7. 集合: 函数与偏序 (7-function-partial-order)

姓名: 鲁权锋　　**学号:** 201830168

评分: 20　　**评阅:** 7

2021 年 4 月 22 日

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1　作业 (必做部分)

题目 1 ([7 = 2 + 2 + 3 分] ⋆⋆)

设　$f : A \to B$ 是函数。请证明:

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(2) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

(3) $B_0 \supseteq f(f^{-1}(B_0))$

证明:

(1) 对任意的 $b \in B$:

7

$$
\begin{aligned}
& b \in f(A_1 \cup A_2) \\
\iff & \exists a \in (A_1 \cup A_2).\ b = f(a) \\
\iff & (\exists a \in A_1.\ b = f(a)) \lor (\exists a \in A_2.\ b = f(a)) \\
\iff & b \in f(A_1) \lor b \in f(A_2) \\
\iff & b \in f(A_1) \cup f(A_2)
\end{aligned}
$$

(2) 对任意的 $a \in A$:

$$
\begin{aligned}
& a \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) \\
\iff & f(a) \in B_1 \setminus B_2 \\
\iff & f(a) \in B_1 \land f(a) \notin B_2 \\
\iff & a \in f^{-1}(B_1) \land a \notin f^{-1}(B_2) \\
\iff & a \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)
\end{aligned}
$$

(3) 对任意 $b \in B$:

$$
\begin{aligned}
& b \in f(f^{-1}(B_0)) \\
\iff & \exists a \in f^{-1}(B_0).\ b = f(a) \\
\iff & \exists a.\ f(a) \in B_0 \land b = f(a) \\
\implies & b \in B_0
\end{aligned}
$$

□

题目 2 ([4 = 2 + 2 分] ⋆⋆)
设 $f : A \to B$ 与 $g : B \to C$ 是函数。请证明，

(1) 如果 f 与 g 是满射，则 $g \circ f$ 是满射。

(2) 如果 $g \circ f$ 是单射，则 f 是单射。

证明：
首先 $g \circ f : A \to C$.

4

(1) 对任意 c,

$$\begin{aligned}
&\forall c \in C\\
&\exists b \in B.\ g(b) = c \quad (\text{g 是满射})\\
&\implies \exists b \in B.\ \exists a \in A.\ f(a) = b \wedge g(b) = c \quad (\text{f 是满射})\\
&\implies \exists a \in A. g(f(a)) = c\\
&\iff \exists a \in A.(g \circ f)(a) = c
\end{aligned}$$

此即 $g \circ f$ 是满射。

(2) 对任意 $a_1, a_2 \in A$.

$$\begin{aligned}
&f(a_1) = f(a_2)\\
\iff\ & g(f(a_1)) = g(f(a_2))\\
\iff\ & (g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)\\
\iff\ & a_1 = a_2 \quad (g \circ f \text{是单射})
\end{aligned}$$

因此 f 是单射。 □

题目 3 ([5 分] ⋆⋆⋆)
设 $f : A \to B$ 与 $g : B \to A$ 是函数。请证明，

$$(f \circ g = I_B \wedge g \circ f = I_A) \to g = f^{-1}.$$

5

证明：
首先证明 X 上的恒等函数 I_X 是双射。

(i) 对于任意 $x_1, x_2 \in X$,

$$\begin{aligned}
&I_X(x_1) = I_X(x_2)\\
\iff\ & x_1 = x_2 \quad (\text{因为} I_X(x) = x)
\end{aligned}$$

因此 I_X 是单射。

(ii) 对于任意 b, 均有

$$\begin{aligned}
&b \in X\\
\iff\ & I_X(b) = b
\end{aligned}$$

因此 I_X 是满射。

结合 (i)(ii)，I_X 是双射。

下面证明 f 是双射。
(iii) 因为 $f \circ g = I_B$, 且 I_B 是双射，
所以 $f \circ g$ 是双射，故 $f \circ g$ 是满射，也因此 f 是满射。
$(iiii)$ 因为 $g \circ f = I_A$, 且 I_A 是双射，
所以 $g \circ f$ 是双射，故 $g \circ f$ 是单射，也因此 f 是单射。
结合 $(iii)(iiii)$，f 是双射。

因为 f 是双射，结合

$$g : B \to A \wedge f \circ g = I_B \to g = f^{-1}$$

必有

$$(f \circ g = I_B \wedge g \circ f = I_A) \to g = f^{-1}.$$

□

题目 4 ([4 = 0 + 4 分] ⋆⋆⋆)
一个自反且传递的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序。现令 $\preceq \subseteq X \times X$ 为拟序。

(1) 如下定义 X 上的关系 $\sim$:

$$x \sim y \triangleq x \preceq y \wedge y \preceq x.$$

请证明 ①，$\sim$ 是 X 上的等价关系。

(2) 如下定义商集 $X/\sim$ 上的关系 $\leq$:

$$[x]_\sim \leq [y]_\sim \triangleq x \preceq y.$$

请证明，$\leq$ 是偏序关系。

① 你在 *hw5-relation* 中已经做过这个证明了，不必重做。可以直接在第二问中使用该结论。

证明：

4

(1) pass
(2)
(i) 自反性：
对任意 $x \in X/\sim$,

$$[x]_\sim \leq [x]_\sim = x \preceq x$$

因为 $\preceq$ 在 X 上是自反的，故 $\leq$ 在 $X/\sim$ 上是自反的。
(ii) 反对称性：
对于任意 $x, y \in X/\sim$,

$$\begin{aligned} & [x]_\sim \leq [y]_\sim \wedge [y]_\sim \leq [x]_\sim \\ \iff & x \preceq y \wedge y \preceq x \\ \iff & x \sim y \\ \iff & [x]_\sim = [y]_\sim \quad (\text{因为} \sim \text{是等价关系，且} aRb \leftrightarrow [a]_R = [b]_R) \end{aligned}$$

故商集 $X/\sim$ 上的关系 $\leq$ 是反对称的。
(iii) 传递性：
对于任意 $x, y, z \in X/\sim$,

$$\begin{aligned} & [x]_\sim \leq [y]_\sim \wedge [y]_\sim \leq [z]_\sim \\ \iff & x \preceq y \wedge y \preceq z \\ \implies & x \preceq z \quad (\text{因为} \preceq \text{是传递的}) \\ \iff & [x]_\sim \leq [z]_\sim \end{aligned}$$

故商集 $X/\sim$ 上的关系 $\leq$ 是传递的。

结合 $(i)(ii)(iii)$，$\leq$ 是商集 $X/\sim$ 上的偏序关系。 $\square$