f(a) = f(a'), f(b) = f(b')$，
     $f(a \cdot b) = f(a) + f(b) = f(a') + f(b') = f(a' \cdot b')$， 即 $(a \cdot b)R(a' \cdot b')$；
(c) 参考定理 4 的证明。

28.

不同构。(证明要点，不存在一对一的函数 $f: Z_4 \to S$，列出 Z_4 和 S 的运算表…)

30.

$\forall R,\ a, a', b, b' \in S$，若 aRa', bRb'， $\because a * b = b \quad \therefore (a) * b\ R\ (a') * b' \Leftrightarrow (a * b)\ R\ (a' * b')$
因此， R 为同余关系