离散数学（2023）作业 XX

周帛岑
221900309

2023 年 5 月 23 日

1 Problem 1

证：必要性显然成立，下证充分性

假设 G 没有包含奇数条边的简单回路，于是任意一顶点一定要经过奇数个点回到自身，不妨取这样的最大简单回路

而我们可以将这一过程中一次经过的顶点进行分类，起点为 0，依次编为 1，2......2n, 于是我们便将 G 的一个子图一分为 2

同理，我们可以对每一个顶点做如此操作，最终可以得到一个二分图

故充分性得证，命题成立

2 Problem 2

证：由 $\kappa(G)=1$，我们不妨找到这个顶点，若去除这个点，则整个图不连通，又该图为一个 r-正则图，这个点可将其可分为两部分，两部分的边之和为 r，不妨设为 r_1,r_2 则显然 $\min(r_1\ r_2)$ 最大为 $\frac{r}{2}$

故只需去除最多 $\frac{r}{2}$ 条边即可，即 $\lambda(G)\leq\frac{r}{2}$

3 Problem 3

(a): 证：由题可知，我们在这条边上插入一个点，显然，这个点把这条边分为 2 部分，对于这条边所连接的两个顶点，其与这个新的顶点满足有两条除顶点外不相交的通路 (一条为这条边的一部分，另一条为之前这个顶点到边的另一点的通路加上这条边的另一部分)

类似的，我们可以证明出新的顶点对原图的任意顶点都满足该条件，由 Whitney 定理，新图也为 2 连通图

故任意顶点与新构造的顶点均共圈，且两条路径一定经过该条边的两部分，即该条边也与任意顶点共圈

(b): 由 a，我们依次在两条边上放入新的顶点，我们有这两个新顶点共圈，于是这两条边也共圈，命题得证

4 Problem 4

证：对于任意 2-边连通图，我们知道至少需要删去两条边，才能使得其变为非连通图，而且显然这两条边一定不能取自同一顶点，于是我们也可以删除这两条边所在顶点，使其变为非连通图，于是这张图也是一个 2 连通图

由 Whitney 定理，显然，该命题成立

5 Problem 5

证：显然，对于该图，我们至少要删去 k 个顶点，才能使其变为非连通图。

假设某一子图经由某一顶点 A 与这 k 个顶点均相连，显然，删去后这一部分变为了一个连通分支

假设删去这 k 个顶点与顶点 A 相连的 k 条边，此时可以将原图分为两个连通分支，否则，无法将这张图分为两个部分 (如果存在 k-1 或更小的可能，则会与其为 k 连通图矛盾)

6 Problem 6

证：我们不妨先删去 k-1 个顶点，故删掉后最小顶点度：$\delta(G) \geq \frac{p-k}{2}$, 又此时一共有 p-k+1 个顶点，且一定不为 1 个，所以最小顶点度大于 0，此时仍为连通图

故 G 为一个 k-连通图

7 Problem 7

证：由题可知：m > $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ - (n+1)

又 $\frac{n(n-1)}{2}$ 为一个完全图，至少需要删去 n-1 条边才能使其变为非连通图，即边数最多为 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$，又 m>$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, 故 G 为连通的