Metode Numerik

Solusi Persamaan Nonlinear

Mahasiswa memahami konsep pencarian solusi persamaan satu variabel

Pokok Bahasan :

- Metode Biseksi
- Metode Fixed point iteration
- Metode Newton dan ekstensinya
- Error analysis untuk metode iteratif

Solusi Persamaan Nonlinear

(Masalah Mencari Akar)

- Definisi
- Klasifikasi metode
  - Solusi analitik
  - Metode Grafik
  - Metode Numerik
    - Metode Bracketing/pengurungan
    - Metode Terbuka
- Notasi Konvergensi

Masalah pencarian akar

Banyak masalah Sain dan Rekayasa disajikan sebagai:

Diberikan fungsi kontinu $f(x)$

Cari nilai r sedemikian sehingga *f(r) =0*

Masalah ini disebut masalah pencarian akar persamaan nonlinear.

Akar Persamaan

Bilangan ***r*** yang memenuhi persamaan disebut akar dari persamaan.

$$\text{Persamaan: } x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x = -18$$

$$\text{Mempunyai 4 akar: } -2,\ 3,\ 3,\ dan\ -1\ .$$

$$\text{i.e., } x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 = (x+2)(x-3)^2(x+1)$$

$$\text{Persamaan mempunyai 2 } \underline{\text{akar sederhana}} \ (-1 \text{ and } -2)$$

$$\text{dan } \underline{\text{akar diulang}}\ (3) \text{ dengan pengulangan} = 2.$$

Nol dari Fungsi

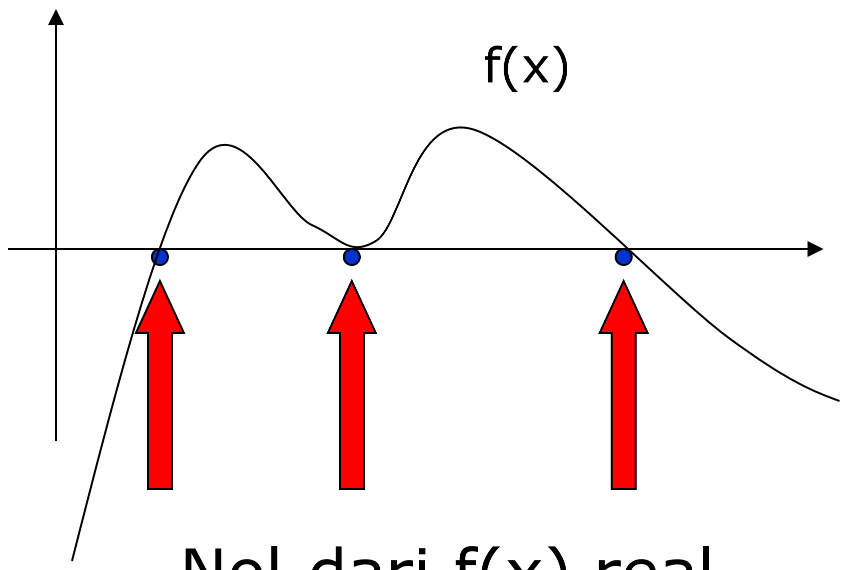
Ambil $f(x)$ fungsi bernilai real dari satu variable real. Terdapat r yang mana $f(r)=0$ disebut Nol dari fungsi.

Contoh:

2 dan 3 adalah Nol dari fungsi $f(x) = (x-2)(x-3)$.

Interprestasi Grafis dari Nol

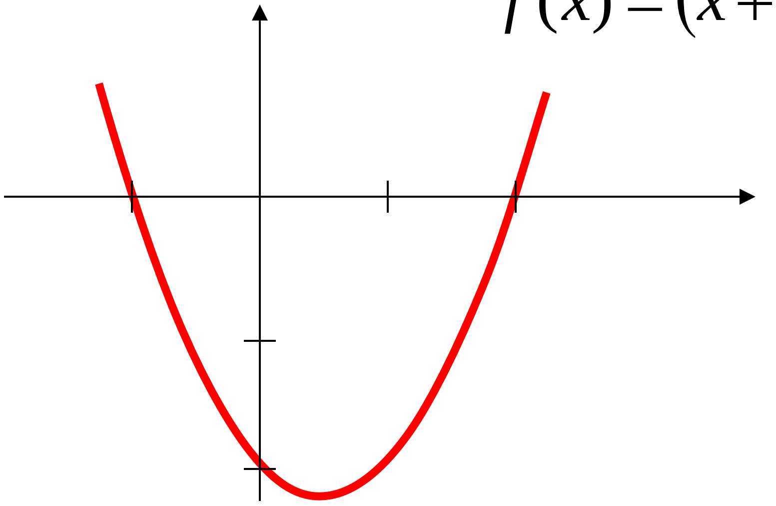
- Fungsi real bernilai nol ***f(x)*** adalah nilai ***x*** pada grafik fungsi memotong (atau melalui) sumbu X.



Nol dari f(x) real

Nol Sederhana

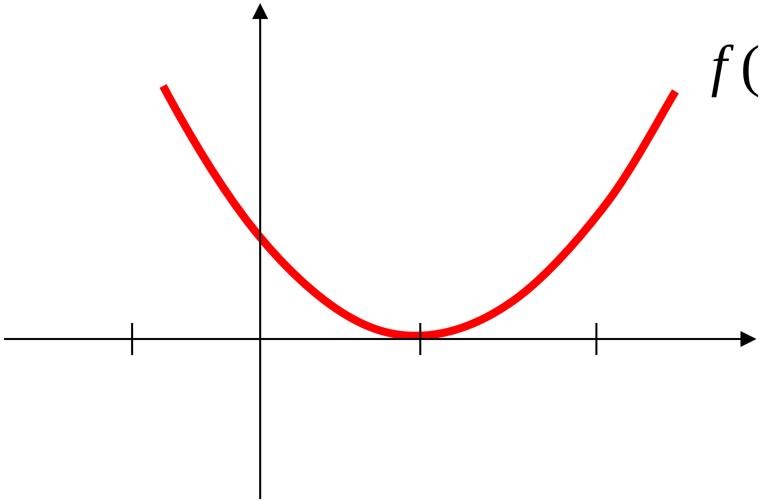
$$f(x) = (x+1)(x-2)$$



$$f(x) = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$$

mempunyai nol dua (satu pada $x = 2$ dan satu pada $x = -1$)

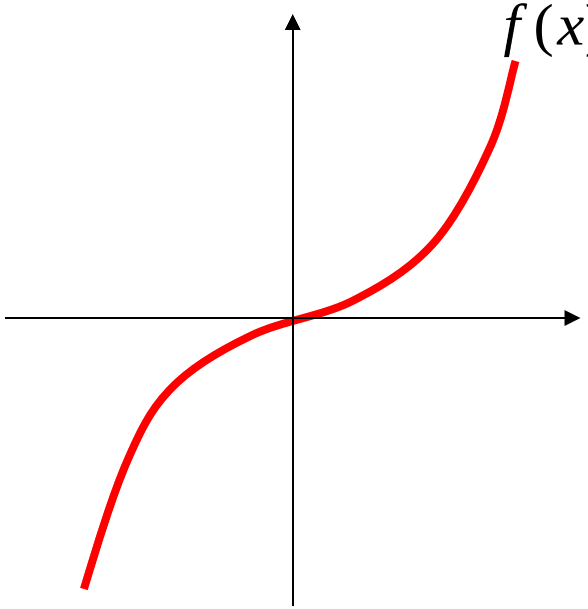
Nol Ganda



$$f(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

mempunyai dobel nol (nol dengan pengulangan = 2) pada $x = 1$

Nol Ganda



$$f(x) = x^3$$

mempunyai nol $= 3$ pada $x = 0$

Fakta

- Setiap polinomial urutan ke-*n* memiliki persis n nol (menghitung nol nyata dan kompleks dengan perulangan mereka).
- Setiap polinomial dengan urutan aneh memiliki setidaknya satu nol nyata.
- Jika fungsi memiliki nol pada ***x* = *r*** dengan sejumlah ***m*** maka fungsi dan turunan pertama *(**m-1**)* adalah nol pada **x = r** dan turunan ke m pada **r** bukan nol.

