

# Calcul Intégral I


STEP, MINES ParisTech\*

5 mars 2021 (#72befad)

## Table des matières

<b>Objectifs d'apprentissage</b>	<b>3</b>
<b>Somme et intégrale de Riemann</b>	<b>4</b>
Intervalle de $\mathbb{R}$ . . . . .	4
Longueur d'un intervalle de $\mathbb{R}$ . . . . .	4
Subdivision pointée . . . . .	4
Forme canonique d'une subdivision pointée . . . . .	5
Somme de Riemann . . . . .	5
Intégrale de Riemann . . . . .	6
Intégrale de fonctions vectorielles . . . . .	6
Ensemble négligeable . . . . .	8
Presque partout . . . . .	9
Les ensembles dénombrables sont négligeables . . . . .	9
Critère d'intégrabilité de Lebesgue . . . . .	9
Les fonctions continues par morceaux sont intégrables . . . . .	10
<b>Intégrales de Riemann généralisées</b>	<b>11</b>
Jauge . . . . .	11
Subdivision pointée subordonnée à une jauge . . . . .	11
Représentation graphique des jauges . . . . .	11
Intégrale de Henstock-Kurzweil . . . . .	12
Intégrale de Lebesgue . . . . .	13
Ordre des bornes de l'intégrale . . . . .	13
Intégrale de Riemann et de Lebesgue . . . . .	14

---

\*Ce document est un des produits du projet  **boisgera/CDIS**, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS). Il est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “attribution – pas d'utilisation commerciale – partage dans les mêmes conditions” 4.0 internationale.

<b>Propriétés élémentaires de l'intégrale</b>	<b>17</b>
Théorème fondamental du calcul . . . . .	17
Linéarité . . . . .	17
Additivité . . . . .	19
Restriction . . . . .	20
Croissance de l'intégrale . . . . .	21
Inégalité triangulaire . . . . .	22
Fonctions égales presque partout . . . . .	22
Fonctions égales presque partout (réciproque) . . . . .	24
Continuité des intégrales indéterminées . . . . .	25
Dérivabilité des intégrales indéterminées . . . . .	26
Changement de variable . . . . .	26
<b>Intégration sur des intervalles arbitraires</b>	<b>28</b>
Intervalle de $[-\infty, +\infty]$ . . . . .	28
Longueur d'un intervalle de $[-\infty, +\infty]$ . . . . .	29
Somme de Riemann (extension) . . . . .	29
Extension à la droite réelle achevée . . . . .	30
Propriétés élémentaires de l'intégrale . . . . .	31
<b>Annexe</b>	<b>32</b>
Lemme de Cousin . . . . .	32
Théorème fondamental du calcul (forme générale) . . . . .	32
Critère d'intégrabilité de Cauchy . . . . .	36
Subdivision pointée partielle . . . . .	37
Lemme de Henstock . . . . .	37
Partie positive d'une fonction . . . . .	38
Théorème de Hake . . . . .	40
Théorème fondamental du calcul (extension) . . . . .	40
<b>Exercices complémentaires</b>	<b>42</b>
Méthode des trapèzes . . . . .	42
Fonctions non intégrables . . . . .	42
L'intégrale de Riemann est absolue . . . . .	43
Continuité presque partout . . . . .	43
Poussière de Cantor . . . . .	43
<b>Solutions</b>	<b>44</b>
Exercices essentiels . . . . .	44
Méthode des trapèzes . . . . .	51
Fonctions non intégrables . . . . .	52
L'intégrale de Riemann est absolue . . . . .	53
Continuité presque partout . . . . .	54
Poussière de Cantor . . . . .	54
<b>Références</b>	<b>55</b>

## Objectifs d'apprentissage

Cette section s'efforce d'expliciter et de hiérarchiser les acquis d'apprentissages associés au chapitre. Ces objectifs sont organisés en paliers :

(o) Prérequis (●) Fondamental (●●) Standard (●●●) Avancé (●●●●) Expert

Sauf mention particulière, les objectifs “Expert”, les démonstrations du document<sup>1</sup> et les contenus en annexe ne sont pas exigibles (“hors-programme”).

### Ensembles négligeables

- o savoir calculer la longueur des intervalles de  $\mathbb{R}$ ,
- ● savoir que négligeable  $\approx$  “de-longueur-nulle”,
- ● savoir que tout ensemble dénombrable est négligeable,
- ● savoir que les seuls intervalles négligeables sont vides ou dégénérés<sup>2</sup>,
- ●● savoir définir le terme d'ensemble négligeable,
- ●● savoir interpréter les énoncés comportant des “presque partout”,
- ●/●●/●●● savoir démontrer qu'un ensemble est négligeable.

### Intégrale de Riemann

- ● savoir définir les termes subdivision et subdivision pointée,
- ● savoir calculer les sommes de Riemann associées,
- ●● savoir définir intégrale/intégrable au sens de Riemann,
- ●●● savoir calculer les intégrales de Riemann au moyen de la définition,
- ●● savoir valider asymptotiquement les méthodes de quadrature,
- ●● savoir caractériser les fonctions intégrables au sens de Riemann.

### Intégrales de Riemann généralisées

- ●● connaître la définition du terme jauge,
- ●● connaître la définition de subdivision pointée subordonnée à une jauge,
- ●●● savoir définir intégrable/intégrale au sens de Henstock-Kurzweil,
- ● savoir définir intégrable/intégrale au sens de Lebesgue,
- ● savoir que l'intégrale de Lebesgue étend l'intégrale de Riemann,
- ● connaître deux exemples typiques qui motivent le passage à Lebesgue.

### Intervalles arbitraires

- ● savoir passer d'une intégrale sur un intervalle arbitraire à  $[-\infty, +\infty]$ ,
- ●● savoir définir l'intégrale d'une fonction de  $[-\infty, +\infty]$  dans  $\mathbb{R}$ .

---

1. l'étude des démonstrations du cours peut toutefois contribuer à votre apprentissage, au même titre que la résolution d'exercices.

2. c'est-à-dire réduits à un point.

### Propriétés élémentaires de l'intégrale

- • connaître le théorème fondamental du calcul,
- • savoir que l'intégrale est linéaire, additive et supporte la restriction,
- • savoir que l'intégrale est croissante et satisfait l'inégalité triangulaire,
- •• savoir que deux fonctions égales presque partout ont même intégrale,
- •• connaître la réciproque à ce résultat,
- •• savoir que les intégrales indéterminées sont continues,
- •• savoir que les intégrales indéterminées sont dérivables presque partout,
- ••• connaître le théorème de changement de variable.

## Somme et intégrale de Riemann

### Définition – Intervalle de $\mathbb{R}$

On appelle *intervalle* de  $\mathbb{R}$  tout sous-ensemble  $I$  de  $\mathbb{R}$  tel que si  $x$  et  $y$  appartiennent à  $I$  et vérifient  $x \leq y$  et si  $z$  est un point intermédiaire, tel que  $x \leq z \leq y$ , alors  $z$  appartient également à  $I$ .

Les intervalles de  $\mathbb{R}$  peuvent être bornés ou non-bornés, ouverts, fermés, ouverts et fermés ou ni l'un ni l'autre. Les intervalles de la forme  $]-\infty, +\infty[$  (c'est-à-dire  $\mathbb{R}$ ),  $]-\infty, b[$ ,  $]a, +\infty[$  et  $]a, b[$  – où  $a$  et  $b$  désignent des nombres réels – sont les intervalles ouverts. Les intervalles de la forme  $]-\infty, +\infty]$ ,  $]-\infty, b]$ ,  $[a, +\infty[$  et  $[a, b]$  sont les intervalles fermés. Les intervalles de la forme  $[a, b]$  sont les intervalles simultanément fermés et bornés (compacts).

### Définition – Longueur d'un intervalle de $\mathbb{R}$

La *longueur*  $\ell(I)$  d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  est le nombre réel étendu positif (appartenant à  $[0, +\infty]$ ) défini pour tout intervalle borné  $I$  de la forme  $[a, b]$ ,  $]a, b[$ ,  $[a, b[$  ou  $]a, b]$  avec  $a \leq b$  par

$$\ell(I) = b - a$$

et si  $I$  est non-borné par

$$\ell(I) = +\infty.$$

### Définition – Subdivision pointée

Une *subdivision* de l'intervalle  $[a, b]$  est une collection finie

$$\{I_i \mid i \in \{0, \dots, m-1\}\}$$

constituée d'intervalles fermés inclus dans  $[a, b]$ , *sans chevauchement* – si  $i$  et  $j$  diffèrent, l'intersection de  $I_i$  et  $I_j$  contient au plus un point – et *recouvrant*  $[a, b]$

– l’union de tous les intervalles  $I_i$  inclut  $[a, b]$ .

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=0}^{m-1} I_i.$$

Une *subdivision pointée*  $\mathcal{D}$  de l’intervalle  $[a, b]$  est une collection finie

$$\mathcal{D} = \{(t_i, I_i) \mid i \in \{0, \dots, m-1\}\}$$

où  $\{I_i\}_{i=0}^{m-1}$  est une subdivision de  $[a, b]$  et  $t_i \in I_i$  pour tout  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ .

### Remarque – Forme canonique d’une subdivision pointée

En ordonnant les intervalles  $I_i$  d’une subdivision pointée  $\{(t_i, I_i) \mid i \in \{0, \dots, m-1\}\}$  “de la gauche vers la droite” et en notant chaque intervalle comme  $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ , on peut la caractériser par des réels  $x_0, x_1, \dots, x_m, t_0, \dots, t_{m-1}$  vérifiant

$$a = x_0 \leq t_0 \leq x_1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{m-1} \leq x_m = b.$$

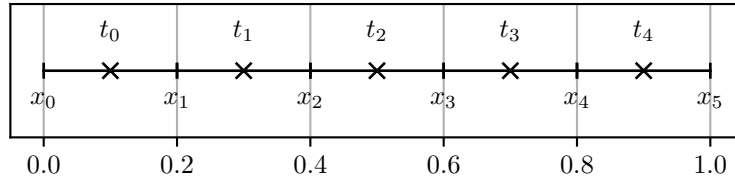


FIGURE 1 – Subdivision pointée  $\mathcal{D} = \{(0.1, [0, 0.2]), \dots, (0.9, [0.8, 1])\}$  de  $[0, 1]$ . Les intervalles de la subdivision sont délimités par des barres verticales et les points associés représentés par des croix.

### Définition – Somme de Riemann

La somme de Riemann associée à la fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et à la subdivision pointée  $\mathcal{D}$  de  $[a, b]$  est la grandeur

$$S(f, \mathcal{D}) = \sum_{(t, I) \in \mathcal{D}} f(t) \ell(I).$$

Pour une subdivision  $\mathcal{D}$  sous forme canonique  $\{(t_i, [x_i, x_{i+1}]) \mid i \in \{0, \dots, m-1\}\}$ , on obtient

$$S(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=0}^{m-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i).$$

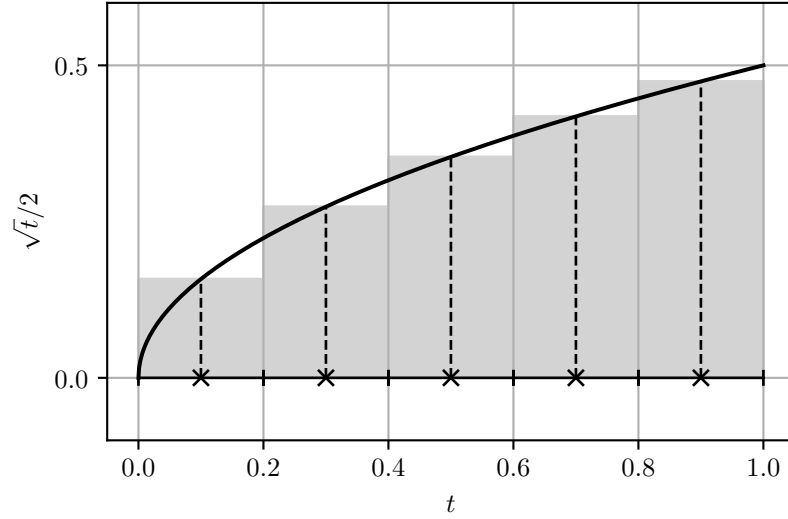


FIGURE 2 – L'aire de la zone grisée correspond à la valeur de la somme de Riemann  $S(f, \mathcal{D})$  pour  $f : t \in [0, 1] \mapsto \sqrt{t}/2$  et  $\mathcal{D} = \{(0.1, [0, 0.2]), \dots, (0.9, [0.8, 1])\}$ .

### Définition – Intégrale de Riemann

Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *intégrable au sens de Riemann* s'il existe un réel  $A$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $\delta > 0$  tel que pour toute subdivision pointée  $\mathcal{D}$  de  $[a, b]$  vérifiant pour  $(t, J) \in \mathcal{D}$ ,  $\ell(J) < \delta$ , on ait  $|S(f, \mathcal{D}) - A| \leq \varepsilon$ . Le réel  $A$  quand il existe est unique ; il est appelé *intégrale (de Riemann) de  $f$  sur  $[a, b]$*  :

$$(R) \int_a^b f(t) dt := A.$$

### Remarque – Intégrale de fonctions vectorielles

Les fonctions  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  ne présentent pas de difficulté particulière pour l'intégration, nous n'en parlerons donc pas spécifiquement par la suite. Nous conviendrons qu'une telle fonction est intégrable au sens de Riemann<sup>3</sup> si toutes ses composantes  $f_i$  le sont. Nous définirons alors l'intégrale associée comme le vecteur de  $\mathbb{R}^m$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,

$$\left[ \int_a^b f(t) dt \right]_i = \int_a^b f_i(t) dt.$$

3. et par la suite, au sens de Henstock-Kurzweil ou de Lebesgue.

**Exemple – Quadrature** Cette définition de l'intégrale permet de garantir l'exactitude asymptotique de méthodes de quadrature – c'est-à-dire d'algorithmes de calcul numérique d'intégrales – comme la méthode des rectangles. En effet, si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction intégrable au sens de Riemann, et  $\mathcal{D}_m$  une subdivision pointée de  $[a, b]$  de la forme

$$\mathcal{D}_m = \left\{ \left( a + i \frac{b-a}{m}, \left[ a + i \frac{b-a}{m}, a + (i+1) \frac{b-a}{m} \right] \right) \mid i \in \{0, \dots, m-1\} \right\},$$

la somme de Riemann associée vérifie

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{D}_m) &= \sum_{i=0}^{m-1} f \left( a + i \frac{b-a}{m} \right) \ell \left( \left[ a + i \frac{b-a}{m}, a + (i+1) \frac{b-a}{m} \right] \right) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} f \left( a + i \frac{b-a}{m} \right) \frac{b-a}{m} \\ &= \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f \left( a + i \frac{b-a}{m} \right) \end{aligned}$$

De plus, quel que soit  $\delta > 0$ , pour  $m$  suffisamment grand, on a

$$\ell \left( \left[ a + i \frac{b-a}{m}, a + (i+1) \frac{b-a}{m} \right] \right) = \frac{b-a}{m} < \delta.$$

Par conséquent,

$$\frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f \left( a + i \frac{b-a}{m} \right) \rightarrow (\mathbf{R}) \int_a^b f(t) dt \text{ quand } m \rightarrow +\infty.$$

La définition de l'intégrale de Riemann ne se limite pas à une famille particulière de subdivisions – comme ici à des subdivisions régulières de  $[a, b]$  où tous les intervalles sont de même longueur – et n'impose pas une position fixe au point  $t_i$  dans l'intervalle  $J_i$  – comme ici à gauche de l'intervalle – ce qui garantit une forme de robustesse à la définition de l'intégrale ; d'autres méthodes de quadratures pourront être utilisées avec le même résultat asymptotique.

**Exercice – Fonction affine (••)** Montrer que toute fonction affine  $x \in \mathbb{R} \mapsto \alpha x + \beta$  est intégrable au sens de Riemann sur tout intervalle fermé borné  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  et que

$$(\mathbf{R}) \int_a^b (\alpha t + \beta) dt = A := \alpha \left( \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) + \beta(b-a).$$

Indication : vérifier tout d'abord que si  $\mathcal{D} = \{(t_i, [x_i, x_{i+1}]) \mid i \in \{0, \dots, m-1\}\}$  est une subdivision pointée de  $[a, b]$  sous forme canonique, alors  $A$  est la somme d'une série télescopique :

$$A = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha \left( \frac{x_{i+1}^2}{2} - \frac{x_i^2}{2} \right) + \beta(x_{i+1} - x_i).$$

(Solution p. 44.)

