95

离散数学（2023）作业

吴煜

221900360

2023 年 5 月 16 日

Problem 1

此题即证两个顶点以上简单图各顶点度数相同的正确与否

1)$n = 2, d_1 = d_2 = 1$, 成立

2) 假设 $n = k$ 成立, 则对于 $n = k + 1$:

$\forall iinV, 1 \leqslant deg(i) \leqslant k \qquad \therefore \exists i_1, i_2 \in V, s.t. deg(i_1) = deg(i_2)$

$\exists i \in V, deg(i) = 0$

$\therefore$ 去掉此点

$\therefore$ 情况与 $n = k$ 相同

$\therefore$ 成立

$\therefore$ 由数学归纳法，命题成立

$\therefore$ 得证

Problem 2

由题: 设图原本的度平均值为 k，删去一个顶点后为 k', 原本有 n 个顶点，删去顶点的度为 d

由握手定理：$k' = \frac{nk-2d}{n-1} = k + \frac{k-2d}{n-1}$

1)$\because d \geqslant k$

$\therefore k - 2d < 0$

$\therefore k' < k$

$\therefore$ 从图中删去一个度最大的顶点不会使其顶点平均度增加

2) 当 $k - 2d < 0$ 时，即 $k/2 < d$ 时，从图中删去一个度最小的顶点会使其顶点平均度减少

当 $k - 2d \geqslant 0$ 时，即 $k/2 \geqslant d$ 时，从图中删去一个度最小的顶点不会使其顶点平均度减少

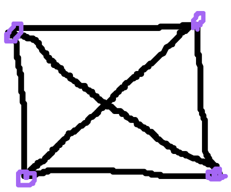
-5

Problem 3

1) 否：

顶点最高度为 7，需存在另外 7 个度不小于 1 的顶点与其相连，序列中只有六个能满足，故不成立

2) 是：



3) 否：

由 Havel-Hakimi 定理得：

$S = \{5, 4, 2, 1, 1, 1\}$

$S_1 = \{3, 1, 0, 0, 0\}$ 不可图

$\therefore$ 序列不能作为简单图的度序列

4) 否:

$S = \{5, 4, 3, 2, 2\}$

$S_1 = \{3, 2, 1, 1\}$

$S_2 = \{1, 0, 0\}$ 不可图

$\therefore$ 序列不能作为简单图的度序列

Problem 4

由握手定理: $2\epsilon = \sum_{x \in V} d(x)$

$\therefore \frac{2\epsilon}{\nu}$ 为所有顶点度的平均值

$\therefore \delta(G) \leqslant \frac{2\epsilon}{\nu} \leqslant \Delta(G)$

Problem 5

a)$\Rightarrow$

$\because deg(x) \leqslant \frac{a}{2}$

$\therefore a^{'} = a + \frac{a - 2deg(x)}{n-1} \geqslant a$

$\Leftarrow$

$\because a^{'} = a + \frac{a - 2deg(x)}{n-1} \geqslant a$

$\therefore \frac{a - 2deg(x)}{n-1} \geqslant 0$

$\therefore deg(x) \leqslant \frac{a}{2}$

2) 如果 G 中存在度小于 $d/2$ 的顶点，则进行删除直到此种顶点不存在，所得子图为 M

如果存在一个度数为 $k < d/2$ 的顶点, 删除它后，剩余图的平均度数为 $[(\sum d_i) - 2k]/(n-1)$

$\because 2kn < (\sum d_i)$

$\therefore (n-1)d < (\sum d_i) - 2k$

$\therefore [(\sum d_i) - 2k]/(n-1) > d$

$\therefore M$ 的平均度数大于 d

$\therefore M$ 即为所求的存在的子图

Problem 6

假设每个球队都为一个顶点，所有球队集合为 V, 同理，所有比赛为连接球队的边 E

$\therefore$ 球队的比赛场数即为其度

$\because n \geqslant 4$

$\therefore$ 由握手定理得:

$\sum_{d_i \in V} d_i = 2(n+1)$

$\because 2(n+1) - 2n = 2 > 0$

$\therefore$ 一定有顶点的度大于 2

$\therefore$ 一定有一个球队比赛了至少 3 场

Problem 7

设 x, y 相邻

$\therefore d(x)+d(y) \leqslant n$, 否则一定有一个顶点与 x, y 构成 K_3

$\because \sum(d(x)+d(y)) \leqslant mn$, 每个 x 点计算了 $d(x)$ 次

$\therefore \sum_{xy\in G}(d(x)+d(y)) = \sum_{x\in V} d^2(x) \geqslant n(\frac{\sum d(x)}{n})^2 = \frac{4m^2}{n}$

$\therefore m \leqslant \frac{n^2}{4}$