# 离散数学-第五次作业

## Problem 1

判断下面定义的几个 $f(n)$ 是否是从 $\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数。

a) $f(n) = \pm n$ b) $f(n) = \sqrt{n^2+1}$ c) $f(n) = 1/(n^2-4)$

答案：

a) 否。$f(n)$ 不是函数。

b) 是。

c) 否。$f(n)$ 是函数，但 $f(2) \notin \mathbf{R}$。

来源：**P.152 problem 2**

## Problem 2

判断下列各函数是否是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的双射函数。

a) $f(n) = 2x+1$ b) $f(n) = x^2+1$

c) $f(x) = (x+1)/(x+2)$ d) $f(x) = x^5+1$

答案：

a) 是 b) 不是

c) 不是 d) 是

来源：**P.153 problem 22**

## Problem 3

令 $f$ 为从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = x^2$。求

a) $f^{-1}(\{1\})$

b) $f^{-1}(\{x|0 < x < 1\})$

c) $f^{-1}(\{x|x > 4\})$

答案：

a) $\{-1, 1\}$

b) $\{x| - 1 < x < 0 \vee 0 < x < 1\}$

c) $\{x|x > 2 \vee x < -2\}$

来源：**P.154 problem 42**

## Problem 4

证明从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = ax + b$ 是可逆的，其中 $a$ 和 $b$ 为常数且 $a \neq 0$，并找出 f 的反函数。

答案： 通过证明 $f$ 是单射且满射即证明 $f$ 是可逆的。$f^{-1}(x) = (x - b)/a$

来源：**P.154 problem 39**

## Problem 5

求下列函数的定义域和值域。

a) 函数为每对正整数序偶指派这两个整数中的最大数。

b) 函数为位串指派串中第一个 1 的位置值，如果位串为全 0 就指派 0。

c) 函数为位串指派串中块 11 出现的次数。

d) 函数为每个正整数指派在该整数中未出现的 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 数字的个数。

答案：

a) 定义域为 $Z^+ \times Z^+$，值域为 $Z^+$。

b) 定义域为所有位串的集合，值域为 $N$。

c) 定义域为所有位串的集合，值域为 $N$。

d) 定义域为 $Z^+$，值域为 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9。

来源：**P.152 problem 7**

## Problem 6

判断下列情况下 $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ 是否是满射的？

a) $f(m, n) = 2m - n$

b) $f(m, n) = m + n + 1$

c) $f(m, n) = |m| - |n|$

d) $f(m, n) = m^2 - 4$

e) $f(m, n) = m^2 - n^2$

答案：

a) 是

b) 是

c) 是

d) 不是

e) 不是

来源：**P.153 problem 14**

## Problem 7

设 $f$ 是一个从集合 $A$ 到集合 $B$ 的函数，其中集合 $A$ 和集合 $B$ 是有限集，且 $|A| = |B|$。证明 $f$ 是单射当且仅当它是满射。[提示：$|A| \geq |f(A)|$]

答案：

$f$ 是单射 $\to f$ 是满射：$f$ 是单射，则 $|f(A)| = |A| = |B|$，又 $f(A) \subseteq B$，所以 $f(A) = B$，即 $f$ 是满射。

$f$ 是满射 $\to f$ 是单射：反证，若 $f$ 不是单射，则 $\exists x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2)$，此时有 $f(A - \{x_1\}) = B, |A - 1| = |A - \{x_1\}| \geq |B|$，矛盾。

综上，$f$ 是单射当且仅当它是满射。

来源：**P.155 problem 72**

## Problem 8

假定 $f$ 是从 $X$ 到 $Y$ 的函数，$g$ 是从 $Y$ 到 $X$ 的函数。证明 $f \circ g = I_Y$，$g \circ f = I_X$ 与 $f^{-1} = g$，$g^{-1} = f$ 等价。其中 $I_X$ 和 $I_Y$ 分别是 $X$ 和 $Y$ 上的恒等函数。

答案： 1. 证明若 $f \circ g = I_Y$，$g \circ f = I_X$ 则 $f^{-1} = g$，$g^{-1} = f$：
$I_X$ 为双射，则 $g \circ f$ 为双射，$f$ 为单射，$g$ 为满射。同理可知 $g$ 为单射 $f$ 为满射。于是 $f$ 和 $g$ 都为双射，存在反函数。所以 $f^{-1} = g$，$g^{-1} = f$。

2. 证明若 $f^{-1}=g$，$g^{-1}=f$, 则 $f\circ g=I_Y$，$g\circ f=I_X$：
对任意 $x\in X$，$f(x)=g^{-1}(x)=y\in Y$, 有 $f(x)=y$, $g(y)=x$。
对任意 $x\in X$，$g\circ f(x)=g[f(x)]=g(y)=x=I_X(x)$。$g\circ f=I_X$。
反之同理。

来源：**2020** 年作业 **6** 第 **7** 题

# Problem 9

令 $f$ 是一个从集合 $A$ 到集合 $B$ 的函数。令 $S$ 和 $T$ 为 $A$ 的子集。证明

a) $f(S\cup T)=f(S)\cup f(T)$

b) $f(S\cap T)\subseteq f(S)\cap f(T)$

答案：

a) 分别证明 $f(S\cup T)\subseteq f(S)\cup f(T)$ 和 $f(S)\cup f(T)\subseteq f(S\cup T)$。

b) 假设 $b\subseteq f(S\cap T)$，那么对于某些 $a\subseteq S\cap T$ 有 $b=f(a)$。可得到 $b\subseteq f(S)\cap f(T)$。这是一个充分条件，所以原题得证。

来源：**P.154 problem 40**

# Problem 10

令 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的函数。$S$ 为 $B$ 的子集。证明 $f^{-1}(\bar{S})=\overline{f^{-1}(S)}$。

答案：

$$\begin{aligned} f^{-1}(\bar{S}) &= \{x\subseteq A|f(x)\nsubseteq S\} \\ &= \overline{\{x\subseteq A|f(x)\nsubseteq S\}} \\ &= \overline{f^{-1}(S)} \end{aligned}$$

来源：**P.154 problem 45**