72

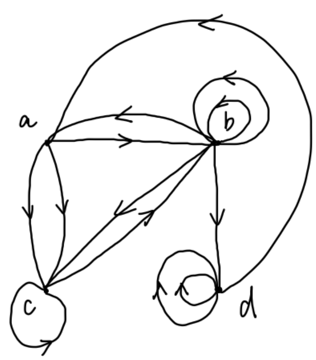
离散数学（2023）作业 ghw02

李思钰
221900311

2023 年 5 月 16 日

1 Problem 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



2 Problem 2

−20

3 Problem 3

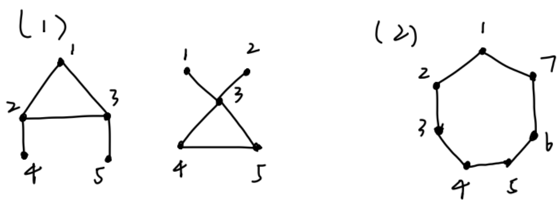
4 Problem 4

1)4
2)3
3)2 −6

5 Problem 5

假设 G 中有 k 个孤立点。由于 G 和 $\overline{G}$ 同构，$\overline{G}$ 中也有 k 个孤立点。
由于 G 和 $\overline{G}$ 中的孤立点相互对应，它们的数量必须相等。因此，孤立点的数量是偶数。
假设 G 中有 m 个度数为 1 的顶点。同理，由于 G 和 $\overline{G}$ 同构，$\overline{G}$ 中也有 m 个度数为 1 的顶点。
这些度数为 1 的顶点在 G 和 $\overline{G}$ 中是一一对应的。因此，度数为 1 的顶点的数量也是偶数。
由于 G 中的顶点总数 V = 孤立点数 + 度数为 1 的顶点数 + 其他度数的顶点数，而孤立点数和度数为 1 的顶点数都是偶数，所以 V 也是偶数。
因此，若图 G 是自补图，则图 G 的顶点数 V 满足 $V \equiv 0(mod2)$。而对于任意整数 n，$n \equiv 0,1(mod4)$。因此，$V \equiv 0,1(mod4)$。

6 Problem 6



? −2

7 Problem 7

设 G 是围长为 4 的 k 正则图。
假设 G 中顶点数少于 $2k$，即 $|V(G)| < 2k$。由于 G 是 k 正则图，每个顶点的度数为 k。

根据握手定理，所有顶点的度数之和应该是 2 倍边数，即 $k|V(G)| = 2|E(G)|$。

由于 $|V(G)| < 2k$，而每条边连接两个顶点，所以边数 $|E(G)|$ 小于 $k|V(G)|/2$，这与 G 是 k 正则图矛盾。

因此，G 中至少有 $2k$ 个顶点。

设 G 和 H 是两个围长为 4 的 k 正则图，其中 $|V(G)| = |V(H)| = 2k$。

对于 G 中的一个顶点 v，由于 G 是 k 正则图，顶点 v 与其他 k 个顶点相邻。

对于 H 中的一个顶点 u，同样，顶点 u 与其他 k 个顶点相邻。

构建一个同构映射 $f : V(G) \to V(H)$，将 G 中的顶点 v 对应到 H 中的顶点 u。

由于 G 和 H 是 k 正则图，根据定义，v 与 G 中的其他 $k-1$ 个顶点相邻的顶点在 H 中也与 u 相邻。

因此，映射 f 是保持邻接关系的，即 G 和 H 有相同的邻接图。

由于 G 和 H 的顶点数相同，并且它们的邻接图相同，因此 G 和 H 是同构的。

综上所述，围长为 4 的 k 正则图至少有 $2k$ 个顶点，而恰有 $2k$ 个顶点的这样的图（在同构意义下）只有一个。