80

离散数学（2023）作业 17

李思钰

221900311

2023 年 4 月 30 日

1 Problem 1

B

2 Problem 2

任取 $x, y \in N(a)$

$ay = ya$

$a^{-1}(ay)a^{-1} = a^{-1}(ya)a^{-1}$

$ya^{-1} = a^{-1}y$

$(xy^{-1})a = x(y^{-1}a) = x(a^{-1}y)^{-1} = x(ya^{-1})^{-1} = x(ay^{-1}) = (xa)y^{-1} = a(xy^{-1})$

因此，任取 $x, y \in N(a)$ $xy^{-1} \in N(a)$

由判定定理，$N(a)$ 是 G 的子群。

3 Problem 3

只需证：任取 $a, b \in xHx^{-1}, ab^{-1} \in xHx^{-1}$

$e = xex^{-1} \in xHx^{-1}$，因此 xHx^{-1} 非空。

任取 $xh_1x^{-1}, xh_2x^{-1} \in xHx^{-1}$，有 $h_1h_2^{-1} \in H$

因此 $(xh_1x^{-1})(xh_2x^{-1})^{-1} = xh_1x^{-1}xh_2x^{-1} = x(h_1h_2^{-1})x^{-1} \in xHx^{-1}$

由判定定理，xHx^{-1} 是 G 的子群。

4 Problem 4

证明:
由于 H 和 K 分别为群 G 的子群，显然 $e \in H \cap K$
假设 $\exists x \in H \cap K$，且 $x \neq e$
则 $x \in H \wedge x \in K$
则 $\langle x \rangle \leq H, \langle x \rangle \leq K$
由拉格朗日定理知：$|\langle x \rangle|$ 整除 H 和 K 的阶
而 H 和 K 的阶分别为 r，s，且 r 和 s 互素所以 $|\langle x \rangle|$ 为 1，所以 $x = e$，与假设矛盾。
综上所述 $H \cap K = \{e\}$

5 Problem 5

设 G 中只有一个 2 阶元 a，即 $a^2 = e$
即证：a 与 G 中的任意元素 b 可交换，即 $ab = ba$
。因为 G 中任意元素的阶都是 1、2、或者大于等于 3 的奇数，所以 b^2 的阶也只能是 1 或者 2。
易知 a 与 a 可交换。令 $b^2 \neq e$
则有 $(ab)^2 = a(ba)b = ab^2a = a(e)a = a$，同理可得 $(ba)^2 = b(ab)a = b(e)a = a$
因此 ab 和 ba 都等于 a，也与 a 可交换。
综上所述，a 与 G 中所有元素可交换。

6 Problem 6

因为 $\gcd(|g|, |h|) = 1$，所以 g 和 h 的阶互质，即存在正整数 m 和 n，使得 $mg = nh = 1$
则 $(gh)^{mn} = g^{mn}h^{mn} = e$
即 $|gh|$ 能被 mn 整除
因此 $|gh| \leq mn$
设 $|gh| = k$，则有：$(gh)^k = e$
$g^k h^k = e$
$e = g^{-k}h^{-k}$
因为 $mg = nh = 1$，上式可写成：$e = (g^{-k})^{nh}(h^{-k})^{mg} = (g^n)^{-k}(h^m)^{-k}$
由于 g^n 和 h^m 的阶都是 $|g|$ 和 $|h|$ 的商，因此它们的阶都能被 mn 整除
又因为 g^n 和 h^m 互质，所以它们的秩也是 mn。
因此 $|(g^n)^{-k}| = mn$，即 mn 是 $(g^n)^{-k}$ 的阶
同理 mn 是 $(h^m)^{-k}$ 的阶

因此 $(g^n)^{mn} = e, (h^m)^{mn} = e$
由此可知：$N = |gh||g| = |gh||h| = mn$
所以：$|gh| = N/|g| = N/|h| = |g||h|$
综上所述，如果 $g, h \in G$ 满足 $gh = hg$，并且 $\gcd(|g|, |h|) = 1$，那么 $|gh| = |g||h|$。

7 Problem 7

8 Problem 8

-20