* 一。序列
* 1.对称差：属于A∪B但不在A∩B中
* 2.串：
* A为字母表，A\*中的优先序列称作A的字，有时称作A的字符串
* (01Ú1\*) corresponds to {01, 1,11,111,1111,…}
* (0Ú1)\*=0\*∪1\*
* 二。整数
* 1.欧几里得算法：（求最大公约数GCD(最小公倍数LCM)）
* int gcd(int a,int b){
* if(b==0)
* return a;
* else{
* return gcd(b,(a%b));
* }
* 2.LCM(a,b)×GCD(a,b)=ab
* 3.以n为基数的表达式：相当于n进制变大
* 三。矩阵

1.AT指矩阵的转置——令aij=aji即行列互换

2.AB=单位矩阵I，则B是A的逆

3.布尔矩阵运算：符号：（⊙）

布尔积：aik=bkj=1,则cij=1，否则为0（第i行乘以第k列之和为1）

4.矩阵的交并（∧∨）

四。二元运算

1.封闭性

2.德摩根律

A∪B的逆=A逆∩B逆

A∩B的逆=A逆∪B逆

3.单位元e

4.二元运算可能有的性质：

交换、结合、幂等

* 一。命题

1.命题一定有真假

2.真值表

(*p*⇒*q*)∧(*q*⇒*p*)

*p q*

T T

T F

F T

F F

*p*⇒*q*

*q*⇒*p*

T

F

T

T

T

T

F

T

T

F

F

T

3.重言式——永真——（逻辑等价）

谬论、矛盾——永假

不定式——可真可假

4.幂等

p∪p=p，p∩p=p

* 二。证明

1.强数学归纳法

* 从n0到k，p(n)都是正确的，则p(k+1)正确
* 一。排列组合
* 二。鸽巢原理
* 三。递归

1.回溯

在递归关系中不断向前推到，从an用an-1，an-2来表示直到推出关系

2.k阶线性齐次关系



* 一。笛卡尔积与划分

1.A×B={(a,b)|a∈A,b∈B}

A×A=A2

2.数据库中：选择运算选择看行，投影运算看列

3.划分（或商集）：对于A的划分p（p是集合的集合）

* + - A中的每个元素都在划分p中的某个集合中
    - A1和A2是p中的不同元素（即A1、A2是划分中不同的集合），那么A1∩A2=∅
    - 划分中的每个集合称作划分p的块

二。关系

1.aRb,则a与b是R相关的

2.A到B上的一个关系R是A×B的一个子集（由此，R是一个集合）

3.若R是A到B上的一个关系，Dom(R)是其定义域（A的子集）,Ran(R)是值域（B的子集）

4.x的R相关集

R(x)={y∈B| xRy}（B集合中和x 有R相关的所有元素的集合）

5.定理：注意（c）条！



6.关系矩阵：

ai,bj相关，则mij为1，否则为0

三。有向图

1.入度和出度

2.限制：

R是A上的关系，B是A的子集，则R到B的限制是R∩(B×B)

3.道路：

x*R*ny说明x到y有条长度为n的道路

x*R*（无穷）y说明x到y有一条通路，所以R(无穷)有时被叫做R的连通关系

4.MR2=MR圈乘MR

即判断MR2中的mij是否为1，就看原矩阵的第i行和第j列中，是否分别在第k位有一个1（例如：第i行第3列和第j列第3行都是1，则mij为1）

5.xR\*y指xy之间存在通路，即xR∞y

四。关系的性质

1.自反性和非自反性

aRa——自反

2.对称：aRb && bRa

非对称：如果aRb，则bRa不成立【（a,a）不属于R】

反对称：如果存在aRb，且bRa，则b一定等于a【(a,a)属于R】

不是对称的：存在ab，使aRb，但是bRa不成立

3.传递性：aRb,bRc，则cRa

4.连通性：

如果**对称关系**R中存在A中任意一个元素到其它任意一个元素的一条道路，则称R是连通的。

5.a|b指a整除b

6.从矩阵看对称性：

矩阵的左上到右下对角线为分割，左右若对称则R对称；左右不存在两个值在对称相应的位置相等（不存在mik=mkj）且对角线上有1出现，则是反对称；左右不存在两个值在对称相应的位置相等且对角线上无1出现，则是非对称且反对称。

五。对称关系的图

将双向边简化为一条无箭头实线，aRb,bRa则ab间的线叫关系R的无向边，a为邻接顶点。

六。等价关系

1.同余关系：ab对于某个数余数相同

若a≡r(mod 2)&&b≡r(mod 2)

则有a≡b(mod 2)，ab同余

2.等价关系：

关系R是自反的、对称的、传递的

3.定理：

定理1：若aRb当且仅当ab属于划分p中相同的块，则R是A上的等价关系，R称作由p决定的等价关系

引理1：

R是A上的等价关系，a∈A且b∈A，那么aRb当且仅当R(a)=R(b)

