Calcul Différential, Intégral et Stochastique
MINES ParisTech/UE 11 – Examen

STEP, MINES ParisTech*

3 novembre 2020, 9h–12h

Coques fines

Dans ce problème, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et d la distance associée.

$$\|(x_1, x_2)\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \;\text{ et }\; d(x,y) := \|y - x\|.$$

Le symbole U désigne le sous-ensemble du plan constitué des points d'abscisse et d'ordonnée strictement positives et C l'arc de cercle constitué des points de U à distance 1 de l'origine.

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0\} \;\text{ et }\; C = \{x \in U \mid \|x\| = 1\}.$$

On définit la projection p sur l'arc de cercle C comme la fonction :

$$p : x \in U \mapsto \frac{x}{\|x\|} \in C.$$

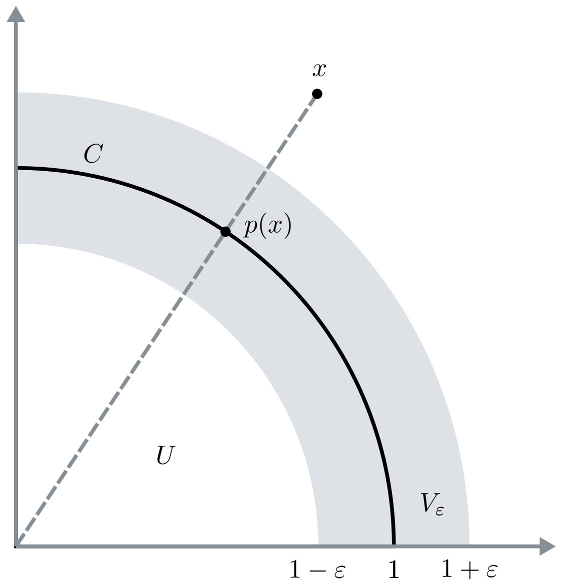
On rappelle que cette projection $p(x)$ minimise la distance entre $x \in U$ et C :

$$d(x, p(x)) = \min_{y \in C} d(x,y) =: d(x, C).$$

Finalement, pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, on définit la coque de C d'épaisseur 2ε par

$$V_\varepsilon := \{x \in U \mid d(x, C) < \varepsilon\}.$$

*Ce document est un des produits du projet boisgera/CDIS, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS).



Topologie

Question 0 Montrer que l'ensemble U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Montrer que pour tout $\varepsilon \in \,]0,1]$

$$V_\varepsilon = U \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1-\varepsilon < \|x\| < 1+\varepsilon\},$$

et en déduire que les ensembles V_ε sont également des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Calcul Différentiel

Question 1 Montrer que les dérivées partielles de la fonction $x \in U \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ existent et en déduire la valeur de

$$n(x) := \nabla \|x\|.$$

La fonction $x \in U \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ est-elle continûment différentiable ?

Question 2 Montrer l'existence et calculer la valeur de $\nabla(1/\|x\|)$ quand $x \in U$.

Question 3 Montrer que si deux fonctions $f : U \mapsto \mathbb{R}$ et $g : U \mapsto \mathbb{R}^2$ sont différentiables, alors le produit fg également. Calculer la jacobienne $J_{fg}(x)$ en fonction de $\nabla f(x)$ et $J_g(x)$.

Question 4 Montrer que p est différentiable et que

$$J_p(x) = \frac{1}{\|x\|} P(x) \text{ où } P(x) = I - n(x) \cdot n(x)^\top.$$

(I désigne la matrice identité de $\mathbb{R}^2$.)

Question 5 On pose

$$h(x) = p(x) + \varepsilon(x - p(x)).$$

Montrer que $h : V_1 \to V_\varepsilon$ est une bijection et déterminer $h^{-1}(y)$ quand $y \in V_\varepsilon$.

Question 6 Calculer $J_h(x)$ et montrer que h est un C^1-difféomorphisme.

Question 7 Etablir que

$$\det J_h(x) = \varepsilon \left(\varepsilon + \frac{1 - \varepsilon}{\|x\|} \right).$$

Calcul Intégral

Question 8 On note $S := [0, 2] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2$. Que vaut l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_S(x)\, dx$$

et pourquoi ? (On ne demande pas de justifier l'existence de l'intégrale).

