80

作业二十一 221900353 方志轩

221900353

May 2023

1 problem1

反驳。该命题不成立。 −5

一个简单图是指没有自环和重边的图。因此，我们只需要构造一个不带自环和重边的无向图 G，满足 G 至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，即可证明该命题不成立。

一个简单的例子是完全图 K_4，即由四个顶点组成的无向完全图。K_4 中每个顶点的度数都为 3，因此各顶点度数均不相同。K_4 也是一个简单图，因为它没有自环和重边。

因此，我们可以得出结论：若无向图 G 至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，并不意味着 G 不是简单图。

2 problem2

a) 反驳。该命题不成立。 −5

考虑如下无向图 G，其中顶点 v_1 的度数最大：

v2 – v1 – v3

此时，v_1 的度数为 2，其它顶点的度数均为 1。图 G 的平均度为 $\frac{2+1+1}{3} =$

1.33$\overline{3}$。

现在，我们删去顶点 v_1，得到如下无向图 G'：

v2 – v3

此时，G' 中每个顶点的度数均为 1。图 G' 的平均度为 $\frac{1+1}{2}=1$。

因此，我们可以看到，删去度数最大的顶点 v_1 使得图的平均度从 1.33$\overline{3}$ 降低到了 1，也就是说顶点平均度减少了。因此，命题不成立。

b) 反驳。该命题不成立。

考虑如下无向图 G，其中顶点 v_1 的度数最小：

v2 – v1 – v3 – v4

此时，v_1 的度数为 1，其它顶点的度数均为 2。图 G 的平均度为 $\frac{1+2+2+2}{4}=1.75$。

现在，我们删去顶点 v_1，得到如下无向图 G'：

v2 – v3 – v4

此时，G' 中每个顶点的度数均为 2。图 G' 的平均度为 $\frac{2+2+2}{3}=2$。

因此，我们可以看到，删去度数最小的顶点 v_1 使得图的平均度从 1.75 增加到了 2，也就是说顶点平均度增加了。因此，命题不成立。

3 problem3

a) 不能作为一个简单图的度序列。

由于每个顶点的度数都小于等于 7，因此该序列对应的简单图 G 中必须有至少一个度数为 0 的顶点。但是，由于 G 中必须至少有一个顶点与其他顶点相邻，因此不存在一个简单图 G 使得其度序列为 $7,6,5,4,3,2,1,0$。

b) 可以作为一个简单图的度序列。

一个简单的例子是一个四元环，即由四个顶点组成的环，每个顶点的度数均为 2。将其中一条边断开，得到如下简单图 G 的度序列为 $3,3,3,3$：

/—|

图? –2

$v1 \quad v2$
|—/
c) 不能作为一个简单图的度序列。

该序列的和为 14，因此对应的简单图 G 中必须有 7 条边。但是，由于该序列中有一个度数为 5 的顶点和两个度数为 1 的顶点，因此这三个顶点之间必须有至少两条边。这意味着，至少有两个顶点的度数大于等于 3，而此时 G 中的边数至少为 9，不足以满足条件。因此，该序列不能作为一个简单图的度序列。

d) 可以作为一个简单图的度序列。

一个简单的例子是由 5 个顶点组成的图 G，其邻接矩阵为：

|0 1 1 1 1|
|1 0 1 1 0|
|1 1 0 0 0|
|1 1 0 0 0|
|1 0 0 0 0|
-3
G 的度序列为 $5, 4, 3, 2, 2$。

4 problem4

考虑无向图 G 中所有顶点的度数之和为 $2E$，因此平均度为 $2E/V$。又因为 $\delta(G)$ 表示图 G 中度最小的顶点的度，因此有：

$$\delta(G) \leq \frac{2E}{V}$$

另一方面，$\Delta(G)$ 表示图 G 中度最大的顶点的度，因此有：

$$\Delta(G) \geq \frac{2E}{V}$$

因此，我们得到：

$$\delta(G) \leq \frac{2E}{V} \leq \Delta(G)$$

即：

$$\delta(G) \leq \frac{2E}{V} \leq \Delta(G)$$

因此，原命题得证。

5 problem5

a)

设 G 有 n 个顶点，总度数为 $2E$，则 $a = \frac{2E}{n}$。

假设 x 的度数为 d_x，则 G 删去 x 后的平均度为：

$$a' = \frac{2E - d_x}{n-1} = \frac{2E}{n-1} - \frac{d_x}{n-1}$$

为了使 $a' \geq a$，我们需要证明 $\frac{2E}{n-1} - \frac{d_x}{n-1} \geq a$，即：

$$2E - d_x \geq an - a$$

代入 $a = \frac{2E}{n}$，得到：

$$2E - d_x \geq 2E - d_x - \frac{2E}{n}$$

化简得到：

$$d_x \leq \frac{2E}{n} = a$$

因此，我们得到：

当 $d_x \leq \frac{a}{2}$ 时，G 删去 x 后平均度至少为 a。

当 $d_x > \frac{a}{2}$ 时，G 删去 x 后平均度小于 a。

因此，原命题得证。

b)

反驳。该命题不成立。 -5

考虑如下无向图 G，其中 $n=4$，平均度为 $a=2$：

v1 – v2

| |

v3 – v4

G 中每个顶点的度数均为 2，因此不存在度数大于 1 的子图。因此，命题不成立。

6 problem6

用反证法。假设每个球队最多比赛了 2 场，那么每场比赛涉及到 2 个球队，因此最多进行了 $2 \times \frac{n+1}{2} = n+1$ 场比赛。这与已知条件矛盾，因此假设不成立。

因此，必然存在一个球队，至少参加了 3 场比赛。原命题得证。

7 problem7

设不包含三角形 K_3 作为子图的 n 阶图为 G。

由于 G 中不包含 K_3 作为子图，因此 G 中每个顶点的度数最多为 2。

设 G 中有 m 条边，则 G 中所有顶点的度数之和为 $2m$。又因为每个顶点的度数最多为 2，因此有：

$$2m \leq 2n$$

即：

$$m \leq n$$

因此，我们得到了一个边数的上界。为了得到更紧的上界，我们考虑计算 G 中三元组 (u,v,w) 的数量，其中 u,v,w 是 G 中的不同顶点，并且 uv 和 vw 均为边。

对于每个顶点 u，它最多有 $deg(u)2$ 个这样的三元组。因此，所有顶点的三元组数量之和为：

$$\sum_{u \in G} deg(u)2$$

又因为 G 中不包含 K_3 作为子图，因此 $deg(u) \leq n-1$。因此：

$$\sum_{u \in G} deg(u)2 \leq \sum_{u=1}^{n} n-12 = nn-12 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$$

因此，G 中三元组的数量不超过 $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$。每个三元组对应一个 K_3，因此 G 中边的数量不超过 $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$。化简得到：

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{n^2-n}{6} \leq \frac{n^2}{4}$$

因此，G 中边的数量不超过 $\frac{n^2}{4}$。原命题得证。