定理2：

若R是A上的等价关系，p是所有不同关系集R(a)的集合，a∈A，则p是A的一个划分并且R是由p所决定的等价关系。

4.等价类

若R是A上的一个等价关系，那么R(a)是R的一个等价类。（有时会用[a]来表示R(a)）

七。连接表

vert----tail----head----next（中文书p151）

八。关系运算

1.互补关系，∩∪关系

(a,b)∉R，则(a,b)∈R(上加一横)。在矩阵上的体现就是1，0互换

2.R-1——R的逆

aRb，则有bR-1a。在矩阵上的体现就是沿对角线对称一次。

3.R的关系的性质：

* + - R自反，则R-1也是自反的
    - R、S都是自反的，那么R∩S，R∪S也是自反的
    - R是自反的当且仅当R的补是自反的
    - R是对称的当且仅当R=R-1
    - R是反对称的当且仅当R∩R-1属于Δ（A上的相等关系）
    - R是非对称的当且仅当R∩R-1=∅
    - R是对称的，则R的补和R-1也是对称的
    - R、S都是对称的，那么R∩S和R∪S也是对称的
    - （R∩S）2=R2∩S2
    - R、S均传递，则R∩S也是传递的
    - R、S都是等价关系，则R∩S也是等价关系

九。闭包

1.自反闭包：Δ是A的对角关系，（所有（x,x）的集合），R∪Δ即为T的自反闭包

对称闭包：R∪R-1

传递闭包：R的传递闭包是R∞

Warshall算法

计算R的传递闭包，只需计算(MR)n⊙（n=|A|）

2.合成(S°R)(A1)=S(R(A1))（先后再前）

M S°R=MS⊙MR（类似与矩阵乘法，m11=1🡪MR的第一行和MS中的第一列乘积之和为1）

* 一。函数

1.恒等函数：IA(a)=a,也被写作Δ（对角子集）

2.复合函数：(g°f)(x)=g(f(x))

3.满射：f(x)处处有定义

单射：对一切a≠a’,有f(a)≠f(a’)

双射：一一对应

4.定理：（f-1不一定是个函数）

* + - f-1是A到B的一个函数当且仅当f是单射
    - f-1如果是函数，就一定是单射
    - f-1是满射当且仅当f处处有定义
    - f-1处处有定义当且仅当f是满射
    - IB°f=f
    - f°IA=f
    - 若f是A、B间一一对应，则f-1°f=IA
    - f°f-1=IB

5.取整函数：强取整函数（向下取整）/弱取整函数（向上取整）

6.布尔函数：B={真，假}，A到B的函数就称作布尔函数。

7.散列函数：要分配n个值，取f(n)=n mod 101，f(n)的值就是第n个值被分配到的地址，在此地址下顺次排列每个除以101模相同的指。这样的函数就叫做散列函数。

二。函数的阶（增长）

1.O(g)是g的阶，若g=n^3+n^2+1,则O(g)=O(n^3)

若f=O(g),g=O(f)，则f、g同阶，把关系Θ（作为一个函数，定义域是Z+的子集）定义成fΘg当且仅当f、g同阶

Θ是等价关系

与g(n)=n^3同阶的函数都说成具有Θ(n^3)——表示函数类

2.Θ的大小比较

Θ(lg(n))<Θ(n^k)

Θ(n^a)<Θ(n^b)当且仅当0<a<b

Θ(a^n)<Θ(b^n)当且仅当0<a<b

Θ(n^k)<Θ(a^n)，对任意幂和任意a>1

Θ(rf)=Θ(f)，对于r≠0

Θ(f)≤Θ(g),h为非零函数，则Θ(fh)≤Θ(gh)

Θ(f)<Θ(g),则Θ(f+g)= Θ(g)

三。置换函数

1. ：A到它自身的一个双射称为A的一个置换



p(a1)=a2,p(a2)=a3,…,p(an)=a1，|A|=r，则称p是长度为r的循环置换，简称长度为r的置换。

长度为2的置换叫对换

2.对换的积：每个循环可以写成对换的积

（1，3，5）=（1，5）°（1，3）

能写成偶数个对换的积的叫做偶置换

能写成奇数个对换的积的叫做奇置换

* 一。偏序集

1.定义：A上的关系R是自反的，反对称的，传递的。则R是一个偏序，集合A与R一起称作偏序集，记做（A，R），在不引起混淆的情况下，可以简写成A。

2.对偶：偏序集（A，R）的对偶是（A，R-1）

3.可比性：

如果（A,≤）是一个偏序集，其中元素a、b存在a≤b，则a、b可比。

所有元素都科比的偏序集称作全序集，这样的偏序称作全序，也称A是一个链

4.积偏序：

如果(A,≤)，(B,≤)都是偏序集，则(A×B,≤)也是偏序集，对于A×B，有a、a’∈A，b、b’∈B，a≤a’，b≤b’，则(a,b)≤(a’,b’)

