5. 集合: 关系 (5-relation)

姓名： 鲁权锋　　**学号：** 201830168

评分： 17.5　　**评阅：** D

2021 年 4 月 08 日

请独立完成作业，不得抄袭。 若得到他人帮助, 请致谢。 若参考了其它资料，请给出引用。 鼓励讨论，但需独立书写解题过程。

1 作业（必做部分）

题目 1 (笛卡尔积 [3 分] ★★)
设 $C \neq \emptyset$, 请证明

$$A \subseteq B \iff A \times C \subseteq B \times C.$$

证明：
对任意 a：

$$\cancel{a \in} A \subseteq B \iff a \in A \to a \in B \tag{1}$$

对任意有序对 (a, b)：

$$(a, b) \in A \times C \tag{2}$$
$$\implies a \in A \wedge b \in C \tag{3}$$
$$\implies \quad a \in B \wedge b \in C \ (by(1)(3)) \tag{4}$$
$$\implies (a, b) \in B \times C \tag{5}$$

1.5

即

$$(a, b) \in A \times C \subseteq B \times C \ (by(2)(5))$$

只证明了 A⊆B⇒A×C⊆B×C

因此，即有

$$A \subseteq B \iff A \times C \subseteq B \times C. \qquad \square$$

题目 2 (关系的运算 [4 分] ★★)
请证明,

$$R[X_1 \setminus X_2] \supseteq R[X_1] \setminus R[X_2].$$

请举例说明 $\supseteq$ 不能替换成 $=$。

证明：
对任意的 b：

$$\begin{aligned} b \in R[X_1] \setminus R[X_2] &\iff b \in R[X_1] \setminus b \in R[X_2] \\ &\iff \exists a.(a \in X_1 \wedge (a,b) \in R) \setminus \exists a.(a \in X_2 \wedge (a,b) \in R) \\ &\iff \exists a.((a \in X_1 \wedge (a,b) \in R) \setminus (a \in X_2 \wedge (a,b) \in R)) \\ &\implies \exists a.((a \in X_1 \setminus a \in X_2) \wedge (a,b) \in R) \\ &\implies \exists a.(a \in (X_1 \setminus X_2) \wedge (a,b) \in R) \\ &\implies \exists a \in (X_1 \setminus X_2).(a,b) \in R \\ &\implies b \in R[X_1 \setminus X_2] \end{aligned}$$

混集合运算符，

3

此即

$$R[X_1 \setminus X_2] \supseteq R[X_1] \setminus R[X_2].$$

举例如下：

$$R = \{(x,y) | y = x^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\} \qquad X_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$$

则 $X_1 \setminus X_2 = \{s \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 0\}$ $\quad R[X_1 \setminus X_2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 1\}$
$R[X_1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 1\}$ $\quad R[X_2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$

$$R[X_1] \setminus R[X_2] = \{0\}$$

由此可见，

$$R[X_1 \setminus X_2] \supset R[X_1] \setminus R[X_2].$$

因此 $\supseteq$ 不能替换成 $=$。

□

题目 3 (关系的运算 [4 分] ⋆⋆)
请证明，

$$(X \cap Y) \circ Z \subseteq (X \circ Z) \cap (Y \circ Z).$$

请举例说明，$\subseteq$ 不能换成 $=$。

证明：
对于任意有序对 (a,b)：

$$\begin{aligned} (a,b) \in (X \cap Y) \circ Z &\iff \exists c.((a,c) \in Z \wedge (c,b) \in (X \cap Y)) \\ &\iff \exists c.((a,c) \in Z \wedge ((c,b) \in X \wedge (c,b) \in Y))) \\ &\implies \exists c.((a,c) \in Z \wedge (c,b) \in X \wedge (a,c) \in Z \wedge (c,b) \in Y)) \\ &\implies \exists c.(((a,c) \in Z \wedge (c,b) \in X) \wedge ((a,c) \in Z \wedge (c,b) \in Y))) \\ &\implies (a,b) \in (X \circ Z) \wedge (a,b) \in (Y \circ Z) \\ &\implies (a,b) \in ((X \circ Z) \wedge (Y \circ Z)) \\ &\implies (a,b) \in (X \circ Z) \cap (Y \circ Z) \end{aligned}$$

举例如下：$X = \{(3,2),(5,5)\} \qquad Y = \{(4,2),(5,5)\} \qquad Z = \{(2,3),(2,4),(2,5)\}$

4

$$(X \cap Y) = (5,5) \qquad (X \cap Y) \circ Z = (2,5)$$

$$(X \circ Z) = \{(2,2),(2,5)\} \qquad (Y \circ Z) = \{(2,2),(5,5)\}$$

$$(X \circ Z) \cap (Y \circ Z) = \{(2,2),(2,5)\}$$

即

$$(X \cap Y) \circ Z \subset (X \circ Z) \cap (Y \circ Z).$$

由此可见，$\subseteq$ 不能换成 $=$。

$\square$

题目 4 (关系的性质 [4 分] ★★)
请证明，

$$R \text{ 是对称且传递的} \iff R = R^{-1} \circ R$$

证明：
(i) 下面先证 R 是对称且传递的 $\Longrightarrow R = R^{-1} \circ R$.
对于任意有序对 (a,b),

$$\begin{aligned}
(a,b) \in R^{-1} \circ R &\iff \exists c.((a,c) \in R \wedge (c,b) \in R^{-1}) \\
&\iff \exists c.((a,c) \in R \wedge (b,c) \in R) \\
&\iff \exists c.((a,c) \in R \wedge (c,b) \in R) \ (R \text{ 是对称的}) \\
&\Longrightarrow (a,b) \in R \ (R \text{ 是传递的})
\end{aligned}$$