Akar Persamaan & Nol dari Fungsi

Diberikan persamaan :

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x = -18$$

Pindah semua suku ke satu sisi dari persamaan :

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 = 0$$

Definisikan $f(x)$ *sebagai* :

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18$$

N*ol* dari $f(x)$ adalah sama dengan akar dari persamaan $f(x) = 0$

(yaitu -2, 3, 3, d*an* -1)

Metode Solusi

beberapa cara untuk menyelesaikan persamaan nonlinear yang mungkin:

- Solusi Analitik
  - Hanya mungkin untuk persamaan khusus
- Solusi Grafik
  - Berguna untuk memberikan tebakan awal untuk metode lain
- Solusi Numerik
  - Metode Terbuka
  - Metode Pengurungan

Metode Analitik

Solusi analitik tersedia untuk hanya persamaan khusus.

$$\text{Solusi Analitik dari}: \ a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

$$akar = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{Solusi analitik tidak tersedia untuk}: \quad x - e^{-x} = 0$$

Metode Grafik

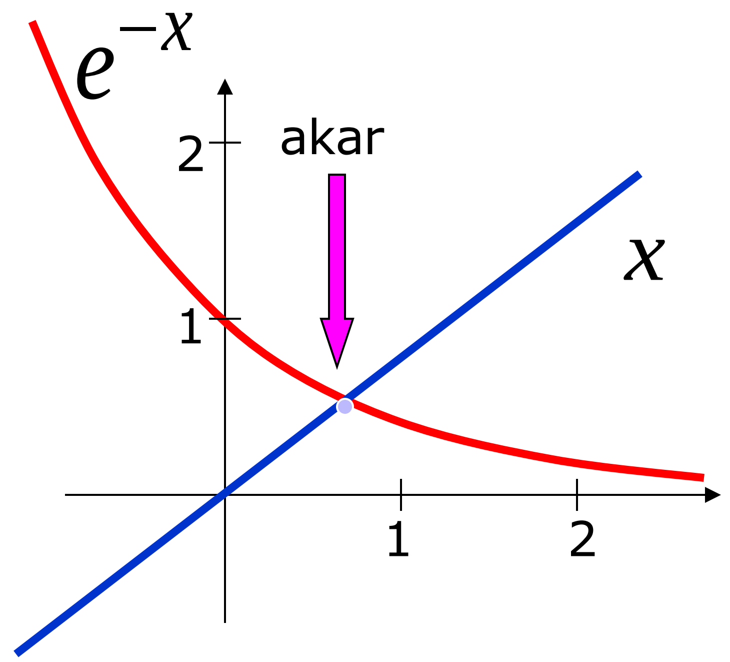
- Metode Grafik bermanfaat untuk menyediakan tebakan awal untuk digunakan metode lain.

$$Penyelesaian$$

$$x = e^{-x}$$

$$Akar \in [0,1]$$

$$akar \approx 0.6$$



Metode Numerik

Banyak metode yang tersedia untuk menyelesaikan persamaan nonlinear:

- Metode Bisection
- Metode Newton
- Metode Secant

→ Akan dibahas

- Metode Regula Falsi
- Metode Muller
- Metode Bairstow
- Iterasi Titik tetap
- ....

Metode Bracketing

- Dalam metode bracketing, metode dimulai dengan interval yang berisi akar dan prosedur digunakan untuk mendapatkan interval yang lebih kecil yang mengandung akar.

- Contoh metode bracketing:
  - Metode biseksi
  - Metode Regula Falsi

Metode Terbuka

- Dalam metode terbuka, metode ini dimulai dengan satu atau lebih titik tebakan awal. Dalam setiap iterasi, tebakan baru dari akar diperoleh.
- Metode terbuka biasanya lebih efisien daripada metode bracketing.
- Mereka mungkin tidak konvergen menuju akar.

Notasi Konvergensi

A sequence $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ is said to **converge** to x if to every $\varepsilon > 0$ there exists N such that:

$$\left| x_n - x \right| < \varepsilon \quad \forall n > N$$

Notasi Konvergensi

Let $x_1, x_2, \ldots,$ converge to x.

Linear Convergence: $\dfrac{|x_{n+1} - x|}{|x_n - x|} \le C$

Quadratic Convergence: $\dfrac{|x_{n+1} - x|}{|x_n - x|^2} \le C$

Convergence of order P: $\dfrac{|x_{n+1} - x|}{|x_n - x|^p} \le C$

Kecepatan konvergensi

- Kita dapat membandingkan metode yang berbeda dalam hal tingkat konvergensi mereka.
- Konvergensi kuadrat lebih cepat dari konvergensi linear.
- Sebuah metode dengan urutan konvergensi q bertemu lebih cepat daripada metode dengan urutan konvergensi p jika $q>p$.
- Metode urutan konvergensi $p>1$ dikatakan memiliki konvergensi super linier.

Metode Biseksi

- Algoritma Bisection
- Analisis Konvergensi Metode Bisection
- Contoh

Pendahuluan

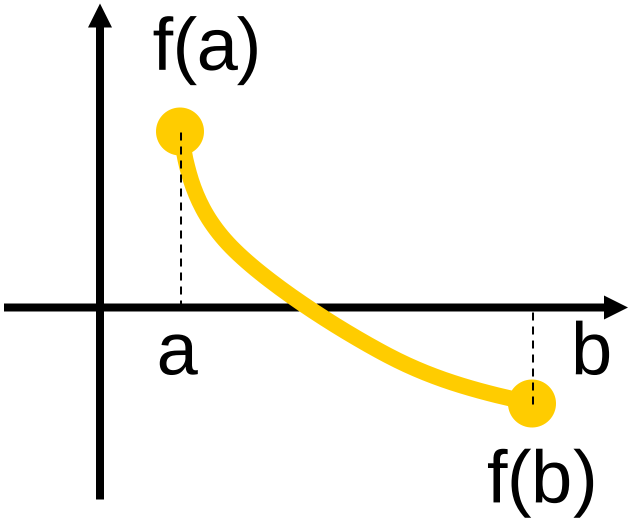
- Metode Biseksi adalah salah satu metode paling sederhana untuk menemukan nol fungsi nonlinier.
- Hal ini juga disebut metode interval halving.
- Untuk menggunakan metode Biseksi, seseorang membutuhkan interval awal yang diketahui mengandung nol fungsi.
- Metode ini secara sistematis mengurangi interval. Hal ini dilakukan dengan membagi interval menjadi dua bagian yang sama, melakukan tes sederhana dan berdasarkan hasil tes, setengah dari interval dibuang.
- Prosedur ini diulang sampai ukuran interval yang diinginkan diperoleh.

Teorema Nilai Menengah

- ambil f(x) terdefinisi pada interval [a,b].

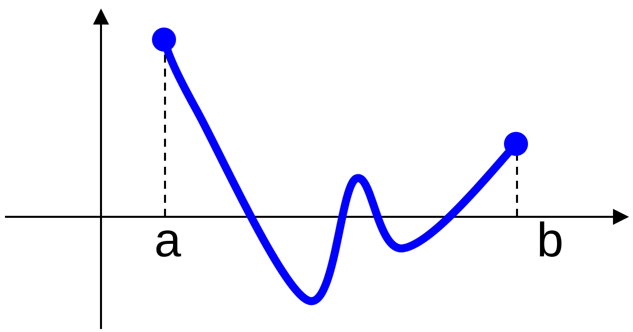
- <u>Teorema Nilai Tengah:</u>

  jika fungsi adalah kontinu dan f(a) dan f(b) mempunyai beda tanda maka fungsi mempunyai paling sedikit satu pembuat nol dalam interval [a,b].

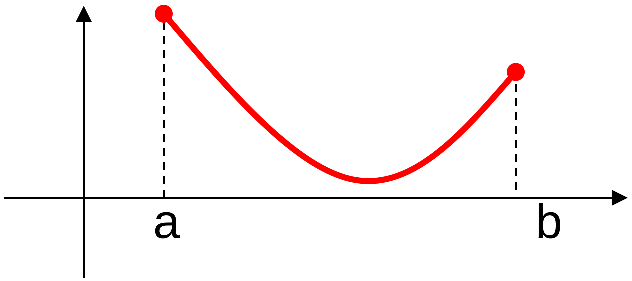


Contoh

- If f(a) dan f(b) memiliki tanda yang sama, fungsi mungkin memiliki jumlah nol nyata atau tidak ada nol nyata dalam interval [a, b].
- Metode biseksi tidak dapat digunakan dalam kasus ini.



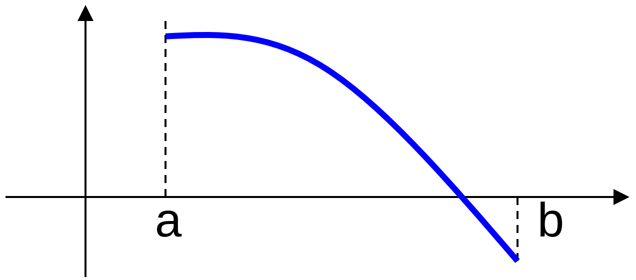
Fungsi mempunyai 4 nilai real pembuat nol



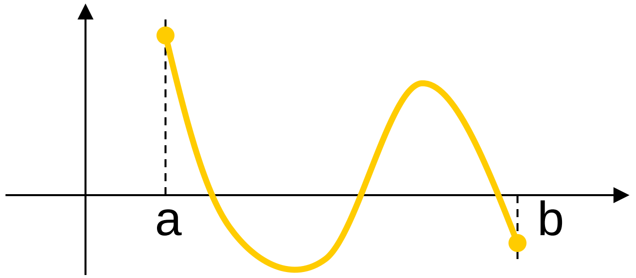
Fungsi tidak mempunyai nilai real pembuat nol

Dua Contoh Lainnya

- Jika f (a) dan f (b) memiliki tanda-tanda yang berbeda, fungsi ini memiliki setidaknya satu nol nyata.
- Metode bisection dapat digunakan untuk menemukan salah satu angka nol.



