85

作业 221900314 庞鸿博

庞鸿博 221900314

May 2023

1 Problem 1

不妨设图 G 中有顶点 n 个，若无孤立点，则各顶点度数为 1,2，⋯⋯n, 易得有一点度数为 n，所以不是简单图，若存在一个孤立点，则在剩余 n-1 个点中，各个点度数为 1,2⋯⋯n-1，即有一点与剩余 n-2 个顶点构成图中，度数为 n-1，所以不是简单图，且孤立点度数为零，所以至多有一个孤立点，得证

2 Problem 2

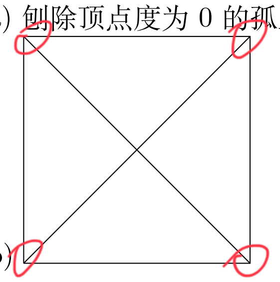
(1) 假设 G 是一个无向图，它有 n 个顶点和 m 条边，顶点 v 是 G 中度数最大的顶点。设 d(v) 是 v 的度数。则 G 中的所有顶点的平均度为 $\frac{2m}{n}$, 去掉 v 后，新的顶点平均数为 $\frac{2m-d(v)}{n-1}$, 因为 nd(v) 不小于 2m, 所以去除后平均度不会增加

(2) 假设 G 是一个无向图，它有 n 个顶点和 m 条边，顶点 v 是 G 中度数最小的顶点。设 d(v) 是 v 的度数。则 G 中的所有顶点的平均度为 $\frac{2m}{n}$, 去掉 v 后，新的顶点平均数为 $\frac{2m-d(v)}{n-1}$，因为 nd(v) 不大于 2m, 所以去除后平均度不会减少

−5

3 Problem 3

(a) 删除顶点度为 0 的孤立点后，剩余 7 个点中最大顶点度数为 7，不可能是简单图



(b)

(c) 由 Havel-Hakimi 定理，将度序列化为 3,1,0,0,0，显然不是简单图 (d) 在有五个顶点的图中，不可能存在顶点度数为 5，不可能是简单图

4 Problem 4

由顶点度的定义得，$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2\epsilon, v \times \delta(G) \leq \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \leq \times \Delta(G)$

5 Problem 5

(1) 即证删掉 x 后平均度不减少，假设 G 有 n 个顶点和 m 条边，，G 中的所有顶点的平均度为 $\frac{2m}{n}$，去掉 v 后，新的顶点平均数为 $\frac{2m-deg(x)}{n-1}$，$\frac{2m}{n} \leq \frac{2m-deg(x)}{n-1}$，解得 $deg(x) \leq a$
(2) 因为 G 是一个简单图，满足 Havel-Hakimi 定理的前提，所以在经过 $\frac{a}{2}$ 次后，必定有一个简单图存在，所以剩下的部分在操作前的部分即为所求子图

6 Problem 6

由握手定理，n 支队伍在每只队伍至打两场的情况下，最多打 n 场，因此 n+1 场肯定有队伍打 3 场

7 Problem 7

−10