南京大学计算机科学与技术系 2018—2019 学年春季学期

"离散数学"期中测验题

（答案要点）

1.（10 分）试用一阶谓词逻辑自然演绎规则论证：

$$\forall x\big(P(x) \vee \exists y P(y)\big) \equiv \exists x P(x).$$

解：　我们只需论证$\forall x\big(P(x) \vee \exists y P(y)\big) \to \exists x P(x)$ 和 $\exists x P(x) \to \forall x\big(P(x) \vee \exists y P(y)\big)$

【按照教材论证书写格式】

1）论证$\forall x\big(P(x) \vee \exists y P(y)\big) \to \exists x P(x)$.　（5 分）

步骤	理由	
1 $\forall x\big(P(x) \vee \exists y P(y)\big)$	前提引入	
2 $P(a) \vee \exists y P(y)$	全称例示，用 1	
3 $P(a) \vee P(b)$	存在例示，用 2	【注意 b 是新变量】
4 $\exists x P(x) \vee \exists x P(x)$	存在引入，用 3	
5 $\exists x P(x)$	化简，用 4	

2)论证$\exists x P(x) \to \forall x\big(P(x) \vee \exists y P(y)\big)$.　（5 分）

步骤	推理	
1 $\exists x P(x)$	前提引入	
2 $P(a)$	存在例示，用 1	
3 $\exists y P(y)$	存在引入，用 2	【从 1 直接换名得到也可以】
4 $P(x) \vee \exists y P(y)$	附加，用 3	【注意 x 是新变量】
5 $\forall x\big(P(x) \vee \exists y P(y)\big)$	全称引入，用 4	

2.（10 分）所有整系数一元二次方程的根的集合是否可数？请证明你的结论.

解：

所有整系数一元二次方程的根的集合**是可数的**。(4 分)

这样的方程最多有 2 个根，只需证明整系数一元二次方程最多有可数个。(2 分)

一个整系数一元二次方程可以表示成 $ax^2 + bx + c = 0$，其中a、b、c 均是整数。这样，

对应到 Z×Z×Z 中的元素（a, b, c）。这个对应是**单射**。(2 分)

由于 Z 是可数的，不难证明 Z×Z×Z 是可数的。(1 分)

因此，整系数一元二次方程最多有可数个。(1 分)

3.（12 分）对于任意一个十进制数，其各位数字之和与其本身模 9 同余，即：

$$763 \equiv 7+6+3 \pmod 9$$

但对于十六进制表示则不然，例如：

$$(763)_{16} \equiv 7 \cdot 16^2 + 6 \cdot 16 + 3 \equiv 1 \neq 7+6+3 \pmod 9$$

(1) 十六进制下对于哪些大于 1 的正整数k，任意数各位相加之和与该数模k同余?

(2) 将你的结论推广到任意b进制数，并给出证明.

解：

1) 若 16=1 (mod k)，则 $16^n = 1 \pmod k$

从而 $a_n 16^n \equiv a_n \pmod k$

因此，于 k=3, 5, 15 满足要求。　(6 分)

2) 对于 b-1 的不等于 1 的正因子 k，b 进制数的各位相加之和与该数模 k 同余。(2 分)

证明要点如下：

b=1 (mod k)　　(2 分)

$a_n b^n \equiv a_n \pmod k$　　(2 分)

4.（10 分）假设集合 A 非空，集合 B 至少有两个元素. 令 $B^A = \{f \mid f: A \to B\}$，即所有从$A$到$B$的函数组成的集合. 试证明：不存在从 A 到B^A的满射. （注意：A、B可能为无限集）

证明（方法一）：

因为$|B| \geq 2$，所以 $|B^A| \geq |2^A|$　　(4 分)

【注意这里利用的是基数算数的结论（A、B可能为无限集），我们并没有教，但学生如果直接用了，也不算错。我们并不期望学生用这个方法；更希望学生自己证明这个结论如下：】

