离散数学（2023）作业 17-群的结构: 子群与群的分解

90

黄海锋
221900374

2023 年 5 月 3 日

1 Problem 1

-10

A. 当 $H \subseteq K \vee K \subseteq H$ 时，该代数系统属于子群
B,C,D 代数系统属于子群

2 Problem 2

显然，$e \in N(a)$, 即 N(a) 是 G 的非空真子集
$\forall a, b \in N(a), \forall x \in G, ab^{-1}x = a(x^{-1}b)^{-1} = a(bx^{-1})^{-1} = axb^{-1} = xab^{-1} = x(ba^{-1})^{-1}$, 即 $ab^{-1} \in N(a)$, 所以 N(a) 是 G 的子群

3 Problem 3

显然，$xex^{-1} = xx^{-1} = e$, 所以 $e \in xHx^{-1}$
$\forall a, b \in xHx^{-1}$, 则 $a = xh_1x^{-1}, b = xh_2x^{-1}(h_1, h_2 \in H)$,$ab^{-1} = a = xh_1x^{-1}(xh_2x^{-1})^{-1} = xh_1x^{-1}xh_2^{-1}x^{-1} = xh_1h_2^{-1}x^{-1}$, 显然 $h_1h_2^{-1} \in H$, 所以 $ab^{-1} \in xHx^{-1}$

4 Problem 4

$\forall a \in H \cap K, a \in H, a \in K$, 由拉格朗日定理的推论 1 可知：$a^r = e, a^s = e$. 因为 r 与互素，所以 a=e，即 $H \cap K = \{e\}$

5 Problem 5

则 $ab = ba(b \in G)$，即 $a = bab^{-1}$ 不妨令这个二阶元为 a，设 $b \in G$ $bab^{-1}bab^{-1} = ba^2b^{-1} = e$. 显然 bab^{-1} 要么为 e，要么为 a. 假设 bab^{-1} 为 e，则有 $ba = b$, 化简得 $a = e$, 矛盾；所以 $a = bab^{-1}$，即 $ab = ba$

6 Problem 6

G 满足交换律，所以有 $(gh)^k = g^k h^k$. 有因为 gcd(g,h)=1, 所以 gh 是 g 与 h 的最小公倍数，所以有 $|gh| = |g|\,|h|$.

7 Problem 7

$\forall g \in G$,H 的左陪群为 gH, 则有 $gh \in gH(h \in H)$,$gh = ghg^{-1}g = (ghg^{-1})g$, 因为 $ghg^{-1} \in H$, 所以 $gh \in Hg(h \in H)$，Hg 为 H 的右陪群，故 gH=Hg

8 Problem 8

考虑集合 $Z_n^* = \{[m]_n \in Z_n \mid gcd(m,n) = 1\}$ 在乘法下构成的群 G。显然 G 封闭且满足结合律，单位元为 [1]. 对于任意元素 a，有 $a^{-1} = \frac{[1]}{a}$. 设 p 为 a 的阶，则 $a^p \equiv [1](mod\ m)$. 由拉格朗日定理可知：有限群 G 的每个元素的阶均能整除 G 的阶.$p|m-1$, 所以 $a^{m-1} \equiv a^p \equiv 1(mod\ m)$