

离散数学 (2023) 作业

吴煜

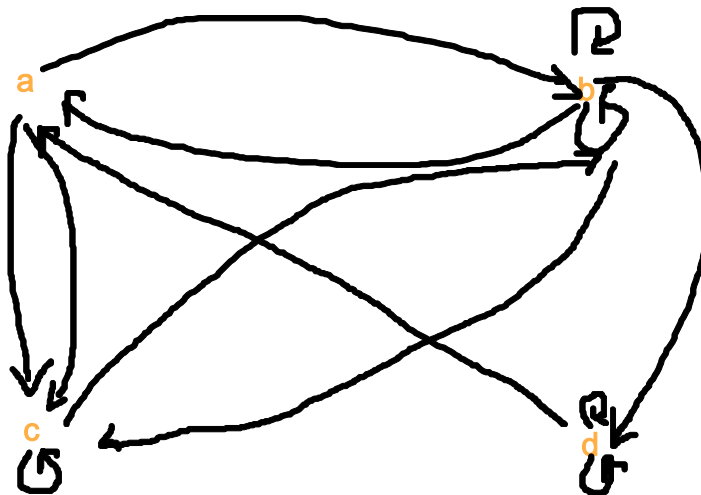
221900360

2023 年 5 月 17 日

95

Problem 1

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Problem 2

$$a) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore D = BB^T - A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore D = BB^T - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2) D 是原来图的拉普拉斯矩阵

矩阵 D 与原图的关系是： D 的每个元素对应于原图中两个节点之间的边的数量，包括自环的数量

度矩阵

Problem 3

对于左图邻接矩阵有 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

对于右图补图邻接矩阵有 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

由题：对 A 进行初等变化后可成为 B ：

$$r_1 \leftrightarrow r_2$$

$$r_3 \leftrightarrow r_4$$

$$r_4 \leftrightarrow r_8$$

$$r_5 \leftrightarrow r_6$$

$$r_6 \leftrightarrow r_7$$

$$r_7 \leftrightarrow r_8$$

\therefore 证明 [下左图] 和 [下右图的补图] 同构

Problem 4

1) 3 个

2) 7 个

3) ~~2 个~~



Problem 5

由题: G, \overline{G} 的相同顶点边数相同

$\therefore G \cap \overline{G}$ 是 ν 阶的完全图, 且 G 为简单图

$\therefore |E(G)| = |E(\overline{G})|, G \cong \overline{G}$

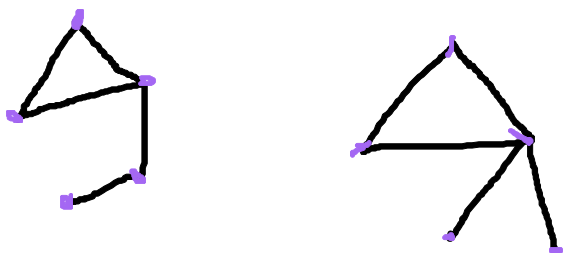
$\therefore |E(G)| + |E(\overline{G})| = \frac{|G|(|G|-1)}{2} = \frac{\nu(\nu-1)}{2}$

$\therefore |E(G)| = \frac{\nu(\nu-1)}{4} \quad \therefore |E(G)| \in \mathbf{Z}$

$\therefore \nu \equiv 0, 1 \pmod{4}$

Problem 6

1)



2)



Problem 7

1) \therefore 为 k -正则图

任意取一个顶点 $\nu, |\nu| = k$, 则再取与其相邻的 k 个顶点

\therefore 围长为 4

\therefore 所取得的 k 个顶点之间无边连接, 否则会形成最短回路为 3 的 C_3 , 矛盾

\therefore 在所取得的 k 个顶点中再取一个顶点, 找出与其相邻的除了 ν 之外的 $k-1$ 个顶点

\therefore 此 $k-1$ 个顶点不包含此前取的一共 $k+1$ 个顶点

$\therefore (k-1) + k + 1 = 2k$

\therefore 围长为 4 的 k 正则图至少有 $2k$ 个顶点

由题: 若顶点为 $2k$, 则必须遵循上述取顶点的方法

\therefore 此种取顶点的方法具有唯一性

\therefore 在同构意义下之存在一个顶点为 $2k$ 的图满足围长为 4 且为 k -正则图的条件