On rappelle qu'un ensemble est *dénombrable* s'il est fini ou en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

### Définition – Ensemble négligeable

Un ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$  est *négligeable* si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un recouvrement de  $A$  par une collection dénombrable d'intervalles  $I_1, I_2, \dots, I_i, \dots$  de  $\mathbb{R}$

$$A \subset \bigcup_i I_i$$

telle que

$$\sum_i \ell(I_i) \leq \varepsilon.$$

Nous voyons que le procédé qui définit la notion d'ensemble négligeable consiste à produire des estimations supérieures ou égales à la “longueur”<sup>4</sup> de l'ensemble – un concept non défini à ce stade – au moyen d'un recouvrement par des intervalles, ensembles pour lesquels la notion de longueur est bien définie. Si on peut construire des estimations supérieures aussi petites que l'on veut, l'ensemble est négligeable, c'est-à-dire intuitivement, “de longueur nulle”. Le chapitre à venir confirmera cette intuition.

**Exercice – Ensembles finis (•)** Montrer que tout sous-ensemble fini de  $\mathbb{R}$  est négligeable. (Solution p. 44.)

**Exercice – Intervalles négligeables (••••)** Montrer que si  $a < b$ , l'ensemble  $[a, b]$  n'est pas négligeable. Indication : montrer que si les intervalles  $I_i$  recouvrent  $[a, b]$ , alors  $\sum_i \ell(I_i) \geq b - a$  ; on commencera par le cas d'une collection finie d'intervalles. (Solution p. 45.)

**Exercice – Sous-ensemble d'un ensemble négligeable (•)** Montrer que si l'ensemble  $A$  est négligeable et que  $B \subset A$ , alors  $B$  est également négligeable. (Solution p. 45.)

**Exercice – Union d'ensembles négligeables (•••)** Est-ce que l'union de deux ensembles négligeables est négligeable ? L'union d'un nombre fini d'ensembles négligeables ? L'union d'une collection dénombrable d'ensembles négligeables ? L'union d'une collection arbitraire d'ensembles négligeables ? (Solution p. 45.)

---

4. techniquement, compte tenu du procédé employé, on devrait parler de “mesure extérieure de longueur”, la longueur d'un ensemble arbitraire de  $\mathbb{R}$  n'étant pas toujours définie.



### Définition – Presque partout

Une propriété  $P$  dépendant d'un réel  $x$  est vraie *presque partout* si l'ensemble des points  $x$  où elle est fausse est un ensemble négligeable. On pourra utiliser la notation “ $P$  p.p.” ou “ $P(x)$  p.p.” pour signifier que la propriété  $P$  est vraie presque partout.

**Exercice – Etre non nul (•)** Est-ce que la propriété “ $x$  est non-nul” est vraie presque partout dans  $\mathbb{R}$  ? (Solution p. 46.)

**Exercice – Fonction continue nulle presque partout (•••)** Montrer que toute fonction continue  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui est nulle presque partout est identiquement nulle. (Solution p. 46.)

### Proposition – Les ensembles dénombrables sont négligeables

Si le sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}$  est dénombrable alors il est négligeable.

**Démonstration** L'ensemble  $E$  étant dénombrable, il existe une suite de réels  $x_n$  tels que  $E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . La collection d'intervalles  $\{[x_i, x_i] \mid i \in \mathbb{N}\}$  recouvre  $E$ . Comme

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \ell([x_i, x_i]) = \sum_{i=0}^{+\infty} 0 = 0,$$

l'ensemble est donc négligeable. ■

**Exercice – Etre irrationnel (•)** Est-ce que la propriété “ $x$  est irrationnel” est vraie presque partout dans  $\mathbb{R}$  ? (Solution p. 46.)

L'intégrale de Riemann possède des limitations qui en font un outil mathématique difficile à exploiter. En particulier, la classe des fonctions qui peuvent être intégrées est trop restrictive pour certaines applications car les fonctions “trop grandes” ou “trop irrégulières” ne sont pas intégrables.

### Théorème – Critère d'intégrabilité de Lebesgue

La fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable au sens de Riemann si et seulement si  $f$  est bornée et continue presque partout.

**Démonstration** Nous nous contentons de démontrer ici la partie la plus facile du résultat, à savoir que seules les fonctions bornées sont potentiellement intégrables. Pour le reste de la preuve, se reporter à (Burk 2007, 58).

Soit  $\delta > 0$  tel que pour toute subdivision pointée  $\mathcal{D}$  de  $[a, b]$  vérifiant  $\ell(J) < \delta$  pour tout  $(t, J) \in \mathcal{D}$ , on ait

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq 1.$$

Soit  $\mathcal{D} = \{(t_i, [x_i, x_{i+1}]) \mid i \in \{0, \dots, m-1\}\}$  une telle subdivision ; il est toujours possible de supposer en outre que  $\mathcal{D}$  ne contient aucun intervalle de longueur nulle (enlever de tels intervalles engendre une nouvelle subdivision dont la somme de Riemann est identique).

Soit  $J_i = [x_i, x_{i+1}]$  un intervalle de  $\mathcal{D}$  ; si l'on définit  $\mathcal{D}'$  à partir de  $\mathcal{D}$  en remplaçant  $t_i$  par un  $t$  de  $J_i$  quelconque, on obtient

$$\begin{aligned} |f(t)\ell(J_i) - f(t_i)\ell(J_i)| &= |S(f, \mathcal{D}') - S(f, \mathcal{D})| \\ &\leq \left| S(f, \mathcal{D}') - \int_a^b f(t) dt \right| + \left| S(f, \mathcal{D}) - \int_a^b f(t) dt \right| \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$|f(t)| \leq |f(t_i)| + \frac{2}{\ell(J_i)}.$$

Les intervalles  $J_i$  recouvrant  $[a, b]$ , on a pour tout  $t \in [a, b]$

$$|f(t)| \leq \max \left\{ |f(t_i)| + \frac{2}{\ell(J_i)} \mid i \in \{0, \dots, m-1\} \right\};$$

la fonction  $f$  est donc bornée. ■

En particulier,

### Corollaire – Les fonctions continues par morceaux sont intégrables

Si la fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue par morceaux, elle est intégrable au sens de Riemann.

**Démonstration** Les fonctions continues par morceaux sur un intervalle fermé borné sont discontinues en un nombre fini de points, donc continues presque partout ; elle sont également bornées. Par le critère d'intégrabilité de Lebesgue (p. 9), elles sont donc intégrables au sens de Riemann. ■

# Intégrales de Riemann généralisées

## Définition – Jauge

Une *jauge*  $\gamma$  sur un intervalle  $[a, b]$  est une fonction qui associe à tout  $t \in [a, b]$  un intervalle ouvert  $\gamma(t)$  contenant  $t$ .

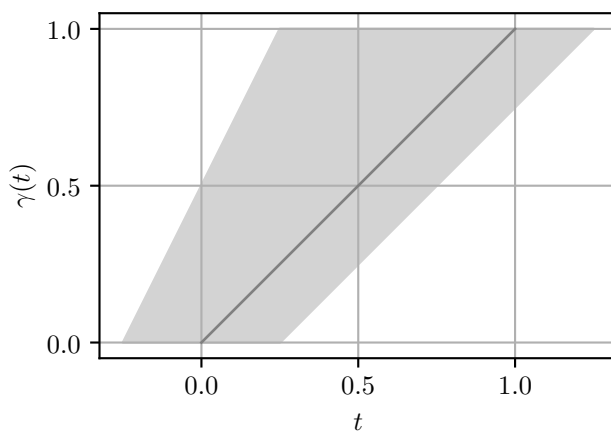


FIGURE 3 – Graphe de la jauge  $\gamma(t) = ]t/2 - 0.25, t + 0.25[$ ,  $t \in [0, 1]$ .

## Définition – Subdivision pointée subordonnée à une jauge

Une subdivision pointée  $\mathcal{D}$  de l'intervalle  $[a, b]$  est *subordonnée à une jauge*  $\gamma$  sur  $[a, b]$  si pour tout  $(t, J) \in \mathcal{D}$ ,  $J \subset \gamma(t)$ .

## Remarque – Représentation graphique des jauges

On peut associer à une jauge  $\gamma$  sur  $[a, b]$  l'ensemble du plan

$$\{(x, y) \mid y \in [a, b], x \in \gamma(y)\}.$$

Par construction, cet ensemble contient la diagonale  $D = \{(x, x) \mid x \in [a, b]\}$ . La représentation graphique de cet ensemble permet de visualiser si une subdivision pointée est ou non subordonnée à la jauge considérée.

La définition de l'intégrale de Henstock-Kurzweil est similaire à l'intégrale de Riemann classique. Comme cette dernière, elle exploite des sommes de Riemann pour fournir une estimation de l'intégrale et contrôle la finesse des subdivisions employées pour améliorer la précision de cette estimation ; mais contrairement à cette dernière, elle permet de contrôler différemment cette finesse en fonction de la région de l'intervalle d'intégration considérée.

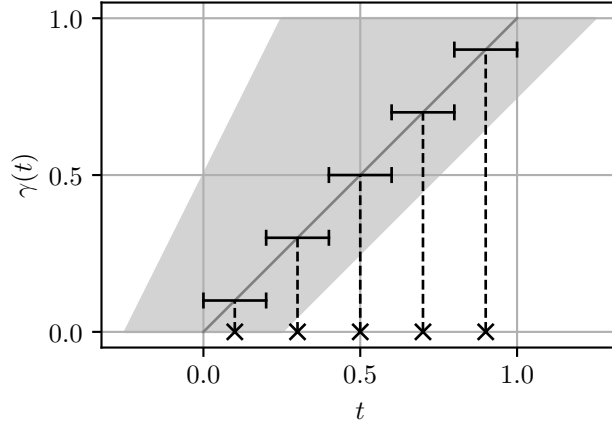


FIGURE 4 – Graphe de la jauge  $\gamma(t) = ]t/2 - 0.25, t + 0.25[$ ,  $t \in [0, 1]$  et de la subdivision pointée  $\{(0.1, [0, 0.2]), \dots, (0.9, [0.8, 1])\}$ ; les intervalles de la subdivision sont délimités par des barres verticales et les points associés représentés par des croix. La comparaison avec le graphe de la jauge  $\gamma$  montre que cette subdivision pointée lui est subordonnée.

### Définition – Intégrale de Henstock-Kurzweil

Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *intégrable au sens de Henstock-Kurzweil* s'il existe un réel  $A$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une jauge  $\gamma$  sur  $[a, b]$  telle que, pour toute subdivision pointée  $\mathcal{D}$  de  $[a, b]$  subordonnée à  $\gamma$ , on ait  $|S(f, \mathcal{D}) - A| \leq \varepsilon$ . Le réel  $A$  quand il existe est unique; il est appelé *intégrale de Henstock-Kurzweil de  $f$  sur  $[a, b]$*  :

$$(\text{HK}) \int_a^b f(t) dt := A.$$

L'intégrale de Henstock-Kurzweil est une intégrale extrêmement générale qui apporte des réponses satisfaisantes à certaines questions que ses concurrentes ne traitent qu'imparfaitement<sup>5</sup>. Mais avec cette puissance vient une certaine fragilité; la plupart des mathématiciens contemporains préfèrent opter pour une intégrale un peu moins expressive mais un peu plus "confortable", l'intégrale de Lebesgue; nous adopterons également ce choix dans la suite : par défaut, "intégrabilité" et "intégrale" seront à comprendre dans la suite comme "au sens de Lebesgue". Nous utiliserons l'intégrale de Henstock-Kurzweil uniquement comme

5. Par exemple, la forme générale du théorème fondamental du calcul (p. 32) n'est valable ni pour l'intégrale de Riemann, ni pour l'intégrale de Lebesgue, mais elle l'est pour l'intégrale de Henstock-Kurzweil. On rappelle que cette forme générale permet d'établir la preuve de l'inégalité des accroissements finis. Le théorème de Hake (p. 40), qui établit que les intégrales impropres ne sont jamais nécessaires, est aussi spécifique à l'intégrale de Henstock-Kurzweil.

un moyen efficace pour définir l'intégrale de Lebesgue<sup>6</sup>.

### Définition – Intégrale de Lebesgue

Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *intégrable (au sens de Lebesgue)* si les fonctions  $f$  et  $|f|$  sont intégrables au sens de Henstock-Kurzweil. *L'intégrale (de Lebesgue) de  $f$  sur  $[a, b]$*  coïncide alors avec l'intégrale de Henstock-Kurzweil :

$$\int_a^b f(t) dt := (L) \int_a^b f(t) dt = (HK) \int_a^b f(t) dt.$$

On trouvera dans la littérature ce type d'intégrale désignées par le terme d'*intégrale de Riemann généralisée* ou d'*intégrale de jauge*<sup>7</sup>. L'intégrale de Henstock-Kurzweil est aussi appelée *intégrale de Kurzweil-Henstock*<sup>8</sup> ou *intégrale de Denjoy-Perron-Kurzweil-Henstock*<sup>9</sup>.

L'intégrale de Henstock-Kurzweil présente le “défaut” d'être *conditionnelle* : il est possible qu'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  soit intégrable sans que sa valeur absolue  $|f|$  le soit (cf. exemple dans l'annexe du chapitre “Calcul Intégral II”). Par construction, l'intégrale de Lebesgue n'a pas cet inconvénient ; elle est dite *absolue* :

**Exercice – L'intégrale de Lebesgue est absolue (o)** Montrer que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable, alors  $|f|$  est intégrable. (Solution p. 46.)

### Remarque – Ordre des bornes de l'intégrale

Comme dans le cas de l'intégrale de Riemann, la notation désignant l'intégrale peut être étendue sans difficulté au cas où  $b < a$  ; on définit alors l'intégrale de  $a$  à  $b$  en se ramenant au cas précédent, par

$$\int_a^b f(t) dt := - \int_b^a f(t) dt.$$

---

6. La définition originale de Lebesgue de l'intégrale, antérieure à la définition qui exploite l'intégrale de Henstock-Kurzweil, n'utilise ni jauge ni somme de Riemann, mais introduit une rupture franche dans la façon d'aborder la question.

7. Mais ces termes sont génériques ; en particulier il existe d'autres intégrales dont la définition repose sur des sommes de Riemann et des jauges, comme l'intégrale de McShane.

8. Techniquement, Jaroslav Kurzweil a inventé cette construction avant Ralph Henstock dans les années 1950, mais dans un but bien précis – l'étude des équations différentielles généralisées – probablement sans réaliser totalement la portée de sa définition.

9. Arnaud Denjoy et Oskar Perron ont introduit dès les années 1910 des intégrales équivalentes, mais dont les définitions sont beaucoup plus complexes et en apparence très différentes ; en particulier, les sommes de Riemann n'interviennent pas dans leurs définitions.

### Théorème – Intégrale de Riemann et de Lebesgue

Toute fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable au sens de Riemann est intégrable (au sens de Lebesgue) et les deux intégrales coïncident.

$$\int_a^b f(t) dt = (\text{R}) \int_a^b f(t) dt.$$

**Démonstration** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable au sens de Riemann, d'intégrale  $A$ ; soit  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$  tels que si la subdivision pointée  $\mathcal{D}$  de  $[a, b]$  est telle que pour  $(t, I) \in \mathcal{D}$ ,  $\ell(J) < \delta$  alors  $|S(f, \mathcal{D}) - A| \leq \varepsilon$ .

Considérons la jauge  $\gamma$  sur  $[a, b]$  définie par  $\gamma(t) = ]t - \delta/2, t + \delta/2[$ . Si la subdivision pointée  $\mathcal{D}$  est subordonnée à  $\gamma$ , alors pour tout  $(t, J) \in \mathcal{D}$ , on a  $J \subset ]t - \delta/2, t + \delta/2[$ ; par conséquent,  $\ell(J) < \delta$  et donc  $|S(f, \mathcal{D}) - A| \leq \varepsilon$ . La fonction  $f$  est donc intégrable au sens de Henstock-Kurzweil et l'intégrale associée est égale à son intégrale de Riemann.

