

# Calcul Intégral IV

STEP, MINES ParisTech

5 mars 2021 (#72befad)

**Question 1 (réponses multiples)** Soit  $X = \mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ , l'ensemble des parties de  $X$ . On définit pour tout  $A \in \mathcal{A}$  la grandeur  $\mu(A)$  comme le diamètre de  $A$  :

$$\mu(A) := \text{diam}(A) := \sup \{ \|x - y\| \mid (x, y) \in A \times A \} \in [0, +\infty].$$

Est-ce que  $\mu$  est une mesure sur  $(X, \mathcal{A})$  ?

- ☐ A : non, car  $\mathcal{A}$  n'est pas une tribu,
- ☐ B : non, car  $\mu$  n'est pas nulle en 0,
- ☐ C : non, car  $\mu$  n'est pas  $\sigma$ -additive,
- ☐ D : oui.

**Question 2 (réponses multiples)** Si  $\mu$  et  $\nu$  sont des mesures sur le même espace mesurable  $(X, \mathcal{A})$ ,  $\alpha \geq 0$  et  $f : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$  est continue, alors

- ☐ A :  $\mu + \nu$  est une mesure,
- ☐ B :  $\alpha\mu$  est une mesure,
- ☐ C :  $f \circ \mu$  est une mesure.

**Question 3** Soit  $c$  la mesure de comptage sur  $\mathbb{R}$  (muni de la tribu  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ). Deux fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont égales  $c$ -presque partout si et seulement si :

- ☐ A :  $f$  et  $g$  sont identiques,
- ☐ B :  $f$  et  $g$  diffèrent au plus en un nombre fini de points,
- ☐ C : la longueur de  $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\}$  est nulle,
- ☐ D :  $f$  et  $g$  sont en fait égales  $c$ -presque partout sans condition.

**Question 4** La fonction caractéristique de  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  est une fonction étagée

- ☐ A : oui,
- ☐ B : non.
- ☐ C : ça dépend (question ambiguë).

**Question 5** Si  $\mathcal{A}$  est une tribu de  $\mathbb{R}$  et la fonction  $h : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, +\infty]$  est continue, alors  $h$  est  $\mathcal{A}$ -mesurable

- ☐ A : oui,
- ☐ B : non, pas nécessairement.

**Question 6 (réponse multiple)** L'intégrale d'une fonction  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  (positive) mesurable :

- ☐ A : est toujours définie,
- ☐ B : est toujours positive,
- ☐ C : ne peut être infinie que si  $f$  prend des valeurs infinies,
- ☐ D : est infinie dès que  $f$  prend des valeurs infinies.