离散数学（2023）作业 XX

周帛岑
221900309

2023 年 4 月 26 日

1 Problem 1

(1): 显然满足结合律，构成半群

单位元存在，为 1，构成独异点

每一个元素 a^n 的逆元为 a^{-n}, 构成群

(2): 显然满足结合律，构成半群

单位元存在，为 1，构成独异点

每一个元素 n 的逆元为 $\frac{1}{n}$, 构成群

(3): 显然满足结合律，构成半群

无单位元，不构成独异点和群

(4): 显然满足结合律，构成半群

单位元存在，为 0，构成独异点

每一个元素 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x$ + a0 的逆元为-a_nx^n - $a_{n-1}x^{n-1}$ - $\cdots$ - a_1x - a0, 构成群

(5): 显然满足结合律，构成半群

单位元存在，为 1，构成独异点

不是每一个元素都存在逆元，不构成群

(6): 显然，U_n 中元素为：1，-1，i，-i

显然满足结合律，构成半群

单位元存在，为 1，构成独异点

1 的逆元为 1，-1 的逆元为-1，i 与-i 互为逆元，构成群

2 Problem 2

(1): 证：

(a*b)*c = a*c = a

a*(b*c) = a*b = a

故满足结合律，且显然，该运算关于 A 封闭

故 S 关于 $*$ 运算构成半群

(2): 当 a = b = c 时，此时 S 构成独异点

3 Problem 3

证：

(a∘b)∘c = a∘c = a

a∘(b∘c) = a∘b = a

故满足结合律，且显然，该运算关于 A 封闭

故此时 <S,∘> 构成一个半群

4 Problem 4

证：

由题可知，G 中存在一个单位元 e，排除后 |G| 为奇数

又 G 构成一个群，每一个元素都存在一个逆元素。不妨假设每一个元素的逆元素都不为其自身，此时剩下的元素一定为偶数个，与排除 e 后 |G| 为奇数矛盾。

故至少存在一个元素，它的逆元为自身，即 g = g^{-1}

5 Problem 5

证：由题可知，a∘a = a，则 a 的左单位元为 a，a 的右单位元也为 a

故 a 的单位元为 a

又 <G,∘> 构成群，存在一个单位元且唯一，故 a 为这个单位元

6 Problem 6

证：对参与运算的元素个数进行归纳

当 n = 2 时，显然无论我们怎么放置括号, 这种嵌套运算的最终结果是不变的

不妨假设当 n≥k 时满足题设

当 n = k+1 时

对于 $a_1 \circ a_2 \circ ...... \circ a_n$，我们可以任意加入一对或两对括号，将其分为两个元素的运算，显然，这样的运算满足结合律。

且剩余的每一部分元素个数均小于 k+1，满足结合律。

综上，这样的运算满足结合律，即无论我们怎么放置括号, 这种嵌套运算的最终结果是不变的

7 Problem 7

证：不妨假设 <G,*> 构成一个群对于 g * h，假设 g * h * a = e

我们已知 g^{-1} * g = e，原式等价于 h * a = g^{-1}

同理，h^{-1} * h = e，原式等价于 a = h^{-1} * g^{-1}

故 $(g * h)^{-1} = h^{-1}$ * g^{-1}

$(g_1 * g_2 * ...... * g_n)^{-1} = g_n^{-1} * ...... * g_2^{-1} * g_1^{-1}$

8 Problem 8

证：∀x,y∈$\mathbb{Z}_{\ltimes}^*$

对于 x×y, 由 gcd(x,n) = gcd(y,n) = 1

则 gcd(x×y,n) = 1

封闭性得证

对于 x×(y×z)

gcd(x,n) = 1 且 gcd(yz,n) = 1，则即原式等价于 gcd(xyz,n) = 1

同理，(x×y) ×z 也等价于 xyz(mod n) = 1

故满足结合律

又 1∈$\mathbb{Z}_{\ltimes}^*$ 且 x×1 等价于 gcd(x×1,n) = 1 即 gcd(x,n) = 1

故 x×1 = x, 1 为单位元

对于任意 a，取 $a^{-1} = a^{\phi(n)-1}$, 此时 a×$a^{-1} = a^{\phi(n)}$, 其满足 $a^{\phi(n)}$ mod n = 1

故每一个元素都存在逆元

综上，构成一个群

9 Problem 9

证：由于运算为普通乘法，故显然满足结合律

单位元存在，为 1，构成独异点

1 的逆元为 1，-1 的逆元为-1，i 与-i 互为逆元，故每一个元素都存在逆元

综上，构成群

10 Problem 10

先考虑必要性，假设 G 为交换群，此时 $(ab)^2$ = abab = a(ba)b = a(ab)b = a^2b^2

必要性得证

下面考虑充分性，若 $(ab)^2 = a^2b^2$，即 abab = aabb

又 G 为一个群，满足结合律，即 a(ba)b = a(ab)b 即 ab = ba

又由于 a 和 b 的任意性，故 G 这个群也满足交换律，为一个可交换群

充分性得证

综上，原命题成立