95

离散数学（2023）作业 0

邵宇轩
221900406

2023 年 5 月 13 日

1 Problem 1

使用反证法进行证明：
假设 G 是简单图
即 G 中不存在环与多重边，任意两个顶点之间只存在 0 或 1 条边
$\therefore$ 至少存在两个点，使得 $\mathrm{deg}(\mathrm{v}_1) = deg(v_2)$
而 G：每个顶点的度均不相同
与题意矛盾
$\therefore$ 假设不成立
G 不是简单图

2 Problem 2

(1) 假设 G 有 m 条边，n 个顶点，度的和是 2m
其中具有最大的度的点的度为 k
删去 k 对应的点后 G 中剩余 m - k 条边
平均度为 $\frac{2m-2k}{n-1}$
下面判断 $\frac{2m-2k}{n-1}$ 与 2m / n 的大小关系
$\frac{2m-2k}{n-1} - \frac{2m}{n}$
$= \frac{2m-2kn}{n(n-1)}$
2m -2kn <= 0
$\therefore \frac{2m-2k}{n-1} <= \frac{2m}{n}$
即去掉该点后的平均度不大于原来的平均度
(2) 与 (1) 同理，假设最小的度的点的度为 t
平均度为 $\frac{2m-2t}{n-1}$
$\frac{2m-2t}{n-1} - \frac{2m}{n}$

$= \frac{2m-2tn}{n(n-1)}$
2m -2tn >= 0
$\therefore \frac{2m-2k}{n-1} >= \frac{2m}{n}$
即去掉该点后的平均度不小于原来的平均度

3 Problem 3

(a) 不是，由 Problem 1 的证明可知，这样的简单图不存在
(b) 是，图的形状为一个对角线相连的正方形
(c) 不是，
对于度为 5 的点，该点与其他所有的点均相连接
有三个度为 1 的点，这三个点不与其他点连接
$\therefore$ 在度为 5，4，2 三个点的相互连接中需要满足某一点的度为 4
$\because$ G 是简单图，不存在环和重边
$\therefore$ 不存在
(d) 不存在
图中共有 5 个顶点
$\because$ 是简单图
$\therefore$ 任意一点的度的最大值为 4
不存在度为 5 的点

4 Problem 4

要证明：$\delta(G) <= 2\epsilon/v <= \Delta(G)$
只需证：$\delta(G)v <= 2\epsilon <= \Delta(G)v$
将 G 中各个点的度按照从小到大的顺序排列如下：{ $\delta(G), g_1, g_2....\Delta(G)$ }
其中后一项不小于前一项
$2\epsilon = \delta(G) + g_1 + g_2 + ... + \Delta(G)$
v$\delta(G) = \delta(G) + \delta(G) + \delta(G)...\delta(G)$
v$\Delta(G) = \Delta(G) + \Delta(G) + \Delta(G)...\Delta(G)$
显然有 $\delta(G)v <= 2\epsilon <= \Delta(G)v$
即 $\delta(G) <= 2\epsilon/v <= \Delta(G)$

5 Problem 5

(1) 必要性

假设 G 中有 n 条边，总度数为 na

去掉一点的平均度数位 $\frac{na-2deg(x)}{n-1}$

由题意:$\frac{na-2deg(x)}{n-1} >= a$

整理即可得到：deg(x) <= a/2

充分性：deg(x) <= a/2

则去掉改点后的总度：N >= na - a = (n-1)a

平均度数：$\overline{N}$ >= $\frac{(n-1)a}{n-1}$ = a

充分性得证

(2) 使用数学归纳法进行证明：

设 n 位图 G 的顶点个数

基础步骤：当 n = 2 时，原命题显然成立

归纳步骤：假设当 n = k 时满足：G 有一个最小度大于 a/2 的子图

则当 n = k + 1 时，

情形 1：当 G 中存在一点 v，使得 deg(v) = a

将改点删去，得到有 k 个顶点且平均度为 a 的子图

此时 a > a/2 显然成立

情形 2：不满足情形 1 时，取 G 中度最小的点 gm

由 (1) $\because deg(gm) <= a/2$

$\therefore$ 去掉改点后的子图的平均度至少为 a > $\frac{a}{2}$

归纳步骤成立

综上：原命题得证

6 Problem 6

原命题等价于：在 n 个顶点，n + 1 条边的图中，一定存在一点 v，使得 deg(v) >= 3

现考察最大的度的点，n 条边：

易知：当 n 个顶点与 n 个边构成一个类正 n 边形的图时，n 个点中最大的度 $\Delta(g)$ 最小

此时 $\Delta(g) = 2$

在改图中任意添加一条边

此时得到的 $\Delta(g)$ 仍为 n 个点，n+1 条边构成的图中所有 $\Delta(g)$ 的最小值

而此时 $\Delta(g) = 3$

对于其他任意的 n 个点，n+1 条边构成的图，均有 $\Delta(g) = 3$

$\therefore$ 在 n 个顶点，n + 1 条边的图中，一定存在一点 v，使得 deg(v) >= 3

7 Problem 7

$\because$ 不存在三角形作为子图

$\therefore$ 对于 G 中的每一个顶点 v, 都有 deg(v) <= [n/2]

从而有 deg(v) <= n/2

又 $\because \sum deg(v) = 2m$

$\therefore$ n(n/2) >= 2m

即 $n^2 >= 4m$

$\frac{n^2}{4}$ >= m