像这样在笛卡尔积A×B上定义的偏序≤称作积偏序

如果(A,≤)，(B,≤)都是全序，则A×B上的字典序≺也是全序

二。哈赛图

1.定义：在偏序的有向图中去掉所有环，去掉所有传递性能推导的边，用点取代圆圈。

三。拓扑排序

1.定义：

对于偏序集(A,≤)需要找一个全序≺，使得这个全序不过是已知偏序a≤b，那么a≺b的一个扩展（即将哈赛图写成一直线，从最底部的元素一圈一圈绕上去）

2.同构：

如果存在一个f:A-->A’是A和A’上的一一对应。则函数f是(A,≤)和(A’，≤)的一个同构，(A,≤)和(A’,≤)是同构的偏序集

（对应原理）如果B的元素相互间或者与A的其它元素间有某种性质，并且这种性质可完全根据关系≤定义，那么B’的元素一定具有由≤’定义的完全相同的性质。（例：a<b,a、b∈A，则有a’<b’,a’、b’是A’中与a、b对应的元素）

同构的偏序集一定有相同的哈赛图

四。偏序集的极值元

1.极小元：A中不存在一个c使c<a，则a为A的一个极小元

极大元：A中不存在一个c使c>a，则a为A的一个极大元

最小元：A中所有元都可以和a比，并且都比a大，则a为A的一个最小元

最大元：A中所有元都可以和a比，并且都比a小，则a为A的一个最大元

2.对于任意一个偏序集，必有至少一个极小元/极大元

对于任意一个偏序集，最多有一个最小元/最大元（或者没有）

* + - 如果偏序集有最大元，则用*I*表示，通常称作单位元
    - 如果偏序集有最小元，则用*0*表示，通常称作零元

3.上下界

对于某个偏序集A和A的子集B，a∈A，如果对所有b∈B，有b≤a，则a是B的一个上界。如果对所有b∈B有a≤b，则a是B的一个下界。

4.LUB(B)：B的最小上界

GLB(B)：B的最大下界

最小上界和最大下界可能不存在，至多有一个

五。格

1.定义：任意两个元素所组成的子集{a,b}都有LUB和GLB的一个偏序集称为格

2.LUB({a,b})=a∨b GLB({a,b})=a∧b

3.同构的格：如果两个格作为偏序集是同构的，那么它们是同构的格。

4.格的性质：

幂等性质 a∨a=a

交换性质 a∨b=b∨a

结合性质 a∨(b∨c)=(a∨b) ∨c

5.特殊类型的格

* + - 有界格：存在最大元*I*和最小元*0*的格
    - 分配格：满足分配率的格，否则是非分配格
    - 有补格：是有界的且每个元素都有一个补

格中元的补：a∨a’=*I* a∧a’=*0* ,则称a’是a的补

六。有限布尔代数

1.定义：

对于Bn，有2^n个元，并且每个元都可以用长度为n的0和1的序列组成。和这样的Bn同构的格都是布尔代数。（这样画出的哈赛图不依赖于特殊集合S而只依赖于n）

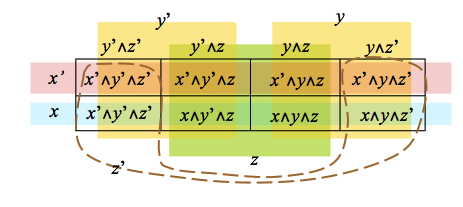
2.布尔代数的性质：

* + - 对合性质：(x’)’=x
    - 德·摩根定律：(x∧y)’=x’∨y’

3.定理：对于任意n≥1，Bn=B×B×…×B（n个因子），其中B×B×…×B被赋予积偏序。

4.布尔表达式和逻辑图、卡诺图

——卡诺图



* 一。树

1.树的定义：

T是A上的一个关系，A中存在一个顶点具有这样的性质：在T中存在唯一一条从v0到A中其余每个顶点的道路，但是没有任何从v0到v0的道路，那么T是一棵树。

2.树的性质：对于树(T,v0)

