

95

离散数学 (2023) 作业 01 - 命题逻辑

周帛岑

221900309

2023 年 3 月 1 日

1 Problem 1

解：列表如下：

p	q	r	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow r)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1

-3

2 Problem 2

解：

1. $\neg q \wedge p$ ✗

2. $\neg p \wedge q \wedge r$

3. $r \rightarrow (\neg p \leftrightarrow q)$

4. $\neg q \wedge \neg p \wedge r$

5. $q \rightarrow (\neg p \wedge \neg r)$

6. $(p \wedge r) \rightarrow \neg q$

-2

3 Problem 3

1. Jennifer 和 Teja 不是朋友。
2. 面包师说的“一打”没有 13 个。
3. Abby 每天并没有发送 100 多条短信。
4. 121 不是一个完全平方数。

4 Problem 4

1. T
2. F
3. T
4. T

5 Problem 5

解：列表如下：

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

由表得 $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

6 Problem 6

解：假设 TA 是理科学生为 p，TA 是文科学生为 q，TA 学好数学为 r

则第一个命题为 $p \rightarrow r$ ，第二个为 $\neg q \rightarrow p$ ，第三个命题为 $\neg r$ 求证：q

正确，证明见下

1. $p \rightarrow r$ 前提
2. $\neg r$ 前提
3. $\neg p$ 1, 2 取拒式

4. $\neg q \rightarrow p$ 前提

5. $\neg \neg q$ 3, 4 取拒式

6. q 5 双重否定律

7 Problem 7

解：设这是铁为 p ，这是铜为 q ，这是锡为 r

则甲： $\neg p \wedge \neg q$

乙： $\neg p \wedge r$

丙： $\neg r \wedge p$

显然 $(\neg r \wedge q) \wedge (\neg q \wedge r) \equiv T$

故乙与丙必然一人全对一人全错，则甲此时说对一半说错一半。

假设 $\neg p = T$ ，则 $q = T$ ，与乙与丙必然一人全对一人全错矛盾

假设 $\neg q = T$ ，则 $p = T$ ，此时丙全对乙全错符合题意。

综上，甲说对一半说错一半，乙全错，丙全对，这是铁。

8 Problem 8

解：原命题即证：存在一种赋值，使 $(\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \vee ((\neg \alpha) \wedge (\neg \beta) \wedge (\neg \gamma))$ 为假，也存在一种赋值，使 $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \vee ((\neg \alpha) \wedge (\neg \beta) \wedge (\neg \gamma)) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma))$ 为假

对于前者，若该命题为假，则 $(\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)) = 1$ 且 $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \vee ((\neg \alpha) \wedge (\neg \beta) \wedge (\neg \gamma)) = 0$ ，又当 $\alpha = \beta = 0, \gamma = 1$ 时， $\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma) = 1$ 且 $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \vee ((\neg \alpha) \wedge (\neg \beta) \wedge (\neg \gamma)) = 0$ ，故 $\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)$ 不重言蕴涵 $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \vee ((\neg \alpha) \wedge (\neg \beta) \wedge (\neg \gamma))$

同理，对于后者为假时的取值，取 $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ，此时 $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \vee ((\neg \alpha) \wedge (\neg \beta) \wedge (\neg \gamma)) = 1$ 且 $(\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)) = 0$ ，故 $(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \vee ((\neg \alpha) \wedge (\neg \beta) \wedge (\neg \gamma))$ 不重言蕴涵 $\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)$

综上，命题得证。

9 Problem 9

证：

显然，由重言蕴涵的定义知，1 与 2 等价

对于 1 与 3，1 等价于 $\neg \alpha \vee \beta \equiv 1$

对于 3, 原命题可转化为 $\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta) \equiv 1$ 且 $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha \equiv 1$

又 $\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta) \equiv \neg \alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg \alpha \vee \alpha) \wedge (\neg \alpha \vee \beta) \equiv (\neg \alpha \vee \beta) \equiv 1$

且 $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha \equiv \neg(\alpha \wedge \beta) \vee \alpha \equiv (\neg \alpha \vee \neg \beta) \vee \alpha$

即 3 等价于 $\neg \alpha \vee \beta \equiv 1$

即 3 等价于 1

同理, 对于 4, 原命题可转化为 $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta) \equiv 1$ 且 $(\alpha \vee \beta) \rightarrow \beta \equiv 1$

又 $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta) \equiv \neg \beta \vee (\alpha \vee \beta) \equiv 1$

且 $(\alpha \vee \beta) \rightarrow \beta \equiv \neg(\alpha \vee \beta) \vee \beta \equiv (\neg \alpha \wedge \neg \beta) \vee \beta \equiv (\neg \alpha \vee \beta) \wedge ((\neg \beta \vee \beta)) \equiv \neg \alpha \vee \beta$

即 4 等价于 $\neg \alpha \vee \beta \equiv 1$

即 4 等价于 1

又由于等价具有可传递性, 故四个命题等价

10 Problem 10

解:

第一题:

$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

1. α *assumption*

2. β *assumption*

3. $\beta \rightarrow \alpha$ $\rightarrow i$ 1,2

4. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ $\rightarrow i$ 1,3

5. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

第二题:

$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

1.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	<i>assumption</i>
2.	$\alpha \rightarrow \beta$	<i>assumption</i>
3.	α	<i>assumption</i>
4.	β	$\rightarrow e$ 2,3
5.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	1
6.	$\beta \rightarrow \gamma$	$\rightarrow e$ 3,5
7.	γ	$\rightarrow e$ 4,6
8.	$\alpha \rightarrow \gamma$	$\rightarrow i$ 3-7
9.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	$\rightarrow i$ 2-8
10.	$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$	$\rightarrow i$ 1-9

第三题:

$$(\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow ((\neg \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$$

1.	$\neg \beta \rightarrow \neg \alpha$	<i>assumption</i>
2.	$\neg \beta \rightarrow \alpha$	<i>assumption</i>
3.	$\neg \beta$	<i>assumption</i>
4.	α	$\rightarrow e$ 2,3
5.	$\neg \alpha$	$\rightarrow e$ 1,3
6.	\perp	\perp 4,5
7.	β	$\neg e$ 3-6
8.	$(\neg \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$	$\rightarrow i$ 2-7
9.	$(\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow ((\neg \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$	$\rightarrow i$ 1-8