即

$$R^{-1} \circ R \subseteq R \qquad (1)$$

又对于任意 a,b,c,

$$\begin{aligned}
\cancel{(a,b,c) \in R} &\Longrightarrow (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \\
&\Longrightarrow (a,b) \in R \wedge (c,b) \in R^{-1} \\
&\Longrightarrow (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R^{-1} \ (R \text{ 是对称的}) \\
&\Longrightarrow (a,b) \in R^{-1} \circ R
\end{aligned}$$

即

$$R \subseteq R^{-1} \circ R \qquad (2)$$

由 (1)(2) 即得

$$R = R^{-1} \circ R$$

也即

$$R \text{ 是对称且传递的} \Longrightarrow R = R^{-1} \circ R$$

(ii) 下证 $R = R^{-1} \circ R \Longrightarrow R$ 是对称且传递的.
对于任意 a,b,c,

$$\begin{aligned}
\cancel{(a,c,b) \in R} &\Longrightarrow (a,c) \in R \wedge (c,b) \in R \\
&\Longrightarrow (a,c) \in R \wedge (b,c) \in R^{-1} \qquad (3)
\end{aligned}$$

对于任意有序对 (a,b),

$$(a,b) \in R^{-1} \circ R \iff \exists c.((a,c) \in R \wedge (c,b) \in R^{-1}) \qquad (4)$$

又 $R = R^{-1} \circ R$, 有

$$(a,c) \in R \wedge (b,c) \in R^{-1} \iff (a,c) \in R \wedge (c,b) \in R^{-1}$$

即

$$(b,c) \in R^{-1} \iff (c,b) \in R^{-1}$$

故 R 是对称的。

对于任意有序对 (a,b),

$$\begin{aligned}(a,b) \in R^{-1} \circ R &\iff \exists c.((a,c) \in R \wedge (c,b) \in R^{-1}) \\ &\iff \exists c.((a,c) \in R \wedge (b,c) \in R) \\ &\iff \exists c.((a,c) \in R \wedge (c,b) \in R) \text{ (已经证明}R\text{ 是对称的)} \qquad (5)\end{aligned}$$

4

$$R \iff (a,b) \in R \qquad (6)$$

又 $R = R^{-1} \circ R$, 有 $R = R^{-1} \implies R \qquad (7)$

因此

$$\exists c.((a,c) \in R \wedge (c,b) \in R) \implies (a,b) \in R \quad (by(5)(6)(7))$$

故 R 是传递的。

即 $R = R^{-1} \circ R \implies R$ 是对称且传递的.

综上，结合 $(i)(ii)$,

$$R \text{ 是对称且传递的} \iff R = R^{-1} \circ R \qquad \square$$

题目 5 (等价关系 [5 分] ⋆⋆⋆)

一个自反且传递的二元关系 $R \subseteq X \times X$ 称为 X 上的拟序。现令 $\preceq \subseteq X \times X$ 为拟序。如下定义 X 上的关系 $\sim$:

$$x \sim y \iff x \preceq y \wedge y \preceq x,$$

请证明, $\sim$ 是 X 上的等价关系。

证明:

(i) 先证自反性:

根据定义, 对于任意的有序对 (x,y)，有

$$\begin{aligned}x \sim x &\iff x \preceq x \wedge x \preceq x \\ &\iff x \preceq x\end{aligned}$$

又因为 $\preceq$ 在 X 上是自反的，故 $\sim$ 在 X 上是自反的。

(ii) 下证对称性：

根据定义，对于任意的有序对 (x,y),

$$\begin{aligned}x \sim y &\iff x \preceq y \wedge y \preceq x \\ &\iff y \preceq x \wedge x \preceq y \\ &\iff y \sim x\end{aligned}$$

故 $\sim$ 在 X 上是对称的。

(iii) 最后证传递性：

对于任意的有序对 (x, y) 和 (y, z)，

$$\begin{aligned} x \sim y \land y \sim z &\iff (x \preceq y \land y \preceq x) \land (y \preceq z \land z \preceq y) \\ &\iff (x \preceq y \land y \preceq z) \land (z \preceq y \land y \preceq x) \\ &\implies (x \preceq z \land z \preceq x) \ (\preceq \text{是传递的}) \\ &\implies x \sim z \end{aligned}$$

故 $\sim$ 在 X 上是传递的。

5

综上，结合 $(i)(ii)(iii)$，$\sim$ 是 X 上的等价关系。 □