100

离散数学（2023）作业图论 1

艾睿
221900317

2023 年 5 月 16 日

1 Problem1

证明：假设结论不成立则 g 可以是简单图，那么我们容易得到 n 个顶点的无向图，他的单个顶点的最大度数为 n-1 有 n 个顶点，度数均不相同，则最小度数为 0 即应存在一个顶点不与其他任意一个顶点连接而最大度数的顶点与其他任意顶点已连接，矛盾，反证成功。

2 Problem2

前提：令顶点平均度为 $E=\frac{2\epsilon}{V}$, 其中 ϵ 为边数，V 为顶点数，理解顶点平均度来看其分子是度的总数，即一条边可以看作两个度，下方分母，即顶点总数，所以得到的计算结果为单个顶点所持有平均度数量

(1): 证明：理解顶点平均度来看，我们易得到度最大的顶点所含有的度数量满足关系:$x \geq E \rightarrow V\cdot x \geq 2\epsilon \rightarrow x \geq \frac{2\epsilon-2x}{V-1}, 2\epsilon(V-1)-(2\epsilon-2x)V = 2Vx-2\epsilon \geq 0 \rightarrow \frac{2\epsilon}{V} \geq \frac{2\epsilon-2x}{V-1} \rightarrow E' \geq E$，得证

(2) 证明：理解顶点平均度来看，我们易得到度最小的顶点所含有的度数量满足关系:$\frac{2\epsilon}{V} \leq \frac{2\epsilon-2x}{V-1} \leftrightarrow x \leq \frac{\epsilon}{V}$，所以删去的最小度数的顶点的度数也应该满足其小于平均度的一半，所以我们可以举出反例，定点为四的完全图删去一个最小度数顶点，他的平均度从 $3 \rightarrow 2$, 减少了，所以结论错误

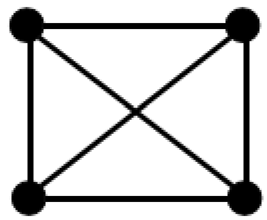

图 1: $problem3-b$

3 Problem3

由 problem1 中的证明我们知道一个简单无向图成立必须满足以下规则：1）必须有至少两个顶点的度数相同。2)：最大顶点度数不得超过 n-1。因此我们知道只有 b)，c) 满足情况，a)：没有至少一对度数相同的顶点，d): 最大的度数超过了 n-1，再研究 c)：因为最大度数为 5 的顶点于剩下的顶点全部连接，而度数为 4 的顶点应该与除去自己与最大度数的顶点的四个中的三个有链接，那么至少会产生三个度数至少为 2 的顶点，而现在 c 的情况显然不满足，所以 c 也不行（因为本人画图工具学了很久没学会这里采用贴照片形式作图）（见上方图 1：problem3-b）

4 Problem4

证明：

因为 $\delta(G) \leq deg(v_i) \leq \triangle(G)$

又因为 $2\epsilon = \sum_i^v deg(v_i)$

所以 $V \cdot \delta(G) \leq 2\epsilon \leq V \cdot \triangle(G)$

则 $\delta(G) \leq \frac{2\epsilon}{V} \leq \triangle(G)$，因此得证

5 Problem5

前提：令 G(V, ϵ)

(1): 证明：

因为无自环，$a = \frac{2\epsilon}{V}$，令删去之后的顶点平均度为 E'，则有 $E' = \frac{2\epsilon - 2deg(x)}{V-1} \geq a \leftrightarrow \frac{2\epsilon - 2deg(x)}{V-1} \geq \frac{2\epsilon}{V} \leftrightarrow \frac{2\epsilon - 2deg(x)}{2\epsilon} \geq \frac{V-1}{V} \leftrightarrow 1 - \frac{deg(x)}{2\epsilon} \geq$

$1-\frac{1}{V} \leftrightarrow \frac{1}{V} \geq \frac{deg(x)}{\epsilon} \leftrightarrow \frac{\epsilon}{V} \geq deg(x) \leftrightarrow \frac{a}{2} \geq deg(x)$，得证

(2):

如果删去一个现在的最小度顶点 x，平均度减少，则由 (1) 我们知道其 $deg(x) > \frac{a}{2}$, 则其自身就满足结论；如果平均度不变甚至增加，则说明 $deg(x) > \frac{a}{2}$, 此时我们继续删去，并重复这种判断，则我们可以在顶点全部删完之前，找到一个这样的最小度小于 $\frac{a}{2}$ 的点，且我们容易得到其为最开始的图的子图 (因为平均度最后一定会减少至 0)，所以得证

6 Problem6

问题同构于：有 n 个顶点的无向图 G(V,e) （$n \geq 4$), 有 n+1 条边，证明 $\exists x \in V, s.t. deg(x) \geq 3$

假设不存在这样的 x，即 $\forall x_i \in V, deg(x_i) < 3 \rightarrow deg(x_i) \leq 2$, 那么 $\sum(x_i) \leq 2n$, 因为 $\sum(x_i) = 2(n+1) > 2n$, 矛盾，所以得证

7 Problem7

我们看单条边，其具有的两个顶点 x_i, x_{i+1} 由于和任意一个其他顶点不构成三角形，满足不等式：$deg(x_i) + deg(x_{i+1}) \leq n$, 那么我们将这的等式相加得到 $\sum(deg(x_i) + deg(x_{i+1})) \leq mn$, 此时单看度数为 $deg(x_i)$ 的顶点，他在不等式中出现了 $deg(x_i)$ 次那么，得到 $\sum_{i=1}^{n}(deg(x_i))^2 \leq mn$, 对于不等式左侧，我们利用柯西不等式：$\sum_{i=1}^{n}(deg(x_i))^2 \geq \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{m} x_i)^2 = \frac{(2m)^2}{n}$, 所以两个不等式联立：$mn \geq \frac{4m^2}{n} \leftrightarrow m \leq \frac{n^2}{4}$