95

离散数学（2023）作业 ghw1

221900329 任益驰

2023 年 5 月 16 日

1 Problem1

证明：
假设 G 是简单图，不存在环和重边
设 G 共有 n 个顶点，度数各不相同，0 $n-1$
度数为 n−1 的点和其余 n−1 个顶点均有边相连
即不存在度数为 0 的孤立点，与已知条件不符
假设错误,G 不是简单图

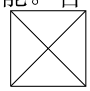
2 Problem2

设图 G 共 n 个顶点，顶点平均度 a
1. 设度数最大的顶点的度数为 $\deg(v)$, 删去该点后的顶点平均度
$\frac{na-\deg(v)}{n-1}$
$\deg(v) \geq a, na-\deg(v) \leq (n-1)a$
新顶点平均度 $b \leq a$
2. 设度数最小的顶点的度数为 $\deg(v)$, 删去该点后的顶点平均度
$\frac{na-\deg(v)}{n-1}$
$\deg(v) \leq a, na-\deg(v) \geq (n-1)a$
新顶点平均度 $b \geq a$

-5

3 Problem3

1. 不能。含有两个及以上顶点的简单图至少含有两个度数相同的顶点

2. 能 

3. 不能

共 6 个顶点，最大度数 5，该点与其余 5 个顶点均相连

三个顶点度数为 1，仅与度数为 5 的点相连

剩余三个点度数分别为 5,4,2

三个点要凑出一个顶点的度数为 4，必然存在环或重边

所以不能作为简单图的度序列

4. 不能。顶点的最大度数应小于图的阶数

4 Problem4

无向图共 ε 条边，所有顶点的度数和

$$\sum_{i=1}^{v} \deg(v_i) = 2\varepsilon$$

显然 $v\delta(G) \leq 2\varepsilon \leq \Delta(G)$

$\delta(G) \leq \frac{2\varepsilon}{v} \leq \Delta(G)$

5 Problem5

1. 删去顶点 x 的同时相当于删去了和顶点 x 相连的边

设 G 有 n 条顶点，由题知无自环，所有顶点度数和 an

G 删去一个顶点 x 后平均度至少为 a

$\Leftrightarrow \frac{na-2\deg(x)}{n-1} \geq a$

$\Leftrightarrow 2\deg(x) \leq a$

$\Leftrightarrow \deg(x) \leq \frac{a}{2}$

G 删去一个顶点 x 后平均度至少为 a，当且仅当 $\deg(x) \leq \frac{a}{2}$

2. 由第一问可知，不断删去度小于等于 $\frac{a}{2}$ 的顶点，图的平均度不会减少

通过不断删去度小于等于 $\frac{a}{2}$ 的顶点，最终得到的子图最小度大于 $\frac{a}{2}$

6 Problem6

每支球队对应一个顶点，每场比赛对应一条边
可得到一个无向图 G，有 n 个顶点，n+1 条边, 顶点的度数和为 $2n+2$
假设所有球队最多比赛了两场，即每个顶点的度数小于等于 2
此时顶点度数和小于等于 2n
与已知条件不符，假设错误
一定有一个球队比赛了至少三场

7 Problem7

假设 n 阶图 G 不包含三角形 K_3 作为子图
可以构造出一个二部图，有图 G 的 n 个顶点，用两个集合 A,B 表示
设 A,B 中含有的顶点数分别为 a,b,$a+b=n$
所以该二部图中的边数 m=ab
$m=ab=\frac{(a+b)^2}{4}-\frac{(a-b)^2}{4}\leq\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{n^2}{4}$
所以不包含三角形 K_3 作为子图的 n 阶图，边数 m 满足 $m\leq\frac{n^2}{4}$