Par ailleurs, par le critère d'intégrabilité de Lebesgue (p. 9), comme  $f$  est intégrable au sens de Riemann, elle est bornée et continue presque partout. Sa valeur absolue  $|f|$  est donc également bornée et continue presque partout et donc intégrable au sens de Riemann par le même critère. La fonction  $f$  est donc intégrable au sens de Lebesgue et

$$\int_a^b f(t) dt = (\text{HK}) \int_a^b f(t) dt = (\text{R}) \int_a^b f(t) dt.$$

■

**Exemple – Intégration de  $x \mapsto e^x$**  La fonction  $f : x \in [0, 1] \mapsto e^x \in \mathbb{R}$  est continue et est sa propre primitive. Par le théorème fondamental du calcul (p. 17), on a donc

$$\int_0^1 e^x dx = [x \mapsto e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Nous allons établir ce résultat directement, sans avoir recours au théorème fondamental du calcul. Précisément, nous allons établir que pour tout  $\varepsilon > 0$ , si  $\gamma$  est la jauge sur  $[0, 1]$  définie par

$$\gamma(t) = \left] t - \frac{\varepsilon}{2e}, t + \frac{\varepsilon}{2e} \right[$$

et que la subdivision pointée  $\mathcal{D}$  de  $[0, 1]$  est subordonnée à  $\gamma$ , alors  $|S(f, \mathcal{D}) - (e - 1)| \leq \varepsilon$ .

Soit  $\mathcal{D}$  une telle subdivision pointée, que l'on suposera de la forme

$$\mathcal{D} = \{(t_i, [x_i, x_{i+1}]) \mid i \in \{0, \dots, m-1\}\}$$

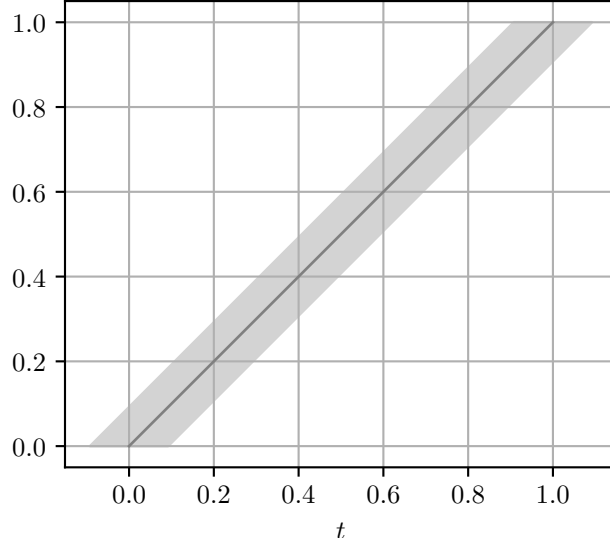


FIGURE 5 – Graphe de la jauge  $\gamma$  garantissant une précision  $\varepsilon = 1/2$  à la somme de Riemann en tant qu'approximation de l'intégrale de  $x \in [0, 1] \mapsto e^x$ .

où la suite des  $x_i$  est croissante. Comme  $x_0 = 0$  et  $x_m = 1$ , on a

$$\begin{aligned} e - 1 &= e^{x_m} - e^{x_0} = (e^{x_1} - e^{x_0}) + (e^{x_2} - e^{x_1}) + \dots + (e^{x_m} - e^{x_{m-1}}) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (e^{x_{i+1}} - e^{x_i}) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} |S(f, \mathcal{D}) - (e - 1)| &= \left| \sum_{i=0}^{m-1} e^{t_i} (x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{m-1} (e^{x_{i+1}} - e^{x_i}) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} |e^{t_i} (x_{i+1} - x_i) - e^{x_{i+1}} + e^{x_i}|. \end{aligned}$$

Posons  $x = x_i$ ,  $y = x_{i+1}$  et  $t = t_i$ . On remarque que

$$e^t(y - x) - e^y + e^x = (e^t y - e^y) - (e^t x - e^x).$$

La fonction  $s \in [x, y] \mapsto e^t s - e^s$  étant dérivable de dérivée  $e^t - e^s$ , par l'inégalité des accroissements finis, on obtient

$$|e^t(y - x) - e^y + e^x| \leq \sup_{s \in [x, y]} |e^t - e^s| \times (y - x).$$

Puis, en appliquant à nouveau l'inégalité des accroissements finis à la fonction

$\tau \in [x, y] \mapsto e^\tau$ , de dérivée  $e^\tau$ , et en utilisant l'inclusion  $[x, y] \subset \gamma(t)$ , on obtient

$$|e^t - e^s| \leq \sup_{\tau \in [x, y]} e^\tau \times |t - s| \leq e \times (y - x) \leq e \times \frac{\varepsilon}{e} = \varepsilon.$$

Par conséquent,  $|e^t(y - x) - e^y + e^x| \leq \varepsilon(y - x)$ , ce dont on déduit l'inégalité souhaitée :

$$\begin{aligned} |S(f, \mathcal{D}) - (e - 1)| &\leq \sum_{i=0}^{m-1} |e^{t_i}(x_{i+1} - x_i) - e^{x_{i+1}} + e^{x_i}| \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \varepsilon(x_{i+1} - x_i) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

**Exemple – Intégration de  $x \mapsto 1/\sqrt{x}$**  Considérons la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La difficulté de cet exemple est liée à la “singularité” de  $f$  en  $x = 0$ , où la fonction est à la fois discontinue et localement non-bornée. Si au lieu de l'intervalle  $[0, 1]$ , on considère l'intervalle  $[a, 1]$  où  $0 < a \leq 1$ , la fonction  $f$  restreinte à  $[a, 1]$  est continue donc intégrable et la fonction  $F : x \in [a, 1] \mapsto 2\sqrt{x}$  en est une primitive. Elle y est intégrable par le théorème fondamental du calcul (p. 17) et

$$\int_a^1 f(x) dx = \int_a^1 (2\sqrt{x})' dx = [2\sqrt{x}]_a^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{a}.$$

Si  $f$  est bien intégrable sur  $[0, 1]$ , l'expression ci-dessus suggère que son intégrale pourrait être

$$\int_0^1 f(x) dx \stackrel{?}{=} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2.$$

Cette intuition est fondée : nous prouvons en annexe (p. 34) que si  $\varepsilon > 0$ , on a  $|S(f, \mathcal{D}) - 2| \leq \varepsilon$  quand  $\mathcal{D}$  est subordonnée à la jauge  $\gamma$  définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} \left[ -1, \frac{\varepsilon^2}{16} \right] & \text{si } t = 0, \\ \left[ \frac{t}{(1 + \varepsilon/\sqrt{t})^2}, t(1 + \varepsilon\sqrt{t})^2 \right] & \text{si } t \in ]0, 1]. \end{cases}$$



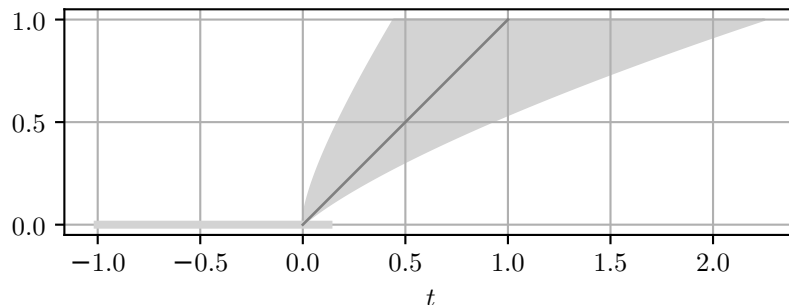


FIGURE 6 – Graphe de la jauge  $\gamma$  avec  $\varepsilon = 0.5$

## Propriétés élémentaires de l'intégrale

### Théorème – Théorème fondamental du calcul

Soit  $[a, b]$  un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$  ; si la fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable et que sa dérivée est intégrable alors

$$[f]_a^b := f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

**Démonstration** Si  $f'$  existe et est intégrable (au sens de Lebesgue), alors elle est par définition intégrable au sens de Henstock-Kurzweil et d'après la forme générale du théorème fondamental du calcul (p. 32) en annexe, l'égalité souhaitée est satisfaite. ■

**Intégration de  $x \mapsto e^x$  (o)** Montrer que

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

(Solution p. 46.)

### Théorème – Linéarité

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sont intégrables et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , alors  $f + g$  et  $\alpha f$  sont intégrables. De plus,

$$\int_a^b f(t) + g(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt.$$

**Démonstration** Supposons dans un premier temps uniquement que  $f$  et  $g$  sont intégrables au sens de Henstock-Kurzweil. Si  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver des jauges  $\gamma_f$  et  $\gamma_g$  sur  $[a, b]$  telles que pour toute subdivision pointée  $\mathcal{D}$  subordonnée à  $\gamma_f$  et  $\gamma_g$ , on ait

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - (\text{HK}) \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left| S(g, \mathcal{D}) - (\text{HK}) \int_a^b g(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme  $S(f+g, \mathcal{D}) = S(f, \mathcal{D}) + S(g, \mathcal{D})$ , toute subdivision pointée  $\mathcal{D}$  subordonnée à la jauge  $\gamma$  définie par  $\gamma(t) = \gamma_f(t) \cap \gamma_g(t)$  vérifie

$$\left| S(f+g, \mathcal{D}) - \left( (\text{HK}) \int_a^b f(t) dt + (\text{HK}) \int_a^b g(t) dt \right) \right| \leq \varepsilon.$$

La fonction  $f+g$  est donc intégrable au sens de Henstock-Kurzweil et son intégrale de Henstock-Kurzweil sur  $[a, b]$  est la somme des intégrales de Henstock-Kurzweil de  $f$  et de  $g$  sur  $[a, b]$  :

$$(\text{HK}) \int_a^b f(t) + g(t) dt = (\text{HK}) \int_a^b f(t) dt + (\text{HK}) \int_a^b g(t) dt.$$

De façon similaire,  $S(\alpha f, \mathcal{D}) = \alpha S(f, \mathcal{D})$ . Dans le cas où  $\alpha = 0$ , il est clair que  $\alpha f$  est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil et d'intégrale nulle ; dans le cas contraire, on peut trouver une jauge  $\gamma$  sur  $[a, b]$  telle que pour toute subdivision pointée  $\mathcal{D}$  subordonnée à  $\gamma$ , on ait :

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - (\text{HK}) \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{|\alpha|}.$$

On a alors

$$\left| S(\alpha f, \mathcal{D}) - \alpha (\text{HK}) \int_a^b f(t) dt \right| = |\alpha| \left| S(f, \mathcal{D}) - (\text{HK}) \int_a^b f(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

La fonction  $\alpha f$  est donc intégrable au sens de Henstock-Kurzweil sur  $[a, b]$  et son intégrale est le produit de  $\alpha$  et de l'intégrale de Henstock-Kurzweil de  $f$  sur  $[a, b]$  :

$$(\text{HK}) \int_a^b \alpha f(t) dt = \alpha (\text{HK}) \int_a^b f(t) dt.$$

Pour établir les résultats correspondants avec l'intégrale de Lebesgue, il nous suffit de montrer que si  $f$  et  $g$  sont intégrables au sens de Lebesgue, alors c'est également le cas de  $\alpha f$  et de  $f+g$ .

Pour  $\alpha f$ , il suffit de constater que  $|\alpha f| = |\alpha||f|$  ;  $\alpha f$  et  $|\alpha f|$  sont donc intégrables au sens de Henstock-Kurzweil et  $\alpha f$  est donc intégrable au sens de Lebesgue.

Concernant  $f + g$ , en introduisant la partie positive  $x_+ := \max(x, 0)$  et négative  $x_- := \min(-x, 0) = -(-x)_+$ , on peut écrire que

$$|f + g| = (f + g)_+ + (f + g)_- = (f + g)_+ - (-f - g)_+$$

Comme  $f + g$  est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil, que  $(f + g)_+ \leq |f| + |g|$  et que  $|f| + |g|$  est intégrable, la partie positive  $(f + g)_+$  est intégrable (p. 38); le même argument s'applique à  $(-f - g)_+$ . Donc  $|f + g| = (f + g)_+ - (-f - g)_+$  est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil; les fonctions  $f + g$  et  $|f + g|$  sont intégrables au sens de Henstock-Kurzweil,  $f + g$  est donc intégrable au sens de Lebesgue. ■

**Intégration par parties (•)** Montrer que si les fonctions  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sont dérivables, et que les fonctions  $f'g$  et  $fg'$  sont intégrables, alors

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt.$$

(Solution p. 46.)

### Théorème – Additivité

Si la fonction  $f$  est définie et intégrable sur les intervalles  $[a, b]$  et  $[b, c]$ , alors elle est intégrable sur l'intervalle  $[a, c]$  et

$$\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt.$$

**Démonstration** Soit  $\varepsilon > 0$ . Si la fonction  $f$  est intégrable (au sens de Lebesgue) sur  $[a, b]$  et  $[b, c]$  alors les fonctions  $f$  et  $|f|$  y sont intégrables au sens de Henstock-Kurzweil.

Concernant  $f$  tout d'abord : il existe donc deux jauges  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que pour toutes les subdivisions pointées  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  de  $[a, b]$  et  $[b, c]$  respectivement subordonnées à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ ,

$$\left| S(f, \mathcal{D}_1) - (\text{HK}) \int_a^b f(t) dt \right| \leq \varepsilon/2 \text{ et } \left| S(f, \mathcal{D}_2) - (\text{HK}) \int_b^c f(t) dt \right| \leq \varepsilon/2.$$

Définissons la fonction  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$  par:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_1(x) \cap ]-\infty, b[ & \text{si } a < x < b, \\ \gamma_1(x) \cap \gamma_2(x) & \text{si } x = b, \\ \gamma_2(x) \cap ]b, +\infty[ & \text{si } b < x < c. \end{cases}$$

Par construction, cette fonction est une jauge sur  $[a, c]$  (pour tout  $x \in [a, c]$ ,  $\gamma(x)$  est un intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$  contenant  $x$ ). Supposons que  $\mathcal{D} = \{(t_i, I_i) \mid i \in \{1, \dots, m\}\}$  soit une subdivision pointée de  $[a, c]$  subordonnée à  $\gamma$ . Admettons temporairement que chaque intervalle  $I_i$  appartienne à  $[a, b]$  ou bien dans le cas contraire à  $[b, c]$ . Les deux subdivisions pointées  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont telles que

$$S(f, \mathcal{D}) = S(f, \mathcal{D}_1) + S(f, \mathcal{D}_2).$$

Elles sont également subordonnées à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  respectivement ; par conséquent

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - (\text{HK}) \int_a^b f(t) dt + (\text{HK}) \int_b^c f(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Si notre hypothèse temporaire n'est pas vérifiée, c'est qu'il existe un (unique) intervalle  $I_i$  à cheval sur  $[a, b]$  et  $[b, c]$ , c'est-à-dire d'intersection non vide avec  $[a, b]$  et avec  $]b, c]$ . La jauge  $\gamma$  a été choisie de telle sorte que si  $x \neq b$ , alors  $b \notin \gamma(x)$  ; par conséquent, si cet intervalle  $I_i = [d_i, e_i]$  existe, alors  $t_i = b$  et on peut remplacer le terme  $(t_i, I_i)$  dans la subdivision pointée  $\mathcal{D}$  par  $(b, [d_i, b])$  et  $(b, [b, e_i])$  sans que la somme de Riemann associée change (le terme  $f(b)\ell([d_i, e_i])$  étant égal à  $f(b)\ell([d_i, b]) + f(b)\ell([b, e_i])$ ). La nouvelle subdivision  $\mathcal{D}'$  ainsi construite vérifie quant à elle l'hypothèse de non-chevauchement de  $b$ . Par conséquent l'inégalité ci-dessus est satisfaite dans le cas général. La fonction  $f$  est donc intégrable au sens de Henstock-Kurzweil sur  $[a, b]$  et

$$(\text{HK}) \int_a^b f(t) dt + (\text{HK}) \int_b^c f(t) dt = (\text{HK}) \int_a^c f(t) dt.$$

L'intégrabilité de  $|f|$  se montre de la même façon que celle de  $f$  ; la fonction  $f$  est donc intégrable (au sens de Lebesgue) sur  $[a, b]$  et

$$\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt.$$

■

La propriété d'additivité (p. 19) de l'intégrale – qui permet de prouver l'intégrabilité de l'intégrale sur un intervalle à partir de son intégrabilité sur des intervalles qui la compose – admet une réciproque :

**Exercice – Ordre des bornes et additivité (•)** Adapter l'énoncé du théorème d'additivité (p. 19) pour traiter les cas où l'on n'a pas nécessairement  $a \leq b \leq c$ . (On pourra par exemple se limiter aux cas  $c \leq b \leq a$  et  $a \leq c \leq b$ .) (Solution p. 47.)

