Examen – Calcul Différentiel, Intégral et Stochastique

STEP, MINES ParisTech*

5 mars 2021 (#72befad)

Table des matières

L'examen comporte 3 exercices indépendants notés comme suit :

Intitulé de l'exercice	Barême	Hors barême
Calcul Intégral	20 pts	+4 pts
Calcul Différentiel	20 pts	+6 pts
Probabilités	20 pts	+8 pts

Utilisez un jeu de copies différent pour chaque exercice et indiquez l'intitulé de l'exercice en en-tête de chaque copie.

*Ce document est un des produits du projet boisgera/CDIS, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS).

Calcul intégral

Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs.

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ 0 \leq a_k < +\infty \ \text{ et } \ 0 \leq b_k < +\infty.$$

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de valeurs définie par $x_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$x_{2k+1} = x_{2k} + a_k \ \text{ et } \ x_{2k+2} = x_{2k+1} + b_k.$$

($x_0 = 0$, $x_1 = a_0$, $x_2 = a_0 + b_0$, $x_3 = a_0 + b_0 + a_1$, $x_4 = a_0 + b_0 + a_1 + b_1$, etc.).
On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_{2k} \leq x < x_{2k+1}, \\ -1 & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_{2k+1} \leq x < x_{2k+2}, \\ \ \ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

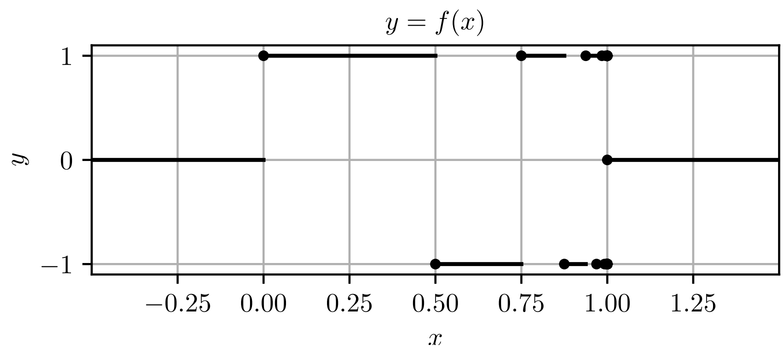


FIGURE 1 – Graphe de f pour $a_k = 2^{-2k-1}$ et $b_k = 2^{-2k-2}$.

Préambule

On s'intéresse dans un premier temps à la restriction de la fonction f à l'intervalle $[0, x_n]$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ donné.

1. Soit $\delta > 0$. Montrer que la fonction γ qui a tout $t \in [0, x_n]$ associe l'ensemble
$$\gamma(t) =]t - \delta/2, t + \delta/2[$$
est une jauge sur $[0, x_n]$.
2. Sommes-nous certains qu'il existe une subdivision pointée $\mathcal{D}$ de $[0, x_n]$ subordonnée à la jauge γ ? En construire une le cas échéant.
3. Quelle est la valeur de l'intégrale de f sur $[0, x_n]$? Justifier que f est bien intégrable au sens de Henstock-Kurzweil sur $[0, x_n]$ ainsi que la valeur de cette intégrale.

4. Soit $\mathcal{D}$ une subdivision pointée de $[0, x_n]$ subordonnée à γ. Montrer que [1]

$$\left| S(f, \mathcal{D}) - \int_0^{x_n} f(x)\, dx \right| \leq 2(n+1)\delta.$$

Intervalle borné

On suppose dans cette section que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 2^{-2k-1}$ et $b_k = 2^{-2k-2}$.

