75

作业 21 221900344 彭子云

2026732834

May 2023

1 Problem 1

.

假设无向图 G 至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，但 G 是简单图。那么 G 中不存在自环和重边。

由于 G 至少有两个顶点，因此存在至少两个顶点 v 和 w，并且 v 的度数大于 w 的度数，即 $\deg(v) > \deg(w)$。

在简单图中，每个顶点最多与其他顶点产生一条边，因此 v 的度数至多为 n-1，其中 n 是 G 中的顶点数。又因为 v 的度数大于 w 的度数，因此 $\deg(w) <= n-2$。

根据鸽笼原理，G 中必然存在一个顶点 u 满足 $\deg(u) >= 2$（因为总度数为 2m，而顶点数为 n，所以总度数 >= 2n，而如果所有顶点度数都小于等于 1，则总度数 <= 2(n-1)<2n，矛盾），不妨设 u 是 v 和 w 中度数较小的那个。既然 v 的度数大于 w 的度数，那么显然 u 的度数也小于 v 的度数，即 $\deg(u) < \deg(v)$。

然而，在简单图中，每个顶点至多与其他顶点产生一条边，因此 u 至多与其它 u 的度数个顶点存在边。也就是说，除了与 u 相邻的顶点之外，G 中最多还有 deg(u) 个顶点与 u 存在改隆。

又因为 v 和 w 在 G 中度数不同，所以它们中至少有一个顶点与 u 不相邻。不妨设 v 不与 u 相邻，则将 v 到 u 的路径延伸到 u 的邻居上，再经过 u 再延伸到其他的邻居，得到一条 uvwu 的简单路径，这违反了 G 是无向简单图这一条件。

2 Problem 2

.

1) 错误

当删去一个度最大的点时，假设该点的度数为 k，那么图中会有 k 条边被删除。而被删除的每条边均连接着图中的另一个顶点，这些顶点的度数会减少 1，导致平均度数减少。因此，删去一个度最大的顶点会使其顶点平均度数减少。

2) 正确

当删去一个度最小的点时，该点最多只与一个邻居相连，因此只有一条边会被删除。删除那个点后，它的邻居不再与之相连，它们的度数也将减少 1，但总度数不变。因此，删去一个度最小的顶点不会使其顶点平均度数减少，甚至可能增加，具体取决于图中其它顶点的度数分布情况。

3 Problem 3

.

a)

不能，一个简单图中每个顶点的度数都不大于该图的边数，而该序列的和为 28，这意味着该图至少有 14 条边，而显然不存在顶点能够使该顶点与超过 7 个其他顶点相邻。

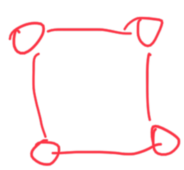
b)

可以作为简单图的度序列。这是一个 4 个顶点的正方形。每个顶点的度数均为 3。

(1)–(2)

| |

(4)–(3)



? −2

c)

不能, 因为一个无向简单图中奇数度顶点数必为偶数。
d)

(1)–(2)–(3)–(4)

| |

(5)–(6)

-3

4 Problem 4

.

设 G 中度最小的顶点是 v，其度数为 a(G)，则连接 v 的所有边中至少包含了 a(G) 条边。因此，G 的边数 E 必须满足 E >= a(G) × V/2（每条边贡献两个顶点的度数之和）。移项可得 2E/V >= a(G), 即 a(G) <= 2E/V。

同理，设 G 中度最大的顶点是 w，其度数为 b(G)，则连接 w 的所有边中至多包含了 b(G) 条边。否则，如果连接 w 的边数超过了 b(G)，那么通过引入与 w 相邻的新顶点，可以增加 w 的度数并不影响其它顶点的度数，这样就能构造出一个度更大的顶点，这与假设相悖。因此，G 的边数 E 必须满足 E <= b(G) × V/2。移项可得 2E/V <= b(G), 即 b(G) >= 2E/V。

综上所述，a(G) <= 2E/V <= b(G) 成立。

5 Problem 5

.

-10

6 Problem 6

.

设这 n 支球队为 T1, T2, ..., Tn，总共进行了 n+1 场比赛。假设每个球队赢得场数不超过 2 场，那么总共的胜利场次也不会超过 2(n-1)=2n-2。

另一方面，每场比赛都有一个胜者和一个失败者，因此总的胜利场次必须是 n+1。由于 2n-2 $<$ n+1（当且仅当 n 4 时成立），所以推断一定存在至少一支球队获胜场数大于 2，即至少参加了 3 场比赛。

7 Problem 7

.

−10