第八次作业：归纳与递归

Problem 1

问题: 给出下述集合的递归定义:

a) 正偶数集合.

b) 整系数多项式的集合.

c) 3 的正整数次幂的集合.

答案:

a) 正偶数集合 S 可以定义为: 基础步骤: $2 \in S$. 递归步骤: 若 $x \in S$, 则 $x + 2 \in S$.

b) 整系数多项式的集合 S 可以定义为: 基础步骤: S 包含整数集合及所有可能的变元: $Z \subset S\{x1, x2, x3, ...\} \subset S$. 递归步骤: 若 $a, b, c \in S$，则 $ab + c \in S$.

c) 3 的正整数次幂的集合 S 可以定义为: 基础步骤: $3 \in S$. 递归步骤: 若 $x \in S$，则 $3x \in S$.

Problem 2

当 n 为整数时, 证明: $n^3 - n$ 可被 3 整除.

答案: 基础步骤：$P(1)$ 为 $1^3 - 1 = 0$ 可以被 3 整除归纳步骤：$P(k)$ 为 $k^3 - k$, $P(k+1)$ 为 $(k+1)^3 - (k+1)$ 展开 $(k+1)^3 - (k+1)$ 得 $k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 =\ k^3 - k) + 3 * (k^2 + k)$ 可知这个式子能被 3 整除, 证毕.

Problem 3

用数学归纳法证明平面上过同一点的 n 条直线将平面分为 $2n$ 个区域.

答案: 证明: 设 $P(n)$ 表示命题: 平面上过同一点的 n 条直线将平面分为 $2n$ 个区域. 基础步骤: $P(1)$ 为真，因为 1 条直线可以将平面分为 2 个区域. 归纳步骤: 归纳假设: $P(k)$ 为真, 过同一点的 k 条直线将平面分为 2 个区域. 在归纳假设的情形的基础上, 添加一条过交点的直线, 恰将原来的 2 个区域分为了 4 个区域. 因此共有 $2k + 2 = 2(k + 1)$ 个区域. $P(k + 1)$ 为真. 归纳步骤完成. 基础步骤和归纳步骤均已完成, 根据数学归纳法知, 命题成立.

Problem 4

正整数 n 的拆分是把 n 写成正整数之和的方式. 例如，$7=3+2+1+1$ 是 7 的拆分. 设 P_m 等于 m 的不同分拆的数目, 其中和式里项的顺序无关紧要, 并设 $P_{m,n}$ 是用不超过 n 的正整数之和来表示 m 的不同方式数.

a) 证明: $P_{m,m}=P_m$.

b) 证明: 下面的 $P_{m,n}$ 的递归定义是正确的.

$$P_{m,n}=\begin{cases} 1 & m=1 \\ 1 & n=1 \\ P_{m,m} & m<n \\ 1+P_{m,m-1} & m=n>1 \\ P_{m,n-1}+P_{m-n,n} & m>n>1 \end{cases}$$

c) 用这个递归定义求出 5 和 6 的拆分数.

答案:

a) m 无法用于大于 m 的数参与分拆，因此 $P_{m,m}=P_m$.

b) 证明: 对定义逐条证明: $m=1$ 时，只有一种拆分方法，即 1 本身，因此 $P_{1,n}=1$. n = 1 时，只有一种拆分方法，即拆成 m 个 1 的和，因此 $P_{m,1}=1$. $m<n$ 时，由 (a) 中证明可知，此时 n 的大小不影响结果，因此等于 $P_{m,m}$. $m=n=1$ 时，存在 $m=(m-1)+1$ 这种拆分方式，以及其他 $P_{m,m-1}$ 种拆分方式，因此等于 $1+P_{m,m-1}$. $m>n>1$ 时，存在不含 n 的拆分 ($P_{m,n-1}$) 和包含 n 的拆分 ($P_{m-n,n}$) 两种情况, 因此等于 $P_{m,n-1}+P_{m-n,n}$.

c) $P_5=7, P_6=11$.

Problem 6

a) 对于表示十进制数字的非空字符串 s, 给出计算 s 中最小数字的函数 $m(s)$ 的递归定义.

b) 用结构归纳法证明 $m(s\cdot t)=\min(m(s),m(t))$. (其中 $s\cdot t$ 表示位串 s 和位串 t 的连接).

答案:

a) s 中最小数字的函数 $m(s)$ 的递归定义: 基础步骤: $m(a)=a$ (a 为表示一个数字的单个字符) 递归步骤: $m(s\cdot a)=\min(m(s),a)$.

b) 证明: 设命题 $P(st)$ 为: 当 s,t 均为十进制数字的非空字符串时, $m(s\cdot t)=\min(m(s),m(t))$. 基础步骤: $m(\lambda\cdot a)=a=\min(m(),m(a))$ (a 为表示一个数字的单个字符，λ 表示空串) 因此 $P(\lambda a)$ 为真, 基础步骤完成. 归纳步骤: 归纳假设: 假定命题 $P(xy)$ 为真，即 $m(x\cdot y)=\min(m(x),m(y))$ 成立. 根据 m 函数的递归定义:

$$m(x\cdot y\cdot a)=\min(m(x),m(y),a)=\min(m(x),m(y\cdot a)).$$

综上，当 $P(xy)$ 为真时，可推出 $P(xya)$ 为真，由结构归纳法，命题得证.