由于集合 B 至少有两个元素，任取B 中 2 个不相等的元素，记为s和t。可构造单射$F: 2^A \to B^A$如下：对于任意的$X \subseteq A$

$$F(X) = f,\ f(x) = \begin{cases} s & x \in X \\ t & x \in A - X \end{cases}$$

显然这是一个单射（类似于集合的特征函数）。

于是有$|B^A| \geq |2^A|$

因为$|A| < |2^A|$，所以$|A| < |B^A|$　（4 分）

所以不存在从 A 到 B^A的满射。　（4 分）

证明（方法二）:　//难度大

使用反证法来证明。假设 G 是一个从 A 到 B^A的满射。(2 分)

因为集合 B 至少有两个元素，任取B 中 2 个不相等的元素，记为 a 和 b。

那么，定义$h \in B^A$ 如下:

$\mathrm{h(x)} = b$ 若$\big(\mathrm{G(x)}\big)\mathrm{(x)} = a$

$\mathrm{h(x)} = a$ 若$\big(\mathrm{G(x)}\big)\mathrm{(x)} \neq a$　（4 分）

因为 G 是满的，所以存在$\mathrm{x_0} \in A$，使得 $\mathrm{G(x_0)=h}$。（2 分）

若 $\mathrm{G(x_0)(x_0)} = a$，则 $\mathrm{h(x_0)} = b \neq a$

若 $\mathrm{G(x_0)(x_0)} \neq a$，则 $\mathrm{h(x_0)} = a$　（2 分）

无论哪种情形，均有 $\mathrm{h(x_0)} \neq \mathrm{G(x_0)(x_0)}$　（2 分）

这与 $\mathrm{G(x_0)=h}$ 矛盾。因此，不存在从 A 到 B^A的满射。

5.（10 分）定义集合{1,2,3}的幂集上的一个二元运算：

$$f(A,B) = A - B \quad (A,B \subseteq \{1,2,3\})$$

(1) f是否为函数？是否为满射？是否为单射？是否可逆？请简单说明理由；

(2) 求$f^{-1}(\{1,3\})$.

解:

（1）记$P = \wp(\{1,2,3\})$, f是$P \times P \to P$的函数，因为对于任意一对$(A,B) \in P \times P$，均有唯一的$f(A,B) = A - B \quad \in P$与之对应。(2 分)

f是满射，因为对于任意的$C \in P$，$f(C,\emptyset) = C$.（2 分）

f不是单射，因为$f(\{1,2,3\},\{1,2\}) = \{3\} = f(\{2,3\},\{2\})$.（2 分）

f不可逆，因为它不是双射。(2 分)

（2）$f^{-1}(\{1,3\}) = \{(\{1,3\},\emptyset),(\{1,2,3\},\{2\})\}$（2 分）

6.（12 分）令D是全集U的一个子集，定义$\mathcal{P}(U)$上的关系R如下：

$$(A,B) \in R \text{ 当且仅当 } A - D = B - D \quad (A,B \subseteq U)$$

(1) 试证明：R是$\mathcal{P}(U)$上的一个等价关系；

(2) 令$U=\{1,2,3,4\}$，$D=\{1,2\}$，试求由R导出的$\mathcal{P}(U)$的划分.

(1) 证明：即证明 R 是$\mathcal{P}(U)$上自反的，对称的，传递的关系。

a)自反性：对于任意$A\in R$，都有 $A-D=A-D$，因此$(A,A)\in R$，R 具有自反性（2 分）

b)对称性：对于任意$(A,B)\in R$，因为 $A-D=B-D$，都有 $B-D=A-D$，因此$(B,A)\in R$，R 具有对称性（2 分）

c)传递性：对于任意$(A,B)\in R,(B,C)\in R$，都有 $A-D=B-D,B-D=C-D$，因此 $A-D=C-D$，有$(A,C)\in R$，因此 R 具有传递性（2 分）

2) $\mathcal{P}(U)$有 16 个元素，所求划分为：(2 分)

$$\left\{\begin{array}{c}\{\{1,2\},\{1\},\{2\},\emptyset\},\\ \{\{1,2,3\},\{1,3\},\{2,3\},\{3\}\},\\ \{\{1,2,4\},\{1,4\},\{2,4\},\{4\}\},\\ \{\{1,2,3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{3,4\}\}\end{array}\right\}$$

7.（12 分）令集合$S=\{a,b,c,d,e,f\}$.