* + - T中不存在任何回路
    - V0是T的唯一根
    - T中每个顶点(除了v0)入度都为1。V0入度为0
    - T非自反，非对称

3.层、高度：

层：从根开始，从0层数起

高度：树的最大层数叫树的高度

4.有序树：对v0的n个后代排序的树（后代有序的树）

5.n-树：每个顶点最多有n个后代的树

完全n-树：每个定点恰好有n个后代的树

完全二元树=完全2-树

二元树=2-树

子树：(T,v0)是一棵树，且v0∈T，则(T,v)是以v为根的一棵根树，T(v)是以v为始点的T的子树

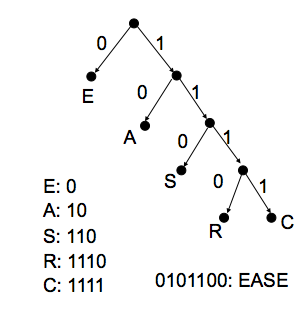
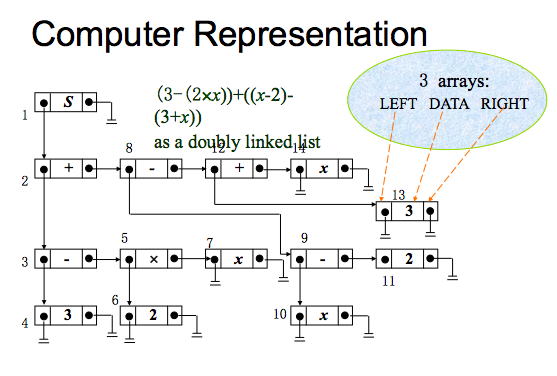
二。标号树

1.概念：标号树：可以用来表示数学运算式的树

中心运算符：最后执行的运算

按位二元树：标号二元树{无论何时出现的后代竖直向下画，否则即为左斜或者右斜}

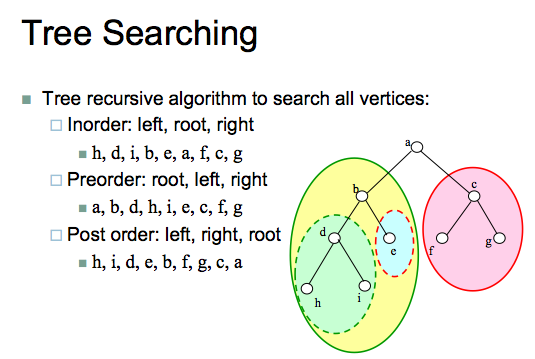
2.双重连接表 哈夫曼编码树



三。搜索树

1.搜索/遍历：依次访问过一棵树的每个顶点

左子树/右子树：T(vL)/T(vR)



2.前序搜索：PREORDER（根🡪左子树🡪右子树）

中序搜索：INORDER（左子树🡪根🡪右子树）

后序搜索：POSTORDER（左子树🡪右子树🡪根）

3.波兰形式：无括号，运算符号在运算数的前或者后

中缀记号：有括号，运算符号在运算数的中间

4.波兰形式：+ab==a+b（运算符在前，看到运算符后跟着两个数字的就可以进行运算替换）【前缀】

逆波兰形式：ab+==a+b（运算符在后，看到两个数字后面跟着一个运算符就可以进行替换）【后缀】

四。无向树

1.定义：树的对称闭包

2.无向边、邻接顶点

3.无向树常常对应多个有向树

4.简单：关系R是一个对称关系，p：v1,v2,v3,…,vn是R中的道路，若p中不存在任何两条边对应于同一条无向边，则称p是简单的。若v1=vn（p是一条回路）则p是一条简单回路。

5.无向树的性质：若R是无向树，则有：

* + - R是连通的和无环的
    - 如果在R中添加任何一条无向边，则新的关系不是无环的
    - 如果在R中去掉任何一条无向边，则新的关系不是连通的
    - R有n个顶点，则R有n-1条边

五。连通关系的生成树

1.定义：

R是A上的一个对称的连通关系，A上的树T是和R有相同定点并且通过从R中删去某些边而获得的树，则称T是R的一棵生成树

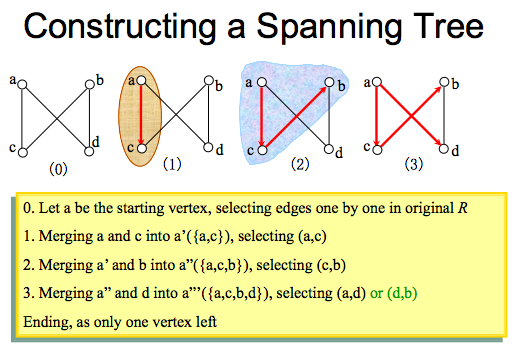
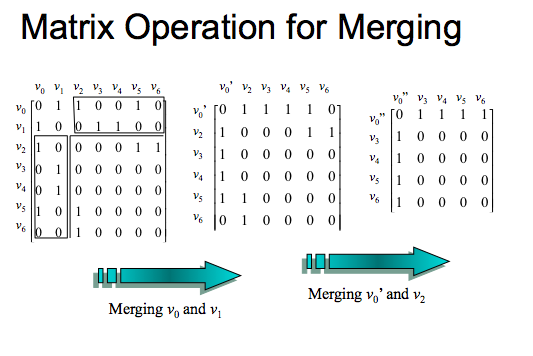
2.无向生成树：生成树的对称闭包

