90

离散数学（2023）作业 17

黄夏宇
221900347

2023 5 2

1 Problem 1

A -10

2 Problem 2

设 $N(a)$ 中的元素 x_1, x_2，满足 $x_1 a = a x_1, x_2^{-1} a = a x_2^{-1}$，根据群的性质，有 $x_1 x_2^{-1} a = x_1 (a^{-1} x_2)^{-1} = x_1 (x_2 a^{-1})^{-1} = x_1 (a x_2^{-1}) = (x_1 a) x_2^{-1} = a(x_1 x_2^{-1})$, 即证

3 Problem 3

设 $h_1, h_2 \in H$, 则 $h_2^{-1} \in H$, 则有 $(x h_1 x^{-1})(x h_2 x^{-1})^{-1} = x h_1 x^{-1} x h_2 x^{-1} = x(h_1 h_2^{-1}) x^{-1} \in x H x^{-1}$，即 $h_1 h_2^{-1} \in H$ 即证

4 Problem 4

假设 $H \cap K \neq \{e\}$, 且 $H \cap K$ 为 k 阶子群，一定有 $k > 1$, 且 $k|r, k|s$, 得到 $gcd(r, s) > 1$, 与题干矛盾，假设不成立，即证

5 Problem 5

令这个二阶元为 a, 满足 $aa^-1 = e$, 假设 a 与其他元不可交换，设 $\exists x \in G, xax^-1 \neq a, (xax^{-1})^2 = xa^2x^{-1} = xx^-1 = e$, 与题干中只有一个二阶元不符，假设不成立，即证

6 Problem 6

证明:
由于 $gh = hg$, 则 $(gh)^k = g^kh^k$, 所以有 $|gh| = lcm(|g|, |h|) = \frac{|g||h|}{gcd(|g||h|)} = |g||h|$ 即证

7 Problem 7

证明:
由题意可知 $\forall g \in G, \forall h \in H$ 则 $gh \in gH$, 由于 $ghg^-1 \in H$, 则 $gh = ghg^{-1}g \in Hg$, 所以 $\forall g \in G, gH = Hg$ 即证

8 Problem 8

证明:
若 a 为 p 的倍数，显然成立；
若 a 不是 p 的倍数，$Z_p* = \{1, 2, \cdots, p-1\}, |Z_p*| = p-1$, 且其中元素 a 的生成子集 $< a >= \{a^k | k \in Z_p*\}$, 其阶数 k 满足 $k|(p-1)$, 所以 $a^{p-1} \equiv 1(mod\ p) \to a^p \equiv a(mod\ p)$，即证