5. Calculer x_k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la limite $S := \lim_{k \to +\infty} x_k$ existe et est finie (on donnera sa valeur).
6. Montrer que la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, x_n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil. En déduire que la fonction f est mesurable.
7. Montrer que pour tout couple (a, b) tel que $0 \leq a \leq b \leq +\infty$, l'intervalle $[a, b[$ est mesurable. Quelles sont les ensembles $f^{-1}(A)$ possibles quand A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$? En déduire la mesurabilité de f par une méthode alternative à la question précédente.
8. Relier pour $n \in \mathbb{N}$ les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int_0^{x_n} f(x)\, dx.$$

   Est-ce que la fonction f est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil ? Justifier. Le cas échéant, calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

9. Est-ce que la restriction de f à $[0, S]$ est intégrable au sens de Riemann ?

1. **Indication :** on pourra considérer toutes les paires $(t, [a, b]) \in \mathcal{D}$ intervenant dans la somme de Riemann $S(f, \mathcal{D})$ puis majorer

$$\left| f(t)(b-a) - \int_a^b f(x)\, dx \right|$$

en distinguant les intervalles $[a, b]$ qui contiennent au moins un x_k ($k \in \{0, \ldots, n\}$) et ceux qui n'en contiennent pas.

Calcul Différentiel

On définit la fonction distance $d_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ à un ensemble A non-vide de $\mathbb{R}^n$ par

$$d_A(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$. Lorsqu'un point $a \in A$ vérifie $\|x - a\| = d_A(x)$, on dit que a est un *projeté* de x sur A. On notera l'ensemble des projetés d'un point $x \in \mathbb{R}^n$ sur A comme

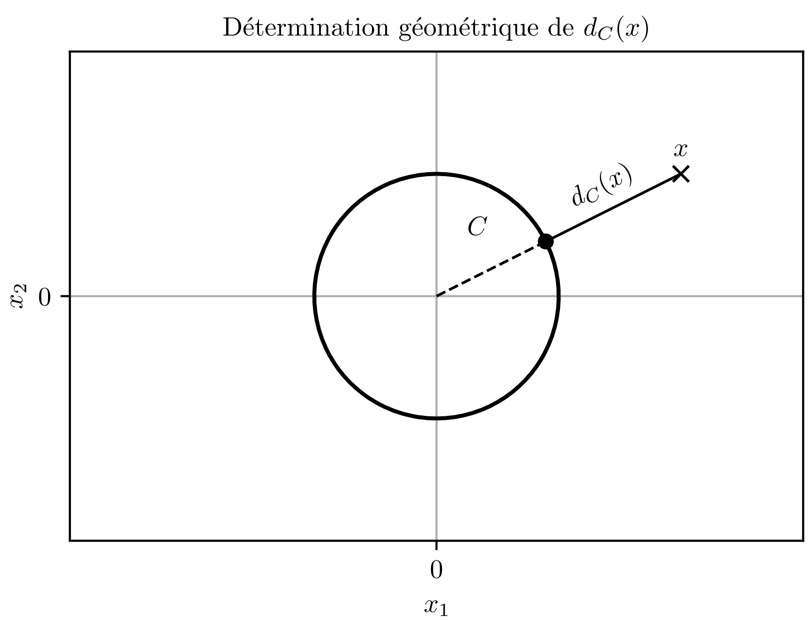
$$\Pi_A(x) = \{a \in A \mid \|x - a\| = d_A(x)\}.$$

