# 离散数学 (1-prop-logic)

**姓名：** 魏恒峰 **学号：** hfwei@nju.edu.cn

**评分：** 10 **评阅：** 于

2021 年 3 月 11 日

| |
|---|
| 请独立完成作业，不得抄袭。 |
| 若得到他人帮助, 请致谢。 |
| 若参考了其它资料，请给出引用。 |
| 鼓励讨论，但需独立书写解题过程。 |

# 1 作业（必做部分）

**题目 1 (命题逻辑公式上的数学归纳法 [2 (⋆⋆) 分])**
假设公式 $\alpha$ 中不含 "¬" 符号。请证明, $\alpha$ 中超过四分之一的符号是命题符号。

**证明：** 2

设要证的性质为 $P(\alpha)$。

对公式的结构作归纳。

1. 对所有的命题符号 $A_i$，$P(A_i)$ 显然成立，因为公式 $\alpha$ 里 100% 都是命题符号。

2. 假设对所有公式 $\alpha$ 和 $\beta$,，$P(\alpha)$ 和 $P(\beta)$ 也都成立，设公式 $\alpha$ 的命题符号个数（长度）为 A，公式 $\beta$ 的命题符号个数（长度）为 B，则：

$$A > \frac{1}{4}|\alpha|$$

也即

$$A >= \lfloor \frac{1}{4}|\alpha| \rfloor + 1$$

需要下取整

同理，有

$$B >= \frac{1}{4}|\beta| + 1$$

将上面两式相加，有

$$A + B >= \frac{1}{4}|\alpha| + \frac{1}{4}|\beta| + 2$$

即

$$A + B > \frac{1}{4}(|\alpha| + |\beta|)$$

因此，$P((\alpha * \beta))$ 成立；

又因为

$$A >= \frac{1}{4}|\alpha| + 1$$

有

$$A >= \frac{1}{4}(|\alpha| + 1) + \frac{3}{4}$$

故

$$A > \frac{1}{4}(|\alpha| + 1)$$

□

也即 $(\neg\alpha)$ 的命题符号数量大于其公式长度的 $\frac{1}{4}$, 因此，$P((\neg\alpha))$ 也成立。

综上，由归纳原理，可知对所有公式 $\alpha$，$P(\alpha)$ 都成立。

即对所有不含 “¬” 符号的公式 $\alpha$ ，$\alpha$ 中超过四分之一的符号是命题符号。证毕。

---

**题目 2 (合取范式与析取范式 [3 (⋆) 分])**

我们先引入一个定义。

**定义 1 (合取范式 (Conjunctive Normal Form; CNF))**

我们称公式 $\alpha$ 是**合取范式**, 如果它形如

$$\alpha = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_k,$$

其中, 每个 $\beta_i$ 都形如

$$\beta_i = \beta_{i1} \vee \beta_{i2} \vee \cdots \vee \beta_{in},$$

并且 $\beta_{ij}$ 或是一个命题符号, 或是命题符号的否定。

例如, 下面的公式就是一个合取范式。

$$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge \neg Q$$

将定义 1 中的所有 $\wedge$ 换成 $\vee$, 所有 $\vee$ 换成 $\wedge$, 其余不变, 就变成了析取范式 (Disjunctive Normal Form; DNF) 的定义。本题以 CNF 为例。

将任意公式转化成 CNF 或 DNF 的方法如下:

(1) 先将公式中的联词化归成 $\neg$, $\wedge$ 与 $\vee$;

(2) 再使用 De Morgan 律将 $\neg$ 移到各个命题变元之前 (“否定深入”);

(3) 最后使用结合律、分配律将公式化归成合取范式或析取范式。

请将

$$(P \wedge (Q \to R)) \to S$$

化为合取范式。

**解答:** 3

(1)

$$(P \wedge (Q \to R)) \to S$$

即

$$(P \wedge (\neg Q \vee R)) \to S$$

即

$$\neg(P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee S$$

(2)

即

$$(\neg P \vee \neg(\neg Q \vee R)) \vee S$$

即

$$(\neg P \vee (\neg\neg Q \wedge \neg R)) \vee S$$

即

$$(\neg P \vee (Q \wedge \neg R)) \vee S$$

(3)

即

$$((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee S$$

即

$$(\neg P \vee Q \vee S) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee S)$$

---

**题目 3 (重言蕴含与推理规则 [5 = 3 + 2 (⋆⋆⋆) 分])**

(1) 请使用真值表方法证明

$$\{P \vee Q, P \to R, Q \to S\} \models S \vee R.$$

(2) 请使用重言式所代表的推理规则 (可以任意使用规则, 也可以使用你认为显然成立但课堂上没有列出来的规则, 但需要指明每一步使用了哪条规则) 证明

$$\{P \vee Q, P \to R, Q \to S\} \vdash S \vee R.$$

提示: 你可能需要使用

$$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$$

$$((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma)$$

**解答:**

(1)

真值表如下 (见下页):

3

| P | Q | R | S | P $\vee Q$ | P $\to R$ | Q $\to S$ | S $\vee R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | T | F | T | T | F | T |
| T | T | F | F | T | F | F | F |
| T | F | F | F | T | F | T | F |
| T | T | F | T | T | F | T | T |
| T | F | F | T | T | F | T | T |
| T | F | T | T | T | T | T | T |
| T | F | T | F | T | T | T | T |
| F | T | T | T | T | T | T | T |
| F | T | T | F | T | T | F | T |
| F | T | F | F | T | T | F | F |
| F | F | T | F | F | T | T | T |
| F | T | F | T | T | T | T | T |
| F | F | T | T | F | T | T | T |
| F | F | F | T | F | T | T | T |
| F | F | F | F | F | T | T | F |

由此可见，当 $P \vee Q$ $P \to R$ ，$Q \to S$ 均为真的时候，$S \vee R$ 也为真。
故

$$\{P \vee Q, P \to R, Q \to S\} \models S \vee R.$$

证毕。

2 (2)

因为

$$(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta) \qquad (*)$$

$$(\neg\neg\alpha) \leftrightarrow (\alpha)$$

所以

$$(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \to Q)$$

又

$$((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma) \qquad (+)$$

故

$$((\neg P \to Q) \wedge (Q \to S)) \to (\neg P \to S)$$

因此

$$\{P \vee Q, P \to R, Q \to S\} \to \{\neg P \to S, P \to R\}. \qquad (i)$$

又由 $(*)$ 式，有

$$(\neg P \to S) \leftrightarrow (P \vee S)$$

又因为

$$(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\beta \vee \alpha)$$

所以

$$(P \vee S) \leftrightarrow (S \vee P)$$

再由 $(*)$ 式，有

$$(S \vee P) \leftrightarrow (\neg S \to P)$$

又由 $(+)$，有：

$$((\neg S \to P) \wedge (P \to R)) \to (\neg S \to R)$$

**可以参考slides第40和59页的格式，不使用自然语言。**

最后，根据 $(*)$ 可得：

$$(\neg S \to R) \leftrightarrow (S \vee R)$$

故

$$\{\neg P \to S, P \to R\} \to (S \vee R) \qquad (ii)$$

综合 $(i)(ii)$，有

$$\{P \vee Q, P \to R, Q \to S\} \vdash S \vee R.$$

证毕。

---

# 2 订正

# 3 反馈

你可以写 (也可以发邮件或者使用 “教学立方”)

- 对课程及教师的建议与意见
- 教材中不理解的内容
- 希望深入了解的内容
- $\cdots$