

98

# 离散数学（2023）作业 23 - 图的表示与图同构

杨辰

221900328

2023 年 5 月 17 日

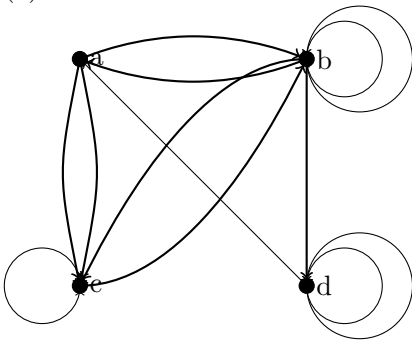
## 1 Problem 1

解：

(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2)



## 2 Problem 2

(1)

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = BB^T - A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = BB^T - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) D 对角线上的元素为顶点的度数。

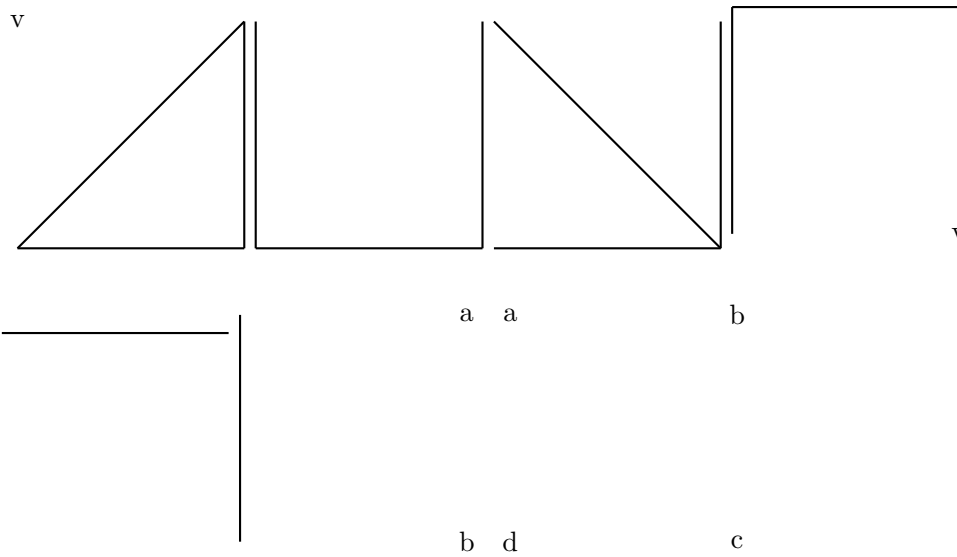
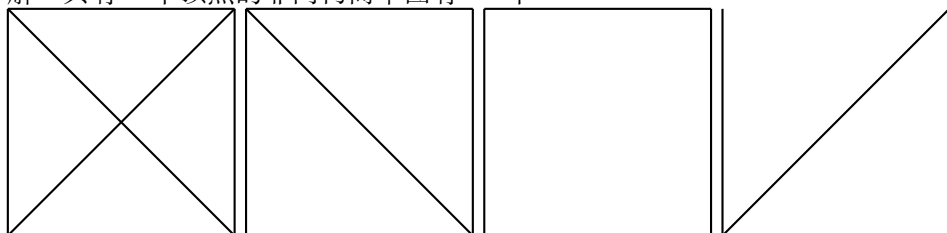
度矩阵

## 3 Problem 3

证明：记左图为 A，右图为 B，构造映射： $f: A \rightarrow \overline{B}$ ，且  $f(a) = A, f(b) = C, f(c) = E, f(d) = G, f(e) = F, f(f) = H, f(g) = B, f(h) = D$ ，对 A 中任意两相邻顶点，在  $\overline{B}$  中对应的顶点也相邻。

