

离散数学 (2023) 作业 XX

周帛岑

221900309

2023 年 6 月 10 日

1 Problem 1

prim 算法: ef - fc - eh - hi - cb - da - dg

权值: $1 + 3 + 3 + 2 + 4 + 3 + 2 + 6 = 24$

kruskal 算法: ef - hi - ad - eh - fc - bd - bc - dg

权值: $1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 + 6 = 24$

2 Problem 2

(1):

证: 我们不妨应用 kruskal 算法

找到这样的最小生成树, 其对应的边集按大小排序记为: $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

由于该图为每条边权重均不相同的带权图, 于是我们可以得到这个最小生成树的权, 不妨记为 $N_e = (|e_1| + |e_2| + \dots + |e_n|)$

不妨假设最小生成树不唯一, 不妨假设另一最小生成树只有两条边 $e_i, e_j (|e_i| < |e_j|)$ 与该生成树不同。

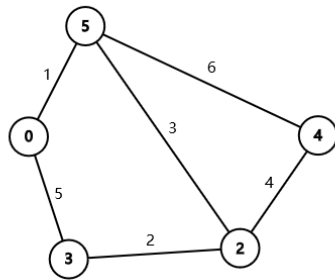
由于每条边的权均不同, 要使新的树的权值保持不变, 则 $|e'_i|$ 小于 $|e_n|$, 且 $e'_i \notin E$

根据 kruskal 算法, 当进行到 $|e_i|$ 当前权值最小 (权值小于 $|e_i|$ 但已经不满足无回路条件的已排除) 时, 由于 kruskal 算法生成的最小生成树中并没有 e_i

则其与 $e'_1, e'_2, \dots, e_{(i-1)}'$ 相连后会形成回路

这与其为最小生成树相矛盾, 故这样的最小生成树是唯一的, 命题成立

(2):



反驳：

最小生成树权值为 $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

但此时次小生成树有两个： $1 + 2 + 3 + 6 = 1 + 2 + 4 + 5 = 12$

与题设矛盾，故该命题不正确

3 Problem 3

证：采用反证法：

假设 e 所在的回路中（取回路中的简单回路）为 C

不妨假设 e 在某生成树 T 中，此时若去掉 e 这条边，则可以构成两个连通分支，分别记为 T_1, T_2

又该图存在一个回路，且 T_1, T_2 中显然不存在回路，故 C 包含了 T_1, T_2 中的某些点与边

由去掉 e 后， C 构成一个无回路的连通图，此时 T_1 在该回路中的部分与 T_2 在该回路中的部分一定存在边相连，且权值小于 $|e|$

故我们在 $T - \{e\}$ 中连接这条边，显然，此时构成了一个树，且权值小于 T

这与 T 为最小生成树相矛盾，故假设不成立

命题得证

4 Problem 4

DFS: $\rightarrow a, a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow h, h \rightarrow g, g \rightarrow l, h \rightarrow i, i \rightarrow e, e \rightarrow d, e \rightarrow f, f \rightarrow k, k \rightarrow j, j \rightarrow n, i \rightarrow m$

BFS: $\rightarrow a$, $a \rightarrow b$, $a \rightarrow g$, $b \rightarrow c$, $g \rightarrow h$, $g \rightarrow l$, $h \rightarrow i$, $h \rightarrow m$, $i \rightarrow e$, $i \rightarrow j$, $i \rightarrow n$, $e \rightarrow d$, $e \rightarrow f$,
 $j \rightarrow k$