(1) 试问有多少对不同的$A,B\subseteq S$满足$A\cup B=S$ ？（例如：$A=\{a,c\}$，$B=\{b,c,d,e,f\}$）

(2) 若不考虑A,B之间的顺序，又有多少对不同的$A,B\subseteq S$满足$A\cup B=S$ ？

解：

1) 对于每一个$s\in S$，有三种选择 i)$s\in A,s\notin B$，ii)$s\notin A,s\in B$，iii)$s\in A,s\in B$。故共有 $3^6=729$ 种.（8 分）

【复杂的解法：若 A 中元素个数为 k，则 B 中必须包含 S-A 中的 6-k 个元素，其余随意选择 A 中元素。于是所求总数为 $\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\cdot 2^k=(1+2)^6=3^6=729$】

2) 考虑到除了 A=B=S 的情况未重复计数外，其他均重复了一次，因而所求为 $(3^6+1)/2=365$ 种.（4 分）

8.（12 分）某人有 5 枚均匀的硬币，2 枚正常，其余 3 枚系精心伪造：其中两枚两面都是正面，一枚两面都是反面.

(1) 你闭着眼睛，随机取出一枚硬币掷之，求此时向下的一面为正面的概率；

解：令B_H^1表示投掷一枚硬币正面朝下的事件，T_H^1表示正面朝上的事件，HH表示选择了两面正面的硬币，TT表示选择了两面反面的硬币，HT表示你选择了正常的硬币

1）取出全是正面的硬币的概率乘以该种硬币正面朝上的概率，加上取出全是反面的硬币的概率乘以该种硬币正面朝上的概率，加上取出正常硬币的概率乘以该种硬币正面朝上的概率

（2 分）

$$P(B_H^1)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times 1+\frac{1}{5}\times 0=\frac{3}{5}$$

(2) 然后你睁开眼，看到向上的一面是正面，求此时向下的一面为正面的概率（2 分）；

$$P(B_H^1|T_H^1)=\frac{P(B_H^1,T_H^1)}{P(T_H^1)}=\frac{P(HH)}{P(T_H^1)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{2}{3}$$

(3) 然后你再闭上眼，把同一枚硬币再掷一次，求此时向下的一面为正面的概率；（2 分）

$$P(B_H^2|T_H^1)=\frac{P(B_H^2,T_H^1)}{P(T_H^1)}=\frac{\left(\frac{2}{5}\times 1\right)+\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{6}$$

(4) 然后你再睁开眼，看到向上的一面是正面，求此时向下的一面为正面的概率；（2 分）

$$P(B_H^2|T_H^1,T_H^2)=\frac{P(B_H^2,T_H^1,T_H^2)}{P(T_H^2)}$$

$$P(T_H^2)=\left(\frac{2}{5}\times 1\right)+\left(\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$P(B_H^2,T_H^1,T_H^2)=\frac{2}{5}$$

$$P(B_H^2|T_H^1,T_H^2)=\frac{4}{5}$$

(5) 然后你将这枚硬币放在一边，再在余下硬币中随机取一枚掷之，求正面向上的概率；（2 分）

$$1\times\left(\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{21}{40}$$

(6) 最后你把所有硬币放在一起，闭眼随机取三枚掷之，求期望睁开眼后看到正面向上硬币的个数．（2 分）

若取一枚掷之，则向上的一面是正面的事件的概率为$P(T_H^1)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times 1+\frac{1}{5}\times 0=0.6$，其正面向上硬币的个数期望值为$0.6\times 1+0.4\times 0=0.6$ ．根据期望的线性特性，若取三枚掷之，其正面向上硬币的个数期望值为$0.6\times 3=1.8$ ．

9.（12 分）“覆盖（cover）”是偏序集中的重要概念，哈斯图（Hasse diagram）就是通过仅保留用来描述元素之间覆盖关系的边而简化了偏序集的关系图表示.

