离散数学（2023）作业 09

周帛岑
221900309

2023 年 4 月 2 日

1 Problem 1

解:

不妨设以 000 开头的二进制串的集合为 A，以 111 结尾的二进制串的集合为 B

则 |A| = 2^{n-3}, $|B| = 2^{n-3}$ 且 A∩B = 2^{n-6}

由容斥原理，|A∪B| = |A| + |B| - |A∩B| = $2^{n-2} - 2^{n-6}$

2 Problem 2

解:

a): 由于 1008 能被 9 整除，9999 可以被 9 整除故一共有（9999-1008）/9+1 = 1000 个

b): 由于 1000 可以被 5 整除，9995 可以被 5 整除，故可以被 5 整除的一共有（9995-1000）/5+1 = 1800 个

由于 1001 可以被 7 整除，9996 可以被 7 整除，故可以被 7 整除的一共有（9996-1001）/7+1 = 1286 个

由于 1015 可以被 35 整除，9975 可以被 35 整除，故可以被 35 整除的一共有（9975-1015）/35+1 = 257 个

根据容斥原理，能被 5 或 7 整除的数共 1800+1286-257 = 2829 个

c): 由于 1000 为偶数，9998 为偶数，故偶数一共（9998-1000）/2+1 = 4500 个

d): 由于 1000 到 9999 一共 9000 个数，故不能被 5 也不能被 7 整除的数一共 9000-2829 = 6171 个

e): 由题可知，第一位有除了 0 以外的 9 种选择，第二位有剩下 9 种选择，第三位有剩下 8 种选择，第四位有剩下 7 种选择，故一共有 9*9*8*7 = 4536 个

f): 由 b 可知，这样的数一共有 1800-257 = 1543 个

g): 由于 1002 为 3 的倍数，9999 为 3 的倍数，故 3 的倍数一共（9999-1002）/3+1 = 3000 个。故不是 3 的倍数的数一共 9000-3000 = 6000 个

h): 由 b) 可知，一共 257 个

3 Problem 3

解：由题可知，该子集的子集中一定包含 {2,5} 或 {4,5}

1. 该子集的子集中包含 {2,5} 但不包含 {4,5}，剩下一共三个元素中，4 不在该集合中，1，3 有在或不在两种情况，一共 2*2 = 4 个

2. 该子集的子集中包含 {4,5} 但不包含 {2,5}，剩下一共三个元素中，2 不在该集合中，1，3 有在或不在两种情况，一共 2*2 = 4 个

3. 该子集的子集中包含 {2,5} 且包含 {4,5}，剩下一共两个元素中，1，3 有在或不在两种情况，一共 2*2 = 4 个

综上，一共 12 个

4 Problem 4

由题可知，0 的个数一定大于等于 1 的个数，故二进制串中至少有 6 个 0

1. 一共 6 个 0，6 个 1

此时二进制串一共有 $C_7^6 = 7$ 种

2. 一共 7 个 0，5 个 1

此时二进制串一共有 $C_8^5 = 56$ 种

3. 一共 8 个 0，4 个 1

此时二进制串一共有 $C_9^4 = 126$ 种

4. 一共 9 个 0，3 个 1

此时二进制串一共有 $C_{10}^3 = 120$ 种

5. 一共 10 个 0，2 个 1

此时二进制串一共有 $C_{11}^2 = 55$ 种

6. 一共 11 个 0，1 个 1

此时二进制串一共有 $C_{12}^{1} = 12$ 种

7. 一共 12 个 0

此时二进制串一共有 1 种

综上，一共 1+12+55+120+126+56+7 = 407 个
订正：最后一步计算错误：

前略

综上一共 1+12+55+120+126+56+7 = 377 个

5 Problem 5

解：

由题可知，原命题等价于往总数不超过 31 个的小球中放入 5 个挡板，将其分为 6 份。

故总方法一共有 $C_5^5 + C_6^5 + \cdots\cdots\cdots\cdots + C_{30}^5$ 种

进行化简：原式 $= C_6^6 + C_6^5 + \cdots\cdots\cdots\cdots + C_{30}^5$

又 $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$

原式 $= C_7^6 + C_7^5 + \cdots\cdots\cdots\cdots + C_{30}^5$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$= C_{30}^6 + C_{30}^5$