### Théorème – Restriction

Si  $f$  est intégrable sur l'intervalle  $[a, b]$ , elle est intégrable sur tout intervalle  $[c, d]$  inclus dans  $[a, b]$ .

**Démonstration** Nous démontrons en détail le cas où  $c = a$  ; le cas où  $d = b$  se prouve de façon similaire et le cas général se déduit facilement de la combinaison de ces deux cas particuliers. Par hypothèse  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ , donc  $f$  et  $|f|$  sont intégrables au sens de Henstock-Kurzweil sur  $[a, b]$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . Par le critère d'intégrabilité de Cauchy (p. 36), il existe une jauge  $\gamma$  sur  $[a, b]$  telle que pour tout couple de subdivisions pointées  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  subordonnées à  $\gamma$ , on ait  $|S(f, \mathcal{D}) - S(f, \mathcal{D}')| \leq \varepsilon$ .

Considérons les restrictions  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de  $\gamma$  à  $[a, d]$  et  $[d, b]$  respectivement. Soient  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}'_1$  deux subdivisions pointées de  $[a, d]$  subordonnées à  $\gamma_1$  ; si  $\mathcal{D}_2$  est une subdivision de  $[d, b]$  subordonnée à  $\gamma_2$ , alors  $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}'_1 \cup \mathcal{D}_2$  sont des subdivisions pointées de  $[a, b]$  subordonnées à  $\gamma$ . Par conséquent,

$$|S(f, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) - S(f, \mathcal{D}'_1 \cup \mathcal{D}_2)| \leq \varepsilon.$$

Or  $S(f, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) = S(f, \mathcal{D}_1) + S(f, \mathcal{D}_2)$  et  $S(f, \mathcal{D}'_1 \cup \mathcal{D}_2) = S(f, \mathcal{D}'_1) + S(f, \mathcal{D}_2)$ , par conséquent

$$|S(f, \mathcal{D}_1) - S(f, \mathcal{D}'_1)| \leq \varepsilon.$$

Par le critère d'intégrabilité de Cauchy (p. 36), la fonction  $f$  est donc intégrable au sens de Henstock-Kurzweil sur l'intervalle  $[a, d]$ . De la même façon, on montre que  $|f|$  est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil sur l'intervalle  $[a, d]$ . La fonction  $f$  est donc intégrable (au sens de Lebesgue) sur l'intervalle  $[a, d]$ . ■

### Proposition – Croissance de l'intégrale

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sont intégrables et que  $f \leq g$ , alors

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

**Démonstration** Par linéarité de l'intégrale (p. 17), il suffit de montrer que si  $h = g - f$  est intégrable et positive alors son intégrale est positive. Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\gamma$  une jauge telle que toute subdivision pointée  $\mathcal{D}$  de  $[a, b]$  subordonnée à  $\gamma$  vérifie

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_a^b h(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Quelle que soit la subdivision pointée  $\mathcal{D}$  de  $[a, b]$ , la somme de Riemann associée

$$S(f, \mathcal{D}) = \sum_{(t, J) \in \mathcal{D}} h(t) \ell(J)$$

est positive, ce qui entraîne par l'inégalité triangulaire

$$\int_a^b h(t) dt \geq S(h, \mathcal{D}) - \varepsilon \geq -\varepsilon.$$

Le nombre strictement positif  $\varepsilon$  pouvant être choisi arbitrairement petit, on en déduit que l'intégrale est positive. ■

### Corollaire – Inégalité triangulaire

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable alors  $|f|$  est intégrable et

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

**Démonstration** Si  $f$  est intégrable,  $f$  et  $|f|$  sont intégrables au sens de Henstock-Kurzweil donc  $|f|$  et  $||f|| = |f|$  sont intégrables au sens de Henstock-Kurzweil ; la fonction  $|f|$  est donc intégrable. Par linéarité (p. 17),  $-f$  est également intégrable. Comme  $f \leq |f|$  et  $-f \leq f$ , on a par croissance de l'intégrale (p. 21)

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

et par linéarité (p. 17) et croissance (p. 21) de l'intégrale

$$-\int_a^b f(t) dt = \int_a^b -f(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt,$$

ce qui établit l'inégalité triangulaire. ■

**Exercice – Lemme M-L (•)** Montrer que si la fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable et que  $|f| \leq M$ , alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq M(b - a)$$

(Solution p. 47.)

### Proposition – Fonctions égales presque partout

Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  égale presque partout à une fonction  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable est elle-même intégrable et

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt.$$

**Exercice – Fonctions égales sur un ensemble co-dénombrable (••••)**

Démontrer la proposition “Fonctions égales presque partout” (p. 22) sous l’hypothèse renforcée suivante :  $f$  et  $g$  diffèrent en un nombre dénombrable de points. (Solution p. 48.)

**Démonstration – Fonctions égales presque partout** Par linéarité de l’intégrale (p. 17), il suffit d’établir que si  $h = g - f$  est nulle presque partout (c’est-à-dire égale presque partout à la fonction  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  identiquement nulle), alors elle est intégrable et d’intégrale nulle.

Supposons dans un premier temps que  $h$  soit bornée. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un recouvrement de

$$A = h^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \{x \in [a, b] \mid h(x) \neq 0\}$$

par une collection dénombrable d’intervalles  $I_i$  telle que  $\sum_i \ell(I_i) \leq \varepsilon$ . Il est de plus possible de supposer les  $I_i$  ouverts<sup>10</sup>. Définissons la jauge  $\gamma$  sur  $[a, b]$  par

$$\gamma(t) = I_i \text{ si } t \in I_i \text{ et } t \notin I_j \text{ quand } j \leq i$$

et par exemple  $\gamma(t) = ]-\infty, \infty[$  si  $t \notin \cup_i I_i$ . Pour toute subdivision pointée  $\mathcal{D} = \{(t_j, J_j)\}_j$  de  $[a, b]$  subordonnée à  $\gamma$ ,

$$|S(h, \mathcal{D})| = \left| \sum_j h(t_j) \ell(J_j) \right| = \left| \sum_{t_j \in A} h(t_j) \ell(J_j) \right| \leq \sup_{[a, b]} |h| \times \sum_j \ell(J_j).$$

Par construction les  $J_j$  ne se chevauchent pas et sont tous inclus dans un des intervalles  $I_i$ . On a donc

$$\sum_j \ell(J_j) \leq \sum_i \ell(I_i) \leq \varepsilon.$$

Il suffit par conséquent de choisir un  $\varepsilon$  suffisamment petit initialement pour rendre la somme de Riemann associée arbitrairement petite ;  $h$  est donc intégrable d’intégrale nulle.

Si  $h$  est non-bornée, on peut faire une démonstration similaire en considérant les ensembles

$$A_k = \{x \in [a, b] \mid k < |h(x)| \leq k+1\},$$

puis en associant à chaque  $A_k$  un recouvrement par une collection dénombrable d’intervalles ouverts  $I_i^k$  tels que

$$\sum_i \ell(I_i^k) \leq \frac{\varepsilon}{(k+1)2^{k+1}}$$

10. On peut trouver un recouvrement de  $A$  par des intervalles  $J_i$  non nécessairement ouverts, tels que  $\sum_i \ell(J_i) \leq \varepsilon/2$ , puis remplacer chaque  $J_i$  par un intervalle  $I_i$  ouvert de longueur double contenant  $J_i$ .

ce qui est possible puisque tous les  $A_k$  sont négligeables. On définit alors la jauge  $\gamma$  sur  $[a, b]$  par  $\gamma(t) = I_i^k$  si  $t$  appartient à un  $I_i^k$  (et on choisit alors le plus petit  $k$ , puis le plus petit  $i$  telle que cette propriété soit vérifiée) et par exemple  $\gamma(t) = ]-\infty, \infty[$  si  $t \notin \cup_k \cup_i I_i^k$ . L'évaluation d'une somme de Riemann pour une subdivision pointée subordonnée à cette jauge fournit

$$|S(h, \mathcal{D})| = \left| \sum_j h(t_j) \ell(J_j) \right| = \left| \sum_k \sum_{t_j \in A_k} h(t_j) \ell(J_j) \right| \leq \sum_k \sum_{t_j \in A_k} (k+1) \ell(J_j)$$

et comme

$$\sum_{t_j \in A_k} \ell(J_j) \leq \sum_i \ell(I_i^k) \leq \frac{\varepsilon}{(k+1)2^{k+1}},$$

on obtient

$$|S(h, \mathcal{D})| \leq \sum_k (k+1) \sum_i \ell(I_i^k) \leq \sum_k \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

La fonction  $h$  est donc bien intégrable et d'intégrale nulle. ■

Sous une hypothèse d'inégalité, la proposition “Fonction égales presque partout” (p. 22) admet une réciproque :

**Proposition – Fonctions égales presque partout (réciproque)**

Si les fonctions  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sont intégrables et si

$$f \leq g \text{ presque partout et } \int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt,$$

alors  $f = g$  presque partout.

**Démonstration** La fonction  $h = g - f$  étant intégrable, pour tout  $x \in [a, b]$ , ses restrictions à  $[a, x]$  et  $[x, b]$  sont intégrables (p. 20). Comme il s'agit de fonctions positives,

$$\int_a^x h(t) dt \geq 0 \text{ et } \int_x^b h(t) dt \geq 0.$$

Comme par additivité (p. 19)

$$\int_a^x h(t) dt + \int_x^b h(t) dt = \int_a^b h(t) dt = \int_a^b g(t) dt - \int_a^b f(t) dt \leq 0,$$

chacune de ces intégrales est nulle. La fonction

$$x \in [a, b] \mapsto \int_a^x h(t) dt$$

est donc identiquement nulle. Or, sa dérivée existe et vaut  $h$  presque partout (p. 26) ; la fonction  $h$  est donc nulle presque partout, c'est-à-dire que  $f = g$  presque partout. ■



### Théorème – Continuité des intégrales indéterminées

Pour toute fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable et pour tout  $c \in [a, b]$ , la fonction

$$g : x \in [a, b] \mapsto \int_c^x f(t) dt$$

est continue.

**Exercice – Continuité des intégrales indéterminées simplifiée (••)** Démontrer le théorème de continuité des intégrales indéterminées (p. 25) sous l'hypothèse supplémentaire que  $f$  est bornée. (Solution p. 48.)

**Démonstration – Continuité des intégrales indéterminées** Montrons la continuité de l'intégrale à droite en  $x$  quand  $x < b$  (la continuité à gauche peut être établie de façon similaire quand  $x > a$ ). Par additivité de l'intégrale (p. 19), il suffit de montrer que la grandeur

$$\int_x^{x+h} f(t) dt$$

tend vers 0 quand  $h > 0$  tend vers 0. Par restriction (p. 20), la fonction  $f$  est intégrable sur  $[x, b]$  : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une jauge  $\gamma$  sur  $[x, b]$  telle que pour toute subdivision pointée  $\mathcal{D}$  de  $[x, b]$  subordonnée à  $\gamma$ , l'écart entre la somme de Riemann  $S(f, \mathcal{D})$  et l'intégrale de  $f$  entre  $x$  et  $b$  est au plus  $\varepsilon/2$ .

On peut remplacer  $\gamma$  par une jauge  $\nu$  telle que  $\nu(x) \subset \gamma(x)$  et  $\nu(t) = \gamma(t) \cap ]x, +\infty]$  sinon ; cela garantit que pour toute subdivision pointée  $\mathcal{D}$  subordonnée à  $\nu$ ,  $\mathcal{D}$  est subordonnée à  $\gamma$  et que si  $(t, J) \in \mathcal{D}$  et  $x \in J$ , alors  $t = x$ .

Le lemme de Henstock (p. 37), appliqué à toute subdivision partielle  $\mathcal{D} = \{(x, [x, x+h])\}$  subordonnée à  $\nu$ , c'est-à-dire telle que  $[x, x+h] \subset \nu(x)$ , fournit

$$\left| f(x)h - \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

dont on déduit par l'inégalité triangulaire que

$$\left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |f(x)|h.$$

Il suffit donc de choisir  $\nu(x)$  tel que  $|f(x)|h \leq \varepsilon/2$  quand  $[x, x+h] \subset \nu(x)$  pour s'assurer que

$$\left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

■

**Exercice – Limite d’intégrale (•)** Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\varepsilon \frac{dt}{\sqrt{t}} = 0.$$

(Solution p. 48.)

**Théorème – Dérivabilité des intégrales indéterminées**

Pour toute fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable et pour tout  $c \in [a, b]$ , la fonction

$$g : x \in [a, b] \mapsto \int_c^x f(t) dt$$

est dérivable presque partout et pour presque tout  $x \in [a, b]$ ,

$$g'(x) = f(x).$$

**Démonstration** Voir (Swartz 2001, 135–36). ■

**Exercice – Dérivabilité presque partout (•)** Construire une fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  qui soit intégrable et telle que

$$x \in [0, 1] \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

ne soit pas dérivable en tout point de  $[0, 1]$ . (Solution p. 49.)

**Exercice – Normalisation des fonctions (••)** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable. On associe à  $f$  la fonction  $g$  “filtrée” qui vaut

$$g(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} f(x) dx$$

si le membre de droite est défini, et  $f(t)$  sinon. Montrer que  $g$  est égale à  $f$  presque partout. (Solution p. 49.)

**Théorème – Changement de variable**

Soit  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue en  $a$  et en  $b$ , dont la dérivée  $g'$  existe sur  $]a, b[$ ,  $y$  est continue et ne s’y annule pas. Soit  $[c, d] = g([a, b])$  et  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Alors la fonction  $f$  est intégrable sur  $[c, d]$  si et seulement si  $(f \circ g)g'$  est intégrable sur  $[a, b]$  et dans ce cas, on a

$$\int_a^b f(g(t))g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx.$$

Le calcul différentiel nous a accoutumé à noter le terme  $g'(t)dt$  sous la forme  $dg(t)$ . Si l'on réutilise ici cette convention, le changement de variable  $x = g(t)$  peut donc être mémorisé sous la forme

$$\int_a^b f(g(t))dg(t) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx.$$

On notera que le terme  $f(g(t))g'(t)$  n'est a priori pas défini en  $t = a$  et  $t = b$ ; on pourra considérer que l'intégrande vaut 0 en ces points, ou plus généralement une valeur quelconque : l'intégrabilité de la fonction ainsi que son intégrale ne dépendent pas de ce choix, car ils définissent des fonctions qui sont égales presque partout (p. 22).

Les hypothèses concernant le changement de variable  $g$  peuvent se reformuler de la façon suivante:  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue en  $a$  et  $b$  et est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $]a, b[$  sur  $]c, d[$ .

**Démonstration** Le résultat est un corollaire du théorème de changement de variable dans  $\mathbb{R}^n$  qui sera étudié dans le chapitre calcul intégral III. ■

**Exercice – Changement de variables simplifié (••)** Démontrer le théorème de changement de variables (p. 26) au moyen du théorème fondamental du calcul (p. 32), sous les hypothèses supplémentaires que  $f$  et  $g'$  existent et sont continues sur  $[c, d]$  et  $[a, b]$  respectivement. (Indication:  $f$  étant continue sur  $[c, d]$ , elle y admet une primitive  $h$ .) (Solution p. 50.)

**Exercice – Changement de variable  $x = t^2$  (•)** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^1 f(x) dx$$

peut s'exprimer comme une intégrale faisant intervenir l'expression  $f(t^2)$ . (Solution p. 50.)

**Exercice – Changement de variable  $x = \sqrt{t}$  (•)** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ; en supposant qu'elle soit bien définie, calculer l'intégrale

$$\int_0^1 f(\sqrt{t}) dt$$

en faisant intervenir une intégrale portant sur  $f(x)$ . (Solution p. 50.)

## Intégration sur des intervalles arbitraires

Dans cette section, nous allons étendre – significativement, mais avec très peu d'efforts – la théorie de l'intégration sur les intervalles fermés bornés de  $\mathbb{R}$  à des intervalles arbitraires de  $\mathbb{R}$ , et en particulier à  $\mathbb{R}$  tout entier <sup>11</sup>.

La première étape de cette démarche consiste à prolonger une fonction définie sur un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$ , par exemple un intervalle ouvert  $]a, b[$ , en une fonction définie sur l'intervalle  $[a, b]$  en lui assignant la valeur 0 aux extrémités de l'intervalle.

$$f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R} \mapsto \bar{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in ]a, b[, \\ 0 & \text{si } x \in \{a, b\}. \end{cases}$$

Une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  quelconque de  $\mathbb{R}$  sera alors dite intégrable sur  $I$  si son extension  $\bar{f}$  sur l'intervalle fermé  $\bar{I}$  correspondant l'est, et l'intégrale de  $f$  sur  $I$  est alors *définie* comme l'intégrale de  $\bar{f}$  sur  $\bar{I}$ .

