离散数学（2023）作业 01 - 命题逻辑

周帛岑
221900309

2023 年 3 月 1 日

1 Problem 1

解：列表如下：

p	q	r	p→q	¬p	¬p→r	(p→q)→(¬p→r)
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1

2 Problem 2

解：

1.$\neg q \wedge p$

2.$\neg p \wedge q \wedge r$

3.$r \rightarrow (\neg p \leftrightarrow q)$

4.$\neg q \wedge \neg p \wedge r$

5.$q \rightarrow (\neg p \wedge \neg r)$

6.$(p \wedge r) \rightarrow \neg q$

3 Problem 3

1. Jennifer 和 Teja 不是朋友。
2. 面包师说的“一打”没有 13 个。
3. Abby 每天并没有发送 100 多条短信。
4. 121 不是一个完全平方数。

4 Problem 4

1. T
2. F
3. T
4. T

5 Problem 5

解：列表如下：

p	q	¬p	¬q	p∨q	¬(p∨q)	¬p∧¬q	¬(p∨q)↔¬p∧¬q
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

由表得$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

6 Problem 6

解：假设 TA 是理科学生为 p，TA 是文科学生为 q，TA 学好数学为 r

则第一个命题为 $p \to r$，第二个为 $\neg q \to p$, 第三个命题为 $\neg r$ 求证：q

正确，证明见下

1.$p \to r$　　前提

2.$\neg r$　　前提

3.$\neg p$　　1，2 取拒式

4.¬q→p　　前提

5.¬¬q　　3，4 取拒式

6.q　　5 双重否定律

7 Problem 7

解：设这是铁为 p，这是铜为 q，这是锡为 r

则甲：¬p∧¬q

乙：¬p∧r

丙：¬r∧p

显然（¬r∧q）∧（¬q∧r）≡T

故乙与丙必然一人全对一人全错，则甲此时说对一半说错一半。

假设 ¬p = T , 则 q = T, 与乙与丙必然一人全对一人全错矛盾

假设 ¬q = T ，则 p = T，此时丙全对乙全错符合题意。

综上，甲说对一半说错一半，乙全错，丙全对，这是铁。

8 Problem 8

解：原命题即证：存在一种赋值，使（$\alpha\leftrightarrow$（$\beta\leftrightarrow\gamma$））→$(\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma))\vee((\neg\alpha)\wedge(\neg\beta)\wedge(\neg\gamma))$ 为假，也存在一种赋值，使 $(\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma))\vee((\neg\alpha)\wedge(\neg\beta)\wedge(\neg\gamma))$→（$\alpha\leftrightarrow$（$\beta\leftrightarrow\gamma$））为假

对于前者，若该命题为假，则（$\alpha\leftrightarrow$（$\beta\leftrightarrow\gamma$））$= 1$ 且 $(\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma))\vee((\neg\alpha)\wedge(\neg\beta)\wedge(\neg\gamma)) = 0$，又当 α=β=0,γ=1 时，$\alpha\leftrightarrow$（$\beta\leftrightarrow\gamma$））$= 1$ 且 $(\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma))\vee((\neg\alpha)\wedge(\neg\beta)\wedge(\neg\gamma)) = 0$，故 $\alpha\leftrightarrow$（$\beta\leftrightarrow\gamma$））不重言蕴涵 $(\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma))\vee((\neg\alpha)\wedge(\neg\beta)\wedge(\neg\gamma))$

同理，对于后者为假时的取值，取 α=β=γ=0, 此时 $(\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma))\vee((\neg\alpha)\wedge(\neg\beta)\wedge(\neg\gamma)) = 1$ 且（$\alpha\leftrightarrow$（$\beta\leftrightarrow\gamma$））$= 0$，故 $(\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma))\vee((\neg\alpha)\wedge(\neg\beta)\wedge(\neg\gamma))$ 不重言蕴涵 $\alpha\leftrightarrow$（$\beta\leftrightarrow\gamma$））

综上，命题得证。

9 Problem 9

证：

显然，由重言蕴含的定义知，1 与 2 等价

对于 1 与 3，1 等价于 ¬$\alpha\vee\beta$≡1

对于 3，原命题可转化为 $\alpha\to(\alpha\wedge\beta)\equiv1$ 且 $(\alpha\wedge\beta)\to\alpha\equiv1$

又 $\alpha\to(\alpha\wedge\beta)\equiv\neg\alpha\vee(\alpha\wedge\beta)\equiv(\neg\alpha\vee\alpha)\wedge(\neg\alpha\vee\beta)\equiv(\neg\alpha\vee\beta)\equiv1$

且 $(\alpha\wedge\beta)\to\alpha)\equiv\neg(\alpha\wedge\beta)\vee\alpha\equiv$（$\neg\alpha\vee\neg\beta$）$\vee\alpha$

即 3 等价于 $\neg\alpha\vee\beta\equiv1$

即 3 等价于 1

同理，对于 4，原命题可转化为 $\beta\to(\alpha\vee\beta)\equiv1$ 且 $(\alpha\vee\beta)\to\beta\equiv1$

又 $\beta\to(\alpha\vee\beta)\equiv\neg\beta\vee(\alpha\vee\beta)\equiv1$

且 $(\alpha\vee\beta)\to\beta\equiv\neg\ (\alpha\vee\beta)\vee\beta\equiv(\neg\alpha\wedge\neg\beta)\vee\beta\equiv(\neg\alpha\vee\beta)\wedge((\neg\beta\vee\beta))\equiv\neg\alpha\vee\beta$

即 4 等价于 $\neg\alpha\vee\beta\equiv1$

即 4 等价于 1

又由于等价具有可传递性，故四个命题等价

10 Problem 10

解:

第一题:

$\alpha\to(\beta\to\alpha)$

1.α	*assumption*	
2.β	*assumption*	
3.$\beta\to\alpha$	$\to$i	1,2
4.$\alpha\to(\beta\to\alpha)$	$\to$i	1,3
5.$\alpha\to(\beta\to\alpha)$		

第二题:

$(\alpha\to(\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma))$

1.$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	*assumption*
2.$\alpha \to \beta$	*assumption*
3.α	*assumption*
4.β	$\to$e 2,3
5.$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	1
6.$\beta \to \gamma$	$\to$e 3,5
7.γ	$\to$e 4,6
8.$\alpha \to \gamma$	$\to$i 3-7
9.$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	$\to$i 2-8
10.$(\alpha \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$	$\to$i 1-9

第三题:

$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$

1.$\neg\beta \to \neg\alpha)$	*assumption*
2.$\neg\beta \to \alpha$	*assumption*
3.$\neg\beta$	*assumption*
4.α	$\to$e 2,3
5.$\neg\alpha$	$\to$e 1,3
6.$\perp$	$\perp$ 4,5
7.β	$\neg$e 3-6
8.$(\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$	$\to$i 2-7
9.$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$	$\to$i 1-8