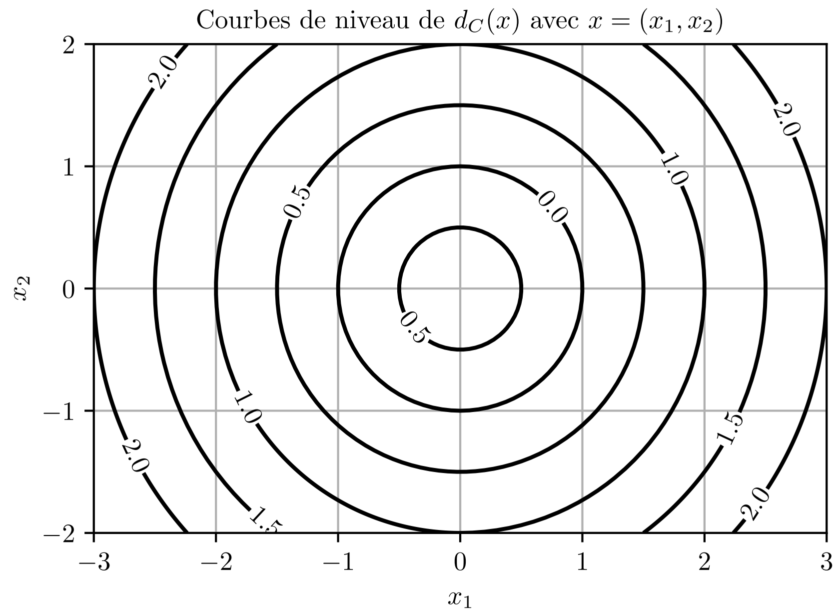
Préliminaires dans $\mathbb{R}^2$

Notons C le cercle de $\mathbb{R}^2$ centré en $(0, 0)$ et de rayon 1 défini par

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}.$$

Dans $\mathbb{R}^2$, on a $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.





1. Justifier que pour $x \in \mathbb{R}^2$,

$$d_C(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \|x\| - 1 & \text{si } \|x\| \geq 1 \\ 1 - \|x\| & \text{si } \|x\| < 1 \end{array} \right. .$$

   Expliciter $\Pi_C(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}^2$.

2. Montrer que d_C n'est pas différentiable en $x = (0,0)$. En étudiant le rapport $\frac{d_C(x+tx)}{t}$ lorsque t tend vers 0, montrer que d_C n'est pas non plus différentiable en $x \in C$.

On définit maintenant $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} d_C(x) & \text{si } \|x\| \geq 1 \\ -d_C(x) & \text{si } \|x\| < 1 \end{array} \right.$$

3. Expliciter f. Montrer que f est deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et calculer son gradient ∇f et sa hessienne H_f.

4. Calculer $\|\nabla f\|$. En déduire que f est 1-lipschitzienne, c'est-à-dire que

$$|f(x_a) - f(x_b)| \leq \|x_a - x_b\| \qquad \forall (x_a, x_b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ .$$

Cadre général

5. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$d_A(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \overline{A}\ .$$

6. En se ramenant à un compact, montrer que si A est fermé alors pour tout x, $\Pi_A(x)$ est non vide. Montrer de plus que

$$\forall x \in A\ ,\ \Pi_A(x) = \{x\} \qquad \text{et} \qquad \forall x \notin A\ ,\ \Pi_A(x) \subset \partial A\ .$$

Dans la suite, on suppose A fermé. On admet pour l'instant que le carré de la distance à A, c'est-à-dire d_A^2, est différentiable en x si et seulement si $\Pi_A(x)$ est un singleton, noté $p_A(x)$, et que les dérivées directionnelles s'écrivent alors pour $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{d_A(x+tv)^2 - d_A(x)^2}{t} = 2\left\langle v, x - p_A(x)\right\rangle\ . \tag{1}$$

Soit D_A l'ensemble des points x tel que $\Pi_A(x)$ est un singleton.

7. Soit $x \in D_A$. En utilisant l'équation (1), exprimer le gradient de d_A^2 en x en fonction de $p_A(x)$.
8. En déduire que d_A est différentiable sur $D_A \setminus \partial A$ et calculer son gradient.

La dernière question de l'exercice établit une partie de l'équivalence admise plus haut.

9. On veut montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{d_A(x+tv)^2 - d_A(x)^2}{t} = 2 \inf_{p\in\Pi_A(x)} \left\langle v, x - p\right\rangle\ .$$

Pour cela,

— Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $p \in \Pi_A(x)$,

$$\frac{d_A(x+tv)^2 - d_A(x)^2}{t} \leq 2\left\langle v, x-p\right\rangle + t\|v\|^2\ .$$

— Soit une suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{k\to+\infty} t_k = 0$, et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de A telle que $p_k \in \Pi_A(x + t_k v)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que (p_k) est bornée et en déduire qu'il existe une sous-suite $(p_{\sigma(k)})$ convergente vers $p_0 \in \Pi_A(x)$.

— Conclure en observant que

$$\frac{d_A(x+t_{\sigma(k)}v)^2 - d_A(x)^2}{t_{\sigma(k)}} \geq 2\left\langle v, x - p_{\sigma(k)}\right\rangle + t_{\sigma(k)}\|v\|^2\ .$$

10. En déduire que d_A^2 n'est pas différentiable en x si $\Pi_A(x)$ n'est pas un singleton.

Probabilités

Dans tout cet exercice, nous nous intéressons à la modélisation probabiliste de la hauteur d'eau maximale de la Seine (sur l'échelle d'Austerlitz) une année donnée. Nous la représentons par une variable aléatoire X **positive** de fonction de répartition F et de densité f.

