75

# 离散数学（2023）作业 17

王奕凯
221900395

2023 年 4 月 30 日

## 1 Problem 1

-5

1
是
首先 e∈ K∪H, 其次对于 ∀x ∈K, 有 $x^{-1}$ ∈K ⊆K∪H.
对于 a,b∈K,a∘b ∈ K⊆K∪H.
对于 x ∈H 同理可得
2
是
首先 e∈ K∩H, 其次对于 ∀x ∈K∩H, 一定有 $x^{-1}$ ∈K∩H。因为如果 $x^{-1}$ ∈ K-H, 则又因为 x 同时属于 H，则 H 不是子群，所以矛盾。同理可得，对于 a,b∈K∩H,a∘b ∈ K∩H
3
不是
首先如果 H,K 均为 G 的子群，则单位元 e∈G,e∈H, 且单位元唯一，所以 e ∉ K-H，所以 K-H 不是子群
4
不是
首先如果 H,K 均为 G 的子群，则单位元 e∈G,e∈H, 且单位元唯一，所以 e ∉H-K，所以 H-K 不是子群

## 2 Problem 2

首先 ae=ea=a, 所以单位元 e∈ N($\alpha$)
$a^{-1}$ ∈G,a$a^{-1}$=$a^{-1}$a=e, 所以 $a^{-1}$∈ N($\alpha$)
对于 ∀ b,c∈N($\alpha$),ab=ba,ac=ca, 现证 a(bc)=(bc)a

因为运算满足结合律，所以 a(bc)=(ab)c=bac=b(ca)=(bc)a，所以运算封闭
最后，x∈G,N($\alpha$) 是 G 的子集
综上所述，N($\alpha$) 为子群

# 3 Problem 3

因为 H 是 G 的子群，所以 e∈H, 取 h=e, 则 xe$x^{-1}$=e, 则 e∈x H$x^{-1}$
因为 H 为子群，所以 $h^{-1}$ ∈H, 所以 x$h^{-1}$ $x^{-1}$ ∈H
(xh$x^{-1}$)x$h^{-1}$ $x^{-1}$=e, 所以逆元也在 x H$x^{-1}$ 中
对于任意 xh1$x^{-1}$,xh2$x^{-1}$,xh1$x^{-1}$xh2$x^{-1}$=xh1h2$x^{-1}$ ∈H, 所以运算封闭
(xh1$x^{-1}$xh2$x^{-1}$)xh3$x^{-1}$=xh1$x^{-1}$(xh2$x^{-1}$xh3$x^{-1}$), 且 xh1$x^{-1}$xh2$x^{-1}$ , (xh1$x^{-1}$xh2$x^{-1}$)xh3$x^{-1}$ ∈H, 所以对于结合律封闭
又因为 H 是 G 的子群，x∈G, 所以 x H$x^{-1}$ 是 G 的子集
综上所述，x H$x^{-1}$ 是子群

# 4 Problem 4

不妨设 r>s
对于任意元素 h,k,$h^r$=$k^s$=e,r,s 互素
因为 H,K 为子群，所以 e∈H,e∈K
假设还存在一个 x 同时属于 H,K, 则 x 的最小阶为 s,r=ns, 则此时与 r,s 互素，则矛盾，不成立这样的一个 x
s>r 同理
所以综上所述，H∩K={ e }

# 5 Problem 5

设二阶元为 a, 则 xa$x^{-1}$ 也为二阶元，因为 xa$x^{-1}$xa$x^{-1}$=e, 所以 |xa$x^{-1}$|=1 或 2
|xa$x^{-1}$|=1,xa$x^{-1}$=e,a=e, 矛盾
|xa$x^{-1}$|=2, 又因为只有一个二阶元，所以 xa$x^{-1}$=a,ax=xa 所以对于任意元素可以交换

## 6 Problem 6

不会 -10

## 7 Problem 7

采用反证法，假设存在 g $\in$ G,gH $\neq$Hg
不妨设 a=gh1 $\in$ gH, a $\notin$ Hg
由正规子群的条件可得，gh1$g^{-1}$ $\in$H，而 gh1$g^{-1}$g=gh$\in$Hg，所以不存在这样一个 a. 综上所述 Hg=gH

## 8 Problem 8

不会 -10