

# Calcul Différentiel I

STEP, MINES ParisTech

5 mars 2021 (#72befad)

**Question 1** Déterminer le gradient et la matrice jacobienne de la fonction  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_1 x_2 \in \mathbb{R}$ .

**Question 2** Déterminer en tout point la matrice jacobienne de l'application  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x_2 - x_1^2, x_3 - x_2^2) \in \mathbb{R}^2$ .

**Question 3** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction dérivable. Dans l'expression  $df(x) \cdot h$ , à quels ensembles appartiennent  $df(x)$  et  $h$ ? Que vaut l'expression en fonction de  $f'(x)$ ?

**Question 4** Soit  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow ]0, +\infty[$  une fonction différentiable. Calculer le gradient de  $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln p(x) \in \mathbb{R}$  en fonction du gradient de  $p$ .

**Question 5** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction différentiable, bijective et dont l'inverse  $g := f^{-1}$  est également différentiable. Déterminer l'expression de la différentielle de  $g$  en  $y \in \mathbb{R}^n$  en fonction de la différentielle de  $f$ .

**Question 6** En exploitant la loi des gaz parfaits  $PV = nRT$ , donner une expression de  $dT$  en fonction de  $dP$  et  $dV$  ( $n$  et  $R$  sont des constantes).

**Question 7** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $f(0, 0) = 0$  et  $\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1)$  en tout point. Déterminer la valeur de  $f(x_1, x_2)$  en tout point.

**Question 8** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction différentiable et vérifiant  $\|df(x_1, x_2)\| \leq 1$  quand  $|x_1| \geq 1$  ou  $|x_2| \geq 1$ . Quelle(s) inégalité(s) êtes-vous en mesure de prouver?

- ☐ A:  $\|f(1, 1) - f(-1, -1)\| \leq 2\sqrt{2} \approx 2.83$
- ☐ B:  $\|f(1, 1) - f(-1, -1)\| \leq 4$
- ☐ C:  $\|f(1, 1) - f(-1, -1)\| \leq \pi\sqrt{2} \approx 4.44$