85

离散数学（2023）作业 - 21

潘智杰
221900313

2023 年 5 月 16 日

1 Problem 1

证明; 不妨令该图有 n 个点（n>=2）。G 中每个点的度数均不相同，假设 G 为简单图，则每一个点的度数等于与该点邻接的点的个数，从而可知 G 的度数列为 0,1,2,...,n-1,0 表示孤立点（没有任何其他点与之邻接），度数为 n-1 的点表示其与其他所有点都邻接，这与存在一个孤立点矛盾，故假设不成立，故 G 一定不是简单图。

2 Problem 2

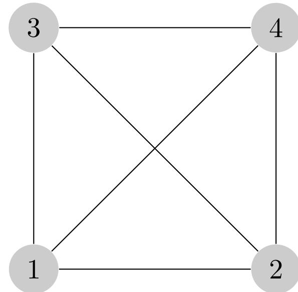
a) 结论成立。不妨设 G 的顶点数为 n，边数为 m，则总度数为 2m，顶点平均度为 $\frac{2m}{n}$, 删掉一个度数最大的顶点（假设其度数为 x），x 为 1 时，删去后顶点平均度显然为 0，故令 $x \geq 2$, 故删去后顶点平均度为 $2\frac{m-x/2}{n-1}$, $(x/2 \geq 1)$, $\because \frac{m-x}{n-1} < \frac{m}{n}$, 故当 $x \geq 2$ 时，顶点平均度会减小；当 x=0 时顶点平均度不变（为 0）。综上，得证：从图中删去一个度最大的顶点不会使其顶点平均度增加

b) 结论不成立。反例：当 G 为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 时，若两点为 a,b, 则 $deg(a) = deg(b) = 1$,, 此时顶点平均度为 1, 删去最小度数顶点后，顶点平均度为 0，故题设所给结论不成立。

3 Problem 3

a) 否。证明：若这是一个简单图的度序列，n=8，则度数为 7 的点与其他所有点邻接，这与度数为 0 的点矛盾，故这不可能是一个简单图。

b) 是



c) 否。对于 5,4,2,1,1,1，共 6 个点，设为 a,b,c,d,e,f，若 deg(a)=5,deg(b)=4,deg(c)=2,deg(d)=deg(e)=deg(f)=1,d,e,f 只与 a 邻接，c 与 a，b 邻接，b 只能与 a，c 邻接，但 deg(b)=4, 故 b 上必有一个环，故该图不是简单图。

d) 否。对于 5,4,3,2,2，一共 5 个点但顶点最大度数为 5，故该点必然有环或者多重边。不是简单图。

4 Problem 4

证明: 由握手定理可知, 图中所有点的度数的和为 2ϵ, 顶点平均值为 $\frac{2\epsilon}{\nu}$, 当每一个点的度数相等时, $\delta(G) = \frac{2\epsilon}{\nu} = \Delta(G)$, 当点的度数不完全相同时，显然 $\delta(G) < \frac{2\epsilon}{\nu} < \Delta(G)$, 综上，$\delta(G) \leq \frac{2\epsilon}{\nu} =\leq \Delta(G)$

5 Problem 5

a) 不妨设 G 的总点数为 n，总边数为 m，则 $\frac{2m}{n} = a,$, 因为删去 x 后，度数平均度为 $\frac{2m-deg(x)}{n-1}$, 要证题设成立，即证:

$\frac{2m-deg(x)}{n-1} \geq \frac{2m}{n}$

$= 2m - 2m(\frac{n-1}{n}) \geq deg(x)$

$= \frac{2m}{n} \geq deg(x)$

$= a \geq deg(x)$

故原命题成立。

(b) -5

6 Problem 6

证明: 将每个球队视为一个点，将比赛的总场数视为总边数，建立图 G=(V,E),|V|=n,|E|=n+1, 每个点的度数代表该队目前的比赛场数。假设 $\forall v_i \in V, max\{deg(v_i)\} = 2$, 则即使 $\forall v_i \in V, deg(v_i) = 2, \therefore$ 最大总度数为 2n, 但由握手定理，该图总度数为 2(n+1)>2n, 矛盾，故假设不成立，故一定

存在一个球队至少比了 3 场。

7 Problem 7

−10