Si l'intervalle initial est borné, on s'est ramené au cas déjà étudié des intervalles fermés et bornés de  $\mathbb{R}$ . Mais si l'intervalle initial est non-borné, par exemple  $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$ , cette même technique suppose d'introduire une fonction définie sur la droite réelle étendue  $[-\infty, +\infty]$ .

### Définition – Intervalle de $[-\infty, +\infty]$

On appelle *intervalle* de  $[-\infty, +\infty]$  tout sous-ensemble  $I$  de  $[-\infty, +\infty]$  tel que si  $x$  et  $y$  appartiennent à  $I$  et vérifient  $x \leq y$  et si  $z$  est un point intermédiaire – tel que  $x \leq z \leq y$  – alors  $z$  appartient également à  $I$ .

Les intervalles de  $]-\infty, +\infty[$  peuvent être ouverts, fermés, ouverts et fermés ou ni l'un ni l'autre. Les intervalles de la forme  $[-\infty, +\infty]$ ,  $]-\infty, +\infty[$  (c'est-à-dire  $\mathbb{R}$ ),  $]-\infty, b[$ ,  $[-\infty, b[$ ,  $]a, +\infty[$ ,  $]a, +\infty]$  et  $]a, b[$  – où  $a$  et  $b$  désignent des nombres réels étendus – sont ouverts. Les intervalles de la forme  $[a, b]$  sont fermés. Tous

<sup>11</sup>. Contrairement à l'intégrale de Riemann, il n'est pas nécessaire pour donner un sens à l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  d'une fonction de calculer tout d'abord son intégrale sur un intervalle borné puis d'essayer de passer à la limite, sans garantie que le nouveau type d'intégrale qui en résulte – l'intégrale de Cauchy-Riemann – partage les propriétés de l'intégrale de Riemann.

les intervalles de  $[-\infty, +\infty]$  sont bornés, avec comme majorant  $+\infty$  et comme minorant  $-\infty$ .

### Définition – Longueur d’un intervalle de $[-\infty, +\infty]$

La *longueur*  $\ell(I)$  d’un intervalle  $I$  de  $[-\infty, +\infty]$  est le nombre réel étendu positif défini par

$$\ell(I) := \ell(I \cap \mathbb{R}).$$

En particulier avec cette convention,  $\ell([-\infty, -\infty]) = \ell([+\infty, +\infty]) = \ell(\emptyset) = 0$ .

La notion d’ensemble négligeable de  $[-\infty, +\infty]$  est identique à celle d’ensemble négligeable de  $\mathbb{R}$  (p. 8) à ceci près qu’il faut remplacer les intervalles de  $\mathbb{R}$  par ceux de  $[-\infty, +\infty]$  dans la définition.

La définition de subdivision pointée (p. 4) reste formellement inchangée en passant des intervalles fermés bornés de  $\mathbb{R}$  aux intervalles fermés bornés de  $[-\infty, +\infty]$ . Il en est de même pour la définition d’une jauge (p. 11) si l’on interprète “un intervalle ouvert  $\gamma(t)$  contenant  $t$ ” comme il se doit par “un intervalle ouvert  $\gamma(t)$  de  $[-\infty, +\infty]$  contenant  $t$ ”.

Le travail central consiste à redéfinir la somme de Riemann, car il faut se prémunir contre les termes  $f(t)\ell(I)$  infinis qui pourraient engendrer une somme de Riemann infinie ou même indéfinie.

### Définition – Somme de Riemann (extension)

Soit  $[a, b] \subset [-\infty, +\infty]$ . La somme de Riemann associée à la fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et à la subdivision pointée  $\mathcal{D}$  de  $[a, b]$  est la grandeur

$$S(f, \mathcal{D}) := \sum f(t)\ell(I) \quad \text{où } (t, I) \in \mathcal{D} \text{ et } \ell(I) < +\infty.$$

Avec cette extension de la somme de Riemann, la définition de l’intégrale de Henstock-Kurzweil (p. 12) et de Lebesgue (p. 13) restent formellement inchangées.

**Exemple – Intégration de  $x \mapsto 1/x^2$**  Considérons la fonction  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

On étend immédiatement cette fonction sur  $[1, +\infty]$  en posant  $f(+\infty) = 0$  (on note toujours  $f$  la fonction qui en résulte). La fonction  $f$  est continue et admet comme primitive  $x \mapsto -1/x$  sur toute intervalle borné  $[a, b]$  de  $[1, +\infty[$ . Par le théorème fondamental du calcul (p. 32), on a donc

$$\int_a^b f(t) dt = \left[ x \mapsto -\frac{1}{x} \right]_a^b = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

“Passer à la limite” informellement (sans justification) dans cette expression peut nous laisser penser que  $f$  est intégrable sur  $[1, +\infty]$  et vérifie

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt \stackrel{?}{=} 1.$$

Les calculs confirment cette intuition : nous pouvons en effet établir que pour tout  $\varepsilon > 0$ , la jauge  $\gamma$  sur  $[1, +\infty]$  définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} ]t(1 - \varepsilon/4), t(1 + \varepsilon/4)[ & \text{si } t < +\infty, \\ ]2/\varepsilon, +\infty] & \text{si } t = +\infty \end{cases}$$

est telle que pour toute subdivision pointée  $\mathcal{D}$  de  $[1, +\infty]$  subordonnée à  $\gamma$ , on a  $|S(f, \mathcal{D}) - 1| \leq \varepsilon$  (cf. calculs en annexe (p. 40)).

Un facteur vient simplifier l’étude de l’intégration sur des intervalles (a priori) non bornés : il n’est pas nécessaire de considérer l’intégration dans tous les types d’intervalles possibles car on peut toujours se ramener au cas où l’on cherche à intégrer une fonction sur la droite réelle (achevée) toute entière.

### Proposition – Extension à la droite réelle achevée

Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable si et seulement si son prolongement  $\bar{f}$  par zéro dans  $[-\infty, +\infty]$ , c’est-à-dire la fonction  $\bar{f} : [-\infty, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, b], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est intégrable. Dans ce cas, on a

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(t) dt.$$

**Démonstration** Supposons que  $a$  soit fini et que  $b = +\infty$ . Si  $\bar{f}$  est intégrable sur  $[-\infty, +\infty]$ , par restriction (p. 20),  $f$  est intégrable sur  $[a, +\infty]$ . Réciproquement, si  $f$  est intégrable sur  $[a, +\infty]$ , la fonction  $\bar{f}$  étant nulle sur  $[-\infty, a]$  à l’exception d’un point, elle y est intégrable ; étant égale à  $f$  sur  $[a, +\infty]$  elle y est également intégrable. Par additivité,  $\bar{f}$  est donc intégrable sur  $[-\infty, +\infty]$ . L’additivité fournit également

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \int_{-\infty}^a g(t) dt + \int_a^{+\infty} g(t) dt.$$

Comme  $\bar{f}$  est nulle sur  $[-\infty, a]$  à l’exception au plus d’un point, son intégrale sur  $[-\infty, a]$  est nulle et comme  $g = f$  sur  $[a, +\infty]$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt.$$

Le résultat dans les autres cas ( $a = -\infty$  et  $b$  fini,  $a$  et  $b$  finis) se démontrent de manière analogue. ■

L'extension que nous venons d'apporter à l'intégration sur des intervalles non bornés de  $[-\infty, +\infty]$  ne perturbe finalement que très peu la pratique du calcul intégral : l'essentiel des propriétés élémentaires de l'intégrale sont encore valables dans ce nouveau cadre<sup>12</sup>.

### **Théorème – Propriétés élémentaires de l'intégrale**

Sont valables pour tous les intervalles fermés de  $[-\infty, +\infty]$  :

- La linéarité de l'intégrale (p. 17),
- Les propriétés d'additivité (p. 19) et de restriction (p. 20),
- Le changement de variable (p. 26),
- La croissance de l'intégrale (p. 21), l'inégalité triangulaire (p. 22), les fonctions égales presque partout (p. 22) et réciproque (p. 24),
- La continuité (p. 25) et dérivabilité (p. 26) des intégrales indéterminées.

À noter que le théorème de changement de variable (p. 26) nous fournit également un moyen alternatif pour définir l'intégrale entre  $-\infty$  et  $+\infty$ , en nous ramenant à une intégrale sur un intervalle borné.

**Exercice – Prendre la tangente** Montrer qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable entre  $-\infty$  et  $+\infty$  si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\tan t)(1 + \tan^2 t) dt$$

est bien définie, et que dans ce cas, les deux intégrales sont égales. (Solution p. 50.)

---

12. Vous remarquerez que nous n'avons pas listé le théorème fondamental du calcul (p. 32) dans les propriétés valables en non borné ; celui-ci peut également être exprimé sous une forme valable dans ce cadre, mais elle est un peu plus complexe, avec des hypothèses qui rappellent celles du théorème de changement de variable (p. 26) : si  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et que cette dérivée  $f'$  est intégrable, alors

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

## Annexe

### Théorème – Lemme de Cousin

Pour toute jauge  $\gamma$  sur l'intervalle  $[a, b]$ , il existe une subdivision pointée  $\mathcal{D}$  qui soit subordonnée à  $\gamma$ .

**Démonstration** S'il existe un  $t \in I^0 = I = [a, b]$  tel que  $I \subset \gamma(t)$ , la subdivision pointée  $\mathcal{D} = \{(t, I)\}$  convient. Sinon, on peut considérer les intervalles  $I_0^1 = [a, (a+b)/2]$  et  $I_1^1 = [(a+b)/2, b]$  et examiner pour chacun de ces intervalles s'il existe un  $t_i \in I_i^1$  tel que  $I_i^1 \subset \gamma(t_i)$ , dans ce cas ajouter la paire  $(t_i, I_i^1)$  à la collection  $\mathcal{D}$  et dans le cas contraire décomposer à nouveau l'intervalle posant problème. Il s'avère que ce procédé converge en un nombre fini d'étapes ; il génère donc une subdivision pointée  $\mathcal{D}$  de  $I$ .

En effet, dans le cas contraire il existerait une infinité d'intervalles fermés  $J_i$  emboîtés ( $J_{i+1} \subset J_i$ ) tels que  $J_0 = I$ ,  $\ell(J_{i+1}) = \ell(J_i)/2$  et pour tout  $t \in J_i$ ,  $J_i \not\subset \gamma(t)$ . Soit  $t_i$  un point de  $J_i$  ; la suite de ces points appartient à  $J_0$  qui est compact et admet donc une suite extraite qui converge. Comme la suite des  $t_k$  appartient à  $J_i$  pour tout  $k \geq i$ , cette limite  $t$  adhère à tous les  $J_i$ , et donc appartient à tous les  $J_i$  puisqu'ils sont fermés. La longueur de  $J_i$  étant divisée par deux à chaque incrément de  $i$ ,  $\ell(J_i) = \ell(J_0)/2^i$  ; comme  $t \in J_i$ ,  $J_i \subset [t - \ell(J_0)/2^i, t + \ell(J_0)/2^i]$ . Par conséquent, il existe un rang  $i$  à partir duquel  $J_i \subset \gamma(t)$ , ce qui contredit l'hypothèse de départ. ■

### Théorème – Théorème fondamental du calcul (forme générale)

Soit  $[a, b]$  un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$  ; si la fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable, sa dérivée  $f'$  est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil sur  $[a, b]$  et

$$[f]_a^b := f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

**Démonstration** Nous souhaitons établir que  $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable, d'intégrale égale à  $f(b) - f(a)$ . Pour cela, nous devons montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une fonction de jauge  $\gamma$  sur  $[a, b]$  telle que, si une subdivision pointée

$$\mathcal{D} = \{(t_0, [x_0, x_1]), \dots, (t_{m-1}, [x_{m-1}, x_m])\}$$

vérifie pour tout  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ ,  $[x_i, x_{i+1}] \subset \gamma(t_i)$ , alors

$$|S(f', \mathcal{D}) - (f(b) - f(a))| \leq \varepsilon.$$



Notons que si  $\mathcal{D} = \{(t_0, [x_0, x_1], \dots, (t_{m-1}, [x_{m-1}, x_m])\}$ , le membre de gauche de cette inégalité vérifie

$$\begin{aligned} |S(f', \mathcal{D}) - (f(b) - f(a))| &= \left| \sum_{i=0}^{m-1} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (f(b) - f(a)) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{m-1} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - \sum_{i=0}^{m-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{m-1} (f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} |f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))| \end{aligned}$$

Si l'on parvient à garantir que pour chacun des termes de cette somme,

$$|f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(x_{i+1} - x_i),$$

ce qui revient à assigner à chaque terme une erreur maximale proportionnelle à la longueur de l'intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ , alors

$$\begin{aligned} |S(f', \mathcal{D}) - (f(b) - f(a))| &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Fixons donc un  $\varepsilon > 0$  arbitraire ; comme pour tout  $t \in [a, b]$ ,

$$f(t+h) = f(t) + f'(t)h + o(|h|),$$

il existe un  $\delta(t) > 0$  tel que si  $|h| < \delta(t)$ ,

$$|f'(t)h - (f(t+h) - f(t))| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}|h|$$

Par conséquent, pour tout sous-intervalle fermé  $[c, d]$  de  $[a, b]$  tel que  $t \in [c, d]$  et  $[c, d] \subset ]t - \delta(t), t + \delta(t)[$ , nous avons

$$|f'(t)(d-t) - (f(d) - f(t))| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}|d-t| = \frac{\varepsilon}{b-a}(d-t)$$

ainsi que

$$|f'(t)(c-t) - (f(c) - f(t))| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}|c-t| = \frac{\varepsilon}{b-a}(t-c).$$

L'inégalité triangulaire fournit alors

$$|f'(t)(d-c) - (f(d) - f(c))| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(d-c).$$

Posons  $\gamma(t) = ]t - \delta(t), t + \delta(t)[$ ; nous avons ainsi bien défini une fonction de jauge sur  $[a, b]$ . Si  $\mathcal{D}$  est subordonnée à  $\gamma$ , pour tout  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ ,

$$t_i \in [x_i, x_{i+1}] \subset ]t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)[,$$

par conséquent

$$|f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (f(x_{i+1}) - f(x_i))| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(x_{i+1} - x_i).$$

et donc  $|S(f', \mathcal{D}) - (f(b) - f(a))| \leq \varepsilon$ , ce qui prouve le résultat recherché. ■

**Exemple – Intégration de  $x \mapsto 1/\sqrt{x}$**  Suite de l'exemple (p. 16). Nous allons tout d'abord prouver que si  $0 < x \leq t \leq y \leq 1$ , alors

$$|f(t)(y-x) - (F(y) - F(x))| = \left| \frac{y-x}{\sqrt{t}} - 2\sqrt{y} + 2\sqrt{x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}(y-x).$$

quand  $[x, y] \subset \gamma(t)$ , ce qui garantira que

$$|S(f|_{[a,1]}, \mathcal{D}_a) - (F(1) - F(a))| \leq \frac{\varepsilon}{2}(1-a) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout subdivision pointée  $\mathcal{D}_a$  de  $[a, 1]$  subordonnée à  $\gamma$ . On remarque qu'il suffit de prouver d'une part que

$$\left| \frac{y-t}{\sqrt{t}} - 2\sqrt{y} + 2\sqrt{t} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}(y-t)$$

et d'autre part que

$$\left| \frac{t-x}{\sqrt{t}} - 2\sqrt{t} + 2\sqrt{x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}(t-x)$$

pour obtenir l'inégalité voulue. Intéressons-nous au membre de gauche de la première de ces inégalités; on a

$$\begin{aligned} \frac{y-t}{\sqrt{t}} - 2\sqrt{y} + 2\sqrt{t} &= \frac{y-t-2\sqrt{t}\sqrt{y}+2t}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{\sqrt{y}^2 + \sqrt{t}^2 - 2\sqrt{t}\sqrt{y}}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{t})^2}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Pour garantir que ce terme soit plus petit que

$$\frac{\varepsilon}{2}(y - t) = \frac{\varepsilon}{2}(\sqrt{y} - \sqrt{t})(\sqrt{y} + \sqrt{t}),$$

il suffit donc de s'assurer que

$$\frac{(\sqrt{y} - \sqrt{t})}{\sqrt{t}} \leq \frac{\varepsilon}{2}(\sqrt{y} + \sqrt{t}),$$

soit  $\sqrt{y} \leq \sqrt{t} + (\varepsilon/2)(\sqrt{ty} + t)$ . Comme  $t \leq y$ , c'est le cas si

$$\sqrt{y} \leq \sqrt{t} + \varepsilon t \text{ soit } y \leq t(1 + \varepsilon\sqrt{t})^2.$$