$= C_{31}^6$

$= 736281$

故一共 736281 种

6 Problem 6

解：

由题可知，由于可以旋转和翻转，边角的四个方块之间等价，两边角所夹的共四个边界方块之间也等价。故一共有 $(2^4/4) * (2^4/4) * 2 = 32$ 种
订正：考虑有误：

全红：1 种

8 个红：3 种

7 个红：8 种

6 个红：7 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1 = 16 种

5 个红：1 + 1 + 2 + 2 + 7 + 1 + 1 + 4 + 4 = 23 种

又蓝色情况与红色相同，故一共有 2(1 + 3 + 8 + 16 + 23) = 102 种

7 Problem 7

解：

(1): 由题可知，任取三个顶点，均可以构成一个三角形，故一共有 $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 个

(2): 由题可知，此时 n 至少为 6，要使该三角形不为正 n 边形的边，则取得的顶点不相邻

原问题可以抽象为往 n-3 个物体中插入三个物体，且每个空中最多插入一个，且首尾不能同时插入物体。

这样的方法一共有 C_{n-2}^3 - C_{n-4}^1 = ($\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$ - (n-4)) 种
订正：结果未化简

前略

这样的方法一共有 C_{n-2}^3 - C_{n-4}^1 = ($\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$ - (n-4)) = $\frac{n(n-4)(n-5)}{6}$ 种

8 Problem 8

证：

基础步骤：当 n 取 2 时，$|A \cup B|$ = $|A|$+$|B|$-$|A \cap B|$, 根据并交集的定义，上式显然成立。

归纳步骤：不妨假设 n 取 s 时原式成立，则 n 取 s+1 时

原式 = $|\bigcup_{n=1}^{s+1} A_i|$ = $|\bigcup_{n=1}^{s} A_i \cup \mathrm{A}_{s+1}|$

$= |\bigcup_{n=1}^{s} A_i| + |A_{s+1}| - |\bigcup_{n=1}^{s} A_i \cap \mathrm{A}_{s+1}|$

$= \sum_{1 \le i \le (k+1)} |A_i|$ - $\sum_{n=2}^{k} (-1)^{n-1} \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \le i_k \le s} |A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots\ldots\ldots\ldots \cap A_{ik}|$ + $\sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \le i_n \le k} |A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots\ldots\ldots\ldots \cap A_{ik} \cap A_{i(s+1)}|$ + $(-1)^s |\mathrm{A}_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots\ldots\ldots \cap A_s \cap A_{i(s+1)}|$

$= \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n-1} \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \le i_n \le n} |A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots\ldots\ldots\ldots \cap A_{ik}|$

故 n 取 s+1 时，上式也成立

综上，命题得证

9 Problem 9

解：由题可知，$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6|$ 为：

$|A_1|$+$|A_2|$+$|A_3|$+$|A_4|$+$|A_5|$+$|A_6|$-$|A_1 \cap A_2|$-$|A_1 \cap A_3|$-$|A_1 \cap A_4|$-$|A_1 \cap A_5|$-$|A_1 \cap A_6|$-$|A_2 \cap A_3|$-$|A_2 \cap A_4|$-$|A_2 \cap A_5|$-$|A_2 \cap A_6|$-$|A_3 \cap A_4|$-$|A_3 \cap A_5|$-$|A_3 \cap A_6|$-$|A_4 \cap A_5|$-$|A_4 \cap A_6|$-$|A_5 \cap A_6|$

10 Problem 10

订正：当时未能想出方法：

证：对于 N×N 的魔术网格，我们一共有 n 种方式选择行，确定所选行后，有 n 种方式选择列，使某行某列的乘积为-1，一共 n^2 种

对于剩下的 (n-1) 行和列，我们可以随机填充，这样的方式一共 $2^{(n-1)^2}$ 种

我们现在得到了一个除了所选行与列以外均填好的 N×N 的魔术网格, 对于这一行一列上的每一个数据，我们只有唯一一种方式填入，使其满足条件，换言之一共一种方法

综上，一共有 $n^2 \times 2^{(n-1)^2}$ 种