9. 图论: 路径与圈 (9-paths-cycles)

姓名: 鲁权锋　　**学号:** 201830168

评分: 19　　**评阅:** 肖江

2021 年 5 月 6 日

请独立完成作业，不得抄袭。
若得到他人帮助, 请致谢。
若参考了其它资料，请给出引用。
鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1　作业（必做部分）

题目 1 ([3 分] ⋆⋆⋆)
设 $G = (V, E)$ 是无向图 (不一定是简单无向图), 其中 $|E| = m$。请证明[1]，

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m.$$

[1] 这也说明了, G 中度数为奇数的顶点数目为偶数。

证明:
因为每条边均与两个顶点相邻，即每条边均对应其两个关联顶点的各一个度数，即每条边的存在都会对应该图的总度数的两个度数。

又当该图不存在边时总度数和为 0. 因此具有 m 条边时，总度数和为 $2m$。此即 $|E| = m$ 时，必有

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m.$$

✓

□

题目 2 ([4 分] ⋆⋆⋆)
请证明: 每个长度为奇数的闭道路 (closed walk) 都包含一个长度为奇数的圈 (cycle)[2]。

[2] “长度” 就是所含边的条数。

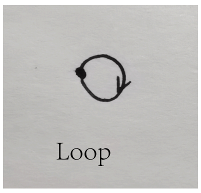
(提示: 可用数学归纳法。如果你使用数学归纳法, 请注意数学归纳法的书写规范。)

证明:
可以将原命题转化为: 每个长度为 $2n-1 \quad (n \geqslant 1)$ 的闭道路 (closed walk) 都包含一个长度为奇数的圈 (cycle).

下面对自然数 $n (n \geqslant 1)$ 做归纳。

(i) 基础步骤:

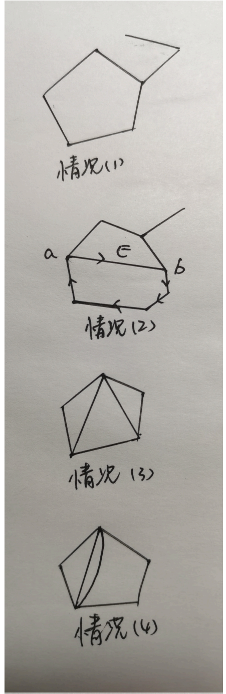
$n = 1$ 时，则该图是一个 Loop. 因此该图必存在一个长度是 1 的圈（如右图）。

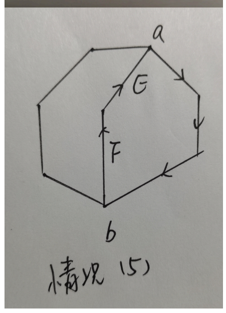


(ii) 归纳假设:

假设 $n = k$ 时，每个长度为 $2k-1$ 的闭道路都包含一个长度为奇数的圈（不妨记为 A）.

-1
情况讨论不全
一个闭道路可以含有多个圈





(iii) 归纳步骤：

$n = k+1$ 时，可以视作在 (ii) 的那长度为 $2k-1$ 的闭道路上加两条边。

下面分情况讨论（为方便论述，将边两端顶点（不重合），且均在 A 上称作该边在 A 的内侧，除此之外的边均称作在外侧）：

(1) 这两条边都加在 A 的外侧：

此时 A 的长度仍为奇数，则题设成立。

(2) 这两条边有一条加在 A 的外侧，有一条边加在内侧：

由 (1) 可知，在外侧的边对 A 不影响，下面重点说明加在内侧的边（不妨将该边的两个顶点记为 a,b，并记该边为 E）。

A 被 a 和 b 分成两条长度一奇一偶（奇数 + 偶数 = 奇数）的路径（如右图所示），且这两条路径加上 E 后就分别形成了长度为一偶一奇的圈。

因此，该情况下，也必存在含一个长度为奇数的圈。

(3) 这两条边都加在 A 内侧，且该两条边的顶点都不重合，或者重合的顶点在 A 上：

由 (2) 可知每次加完内侧的边之后都必然存在一个长度为奇数的圈，操作两次也必然仍存在一个长度为奇数的圈。

(4) 这两条边都加在 A 内侧，且该两条边两个顶点重合：

这种情况和情况 (2) 相同。

(5) 这两条边都加在 A 内侧，且该两条边有且仅有一个顶点重合，且该顶点不在 A 上（不妨将该两条边在 A 上的两个顶点记为 a,b，并记该边为 E，F）：

由 (2) 可知，A 被 a 和 b 分成两条长度一奇一偶（奇数 + 偶数 = 奇数）的路径，这两条路径加上 E 和 F 后也分别形成了长度为一奇一偶的圈。

因此，该情况下，也必存在含一个长度为奇数的圈。

综上，无论何种可能性，，每个长度为 $2k+1$ 的闭道路都必然包含一个长度为奇数的圈。

因此，由归纳原理，知对所有自然数均成立。

此即每个长度为 $2n-1 \quad (n \geqslant 1)$ 的闭道路 (closed walk) 都包含一个长度为奇数的圈 (cycle).