Fungsi ini memiliki satu nol nyata.



Fungsi mempunyai tiga nol nyata

Metode Biseksi

- Jika fungsi kontinu pada [a, b] dan f (a) dan f (b) memiliki tanda-tanda yang berbeda, metode Bisection memperoleh interval baru yang setengah dari interval saat ini dan tanda fungsi pada titik akhir interval berbeda.

- Hal ini memungkinkan kita untuk mengulangi prosedur Bisection untuk lebih mengurangi ukuran interval.

Metode Biseksi

Assumsi:

diberikan interval [a,b]

f(x) adalah fungsi kontinu pada [a,b]

f(a) dan f(b) mempunyai beda tanda.

Asumsi-asumsi ini memastikan adanya setidaknya satu nol dalam interval [a, b] dan metode biseksi dapat digunakan untuk mendapatkan interval yang lebih kecil yang berisi nol.

Algorithma Biseksi

Assumptions:

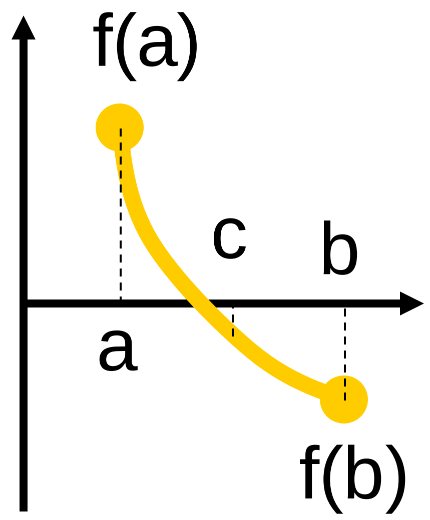
- f(x) is continuous on [a,b]
- f(a) f(b) < 0

Algorithm:

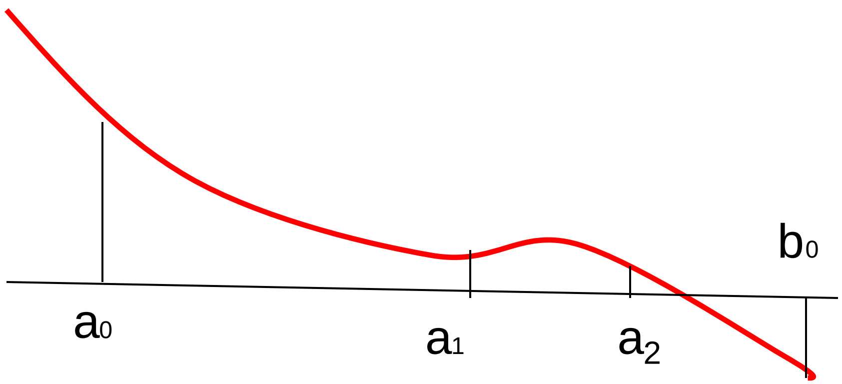
Loop

1. Compute the mid point c=(a+b)/2
2. Evaluate f(c)
3. If f(a) f(c) < 0 then new interval [a, c]
   If f(a) f(c) > 0 then new interval [c, b]