## 4 Problem 4

解：具有 4 个顶点的非同构简单图有 11 个：



(1) 4 个。

(2) 7 个。

(3) 7 个。

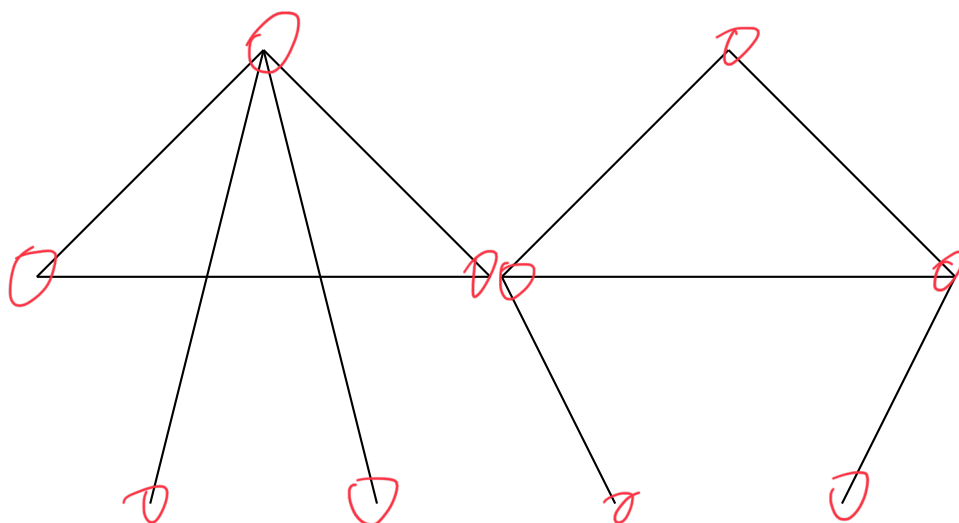
## 5 Problem 5

证明：因为  $G \cong \overline{G}$ ，所以  $|E(G)| = |E(\overline{G})|$ ，且  $|E(G)| + |E(\overline{G})| = \frac{1}{2}v(v-1)$ ，所以  $|E(G)| = |E(\overline{G})| = \frac{1}{4}v(v-1)$ ，显然  $|E(G)|$  为整数，所以  $v$  或  $v-1$  为 4 的倍数，即  $v \equiv 0, 1 \pmod{4}$ 。

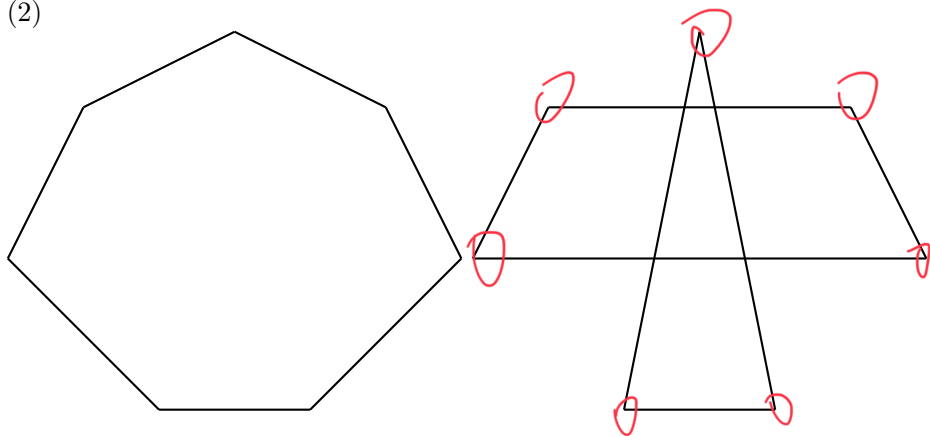
## 6 Problem 6

解：

(1)



(2)



## 7 Problem 7

证明：设  $u, v$  为  $G$  中相邻顶点， $N(u), N(v)$  为  $u, v$  相邻顶点的集合，则  $N(u) \cap N(v) = \emptyset$ ，否则围长为 3，矛盾。因此  $G$  至少有  $2(k-1) + 2$  个顶点。

因为  $G$  是  $k$  正则图，每个顶点应该连接  $k$  个顶点，并且  $N(u), N(v)$  的内部不能相连，否则围长为 3，因此只能将  $N(u) \setminus \{v\}$  中的  $k-1$  个顶点与  $N(v) \setminus \{u\}$  中的  $k-1$  个顶点相连，这样每个顶点的度数都是  $k$ ，这样就可以得到  $2k$  个顶点的围长为 4 的图，此时  $G - \{u, v\}$  是一个完全二分图（同构意义下），加上  $\{u, v\}$  后仍然只有一个。