65

离散数学（2023）作业 22

张波

221900326

2023 年 5 月 17 日

1 Problem 1

−10

2 Problem 2

1.

(a) 对于 $K_{3,2}$，其邻接矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

其关联矩阵为：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

计算可得：

$$D = BBT - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) 对于 $K_{2,3}$，其邻接矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其关联矩阵为：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

计算可得：

$$D = BBT - A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

2.

矩阵 D 是该图的拉普拉斯矩阵 L，即 $D = L$。

这是因为拉普拉斯矩阵可以表示为度矩阵和邻接矩阵的差，即 $L = D - A$。因此，我们可以将 D 表示为 $D = BBT - A$，其中 B 是该图的关联矩阵，从而得出 $D = L$。

3 Problem 3

−10

4 Problem 4

1.3 个

2.62 个

−10

3.2 个

5 Problem 5

当 G 是自补图时，G 中每个顶点对应于 $\overline{G}$ 中的唯一顶点，且它们的度数之和为图的最大可能度数。因此，G 和 $\overline{G}$ 的顶点数都是偶数。此外，如果 G 中有 $2k$ 个顶点，则 G 中的边数为 $k(2k-1)/2$，G 和 $\overline{G}$ 中共有 $2k(2k-1)$ 条边，每条边恰好在其中一张图中出现，因此 $k(2k-1)$ 为偶数，即 k 和 $2k-1$ 的奇偶性相同。而 k 和 $2k$ 均为偶数，因此 $2k-1$ 为奇数，即 k 为奇数。因此，$V = 2k \equiv 2 \pmod 4$。同理可得，如果 G 中有 $2k+1$ 个顶点，则 $V = 2k+1 \equiv 1 \pmod 4$。

6 Problem 6

1)

同构不变量要求顶点数为 5，边数为 5，且存在一个子图同构于 K_3。我们可以构造一个图 G_1，其顶点集为 $\{1,2,3,4,5\}$，边集为 $\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\},\{4,5\},\{5,1\}\}$。其中 $1,2,3$ 构成了 K_3。我们可以构造另一个图 G_2，其顶点集和边集与 G_1 相同，但没有任何子图同构于 K_3。

画图

2)

同构不变量要求度序列为 $(2,2,2,2,2,2,2)$。我们可以构造一个图 G_1，其顶点集为 $\{1,2,3,4,5,6,7\}$，边集为 $\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,6\},\{3,7\}\}$。我们可以构造另一个图 G_2，其顶点集和边集与 G_1 相同，但添加了边 $\{4,7\}$ 和 $\{5,6\}$，使得度序列不同。

7 Problem 7

给定一个围长为 4 的 k 正则图 G，如果它有 v 个顶点，那么每个顶点的度数都是 k，因此有 $vk/2$ 条边。考虑它的补图 $\overline{G}$，如果它也是 k 正则图，则 $\overline{G}$ 也有 v 个顶点和 $vk/2$ 条边。因为 G 的围长为 4，所以 $\overline{G}$ 没有三角形，即它的最大独立集大小至少为 2。因此，G 和 $\overline{G}$ 有至少 $2v$ 个顶点。由于 G 和 $\overline{G}$ 同构，它们的顶点数相同，因此 $v \geq 2k$。对于恰有 2k 个顶点的图，由于它是 k 正则图，它的补图也是 k 正则图。由于它的围长为 4，它没有三角形，因此它是一个二分图，其左部有 k 个顶点，右部也有 k 个顶点。因此，这样的图在同构意义下唯一。