

离散数学 (2023) 作业 XX

周帛岑

221900309

2023 年 6 月 5 日

1 Problem 1

证: 由 Dijkstra 的定义可知, 每次选取时, 都要选取与已有通路连通的长度最小的点作为新点加入, 即为从 u 点到已形成图的最短距离。

又由于之前的选取使每一个点到初始点的距离均为最短, 此时 u 到初始点的距离也为最短。

2 Problem 2

(1): 解:

将三重循环里面的加号改为乘号即可

(2): 解:

下面的三重循环改为:

```
for i := 1 to n do 9: for j := 1 to n do 10: for k := 1 to n do 11: if  $d(v_j, v_i) < d(v_j, v_k)$  then  
12:  $d(v_j, v_k) := d(v_j, v_i)$  13: else if  $d(v_i, v_k) < d(v_j, v_k)$  then 12:  $d(v_j, v_k) := d(v_i, v_k)$ 
```

订正: 题意理解有误:

将双重循环中的 else 改为: $d(v_i, v_j) = -\infty$

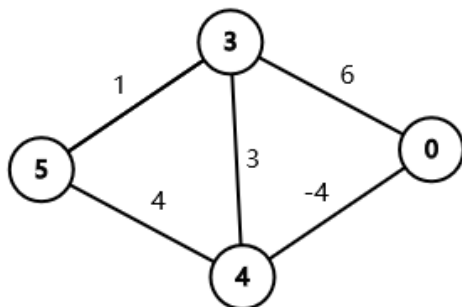
将三重循环改为:

if $\min\{d(v_j, v_i), d(v_i, v_k)\} > d(v_j, v_k)$ then

$\min\{d(v_j, v_i), d(v_i, v_k)\} := d(v_j, v_k)$

3 Problem 3

可以, 证: 我们不妨设最小的一条边的权为 $-n$, 其中 $n > 0$, 此时我们将所有边的权增加 $n+1$



此时所有边的权均为正数，此时利用 Dijkstra 算法，求出来的通路即为我们所需的最短路径
 订正：不可以：

反驳：

考虑上图，从 3 出发使用 Dijkstra 算法会在第一次迭代中认定 $\text{dist}(3, 4) = 3$ ，而路径 $2 \rightarrow 3 \rightarrow 0 \rightarrow 4$ 的权值和为 2。

出现矛盾，故命题是假的

4 Problem 4

解：从 a 开始，回路为 abedca，长度为 $3 + 2 + 1 + 6 + 8 = 20$

从 b 开始，回路为 bedacb，长度为 $2 + 1 + 4 + 8 + 10 = 25$

从 c 开始，回路为 cedabc，长度为 $5 + 1 + 4 + 3 + 10 = 23$

从 d 开始，回路为 debacd，长度为 $1 + 2 + 3 + 8 + 6 = 20$

从 e 开始，回路为 edabce，长度为 $1 + 2 + 3 + 10 + 6 = 22$

故最短路径为从 a 开始或从 c 开始的这两条路径

订正：Dijkstra 算法运用有误：

通路为: abedca, 长度为 $3 + 2 + 1 + 6 + 8 = 20$

或 abecda, 长度为 $3 + 2 + 5 + 6 + 4 = 20$

5 Problem 5

这个命题是正确的

证: 我们不妨将所有点列在图上, 根据最小距离将这一对点对以权重为这个最短路径相连, 于是这样我们便构成了一个完全图。

回看每一个点, 若存在一条非直通的路径, 与这条最短路径相同, 则我们删去这一条直通的路径, 如此操作每一个点, 我们便构造出了 G

订正: 考虑如下两图:



上图中顶点集与各顶点的距离集均相同, 我们无法从这两个条件中区分出它们的区别

故命题错误

6 Problem 6

(a): 将问题分为两部分, 从 v_i 到 v_k 的最短路径, 从从 v_k 到 v_j 的最短路径。分别调用已知的求两点间最短通路长度的算法解决, 求和记为 l_1

再计算 v_i 到 v_j 的最短路径从从 v_j 到 v_k 的最短路径 $\times 2$, 求和记为 l_2

取 $\min(l_1, l_2)$ 即可

(b): 将 v_k 从这张图上去除, 再调用已知的求两点间最短通路长度的算法解决即可

(c): 将问题分为两部分, 从 v_i 到 v_k 的最短路径, 从从 v_k 到 v_j 的最短路径。分别调用已知的求两点间最短通路长度的算法解决即可

订正: (a),(c) 中出现问题

(a): 将问题分为两部分, 从 v_i 到 v_k 的最短路径, 从 v_k 到 v_j 的最短路径。分别调用已知的求两点间最短通路长度的算法解决, 再相加即可

(c): 先考虑删除点 v_k , 利用算法计算此时 v_i 到 v_j 的最短路径
再考虑原图, 寻找 v_j 到 v_k 的最短路径, 相加即可

7 Problem 7

AB:9

AC:10

AD:AF + FG + GD = 9

AE:AF + FG + GE = 21

AF:2

AG:AF + FG = 6

订正: AC,AE 出现问题:

AC:AF + FG + GC = 9

AE:AF + FG + GD + DE = 18