100

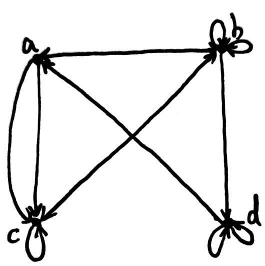
离散数学（2023）ghw2

谢庆轩
221900325

2023 年 5 月 16 日

1 Problem 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



2 Problem 2

1)

$$a)A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b)A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2)D 中的 $d_{i,i}$ 表示顶点的度数，即 D 为图的度矩阵

简单图中无重边和自环，于是关系矩阵乘关系矩阵的逆可以得到邻接关系，以及对角线上为每个点的度数，减去邻接矩阵便只剩下对角线即构成矩阵

3 Problem 3

左图的邻接矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1&0&1&0\end{bmatrix}$

右图的补图的邻接矩阵 $B=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&0&0&1\\1&0&0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&1&1&0\\0&1&1&0&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0&0&1\\1&0&0&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$

B 经过初等行列变换后可转化为 A，所以二者同构，得证

4 Problem 4

1)4 个
2)7 个
3)7 个

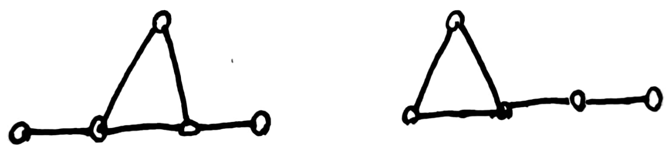
5 Problem 5

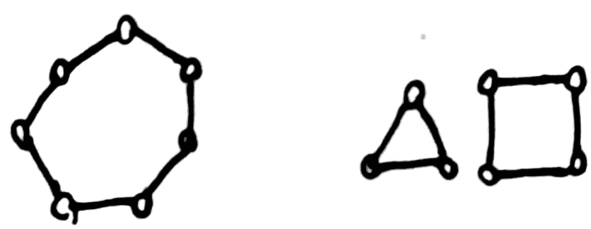
证明：因为 G 和 $\bar{G}$ 同构，所以二者边数相同，又二者互补构成 n 阶完全图，总共有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边，所以 G 和 $\bar{G}$ 各有 $\frac{n(n-1)}{4}$ 条边，应当为整数。当 $n=4k$ 时，$\frac{n(n-1)}{4}=k(4k-1)$ 为整数；当 $n=4k+1$ 时，$\frac{n(n-1)}{4}=k(4k+1)$ 为整数；当 $n=4k+2$ 时，$\frac{n(n-1)}{4}=4k^2+3k+\frac{1}{2}$ 不为整数；当 $n=4k+3$

时，$\frac{n(n-1)}{4}=4k^2+5k+\frac{3}{2}$ 不为整数。综上，若 G 是自补图，则图 G 的顶点数 ν 满足 $\nu \equiv 0,1 \pmod 4$，得证

6 Problem 6

1)2) 分别如下





7 Problem 7

证明：围长为 4 的 2 正则图有 4 个顶点且唯一，符合题意；
假设围长为 4 的 k 正则图至少需要 $2k$ 个顶点且恰有 $2k$ 个顶点的这样的图

唯一 ($k \geq 2$)，考虑围长为 4 的 $k+1$ 正则图。如果仍为 $2k$ 个顶点，即在原围长为 4 的 k 正则图上添加 k 条边，那么一定是 $2k$ 个顶点中选取 k 对不相邻的顶点两两相连，则围长一定变为 3，矛盾；如果为 $2k+1$ 个顶点，则需要原 $2k$ 个顶点中选取 $k+1$ 个顶点与新点连接成边，且构成长度为 4 的回路的 4 个顶点，只能选取其中不相邻的两点与之连接，否则会形成长度为 3 的回路，矛盾；又因为剩下 $k-1$ 个顶点不能两两连接或者两两连接，一定会有构成长度为 4 的回路的 2 个顶点相连形成长度为 3 的回路，矛盾；如果为 $2k+2$ 即 $2(k+1)$ 个顶点，即只需新增的两点连接，一个点和原 $2k$ 个顶点中各不相邻的 k 个顶点连接，另一个点与剩下 k 个顶点连接，即构成围长为 4 的 $k+1$ 正则图，且该构造方式唯一，否则不满足围长为 4 的条件。

综上，围长为 4 的 k 正则图至少有 $2k$ 个顶点且恰有 $2k$ 个顶点的这样的图唯一，得证