离散数学（2023）作业 05

周帛岑
221900309

2023 年 3 月 6 日

1 Problem 1

证：

a)：不是，函数中不能出现一个自变量对应多个因变量的关系。

b)：是，函数的定义域为 Z 时，所有结果均落在 R 中，故 R 为函数的陪域，满足 Z→R

c): 不是，对于该函数，当 x 取 ± 2 时，函数不成立，故原函数定义域不为 Z，故不是 Z→R 的函数

2 Problem 2

解：

a)：是

b)：不是，对于 n 取两正负性相反的数，结果相同，不满足单射条件

c)：不是，当 n 取-2 时，原函数不存在，则定义域不为 R，故不可能为 R→R 的双射函数

d)：是

3 Problem 3

解：

a)：$\{1,-1\}$

b):$\{x|-1<x<0$ 或 $0<x<1\}$

a)：$\{x|x<-2$ 或 $x>2\}$

4 Problem 4

证: 不妨设有 x_1 和 x_2 且 $x_1 \neq x_2$, 故 f(x_1)-f(x_2) = a(x_1-x_2), 由 $x_1 \neq x_2$ 且 a0, 即 f(x_1)-f(x_2)$\neq$0, 即 f(x) 满足一对一，故 f(X) 可逆。

下面寻找反函数，令 f(x) = y,x = g(y), 则有

y = a · g(y)+b　　化简有：g(y) = $\frac{(y-b)}{a}$

该函数即为原函数的反函数

5 Problem 5

解：

a)：定义域为 {m，n|(m,n), 其中 m,n$\in Z^+$ 且 m<n}　　值域为{x|x$\geq$1, 且 x$\in Z^+$}

b)：定义域为所有位串　　值域为{x|x$\geq$0, 且 x$\in Z$}

c)：定义域为所有位串　　值域为{x|x$\geq$0, 且 x$\in Z$}

d)：定义域为 Z^+, 值域为 0，1，2，3，4，5，6，7，8

6 Problem 6

解：

a)：对于 ∀m,n∈Z,2m-n 的值显然可取 Z 上所有数，故为满射

b)：对于 ∀m,n∈Z,m+n+1 的值显然可取 Z 上所有数，故为满射

c)：对于 ∀m,n∈Z,|m|-|n| 的值显然可取 Z 上所有数，故为满射

d)：对于 ∀m,n∈Z,2≥-4，无法取到 Z 上所有数，故不为满射

e)：对于 ∀m,n∈Z,m^2-n^2 无法取到所有整数（例如 6），故不为满射

7 Problem 7

证：当 f 为满射时，对于 ∀y∈B, 存在 x∈A 使 f(x) = y, 又 |A| = |B|，A 与 B 中元素个数相同，故若 B 中所有元素均能在 A 中找到原像，且 B 中元素各不相同，则 A 中不能存在两个元素 x_1,x_2，且 $x_1 \neq x_2$ 使 f(x_1) = f(x_2), 即 f 为单射。

当 f 为单射时，∀x_1,x_2∈A，且 $x_1 \neq x_2$, 有 f(x_1)$\neq$f(x_2), 又 |A| = |B|, 即 A 中每个元素能唯一与 B 中的某个元素对应，且 B 中不存在未被对应上的元素，故 f 为满射

8 Problem 8

证:

假设有 $f \circ g = I_Y$,$g \circ f = I_X$

即 f(g(Y)) ≡ g(Y), 又 g 的值域此时为 f 的定义域，g 取 Y 时，g（Y）为 f(X) 中 X 的对应值, 即 X ≡ g(Y), 同理，我们有 g(f(X))≡f(X), 即有 Y≡f(X), 即 $f^-1 = g$,$g^-1 = f$

下面假设有 $f^-1 = g$,$g^-1 = f$

此时我们有 Y ≡ f(X) 和 X ≡ g(Y)，由反函数的定义，对于 ∀X, 有 g(f(X)) 等于 f(X) 中 X 的取值, 即 X, 即 g(f(X))≡g(Y), 又 X ≡ g(Y)，即有 g(f(X))≡X。同理, 我们也可以得到 f(g(Y))≡Y。即有 $f \circ g = I_Y$,$g \circ f = I_X$

9 Problem 9

a):

证：不妨假定 y 在 f(S∪T) 中，且 f(x) = y, 此时 x∈(S∪T)。若 x∈S 时，f(x) = y ∈ f(S), 若 x∈T，f(x) = y ∈ f(T), 即 ∀x∈(S∪T), 均有 f(x)∈(f(S)∪f(T))，此时，f(S∪T)⊆f(S)∪f(T)。

反之，假定 y 在 f(S)∪f(T) 中，且 f(x) = y, 则此时 x∈T 或 x∈S, 即 x∈(S∪T), 此时我们有 f(S∪T)⊇f(S)∪f(T)

b):

证：不妨假定 y 在 f(S∩T) 中，且 f(x) = y, 此时 x∈(S∩T), 即 y 在 f(S) 中，也在 f(T) 中，即 ∀x∈(S∩T), 均有 f(x)∈(f(S)∩f(T))，即 f(S∩T)⊆f(S)∩f(T)

命题得证。

10 Problem 10

证：由 f 存在反函数，故 f 为单射函数，即 ∀a∈A,∃！b∈B, 使得 f(a) = b。

由反函数的定义可知，S 为 f 的一个值域，由 f 为单射，不妨设该值域对应的定义域为 T。

又 S∪$\overline{S}$ = B。∀a∈S , ∃！b∈T, 使得 f^{-1}(a) = b。

对于 $\overline{S}$,不妨设该值域对应的定义域为 M, ∃！b∈ M, 使得 f^{-1}(a) = b。

由于 f 为一单射函数，M∪T = B, 故 M = $\overline{T}$ 即$f^{-1}(\overline{S})$∪$f^{-1}(S) = A$

即 $f^{-1}(\overline{S}) = \overline{f^{-1}(S)}$