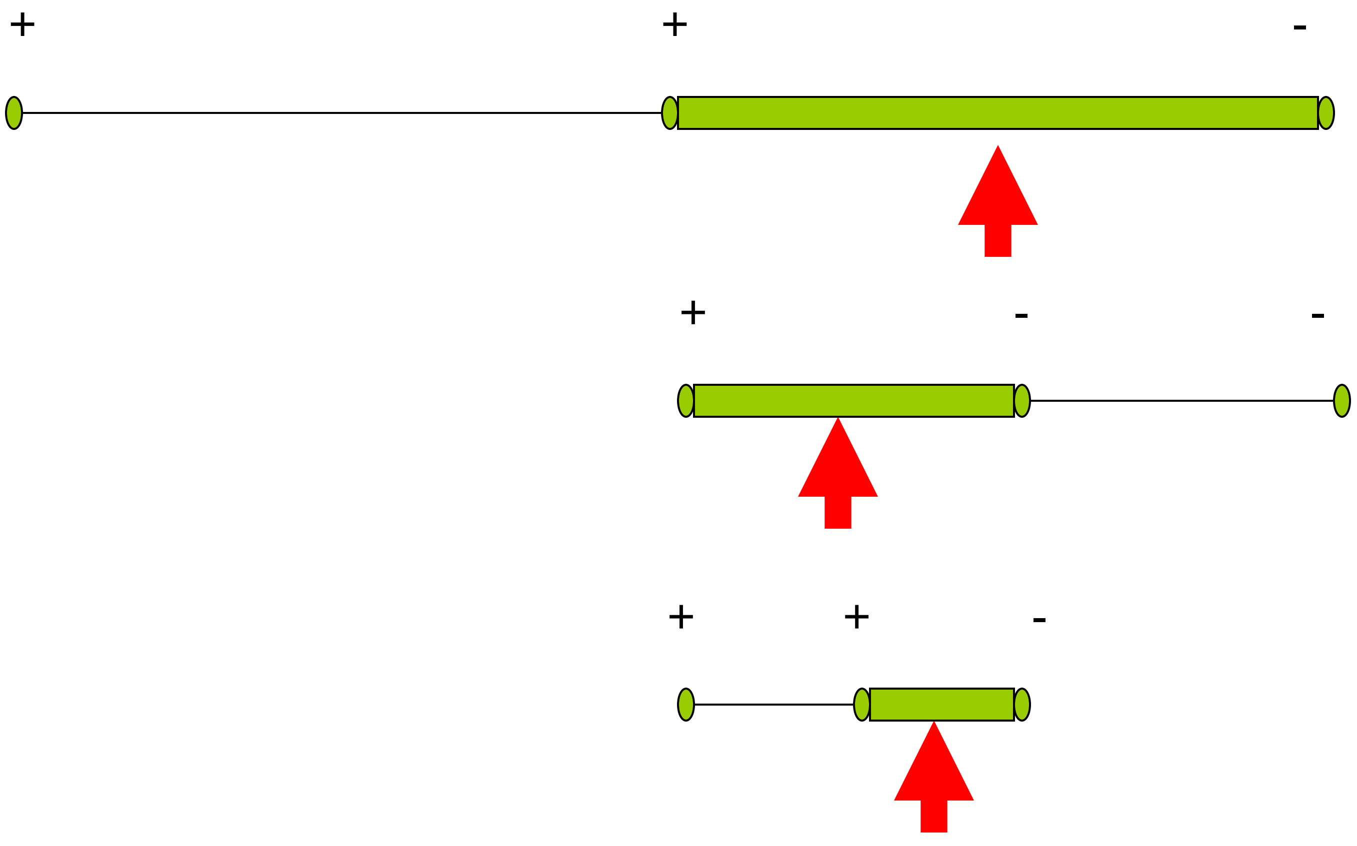
End loop



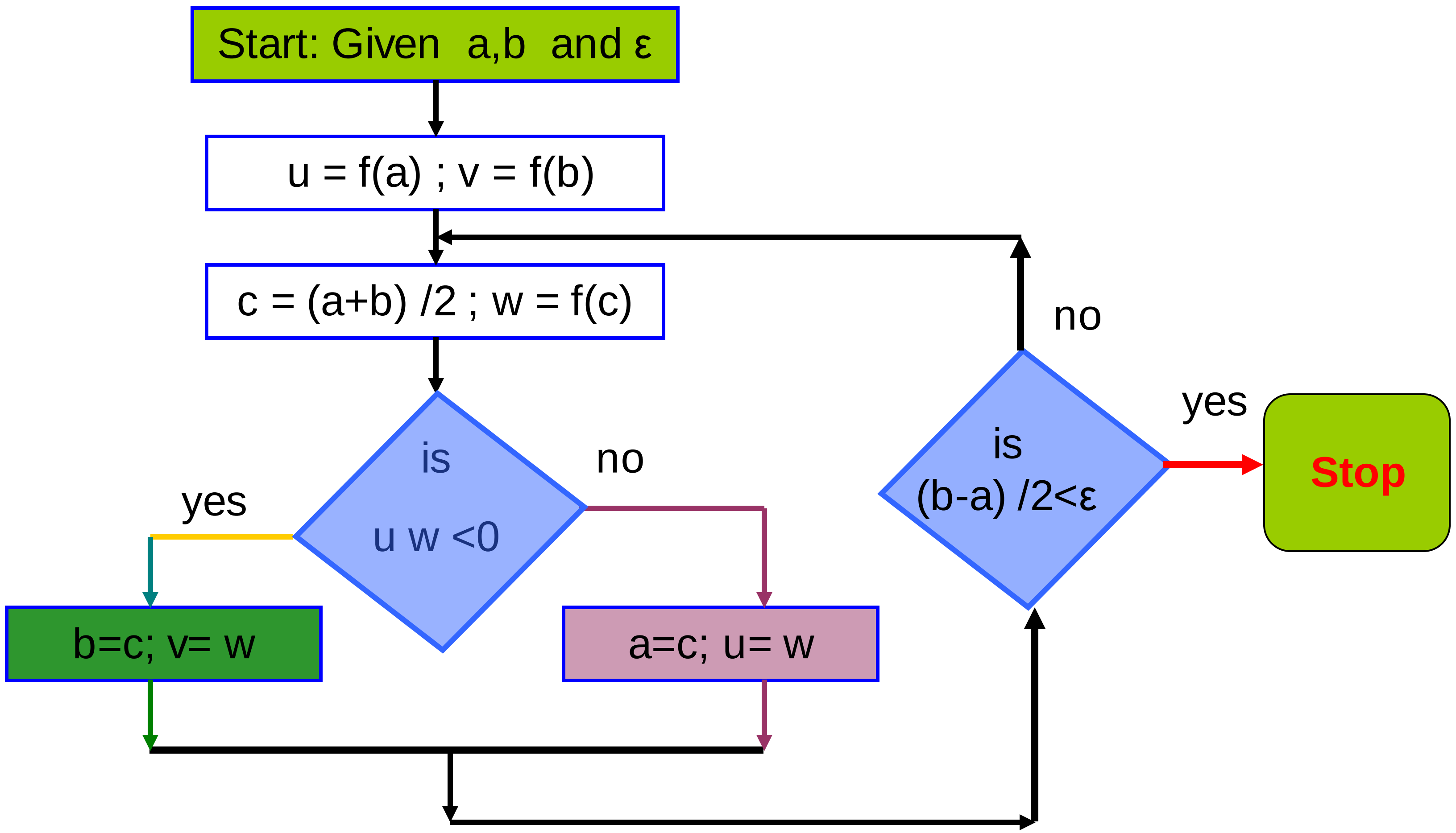
Metode Biseksi



Contoh



Flow Chart dari Metode Biseksi



Contoh

Can you use Bisection method to find a zero of :

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ in the interval [0,2]?

Jawab:

$f(x)$ is continuous on [0,2]

and $f(0) * f(2) = (1)(3) = 3 > 0$

$\Rightarrow$ Assumptions are not satisfied

$\Rightarrow$ Bisection method can not be used

Contoh

Can you use Bisection method to find a zero of :

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ in the interval $[0,1]$?

Jawab:

$f(x)$ is continuous on $[0,1]$

and $f(0) * f(1) = (1)(-1) = -1 < 0$

$\Rightarrow$ Assumptions are satisfied

$\Rightarrow$ Bisection method can be used

Perkiraan dan Tingkat Kesalahan Terbaik

Metode biseksi memperoleh interval yang dijamin mengandung nol fungsi.

Pertanyaan:

- Berapa perkiraan terbaik dari nol f(x)?
- Berapa tingkat kesalahan dalam perkiraan yang diperoleh?

Perkiraan dan Tingkat Kesalahan Terbaik

Perkiraan terbaik dari nol fungsi f(x) setelah iterasi pertama dari metode Biseksi adalah titik tengah interval awal:

$$Estimate\ of\ the\ zero:\ \ r = \frac{b+a}{2}$$

$$Error \leq \frac{b-a}{2}$$

Kriteria Berhenti

Dua kriteria berhenti umum

- Berhenti setelah jumlah iterasi tetap
- Berhenti ketika kesalahan absolut kurang dari nilai yang ditentukan

Bagaimana kriteria ini terkait?

Stopping Criteria

c_n : is the midpoint of the interval at the n$^{\text{th}}$ iteration

(c_n is usually used as the estimate of the root).

r : is the zero of the function.

After n iterations :

$$|error| = |r - c_n| \leq E_a^n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{\Delta x^0}{2^n}$$

Convergence Analysis

$Given \quad f(x),\ a,\ b,\ and \quad \varepsilon$

How many iterations are needed such that : $|x - r| \leq \varepsilon$

where r is the zero of $f(x)$ and x is the bisection estimate (i.e., $x = c_k$)?

$$n \geq \frac{\log(b-a) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

Convergence Analysis – Alternative Form

$$n \geq \frac{\log(b-a) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

$$n \geq \log_2\left(\frac{\text{width of initial interval}}{\text{desired error}}\right) = \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$$

Example

$a = 6, \; b = 7, \; \varepsilon = 0.0005$

How many iterations are needed such that : $|x - r| \le \varepsilon$?

$$n \ge \frac{\log(b-a) - \log(\varepsilon)}{\log(2)} = \frac{\log(1) - \log(0.0005)}{\log(2)} = 10.9658$$

$$\Rightarrow n \ge 11$$

Example

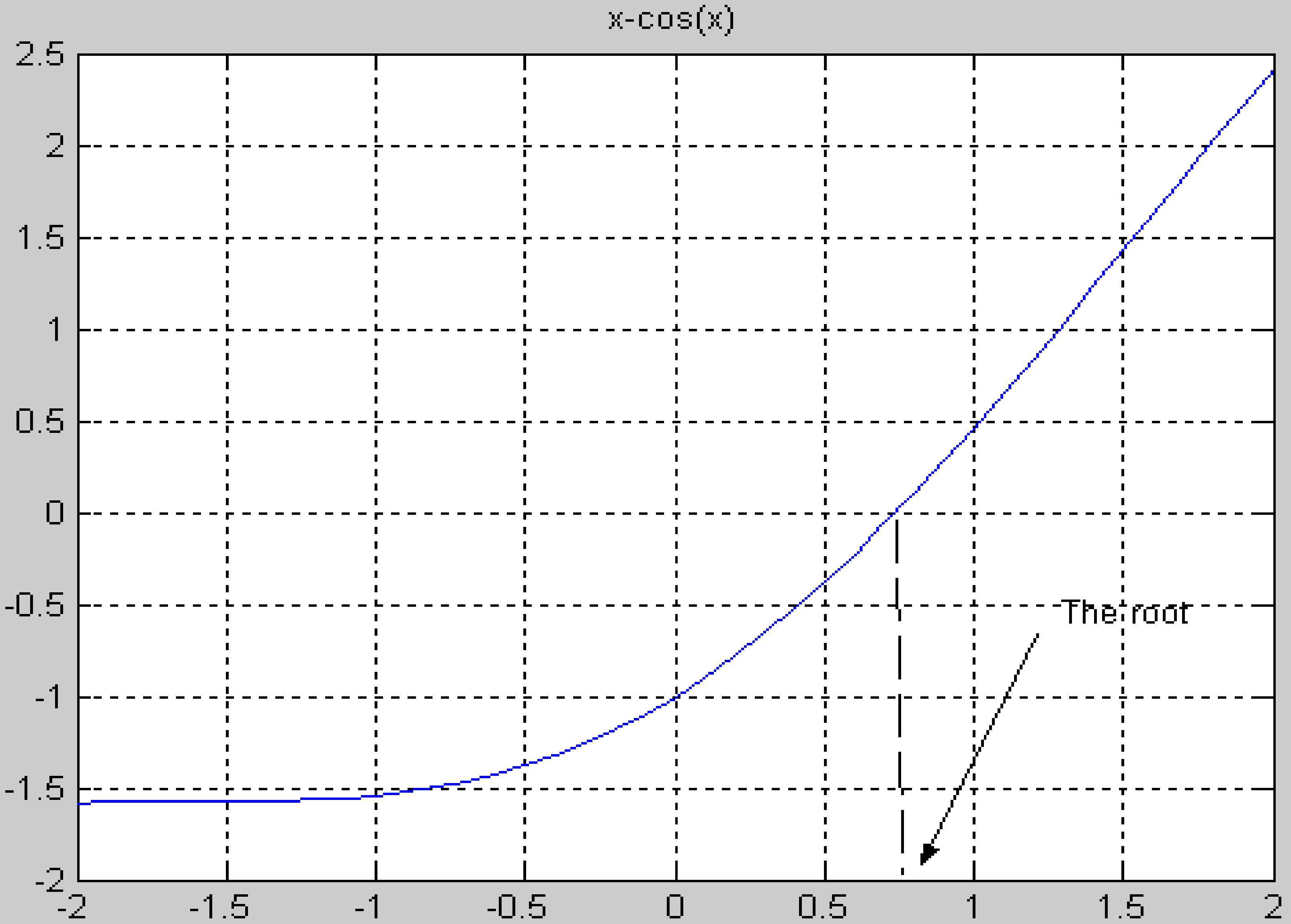
- Use Bisection method to find a root of the equation $x = \cos(x)$ with absolute error <0.02
  (assume the initial interval [0.5, 0.9])

Question 1: What is *f (x) ?*

Question 2: Are the assumptions satisfied ?