Par une méthode en tout point identique, on montre que la seconde inégalité – impliquant  $x$  et  $t$  – est satisfaite si

$$\frac{(\sqrt{t} - \sqrt{x})}{\sqrt{x}} \leq \frac{\varepsilon}{2}(\sqrt{t} + \sqrt{x}),$$

soit

$$\frac{(\sqrt{x^{-1}} - \sqrt{t^{-1}})}{\sqrt{t^{-1}}} \leq \frac{\varepsilon}{2}(\sqrt{x^{-1}} + \sqrt{t^{-1}}),$$

ou encore  $\sqrt{x^{-1}} \leq \sqrt{t^{-1}} + (\varepsilon/2)(\sqrt{x^{-1}t^{-1}} + t^{-1})$ . Comme  $t^{-1} \leq x^{-1}$ , c'est le cas si

$$\sqrt{x^{-1}} \leq \sqrt{t^{-1}} + \varepsilon t^{-1} \text{ soit } x \geq \frac{t}{(1 + \varepsilon/\sqrt{t})^2}.$$

Intéressons nous désormais à ce qui se passe pour une subdivision  $\mathcal{D}$  de  $[0, 1]$ . Comme  $\gamma(t) \subset ]0, +\infty[$  si  $t > 0$ , si  $\mathcal{D} = \{(t_i, [x_i, x_{i+1}]), i \in \{0, \dots, m-1\}\}$  est une subdivision pointée de  $[0, 1]$  subordonnée à  $\gamma$ , si  $t_i > 0$ ,  $0 \notin [x_i, x_{i+1}]$ . Comme les ensembles  $[x_i, x_{i+1}]$  doivent recouvrir  $[0, 1]$ , il est nécessaire que le point  $t_0$  associé à l'intervalle  $[x_0, x_1]$  soit 0. Le reste de la subdivision est alors subordonnée à  $\gamma$  sur  $[x_1, 1]$  avec  $x_1 > 0$

$$S(f, \mathcal{D}) = f(0)(x_1 - x_0) + \sum_{i=1}^{m-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i)$$

et d'après la section précédente,

$$\left| \sum_{i=1}^{m-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) - (2\sqrt{1} - 2\sqrt{x_1}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Avec  $\gamma(0) = ]-1, \frac{\varepsilon^2}{16}]$ , l'inclusion  $[x_0, x_1] \subset \gamma(0)$  fournit

$$|f(0)(x_1 - 0) - (2\sqrt{x_1} - 2\sqrt{x_0})| = 2\sqrt{x_1} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc garanti que  $|S(f, \mathcal{D}) - 2| \leq \varepsilon$ , ce qui est le résultat cherché. Au final, la jauge  $\gamma$  sur  $[0, 1]$  définie initialement garantit un écart  $|S(f, \mathcal{D}) - 2|$  inférieur à  $\varepsilon$  pour toute subdivision pointée  $\mathcal{D}$  de  $[0, 1]$  subordonnée à  $\gamma$ .

Dans le cas où l'on souhaite établir l'intégrabilité sans savoir quelle est la valeur de l'intégrale, le test suivant d'intégrabilité est utile :

### **Théorème – Critère d'intégrabilité de Cauchy**

Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une jauge  $\gamma$  sur  $[a, b]$  telle que pour tout couple de subdivisions pointées  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  subordonnées à  $\gamma$ , on ait

$$|S(f, \mathcal{D}) - S(f, \mathcal{D}')| \leq \varepsilon.$$

**Démonstration** Si la fonction  $f$  est intégrable, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une jauge  $\gamma$  sur  $[a, b]$  telle que pour tout couple de subdivisions pointées  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  subordonnées à  $\gamma$ , on ait

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left| S(f, \mathcal{D}') - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a alors  $|S(f, \mathcal{D}) - S(f, \mathcal{D}')| \leq \varepsilon$ .

Réciproquement, si la fonction  $f$  vérifie le critère du théorème, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  il existe une jauge  $\gamma_k$  sur  $[a, b]$  telle que pour tout couple de subdivisions pointées  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  subordonnées à  $\gamma_k$ , on ait

$$|S(f, \mathcal{D}) - S(f, \mathcal{D}')| \leq 2^{-k}.$$

Il est de plus possible de choisir les jauges  $\gamma_k$  telles qu'à tout ordre  $k$  et pour tout  $t \in [a, b]$ , on ait  $\gamma_{k+1}(t) \subset \gamma_k(t)$  (si  $\gamma_{k+1}$  ne satisfait pas ce critère, il suffit de lui substituer la jauge définie par en  $t$  par  $\gamma_{k+1}(t) \cap \gamma_k(t)$ ). Soit  $\mathcal{D}_k$  une suite de subdivisions pointées sur  $[a, b]$  subordonnées à  $\gamma_k$ . Si  $m \geq k$  et  $n \geq k$ ,  $\mathcal{D}_m$  et  $\mathcal{D}_n$  sont subordonnées à  $\gamma_k$ , donc

$$|S(f, \mathcal{D}_m) - S(f, \mathcal{D}_n)| \leq 2^{-k}.$$

La suite des  $S(f, \mathcal{D}_k)$  est donc de Cauchy ; la droite des réels étant complète, cette suite à une limite  $A$ . En passant à la limite sur  $n$  dans l'inégalité  $|S(f, \mathcal{D}) - S(f, \mathcal{D}_n)| \leq 2^{-k}$ , valable quand  $\mathcal{D}$  est subordonnée à  $\gamma_k$ , on obtient

$$|S(f, \mathcal{D}) - A| \leq 2^{-k}.$$

La fonction  $f$  est donc intégrable et d'intégrale  $A$ . ■

### Définition – Subdivision pointée partielle

Une *subdivision pointée partielle*  $\mathcal{D}$  de l'intervalle fermé  $I = [a, b]$  de  $[-\infty, +\infty]$  est une collection finie

$$\mathcal{D} = \{(t_i, I_i) \mid 0 \leq i \leq n-1\}$$

où les  $I_i$  sont des intervalles fermés de  $[a, b]$  sans chevauchement et  $t_i \in I_i$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . La somme de Riemann associée à la fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et à la subdivision pointée partielle  $\mathcal{D}$  de  $[a, b]$  est la grandeur

$$S(f, \mathcal{D}) = \sum f(t) \ell(I), \quad \text{où } (t, I) \in \mathcal{D}, \ell(I) < +\infty.$$

Une subdivision pointée partielle  $\mathcal{D}$  de l'intervalle fermé  $[a, b]$  est *subordonnée* à une *jauge*  $\gamma$  de  $[a, b]$  si pour tout  $(t, J) \in \mathcal{D}$ ,  $J \subset \gamma(t)$ .

### Théorème – Lemme de Henstock

Soit  $[a, b]$  un intervalle fermé,  $f$  une fonction intégrable au sens de Henstock-Kurzweil sur  $[a, b]$  et  $\gamma$  une jauge sur  $[a, b]$  telle que pour toute subdivision pointée  $\mathcal{D}$  de  $[a, b]$  subordonnée à  $\gamma$ , on ait

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - (\text{HK}) \int_a^b f(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Alors pour toute subdivision pointée partielle  $\mathcal{D} = \{(t_k, I_k)\}_k$  de  $[a, b]$  subordonnée à  $\gamma$ , on a également

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \sum_k (\text{HK}) \int_{I_k} f(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

**Démonstration** Il existe une famille finie d'intervalles fermés  $\{J_j\}$ ,  $j = 1, \dots, m$  telle que l'union des familles  $\{I_k\}$  et  $\{J_j\}$  forme une subdivision (complète) de  $[a, b]$ . Pour tout  $\eta > 0$ , sur chaque intervalle  $J_j$ , il existe une jauge  $\gamma_j$  telle que si  $\mathcal{D}_j$  est une subdivision pointée de  $J_j$  subordonnée à  $\gamma_j$ , alors

$$\left| S(f, \mathcal{D}_j) - (\text{HK}) \int_{J_j} f(t) dt \right| \leq \eta.$$

Si de plus on choisit  $\mathcal{D}_j$  subordonnée à la restriction de  $\gamma$  à  $J_j$ , alors  $\mathcal{D} \cup (\cup_j \mathcal{D}_j)$  est une subdivision pointée (complète) de  $[a, b]$  subordonnée à  $\gamma$ . On déduit de l'hypothèse centrale du lemme que

$$\left| S(f, \mathcal{D}) + \sum_j S(f, \mathcal{D}_j) - \sum_k (\text{HK}) \int_{I_k} f(t) dt + \sum_j (\text{HK}) \int_{J_j} f(t) dt \right| \leq \varepsilon$$

et donc par l'inégalité triangulaire que

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \sum_k (\text{HK}) \int_{I_k} f(t) dt \right| \leq \varepsilon + m\eta.$$

Le choix de  $\eta > 0$  étant arbitraire, l'inégalité cherchée est établie. ■

### Lemme – Partie positive d'une fonction

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable au sens de Henstock-Kurzweil dont la partie positive  $f_+$  est majorée par  $g$

$$f_+ := \max(f, 0) \leq g,$$

où  $g : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$  est intégrable. Alors la fonction  $f_+$  est intégrable.

**Démonstration** Nous allons montrer que  $f_+$  est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil – et donc intégrable puisque positive par construction – et que

$$\int_a^b f_+(t) dt = S := \sup_{\mathcal{D}} \sum_{(t,I) \in \mathcal{D}} \left( (\text{HK}) \int_I f(t) dt \right)_+$$

où le supremum est calculé sur toutes les subdivisions pointées de  $[a, b]$ . Tout d'abord, ce supremum est fini ; en effet pour toute subdivision  $\mathcal{D}$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{(t,I) \in \mathcal{D}} \left( (\text{HK}) \int_I f(t) dt \right)_+ &\leq \sum_{(t,I) \in \mathcal{D}} \left( \int_I g(t) dt \right)_+ \\ &= \sum_{(t,I) \in \mathcal{D}} \int_I g(t) dt \\ &= \int_a^b g(t) dt. \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $\mathcal{D}_0$  une subdivision pointée de  $\mathbb{R}$  telle que

$$S - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{(t,I) \in \mathcal{D}_0} \left( (\text{HK}) \int_I f(t) dt \right)_+ \leq S.$$

Soit  $\lambda$  une jauge sur  $[a, b]$  assurant une précision  $\varepsilon/2$  dans l'estimation de l'intégrale de  $f$  par les sommes de Riemann. Soit  $\nu$  une jauge sur  $[a, b]$  telle que si  $(t, [c, d]) \in \mathcal{D}_0$  et  $t \in ]c, d[$  alors  $\nu(t) \subset ]c, d[$  ; on note  $\gamma$  la jauge définie par  $\gamma(t) = \lambda(t) \cap \nu(t)$ . Si  $\mathcal{D}$  est subordonnée à  $\gamma$ , quitte à découper des intervalles en deux si  $(t, I) \subset \mathcal{D}$  et  $t$  appartient à la frontière d'un intervalle composant  $\mathcal{D}_0$  – ce qui ne change pas la somme de Riemann associée – les éléments  $(t, J) \in \mathcal{D}$  tels

que  $J \subset I$ , où  $(x, I) \in \mathcal{D}_0$  forment une subdivision pointée de  $I$ . Par conséquent, comme

$$\begin{aligned} \left( (\text{HK}) \int_I f(t) dt \right)_+ &= \left( \sum_{(t,J) \in \mathcal{D}, J \subset I} (\text{HK}) \int_J f(t) dt \right)_+ \\ &\leq \sum_{(t,J) \in \mathcal{D}, J \subset I} \left( (\text{HK}) \int_J f(t) dt \right)_+ \end{aligned}$$

et donc

$$S - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{(t,I) \in \mathcal{D}_0} \left( (\text{HK}) \int_I f(t) dt \right)_+ \leq \sum_{(t,I) \in \mathcal{D}} \left( (\text{HK}) \int_I f(t) dt \right)_+ \leq S,$$

on obtient

$$\left| \sum_{(t,I) \in \mathcal{D}} \left( (\text{HK}) \int_I f(t) dt \right)_+ - S \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs, si l'on considère la subdivision (partielle) pointée  $\mathcal{D}_+$  extraite de  $\mathcal{D}$  composée des paires  $(t, I) \in \mathcal{D}$  et telles que

$$f(t)\ell(I) \geq (\text{HK}) \int_I f(x) dx,$$

alors le lemme de Henstock fournit

$$\sum_{(t,I) \in \mathcal{D}} \left( f(t)\ell(I) - (\text{HK}) \int_I f(x) dx \right)_+ \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme  $(x + y)_+ \leq x_+ + y_+$ , on en déduit

$$\sum_{(t,I) \in \mathcal{D}} f_+(t)\ell(I) - \sum_{(t,I) \in \mathcal{D}} \left( (\text{HK}) \int_I f(x) dx \right)_+ \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De façon similaire, en raisonnant sur la subdivision partielle complémentaire à  $\mathcal{D}_+$  dans  $\mathcal{D}$ , on peut montrer que

$$\sum_{(t,I) \in \mathcal{D}} \left( (\text{HK}) \int_I f(x) dx \right)_+ - \sum_{(t,I) \in \mathcal{D}} f_+(t)\ell(I) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On obtient donc au final

$$\left| \sum_{(t,I) \in \mathcal{D}} f_+(t)\ell(I) - S \right| \leq \frac{\varepsilon}{2};$$

la fonction  $f_+$  est donc comme annoncé intégrable au sens de Henstock-Kurzweil, d'intégrale égale à  $S$ . ■

Le théorème de Hake (p. 40) montre qu'avec l'intégrale de Henstock-Kurzweil, il n'existe pas d'intégrale *impropre*, qui ne serait pas définissable directement mais uniquement par un passage à la limite. Attention : ce résultat n'a pas d'équivalent pour l'intégrale de Lebesgue, qui admet des intégrales impropres.

