

离散数学 (2023) 作业 XX

周帛岑

221900309

2023 年 5 月 15 日

1 Problem 1

证：不妨假设一共有 n 个顶点

不妨假设其为简单图

考虑到若有一个顶点的度 $\geq n$ ，则一定存在自环或有两条边的顶点集相同且包含这个顶点

此时度为 $0, 1, 2, 3, \dots, n-1$

此时考虑度为 $n-1$ 的顶点，由于度为 0 的顶点存在，显然，其也存在自环或有两点边的顶点集相同且包含这个顶点

与其为简单图相矛盾

故假设不成立，其不为简单图

2 Problem 2

(1): 不妨假设总度为 x ，该条边的度为 y ，一共有 n 个顶点

由题可知，删除这一顶点后总度为 $x-y-z$ ，其中 $0 \leq z \leq y$ ，我们假设其为简单图，则 $y = z$

删除后的顶点平均度为 $\frac{x-2y}{n-1}$

假设 $\frac{x-2y}{n-1} \geq \frac{x}{n}$

我们可以解得 $y \leq \frac{x}{2n}$ ，（对于非简单图，有 $y \leq \frac{x}{kn}$ ， $1 \leq k \leq 2$ ）而平均度为 $\frac{x}{n}$

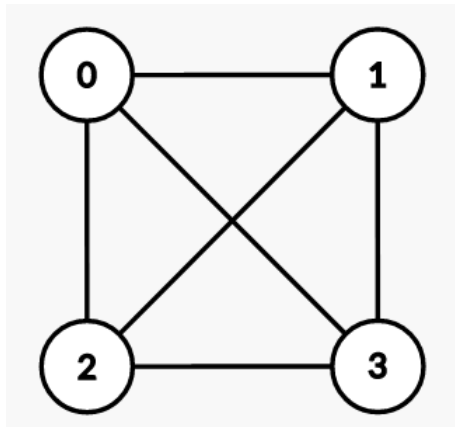
由定义， y 是所有顶点的度中最大的，显然大于 $\frac{x}{n}$ ，则这样的 y 不存在，命题得证

(2): 同理，我们依旧可以解得 $y \geq \frac{x}{2n}$ ，（对于非简单图，有 $y = \frac{x}{kn}$ ， $1 \leq k \leq 2$ ），此时 y 为最小度，可以满足上述条件，故该命题是错误的

3 Problem 3

(1): 无法画出。由 problem 1 可知

(2):



(3): 由题可知，一共六个顶点，其中一个与其余 5 个均相连，其中三个顶点的度为一，即他们仅与该顶点相连

考虑另一个度为四的顶点，去除度为五的顶点，其还需与三个顶点相连，而剩余四个顶点中有三个度为 1，产生矛盾，故无法画出

(4): 同 (3): 当我们进行到度为三的点时，会产生一样的矛盾，故无法画出

4 Problem 4

证：由题可知， $2\epsilon = \sum_{i=1}^n d(v_i)$ ，即为所有的度之和，我们不妨将所有度按从大到小排成一个序列： $\Delta(G), \alpha(G), \dots, \delta(G)$

$$2\epsilon = \Delta(G) + \alpha(G) + \dots + \delta(G)$$

$$\frac{2\epsilon}{\nu} = \frac{\Delta(G)}{\nu} + \frac{\alpha(G)}{\nu} + \dots + \frac{\delta(G)}{\nu} \leq \frac{\Delta(G)}{\nu} + \frac{\Delta(G)}{\nu} + \dots + \frac{\Delta(G)}{\nu} = \Delta(G)$$

$$\text{同理, } \frac{2\epsilon}{\nu} = \frac{\Delta(G)}{\nu} + \frac{\alpha(G)}{\nu} + \dots + \frac{\delta(G)}{\nu} \geq \frac{\delta(G)}{\nu} + \frac{\delta(G)}{\nu} + \dots + \frac{\delta(G)}{\nu} = \delta(G)$$

故命题得证

5 Problem 5

(1): 证：由题可知，假设一共有 n 个顶点

我们知道删除后的顶点平均度为 $\frac{x-2deg(x)}{n-1}$ ，且 $\frac{na-2deg(x)}{n-1} \geq \frac{na}{n} = a$

于是我们可以解得 $\deg(x) \leq \frac{a}{2}$, 命题得证

(2): 证: 由题可知, 不妨设一共 n 个顶点, 我们删去所有度小于 $\frac{a}{2}$ 的顶点

此时, 整个图的平均度大于 a , 而其余顶点的度此时不变或减少, 则此时若仍存在度小于 $\frac{a}{2}$ 的顶点, 则其度平均值不大于 a , 与 (1) 中结论相悖, 故命题得证

6 Problem 6

证: 由题可知, 我们不妨假设此时所有球队最多比赛两场, 此时总度为 $2n$, 而一共有 $n+1$ 条边, 根据握手定理, 总度数应该为 $2n+2$, 与假设矛盾, 所以假设不成立

命题得证

7 Problem 7

证: 由题可知, 任取三个顶点, 由这三个顶点连线形成的度小于等于 4, 而这样的取法一共 $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, 而此时每一对顶点都被重复取了 $(n-2)$ 次, 对于这一对顶点, 我们也相当于计算了两倍, 则总度数小于等于 $\frac{n(n-1)}{3}$, 根据握手定理, 一共有 $\frac{n(n-1)}{6}$ 条边

假设 $\frac{n(n-1)}{6} \leq \frac{n^2}{4}$, 解得 n 恒成立

故原命题得证

8 Problem 8

9 Problem 9

10 Problem 10