3.合并：

第i、j行合并，在i或j上有1的位置上写1，否则为0，对角线上为0；i、j列合并用同样的方法处理

4.PRIM算法：

将矩阵合并到最后一步，记录每一步合并的顶点，按照合并顺序画出来就是生成树。



5.加权图：每条边上都有权标号的一个图。

6.最小生成树：权最小的生成树。

7.PRIM算法：（贪婪算法）

* + - 选取开始点
    - 选取与开始点最“近”的但是不构成回路的一个点（权最小的边）
    - 不断选取和已经选择的点最近的但是不构成回路的一个点

贪婪算法的矩阵描述

* + - M是带权重的矩阵
    - 选择M中的最小项mij
    - 对ij代表的顶点进行合并，将每一步合并的边记录就是最小生成树。

合并：i、j行/列：mik=（i、j两行/列相应位置上较小的一个数）

* + - * mik（mjk=0）
      * mjk（mik=0）
      * min(mik,mjk)
      * 0（mik=mjk=0）

8.KRUSKAL算法：

* + - 选取所有权最小且不形成回路的边，E={e1}，S-{e1}取代S
    - 在变化后的S中再选取所有权最小且不与已选出的边形成回路的边，继续变化E和S
    - 重复到|E|=n-1
* 一。图

1.图的表示：G=（V，E，γ）

V：边的集合

E：顶点的集合

γ：分配给每条边一个子集{u，w}的函数

2.顶点的度：

* + - 一个顶点的度是以这个顶点为端点的边的数目。一个环对顶点度数的贡献是2。
    - 度的顶点称作孤立顶点。决定一条边的一对顶点叫做邻接顶点。

3.简单回路：

如果顶点序列中没有任何一个顶点的出现多于一次（除非v1=vk），则称这样的道路是简单的。如果v1=vk，则构成一个回路，这样的道路成为简单回路。

4.连通性：

如果图中存在从任意一个顶点到任意其它一个顶点的一条道路，则称图是连通的，否则称为非连通。如果图是非连通的，那么各个连通块称为图的分支。

5.特殊的图：

* + - 每个整数n≥1，设Un表示具有n个顶点且无任何边的图。称Un为n个顶点的离散图。
    - 每个整数n≥1，设Kn表示具有顶点{v1,v2,v3,…,vn}并且对每个i和j都有一条边{vi，vj}的图，也就是Kn中的每个顶点与其余顶点都是相连接的。Kn称为n个顶点的完全图，更一般地，如果图的每个顶点与其余每个顶点有相同的度，那么称图为正则的。（Un也是正则的。）

6.子图与商图：

* + - 子图：

G=（V，E，γ），选择E中边的一个子集E1和V中顶点的一个子集V1，使得V1（至少）包含E1中所有边的端点，那么H=（V1，E1,γ）是G的子图。

* + - 商图：
      * G=（V，E，γ），G中没有多重边，R是V上的等价关系，那么商图GR的顶点是由R所产生的V的等价类。如果[v]和[w]是G中顶点v和w的等价类，在G中[v]里的某个顶点与[w]里的某个顶点是连接的，那么GR中存在从[v]到[w]的一条边。也就是说，GR是把每个等价类中的所有顶点合并成单独的一个顶点，并且把该过程所遇到的任何边结合在一起。
      * Ge是指仅仅合并一条边的图

二。欧拉道路与回路

1.定义：

图G中的一条道路如果包含每条边恰好一次，那么这条道路称作欧拉道路，如果欧拉道路是一条回路，那么就叫做欧拉回路。如果一个图中含有欧拉回路，则这个图称为欧拉图。

2.定理1：

* + - 如果G中有奇度顶点，那么G中不可能存在欧拉回路。
    - 如果G是一个连通图且每个顶点都有偶数度，那么G中存在一条欧拉回路。

定理2：

* + - 如果图G有多于两个顶点是奇数度，那么G中不可能存在欧拉道路。
    - 如果G是连通的而且刚好有两个顶点是奇数度，那么G中存在一条欧拉道路，G中任意一条欧拉道路一定以奇数度的顶点为始点，另一个奇数度顶点为重点。

