8. 集合：无穷 (8-infinity)

姓名： 鲁权锋　　**学号：** 201830168

评分： 10　　**评阅：** D

2021 年 4 月 29 日

请独立完成作业，不得抄袭。 若得到他人帮助，请致谢。 若参考了其它资料，请给出引用。 鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1　作业（必做部分）

题目 1 ([3 分] ⋆⋆⋆)
考虑由所有 0, 1 串构成的集合 ($\{0, 1, 111, 01010101010, 101010101, \dots\}$)。请问，该集合是否是可数集合，请给出理由。

证明：
该集合不是可数集合，证明如下：

可以考虑将该由所有 0, 1 串构成的集合（不妨记做 X）按 0, 1 串的长度不重不漏地划分成可数无穷个集合：

$A_1 = \{0, 1\}$, $A_2 = \{00, 01, 10, 11\}$, $A_3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\} \dots$

而 $|A_i| = 2^i, i \in [1, +\infty)$(每一位都是要么取 0 要么取 1)

又

$$
\begin{aligned}
& A_{\mathbb{N}} \subseteq X \\
& \implies |A_{\mathbb{N}}| \leqslant |X| \\
& \implies 2^{\mathbb{N}} \leqslant |X| \\
& \implies |X| \geqslant 2^{\aleph_0} \\
& \implies |X| \geqslant |R| \\
& \implies |X| > |\mathbb{N}|
\end{aligned}
$$

3

因此由所有 0, 1 串构成的集合不是可数集合。

□

题目 2 ([4 分] ⋆⋆⋆)
考虑如下命题：

“存在可数无穷多个两两不相交的非空集合，它们的并是有穷集合。”

请问，该命题是否正确。如果正确，请给出例子。如果不正确，请给出 (反面的) 证明。

证明：
该命题不正确，证明如下：

该可数无穷多个两两不相交的非空集合有如下三种情况：

1. 全部是有穷集合；
2. 一部分是有穷集合，一部分是无穷集合；
3. 全部是无穷集合。

不妨设该可数无穷多个两两不相交的非空集合分别是 $A_1, A_2, A_3 \dots$ ，它们的并是集合 X.

对于情况 1，可以将集合 X 的元素按它原来所属的集合的顺序排序（即 X 中的元素先是 A_1 的，A_1 的元素排完之后才是 A_2 的，再排 A_3 的...）

可以构造出一种" 数数" 的策略：

先" 数完"A_1 的元素，再" 数完"A_2 的元素... 因为该可数无穷多个两两不相交的非空集合全部是有穷集合，因此" 数完" 的操作是可行的。

由以上数法可知，集合 X 和自然数集 $\mathbb{N}$ 存在一个双射函数，因此 $|X| = |\mathbb{N}|$, 故该情况下 X 是无穷集合。

对于情况 2，

$$\begin{aligned}
&\exists A \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.\ |A| \geqslant |\mathbb{N}| (\text{存在一个集合 A 是无穷集合}) \\
&\implies A \subseteq X \\
&\iff |A| \leqslant |X| \\
&\iff |\mathbb{N}| \leqslant |A| \leqslant |X| \\
&\iff |\mathbb{N}| \leqslant |X|
\end{aligned}$$

因此该情况下集合 X 必是无穷集合。

对于情况 3，

$$\begin{aligned}
&\forall A \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \\
&\implies A \subseteq X \\
&\iff |A| \leqslant |X| \\
&\iff |\mathbb{N}| \leqslant |A| \leqslant |X| (\text{集合 A 是无穷集合}) \\
&\iff |\mathbb{N}| \leqslant |X|
\end{aligned}$$

因此该情况下集合 X 必是无穷集合。

4

综上所述，集合 X 必是无穷集合。

□

题目 3 ([3 分] ⋆⋆⋆⋆)
请自行查找并阅读 Cantor-Schröder–Bernstein 定理的某个证明，理解它，放下你手头的资料 ①，然后尝试自己写出这个证明 ② 。

以下证明供参考 ③：Schröder–Bernstein theorem @ wiki

① 不要偷看哦
② 是不是又偷看了（为什么明明懂了，但就是表达不出来?）
③ pdf 版本见 “*8-infinity.zip*” 压缩包

证明：
对于单射 $f:A\mapsto B$ 和单射 $g:B\mapsto A$,

不失一般性，假设 A,B 不相交。对于任意的 $a_i\in A$ 和 $b_i\in B$, 其中 $i\in(0,\infty)$

可以让 $a_i\to \mathrm{b}_j$, $b_j\to \mathrm{a}_1$, $a_1\to \mathrm{b}_k$…这样无限映射下去，并且（由于函数是单射的）可以倒着往回映射（函数的逆运算）。写成函数的表达如下：

$$\cdots g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(a)))\to f^{-1}(g^{-1}(a))\to g^{-1}(a)\to a\to f(a)\to g(f(a))\to f(g(f(a)))\cdots$$

这样会出现三种情况：

1. 在倒着往回映射时在 a_i, 也就是在集合 A 上停止，(当 $f^{-1}(a_i)$ 无定义的时候).
2. 在倒着往回映射时在 b_i, 也就是在集合 B 上停止，(当 $g^{-1}(b_i)$ 无定义的时候).
3. 最终映射关系映射出一个圈 (映射许多次之后又映射回自己).

又因为函数 f 和 g 都是单射的，集合 A 和集合 B 每一个元素都只可能在其中一条单向链或圈上出现，于是这些链或圈的元素形成了一组并集为全集、交集为空的不重不漏的分割。

对于情况 1 的单向链, 对任意属于该单向链且属于集合 A 的元素 $a_0,a_1,a_2\ldots$ 都可以构造一个双射函数 $h_1:A\mapsto B$:

$$h_1(a_0)=f(a_0)\ ,h_1(a_1)=f(a_1)\ ,h_1(a_2)=f(a_2)\ldots$$

3

同理，对于情况 2 的单向链，对任意属于该单向链且属于集合 A 的元素 $a_0,a_1,a_2\ldots$ 也可以构造一个双射函数 $h_2:A\mapsto B$:

$$h_2(a_0)=g^{-1}(a_0)\ ,h_2(a_1)=g^{-1}(a_1)\ ,h_2(a_2)=g^{-1}(a_2)\ldots$$

对于情况 3 的环，对任意属于该环且属于集合 A 的元素 $a_0,a_1,a_2\ldots$ 和对任意属于该环且属于集合 B 的元素 $b_0,b_1,b_2\ldots$, 也可以构造一个双射函数 $h_3:A\mapsto B$:

$$h_3(a_0)=f(a_0)=g^{-1}(a_0)=b_0\ ,h_3(a_1)=f(a_1)=g^{-1}(a_1)=b_1\ ,h_3(a_2)=f(a_2)=g^{-1}(a_2)=b_2\ldots$$

对上述的双射函数取并集，也是一个双射函数，即

$$h=h_1\cup h_2\cup\ldots$$

上述双射函数 h 即为所求。

□