

考试科目名称 离散数学 (A 卷)

考试方式: 闭 卷 考试日期 2018 年 6 月 25 日 教师

系 (专业) 计算机科学与技术系 年级 班级

学号 姓名 成绩

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
分 数									

得 分	
-----	--

一、(本题满分 10 分)

用谓词逻辑演算描述出以下推理过程:

“没有一个女学生没有通过离散数学考试, 每个足够认真而又聪明的学生都能通过离散数学考试, 学生小明很聪明, 但是没有通过离散数学考试, 所以小明一定不是女生且不够认真。”

得 分	
-----	--

二、(本题满分 12 分)

令 R 为 A 上的一个关系。试证明： R 是一个等价关系 当且仅当

存在一个集合 B 及一个函数 $f: A \rightarrow B$ 使得 $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

得 分	
-----	--

三、(本题满分 10 分)

Fermat 素数为 $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n \geq 0$.

- 试用数学归纳法证明： $\prod_{r=0}^{n-1} F_r = F_n - 2$ ($n > 0$).
- 试基于上述结论证明：对于任意两个不同的自然数 $m < n$,
总有 $\gcd(F_m, F_n) = 1$.

得 分	
-----	--

四、(本题满分 12 分)

某人玩一个掷一对骰子的游戏，其玩法如下：初始得分为 0。每一轮掷两个骰子，计算点数之乘积，若大于 20，则游戏结束；否则把这轮所得的积加入得分，并继续下一轮。问：

- a) 游戏结束时得分为 0 的概率是多少？
- b) 游戏第一轮得分的期望值是多少？
- c) 游戏结束时得分的期望值是多少？

得 分	
-----	--

五、(本题满分 12 分)

群论问题:

- a) 试证明有理数群 $(\mathbb{Q}, +)$ 不是循环群。
- b) 令 $(\{e, a, b, ab\}, \cdot)$ 为 Klein 四元群。请给出 $\langle a \rangle$ 的各个陪集。

得 分	
-----	--

六、(本题满分 10 分)

假设 P 是连通图 G 中的一条最长的初级通路(点不重复),且 P 不是回路。试证明 P 的端点不是图 G 的割点。

得 分	
-----	--

七、(本题满分 12 分)

令 $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ 为一正整数序列, 且 $n \geq 2$ 。

a) 若 D 恰好是某个树 T 的各个顶点的度数序列, 试证明

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$$

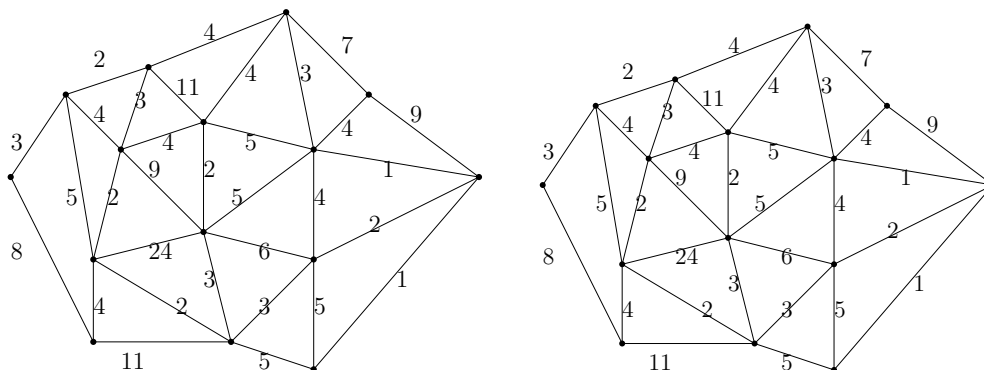
b) 反过来, 试证明: 若 D 满足上式, 则存在一个树 T , 使得 D 恰好是 T 的各个顶点的度数序列。

c) 假设 D 满足上式。试证明: 可将 D 中各整数划分为两个序列 S_1, S_2 , 使得 S_1 中正整数之和与 S_2 中正整数之和相等。

得 分	
-----	--

八、(本题满分 10 分)

画出下图的最小生成树，并给出其权重（左图可作为草稿，所得最小生成树画在右图上，把所选的边描粗）。



得 分	
-----	--

九、(本题满分 12 分)

今有布尔代数 $(B, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$ ，试证明对于任意的 $x, y \in B$ ，以下四个命题等价：

- a) $x \cdot y = x$
- b) $x + y = y$
- c) $x \cdot \bar{y} = 0$
- d) $\bar{x} + y = 1$

草 稿 纸

草 稿 纸