3.Fleury算法：

（连通图G的桥：如果删除一条边，会导致图G不连通，则G为一座桥）

步骤一：在G中选择一条不是桥的边e1，设它的顶点是v1,v2，π是一条由Vπ：v1,v2和Eπ：e1所指定的道路。从E中删除e1，得到图G的子图G1。

步骤二：假设目前已经构造出Vπ：v1,v2,v3，…，vk和Eπ：e1,e2,…,ek-1，并且所有这些边和所得孤立顶点已经从V和E中被删除，形成图Gk-1。由于vk的度是偶数并且是ek-1的终点，所以一定在Gk-1中存在一条边也以vk作为顶点。如果这样的边不止一条，那么选择一条不是桥的边即可。用vk+1而不是vk表示ek的顶点，把Vπ和Eπ扩展成Vπ：v1,v2,v3，…，vk，vk+1和Eπ：e1,e2,…,ek-1，ek。从Gk-1中删去ek和任何孤立顶点形成Gk。

步骤三：重复步骤二，直到E中没有边为止。

（简单地说，就是从一条不是桥的边开始走，走过一条边就把它擦掉，继续走剩下的图中不是桥的边直到走完为止。）

三。哈密尔顿道路和回路

1.定义：

哈密尔顿道路是包含每个顶点恰好一次的一条道路。哈密尔顿回路是包含每个顶点恰好一次的回路，除非该顶点是始点并且也是终点。

2.定理1：

设G是有n个顶点（n＞2）并且没有自环或者多重边的一个连通图。若G中任意两个不相邻的顶点u和v，它们的度数之和大于或等于n，那么G有一条哈密尔顿回路。

* + - 推论1：如果每个顶点的度数大于或等于½n，那么G有一条哈密尔顿回路。

定理2：

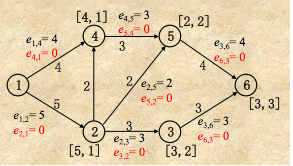
设G的边数是m，如果m≥½(n²-3n+6)，n为顶点数，那么G有一条哈密尔顿回路。

四。运输网络

1.定义：

* + - 容量：每条边上的最大流量
    - 源：入度为0的节点
    - 汇：出度为0的节点
    - 运输网络：
      * 对于图N，存在唯一一个源，通常标号为1
      * 存在唯一一个汇，通常标号为n（n为N的总节点数）
      * N被标号，在边(i,j)上容量Cij是一个非负数
        + 简单起见，假设若(i,j)属于N，则(j,i)就不属于N
    - 最大流：网络的最大流量
    - 流量：从源流出的流的总和也是流入汇的流的总和。
    - 虚拟流：虽然(j,i)不属于N，但是可以假设上面有流，其容量就是(i,j)上的流量（利用虚拟流解决最大流问题）
    - 超容量：Cij是(i,j)上的容量，Fij是(i,j)上的实际流量，超容量eij=Cij-Fij
    - 切割：切割K为边的集合，从源到汇的每条道路至少包含K中的一条边。（一个切割就是把一个有向图“切割”成两块，一块包含源，一块包含汇）如果把切割中的边都删除，那么没有什么可以从源流到汇。
    - 切割的容量：c(K)是K中所有边的容量之和。

2.最大流算法：【标号算法】



3.最大流-最小切割定理：

一个网络的最大流F与其最小切割容量相等。

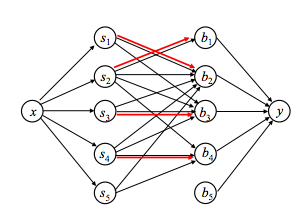
五。匹配问题

1.定义：

* + - 超源：在图中添加出来的源
    - 超汇：在图中添加出来的汇
    - 相容：A🡪B上的关系R，匹配函数M是从A的一个子集到B的一个子集的单射函数，如果M(a)=b，则称a、b匹配。如果M属于R，则称匹配函数M与R相容，如果M(a)=b，则aRb。
    - 最大匹配：若R是A🡪B上的任意一个关系，如果匹配M的定义域尽可能大，则称与R相容的匹配M是最大匹配。
    - 完全匹配：若M的定义域是A，则M是完全匹配。

2.构建匹配的网络：

存在匹配关系的两个节点相连，每条边的容量均定为1。



3.Hall婚姻定理：

设R是A🡪B的一个关系，则存在一个完全匹配M当且仅当对每个X属于A，有|X|≤|R(x)|

六。图的着色

1.定义：

G=（V,E,γ）是没有多重边的一个图，C={c1,c2,c3,…,cn}是任意n中“颜色”的集合，函数f:V🡪C是用n种颜色（或C的颜色）为图G着色。对于顶点v，f(v)是v的颜色。

* + - 正常着色：任意两个邻接顶点v和w有不同的颜色，那么称着色是正常的。
    - 色数：产生图G的正常着色所需颜色的最小数称作G的色数，用x(G)表示。
    - 平面图：凡是平面图，x(G)≤4。
    - 二部图：二部图的顶点能分成两个部分，两部分内部无顶点相连，所有边都在两部分顶点之间。判定：图中无长度为奇数的圈。
    - 临界图：k=x(G),去掉任意一个顶点，x(G-v)<k。（去掉任意一个顶点，所需的颜色就会减少的图）
    - 同胚图：通过反复插入和删去二度顶点，可达同构的图称为同胚图。
* 2.色多项式：

