

85

# 离散数学（2023）图论作业 2：图的表示与图同构

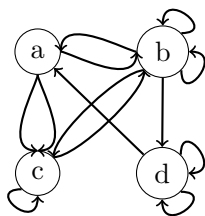
张程涵

221900333

2023 年 5 月 16 日

## 1 Problem 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## 2 Problem 2

$$\begin{array}{l} 1) \text{ a) } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \\ \text{b) a) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

2)  $D$  是该图的度数矩阵。 $BB^T$  对角线上的元素即为对应点的度数，其他元素即  $A$  中的元素，所以二者相减后仅剩度数。

### 3 Problem 3

不太严谨

下左图的度序列为  $3,3,3,3,3,3,3,3$ ，下右图的补图的度序列为  $3,3,3,3,3,3,3,3$ ，且任取左图中一点，其导出子图均与下右图的补图的导出子图同构，所以两图同构。

### 4 Problem 4

- 1) 即第四个顶点的连接方法数，共 3 个。
- 2) 即度数至少为一，按图的边数划分，可得总共  $1+2+2+2+1+1=9$  个
- 3) 可划分为  $1,3$ ； $2,2$  两种情况， $1,3$  共有 4 个， $2,2$  共有  $1+2+1+1=5$  个，总共 9 个。

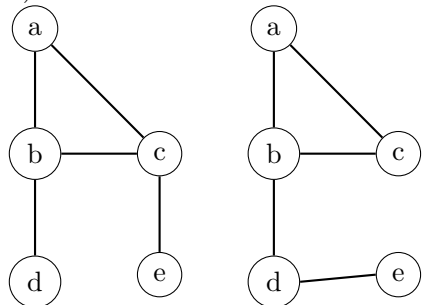
— 10

### 5 Problem 5

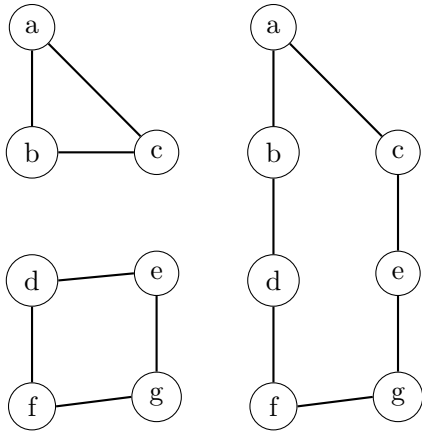
$G$  对应的完全图有  $\frac{v(v-1)}{2}$  条边，若  $G$  和  $\overline{G}$  同构，则二者边数相等，都为  $\frac{v(v-1)}{4}$ ， $v$  和  $v-1$  互素，奇偶性不同，因为边数为整数，所以  $v(v-1)$  能被 4 整除，所以  $v$  能被 4 整除或  $v-1$  能被 4 整除，即  $v \equiv 0, 1 \pmod{4}$

### 6 Problem 6

1)



2)



## 7 Problem 7

设  $u, v$  为该图中相邻的顶点，因为围长为 4，所以  $u, v$  不存在共同的相邻顶点，所以  $u, v$  的相邻顶点共有  $2(k-1)$  个，所以总共至少有  $2k$  个顶点，且恰有  $2k$  个顶点的这样的图，只能是  $u$  的相邻顶点和  $v$  的相邻顶点各个全部相连。

惟一性

✓