Problem 7

利用数学归纳法证明 (提示: 可能需要使用洛必达法则):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^n}{x}=0.$$

答案: 利用洛必达法则 + 数学归纳法易证.

Problem 8

证明算术基本定理. 即: 每个大于 1 的自然数, 要么本身就是质数, 要么可以写为 2 个或以上的质数的积. 并且这些质因子按大小排列之后, 写法仅有一种方式.

答案: 利用强归纳可证, 注意不要遗漏唯一性的证明.

证明:

第一步先证明，命题 P(n)：大于 1 的自然数，要么本身是质数，要么可以写为 2 个或以上的质数的积。

基础步骤:P(2) 为真，因为 2 本身就是一个质数。

归纳步骤：假定对于所有满足 2≤j≤k 的正整数 j 来说 P(j) 为真，则要完成归纳步骤，则我们需要证明 P(k+1) 为真。情形①：若 k+1 是素数，则显然 P(k+1) 为真；情形②：若 k+1 是合数，则 k+1 可以写成满足 2≤a≤b<k+1 的两个整数 a,b 的乘积，而 a,b 要么为素数，要么可以写成多个质数的乘积，故当 k+1 为合数时，其可以写成多个质数的乘积。于是归纳步骤完成

归纳证明完毕，即大于 1 的自然数，要么本身是质数，要么可以写为 2 个或以上的质数的积。

证明算术基本定理. 即: 每个大于 1 的自然数, 要么本身就是质数, 要么可以写为 2 个或以上的质数的积. 并且这些质因子按大小排列之后, 写法仅有一种方式.

第二步再证明，写法仅有一种方式，我们采取矛盾证明法，假设正整数 n 可以用两种不同方式写成素数的乘积，比如说，n=$p_1p_2\dots p_s$ 和 n=$q_1q_2\dots q_t$，其中 p_i 和 q_j 均为素数，且 $p_1\le p_2\le\dots\le p_s$ 以及 $q_1\le q_2\le\dots\le q_t$，当从两个分解式中去掉所有共同的素数时，可得 $p_{i1}p_{i2}\dots p_{iu}=q_{j1}q_{j2}\dots q_{jjv}$，其中没有素数同时出现在两边，而 u,v 均为正整数，我们知道存在 p_{ik}，使得其整除 q_{jm}，但是没有素数能整除其他素数，故推出矛盾。假设不成立，故写法只有一种方式.

综上所述，大于 1 的自然数，要么本身是质数，要么可以写为 2 个或以上的质数的积，且写法只有一种方式。

Problem 9

1) 利用数学归纳法证明:

   (i) $\sum_{k=1}^{n}k^1=\frac{n(n+1)}{2}$.

   (ii) $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) 尝试说明: $\sum_{k=1}^{n}k^m$ 是关于 n 的 $m+1$ 阶多项式 (即, 式中 n 的最高次幂为 $m+1$).

答案: 由递归式

$$\begin{aligned}(n+1)^{m+1}&=\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{m+1}-\sum_{k=0}^{n}k^{m+1}\\&=\binom{m+1}{1}\sum_{k=0}^{n}k^m+\binom{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}k^{m-1}+\cdots\end{aligned}$$

因此, 有

$$\binom{m+1}{1}\sum_{k=0}^{n}k^m=(n+1)^{m+1}-\binom{m+1}{2}\sum_{k=0}^{n}k^{m-1}-\binom{m+1}{3}\sum_{k=0}^{n}k^{m-2}+\cdots$$

亦可用数学归纳法证明.

2) 采用强归纳法. 基础步骤：$m=1$ 时由第一问知成立.
递归步骤：设 $m \leq l$ 时成立，考虑 $m=l+1$ 时，只需证明 $\sum_{k=1}^{n} k^{l+1}$ 是 $l+2$ 阶多项式.
进行差分：

$$n^{l+2}-(n-1)^{l+2}=a_{l+1}n^{l+1}+a_l n^l+...+a_0 \quad (a_{l+1}\neq 0)$$
$$(n-1)^{l+2}-(n-2)^{l+2}=a_{l+1}(n-1)^{l+1}+a_l(n-2)^l+...+a_0$$
$$\vdots$$
$$1^{l+2}-0^{l+2}=a_{l+1}1^{l+1}+a_l 0^l+...+a_0$$

这里有两处书写错误，
你能找到么？

等式左右两边同时求和，得到

$$n^{l+2}=a_{l+1}\sum_{k=1}^{n} k^{l+1}+a_l\sum_{k=1}^{n} k^l+...+a_0 n$$

，进而

$$a_{l+1}\sum_{k=1}^{n} k^{l+1}=n^{l+2}-(\sum_{k=1}^{n} k^l+\sum_{k=1}^{n} k^{l-1}...+a_0 n)$$

由归纳假设，知 $\sum_{k=1}^{n} k^l$ 为 $l+1$ 次，$\sum_{k=1}^{n} k^{l-1}$ 为 l 次... 则等式右边的多项式次数为 $l+2$，证毕. □