定理1：如果G是有分支G1,G2,…,Gm的一个非连通图，那么PG(x)= PG1(x) PG2(x) PG3(x)···PGm(x)，即每个分支的色多项式的乘积。

定理2：设Ge是去掉e而获得的子图，Ge是合并e而获得的商图，则有PG(x)= PGe(x)-PGe(x)

* 一。半群

1.定义：

* + - 半群：非空集合S以及一个定义在S上的可结合的二元运算\*，用(S,\*)表示半群，或者当\*很清楚时可以记为S，还可以把a\*b看成是a和b的积。如果\*是一个交换运算，则称半群(S,\*)是交换半群。
      * 对于连接二元运算·，(A\*,·)是由A产生的自由半群
    - 单位元：e∈S，对任意a∈S，有e\*a=a\*e=a，则e是唯一的单位元。
    - 幺半群：有单位元的半群(S,\*)
    - 子半群：(S,\*)是一个半群，T是S的一个子集，如果T在运算\*下是封闭的，那么(T,\*)是(S,\*)的子半群。
    - 子幺半群：有单位元的子半群。
    - P(S)指S的所有子集的集合
    - SS是所有函数f：S🡪S的集合

2.定理1：

如果a1,a2,…,an(n≥3)是半群中的任意元素，那么在由元素a1,a2,…,an形成的积中插入有意义的括号，积的结果都是相等的。

定理2：

设(S,\*)和(T,\*’)是分别有单位元e和e’的幺半群，f：S🡪T是一个同构，则有f(e)=e’。

定理3：

设(S,\*)和(T,\*’)是分别有单位元e和e’的幺半群，f：S🡪T是一个同态且是满射，则有f(e)=e’。

定理4：

设f是从半群(S,\*)到(T,\*’)的一个同态，如果S’是(S,\*)的一个子半群，那么f(S’)={t∈T|t=f(s),对于s∈S’}即在f下S’的象是(T,\*’)的一个子半群。

定理5：

如果f是从交换半群(S,\*)到(T,\*’)的一个同态且是满射，那么(T,\*’)也是交换半群。

3.同构和同态：

同构：半群(S,\*)和(T,\*’)，如果f：S🡪T是S到T的一一对应，且S中的所有a，b都有f(a\*b)=f(a)\*’f(b)，则称f：S🡪T是从(S,\*)到(T,\*’)的一个同构。

* + - * 同构的证明：
        + 步骤一：定义函数f：S🡪T,Dom(f)=S
        + 步骤二：证明f是单射
        + 步骤三：证明f是满射
        + 步骤四：证明f(a\*b)=f(a)\*’f(b)

同态：设(S,\*)和(T,\*’)是两个半群，如果一个处处有定义的函数f：S🡪T对S中所有a和b都有f(a\*b)=f(a)\*’f(b)，则称f是从(S,\*)到(T,\*’)的一个同态。如果f还是满射，则称T是S的同态像。

二。半群的积与商

1.定义：

* + - 同余关系：半群(S,\*)上的等价关系R是一个同余关系，如果aRa’,bRb’能推出(a\*b)R(a’\*b’)
      * 证明：
        + 1.证等价关系
        + 2.证同余：aRa’,bRb’=>(a\*b)R(a’\*b’)

2.定理1：

如果(S,\*)和(T,\*’)是两个半群，那么(S×T,\*’’)是一个半群，其中\*’’由(s1,t1)\*’’(s2,t2)=(s1\*s2,t1\*’t2)定义。

定理2：

设R是半群(S,\*)上的一个同余关系，考虑从S/R×S/R到S/R的关系※，它对于S中的a和b，有序对([a],[b])与[a\*b]有关。

* + - * ※是从S/R×S/R到S/R的一个函数，用[a]※[b]表示※([a],[b])，因此，[a]※[b]=[a\*b]
      * (S/R,※)是一个半群

推论1：

设R是幺半群(S,\*)上的一个同余关系，如果通过[a]※[b]=[a\*b]定义S/R中的运算※，那么(S/R,※)是一个幺半群。

定理3：

设R是半群(S,\*)上的一个同余关系，(S/R,\*)是对应的商半群，那么由fR(a)=[a]定义的函数fR：S🡪S/R是一个同态，且是满射，称其为自然同态。

定理4：（同态基本定理）

设f：S🡪T是半群(S,\*)到半群(T,\*’)的一个同态，R是S上的关系且定义为对于S中的a和b，aRb当且仅当f(a)=f(b)那么：

* + - * R是一个同余关系
      * (T,\*’)和商半群(S/R,※)是同构的
* 三。群

1.定义：

* + - 群：

(G,\*)是有单位元e的一个幺半群，并且具有附加性质：对于每个元素a∈G，存在一个元素a’∈G，使得a\*a’=a’\*a=e。因此，群是一个集合G加上G上的一个二元运算\*，使得

