

Calcul Différentiel III

STEP, MINES ParisTech

12 février 2021 (#7d082cf)

Question 1 (réponses multiples) Soit $f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_1 x_2 \in \mathbb{R}$. On a

☐ A:

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

☐ B: Si $h_1 = (h_{11}, h_{12}) \in \mathbb{R}^2$ et $h_2 = (h_{21}, h_{22}) \in \mathbb{R}^2$,

$$d^2 f(x_1, x_2) \cdot h_1 \cdot h_2 = h_{11} h_{22} - h_{21} h_{12}$$

☐ C: Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x + h) = \nabla f(x) + \frac{1}{2} \langle h, H_f(x) \cdot h \rangle + \varepsilon(h) \|h\|^2$$

où $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Question 2 Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois différentiable en $x \in U$ et que $df(x) \cdot h \cdot h$ est connu pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, peut-on déterminer $df(x) \cdot h_1 \cdot h_2$ pour tout $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$?

☐ A : oui,

☐ B : non.

Question 3 Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est deux fois différentiable, combien y'a-t'il au plus de coefficients différents dans le tenseur représentant $d^2 f(x)$?

☐ A : 9,

☐ B : 18,

☐ C : 27.

Question 4 (réponses multiples) Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^2$ tels que $\partial_{12} f(a) = \partial_{21} f(a)$. Alors f est

☐ deux fois continûment différentiable en a ,

☐ deux fois différentiable en a ,

☐ différentiable en a ,

☐ continue en a .

Question 5 La différentielle d^3f d'ordre 3 d'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

- ☐ A : associe linéairement à tout vecteur h de \mathbb{R}^2 une application qui associe linéairement à tout vecteur k de \mathbb{R}^2 une application qui associe linéairement à tout vecteur p de \mathbb{R}^2 un vecteur de \mathbb{R}^3 .
- ☐ B : associe linéairement à tout point $x \in U$ une application qui associe linéairement à tout vecteur h de \mathbb{R}^2 une application qui associe linéairement à tout vecteur k de \mathbb{R}^2 un vecteur de \mathbb{R}^3 .
- ☐ C : associe à tout point $x \in U$ une application qui associe linéairement à tout vecteur h de \mathbb{R}^2 une application qui associe linéairement à tout vecteur k de \mathbb{R}^2 une application qui associe linéairement à tout vecteur p de \mathbb{R}^2 un vecteur de \mathbb{R}^3 .

Question 6 Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ est trois fois différentiable, quel est le type du tenseur représentant $d^3f(x)$?

- ☐ A : (4, 2, 2, 2),
- ☐ B : (3, 4, 2),
- ☐ C : (4, 2, 1).

Question 7 (réponses multiples) Si f est k fois différentiable en x ,

- ☐ A : les dérivées partielles d'ordre k de f en x existent,
- ☐ B : on a $\partial_{i_k \dots i_1}^k f(x) = d^k f(x) \cdot e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k}$,
- ☐ C : les dérivées partielles de d'ordre k de f en x déterminent $d^k f(x)$ de façon unique.