92

离散数学（2023）图论作业 1：图的基本概念

张程涵
221900333

2023 年 5 月 15 日

1 Problem 1

假设 G 是简单图, 则 $\forall e \in E, |\phi(e)| = 2$, 且每个边端点都不相同, 由题干得, $\forall u, v \in V$,deg(u)≠deg(v), 因为 deg(v)≥n 时，则设度数为 0,1,2，...,n-1，若有 1 个点度数为 0，则不存在度数为 n-1 的点，与简单图矛盾;
若不存在度数为 0 的点，则只有 n-1 种度数可能，必然会有度数相同的，与 deg(u)≠deg(v) 矛盾，所以 G 不是简单图。

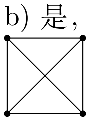
2 Problem 2

a) 设删去前总度数为 D, 总端点数为 V，平均度数为 $\frac{D}{V}$, 设最大度数为 m，删去后平均度数为 $\frac{D-m}{V-1}$, 即证 $\frac{D}{V} \geq \frac{D-m}{V-1}$, 即证 mV≥D,mV 即所有端点都有最大度数，必然大于等于 D，所以成立。
b) 设删去前总度数为 D, 总端点数为 V，平均度数为 $\frac{D}{V}$, 设最小度数为 m，删去后平均度数为 $\frac{D-m}{V-1}$, 即证 $\frac{D}{V} \leq \frac{D-m}{V-1}$, 即证 mV≤D,mV 即所有端点都有最小度数，必然小于等于 D，所以成立。

−5

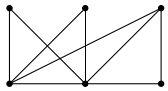
3 Problem 3

a) 不是，由 Problem 1 得，该图不是简单图。
b) 是，如下图：



c) 不是，若为简单图，度数为 5 的点与其他五点均相连，则度数至少为 1，度数为 4 的点还要与另外三点相连，则至少还有三个度数至少为 2 的点，不成立。
d) 是，如下图：

−3



4 Problem 4

$\forall e \in E(1 \leq |\phi(e)| \leq 2)$, 该图中平均度数 $\leq \frac{2\epsilon}{v}$，且平均度数大于等于 $\sigma(G)$, 小于等于 $\Delta(G)$,$2\epsilon \leq v\Delta(G)$，不等式成立。

5 Problem 5

a) 设 deg(x)=m, 边数为 E，顶点数为 V，$\frac{2E}{V}=a$, 即证 $\frac{2E-m}{V-1} \geq a$ 当且仅当 m≤ $\frac{a}{2}$, 化简可得即证 2E≥mV 当且仅当 m≤ $\frac{a}{2}$, 二者等价，成立。
b) 将度数小于等于 $\frac{a}{2}$ 的顶点删去，G 的顶点平均度仍至少为 a，且 G 无自环，所以可以把所有度数小于等于 $\frac{a}{2}$ 的顶点都删去，构成子图。

6 Problem 6

即顶点数为 n，边数为 n+1 的简单图，即证存在一个顶点 x，deg(x)≥3, 根据握手定理，总度数为 2n+2，若所有点的度数都小于 3，则总度数小于等于 2n 小于 2n+2，所以必然存在一个顶点 x，deg(x)≥3，成立。

7 Problem 7

设 x_1 为度数最大的顶点，度数为 d，因为 G 不含 K_3 的子图，所以设与 x_1 相连的顶点为 $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-d+1}$，这些顶点两两不相连，则边数 m≤ $deg(x_1)+deg(x_2)+\cdots+deg(x_{n-d}) \leq d(n-d) \leq \frac{n^2}{4}$，成立。