* + - * (a\*b)\*c=a\*(b\*c),对于G中的任意元素a,b和c都成立
      * 在G中存在唯一单位元e
      * 对于每个a∈G，都存在其逆元a’∈G
    - 子群：
      * H是G的一个子集
      * G的单位元e属于H
      * 如果a和b属于H，那么ab∈H
      * 如果a∈H，那么a-1∈H

那么，H是G的一个子群。

* + - 阿贝尔群：

如果对于群G中的所有元素a和b都有ab=ba，则称群G为阿贝尔群。

* + - 有限群：

G是具有有限元素的群，G的阶是G中元素的个数|G|。

* + - 三角型的对称群：

(S3,\*)，\*是一个置换。

* + - n个字母的交错群

设An是Sn中所有偶置换的集合，从偶置换的定义得证An是Sn的一个子群，称为n个字母的交错群。

2.定理1：

设G是一个群，则G中的每个元素a在G中仅有一个逆元。

定理2：

设G是一个群，a，b和c都是G的元素，那么

* + - * ab=ac推出b=c(左消去性质)
      * ba=ca推出b=c(右消去性质)

推论1：

设G是一个群且a∈G，定义一个函数Ma：G🡪G满足公式：Ma(g)=ag，那么Ma是单射。

定理3：

设G是一个群，a和b是G的元素，那么

* + - * (a-1)-1=a
      * (ab)-1=b-1a-1

定理4：

设G是一个群，a和b是G的元素，那么

* + - * 方程ax=b在G中有唯一解
      * 方程ya=b在G中有唯一解

定理5：

设(G,\*)和(G’,\*’)是两个群，f：G🡪G’是从G到G’的一个同态。

* + - * 如果e是G的单位元，e’是G’的单位元，那么f(e)=e’
      * 如果a∈G，那么f(a-1)=(f(a))-1
      * 如果H是G的一个子群，那么f(H)={f(h)|h∈H}是G的一个子群

3.乘法表

如果群G有有限元素，那么它的二元运算可以通过某个表给出，通常称作乘法表。

* + - * 用e标号的行一定是

a1，a2,…,an

用e标号的列一定是

a1，a2,…,an

* + - * 群中每个元素b一定在表的每行和每列中恰好出现一次，因此，每一行和列是G中元素a1,a2,a3,…,an的排列，并且每行(每列)决定不同的排列。

四。群的积与商

1.定义：

* + - Z群：例：Z2包含的元素：0，1；Z3包含的元素：0，1，2
    - 陪集：

若H是G的子群，a∈G，由a决定的G中H的左陪集是集合aH={ah|h∈H}，右陪集是Ha={ha|h∈H}

* + - 正规子群：

若G中所有的a都有aH=Ha，则称G的子群H是正规子群

2.定理1：

如果G1和G2是群，那么G=G1×G2是二元运算由(a1,b1)(a2,b2)=(a1a2,b1b2)定义的群。

定理2：

设R是(G,\*)上的一个同余关系，那么半群(G/R,※)是一个群，其中运算※定义在G/R上且满足[a]※[b]=[a\*b]。

推论1：

* + - 如果R是群G上的一个同余关系，那么由fR(a)=[a]给出的函数fR：G🡪G/R是群的同态。
    - 如果f：G🡪G’是从群(G,\*)到(G’,\*’)上的一个同态且是满射，R是定义在G上的关系，满足aRb当且仅当对G中的a和b有f(a)=f(b)那么
      * R是一个同余关系
      * 有f’([a])=f(a)给出的函数f’:G/R🡪G’是从群(G/R,※)到群(G’,\*’)的一个同构且是满射。

定理4：

设N是群G的一个正规子群，R是G上的下述关系：aRb当且仅当a-1b∈N。那么：

* + - * R是G上的同余关系
      * N是关于R的等价类[e]，其中e是G的单位元

从定理3和定理4可以看到，如果G是任意一个群，那么G上的同余关系的等价类总是G的某个正规子群的陪集。反之，G的任意一个正规子群的陪集恰好是关于G上某个同余关系的等价类。所以推论1(b)可以做如下解释：设f是从群(G,\*)到群(G’,\*’)上的同态并且是满射，f的核记做ker(f)，定义为ker(f)={a∈G|f(a)=e’}，那么

* + - * Ker(f)是G的一个正规子群
      * 商群G/ker(f)与G’是同构的

五。其它数学结构