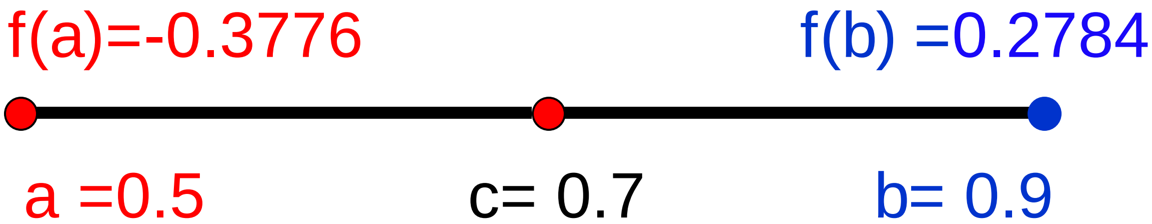
Question 3: How many iterations are needed ?

Question 4: How to compute the new estimate ?


x-cos(x)
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
The root

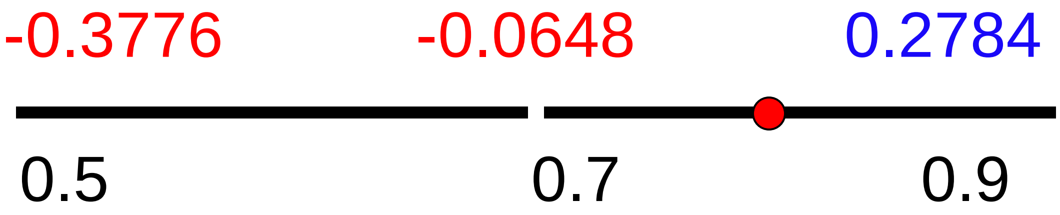
Bisection Method

Initial Interval

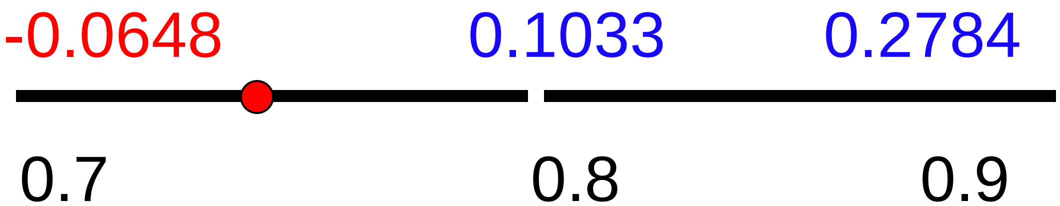


Error < 0.2

Bisection Method

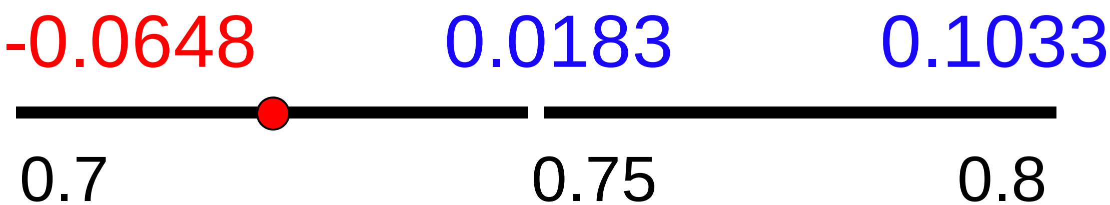


Error < 0.1

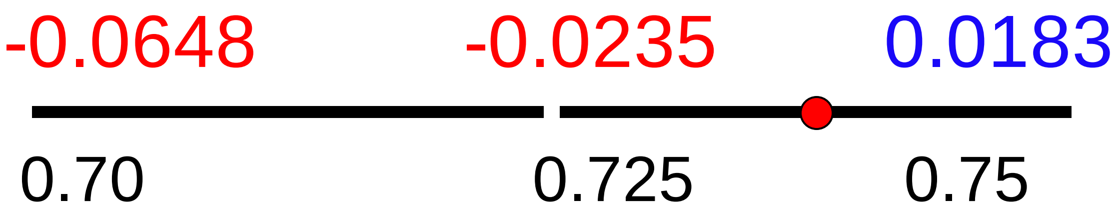


Error < 0.05

Bisection Method



Error < 0.025



Error < .0125

Kesimpulan

- Initial interval containing the root: [0.5,0.9]

- After 5 iterations:
  - Interval containing the root: [0.725, 0.75]
  - Best estimate of the root is 0.7375
  - | Error | < 0.0125

A Matlab Program of Bisection Method

```
a=.5; b=.9;
u=a-cos(a);
v=b-cos(b);
    for i=1:5
        c=(a+b)/2
        fc=c-cos(c)
        if u*fc<0
          b=c ; v=fc;
        else
          a=c; u=fc;
        end
    end
```

```
c =
    0.7000
fc =
   -0.0648
c =
    0.8000
fc =
    0.1033
c =
    0.7500
fc =
    0.0183
c =
    0.7250
fc =
  -0.0235
```

Example

Find the root of:

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \text{ in the interval } :[0,1]$$

* $f(x)$ is continuous

* $f(0) = 1, \; f(1) = -1 \Rightarrow f(a)\, f(b) < 0$

$\Rightarrow$ Bisection method can be used to find the root

Example

Iteration	a	b	$c = \frac{(a+b)}{2}$	f(c)	$\frac{(b-a)}{2}$
1	0	1	0.5	-0.375	0.5
2	0	0.5	0.25	0.266	0.25
3	0.25	0.5	.375	-7.23E-3	0.125
4	0.25	0.375	0.3125	9.30E-2	0.0625
5	0.3125	0.375	0.34375	9.37E-3	0.03125

Metode Biseksi

Advantages

- Simple and easy to implement
- One function evaluation per iteration
- The size of the interval containing the zero is reduced by 50% after each iteration
- The number of iterations can be determined a priori
- No knowledge of the derivative is needed
- The function does not have to be differentiable

Disadvantage

- Slow to converge
- Good intermediate approximations may be discarded

Metode Newton-Raphson

- Assumptions
- Interpretation
- Examples
- Convergence Analysis

Metode Newton-Raphson

(Juga dikenal sebagai Metode Newton)

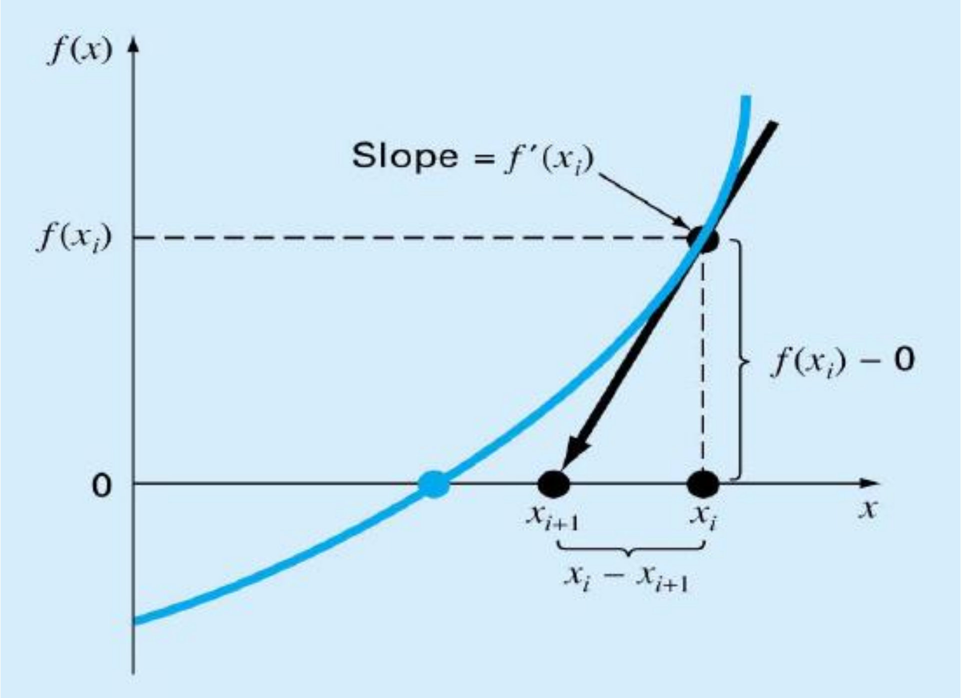
Mengingat tebakan awal dari akar x0, metode Newton-Raphson menggunakan informasi tentang fungsi dan turunannya pada saat itu untuk menemukan tebakan akar yang lebih baik.

Assumsi:

- ***f(x)*** fungsi kontinu dan turunan pertama diketahui
- Nilai awal x_0 sedemikian sehingga $f'(x_0) \neq 0$ diberikan

Metode Newton Raphson
- Penggambaran Grafis

- Jika nilai awal pada akar adalah $\boldsymbol{x_i}$, maka tangen untuk fungsi dari $\boldsymbol{x_i}$ yaitu $\boldsymbol{f'(x_i)}$ diekstrapolasi ke sumbu x untuk memberikan perkiraan akar pada $\boldsymbol{x_{i+1}}$.