Préliminaires – Espérance et fonction de répartition

L'objectif de cette première partie est de prouver l'équivalence

$$\begin{array}{l} \text{la variable aléatoire positive } X \text{ est intégrable } (X \in \mathcal{L}^1) \\ \Updownarrow \\ 1 - F \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+. \end{array} \tag{E}$$

1. Soit $g : (x, u) \in \mathbb{R}_+^2 \mapsto 1_{[x,+\infty[}(u)\, f(u)$.
   - i. Vérifier l'absolue intégrabilité de $g_u : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto g(x, u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$ et de $g_x : u \in \mathbb{R}_+ \mapsto g(x, u)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
   - ii. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$
   $$\int_{\mathbb{R}_+} g(x, u)\, du = 1 - F(x).$$
   - iii. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$
   $$\int_{\mathbb{R}_+} g(x, u)\, dx = u\, f(u).$$
2. En déduire l'équivalence (E).
3. Supposons $X \in \mathcal{L}^1$. Donner deux expressions équivalentes de son espérance.

Etude du maximum – Loi de Fréchet

En théorie des valeurs extrêmes, une distribution classique pour modéliser des maxima est la loi de Fréchet de paramètre $\xi > 0$, de fonction de répartition

$$F_\xi : x \in \mathbb{R} \mapsto \left| \begin{array}{ll} \exp\left\{-x^{-\xi}\right\} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Elle fait partie de la famille des lois dites *à queue épaisse*. Nous allons en étudier quelques propriétés et évaluer leur impact sur la modélisation des crues de la Seine.

On suppose dans un premier temps que X suit une loi de Fréchet de paramètre 1 (dite *Fréchet standard*) et on fixe $\alpha > 0$.

4. Quelle est la loi de X^α ?
5. On propose d'étudier l'intégrabilité de X^α.
   i. Montrer que $X^\alpha \in \mathcal{L}^1$ ssi $\alpha < 1$.
   ii. Lorsqu'elle est bien définie, calculer $\mathbb{E}\left(X^\alpha\right)$. On pourra faire appel à la fonction gamma

$$\Gamma : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt.$$

On suppose maintenant et dans tout le reste de l'exercice que X suit une loi de Fréchet de paramètre $\xi > 0$.

6. Nous allons étudier le comportement de sa queue de distribution.
   i. Donner un équivalent de $1 - F(x)$ quand $x \to +\infty$, puis calculer, pour tout $x > 1$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbb{P}\left(X > xt \mid X > t\right)$.
   ii. Rappeler une condition nécessaire et suffisante pour que $X^\alpha \in \mathcal{L}^1$.
   iii. Proposer une interprétation de ces résultats au regard du phénomène étudié.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X_n la hauteur d'eau maximale de l'année n. On suppose que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, de même loi que X.

7. On note $M_n := \max\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$ la hauteur d'eau maximale sur n années.
   i. Montrer qu'il existe $a_n > 0$ tel que $a_n\, M_n$ a la même loi que X. On dit que la loi de Fréchet est *max-stable*.
   ii. En déduire que $\mathbb{P}\left(M_n > x\right) \sim n\, \mathbb{P}\left(X > x\right)$ quand $x \to +\infty$. Interpréter ce résultat au regard du phénomène réel étudié.
8. On note $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ le cumul des hauteurs d'eau maximales sur n années. Montrer que $\mathbb{P}\left(S_n > x\right) \sim n\, \mathbb{P}\left(X > x\right)$ quand $x \to +\infty$. Comparer ce résultat au précédent et interpréter.

   Indication : on pourra procéder par récurrence sur n et faire intervenir les événements $\{X_n > (1-\delta)x\}$, $\{X_n > \delta x\}$, $\{S_{n-1} > (1-\delta)x\}$ et $\{S_{n-1} > \delta x\}$ pour $\delta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ arbitrairement petit.