即每个长度为奇数的闭道路 (closed walk) 都包含一个长度为奇数的圈 (cycle).

□

题目 3 ([4 = 2 + 2 分] ⋆⋆⋆)

设 G 是一个简单无向图 (undirected simple graph) 且满足

$$\delta(G) \geq k,$$

其中 $k \in \mathbb{N}^+$ 为常数。请证明:

(1) G 包含长度 $\geq k$ 的路径;

(2) 如果 $k \geq 2$, 则 G 包含长度 $\geq k+1$ 的圈。

(提示: 想想我们在课上使用了两次的那个证明技巧。)

证明:

(1) 下面用反证法证明：

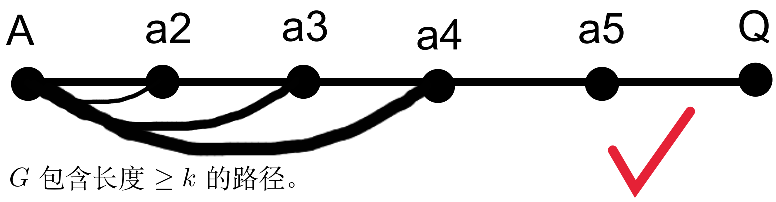
假设 G 只包含长度最长为 $k-1$ 的路径（可能还存在另外的联通区间）. 下面重点讨论该路径的起点（记为 A）。

因为这长度最长为 $k-1$ 的路径中共有 k 个顶点，因此除了 A 之外还剩下 $k-1$ 个顶点，又因为该图是简单图，因此 A 和这 $k-1$ 个顶点至多只能连 $k-1$ 条边，但

$deg(A) \geqslant k$, 因此 A 必然只能和不在该路径上的点（记为 F）相连。但这样会出现一条长度为 k 的路径 (其中 Q 是原路径的终点):

$$F \to A \to a_2 \to a_3 \to \cdots \to Q$$

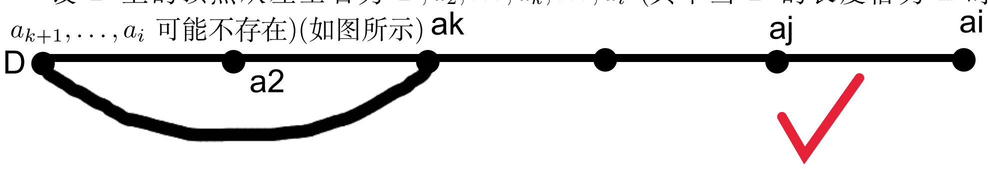
这和 G 只包含长度最长为 $k-1$ 的路径相矛盾。



因此 G 包含长度 $\geq k$ 的路径。

(2) 假设在该图中长度最长的路径是 B（由（1）可知 B 的长度 $\geq k$ ，并设该长度为 i)，设该路径的起点 D。

设 B 上的顶点从左至右为 $D, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_i$ (其中当 B 的长度恰为 k 时 $a_{k+1}, \ldots, a_i$ 可能不存在)(如图所示)



因为该图是简单图，因此 D 和 $a_2, a_3, \ldots, a_k$ 个顶点至多只能连 $k-1$ 条边，此时圈的长度为 k. 但 $deg(D) \geqslant k$, 因此 D 必然只能和 $a_{k+1}, \ldots, a_i$ 其中之一的点或者和不在 B 上的点相连。

(i)D 和 $a_{k+1}, \ldots, a_i$ 其中之一的点（设为 a_j ($k \leqslant j \leqslant i$)）相连时，必然会出现一个长度 $\geq k+1$ 的圈:

$$D \to a_2 \to a_3 \to \cdots \to a_j \to D$$

(ii)D 和不在 B 上的点相连（设为 G）时:

那么会出现一条长度为 $i+1$ 的路径:

$$G \to D \to a_2 \to a_3 \to \cdots \to a_i$$

而这和 B 是该图的最长路径矛盾。

综上，如果 $k \geq 2$, 则 G 包含长度 $\geq k+1$ 的圈。

□

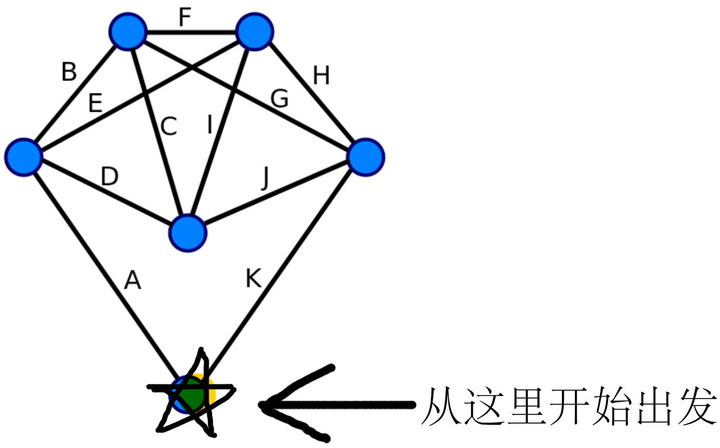
题目 4 ([4 = 1 + 2 + 1 分] ⋆⋆)
考虑下图，记为 G。

(1) G 是否是欧拉图？请说明理由。

(2) 如果是欧拉图，请将其分解为若干圈的组合，并给出一个欧拉回路 ③；如果不是欧拉图，至少需要添加几条边才能使得它成为欧拉图？ （可以自行为顶点编号，也可以使用图上边的编号描述回路。）

(3) (本小题与 G 无关) 假设某图不是欧拉图，但含有欧拉迹，请用一两句话说明如何找出图中的欧拉迹。

③ 注意：在课上，我们用了英文术语 “Eulerian Cycle”。有的教材上使用 “Eulerian Circuit”。 后者更严谨一些，因为它可能包含重复的顶点。



证明:

(1) G 是欧拉图。因为 G 上每个顶点的度数都是偶数。

(2) 可以将该图分成三个圈:

1. 由边 B ,F ,H ,K ,A 组成。
2. 由边 E ,I ,D 组成。
3. 由边 C ,G ,J 组成。

欧拉回路可以如下:

由“星”号的点出发, 路经 $A \to E \to I \to D \to B \to F \to H \to J \to C \to G \to K$, 再回到 “星” 号的点。

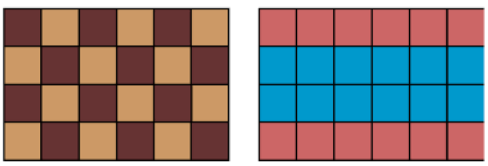
□

(3) 若该图不是欧拉图, 但含有欧拉迹, 说明该图必然有两个度数是奇数的顶点。而如果将这两个顶点去除之后, 剩下的顶点度数都是偶数, 则剩下的图是欧拉图, 因而可以将其分解为若干个圈。

那么在遍历该图时, 可以以其中一个度数是奇数的顶点作为起点, 以另一个度数是奇数的顶点作为终点. 那么在某一条从起点到终点的路径里, 若遇到某个顶点也同时是上述某个圈的顶点, 那么先将该圈递归遍历 (如同遍历欧拉图的方式)。当该路径结束时, 所有的顶点都会遍历完, 且每条边均仅遍历一次, 此路径即是欧拉迹。

题目 5 ([5 分] ★★★★)

请证明: 对于 $4 \times n$ 的棋盘, 不存在一种走法, 使得 “馬” 可以踏遍每个格子一次并回到出发点。



证明:

原题可转换为证明: 对于如下的图 $G = (4n, E)$: 一个 $4 \times n$ 的棋盘, 每个格子视为一个顶点, 若 “馬” 可以从一个顶点跳到另一个顶点, 则这两个顶点之间存在边。

图 G 不是哈密尔顿图。

可以如图所示将黑色的点 (设它们属于点集 S) （由对称性，不妨设为第二行奇数列，第三行偶数列所有的点）从该图上去掉。

以此方式将这 n 个点去掉后，那么会存在至少 n 个孤立点：（如图所示无论 n 为奇偶都成立）第一行奇数列和第四行偶数列所有的点（和它们联通的点都被去掉了）。

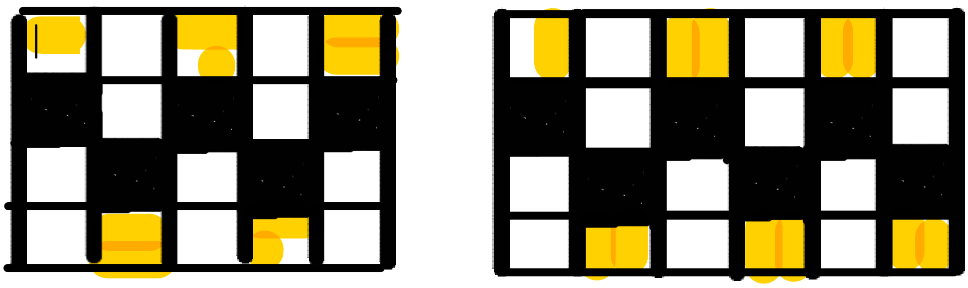
那么，在这个新的图中连通分支至少有 $n+1$ 个（第一行和第四行的 n 个孤立点，以及剩下的区域又至少构成一个连通区域）。

此即:

$$\forall S \subset V.\ c(G-S) > |S|$$

因此 G 不是哈密尔顿图。

即对于 $4 \times n$ 的棋盘，不存在一种走法，使得“馬”可以踏遍每个格子一次并回到出发点。



黄色的点是孤立点

$\square$