Penurunan Metode Newton

Given: x_i an initial guess of the root of $f(x)=0$

Question : How do we obtain a better estimate x_{i+1}?

Taylor Therorem : $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$

Find h such that $f(x+h)=0$.

$$\Rightarrow h \approx -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Newton – Raphson Formula

A new guess of the root : $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

Metode Newton

$$Given \quad f(x),\ f'(x),\ x_0$$

$$Assumption \quad f'(x_0) \neq 0$$

$$for \quad i = 0 : n$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$end$$

```
C     FORTRAN  PROGRAM
         F(X) = X**3 - 3*X**2 + 1
         FP(X) = 3*X**2 - 6*X
         X = 4
         DO  10  I = 1,5
          X = X - F(X)/FP(X)
          PRINT *,  X
10        CONTINUE
         STOP
         END
```

Metode Newton

$$Given \quad f(x),\ f'(x),\ x_0$$

$$Assumption \quad f'(x_0) \neq 0$$

$$\begin{aligned}
&for \quad i = 0:n \\
&\qquad x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \\
&end
\end{aligned}$$

F.m

$$\begin{aligned}
&function \quad [F] = F(X) \\
&\qquad F = X\,^\wedge 3 - 3 * X\,^\wedge 2 + 1
\end{aligned}$$

FP.m

$$\begin{aligned}
&function \quad [FP] = FP(X) \\
&\qquad FP = 3 * X\,^\wedge 2 - 6 * X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\%\quad MATLAB\ PROGRAM \\
&X = 4 \\
&for\ i = 1:5 \\
&\qquad X = X - F(X)/FP(X) \\
&end
\end{aligned}$$

Contoh

Find a zero of the function $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$, $x_0 = 4$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

Iteration 1: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 - \dfrac{33}{33} = 3$

Iteration 2: $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3 - \dfrac{9}{16} = 2.4375$

Iteration 3: $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.4375 - \dfrac{2.0369}{9.0742} = 2.2130$

Contoh

k (Iteration)	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_{k+1} - x_k \rvert$
0	**4**	**33**	**33**	**3**	1
1	**3**	**9**	**16**	**2.4375**	0.5625
2	**2.4375**	**2.0369**	**9.0742**	**2.2130**	0.2245
3	**2.2130**	**0.2564**	**6.8404**	**2.1756**	0.0384
4	**2.1756**	**0.0065**	**6.4969**	**2.1746**	0.0010

Analisis Konvergensi

Theorem :

Let $f(x), f'(x)$ *and* $f''(x)$ be continuous at $x \approx r$

where $f(r) = 0$. *If* $f'(r) \neq 0$ then there exists $\delta > 0$

such that $|x_0 - r| \leq \delta \Rightarrow \dfrac{|x_{k+1} - r|}{|x_k - r|^2} \leq C$

$$C = \frac{1}{2} \frac{\max\limits_{|x_0 - r| \leq \delta} |f''(x)|}{\min\limits_{|x_0 - r| \leq \delta} |f'(x)|}$$

Analisis Konvergensi
Komentar

Ketika tebakan cukup dekat dengan akar fungsi yang sederhana maka metode Newton dijamin untuk menyatu empat kali lipat.

Konvergensi kuadrat berarti bahwa jumlah digit yang benar hampir dua kali lipat pada setiap iterasi.

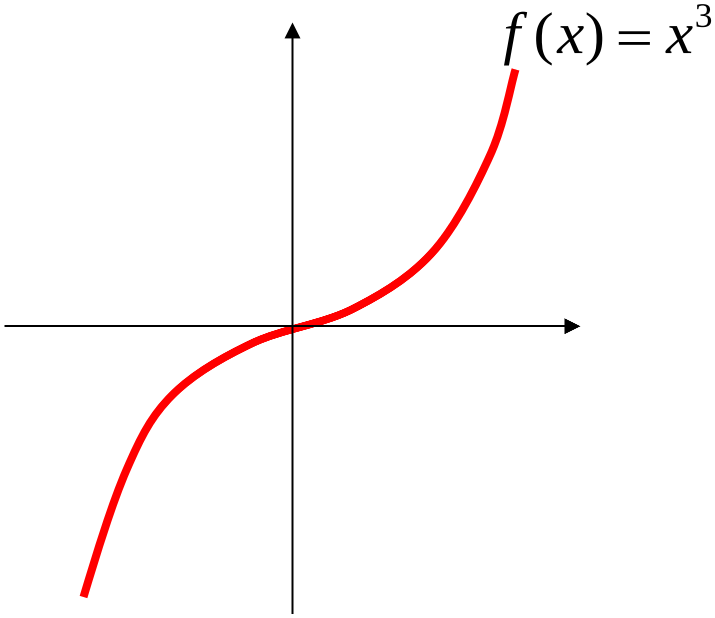
Masalah dari Metode Newton

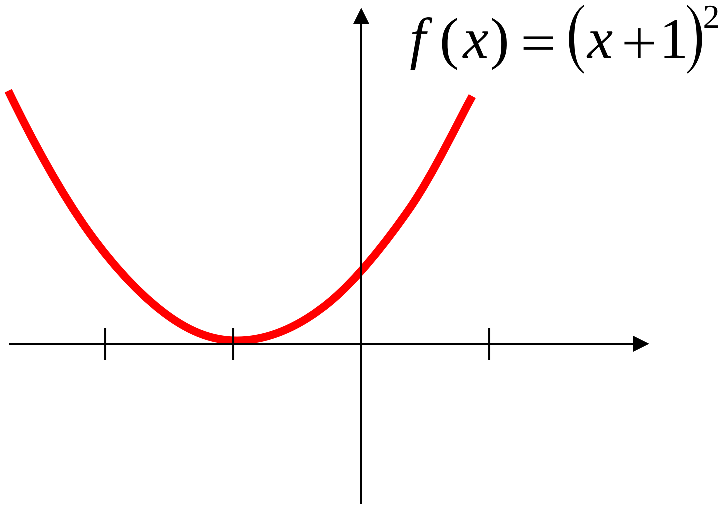
- Jika tebakan awal akar jauh dari akar metode mungkin tidak konvergen.

- Metode Newton konvergen secara linear di dekat beberapa nol $\{\, f(r) = f'(r) = 0 \,\}$.

Dalam sebuah kasus, algoritma yang dimodifikasi dapat digunakan untuk mendapatkan kembali konvergensi kuadrat.

Multiple Roots

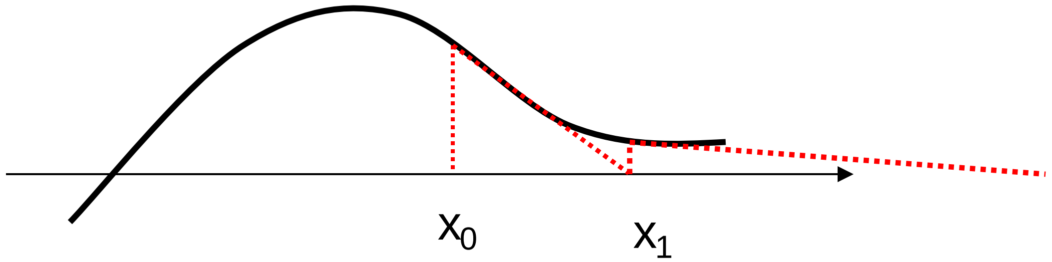




$f(x)$ has three zeros at x = 0

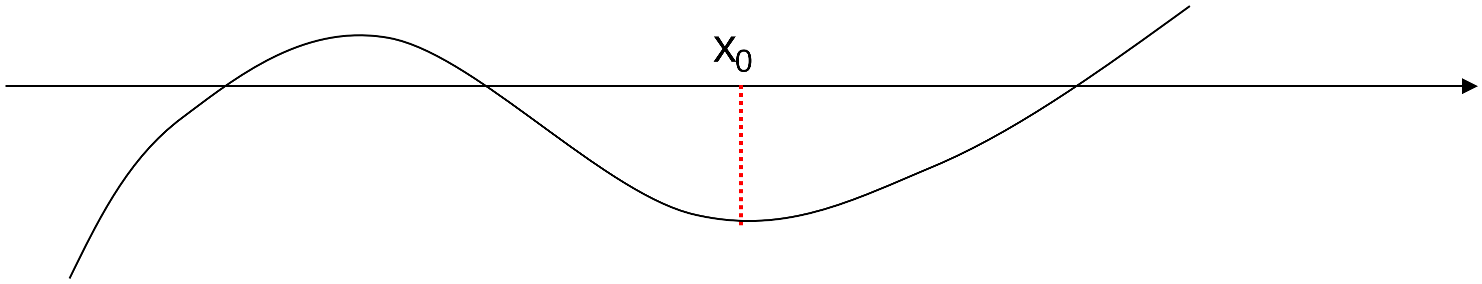
$f(x)$ has two zeros at x = -1

Masalah dengan Metode Newton
- Pelarian -



Perkiraan akar akan menjauh dari akar.