(1) 试证明：任意有穷偏序集可通过其元素的覆盖关系完全确定；

(2) 哈斯图可视为简化后的关系图. 设R为定义在n元集合A上的偏序关系，R的哈斯图对应的$0-1$矩阵（称为“哈斯矩阵”）为$\boldsymbol{H_R}$，令R对应的原始关系矩阵为$\boldsymbol{M_R}$，试证明：

$$\boldsymbol{H_R} = (\boldsymbol{M_R} - \boldsymbol{I_A}) - (\boldsymbol{M_R} - \boldsymbol{I_A})^2$$

其中$\boldsymbol{I_A} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$为定义在集合$A$上的恒同关系矩阵（单位矩阵）.

（注：$0-1$矩阵的减法运算就是将两个同型矩阵对应各元素求差后再构成同型矩阵，即$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (a_{ij} - b_{ij})$；若对应元素之差小于$0$，则差矩阵的对应元素取$0$）

解：

参考证法：设有穷偏序集$(A,\preccurlyeq)$上的覆盖关系为R_c，以下证$\preccurlyeq = \mathrm{tr}(R_c)$，i.e. $\forall(a,b) \in \preccurlyeq \Leftrightarrow (a,b) \in \mathrm{tr}(R_c)$：（3 分）

1、“$\Rightarrow$”：$\forall(a,b) \in \preccurlyeq$，若$a = b \to (a,b) \in \mathrm{tr}(R_c)$；否则若$(a \prec b) \wedge \neg\exists z(a \prec z \prec b) \to (a,b) \in R_c \to (a,b) \in \mathrm{tr}(R_c)$；又否则若$(\exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in A)(a \prec a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n \prec b) \wedge (a,a_1) \in R_c \wedge (a_1,a_2) \in R_c \wedge \cdots \wedge (a_n,b) \in R_c \to (a,b) \in \mathrm{tr}(R_c)$；因仅存在上述三种情况，故必要性成立；（2 分）

2、“$\Leftarrow$”：$\forall(a,b) \in \mathrm{tr}(R_c)$，若$a = b \to (a,a) \in \preccurlyeq$；否则若$a \prec b \to (a,b) \in \preccurlyeq$；又否则若$(\exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in A)(a \prec a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_n \prec b)$，由于$\preccurlyeq$的传递性，有$(a,b) \in \preccurlyeq$. 因仅存在上述三种情况，故充分性成立；（2 分）

综上，$(a,b) \in \preccurlyeq \Leftrightarrow (a,b) \in \mathrm{tr}(R_c)$. □

(注：因为$\mathrm{tr}(R_c) = \mathrm{rt}(R_c)$，所以先后顺序不影响证明.)

(2) 参考证法：令$\boldsymbol{H_R} = (h_{ij}), \boldsymbol{M_R} = (m_{ij}), \boldsymbol{D} = (\boldsymbol{M_R} - \boldsymbol{I_A}) - (\boldsymbol{M_R} - \boldsymbol{I_A}) \circ (\boldsymbol{M_R} - \boldsymbol{I_A}) = (d_{ij})$

当$i = j$，显然有$h_{ij} = d_{ij} = 0$；（2 分）

当$i \neq j$，$h_{ij} = 1$ iff. x_j覆盖x_i iff. $m_{ij} = 1$且$\vee_{k=1}^{n}(m_{ik} \wedge m_{kj}) = 0$ iff. $m_{ij} - \vee_{k=1}^{n}(m_{ik} \wedge m_{kj}) = 1$ iff. $d_{ij} = 1$ （3 分）

因此$\boldsymbol{H_R} = \boldsymbol{D} = (\boldsymbol{M_R} - \boldsymbol{I_A}) - (\boldsymbol{M_R} - \boldsymbol{I_A})^2$.

如果仅采用文字叙述方式，如“哈斯图省略了自反关系引出的所有的环，因此在原关系矩阵中减去I_A；哈斯图也省略了所有由传递关系引出的边，所以再减去$(M_R - I_A)^2$”，类似如此的非形式化证明如果叙述正确，酌情扣分，建议扣 2 分。