Question 9 Calculer $(-t(\ln t - 1))'$ pour $t > 0$ et en déduire que

$$\int_\varepsilon^2 (-\ln t)\, dt \to -2(\ln 2 - 1) \text{ quand } \varepsilon \to 0,\ \varepsilon > 0.$$

En déduire que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ égale à $-\ln t$ quand $t \in]0, 2]$ et nulle sinon est intégrable sur $[0, 2]$. Est-ce que l'on pourrait se passer de la mention "et nulle sinon" pour répondre à cette dernière question ?

Question 10 Montrer l'existence et calculer

$$\int_0^2 \frac{dx_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

quand $x_2 \in]0, 2]$. Indication : $\partial_{x_1} \left(\ln \left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) \right) = 1/\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (la preuve de cette égalité n'est pas exigée).

Question 11 Montrer que la frontière ∂S de l'ensemble S dans $\mathbb{R}^2$ est négligeable. (On donnera ∂S sans justification.) En déduire que la fonction

$$x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left| \begin{array}{rl} 1/\|x\| & \text{si } x \in S \text{ et } x \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

est mesurable. Puis, déduire des questions précédentes son intégrabilité.

Question 12 Soit $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que $f \circ p : U \to \mathbb{R}$ soit mesurable (c'est-à-dire que son prolongement par 0 à $\mathbb{R}^2$ est mesurable). Soit $\varepsilon \in]0,1]$. Montrer que l'intégrale

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{V_\varepsilon} f(p(y))\, dy$$

est bien définie.

Question 13 Montrer que

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{V_\varepsilon} f(p(y))\, dy = \frac{1}{2} \int_{V_1} f(p(x)) \left(\varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\|x\|} \right) dx.$$

Question 14 Déduire des questions précédentes l'existence et la valeur de

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \in]0,1]}} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{V_\varepsilon} f(p(y))\, dy.$$

Probabilités — Loi de Maxwell

On désire déterminer la distribution des vitesses des molécules d'un gaz monoatomique parfait à l'équilibre (loi de Maxwell (1859)).

On représente la vitesse d'une molécule d'un gaz monoatomique parfait à l'équilibre dans un repère orthonormal par un vecteur aléatoire $V = (V_1, V_2, V_3)$. Le choix du repère étant arbitraire, il est naturel de supposer que la loi de V est invariante par rotation (autour de l'origine) et que les composantes de V sont indépendantes.

Partie 1

Soit (X, Y, Z) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ de densité $f_{(X,Y,Z)}$. Ce vecteur aléatoire est supposé invariant par rotation : il existe une fonction $\phi : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ (strictement positive) telle que

$$f_{(X,Y,Z)}(x, y, z) = \phi(x^2 + y^2 + z^2) \text{ pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Question 1 On suppose de plus les variables aléatoires X, Y et Z indépendantes. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ qui soit une densité telle que

$$f_{(X,Y,Z)}(x, y, z) = f(x)f(y)f(z) \text{ pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Montrer finalement que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Question 2 On suppose de plus que les densités marginales de X, Y et Z ainsi que la fonction ϕ sont continûment différentiables (c'est-à-dire de classe C^1). Montrer que la densité de chacune des composantes s'écrit sous la forme $f(x) = ae^{cx^2/2}$, avec a et c deux constantes réelles.

Question 3 En déduire que le vecteur (X, Y, Z) suit une loi gaussienne d'espérance l'origine dont on précisera la matrice de covariance en fonction de la constante $\sigma = 1/\sqrt{|c|}$.

Partie 2

On suppose que le vecteur aléatoire $(X, Y, Z) = V$ vérifie les hypothèses des questions précédentes.

Question 4 Calculer l'énergie cinétique moyenne d'un atome du gaz, c'est-à-dire l'espérance

$$E_c := \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}m\|V\|^2\right)$$

où m est la masse d'un atome du gaz. L'énergie cinétique moyenne d'un atome du gaz de masse m étant égale à $\frac{3}{2}kT$ où k est la constante de Boltzmann et T la température du gaz, en déduire la valeur de σ^2 en fonction de k, T et m.

Question 5 On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de loi respective $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$, alors la loi de $X + Y$ est la loi $\Gamma(a + b, \lambda)$. On rappelle également que la densité g de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ vérifie

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\lambda^a x^{a-1}e^{-\lambda x}1_{]0,+\infty[}(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

où Γ est la fonction définie par

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx \text{ pour } a \in \left]0, +\infty\right[.$$

On remarquera que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

Calculer la loi de V_1^2. En déduire la loi de $\|V\|^2$ puis la densité de $\|V\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}$. La probabilité associée est appelée loi de Maxwell.