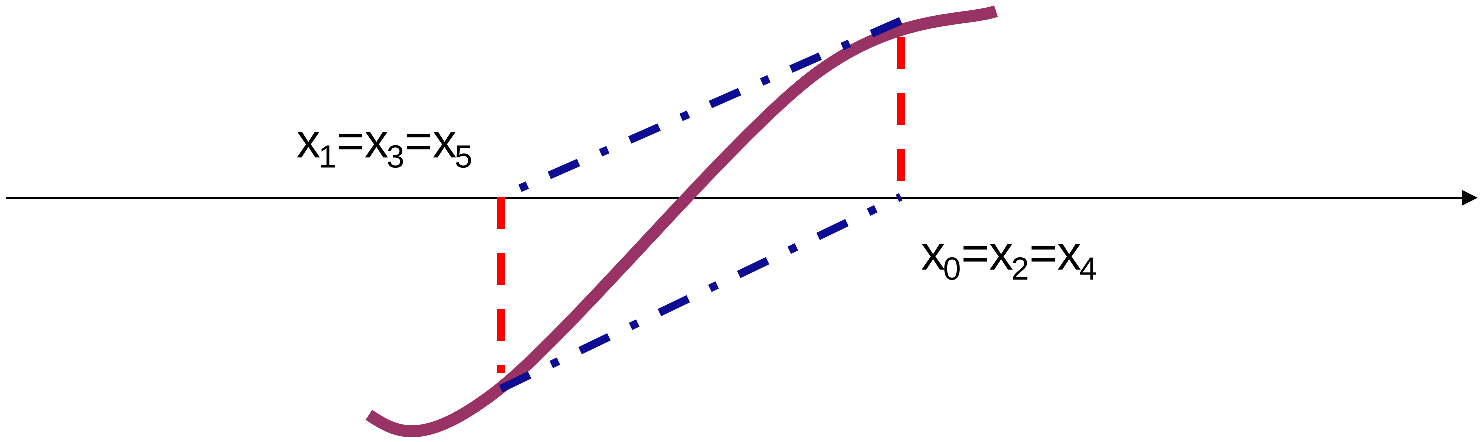
Masalah dengan Metode Newton
- Tempat Datar -



Nilai dari ***f'(x)*** adalah nol, algoritma gagal.

If ***f '(x)*** sangat kecil maka $\boldsymbol{x_1}$ akan sangat jauh dari $\boldsymbol{x_0}$.

Problems with Newton's Method
- Cycle -



The algorithm cycles between two values x_0 and x_1

Newton's Method for Systems of Non Linear Equations

Given: X_0 an initial guess of the root of $F(x)=0$

Newton's Iteration

$$X_{k+1} = X_k - \left[F'(X_k)\right]^{-1} F(X_k)$$

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad F'(X) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \vdots \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

Example

- Solve the following system of equations:

$$y + x^2 - 0.5 - x = 0$$

$$x^2 - 5xy - y = 0$$

$$\text{Initial guess} \quad x = 1, \; y = 0$$

$$F = \begin{bmatrix} y + x^2 - 0.5 - x \\ x^2 - 5xy - y \end{bmatrix}, \; F' = \begin{bmatrix} 2x - 1 & 1 \\ 2x - 5y & -5x - 1 \end{bmatrix}, X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solution Using Newton's Method

$$\text{Iteration } 1:$$

$$F=\begin{bmatrix} y+x^2-0.5-x \\ x^2-5xy-y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}=, \quad F'=\begin{bmatrix} 2x-1 & 1 \\ 2x-5y & -5x-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$X_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$\text{Iteration } 2:$$

$$F=\begin{bmatrix} 0.0625 \\ -0.25 \end{bmatrix}=, \quad F'=\begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 1.25 & -7.25 \end{bmatrix}$$

$$X_2=\begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 1.25 & -7.25 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0.0625 \\ -0.25 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.2332 \\ 0.2126 \end{bmatrix}$$

Example

Try this

- Solve the following system of equations:

$$y + x^2 - 1 - x = 0$$

$$x^2 - 2y^2 - y = 0$$

$$\text{Initial guess} \quad x = 0, \quad y = 0$$

$$F = \begin{bmatrix} y + x^2 - 1 - x \\ x^2 - 2y^2 - y \end{bmatrix}, \quad F' = \begin{bmatrix} 2x - 1 & 1 \\ 2x & -4y - 1 \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Example

Solution

Iteration	0	1	2	3	4	5
X_k	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.5287 \\ 0.1969 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.5257 \\ 0.1980 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.5257 \\ 0.1980 \end{bmatrix}$

Metode Secant

- Secant Method
- Examples
- Convergence Analysis

Metode Newton (Review)

$$Assumptions: \quad f(x),\ f'(x),\ x_0 \quad are\ available,$$

$$f'(x_0) \neq 0$$

$$Newton's\ Method\ new\ estimate:$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Problem :

$f'(x_i)$ is not available,

or difficult to obtain analytical ly.

Metode Secant

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

if x_i *and* x_{i-1} are two initial points :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}$$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})}} = x_i - f(x_i)\frac{(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}}$$

Metode Secant

Assumption s :

Two initial points x_i *and* x_{i-1}

such that $f(x_i) \neq f(x_{i-1})$

New estimate (Secant Method) :

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\frac{(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Metode Secant

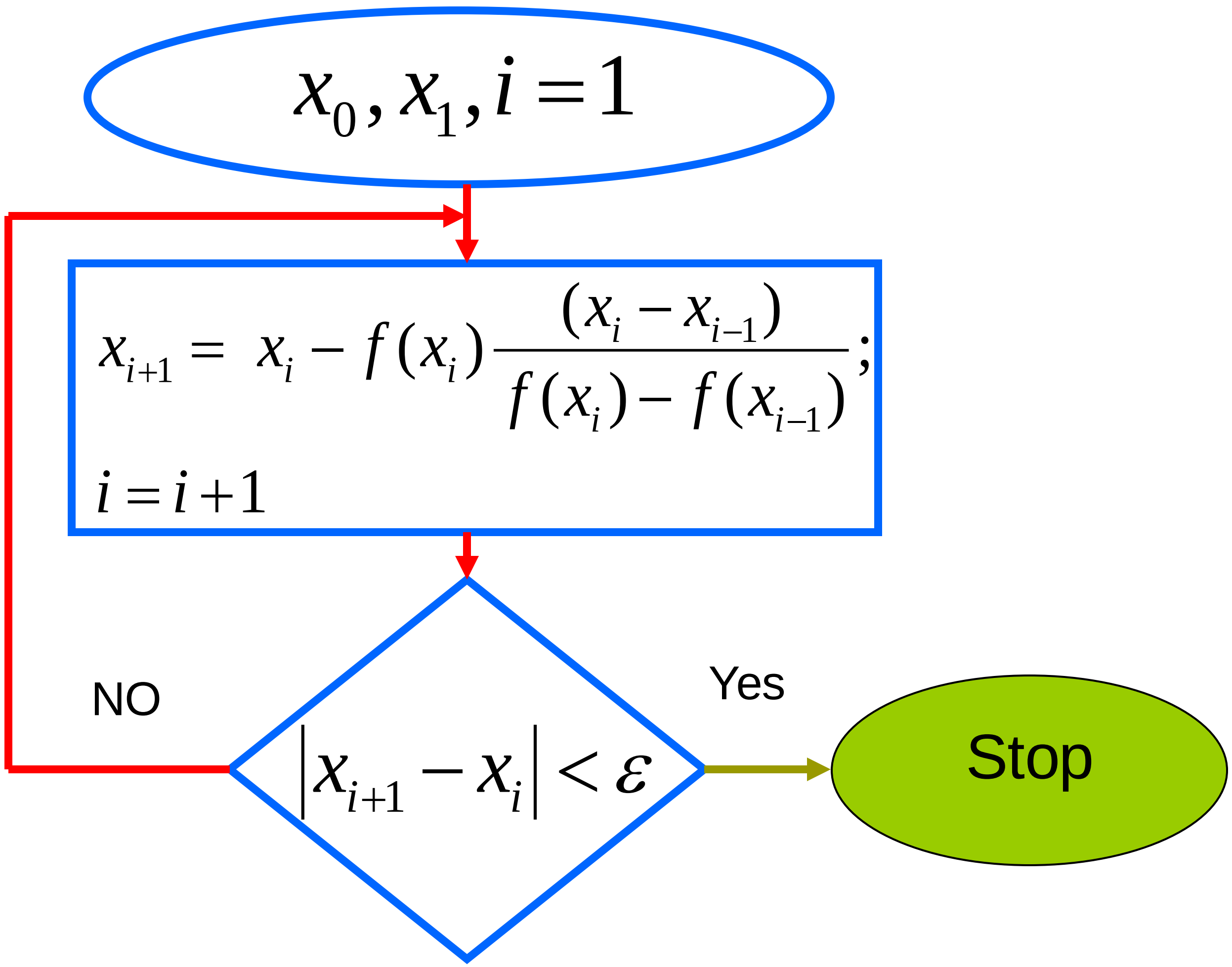
$$f(x) = x^2 - 2x + 0.5$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\frac{(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Metode Secant - Flowchart



Metode Secant Termodifikasi

In this modified Secant method, only one initial guess is needed :

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}{\delta x_i}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\dfrac{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}{\delta x_i}} = x_i - \frac{\delta x_i f(x_i)}{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}$$

Problem : How to select δ ?