### Théorème – Théorème de Hake

Soit  $[a, b]$  un intervalle fermé de  $[-\infty, +\infty]$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil sur  $[a, b]$  si et seulement si elle est intégrable sur tout intervalle  $[c, d]$  tel que  $a < c$  et  $d < b$  et que l'intégrale

$$(\text{HK}) \int_c^d f(t) dt$$

a une limite quand  $c$  tend vers  $a$  et  $d$  tend vers  $b$ . On a alors

$$(\text{HK}) \int_a^b f(t) dt = \lim_{(c,d) \rightarrow (a,b)} (\text{HK}) \int_c^d f(t) dt.$$

**Démonstration** Se reporter à (Swartz 2001). ■

Le théorème de Hake permet d'étendre facilement certains résultats valables sur des segments de la droite réelle. A titre d'exemple :

### Théorème – Théorème fondamental du calcul (extension)

Soit  $[a, b]$  un intervalle fermé de  $[-\infty, +\infty]$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction dérivable sur  $]a, b[$  et continue sur  $[a, b]$ . La fonction  $f'$  (définie partout sauf en  $a$  et  $b$ ) est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil sur  $[a, b]$  et

$$[f]_a^b := f(b) - f(a) = (\text{HK}) \int_a^b f'(t) dt.$$

**Démonstration** Le théorème fondamental du calcul (p. 32) dans le cadre borné nous fournit pour tous  $c$  et  $d$  tels que  $a < c \leq d < b$  l'intégrabilité au sens de Henstock-Kurzweil de  $f'$  sur  $[c, d]$  et la relation

$$f(d) - f(c) = (\text{HK}) \int_c^d f'(t) dt.$$

Par continuité, le membre de gauche de cette équation a une limite quand  $c$  tend vers  $a$  et  $d$  vers  $b$ , qui est  $f(b) - f(a)$ . Le théorème de Hake (p. 40) permet alors de conclure. ■

**Exemple – Intégration de  $x \in [1, +\infty[ \mapsto 1/x^2$**  Soit  $\mathcal{D}$  une subdivision pointée de  $[1, +\infty]$  subordonnée à la jauge  $\gamma$  définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} ]t(1 - \varepsilon/4), t(1 + \varepsilon/4)[ & \text{si } t < +\infty, \\ ]2/\varepsilon, +\infty] & \text{si } t = +\infty \end{cases}$$



Supposons que

$$\mathcal{D} = \{(t_i, [x_i, x_{i+1}]), i \in \{0, \dots, m\}\}$$

et que les  $x_i$  sont agencés de façon (strictement) croissante ; on a en particulier  $x_k < +\infty$  quand  $k \leq m$  et  $x_{m+1} = +\infty$ . Notons  $\mathcal{D}_f = \{(t_i, [x_i, x_{i+1}]), i \in \{0, \dots, m-1\}\}$  ; on a alors

$$\begin{aligned} |S(f, \mathcal{D}) - 1| &\leq \left| S(f, \mathcal{D}) - \left(1 - \frac{1}{x_m}\right) \right| + \frac{1}{x_m} \\ &\leq \left| \sum_{(t, [x, y]) \in \mathcal{D}_f} f(t)(y - x) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \right| + \frac{1}{x_m} \\ &\leq \sum_{(t, [x, y]) \in \mathcal{D}_f} \left| f(t)(y - x) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \right| + \frac{1}{x_m}. \end{aligned}$$

On remarque que si  $t < +\infty$ , alors  $+\infty \notin \gamma(t)$ . Comme  $x_{m+1} = +\infty$  et que  $[x_m, x_{m+1}] \subset \gamma(t_m)$ , nécessairement  $t_m = +\infty$ . Par conséquent,  $[x_m, x_{m+1}] \subset \gamma(+\infty) = ]2/\varepsilon, +\infty]$  et donc

$$\frac{1}{x_m} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, on a

$$\left| f(t)(y - x) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \right| = \left| \frac{y - x}{t^2} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \right| = |y - x| \left| \frac{1}{t^2} - \frac{1}{xy} \right|.$$

Comme  $y - x = (y - t) + (t - x)$ , on a  $|y - x| \leq (\varepsilon/2)t$  et donc

$$\left| f(t)(y - x) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{1}{t} - \frac{t}{xy} \right|.$$

La fonction  $t \in [x, y] \mapsto 1/t - t/xy$  est dérivable, de dérivée  $-1/t^2 - 1/xy \leq 0$ . En  $t = x$  et  $t = y$ , elle vaut respectivement  $1/x - 1/y$  et  $1/y - 1/x$ . Dans tous les cas, on a donc

$$\left| f(t)(y - x) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} &\sum_{(t, [x, y]) \in \mathcal{D}_f} \left| f(t)(y - x) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{m-1}} - \frac{1}{x_m} \right) = \frac{\varepsilon}{2} \left( 1 - \frac{1}{x_m} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité recherchée  $|S(f, \mathcal{D}) - 1| \leq \varepsilon/2$ .

## Exercices complémentaires

### Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes est une méthode de quadrature qui approxime l'intégrale d'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  en utilisant une subdivision

$$\mathcal{D}_m = \left\{ \left[ a + i \frac{b-a}{m}, a + (i+1) \frac{b-a}{m} \right] \mid i \in \{0, \dots, m-1\} \right\},$$

pour construire la somme

$$S_m = \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f\left(a + i \frac{b-a}{m}\right) + f\left(a + (i+1) \frac{b-a}{m}\right)}{2}$$

**Question 1** Calculer l'aire (algébrique) du trapèze délimité par les segments de droite

$$\left[ \left( a + i \frac{b-a}{m}, 0 \right), \left( a + (i+1) \frac{b-a}{m}, 0 \right) \right]$$

et

$$\left[ \left( a + i \frac{b-a}{m}, f\left(a + i \frac{b-a}{m}\right) \right), \left( a + (i+1) \frac{b-a}{m}, f\left(a + (i+1) \frac{b-a}{m}\right) \right) \right],$$

puis interpréter géométriquement la grandeur  $S_m$ . (Solution p. 51.)

**Question 2** Montrer que si la fonction  $f$  est intégrable au sens de Riemann alors

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = \int_a^b f(t) dt.$$

(Solution p. 51.)

### Fonctions non intégrables

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable sur tout intervalle fermé et borné de  $[a, +\infty[$ .

**Question 1** Montrer que si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x |f(t)| dt = +\infty$$

alors  $f$  n'est pas intégrable sur  $[a, +\infty[$ . (Solution p. 52.)

**Question 2** La fonction

$$x \in [1, +\infty[ \mapsto \frac{1}{x}$$

est-elle intégrable ? (Solution p. 53.)

**Question 3** La fonction

$$\text{sinc} : x \in [1, +\infty[ \mapsto \frac{\sin x}{x}$$

est-elle intégrable ? (Solution p. 53.)

## L'intégrale de Riemann est absolue

Montrer que l'intégrale de Riemann est absolue : si une fonction  $f$  est intégrable au sens de Riemann, sa valeur absolue  $|f|$  l'est également. (Solution p. 53.)

## Continuité presque partout

**Question 1** Est-ce qu'une fonction égale presque partout à une fonction continue est presque partout continue ? La réciproque est-elle vraie ? (Solution p. 54.)

**Question 2** La fonction de Dirichlet  $1_{\mathbb{Q}}$  – ou fonction indicatrice de  $\mathbb{Q}$  – définie par

$$1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est rationnel,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est-elle intégrable sur  $[0, 1]$  au sens de Riemann ? Et au sens de Lebesgue ? (Solution p. 54.)

## Poussière de Cantor

Chaque nombre réel  $x$  de  $[0, 1[$  peut être représenté par un développement en base 3 de la forme  $x = 0.a_1a_2a_3 \dots$  où  $a_i \in \{0, 1, 2\}$ , une notation qui signifie que

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i 3^{-i}.$$

Ce développement de  $x$  est unique si on lui impose d'être *propre*, c'est-à-dire si l'on interdit les séquences infinies de chiffres 2 consécutifs<sup>13</sup>.

---

13. Dans le cas contraire,  $x = 1/3$  par exemple s'écrit  $0.1000\dots$  en base 3 mais aussi  $0.0222\dots$ .

On définit l'ensemble  $C$  comme le sous-ensemble de  $[0, 1[$  dont le développement en base 3 ne comporte pas le chiffre 1.

**Question 1** Montrer que l'ensemble  $C$  est négligeable. (Solution p. 54.)

**Question 2** Montrer néanmoins que  $C$  n'est pas dénombrable, mais a la "puissance du continu" (qu'il peut être mis en bijection avec  $\mathbb{R}$  ou avec un intervalle de longueur non vide de  $\mathbb{R}$ , ce qui revient au même). (Solution p. 55.)

## Solutions

### Exercices essentiels

**Fonction affine** Nous déduisons de l'indication que

$$|S(f, \mathcal{D}) - A| = \left| \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha t_i + \beta)(x_{i+1} - x_i) - \alpha \left( \frac{x_{i+1}^2}{2} - \frac{x_i^2}{2} \right) - \beta(x_{i+1} - x_i) \right|$$

et donc que

$$|S(f, \mathcal{D}) - A| \leq \sum_{i=0}^{m-1} |\alpha| \left| t_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right| (x_{i+1} - x_i).$$

Dans les cas où  $a = b$  ou  $\alpha = 0$ , il est évident que  $f$  est intégrable au sens de Riemann et d'intégrale  $A$  car le membre de droite de l'inégalité ci-dessus est nul. Dans le cas contraire, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut poser

$$\delta := \frac{2\varepsilon}{|\alpha|(b-a)} > 0.$$

Si la subdivision  $\mathcal{D}$  est telle que pour tout  $i \in \{0, \dots, m-1\}$  on ait  $\ell([x_i, x_{i+1}]) = x_{i+1} - x_i < \delta$ , alors

$$\left| t_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right| < \frac{\delta}{2}$$

et par conséquent

$$|S(f, \mathcal{D}) - A| \leq \sum_{i=0}^{m-1} |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|(b-a)} (x_{i+1} - x_i) = \frac{\varepsilon}{(b-a)} \sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i) = \varepsilon.$$

**Ensembles finis** Soit  $E = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{R}$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , la collection (finie) d'intervalles  $\{[x_i, x_i]\}_{i=1}^m$  recouvre  $E$  et la somme des longueurs de ces intervalles est nulle, donc  $E$  est négligeable.

**Intervalles négligeables** Pour démontrer que l'ensemble  $[a, b]$  n'est pas négligeable quand  $a < b$ , nous allons établir que si la collection dénombrable d'intervalles  $I_i$  recouvre  $[a, b]$ , alors la somme des longueurs des  $I_i$  est supérieure ou égale à  $b - a > 0$  et donc l'intervalle n'est pas négligeable.

Prouvons dans un premier temps ce résultat quand la collection des  $I_i$  est finie. Considérons une telle collection  $\{I_i\}_{i=1}^m$  ; on peut supposer que les  $I_i$  sont rangés “de la gauche vers la droite”, c'est-à-dire que si  $i < j$ , il existe un  $x \in I_i$  tel que  $x \leq y$  pour tout  $y \in I_j$  et que tous les  $I_i$  intersectent  $[a, b]$ . Alors, la collection  $\{J_i\}_{i=1}^m$  définie par  $J_1 = I_1$ , puis  $J_{i+1} = I_{i+1} \setminus (\cup_{j=1}^i I_j)$  est composée d'intervalles disjoints recouvrant  $[a, b]$ , telle que  $\ell(J_i) \leq \ell(I_i)$  pour tout  $i$ . Notons  $x_i$  et  $x_{i+1}$  les extrémités de gauche et de droite de  $J_i$  respectivement ; on a alors

$$\sum_{i=1}^m \ell(I_i) \geq \sum_{i=1}^m \ell(J_i) = \sum_{i=1}^m (x_{i+1} - x_i) = x_{m+1} - x_1 \geq b - a.$$

Considérons désormais une collection d'intervalles  $\{I_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  recouvrant  $[a, b]$ . Si  $\sum_{i=1}^{+\infty} \ell(I_i) \leq \varepsilon$ , alors pour tout  $\varepsilon' > 0$ , il existe une collection d'intervalles ouverts  $\{J_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tels que  $I_i \subset J_i$  et  $\ell(J_i) \leq \ell(I_i) + \varepsilon'/2^i$  et donc tels que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \ell(J_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \ell(I_i) + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon'}{2^i} \leq \varepsilon + \varepsilon'.$$

Or l'ensemble  $[a, b]$  étant fermé et borné, il est compact ; les  $\{J_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  forment un recouvrement de ce compact par une collection d'ouverts, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini  $\{K_j\}_{j=1}^m$ . En utilisant le résultat précédemment établi pour de telles collections finies, on en déduit que

$$b - a \leq \sum_{j=1}^m \ell(K_j) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \ell(J_i) \leq \varepsilon + \varepsilon',$$

soit comme  $\varepsilon' > 0$  est arbitraire,  $b - a \leq \varepsilon$ .

**Sous-ensemble d'un ensemble négligeable** Si l'ensemble  $A$  est négligeable, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un recouvrement de  $A$  par une collection dénombrable d'intervalles  $I_i$  tels que  $\sum_i \ell(I_i) \leq \varepsilon$ . La même collection d'intervalles recouvre tout sous-ensemble  $B$  de  $A$  donc un tel ensemble  $B$  est également négligeable.

**Union d'ensembles négligeables** L'union d'une collection dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable, donc en particulier l'union de deux ou d'un nombre fini d'ensembles négligeables est négligeable. Soient  $A_0, A_1, \dots, A_i, \dots$  une collection dénombrable d'ensembles négligeables. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une collection dénombrable  $\{I_{ij}\}_j$  d'intervalles  $I_{ij}$  tels que

$$A_i \subset \sum_j I_{ij} \text{ et } \sum_j \ell(I_{ij}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

Alors la collection des  $\{I_{ij}\}_{ij}$  est dénombrable, recouvre  $\cup_i A_i$  et

$$\sum_i \sum_j \ell(I_{ij}) \leq \sum_i \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \leq \varepsilon.$$

Par contre, l'union d'une collection arbitraire d'ensembles négligeables n'est pas nécessairement négligeable. Par exemple, la collection des singletons  $\{\{x\} \mid x \in [0, 1]\}$  est composée d'ensembles négligeables, mais son union  $[0, 1]$  n'est pas négligeable (cf. exercice "Intervalle négligeables" (p. 8)).

**Fonction continue nulle presque partout** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et nulle presque partout. Soit  $x \in \mathbb{R}$ ; s'il existe une suite de  $x_k \in \mathbb{R}$  tels que  $f(x_k) = 0$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x$ , alors par continuité  $f(x) = 0$ . Mais dans le cas contraire, c'est qu'il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $y \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ , on ait  $f(y) \neq 0$ . Or  $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$  n'est pas négligeable (cf. exercice "Intervalle négligeables" (p. 8)), donc l'ensemble  $\{t \in \mathbb{R} \mid f(t) \neq 0\}$  n'est pas négligeable (cf. exercice "Sous-ensemble d'un ensemble négligeable" (p. 8)) ce qui contredit l'hypothèse que  $f$  est nulle presque partout.

**Etre non nul** L'ensemble des réels  $x$  ne vérifiant pas la propriété " $x$  est non-nul" est composé de l'unique réel 0. Le singleton  $\{0\}$  est (fini donc) négligeable, par conséquent la propriété initiale est bien vérifiée presque partout.

**Etre irrationnel** L'ensemble des réels  $x$  ne vérifiant pas la propriété " $x$  est irrationnel" est l'ensemble des rationnels  $\mathbb{Q}$ . Cet ensemble est dénombrable, par conséquent la propriété initiale est bien vérifiée presque partout.

**L'intégrale de Lebesgue est absolue** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable (au sens de Lebesgue), alors  $|f|$  est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil; les fonctions  $|f|$  et  $||f|| = |f|$  sont donc intégrables au sens de Henstock-Kurzweil, donc  $|f|$  est également intégrable (au sens de Lebesgue).

**Intégration de  $x \mapsto e^x$**  La fonction  $x \in [0, 1] \mapsto e^x \in \mathbb{R}$  est continue donc intégrable. De plus,  $(e^x)' = e^x$ , donc par le théorème fondamental du calcul (p. 17), on a

$$\int_0^1 e^x dx = [x \mapsto e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

**Intégration par parties** Si les fonctions  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sont dérivables, le produit  $fg$  est dérivable et  $(fg)' = f'g + fg'$ . Par hypothèse les

fonctions  $f'g$  et  $fg'$  sont intégrables, donc par linéarité de l'intégrale (p. 17),  $(fg)'$  également et

$$\int_a^b (fg)'(t) dt = \int_a^b f(t)g'(t) dt + \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

Or, par le théorème fondamental du calcul (p. 32), on a

$$\int_a^b (fg)'(t) dt = [fg]_a^b,$$

ce qui fournit l'égalité recherchée.

**Ordre des bornes et additivité** Quand  $c \leq b \leq a$ , on peut utiliser le théorème d'additivité (p. 19) directement, en faisant l'hypothèse que  $f$  est intégrable sur  $[c, b]$  et sur  $[b, a]$ , pour en conclure qu'elle l'est donc sur  $[a, c]$  et que

$$\int_c^a f(t) dt = \int_c^b f(t) dt + \int_b^a f(t) dt,$$

soit

$$-\int_c^a f(t) dt = -\int_c^b f(t) dt - \int_b^a f(t) dt,$$

ce qui équivaut, avec la convention des bornes inversées (p. 13), à

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt.$$

Si  $a \leq c \leq b$  et si l'on suppose que  $f$  est intégrable sur  $[a, c]$  et sur  $[c, b]$ , on établit que  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  et que

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt,$$

ou encore

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt - \int_c^b f(t) dt,$$

soit avec la convention des bornes inversées (p. 13),

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt,$$

**Lemme M-L** L'inégalité triangulaire fournit

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Comme pour tout  $t \in [a, b]$ , on a  $|f(t)| \leq M$ , par croissance (p. 21) et linéarité (p. 17) de l'intégrale, on a donc

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b M dt = M \int_a^b dt = M(b-a).$$

**Fonctions égales sur un ensemble co-dénombrable** Par linéarité de l'intégrale (p. 17), il suffit d'établir que si  $h = g - f$  est nulle sauf sur l'ensemble dénombrable  $A = \{a_0, a_1, \dots\}$  de  $[a, b]$ , alors elle est intégrable et d'intégrale nulle. Soit  $\varepsilon > 0$ ; considérons la jauge de  $[a, b]$  définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} ]a_i - \varepsilon/(2^{i+2}|h(a_i)|), t_i + \varepsilon/(2^{i+2}|h(a_i)|)[ & \text{si } t = t_i \in A, \\ \mathbb{R} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si la subdivision pointée  $\mathcal{D}$  de  $[a, b]$  est subordonnée à  $\gamma$  et si  $(t, I) \in \mathcal{D}$ , on a donc soit  $t = a_i \in A$  auquel cas

$$|h(t)\ell(I)| \leq |h(a_i)| \times 2 \times \frac{\varepsilon}{2^{i+2}|h(a_i)|} = \frac{\varepsilon}{2^{i+1}},$$

soit  $t \notin A$  auquel cas  $h(t) = 0$  et donc  $h(t)\ell(I) = 0$ . Dans tous les cas, la somme de Riemann  $S(h, \mathcal{D})$  vérifie

$$|S(h, \mathcal{D}) - 0| \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon.$$

La fonction  $h$  est donc intégrable et d'intégrale nulle.

**Continuité des intégrales indéterminées simplifiée** Supposons que  $|f| \leq M$  sur  $[a, b]$ . Alors, si

$$g(x) := \int_c^x f(t) dt$$

et  $h \geq 0$ , l'additivité de l'intégrale (p. 19), l'inégalité triangulaire (p. 22) et la croissance de l'intégrale (p. 21) nous fournissent

$$|g(x+h) - g(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t)| dt \leq \int_x^{x+h} M dt$$

et donc  $|g(x+h) - g(x)| \leq Mh$ . Un raisonnement similaire pour  $h \leq 0$  nous fournit dans tous les cas  $|g(x+h) - g(x)| \leq M|h|$ . La fonction  $g$  est donc continue.

**Limite d'intégrale** D'après un exercice précédent (p. 16), la fonction  $f$  nulle en 0 et égale à  $1/\sqrt{t}$  sur  $]0, 1]$  est intégrable. Comme

$$\int_0^0 f(t) dt = 0,$$



par continuité des intégrales indéterminées (p. 25), on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\varepsilon f(t) dt = \int_0^0 f(t) dt = 0.$$

**Dérivabilité presque partout** On peut par exemple considérer la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1/2, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie facilement que

$$g(x) := \int_0^x f(t) dt = \max(0, x - 1/2)$$

et cette fonction n'est pas dérivable en  $x = 1/2$ .

**Normalisation des fonctions** Sauf pour  $t = a$  ou  $t = b$ , on a pour tout  $h$  suffisamment petit

$$\int_{t-h}^{t+h} f(x) dx = \int_a^{t+h} f(x) dx - \int_a^{t-h} f(x) dx,$$

donc en posant

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} f(x) dx &= \frac{F(t+h) - F(t-h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} + \frac{1}{2} \frac{F(t-h) - F(t)}{(-h)}. \end{aligned}$$

Or d'après le théorème de dérivation des intégrales indéterminées (p. 26),  $F$  est dérivable en presque tout  $x$  et de dérivée  $f(x)$ . On a donc en un tel point

$$g(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} f(x) dx = \frac{1}{2} F'(x) + \frac{1}{2} F'(x) = f(x).$$

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont donc égales presque partout.

**Changement de variables simplifié** La fonction  $f$  étant continue sur  $[c, d]$ , elle y admet une primitive  $h$ . Par la règle de dérivation en chaîne, la fonction  $t \in [a, b] \mapsto h(g(t))$  a pour dérivée  $h'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$ . Avec les hypothèses supplémentaires, cette fonction est continue, comme composée et produit de fonctions continues, donc intégrable sur  $[a, b]$ . Par le théorème fondamental du calcul (p. 32), on a donc

$$\int_a^b f(g(t))g'(t) dt = [h \circ g]_a^b = h(g(b)) - h(g(a)).$$

D'autre part, comme  $f$  est continue et a  $h$  comme primitive,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} h'(x) dx = [h]_{g(a)}^{g(b)} = h(g(b)) - h(g(a));$$

les deux intégrales sont donc égales.

**Changement de variable  $x = t^2$**  La fonction  $g : t \in [0, 1] \rightarrow t^2 \in \mathbb{R}$  vérifie les hypothèses du théorème de changement de variable (p. 26) avec  $g([0, 1]) = [0, 1]$ . En effet  $g$  est continue en 0 et en 1 et  $g'$  est définie sur  $]0, 1[$ , de valeur  $g'(t) = 2t$ ; elle y est donc continue et ne s'y annule pas. Par conséquent,

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_{g(0)}^{g(1)} f(x) dx = \int_0^1 f(t^2) \times (2t) dt = 2 \int_0^1 t f(t^2) dt.$$

**Changement de variable  $x = \sqrt{t}$**  L'expression suggère que l'on utilise le changement de variable  $x = \sqrt{t}$ , et la fonction  $g : t \in [0, 1] \mapsto \sqrt{t} \in \mathbb{R}$  est un changement de variable valide (p. 26) avec  $g([0, 1]) = [0, 1]$  : elle est continue en 0 et 1, dérivable sur  $]0, 1[$ , de dérivée  $g'(t) = 1/2\sqrt{t}$  qui est continue et ne s'annule pas sur  $]0, 1[$ . Par contre, l'application du changement de variable suppose de faire apparaître le terme  $g'(t)dt$ . On écrit donc

$$\int_0^1 f(\sqrt{t}) dt = \int_0^1 (2\sqrt{t})f(\sqrt{t}) \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \int_{g(0)}^{g(1)} 2xf(x)dx = 2 \int_0^1 xf(x)dx.$$

**Prendre la tangente** On applique le théorème de changement de variable (p. 26) avec à la fonction

$$g : t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \begin{cases} -\infty & \text{si } x = -\pi/2, \\ \tan t & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2, \\ +\infty & \text{si } x = \pi/2. \end{cases}$$

Cette fonction est bien continue en  $-\pi/2$  et  $\pi/2$ , dérivable sur  $] -\pi/2, \pi/2[$ , de dérivée

$$g'(t) = (\tan t)' = 1 + \tan^2 t,$$

qui est continue et ne s'annule pas. Par conséquent, comme  $g([-\pi/2, \pi/2]) = [-\infty, \infty]$ , une fonction  $f : [-\infty, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  (ou de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ) est intégrable si et seulement si

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(g(t))g'(t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\tan t)(1 + \tan^2 t) dt$$

est intégrable et dans ce cas, les deux intégrales sont égales.

## Méthode des trapèzes

**Question 1** L'aire du trapèze considéré est identique à l'aire du rectangle de largeur  $(b - a)/m$  et dont la hauteur est la moyenne de  $f(a + i(b - a)/m)$  et  $f(a + (i + 1)(b - a)/m)$ , soit

$$\frac{b - a}{m} \left( \frac{f\left(a + i \frac{b-a}{m}\right) + f\left(a + (i + 1) \frac{b-a}{m}\right)}{2} \right).$$

La méthode des trapèzes approxime donc l'aire sous le graphe de la fonction  $f$  en approximant cette région par  $m$  trapèzes.

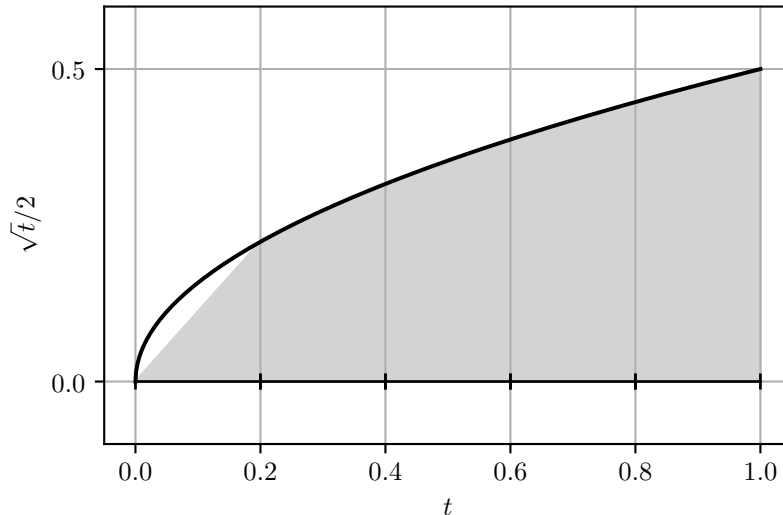


FIGURE 7 – L'aire de la zone grisée correspond l'estimation de l'intégrale de  $f : t \in [0, 1] \mapsto \sqrt{t}/2$  par la méthode des trapèzes pour la subdivision  $\mathcal{D} = \{[0, 0.2], \dots, [0.8, 1]\}$ .

**Question 2** On peut constater en réarrangeant les termes de la somme  $S_m$  que

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f\left(a + i \frac{b-a}{m}\right) + f\left(a + (i+1) \frac{b-a}{m}\right)}{2} \\ &= \frac{b-a}{m} \left( \frac{1}{2} f(a) + \sum_{i=1}^{m-1} f\left(a + i \frac{b-a}{m}\right) + \frac{1}{2} f(b) \right), \end{aligned}$$

soit, en introduisant la subdivision pointée

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_m^* &= \left\{ \left( f(a), \left[0, \frac{b-a}{2m}\right] \right), \left( f\left(a + \frac{b-a}{m}\right), \left[\frac{b-a}{2m}, \frac{3(b-a)}{2m}\right] \right), \right. \\ &\quad \dots, \\ &\quad \left( f\left(a + \frac{(m-1)(b-a)}{m}\right), \left[(2(m-2)+1) \frac{b-a}{2m}, (2(m-1)+1) \frac{b-a}{2m}\right] \right), \\ &\quad \left. \left( f(b), \left[b - \frac{b-a}{2m}, b\right] \right) \right\} \end{aligned}$$

que  $S_m = S(f, \mathcal{D}_m^*)$ . Comme  $\max \{\ell(I) \mid (t, I) \in \mathcal{D}_m^*\} = (b-a)/m$ , quel que soit  $\delta > 0$ , ce maximum tend vers 0 quand  $m \rightarrow +\infty$ . Par conséquent, si  $f$  est intégrable au sens de Riemann,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} S(f, \mathcal{D}_m^*) = \int_a^b f(t) dt.$$

## Fonctions non intégrables

**Question 1** Supposons que  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable. La valeur

$$I := \int_a^{+\infty} |f(t)| dt$$

est bien définie (et finie) car  $f$  est intégrable. Par restriction (p. 20), pour tout  $x \in [a, +\infty[$ , les intégrales

$$\int_a^x |f(t)| dt \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} |f(t)| dt$$

existent et sont positives par croissance de l'intégrale (p. 21); par additivité (p. 19), comme

$$\int_a^x |f(t)| dt + \int_x^{+\infty} |f(t)| dt = \int_a^{+\infty} |f(t)| dt$$

on a pour tout  $x \in [a, +\infty[$

$$\int_a^x |f(t)| dt \leq \int_a^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty.$$

L'hypothèse de départ ( $f$  intégrable) est donc incompatible avec la propriété

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = +\infty.$$

**Question 2** Par le théorème fondamental du calcul, pour tout  $x \in [1, +\infty[$ , on a

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = [\ln]_1^x = \ln x.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dx}{x} = +\infty$$

et la fonction  $x \mapsto 1/x$  n'est pas intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

**Question 3** Soit  $x \in [1, +\infty[$  et soit  $n_x$  le plus grand entier tel que  $2\pi(n_x + 3/4) \leq x$ , soit

$$n_x := \left\lfloor \frac{x}{2\pi} - \frac{3}{4} \right\rfloor.$$

Par additivité (p. 19) et croissance de l'intégrale (p. 21), on a

$$\begin{aligned} \int_1^x \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt &\geq \sum_{i=1}^{n_x} \int_{2\pi(i+1/4)}^{2\pi(i+3/4)} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \\ &\geq \sum_{i=1}^{n_x} \int_{2\pi(i+1/4)}^{2\pi(i+3/4)} \left| \frac{\sin t}{2\pi(i+3/4)} \right| dt \\ &\geq \sum_{i=1}^{n_x} \frac{1}{2\pi(i+3/4)} \int_{2\pi(i+1/4)}^{2\pi(i+3/4)} \sin t dt \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_x} \frac{1}{i+3/4} [-\cos]_{2\pi(i+1/4)}^{2\pi(i+3/4)} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \sum_{i=1}^{n_x} \frac{1}{i+3/4}. \end{aligned}$$

Comme  $n_x \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$  et que la série des  $1/(i+3/4)$  tend vers  $+\infty$ , la fonction  $x \mapsto (\sin x)/x$  n'est pas intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

## L'intégrale de Riemann est absolue

Nous exploitons le critère de Lebesgue pour l'intégrabilité au sens de Riemann (p. 9) : si  $f$  est intégrable au sens de Riemann, elle est bornée – et donc  $f$  également – et continue presque partout – et donc  $|f|$  également ( $|f|$  est continue en tout point où  $f$  est continue comme composée de fonctions continues en ce point). Par conséquent,  $|f|$  est intégrable au sens de Riemann.

## Continuité presque partout

**Question 1** Une fonction égale presque partout à une fonction continue n'est pas nécessairement presque partout continue. La fonction de Dirichlet de la question 2 (p. 43) fournit un bon exemple : elle est égale à la fonction identiquement nulle – qui est continue – sur tout  $\mathbb{R}$  à l'exception des rationnels et l'ensemble des rationnels est négligeable, car dénombrable (p. 9). Mais elle n'est continue en aucun point, car tout nombre rationnel est limite de nombres irrationnels et réciproquement.

La réciproque n'est pas vérifiée non plus : la fonction de Heaviside  $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – ou fonction indicatrice de  $[0, +\infty[$ , définie par

$$e(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est continue presque partout (sauf en 0). Mais aucune modification de cette fonction sur un ensemble négligeable ne pourra la rendre continue en 0 ; en effet, comme aucun intervalle de la forme  $]-\varepsilon, 0[$  ou  $]0, \varepsilon[$  n'est négligeable, après modification de  $f$  sur un ensemble négligeable, la fonction  $g$  qui en résulte est encore égale à  $f$  sur une suite de valeurs  $x_k < 0$  tendant vers 0 et sur une suite de valeurs  $y_k > 0$  tendant vers 0. On a donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g(y_k) - g(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(y_k) - f(x_k) = 1.$$

La fonction  $g$  ne peut donc pas être continue en 0.

**Question 2** La fonction de Dirichlet  $1_{\mathbb{Q}}$  sur  $[0, 1]$  est égale presque partout à la fonction identiquement nulle qui est continue, elle est donc intégrable au sens de Lebesgue. Mais elle n'est pas continue presque partout, donc elle n'est pas intégrable au sens de Riemann.

## Poussière de Cantor

**Question 1** L'ensemble  $C$  peut être recouvert par la collection ne contenant que l'intervalle  $\mathcal{A}_0 = [0, 1]$ , ou par la collection d'intervalles

$$\mathcal{A}_1 = \{[0, 1/3[, [2/3, 1]\}$$

qui contient exactement les nombres  $x$  de  $[0, 1]$  dont le premier chiffre du développement propre en base 3 est 0 ou 2 :

$$x = 0.0 \dots \text{ ou } x = 0.2 \dots$$

On a clairement

$$\sum_{I \in \mathcal{A}_1} \ell(I) = \ell([0, 1]) = 1 \text{ et } \sum_{I \in \mathcal{A}_1} \ell(I) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

On peut poursuivre le procédé en considérant la collection  $\mathcal{A}_n$  des  $2^n$  intervalles dont l'union  $C_n$  forme l'ensemble des nombres  $x$  dont les  $n$  premiers chiffres du développement décimal propre sont 0 ou 2, ensemble qui contient  $C$ .



FIGURE 8 – Représentation de  $C_n$  pour  $n \in \{0, 1, \dots, 5\}$ .

On peut de plus se convaincre par récurrence que

$$\sum_{I \in \mathcal{A}_n} \ell(I) = 2^n \times \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Comme  $(2/3)^n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , nous avons établi que  $C$  est négligeable.

**Question 2** L'opération

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i 3^{-i} \in C \mapsto y = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i 2^{-i} \in [0, 1[ \quad \text{où} \quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } a_i = 0, \\ 1 & \text{si } a_i = 2. \end{cases}$$

est une bijection de  $C$  sur  $[0, 1[$ , ce qui montre que  $C$  a la puissance du continu (et donc n'est pas dénombrable).

## Références

- Burk, Frank E. 2007. *A Garden of Integrals*. Washington, DC: Mathematical Association of America (MAA).
- Swartz, Charles. 2001. *Introduction to Gauge Integrals*. Singapore: World Scientific.