If not selected properly, the method may diverge.

Contoh

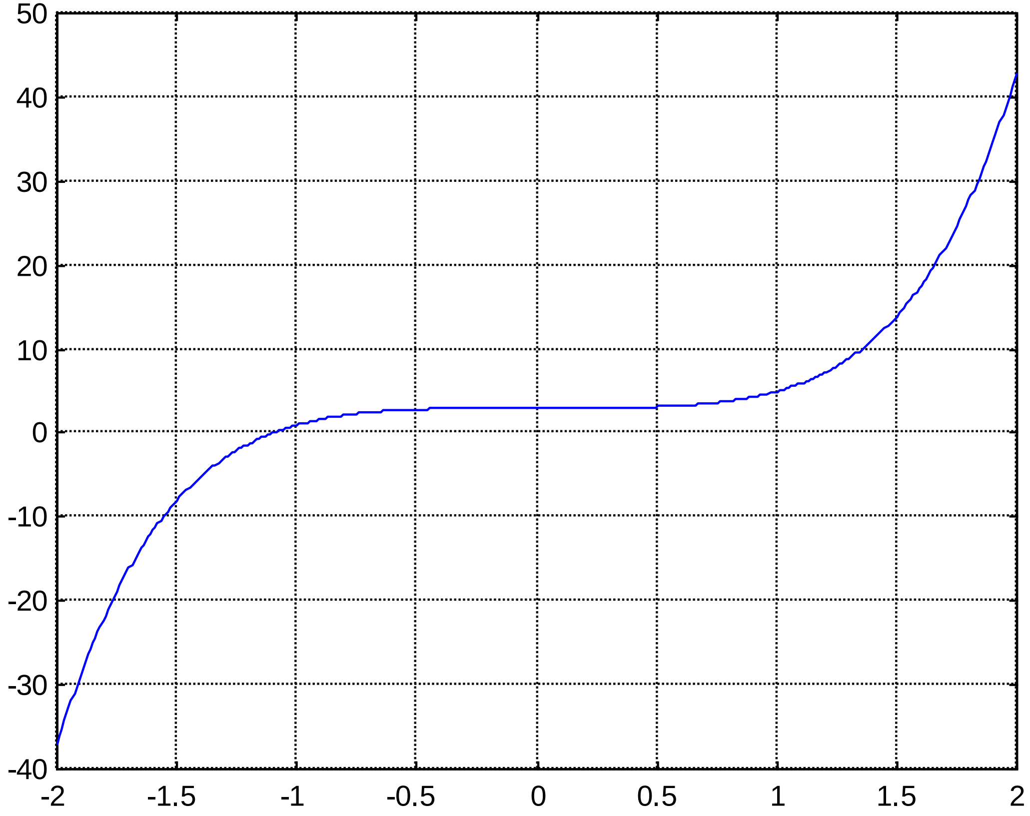
Find the roots of :

$$f(x) = x^5 + x^3 + 3$$

Initial points

$$x_0 = -1 \; and \; x_1 = -1.1$$

$$with \;\; error < 0.001$$



Contoh

x(i)	f(x(i))	x(i+1)	|x(i+1)-x(i)|
-1.0000	1.0000	-1.1000	0.1000
-1.1000	0.0585	-1.1062	0. 0062
-1.1062	0.0102	-1.1052	0.0009
-1.1052	0.0001	-1.1052	0.0000

Analisis Konvergensi

- Tingkat konvergensi metode Secant adalah super linear :

$$\frac{|x_{i+1} - r|}{|x_i - r|^{\alpha}} \le C, \qquad \alpha \approx 1.62$$

$$r : root \qquad x_i : \text{estimate of the root at the } i^{\text{th}} \text{ iteration.}$$

- Ini lebih baik daripada metode Biseksi tetapi tidak sebagus metode Newton.

Perbandingan Metode Pencarian Akar

- Kelebihan/kekurangan
- Contoh

Rangkuman

Metode	Kelebihan	Kekurangan
Biseksi	- Mudah, Dapat Diandalkan, Konvergen - Satu evaluasi fungsi per iterasi - Tidak ada pengetahuan tentang derivatif yang diperlukan	- lambat - Needs an interval [a,b] containing the root, i.e., $f(a)f(b)<0$
Newton	- Cepat (jika dekat akar) - Dua evaluasi fungsi per iterasi	- Mungkin divergen - Needs derivative and an initial guess x_0 such that $f'(x_0)$ is nonzero
Secant	- Cepat (lebih lambat dari Newton) - Satu evaluasi fungsi per iterasi - Tidak ada pengetahuan tentang derivatif yang diperlukan	- Mungkin divergen - Needs two initial points guess x_0, x_1 such that $f(x_0)- f(x_1)$ is nonzero

Contoh

Use Secant method to find the root of :

$$f(x) = x^6 - x - 1$$

Two initial points $x_0 = 1$ *and* $x_1 = 1.5$

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\frac{(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Solusi

k	x_k	$f(x_k)$
0	1.0000	-1.0000
1	1.5000	8.8906
2	1.0506	-0.7062
3	1.0836	-0.4645
4	1.1472	0.1321
5	1.1331	-0.0165
6	1.1347	-0.0005

Contoh

Use Newton's Method to find a root of :

$f(x) = x^3 - x - 1$

Use the initial point : $x_0 = 1$.

Stop after three iterations , or

if $|x_{k+1} - x_k| < 0.001$, or

if $|f(x_k)| < 0.0001$.

Five Iterations of the Solution

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	ERROR
0	1.0000	-1.0000	2.0000	
1	1.5000	0.8750	5.7500	0.1522
2	1.3478	0.1007	4.4499	0.0226
3	1.3252	0.0021	4.2685	0.0005
4	1.3247	0.0000	4.2646	0.0000
5	1.3247	0.0000	4.2646	0.0000

Example

Use Newton's Method to find a root of :

$f(x) = e^{-x} - x$

Use the initial point : $x_0 = 1.$

Stop after three iterations , or

if $|x_{k+1} - x_k| < 0.001,$ or

if $|f(x_k)| < 0.0001.$

Example

Use Newton's Method to find a root of :

$$f(x) = e^{-x} - x, \qquad f'(x) = -e^{-x} - 1$$

x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
1.0000	-0.6321	-1.3679	0.4621
0.5379	0.0461	-1.5840	-0.0291
0.5670	0.0002	-1.5672	-0.0002
0.5671	0.0000	-1.5671	-0.0000

Example

Estimates of the root of: x-cos(x)=0.

0.60000000000000	Initial guess
0.744017319445980	1 correct digit
0.73909047688624	4 correct digits
0.73908513322147	10 correct digits
0.73908513321516	14 correct digits

Contoh

Dalam memperkirakan akar dari : ***x-cos(x)=0***, untuk mendapatkan lebih dari 13 digit yang benar:

- 4 iterations of Newton (x_0=0.8)
- 43 iterations of Bisection method (initial interval [0.6, 0.8])
- 5 iterations of Secant method (x_0=0.6, x_1=0.8)

Metode Iterasi Titik Tetap

Ambil fungsi $f(x) = 0 \leftrightarrow x = f(x)$

- Titik tetap adalah titik x sdmshg f$(x) = x$
- Diberikan nilai awal x_0 , diperoleh

$$x_1 = f(x_0)$$
$$x_2 = f(x_1)$$
$$x_3 = f(x_2) \quad dst$$

Jadi

$$x_n = f(x_{n-1})$$

Misalnya $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$, mempunyai titik tetap $\sqrt{2}$

- Ambil titik awal $x_0 = 1$
- Melalui proses iterasi diperoleh

$$x_1 = f(x_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = f(x_1) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12}$$

$$x_3 = f(x_2) = \frac{17}{24} + \frac{12}{17} \approx 1.41421569,$$

....

x_n konvergen mendekati $\sqrt{2}$.

Misalnya $f(x) = ax - bx^2$ misalnya $a = 2.5$, $b = 1.5$.

- Ambil titik awal $x_0 = 1$
- Melalui proses iterasi diperoleh

$$x_1 = f(x_0) = 0.02485$$
$$x_2 = f(x_1) = 0.06119871625$$
$$x_3 = f(x_2) = 0.147378866319028$$
....
$$x_{10} = f(x_2) = 1.000117496574880$$

x_n konvergen mendekati 1.

Misalnya $f(x) = ax - bx^2$

misalnya $a = 3.25$, $b = 1.5$.